Національна академія наук України
Інститут математики

Ісаєва Тетяна Миколаївна

УДК 511.72

Одне кодування дійсних чисел засобами нескінченного алфавіту і його застосування

01.01.06 — алгебра та теорія чисел

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2017

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі вищої математики Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова і у відділі фрактального аналізу Інституту математики НАН України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Працьовитий Микола Вікторович,
Національний педагогічний університет
імені М. П. Драгоманова,
декан Фізико-математичного факультету;
Інститут математики НАН України,
завідувач відділу фрактального аналізу.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Варбанець Павло Дмитрович,
Одеський національний університет імені
І. І. Мечникова, завідувач кафедри
комп'ютерної алгебри та дискретної
математики;

доктор фізико-математичних наук, доцент
Олійник Богдана Віталіївна,
Національний університет «Києво-могилянська
академія», завідувач кафедри математики.

Захист відбудеться «6» червня 2017 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.03 Інституту математики НАН України за адресою: 01004 м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий «28» квітня 2017 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради Максименко С. І.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Дисертаційна робота виконана в галузі метричної теорії чисел та геометрії представлення чисел рядами. Вона присвячена вивченню однопараметричної сім'ї систем аналітичного кодування (зображення) дійсних чисел з $(0;1]$ засобами нескінченного алфавіту і знакопочережних рядів та їх застосуванням у метричній та ймовірнісній теоріях чисел, теорії функцій, фрактальній геометрії та фрактальному аналізі.

Актуальність теми. Існує декілька змістовних теорій дійсних чисел, в кожній з яких число має свою математично змістовну форму існування, зручну в одному відношенні і не завжди зручну в іншому аспекті. Це класичні теорії Р. Дедекінда, Г. Кантора, К. Вейєрштрасса, Колмогорова-Кавун та інші. Вони взаємодоповнюють одна одну і цим самим розширюють можливості різнопланових застосувань теорії дійсних чисел. Вважаючи відомими згадані теорії, розглядають різні системи кодування дійсних чисел. Для потреб теорії чисел, ймовірнісної теорії, теорії функцій, фрактальної геометрії та фрактального аналізу системи кодування є зручним знаряддям вивчення математичних об'єктів зі складною локальною топологометричною структурою (множин, функцій, мір, розподілів випадкових величин, перетворень простору, динамічних систем тощо). Одні з таких систем використовують скінченний, інші — нескінченний алфавіти. Існують системи, які використовують змінний алфавіт.

Скінченна або зліченна множина A ($|A| > 1$) називається *алфавітом*, її елементи — *цифрами*, а $L = A \times A \times \ldots$ — *простором послідовностей елементів алфавіту* A. Якщо A містить s елементів, то алфавіт називається *s-символьним*; якщо A є зліченною множиною, то алфавіт називається *нескінченно-символьним*.

Сюр'єктивне відображення φ простору L в числову множину E називається *кодуванням* або *зображенням* чисел множини E засобами алфавіту A. Послідовність (a_n), що є прообразом числа x при кодуванні φ, називається його *Δ^{φ}-зображенням* і позначається $\Delta^{\varphi}_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}$, число a_n називається *n-ою цифрою* цього зображення.

Якщо "більшість" чисел множини E мають єдине Δ^{φ}-зображення і лише незначна їх частина має не більше двох зображень, то кажуть, що *кодування має нульову надлишковість*. Кодування, при яких кожне число має єдине зображення, називають *кодуваннями з* *екстранульовою надлишковістю.* Кодування чисел, яке встановлюється через розклад числа в ряд, нескінченний добуток, ланцюговий дріб або інший математичний вираз, називається *аналітичним.*

Нехай $(c_1, \dots, c_m)$ — впорядкований набір елементів алфавіту A, тобто $(c_1, \dots, c_m) \in A^m$. *Циліндром рангу m з основою* $c_1 c_2 \dots c_m$, що відповідає Δ^{φ}-зображенню чисел (або Δ^{φ}*-циліндром*), називається множина всіх тих $x = \Delta^{\varphi}_{a_1 \dots a_m a_{m+1} \dots}$, які мають таке Δ^{φ}-зображення, що $a_i = c_i$, $i = \overline{1, m}$, тобто

$$\Delta^{\varphi}_{c_1 c_2 \dots c_m} = \left\{ x : \; x = \Delta^{\varphi}_{c_1 c_2 \dots c_m a_{m+1} a_{m+2} \dots}, \; a_{m+i} \in A \right\}.$$

Тополого-метрична теорія дійсних чисел, у тій чи іншій системі зображення, займається вивченням топологічних і метричних властивостей множин чисел, визначених умовами на їх зображення. Основою для них є геометрія зображення. *Геометрія зображення (кодування) чисел* є відносно новою віткою досліджень, яка вивчає геометричний зміст цифр, властивості циліндричних та хвостових множин, геометричне тлумачення рівнянь, нерівностей та їх систем, визначених у термінах цифр зображення, а також метричні відношення, породженні зображенням і геометричною мірою.

Кажуть, що Δ^{φ_1}-зображення і Δ^{φ_2}-зображення є *топологічно еквівалентними*, якщо: 1) вони мають спільний алфавіт; 2) відображення $f\left(\Delta^{\varphi_1}_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}\right) = \Delta^{\varphi_2}_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}$ є гомеоморфізмом.

Топологічна еквівалентність зображень може бути прихованою.

Нескінченно-символьні системи кодування принципово відрізняються від скінченно-символьних. Хоча між окремими представниками цих двох сімей існує тісний зв'язок. А саме: нескінченно-символьне зображення можна отримати зі скінченно-символьного.

Створення нової системи кодування дробової частини дійсного числа суттєво розширює коло об'єктів зі складною локальною тополого-метричною структурою і фрактальними властивостями, які відносно просто формально описуються та досліджуються. Неперервні строго монотонні функції допомагають отримувати нове кодування з уже відомого, зокрема, сингулярна функція Салема і двійкове зображення аргумента породжує Q_2-зображення значення функції.

У 1943 році Р. Салем знайшов вираз неперервної строго зростаючої сингулярної функції $?(x)$, яку ввів у розгляд в 1911 році Г. Мінковський, як функцію, що встановлює взаємнооднозначну відповідність між всіма квадратичними ірраціональностями відрізка $[0; 1]$ і раціональними числами з цього ж відрізка (далі функція Мінковського), означивши її в термінах елементарних ланцюгових дробів та медіант звичайних нескоротних дробів. Знайдений Салемом аналітичний вираз функції має вигляд:

$$? (x) = ?([0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]) =$$
$$= 2^{1-a_1} - 2^{1-a_1-a_2} + 2^{1-a_1-a_2-a_3} + \ldots + (-1)^{n+1} 2^{1-a_1-\ldots-a_n} + \ldots,$$

де $x = [0; a_1, a_2, ...]$ – розклад x в елементарний ланцюговий дріб.

Функція Мінковського породжує нове кодування дійсних чисел з $(0; 1]$, яке ми називаємо $\Delta^\sharp$-*зображенням.* Йому присвячено другий розділ даного дисертаційного дослідження. Не зважаючи на те, що $\Delta^\sharp$-зображення є окремим випадком $\widetilde{Q}_\infty$-зображення, введеного і частково вивченого у роботах М.В. Працьовитого та О.Л. Лещинського (1997 р.), воно вповні заслуговує на самостійне дослідження, оскільки в даному випадку моделлю числа є знакопочережний ряд, членами якого є числа обернені до степенів двійки. Саме ця обставина дозволяє поглибити теорію і вичерпно розв'язати інші задачі.

У 2010 р. М.В. Працьовитим, А.В. Калашніковим, В.К. Безбородовим побудовано однопараметричне узагальнення φ_μ функції Мінковського, де $\mu \in (0; 1)$. Функція φ_μ аналітично виражається:

$$\begin{gathered}\varphi_\mu(x) = \varphi_\mu\left([0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]\right) = (1-\mu)^{a_1-1} - (1-\mu)^{a_1-1}\mu^{a_2} + \ldots + \\ +(1-\mu)^{a_1+a_3+\ldots+a_{2n-1}+a_{2n+1}-1}\mu^{a_2+a_4+\ldots+a_{2n}} - \\ -(1-\mu)^{a_1+a_3+\ldots+a_{2n-1}+a_{2n+1}-1}\mu^{a_2+a_4+\ldots+a_{2n}+a_{2n+2}} + \ldots = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(1 - \mu^{a_{2n}}\right),\end{gathered} \tag{1}$$

де $A_n = (1-\mu)^{a_1+a_3+\ldots+a_{2n-1}-1}\mu^{a_2+a_4+\ldots+a_{2n-2}}$ і $\varphi_\mu(0) = 0$, $\varphi_\mu(1) = 1$, і є єдиним неперервним розв'язком системи функціональних рівнянь

$$\begin{cases} \varphi_\mu\left(\dfrac{x}{1+x}\right) = (1-\mu)\varphi_\mu(x), \\ \varphi_\mu(1-x) = 1 - \varphi_{1-\mu}(x). \end{cases}$$

Функція φ_μ є сингулярною строго зростаючою функцією. За її допомогою отримується нова однопараметрична сім'я зображень чисел з $(0; 1]$ з нескінченним алфавітом, яка ґрунтується на аналітичному представленні числа знакопочережним рядом або скінченною сумою.

Нескінченно-символьних систем кодування чисел, залежних від одного параметра, розглядалось небагато, серед них q_0^∞-зображення, що є перекодуванням Q_2-зображення засобами нескінченного алфавіту, яке вивчалось Гончаренко Я.В. та Лисенко І.М. (2013 р.).

Подання числа x у формі знакопочережного ряду (1) ми називаємо Δ^{μ}-*представленням*, а його символічний запис $\Delta^{\mu}_{a_1 a_2 \ldots a_m(\varnothing)}$ у випадку скінченної суми та $\Delta^{\mu}_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}$ при нескінченному розкладі — Δ^{μ}-*зображенням.* Це зображення і йому відповідна тополого-метрична теорія є основним об'єктом даного дисертаційного дослідження. Δ^{μ}-зображення є топологічно еквівалентним з аналітичними зображеннями чисел елементарними ланцюговими дробами, знакопочережними рядами Люрота, Остроградського, Остроградського-Серпінського-Пірса, але його метрична теорія відрізняється від відповідних теорій для вказаних зображень. Згадані зображення (за виключенням $\widetilde{Q}_{\infty}$-зображення і розкладів чисел у ряди Люрота) не мають властивостей самоподібності, тоді як Δ^{μ}-зображення є однопараметричним і N-самоподібним. Зауважимо також, що сім'я $\widetilde{Q}_{\infty}$-зображень перетинається з сім'єю Δ^{μ}-зображень по $\Delta^{\sharp}$-зображенню.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана в рамках дослідження математичних об'єктів зі складною локальною будовою і фрактальними властивостями, що проводиться на кафедрі вищої математики НПУ імені М.П. Драгоманова та у відділі фрактального аналізу Інституту математики НАН України. Дослідження проводилось у рамках науково-дослідних тем:

– системи кодування дійсних чисел з нескінченним алфавітом і фрактали (№ державної реєстрації 0113U003009);

– дослідження еволюційних детермінованих та стохастичних систем складної тополого-метричної структури. Фрактальні властивості, керованість (№ державної реєстрації 0115U000557).

Об'єктом дослідження даної дисертаційної роботи є однопараметрична сім'я аналітичних нескінченно-символьних зображень дійсних чисел півінтервала $(0; 1]$, породжених узагальненням сингулярної функції Мінковського, та їй відповідна тополого-метрична теорія.

Предмет дослідження. Геометрія Δ^{μ}-зображення і його частинного випадку $\Delta^{\sharp}$-зображення, фрактальні властивості цих зображень, метричні співвідношення ними породжені, умови раціональності числа, статистична незалежність цифр зображення.

Метою дослідження є вивчення властивостей Δ^{μ}-представлення чисел півінтервала $(0; 1]$ і йому відповідного Δ^{μ}-зображення та їх застосування у метричній та ймовірнісній теоріях чисел, фрактальній геометрії та фрактальному аналізі функцій та мір.

Основними завданнями дослідження є: 1) вивчення геометрії Δ^{μ}-зображення чисел (властивостей хвостових та циліндричних множин і метричних відношень, з ними пов'язаних); 2) встановлення умов раціональності числа за його раціональним Δ^{μ}-зображенням; 3) побудова тополого-метричної теорії Δ^{μ}-зображення і його частинного випадку $\Delta^{\sharp}$-зображення; 4) розвиток фрактальної геометрії одиничного проміжка на основі Δ^{μ}-зображення; 5) застосування геометрії і тополого-метричної теорії Δ^{μ}-зображення до розв'язання задач метричної та ймовірнісної теорій чисел, зокрема до вивчення структури і спектральних властивостей розподілу випадкової величини, визначеного розподілами її цифр у Δ^{μ}-зображенні.

Методи дослідження. У роботі використовувались методи метричної теорії чисел, фрактального аналізу та фрактальної геометрії, математичного аналізу, теорії функцій та теорії ймовірностей.

У дисертації використовувалась методологія, запропоновану у роботах М.В. Працьовитого та його учнів при дослідженні різних зображень чисел з нескінченним алфавітом, зокрема таких, що ґрунтуються на розкладах чисел в знакодотанті ряди Люрота, Енгеля, Сильвестера та знакопочережні ряди Люрота, Остроградського-Серпінського-Пірса, Остроградського, в елементарні ланцюгові дроби.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні наукові результати, що виносяться на захист:

1) введено в розгляд і детально вивчено кодування дійсних чисел засобами нескінченного алфавіту, яке ґрунтується на розкладі чисел у знакопочережні двійкові ряди і породжується сингулярною функцією Мінковського. Встановлено його зв'язок з класичним двійковим зображенням, доведено критерій раціональності числа, розв'язано ряд задач метричного, топологічного та фрактального змісту;

2) створено цілісну теорію Δ^{μ}-зображення чисел з $(0;1]$, яка включає геометрію, метричну та ймовірнісну теорії, опис нормальних властивостей чисел, результати дослідження тополого-метричних і фрактальних властивостей множин чисел, визначених обмеженнями на використання цифр у зображеннях. Для підкласу раціональних Δ^{μ}-зображень спростовано гіпотезу про критерій раціональності числа;

3) застосування Δ^{μ}-зображення для конструювання і дослідження властивостей функцій та неперервних перетворень $[0;1]$, які зберігають властивості Δ^{μ}-зображення чисел, зокрема, хвости; розподілів випадкових величин, індукованих розподілами цифр зображення.

Всі одержані результати є новими, строго і повно обґрунтованими.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має в основному теоретичний характер. Разом з цим отримані результати можуть бути використані для конструювання та дослідження функцій зі складною локальною структурою і фрактальними властивостями, об'єктів фрактальної геометрії, а також ймовірнісних мір, зосереджених на нуль-множинах Лебега.

Особистий внесок здобувача. Усі положення і результати, які виносяться на захист, отримані автором самостійно. У спільних з науковим керівником публікаціях Працьовитому М.В. належить загальна постановка задач, ідеї доведень та перевірка результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дослідження доповідались на *наукових конференціях* та *семінарах*:

– Міжнародна математична конференція "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки" до 100-річчя від дня народження члена-кореспондента НАНУ Г.М. Положого (Київ, 2014);

– П'ятнадцята міжнародна наукова конференція імені акад. Михайла Кравчука (Київ, 2014);

– IV Міжнародна Ганська конференція, присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана (Чернівці, 2014);

– International conference "Probability, Reliability And Stochastic Optimization" (Kyiv, 2015);

– Четверта всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики (Київ, 2015);

– International Conference of Young Mathematicians (Kyiv, 2015);

– Міжнародна науково-методична конференція "Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі" (Київ, 2015);

– Наукова конференція, присвячена 100-річчю від дня народження К.М. Фішмана та М.К. Фаге (Чернівці, 2015);

– X Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, присвячена 70-річчю Ю.А. Дрозда (Одеса, 2015);

– П'ята всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики (Київ, 2016);

– Четверта Міжнародна науково-практична конференція "Відкриті еволюціонуючі системи" (Ніжин, 2016);

– Всеукраїнська науково-методична конференція "Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі" (Київ, 2016);

– International mathematical conference “Groups and Actions: Geometry and Dynamics” (Kyiv, 2016);

– алгебраїчний семінар Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор Ю. А. Дрозд);

– семінар відділу фрактального аналізу Інституту математики НАН України та НПУ імені М.П. Драгоманова (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор М. В. Працьовитий);

– семінар “Стохастичні диференціальні рівняння” кафедри загальної математики мех.-мат. фак-ту КНУ ім. Т.Шевченка (керівники: доктори фіз.-мат. наук, проф. Г.Л.Кулініч, О.М.Станжицький).

Публікації. Результати дослідження викладено у 6 статтях [1–6], опублікованих у виданнях, внесених до переліку наукових фахових видань України, з них 3 статті [2, 5, 6] у наукових виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз (Zentralblatt MATH, Scopus), та додатково відображено у матеріалах конференцій [7–19].

Структура дисертації. Робота складається зі вступу, чотирьох розділів, розбитих на підрозділи, висновків до кожного розділу та загальних висновків, списку використаних джерел (107 найменувань) та списку публікацій автора (19 найменувань), списку умовних позначень. Загальний обсяг роботи — 147 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність дослідження, визначено його об'єкт, предмет, мету і завдання, висвітлено наукову новизну, практичне значення, анонсовано основні наукові результати.

Розділ 1 **“Огляд літератури та концептуальні засади дослідження”** носить вступний характер. У ньому означено ключові поняття та сформульовано необхідні для подальших досліджень факти, здійснено огляд літератури, який безпосередньо стосується теми дисертаційної роботи. У підрозділі 1.2 описано геометрію та метричні співвідношення систем кодування дійсних чисел з нескінченним алфавітом, що тісно пов'язані з об'єктом дослідження, зокрема, геометрію представлення чисел елементарними ланцюговими дробами, в термінах якого означується функція Мінковського, яка є відправним пунктом даної роботи. Підрозділ 1.3 присвячено огляду попередніх результатів дослідження властивостей цієї функції. У пункті 1.2.2 розкривається зміст відомого $\widetilde{Q}_\infty$-зображення чисел.

У підрозділі 1.4 описано одне з можливих узагальнень функції Мінковського і досліджено ним породжене Δ^q-зображення чисел, вивчено його геометрію і вказано застосування.

Теорема 1.4.1. *Нехай* $(0;1) \ni q$ *— фіксоване число. Для будь-якого* $x \in (0;1]$ *існує скінченний набір* $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ *або послідовність* (a_n) *натуральних чисел таких, що* $x = \sum_k (A_k - A'_k)$*,де* $A_k = (1-q)^{2k-2} q^{a_1+a_2+\ldots+a_{2k-1}-(2k-1)}$, $A'_k = A_k(1-q)q^{a_{2k}-1}$.

Зауважимо, що Δ^q-зображення є окремим випадком $\widetilde{Q}_\infty$-зображення при $q_0 = 1-q$, $q_k = (1-q)q^k$, яке, будучи однопараметричним, заслуговує на самостійну увагу. Окремий інтерес викликає випадок, коли q є раціональним числом.

У підрозділі 1.5 розглядається суттєво інше узагальнення функції Мінковського, яке введене і вивчалось у роботах М.В. Працьовитого та його учнів. Це функція φ_μ, яка виражається рівністю (1).

Другий розділ **"$\Delta^\sharp$-зображення дійсних чисел"** присвячено нескінченно-символьному зображенню чисел півінтервала (0;1], яке породжується класичною функцією Мінковського.

Теорема 2.1.1. *Для будь-якого* $x \in (0;1]$ *існує скінченна або нескінченна послідовність натуральних чисел* (a_n) *така, що*

$$x = \sum (-1)^{k-1} 2^{1-a_1-a_2-\ldots-a_k}.$$

Це подання числа називається його $\Delta^\sharp$-*представленням*, а скорочений запис $\Delta^\sharp_{a_1\ldots a_n\ldots}$ у випадку нескінченної суми та $\Delta^\sharp_{a_1\ldots a_n(\varnothing)}$ у випадку скінченного розкладу — $\Delta^\sharp$-*зображенням.*

У підрозділі 2.1 доведено, що $\Delta^\sharp$-зображення має нульову надлишковість і встановленого його зв'язок з двійковим зображенням.

Теорема 2.1.2. *Мають місце рівності:*

1) $\Delta^\sharp_{a_1a_2\ldots a_{2k}(\varnothing)} = \Delta^2_{\underbrace{0\ldots0}_{a_1-1}\underbrace{1\ldots1}_{a_2}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{a_{2k-1}}\underbrace{1\ldots1}_{a_{2k}}(0)}$;

2) $\Delta^\sharp_{a_1a_2\ldots a_{2k}a_{2k+1}(\varnothing)} = \Delta^2_{\underbrace{0\ldots0}_{a_1-1}\underbrace{1\ldots1}_{a_2}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{a_{2k-1}}\underbrace{1\ldots1}_{a_{2k}}\underbrace{0\ldots0}_{a_{2k+1}-1}1(0)}$;

3) $\Delta^\sharp_{a_1a_2\ldots a_n\ldots} = \Delta^2_{\underbrace{0\ldots0}_{a_1-1}\underbrace{1\ldots1}_{a_2}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{a_{2k-1}}\underbrace{1\ldots1}_{a_{2k}}\ldots}$.

У підрозділі 2.2 наведено ймовірнісну задачу, яка приводить до $\Delta^\sharp$-зображення. У підрозділі 2.3 обґрунтовується критерій раціональності числа у його $\Delta^\sharp$-зображенні.

Теорема 2.3.1. *Для того щоб число $x \in (0,1]$ було раціональним, необхідно і достатньо, щоб його $\Delta^\sharp$-зображення було скінченним або періодичним.*

Геометрії $\Delta^\sharp$-зображення присвячено підрозділ 2.4.

У підрозділі 2.5 вивчаються оператори лівостороннього і правостороннього зсувів цифр $\Delta^\sharp$-зображення чисел з $(0;1]$, зокрема встановлено їх кускову лінійність, що свідчить про N-самоподібність зображення. Підрозділ 2.6 присвячено розв'язанню традиційної задачі теорії розмірності Гаусдорфа–Безиковича — задачі про те, чи достатньо класу множин для еквівалентного означення розмірності.

Нехай W — клас усіх зв'язних множин, що є об'єднаннями циліндрів однакового рангу, які належать одному і тому ж циліндру попереднього рангу, тобто множин вигляду:

(1) $\Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m}$, (2) $\bigcup\limits_{i=n}^{\infty} \Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m i}$, (3) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m i}$, (4) $\bigcup\limits_{i=k}^{n} \Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m i}$.

Теорема 2.6.1. *Класу множин W достатньо для визначення розмірності Гаусдорфа–Безиковича довільної борелівської множини $E \subset [0,1]$, тобто $\alpha_0(E,\mathrm{W}) = \alpha_0(E)$.*

У підрозділі 2.7 для множин канторівського типу, визначених обмеженнями на вживання цифр, виведені рівняння для обчислення самоподібної та N-самоподібної розмірностей і формули для обчислення міри Лебега. У підрозділі 2.8 вказано застосування $\Delta^\sharp$-зображення у ймовірнісній теорії чисел, а саме: в теорії розподілів випадкових величин (в.в.), індукованих розподілами їх цифр.

Теорема 2.8.1. *Якщо в.в. $\tau = \Delta^\sharp_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_k\ldots}$ має рівномірний на $(0,1]$ розподіл, то цифри τ_k її $\Delta^\sharp$-зображення є незалежними в.в., що мають однакові розподіли*

$$P\{\tau_k = i\} = 2^{-i}, \quad i = 1,2,\ldots .$$

Теорема 2.8.2. *Якщо цифри ξ_k $\Delta^\sharp$-зображення в.в. $\xi = \Delta^\sharp_{\xi_1\ldots\xi_n\ldots}$ є незалежними в.в., які набувають значень $1,2,\ldots,i,\ldots$ відповідно з ймовірностями $p_{1k}, p_{2k}, \ldots, p_{ik}, \ldots$ $(p_{1k} + \ldots + p_{ik} + \ldots = 1)$, то розподіл ξ є або чисто дискретним, або чисто неперервним (неатомарним), причому чисто дискретним — лише тоді, коли $M = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\limits_i\{p_{ik}\} > 0$. Точковий спектр (множина атомів) дискретно розподіленої в.в. ξ складається з точки x_0: $p_{a_j(x_0)j} = \max\limits_i\{p_{ik}\}$,* *і всіх точок x, які мають властивість $p_{a_j(x)j} > 0$ для будь-якого $j \in \mathbb{N}$ і існує таке $m \in \mathbb{N}$, що $a_j(x) = a_j(x_0)$ при $j \geqslant m$.*

У розділі 3 **"Δ^μ-зображення дійсних чисел"** обґрунтовується Δ^μ-зображення чисел, яке є узагальненням $\Delta^\sharp$-зображення, причому співпадає з ним при $\mu = 0,5$.

Теорема 3.1.1. *Нехай $(0,1) \ni \mu$ — фіксоване число (параметр). Для будь-якого $x \in (0,1]$ існує скінченний впорядкований набір $(a_1, \dots, a_m)$ або послідовність натуральних чисел (a_n) такі, що*

$$x = (1-\mu)^{a_1-1} - (1-\mu)^{a_1-1}\mu^{a_2} + \dots$$
$$+(1-\mu)^{a_1+a_3+\dots+a_{2n-1}-1}\mu^{a_2+a_4+\dots+a_{2n-2}} -$$
$$-(1-\mu)^{a_1+a_3+\dots+a_{2n-1}-1}\mu^{a_2+a_4+\dots+a_{2n}} + \dots = \sum_n (B_n - {B_n}'),$$

де $B_n = (1-\mu)^{a_1+a_3+\dots+a_{2n-1}-1}\mu^{a_2+a_4+\dots+a_{2n-2}}$, ${B_n}' = B_n \cdot \mu^{a_{2n}}$.

У підрозділі 3.2 вказана ймовірнісна задача, яка приводить до поняття Δ^μ-зображення дійсного числа.

Якщо μ — раціональне число з $(0;1)$, то Δ^μ-зображення називається *раціональним Δ^μ-зображенням*, таким є $\Delta^\sharp$-зображення.

У підрозділі 3.3, виділивши зліченний підклас раціональних Δ^μ-зображень, ми вказали достатні умови раціональності числа і спростували гіпотезу про те, що критерій раціональності числа, знайдений для $\Delta^\sharp$-зображення, матиме місце для довільного раціонального Δ^μ-зображення.

Лема 3.3.1. *Якщо раціональне Δ^μ-зображення числа x скінченне або періодичне, то саме число x є раціональним.*

Теорема 3.3.1. *Якщо число $\frac{1}{2} \neq \mu = \frac{p}{s}$ — правильний нескоротний дріб, причому s — просте число і $s - p \neq 1$, то число $\frac{1}{s-p}$ має нескінченне неперіодичне Δ^μ-зображення.*

Підрозділ 3.4 присвячено геометрії Δ^μ-зображення.

Лема 3.4.1. *Циліндр $\Delta^\mu_{c_1c_2\dots c_m}$ є відрізком, причому якщо m — непарне, то $\Delta^\mu_{c_1c_2\dots c_{2k-1}} = [a-\delta; a]$, де*

$$a = (1-\mu)^{c_1-1} - (1-\mu)^{c_1-1}\mu^{c_2} + \dots + (1-\mu)^{c_1+\dots+c_{2k-1}-1}\mu^{c_2+\dots+c_{2k-2}},$$
$$\delta = (1-\mu)^{c_1+c_3+\dots+c_{2k-1}-1} \cdot \mu^{c_2+c_4+\dots+c_{2k-2}+1};$$

якщо m — парне, то $\Delta^\mu_{c_1c_2\dots c_{2k}} = [a; a+\delta]$, де

$$a = (1-\mu)^{c_1-1} - (1-\mu)^{c_1-1}\mu^{c_2} + \dots +$$
$$+(1-\mu)^{c_1+\dots+c_{2k-1}-1}\mu^{c_2+\dots+c_{2k-2}} - (1-\mu)^{c_1+\dots+c_{2k-1}-1}\mu^{c_2+\dots+c_{2k}},$$
$$\delta = (1-\mu)^{c_1+c_3+\dots+c_{2k-1}} \cdot \mu^{c_2+c_4+\dots+c_{2k}}.$$

Наслідок 3.4.1. *Довжина циліндра виражається формулою:*
$$|\Delta^{\mu}_{c_1c_2\ldots c_m}| = \begin{cases} (1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2k-1}-1}\cdot\mu^{c_2+\ldots+c_{2k-2}+1}, & m=2k-1,\\ (1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2k-1}}\cdot\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2k}}, & m=2k.\end{cases}$$

Наслідок 3.4.2. *Якщо* $\Delta^{\mu}_{c_1c_2\ldots c_m}$ *— фіксований циліндр, то має місце рівність (основне метричне відношення)*
$$\frac{|\Delta^{\mu}_{c_1c_2\ldots c_m i}|}{|\Delta^{\mu}_{c_1c_2\ldots c_m}|} = \begin{cases} (1-\mu)\mu^{i-1}, & \text{коли} \quad m=2k-1,\\ \mu(1-\mu)^{i-1}, & \text{коли} \quad m=2k.\end{cases}$$

У підрозділі 3.5 розв'язано метричні задачі, пов'язані з Δ^{μ}-зображенням чисел, зокрема, вивчено тополого-метричні властивості множин чисел, визначених умовами на використання цифр.

Теорема 3.5.1. *Якщо* V *— власна підмножина множини* $\mathbb{N}$, *потужність якої більша за одиницю, то множина*
$$C[\Delta^{\mu}, V] = \{x:\ x=\Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots},\ a_n\in V\subset\mathbb{N}\}$$
1) є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега; 2) самоподібною, якщо V *— скінченна і* N*-самоподібною, якщо* V *— нескінченна. Її самоподібна розмірність співпадає з фрактальною розмірністю Гаусдорфа-Безиковича* α_0, *яка задовольняє умову:*
$$\alpha_0\left(C\left[\Delta^{\mu}, V\right]\right) = \sup_n\left\{x:\ \sum_{u,v\in V\cap\{1,2,\ldots,n\}}\left((1-\mu)^u\mu^v\right)^x = 1\right\}.$$

Теорема 3.5.2. *Множина*
$C\equiv C[\Delta^{\mu},(V_n)] = \left\{x:\ x=\Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots},\ a_n(x)\in V_n\subset\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N}\right\}$ *є:*
1) *об'єднанням відрізків, якщо* $V_n\neq\mathbb{N}$ *скінченну кількість разів;*
2) *ніде не щільною, якщо* $V_n\neq\mathbb{N}$ *нескінченну кількість разів;*
3) *її міра Лебега обчислюється за формулою:*
$$\lambda(C) = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda(F_{2k})}{\lambda(F_{2k-2})} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda(\overline{F}_{2k})}{\lambda(F_{2k-2})}\right),$$
де $F_0=(0;1]$, F_{2k} *— замикання об'єднання циліндрів рангу* $2k$, *серед внутрішніх точок яких є точки множини* C, $\overline{F}_{2k} = F_{2k-2}\setminus F_{2k}$.

Теорема 3.5.3. *Нехай* c *і* s *— фіксовані натуральні числа. Множина* $D\equiv D[\Delta^{\mu},\overline{cs}] = \{x:\ x=\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_n\ldots},\ \text{де}\ \overline{a_na_{n+1}}\neq\overline{cs}\quad\forall n\in\mathbb{N}\}$ *є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега.*

Теорема 3.6.1 (Про нормальну властивість числа). 1. *Множина* B *всіх чисел з півінтервала* $(0;1]$, *послідовність цифр* Δ^{μ}*-зображення яких обмежена, є всюди щільною, континуальною множиною нульової міри Лебега.* 2. *Майже всі (у розумінні міри Лебега) числа півінтервалу* $(0;1]$ *задовольняють умову* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,a_n(x)=\infty$.

Четвертий розділ **"Застосування Δ^{μ}-зображення чисел"** присвячено застосуванням Δ^{μ}-зображення у фрактальному аналізі, метричній та ймовірнісній теорії чисел. У підрозділі 4.1 вивчаються функції з фрактальними властивостями, означені у термінах Δ^{μ}-зображення числа.

Теорема 4.1.1. *Функція f, означена на множині H рівністю:* $y = f\left(\Delta^{\mu}_{a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots}\right) = \Delta^{\mu}_{a_2 a_1 a_4 a_3 \ldots}$, *1) є бієктивним відображенням;*
2) у точках виду $\Delta^{\mu}_{a_1 \ldots a_n i(\varnothing)}$ має неусувні розриви першого роду; у точках, що мають нескінченне Δ^{μ}-зображення, — усувний розрив.
3) Частина $\Gamma^i_f \equiv \{(x; y) : \ x \in \Delta^{\mu}_{ii}, \, i \in \mathbb{N}, \ \ y = f(x)\}$ графіка Γ_f функції f подібна всьому графіку з коефіцієнтом подібності $k = (1-\mu)^i \mu^i$, причому $\Gamma^i_f = \psi_i\left(\Gamma_f\right)$, де $\psi_i : \begin{cases} x' = (1-\mu)^i \mu^i \cdot x + (1-\mu)^{i-1}(1-\mu^i), \\ y' = (1-\mu)^i \mu^i \cdot y + (1-\mu)^{i-1}(1-\mu^i). \end{cases}$
Графік функції f є N-самоафінною множиною: $\Gamma_f = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \psi_{ij}\left(\Gamma_f\right)$, де
$\psi_{ij} : \begin{cases} x' = \Delta^{\mu}_{ija_1(x)a_2(x)\ldots}, \\ y' = \Delta^{\mu}_{jia_2(x)a_1(x)\ldots}, \end{cases}$ з N-самоподібною розмірністю $\frac{-1}{\log_2(1-\mu)\mu}$;
4) перетворення f зберігає частоти цифр Δ^{μ}-зображення.

Теорема 4.1.2. *Функція φ, означена на множині H рівністю:*
$$y = \varphi\left(\Delta^{\mu}_{a_1 a_2 \ldots a_{2n-1} a_{2n} \ldots}\right) = \Delta^{\mu}_{[a_1 a_2][a_3 a_4]\ldots},$$
1) є сюр'єктивним, але не є ін'єктивним відображенням;
2) у точках виду $\Delta^{\mu}_{a_1 \ldots a_n i(\varnothing)}$ має неусувні розриви першого роду; у точках, що мають нескінченне Δ^{μ}-зображення, — усувний розрив;
3) є ніде не монотонною функцією.
4) Якщо в Δ^{μ}-зображенні числа $y_0 \in H$ міститься нескінченна кількість цифр, відмінних від 1, то рівень $\varphi^{-1}(y_0)$ функції φ є континуальним; рівень $\varphi^{-1}\left(\Delta^{\mu}_{c_1 \ldots c_m (1)}\right)$ є скінченним, $\varphi^{-1}\left(\Delta^{\mu}_{(1)}\right) = \Delta^{\mu}_{(1)}$.

Теорема 4.1.3. *Функція γ, означена на множині H рівністю:*
$$y = \gamma\left(\Delta^{\mu}_{a_1 a_2 \ldots a_{2n-1} a_{2n} \ldots}\right) = \Delta^{\mu}_{[a_1 a_2][a_2 a_3]\ldots},$$
1) є відображенням ні сюр'єктивним, ні ін'єктивним;
2) у точках виду $\Delta^{\mu}_{a_1 \ldots a_n i(\varnothing)}$ має неусувні розриви першого роду; у точках, що мають нескінченне Δ^{μ}-зображення, — усувний розрив;
3) її множина значень має канторівський тип (є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега) і дробову фрактальну розмірність Гаусдорфа-Безиковича.

Означення. Кажуть, що два Δ^{μ}-зображення $\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_n\ldots}$ і $\Delta^{\mu}_{b_1\ldots b_n\ldots}$ *мають однаковий хвіст* (або *перебувають у відношенні* $\sim$), якщо існують натуральні числа k та m такі, що $a_{k+j}=b_{m+j}$ $\forall\, j\in\mathbb{N}$; два числа x і y з множини H мають однаковий хвіст у Δ^{μ}-зображенні, якщо їх Δ^{μ}-зображення перебувають у відношенні $\sim$.

Бінарне відношення $\sim$, будучи відношенням еквівалентності, розбиває множину, на якій воно задане, на класи еквівалентності. Кожен з класів еквівалентності називається *хвостовою множиною.*

Теорема 4.2.1. *Кожна хвостова множина є зліченною і щільною в* $(0,1]$*; фактор-множина* $F\equiv(0,1]/\sim$ *є континуальною.*

Казатимемо, що функція f, яка визначена на множині H і набуває значень з цієї множини, *зберігає хвости* Δ^{μ}-зображень чисел, якщо для будь-якого $x\in(0,1]$ існують натуральні числа $k=k(x)$ і $m=m(x)$ такі, що $a_{k+n}(x)=a_{m+n}\left(f(x)\right)$ для всіх $n\in\mathbb{N}$.

У підрозділі 4.2 конструюються і досліджуються властивості кусково-неперервних функцій та неперервних перетворень відрізка $[0;1]$, які зберігають властивості Δ^{μ}-зображення чисел, зокрема, їх хвости.

Лема 4.2.1. *Функція* $y=\sigma_1(x)$*, означена на* H *рівністю*

$$y=\sigma_1(x)=\sigma_1\left(\Delta^{\mu}_{a_1(x)a_2(x)a_3(x)\ldots a_n(x)\ldots}\right)=\Delta^{\mu}_{[a_1+a_2+a_3]a_4a_5\ldots a_n\ldots},$$

аналітично виражається формулою

$$\sigma_1(x)=\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{a_2(x)}\cdot x+\nu^{a_1(x)+a_2(x)-1}\left(1-\frac{1}{\mu^{a_2(x)}}\right),\ \text{де}\ \nu=1-\mu,$$

є лінійною на кожному циліндрі 2-го рангу, причому: 1) *є неперервною строго зростаючою;* 2) $\sup\limits_{x\in\Delta^{\mu}_{ij}}\sigma_1(x)=\nu^{i+j}$, $\inf\limits_{x\in\Delta^{\mu}_{ij}}\sigma_1(x)=0$*;*

3) $\int\limits_{\Delta^{\mu}_{ij}}\sigma_1(x)dx=\frac{1}{2}\nu^{2i+j}\mu^{j}$*;* 4) $\int\limits_{0}^{1}\sigma_1(x)dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{\nu^3}{1+\nu^3}$.

Теорема 4.2.2. *Нехай* s *— фіксоване натуральне число. Функція* d_s*, означена на півінтервалі* $(0,1]$ *рівністю*

$$y=d_s(x)=d_s\left(\Delta^{\mu}_{a_1(x)a_2(x)a_3(x)\ldots}\right)=\Delta^{\mu}_{[s+a_1]a_2a_3\ldots},$$

аналітично виражається формулою $d_s(x)=\nu^s\cdot x$ *і є:*

1) *лінійною строго зростаючою функцією,*

2) $\inf\limits_{x\in(0,1]}d_s(x)=0$, $\sup\limits_{x\in(0,1]}d_s(x)=\nu^s$*; крім цього, рівняння* $\sigma_1(x)=d_s(x)$ *не має розв'язків, якщо* $a_2\geqslant s$*, а при* $a_2<s$ *має їх зліченну множину:* $E=\left\{x:\ x=\Delta^{\mu}_{a_1(a_2[s-a_2])},\ \text{де}\ a_1\in\mathbb{N},\ a_2\in\{1,2,\ldots,s-1\}\right\}.$

Лема 4.2.2. *Оператор лівостороннього зсуву цифр ω_2, означений на множині H рівністю $\omega_2\left(\Delta^{\mu}_{a_1a_2a_3a_4\ldots a_n\ldots}\right) = \Delta^{\mu}_{a_3a_4\ldots a_n\ldots}$, є сюр'єктивним, але не є ін'єктивним відображенням; аналітично виражається рівністю $\omega_2(x) = \frac{x}{\nu^{a_1(x)}\mu^{a_2(x)}} - \frac{1-\mu^{a_2(x)}}{\nu\mu^{a_2(x)}}$, і є неперервною зростаючою функцією на кожному циліндрі 2-го рангу.*

Лема 4.2.3. *Рівняння $d_s(x) = \omega_2(x)$ має зліченну множину розв'язків: $x = \Delta^{\mu}_{a_1(a_2[s+a_1])}$, де a_1, a_2 — довільні натуральні числа.*

Лема 4.2.4. *Нехай i, j — фіксовані натуральні числа. Функція, означена на H рівністю $\delta_{ij}(x) = \delta_{ij}(\Delta^{\mu}_{a_1(x)a_2(x)\ldots}) = \Delta^{\mu}_{ija_1a_2\ldots}$, аналітично виражається формулою $y = \delta_{ij}(x) = \nu^i\mu^j \cdot x + \nu^{i-1}\left(1-\mu^j\right)$ і є лінійною строго зростаючою функцію на півінтервалі $(0, 1]$.*

Теорема 4.2.3. *Мають місце наступні твердження.*

1. *Рівняння $\sigma_1(x) = \delta_{ij}(x)$ не має жодного розв'язку, якщо $a_1 + a_2 \geqslant i$, а при $a_1+a_2<i$ має їх зліченну множину $\{x : x = \Delta^{\mu}_{(a_1a_2[i-a_1-a_2]j)},\ a_1, a_2 \in \mathbb{N},\ (a_1 + a_2) \in \{1, 2, \ldots, i-1\}\}$.*

2. *Рівняння $d_s(x) = \delta_{ij}(x)$ не має розв'язків, якщо $s \geqslant i$, а при $s < i$ має їх зліченну множину $\{x : x = \Delta^{\mu}_{([i-s]j)},\ s \in \{1, \ldots, i-1\}\}$.*

3. *Рівняння $\omega_2(x) = \delta_{ij}(x)$ має безліч розв'язків: $x = \Delta^{\mu}_{(a_1a_2ij)}$, де (a_1, a_2) — довільна пара натуральних чисел.*

Теорема 4.2.4. *Множина G всіх неперервних строго зростаючих перетворень півінтервала $(0, 1]$, які зберігають хвости Δ^{μ}-зображення чисел, відносно операції $\circ$ — "суперпозиція функцій" утворює нескінченну некомутативну групу.*

Підрозділ 4.3 присвячений дослідженню розподілів цифр Δ^{μ}-зображення рівномірно розподіленої випадкової величини.

Теорема 4.3.1. *Якщо в.в. $\tau = \Delta^{\mu}_{\tau_1\ldots\tau_n\ldots}$ має рівномірний на $[0, 1]$ розподіл, то цифри τ_n її Δ^{μ}-зображення є незалежними в.в., причому цифри послідовності (τ_n) з непарними номерами однаково розподілені: $P\{\tau_{2k-1} = i\} = \mu \cdot \nu^{i-1}$; і цифри послідовності (τ_n) з парними номерами мають однаковий розподіл: $P\{\tau_{2k} = i\} = \nu \cdot \mu^{i-1}$.*

У підрозділі 4.4 розглядається в.в. $\tau = \Delta^{\mu}_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots}$, де (τ_n) — послідовність незалежних однаково розподілених в.в., які набувають значень $1, 2, \ldots, n, \ldots$ відповідно з ймовірностями $P\{\tau_i = i\} = p_i$.

Теорема 4.4.1. *Якщо (τ_n) — задана послідовність незалежних однаково розподілених в.в., то розподіл в.в. $\tau = \Delta^{\mu}_{\tau_1\ldots\tau_n\ldots}$ є сингулярним.*

ВИСНОВКИ

Аналітичні кодування дійсних чисел засобами нескінченного алфавіту є продуктивним засобом розвитку метричної та ймовірнісної теорій чисел. Уваги заслуговують зображення, що ґрунтуються на представленнях чисел знакопочережними рядами, членами яких є числа, обернені до натуральних. Запропоноване $\Delta^{\sharp}$-зображення є таким. Воно відповідає виразу строго зростаючої сингулярної функції Мінковського, інтерес до неї не згасає протягом століття. Не зважаючи на те, що $\Delta^{\sharp}$-зображення є окремим випадком $\widetilde{Q}_{\infty}$-зображення, воно заслуговує на самостійне дослідження, завдяки його "натуральності" і зв'язку з класичними двосимвольними зображеннями.

У роботі знайдено континуальну сім'ю нових зображень чисел, залежних від параметра $\mu \in (0;1)$, названих Δ^{μ}-зображеннями, яка включає $\Delta^{\sharp}$-зображення при $\mu = 0,5$. Вказавши задачу, яка приводить до Δ^{μ}-зображення, ми вивчили його геометрію, факти якої використали для постановки та розв'язання задач метричної та ймовірнісної теорії чисел. Виділивши клас раціональних Δ^{μ}-зображень, ми вказали умови раціональності числа і спростували гіпотезу про те, що критерій раціональності числа, знайдений для $\Delta^{\sharp}$-зображення, матиме місце для довільного раціонального Δ^{μ}-зображення.

Основні результати дисертаційної роботи:

1) цілісна теорія $\Delta^{\sharp}$-зображення, яка включає критерій раціональності числа, опис властивостей циліндричних та хвостових множин, операторів лівостороннього та правостороннього зсуву цифр, розв'язки задач про метричні, топологічні та фрактальні властивості множин чисел з певними обмеженнями на вживання цифр тощо;

2) теорія Δ^{μ}-зображення, яка включає геометричне тлумачення цифр, метричні відношення, породжені властивостями циліндрів, нормальні властивості чисел, опис фрактальних властивостей множин канторівського типу, формули для обчислення їх міри Лебега;

3) застосування Δ^{μ}-зображення для дослідження кусково-неперервних функцій та неперервних перетворень $[0;1]$, які зберігають властивості Δ^{μ}-зображення чисел, зокрема, їх хвости; розподілів ймовірностей, індукованих розподілами цифр Δ^{μ}-зображення та ін.

Наявність різних зображень чисел з нескінченним алфавітом суттєво розширює можливості дослідження математичних об'єктів зі складною локальною тополого-метричною структурою.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Ісаєва Т.М.* Кодування дійсних чисел з нескінченним алфавітом і основою 2 / М.В. Працьовитий, Т.М. Ісаєва // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2013. — №15. — С. 6–23.
2. *Ісаєва Т.М.* Про деякі застосування $\Delta^{\sharp}$-зображення дійсних чисел / М.В. Працьовитий, Т.М. Ісаєва // Буковинський математичний журнал. — 2014. — Т.2, №2-3. — С. 187–197.
3. *Ісаєва Т.М.* Δ^{μ}-зображення як узагальнення $\Delta^{\sharp}$-зображення і основа нової метричної теорії дійсних чисел /Т.М. Ісаєва, М.В. Працьовитий // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2014. — №16. — С. 164–186.
4. *Ісаєва Т.М.* Геометрія та основи метричної теорії зліченно-символьного зображення дійсних чисел одиничного півінтервала / Т.М. Ісаєва, М.В. Працьовитий // Наукові записки НаУКМА. Фізико-математичні науки. — 2015. — Т. 165. — С. 11–18.
5. *Ісаєва Т.М.* Фрактальні функції, пов'язані з Δ^{μ}-зображенням чисел / М.В. Працьовитий, Т.М. Ісаєва // Буковинський математичний журнал. — 2015.— Т.3, №3-4. — С. 156–165.
6. *Isaieva T.M.* Transformations of $(0, 1]$ preserving tails of Δ^{μ}-representation of numbers / M. Pratsiovytyi, T. Isaieva // Algebra and Discrete Mathematics. — 2016. — Vol. 22, no. 1. — Pp. 102–115.
7. *Ісаєва Т.М.* $\Delta^{\sharp}$-зображення як частинний випадок $\widetilde{Q}_{\infty}$ / М.В. Працьовитий, Т.М. Ісаєва // Міжнар. матем. конф. "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки" до 100-річчя від дня народження члена-кор. НАНУ Г.М. Положого, 23–24 квітня 2014, Київ: Матеріали конф. — К.: КНУ імені Т. Шевченка, 2014. — С. 106.
8. *Ісаєва Т.М.* Одна однопараметрична сім'я систем кодування дійсних чисел з нескінченним алфавітом / М.В. Працьовитий, Т.М. Ісаєва // XV Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука, 15–17 травня, 2014, Київ: Матеріали конф. Т. 2. Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз. — К.: НТУУ "КПІ", 2014. — С. 154.
9. *Ісаєва Т.М.* Про деякі застосування $\Delta^{\sharp}$-зображення дійсних чисел / М.В. Працьовитий, Т.М. Ісаєва // IV Міжнар. Ганська конф., присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана, 30 червня – 5 липня 2014, Чернівці: Тези доп. — Чернівці: ЧНУ ім. Ю. Федьковича, 2014. — С. 166–167.

10. *Isaieva T.M.* Spectral and fractal properties of singular probability distribution functions of Minkowski type / M.V. Pratsiovytyi, T.M. Isaieva // International conf. "Probability, Reliability And Stochastic Optimization", April 7–10, 2015, Kyiv: Conf. materials. — K.: Taras Shevchenko National University, 2015. — P. 22.
11. *Ісаєва Т.М.* Основи метричної теорії дійсних чисел у їх Δ^{λ}-зображенні / Т.М. Ісаєва, М.В. Працьовитий // Четверта всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики, 23–25 квітня 2015, Київ: Тези доп. — К.: НТУУ "КПІ", 2015. — С. 39–40.
12. *Ісаєва Т.М.* Умови нуль-мірності та аномальної фракальності компактів, визначених в термінах Δ^{λ}-зображення дійсних чисел / Т.М. Ісаєва // International Conference of Young Mathematicians, June 3–6, 2015, Kyiv. Abstracts. — Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2015. — P. 35.
13. *Ісаєва Т.М.* Нормальні властивості дійсних чисел у їх Δ^{μ}-зображенні / Т.М. Ісаєва // Матеріали Міжнар. наук.-метод. конф. "Сучасні науково-методичні проблеми математики у ВШ", 25–26 червня 2015, Київ. — К.: НУХТ, 2015. — С. 88–90.
14. *Ісаєва Т.М.* Фрактальні функції, пов'язані з Δ^{μ}-зображенням / М.В. Працьовитий, Т.М. Ісаєва // Наукова конференція, присвячена 100-річчю від дня народження К.М. Фішмана та М.К. Фаге, 1–4 липня 2015, Чернівці: Тези доп. — Чернівці: ЧНУ ім. Ю. Федьковича, 2015. — С. 101–102.
15. *Ісаєва Т.М.* Простір Δ^{μ}-зображень дійсних чисел з нескінченним алфавітом та алгебраїчні структури в ньому / М.В. Працьовитий, Т.М. Ісаєва // X Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, присвячена 70-річчю Ю.А. Дрозда. 20–27 серпня 2015, Одеса, Україна. Тези доп. — Одеса: ТЕС, 2015. — С. 141.
16. *Ісаєва Т.М.* Група перетворень $(0,1]$, які зберігають хвости Δ^{μ}-зображення чисел / Т.М. Ісаєва, М.В. Працьовитий // П'ята всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики, 25–26 квітня 2016, Київ: Тези доп. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2016. — С. 48.
17. *Ісаєва Т.М.* Одна система кодування дійсних чисел, залежна від одного параметра, та її застосування / М.В. Працьовитий, Т.М. Ісаєва // IV Міжнар. наук.-практ. конф. "Відкриті еволюціонуючі системи", 20–21 травня 2016, Ніжин: Збірник праць: Ч. 2. — Ніжин: ВНЗ ВП НУБіП України НАІ. — 2017. — С. 57–63.
18. *Ісаєва Т.М.* Δ^{μ}-зображення у задачах ймовірнісної теорії чисел / Т.М. Ісаєва, М.В. Працьовитий // Всеукр. наук.-метод. конф. "Сучасні науково-методичні проблеми математики у ВШ", 7–8 жовтня 2016, Київ: Збірник тез. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2016. — С. 45.

19. *Ісаєва Т.М.* Метричний простір Δ^μ-зображення чисел і групи неперервних перетворень $(0;1]$ / М.В. Працьовитий, Т.М. Ісаєва // International math. conf. "Groups and Actions: Geometry and Dynamics" dedicated to the memory of prof. V. Sushchanskyy, December 19–22, 2016, Kyiv. — K.: Taras Shevchenko National University, 2016. — P. 67.

АНОТАЦІЇ

Ісаєва Т. М. Одне кодування дійсних чисел засобами нескінченного алфавіту і його застосування. — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 — алгебра та теорія чисел. — Інститут математики НАН України, Київ, 2017.

Дисертаційна робота присвячена вивченню аналітичного кодування (Δ^μ-зображення) чисел одиничного півінтервалу, залежного від параметра $\mu \in (0;1)$, засобами нескінченного алфавіту і спеціальних знакопочережних рядів, яке породжується сингулярною строго зростаючою функцією, що є узагальненням класичної сингулярної функції Мінковського; розвитку відповідної йому метричної та ймовірнісної теорій чисел; застосуванням у теорії функцій, фрактальній геометрії та фрактальному аналізі.

Створено цілісну теорію Δ^μ-зображення чисел з $(0;1]$, яка включає геометрію, метричну та ймовірнісну теорії, опис нормальних властивостей чисел, результати дослідження тополого-метричних і фрактальних властивостей множин чисел, визначених обмеженнями на використання цифр у зображенні чисел. Для найпростішого представника цієї сім'ї зображень (випадок $\mu = \frac{1}{2}$) встановлено зв'язок з класичним двійковим зображенням, доведено критерій раціональності числа, встановлено довірчість системи покриттів зв'язними об'єднаннями циліндричних множин одного рангу для означення фрактальної розмірності Гаусдорфа-Безиковича. Для виділеного підкласу раціональних Δ^μ-зображень спростовано гіпотезу про критерій раціональності числа.

Використано Δ^μ-зображення чисел для конструювання і дослідження властивостей кусково-неперервних функцій та неперервних перетворень відрізка $[0;1]$, які зберігають властивості Δ^μ-зображення чисел, зокрема, їх "хвости". Конструктивно доведено існування некомутативної групи неперервних перетворень одиничного відрізка, які зберігають хвости Δ^μ-зображення чисел.

Ключові слова: кодування дійсних чисел, Δ^μ-зображення числа, геометрія зображення, основне метричне відношення, нормальні властивості чисел, сингулярна функція Мінковського, N-самоподібність, розмірність Гаусдорфа-Безиковича.

Исаева Т. Н. Одно кодирование действительных чисел средствами бесконечного алфавита и его применение. — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 — алгебра и теория чисел. — Институт математики НАН Украины, Киев, 2017.

Диссертационная работа посвящена изучению аналитического кодирования (Δ^{μ}-изображения) чисел единичного полуинтервала, зависимого от параметра $\mu \in (0;1)$, с помощью бесконечного алфавита и специальных знакочередующихся рядов, порождаемое сингулярной строго возрастающей функцией, которая является обобщением классической сингулярной функции Минковского, а именно:
$\varphi_{\mu}(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \left(1-\mu^{a_{2n}}\right)$, где $A_n = (1-\mu)^{a_1+\ldots+a_{2n-1}-1}\mu^{a_2+\ldots+a_{2n-2}}$;
развитию соответствующей Δ^{μ}-изображению метрической и вероятностной теорий чисел; применением его в теории функций, фрактальной геометрии и фрактальном анализе.

Построена целостная теория Δ^{μ}-изображения чисел из $(0;1]$, которая включает геометрию, метрическую и вероятностную теории, описание нормальных свойств чисел, результаты исследования тополого-метрических и фрактальных свойств множеств чисел, определенных ограничениями на использование цифр в изображении чисел. Для самого простого представителя этой семьи изображений (случай, когда $\mu = \frac{1}{2}$) установлена связь с классическим двоичным изображением, доказан критерий рациональности числа, установлена доверительность системы покрытий связными объединениями цилиндрических множеств одного ранга для определения фрактальной размерности Хаусдорфа-Безиковича. Для выделенного подкласса рациональных Δ^{μ}-изображений опровергнута гипотеза о критерии рациональности числа.

Использовано Δ^{μ}-изображение для построения и исследования свойств кусочно-непрерывных функций и непрерывных преобразований отрезка $[0;1]$, которые сохраняют свойства Δ^{μ}-изображения чисел, в частности их "хвосты". Конструктивно доказано, что множество непрерывных преобразований единичного отрезка, которые сохраняют хвосты Δ^{μ}-изображения чисел, относительно операции композиция (суперпозиция) образуют некоммутативную группу.

Исследованны функции с фрактальными свойствами, которые заданы в терминах Δ^{μ}-изображения числа, а именно: структурные свойства самих функций и фрактальные (самоподобные, самоафинные) свойства существенных для функций множеств.

Ключевые слова: кодирование действительных чисел, Δ^{μ}-изображение числа, геометрия изображения, основное метрическое отношение,

нормальные свойства чисел, сингулярная функция Минковского, N-само-подобие, размерность Хаусдорфа-Безиковича.

Isaieva T. M. One encoding of real numbers by means of infinite alphabet and its applications. "— Manuscript.

Candidate's thesis on Physics and Mathematics, speciality 01.01.06 — algebra and number theory. — Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2017.

In the thesis we study analytic encoding (Δ^{μ}-representation) of numbers belonging to left-open unit interval by means of an infinite alphabet and special alternating series. This representation depends on parameter $\mu \in (0;1)$ and is generated by a singular strictly increasing function generalizing the classic Minkowski singular function. The corresponding metric and probabilistic theory of numbers are developed and applications to theory of functions, fractal geometry and fractal analysis are considered.

We create a complete theory of Δ^{μ}-representation of numbers belonging to $(0;1]$. In particular, geometry, metric and probabilistic theory are developed and normal properties of numbers are described. We also study topological, metric and fractal properties of sets of numbers defined by restrictions on digits in the representation of numbers. For the simplest representative of this family of representations (if $\mu = \frac{1}{2}$), we establish a relation with classic binary representation, prove a criterion for rationality of number, and establish faithfulness of system of coverings by connected unions of cylindrical sets of the same rank for definition of Hausdorff-Besicovitch fractal dimension. A criterion for rationality of number is disproved for some subclass of rational Δ^{μ}-representation.

We use Δ^{μ}-representation of numbers to construct and study properties of piecewise continuous functions and continuous transformation of closed interval $[0;1]$ preserving properties of Δ^{μ}-representation of numbers, in particular, preserving their "tails". We prove constructively that there exists a non-commutative group of continuous transformations of closed unit interval preserving tails of Δ^{μ}-representation of numbers.

Key words: encoding of real numbers, Δ^{μ}-representation of number, geometry of representation, basic metric relation, normal properties of numbers, Minkowski singular function, N-self-similarity, Hausdorff-Besicovitch dimension.

Офсет. друк. Фіз. друк. арк. 1,25. Умовн. друк. арк. 1,16.
Тираж 100 пр.

Видавництво Національного педагогічного університету
імені М. П. Драгоманова, 01004, м. Київ, вул. Пирогова, 9
Свідоцтво про реєстрацію № 1101 від 29.10.2002
(044) 239-30-26