Національний педагогічний університет
імені М. П. Драгоманова

На правах рукопису

Ісаєва Тетяна Миколаївна

УДК 511.72

Одне кодування дійсних чисел засобами нескінченного алфавіту і його застосування

01.01.06 — алгебра та теорія чисел

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
Працьовитий Микола Вікторович,
доктор фізико-математичних наук, професор

Київ — 2017

ЗМІСТ

Список умовних позначень **5**

Вступ **6**

Розділ 1. **Огляд літератури та концептуальні засади дослідження** **27**

1.1. Елементи теорії фракталів 27

1.1.1. Самоподібність множин простору $\mathbb{R}^1$ 27

1.1.2. Міри Гаусдорфа і розмірність Гаусдорфа-Безиковича 29

1.2. Системи кодування дійсних чисел з нескінченним алфавітом 31

1.2.1. Елементарні ланцюгові дроби 31

1.2.2. $\widetilde{Q}_\infty$-зображення дійсних чисел 33

1.2.3. Зображення чисел за допомогою збіжних знакопочережних рядів 34

1.3. Сингулярна функція Мінковського 36

1.4. Найпростіше узагальнення класичної функції Мінковського і йому відповідне зображення чисел 39

1.4.1. Геометрія циліндричного Δ^q-зображення дійсних чисел 41

1.4.2. Метричні задачі, пов'язані з Δ^q-зображенням чисел . 44

1.5. Однопараметричне узагальнення сингулярної функції Мінковського 47

Висновки до розділу 1 49

Розділ 2. **$\Delta^\sharp$-зображення дійсних чисел** **50**

2.1. Означення $\Delta^\sharp$-зображення дійсних чисел 50

2.2. Задача, яка приводить до поняття $\Delta^\sharp$-зображення 55

2.3. Критерій раціональності числа у його $\Delta^\sharp$-зображенні 57

2.4. Геометрія циліндричного $\Delta^{\sharp}$-зображення чисел 59

2.5. Оператори у просторі $\Delta^{\sharp}$-зображень 62

2.6. Фрактальна розмірність Гаусдорфа-Безиковича і $\Delta^{\sharp}$-циліндри 66

2.7. Метричні задачі: фрактали канторівського типу 68

2.8. Деякі задачі ймовірнісної теорії чисел, пов'язані з $\Delta^{\sharp}$-зображенням чисел 73

Висновки до розділу 2 76

Розділ 3. **Δ^{μ}-зображення дійсних чисел** **77**

3.1. Означення Δ^{μ}-зображення числа 77

3.2. Задача, яка приводить до поняття Δ^{μ}-зображення 79

3.3. Раціональне Δ^{μ}-зображення 81

3.4. Геометрія циліндричного Δ^{μ}-зображення чисел 86

3.5. Метричні задачі, пов'язані з Δ^{μ}-зображенням чисел 90

3.6. Нормальні властивості дійсних чисел у їх Δ^{μ}-зображенні . . 97

Висновки до розділу 3 99

Розділ 4. **Застосування Δ^{μ}-зображення чисел** **100**

4.1. Фрактальні функції, пов'язані з Δ^{μ}-зображенням чисел . . . 100

4.1.1. Функція $f(x)$ та її властивості. 101

4.1.2. Функція $\varphi(x)$ та її властивості. 104

4.1.3. Функція $\gamma(x)$ та її властивості. 109

4.2. Функції, що зберігають хвости Δ^{μ}-зображення чисел 112

4.2.1. Хвостові множини і функції, що зберігають хвости Δ^{μ}-зображення чисел 112

4.2.2. Функція $\sigma_1(x)$ 114

4.2.3. Функція $d_s(x)$ 116

4.2.4. Оператор лівостороннього зсуву цифр Δ^{μ}-зображення числа 117

4.2.5. Оператор правостороннього зсуву цифр Δ^{μ}-зображення числа 118

4.2.6. Перетворення, що зберігають хвости Δ^{μ}-зображення чисел 121

4.3. Розподіли цифр Δ^{μ}-зображення рівномірно розподіленої випадкової величини 123

4.4. Розподіли випадкових величин з незалежними цифрами Δ^{μ}-зображення 127

Висновки до розділу 4 130

Загальні висновки **131**

Список використаних джерел **133**

Список публікацій автора **145**

СПИСОК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{N}$	— множина натуральних чисел
$\mathbb{Z}_0$	— множина цілих невід'ємних чисел
$\mathbb{R}$	— множина дійсних чисел
(a_n)	— числова послідовність (функція, визначена на множині $\mathbb{N}$)
(c)	— простий період у певному зображенні числа
$(c_1c_2\ldots c_n)$	— період у певному зображенні числа
$\Delta_{c_1c_2\ldots c_n}$	— циліндрична множина (циліндр) рангу n з основою $c_1c_2\ldots c_n$, що породжена певним представленням чисел
$\nabla_{c_1c_2\ldots c_n}$	— інтервал з такими кінцями, що й $\Delta_{c_1c_2\ldots c_n}$
$\lvert\Delta_{c_1c_2\ldots c_n}\rvert$	— довжина циліндричного відрізка
$\lambda(E)$	— міра Лебега множини E
$H^\alpha(E)$	— α-мірна міра Гаусдорфа (або H^α-міра Гаусдорфа) множини E
$\alpha_0(E)$	— розмірність Гаусдорфа-Безиковича множини E
$E \overset{k}{\sim} E'$	— множина E подібна множині E' з коефіцієнтом подібності k
$C[\Delta,(V_n)]$	— множина чисел півінтервала $(0,1]$, n-ий символ яких у $\Delta-$зображенні належить множині V_n
$P(E)$	— ймовірність події (множини) E
в.в.	— випадкова величина;
$\Box$	— кінець доведення;
$\nu = 1-\mu$	— параметр.

ВСТУП

Дисертаційна робота виконана в галузі метричної теорії чисел та геометрії представлення чисел рядами. Вона присвячена вивченню однієї однопараметричної сім'ї систем аналітичного кодування (зображення) дійсних чисел з півінтервалу $(0;1]$ засобами нескінченного алфавіту і знакопочережних рядів та їх застосуванням у метричній та ймовірнісній теоріях чисел, теорії функцій, фрактальній геометрії та фрактальному аналізі.

Актуальність дослідження. Існує декілька змістовних теорій дійсних чисел, в кожній з яких число має свою математично змістовну форму існування, зручну в одному відношенні і не завжди зручну в іншому аспекті. Це класичні теорії Р. Дедекінда [70], Г. Кантора [69], К. Вейєрштрасса [106], Колмогорова-Кавун [19,23] та інші. Вони взаємодоповнюють одна одну і цим самим розширюють можливості різнопланових застосувань теорії дійсних чисел.

Існують альтернативні шляхи побудови теорії або ж інші моделі загальної аксіоматичної теорії дійсних чисел. Вважаючи відомими згадані теорії, розглядають різні системи зображення (кодування) дійсних чисел. Після чого використовують наявні форми для конструювання, моделювання та дослідження різних математичних об'єктів. Для потреб теорії чисел, ймовірнісної теорії, теорії функцій, фрактальної геометрії та фрактального аналізу системи кодування є зручним знаряддям вивчення математичних об'єктів зі складною локальною тополого-метричною структурою (множин, функцій, мір, розподілів випадкових величин, перетворень простору, динамічних систем тощо). Одні з таких систем використовують скінченний [32,40], інші — нескінченний [2,11,17,30,45,58,59] алфавіти. Існують системи, які використовують змінний алфавіт [38,55,69].

Скінченна або зліченна множина A, що містить більше одного елемента, називається *алфавітом*, її елементи — *цифрами*, а $L=A\times A\times\ldots$ — *простором послідовностей елементів алфавіту* A. Якщо A містить s елементів, то алфавіт називається *s-символьним* (двосимвольним, трисимвольним тощо); якщо A — зліченна множина, то алфавіт називається *нескінченно-символьним*. Найчастіше у якості нескінченно-символьного алфавіту використовують множину натуральних або цілих невід'ємних чисел.

Сюр'єктивне відображення φ простору L в числову множину E називається *кодуванням* або *зображенням* чисел множини E засобами алфавіту A. Послідовність (a_n), що є прообразом числа x при кодуванні φ, називається його *Δ^{φ}-зображенням* і позначається $\Delta^{\varphi}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}$. При цьому число a_n називається *n-ою цифрою* цього зображення.

Якщо "більшість" чисел множини E мають єдине Δ^{φ}-зображення і лише незначна їх частина має не більше двох зображень, то кажуть, що *кодування має нульову надлишковість*. Кодування, при яких кожне число має єдине зображення, називають *кодуваннями з екстранульовою надлишковістю*. Кодування чисел, яке встановлюється через розклад числа в ряд, нескінченний добуток, ланцюговий дріб або інший математичний вираз, називається *аналітичним*.

Нехай $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ — впорядкований набір елементів алфавіту A, тобто $(c_1, c_2, \ldots, c_m) \in A^m$. *Циліндром рангу m з основою $c_1c_2\ldots c_m$*, що відповідає Δ^{φ}-зображенню чисел (або *Δ^{φ}-циліндром*), називається множина всіх тих $x = \Delta^{\varphi}_{a_1a_2\ldots a_m a_{m+1}\ldots}$, які мають таке Δ^{φ}-зображення, що $a_i = c_i$, $i=\overline{1,m}$, тобто $\Delta^{\varphi}_{c_1c_2\ldots c_m} = \left\{x:\ x=\Delta^{\varphi}_{c_1c_2\ldots c_m a_{m+1}a_{m+2}\ldots},\ a_{m+i}\in A\right\}$.

З даного означення випливають такі властивості циліндрів:

1. $\Delta^{\varphi}_{c_1c_2\ldots c_m i} \subset \Delta^{\varphi}_{c_1c_2\ldots c_m}$;
2. $E = \bigcup\limits_{a_1\in A} \Delta^{\varphi}_{a_1} = \bigcup\limits_{a_1\in A}\bigcup\limits_{a_2\in A} \Delta^{\varphi}_{a_1a_2} = \ldots = \bigcup\limits_{a_1\in A}\bigcup\limits_{a_2\in A}\ldots\bigcup\limits_{a_m\in A} \Delta^{\varphi}_{a_1a_2\ldots a_m}$;
3. $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \Delta^{\varphi}_{c_1c_2\ldots c_m} = \Delta^{\varphi}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}$.

Метричні властивості циліндрів залежать від самого відображення φ і мають індивідуальний характер.

Кодування називається *неперервним*, якщо циліндр є проміжком (відрізком, інтервалом, піввідрізком або півінтервалом) і при цьому для будь-якої послідовності (a_n), $a_n \in A$, переріз $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \Delta^{\varphi}_{a_1a_2\ldots a_m} \equiv \Delta^{\varphi}_{a_1a_2\ldots a_m\ldots}$ є числом (точкою), причому $\Delta^{\varphi}_{a_1a_2\ldots a_m\ldots} = x \to x' = \Delta^{\varphi}_{a'_1a'_2\ldots a'_m\ldots}$ $(m \to \infty)$, де $a_m \neq a'_m$, але $a_i = a'_i$ при $i < m$.

Тополого-метрична теорія дійсних чисел, у тій чи іншій системі зображення, займається вивченням топологічних і метричних властивостей множин чисел, визначених умовами на їх зображення. Основою для них є геометрія зображення. *Геометрія чисел* [86] — це галузь математики, яка займається розв'язанням теоретико-числових задач з використанням засобів геометрії. *Геометрія зображення (кодування) чисел* [32] є відносно новою віткою досліджень, яка вивчає геометричний зміст цифр, властивості циліндричних та хвостових множин, геометричне тлумачення рівнянь, нерівностей та їх систем, визначених у термінах цифр зображення, а також метричні відношення, породженні зображенням і геометричною мірою.

Кажуть, що Δ^{φ_1}-зображення і Δ^{φ_2}-зображення є *топологічно еквівалентними*, якщо виконуються умови:

1) вони мають спільний алфавіт;
2) відображення f, задане рівністю $f\left(\Delta^{\varphi_1}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}\right) = \Delta^{\varphi_2}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}$ є гомеоморфізмом.

Топологічна еквівалентність зображень може бути прихованою.

Нескінченно-символьні системи кодування принципово відрізняються від скінченно-символьних. Хоча між окремими представниками цих двох сімей, як показано в [12, 31], існує тісний зв'язок. А саме: нескінченно-символьне зображення можна отримати зі скінченно-символьного. Це добре проілюстровано в роботі [31].

Створення нової системи кодування дробової частини дійсного числа суттєво розширює коло об'єктів зі складною локальною тополого-метричною структурою і фрактальними властивостями, які відносно просто формально описуються та досліджуються. Неперервні строго монотонні функції допомагають отримувати нове кодування з уже відомого. Наприклад, класична сингулярна функція Салема [40] і двійкове зображення аргумента породжує Q_2-зображення значення функції [37].

У 1943 році Р. Салем [101] знайшов вираз неперервної строго зростаючої сингулярної функції $?(x)$, яку ввів у розгляд в 1911 році Г. Мінковський [87], як функцію, що встановлює взаємнооднозначну відповідність між всіма квадратичними ірраціональностями відрізка $[0;1]$ і раціональними числами з цього ж відрізка (далі функція Мінковського), означивши її в термінах елементарних ланцюгових дробів та медіант звичайних нескоротних дробів. Знайдений Салемом аналітичний вираз функції має вигляд:

$$\begin{gathered} ?\,(x) = ?([0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]) = \\ = 2^{1-a_1} - 2^{1-a_1-a_2} + 2^{1-a_1-a_2-a_3} + \ldots + (-1)^{n+1} 2^{1-a_1-\ldots-a_n} + \ldots, \end{gathered}$$

де $x = [0; a_1, a_2, ...]$ — розклад числа x в елементарний ланцюговий дріб, тобто

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}}, \quad a_n \in \mathbb{N}.$$

Функція Мінковського породжує нове кодування (зображення) дійсних чисел з $(0;1]$, яке ми називаємо $\Delta^\sharp$-*зображенням.* Йому присвячено другий розділ даного дисертаційного дослідження. Не зважаючи на те, що $\Delta^\sharp$-зображення є окремим випадком $\widetilde{Q}_\infty$-зображення, введеного і частково вивченого у роботах [40, 49] М.В. Працьовитого та О.Л. Лещинського, воно вповні заслуговує на самостійне дослідження, оскільки в даному випадку моделлю числа є знакопочережний ряд, членами якого є числа обернені до степенів двійки. Саме ця обставина дозволяє поглибити теорію і вичерпно розв'язати інші задачі.

У роботі [48] М.В. Працьовитого, А.В. Калашнікова, В.К. Безбородова побудовано однопараметричне узагальнення φ_μ функції Мінковського, де параметр $\mu \in (0;1)$. Функція φ_μ аналітично виражається:

$$\varphi_\mu(x) = \varphi_\mu\left([0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]\right) = (1-\mu)^{a_1-1} - (1-\mu)^{a_1-1}\mu^{a_2} + \ldots +$$
$$+(1-\mu)^{a_1+a_3+\ldots+a_{2n-1}+a_{2n+1}-1}\mu^{a_2+a_4+\ldots+a_{2n}} -$$
$$-(1-\mu)^{a_1+a_3+\ldots+a_{2n-1}+a_{2n+1}-1}\mu^{a_2+a_4+\ldots+a_{2n}+a_{2n+2}} + \ldots = \tag{1}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} A_n\left(1-\mu^{a_{2n}}\right),$$

де $A_n = (1-\mu)^{a_1+a_3+\ldots+a_{2n-1}-1}\mu^{a_2+a_4+\ldots+a_{2n-2}}$ і $\varphi_\mu(0)=0$, $\varphi_\mu(1)=1$, і є єдиним неперервним розв'язком системи функціональних рівнянь

$$\begin{cases} \varphi_\mu\left(\dfrac{x}{1+x}\right) = (1-\mu)\varphi_\mu(x), \\ \varphi_\mu(1-x) = 1 - \varphi_{1-\mu}(x). \end{cases} \tag{2}$$

Вона є сингулярною [21] строго зростаючою функцією. За її допомогою отримується нова однопараметрична сім'я систем кодування (зображення) чисел $x \in (0;1]$ з нескінченним алфавітом $A = \mathbb{N}$, яка ґрунтується на аналітичному представленні числа знакопочережним рядом або скінченною сумою. Кожна з систем визначається єдиним параметром $\mu \in (0;1)$.

Нескінченно-символьних систем кодування чисел, залежних від одного параметра, розглядалось небагато, серед них q_0^∞-зображення, що є перекодуванням Q_2-зображення засобами нескінченного алфавіту, яке вивчалось в роботі [12] Гончаренко Я.В. та Лисенко І.М.

Подання числа x у формі знакопочережного ряду (1) ми називаємо Δ^μ-*представленням*, а його символічний запис $\Delta^\mu_{a_1a_2\ldots a_m(\varnothing)}$ у випадку скінченної суми та $\Delta^\mu_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}$ при нескінченному розкладі — Δ^μ-*зображенням*.

Це зображення і йому відповідна тополого-метрична теорія є основним об'єктом даного дисертаційного дослідження. Топологія Δ^{μ}-зображення співпадає з топологією аналітичних зображень чисел елементарними ланцюговими дробами [40], знакопочережними рядами Люрота [58], Остроградського [30], Остроградського-Серпінського-Пірса [2,3], але його метрична теорія відрізняється від відповідних теорій для вказаних зображень. Згадані зображення (за виключенням $\widetilde{Q}_{\infty}$-зображення і розкладів чисел у ряди Люрота) не мають властивостей самоподібності тоді, як Δ^{μ}-зображення є однопараметричним і N-самоподібним. Зауважимо також, що сім'я $\widetilde{Q}_{\infty}$-зображень перетинається з сім'єю Δ^{μ}-зображень по $\Delta^{\sharp}$-зображенню.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана в рамках дослідження математичних об'єктів зі складною локальною будовою і фрактальними властивостями, що проводиться на кафедрі вищої математики НПУ імені М.П. Драгоманова та у відділі фрактального аналізу Інституту математики НАН України. Дослідження проводилось у рамках науково-дослідних тем:

– системи кодування дійсних чисел з нескінченним алфавітом і фрактали (№ державної реєстрації 0113U003009);

– дослідження еволюційних детермінованих та стохастичних систем складної тополого-метричної структури. Фрактальні властивості, керованість (№ державної реєстрації 0115U000557).

Об'єктом дослідження даної дисертаційної роботи є однопараметрична сім'я аналітичних нескінченно-символьних зображень дійсних чисел півінтервала $(0;1]$, породжених узагальненням сингулярної функції Мінковського, та їй відповідна тополого-метрична теорія.

Предмет дослідження. Геометрія Δ^{μ}-зображення і його частинного випадку $\Delta^{\sharp}$-зображення, фрактальні властивості цих зображень, метричні співвідношення ними породжені, умови раціональності числа, статистична незалежність цифр зображення.

Метою дослідження є вивчення властивостей Δ^{μ}-представлення дійсних чисел півінтервала $(0;1]$ і йому відповідного Δ^{μ}-зображення та їх застосування у метричній та ймовірнісній теоріях чисел, фрактальній геометрії та фрактальному аналізі функцій та мір.

Основними завданнями дисертаційного дослідження є: 1) вивчення геометрії Δ^{μ}-зображення чисел (властивостей хвостових та циліндричних множин і метричних відношень, з ними пов'язаних); 2) встановлення умов раціональності числа за його раціональним Δ^{μ}-зображенням; 3) побудова тополого-метричної теорії Δ^{μ}-зображення і його частинного випадку $\Delta^{\sharp}$-зображення; 4) розвиток фрактальної геометрії одиничного проміжка на основі Δ^{μ}-зображення; 5) застосування геометрії і тополого-метричної теорії Δ^{μ}-зображення до розв'язання задач метричної та ймовірнісної теорій чисел, зокрема до вивчення структури і спектральних властивостей розподілу випадкової величини, визначеного розподілами її цифр у Δ^{μ}-зображенні.

Методи дослідження. У роботі використовувались методи фрактального аналізу та фрактальної геометрії, метричної теорії чисел, математичного аналізу, теорії функцій та теорії ймовірностей.

У дисертації використовувалась методологія, запропонована у роботах М.В. Працьовитого та його учнів при дослідженні різних зображень чисел з нескінченним алфавітом, зокрема таких, що ґрунтуються на розкладах чисел в знакодотанті ряди Люрота, Енгеля, Сильвестера та знакопочережні ряди Люрота, Остроградського-Серпінського-Пірса, Остроградського, в елементарні ланцюгові дроби.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні наукові результати, що виносяться на захист:

1) введено в розгляд і детально вивчено кодування дійсних чисел засобами нескінченного алфавіту, яке ґрунтується на розкладі чисел у знакопочережні двійкові ряди і породжується сингулярною функцією Мінковського.

Встановлено його зв'язок з класичним двійковим зображенням, доведено критерій раціональності числа, розв'язано ряд задач метричного, топологічного та фрактального змісту;

2) створено цілісну теорію Δ^{μ}-зображення чисел з $(0;1]$, яка включає геометрію, метричну та ймовірнісну теорії, опис нормальних властивостей чисел, результати дослідження тополого-метричних і фрактальних властивостей множин чисел, визначених обмеженнями на використання цифр у зображеннях. Для підкласу раціональних Δ^{μ}-зображень спростовано гіпотезу по критерій раціональності числа;

3) застосування Δ^{μ}-зображення для конструювання і дослідження властивостей кусково-неперервних функцій та неперервних перетворень $[0;1]$, які зберігають властивості Δ^{μ}-зображення чисел, зокрема, їх хвости; розподілів випадкових величин, індукованих розподілами цифр Δ^{μ}-зображення.

Всі одержані результати є новими, строго і повно обґрунтованими.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має в основному теоретичний характер. Разом з цим отримані результати можуть бути використані для конструювання та дослідження функцій зі складною локальною структурою і фрактальними властивостями, об'єктів фрактальної геометрії, а також ймовірнісних мір, зосереджених на нуль-множинах Лебега, та динамічних систем зі складними відображеннями.

Особистий внесок здобувача. Усі положення і результати, які виносяться на захист, належать автору і отримані самостійно. У спільних з науковим керівником публікаціях Працьовитому М.В. належить загальна постановка задач, ідеї доведень та перевірка отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційного дослідження доповідались на *наукових конференціях* та *семінарах*:

– Міжнар. матем. конф. “Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки” до 100-річчя від дня народження члена-кореспондента НАНУ Г.М. Положого (Київ, 2014);

– П’ятнадцята міжнародна наукова конференція імені акад. Михайла Кравчука (Київ, 2014);

– IV Міжнародна Ганська конференція, присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана (Чернівці, 2014);

– International conference “Probability, Reliability And Stochastic Optimization” (Kyiv, 2015);

– Четверта всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики (Київ, 2015);

– International Conference of Young Mathematicians (Kyiv, 2015);

– Міжнародна науково-методична конференція “Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі” (Київ, 2015);

– Наукова конференція, присвячена 100-річчю від дня народження К.М. Фішмана та М.К. Фаге (Чернівці, 2015);

– X Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, присвячена 70-річчю Ю.А. Дрозда (Одеса, 2015);

– П’ята всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики (Київ, 2016);

– Четверта Міжнародна науково-практична конференція “Відкриті еволюціонуючі системи” (Ніжин, 2016);

– Всеукраїнська науково-методична конференція “Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі” (Київ, 2016);

– International mathematical conference “Groups and Actions: Geometry and Dynamics” (Kyiv, 2016);

– алгебраїчний семінар Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор Ю. А. Дрозд);

– семінар відділу фрактального аналізу Інституту математики НАН України та НПУ імені М.П. Драгоманова (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор М. В. Працьовитий);

– семінар “Стохастичні диференціальні рівняння” кафедри загальної математики мех.-мат. фак-ту КНУ ім. Т. Шевченка (керівники: доктори фіз.-мат. наук, професори Г. Л. Кулініч, О. М. Станжицький).

Публікації. Основні результати дослідження викладено у 6 статтях [1а–6а], опублікованих у виданнях, внесених до переліку наукових фахових видань України, з них 3 статті [2а, 5а, 6а] у наукових виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз (Zentralblatt MATH, Scopus), та додатково відображено у матеріалах конференцій [7а–19а].

Структура дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, розбитих на підрозділи, висновків до кожного розділу та загальних висновків, списку використаних джерел (107 найменувань) та списку публікацій автора (19 найменувань), списку умовних позначень. Загальний обсяг роботи — 147 сторінок.

Основний зміст роботи. У **вступі** обґрунтовано актуальність дослідження, визначено його об'єкт, предмет, мету і завдання, висвітлено наукову новизну, практичне значення, анонсовано основні результати.

Розділ 1 **"Огляд літератури та концептуальні засади дослідження"** носить вступний характер. У ньому означено ключові поняття та сформульовано необхідні для подальших досліджень факти, здійснено огляд літератури, який безпосередньо стосується теми дисертаційної роботи.

Підрозділ 1.1 висвітлює основні поняття теорії фракталів. У пункті 1.1.1 наведено означення самоподібності та N-самоподібності множин, самоподібної розмірності; пункт 1.1.2 присвячено поняттям міри Гаусдорфа і розмірності Гаусдорфа-Безиковича та їх властивостям.

У підрозділі 1.2 описано геометрію та метричні співвідношення систем кодування дійсних чисел з нескінченним алфавітом, що тісно пов'язані з об'єктом дослідження, зокрема, геометрію представлення чисел елементарними ланцюговими дробами, в термінах якого означується функція Мінковського, яка є відправним пунктом даної роботи. Підрозділ 1.3 присвячено огляду попередніх результатів дослідження властивостей цієї функції.

У пункті 1.2.2 розкривається зміст $\widetilde{Q}_\infty$-зображення дійсних чисел, яке визначається набором параметрів $q_0, q_1, \ldots, q_n, \ldots$, $\left(\sum\limits_{i=0}^{\infty} q_i = 1\right)$ і ґрунтується на наступному твердженні:

Теорема 1.2.1 ([40, с. 269],[49]). *Для будь-якого числа* $x \in (0;1]$ *існує скінченний набір* $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ *або послідовність* (a_n), $a_n \in \mathbb{N}$ *такі, що*

$$x = \beta_{a_1(x)} + \sum_{k=2}^{m} \left[\beta_{a_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} q_{a_j(x)}\right] \equiv \Delta^{\widetilde{Q}_\infty}_{a_1 a_2 \ldots a_m(\varnothing)} \tag{1.2.3}$$

або

$$x = \beta_{a_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\beta_{a_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} q_{a_j(x)}\right] \equiv \Delta^{\widetilde{Q}_\infty}_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}, \tag{1.2.4}$$

де $\beta_0 = 0$, $\beta_{a_{2k}} = \sum\limits_{j=0}^{a_{2k}-1} q_j$, $\beta_{a_{2k-1}} = 1 - \sum\limits_{j=0}^{a_{2k-1}} q_j$.

У підрозділі 1.4 описано одне з можливих (найпростіше) узагальнень функції Мінковського і досліджено ним породжене Δ^q-зображення чисел $(0;1]$, вивчено його геометрію і вказано застосування.

Теорема 1.4.1. *Нехай* $(0;1) \ni q$ *— фіксоване число. Для будь-якого* $x \in (0;1]$ *існує скінченний набір* $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ *або послідовність* (a_n) *натуральних чисел таких, що*

$$x = \sum_k (A_k - A'_k), \tag{1.4.2}$$

де $A_k = (1-q)^{2k-2} q^{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2k-1} - (2k-1)}$, $A'_k = (1-q)^{2k-1} q^{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2k} - 2k}$.

Подання числа x у формі (1.4.2) називається його Δ^q*-представленням*, а його символічний запис $\Delta^q_{a_1 a_2 \ldots a_n(\varnothing)}$ або $\Delta^q_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}$ в залежності від скінченності чи нескінченності розкладу — Δ^q*-зображенням* числа x.

Зауважимо, що Δ^q-зображення є окремим випадком $\widetilde{Q}_\infty$-зображення при $q_0 = 1 - q$, $q_k = (1-q)q^k$, яке, будучи однопараметричним, заслуговує на самостійну увагу. Окремий інтерес викликає випадок, коли q є раціональним числом.

У підрозділі 1.5 розглядається суттєво інше узагальнення функції Мінковського, яке введене і вивчалось у роботах [21,48]. Це функція φ_μ, про яку йшлося в обґрунтуванні актуальності. Вона виражається рівністю (1.5.2).

Другий розділ **“$\Delta^\sharp$-зображення дійсних чисел”** присвячено нескінченно-символьному зображенню чисел півінтервала (0;1], яке породжується класичною функцією Мінковського.

Теорема 2.1.1. *Для будь-якого $x \in (0;1]$ існує скінченна або нескінченна послідовність натуральних чисел (a_n) така, що*

$$x = \sum(-1)^{k-1}2^{1-a_1-a_2-\ldots-a_k}.$$

Таке подання числа x називається його $\Delta^\sharp$-*представленням*, а його символічний запис $\Delta^\sharp_{a_1\ldots a_n\ldots}$ у випадку нескінченної суми та $\Delta^\sharp_{a_1\ldots a_n(\varnothing)}$ у випадку скінченного розкладу — $\Delta^\sharp$-*зображенням*. У підрозділі 2.1 доведено, що $\Delta^\sharp$-зображення має нульову надлишковість і встановленого його зв'язок з класичним двійковим зображенням, який виражає наступне твердження.

Теорема 2.1.2. *Мають місце рівності:*

1) $\Delta^\sharp_{a_1a_2\ldots a_{2k}(\varnothing)} = \Delta^2_{\underbrace{0\ldots0}_{a_1-1}\underbrace{1\ldots1}_{a_2}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{a_{2k-1}}\underbrace{1\ldots1}_{a_{2k}}(0)}$;

2) $\Delta^\sharp_{a_1a_2\ldots a_{2k}a_{2k+1}(\varnothing)} = \Delta^2_{\underbrace{0\ldots0}_{a_1-1}\underbrace{1\ldots1}_{a_2}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{a_{2k-1}}\underbrace{1\ldots1}_{a_{2k}}\underbrace{0\ldots0}_{a_{2k+1}-1}1(0)}$;

3) $\Delta^\sharp_{a_1a_2\ldots a_n\ldots} = \Delta^2_{\underbrace{0\ldots0}_{a_1-1}\underbrace{1\ldots1}_{a_2}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{a_{2k-1}}\underbrace{1\ldots1}_{a_{2k}}\ldots}$.

У підрозділі 2.2 наведено ймовірнісну задачу, яка приводить до $\Delta^\sharp$-зображення і встановлено, що функція Мінковського $?(x)$ є функцією розподілу випадкової величини $\xi = [0;\eta_1,\eta_2,...,\eta_n,...]$, представленої елементарним ланцюговим дробом, елементи η_n якого утворюють послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, які набувають значень $1,2,3,\ldots,k,\ldots$ з ймовірностями 2^{-1}, 2^{-2}, $2^{-3},\ldots,2^{-k},\ldots$ відповідно.

У підрозділі 2.3 обґрунтовується критерій раціональності числа у його $\Delta^\sharp$-зображенні.

Теорема 2.3.1. *Для того щоб число $x \in (0,1]$ було раціональним, необхідно і достатньо, щоб його $\Delta^\sharp$-зображення було скінченним або періодичним.*

Геометрії $\Delta^\sharp$-зображення присвячено підрозділ 2.4.

Лема 2.4.1. *Циліндр $\Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m}$ є відрізком, причому $\Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m} = [a-\delta; a]$, коли $m = 2k-1$, і $\Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m} = [a; a+\delta]$, коли $m = 2k$, де $\delta = \frac{1}{2^{c_1+c_2+\ldots+c_m}}$, $a = \frac{1}{2^{c_1-1}} - \frac{1}{2^{c_1+c_2-1}} + \ldots + \frac{(-1)^{m-2}}{2^{c_1+c_2+\ldots+c_{m-1}-1}} + \frac{(-1)^{m-1}}{2^{c_1+c_2+\ldots+c_m-1}}$.*

Наслідок 2.4.1. *Для довжини циліндра $\Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m}$ рангу m мають місце співвідношення: $|\Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m}| = \dfrac{1}{2^{c_1+c_2+\ldots+c_m}} \leqslant \dfrac{1}{2^m} \to 0 \quad (m \to \infty)$.*

Наслідок 2.4.2. *Для довільного циліндра $\Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m}$ має місце рівність (основне метричне відношення)*

$$|\Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m i}| = 2^{-i}|\Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m}|, \quad i = 1, 2, \ldots .$$

У підрозділі 2.5 вивчено оператори лівостороннього і правстороннього зсувів цифр $\Delta^\sharp$-зображення дійсних чисел з $(0;1]$, зокрема встановлено їх кускову лінійність, що свідчить про N-самоподібність зображення.

Підрозділ 2.6 присвячено розв'язанню традиційної задачі теорії розмірності Гаусдорфа–Безиковича — задачі [3, 5, 45] про те, чи достатньо класу множин Φ для того, щоб $\alpha_0(E, \Phi) = \alpha_0(E)$ і доведено, що при обчисленні (рівноцінно означенню) розмірності Гаусдорфа-Безиковича борелівських підмножин [0;1] можна обмежитись зв'язними об'єднаннями циліндрів.

Нехай W — клас усіх зв'язних множин, що є об'єднаннями циліндрів однакового рангу, які належать одному і тому ж циліндру попереднього рангу, тобто множин вигляду

$$(1)\ \Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m}, (2)\ \bigcup_{i=n}^{\infty} \Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m i},\ (3)\ \bigcup_{i=1}^{n} \Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m i}, (4)\ \bigcup_{i=k}^{n} \Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m i}.$$

для всіх $k, m, n \in \mathbb{N}$ і наборів натуральних чисел $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$.

Теорема 2.6.1. *Класу множин W достатньо для визначення розмірності Гаусдорфа–Безиковича довільної борелівської множини $E \subset [0,1]$, тобто $\alpha_0(E, \mathrm{W}) = \alpha_0(E)$.*

У підрозділі 2.7 для множин канторівського типу, визначених обмеженнями на вживання цифр, виведені рівняння для обчислення самоподібної та N-самоподібної розмірностей, формули для обчислення міри Лебега. У підрозділі 2.8 вказано застосування $\Delta^{\sharp}$-зображення у ймовірнісній теорії чисел, а саме: в теорії розподілів в.в., індукованих розподілами їх цифр.

Теорема 2.8.1. *Якщо випадкова величина $\tau = \Delta^{\sharp}_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_k\ldots}$ має рівномірний на $(0,1]$ розподіл, то цифри τ_k її $\Delta^{\sharp}$-зображення є незалежними випадковими величинами, що мають однакові розподіли*

$$P\{\tau_k = i\} = \tfrac{1}{2^i}, \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Теорема 2.8.2. *Якщо цифри ξ_k $\Delta^{\sharp}$-зображення в.в. $\xi = \Delta^{\sharp}_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n\ldots}$ є незалежними випадковими величинами, які набувають значень $1, 2, \ldots, i, \ldots$ відповідно з ймовірностями $p_{1k}, p_{2k}, \ldots, p_{ik}, \ldots$ $\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_{ik} = 1,\ k \in \mathbb{N}\right)$, то розподіл ξ є або чисто дискретним, або чисто неперервним (неатомарним), причому чисто дискретним — тоді, коли $M = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\limits_i\{p_{ik}\} > 0$. Точковий спектр (множина атомів) дискретно розподіленої випадкової величини ξ складається з точки x_0 такої, що $p_{a_j(x_0)j} = \max\limits_i\{p_{ik}\}$, і всіх точок x, які мають властивість $p_{a_j(x)j} > 0$ для будь-якого $j \in \mathbb{N}$ і існує таке $m \in \mathbb{N}$, що $a_j(x) = a_j(x_0)$ при $j \geqslant m$.*

У розділі 3 **"Δ^{μ}-зображення дійсних чисел"** обґрунтовується Δ^{μ}-зображення чисел, що узагальнює $\Delta^{\sharp}$-зображення і співпадає з ним при $\mu = \frac{1}{2}$.

Теорема 3.1.1. *Нехай $(0,1) \ni \mu$ — фіксоване число (параметр). Для будь-якого $x \in (0,1]$ існує скінченний впорядкований набір $(a_1, \ldots, a_m)$ або послідовність натуральних чисел (a_n) такі, що*

$$x = (1-\mu)^{a_1-1} - (1-\mu)^{a_1-1}\mu^{a_2} + (1-\mu)^{a_1+a_3-1}\mu^{a_2} - (1-\mu)^{a_1+a_3-1}\mu^{a_2+a_4} + \ldots +$$
$$+ (1-\mu)^{a_1+a_3+\ldots+a_{2n-1}-1}\mu^{a_2+a_4+\ldots+a_{2n-2}} - (1-\mu)^{a_1+a_3+\ldots+a_{2n-1}-1}\mu^{a_2+\ldots+a_{2n}} + \ldots =$$
$$= \sum_n (B_n - B_n{}'), \qquad (3.1.1)$$

де $B_n = (1-\mu)^{a_1+a_3+\ldots+a_{2n-1}-1}\mu^{a_2+a_4+\ldots+a_{2n-2}}$, $B_n{}' = B_n \cdot \mu^{a_{2n}}$.

У підрозділі 3.2 вказується задача, яка приводить до поняття Δ^μ-зображення дійсного числа. Якщо μ — раціональне число з інтервалу $(0;1)$, то Δ^μ-зображення чисел називається *раціональним Δ^μ-зображенням*, $\Delta^\sharp$-зображення є саме таким. У підрозділі 3.3, виділивши зліченний підклас раціональних Δ^μ-зображень, ми вказали достатні умови раціональності числа і спростували гіпотезу про те, що критерій раціональності числа, знайдений для $\Delta^\sharp$-зображення, матиме місце для довільного Δ^μ-зображення.

Лема 3.3.1. *Якщо раціональне Δ^μ-зображення числа x скінченне або періодичне, то саме число x є раціональним.*

Теорема 3.3.1. *Якщо число $\frac{1}{2} \neq \mu = \frac{p}{s}$ — правильний нескоротний дріб, причому s — просте число і $s-p \neq 1$, то число $\frac{1}{s-p}$ має нескінченне неперіодичне Δ^μ-зображення.*

Підрозділ 3.4 присвячено геометрії Δ^μ-зображення.

Лема 3.4.1. *Циліндр $\Delta^\mu_{c_1c_2\ldots c_m}$ є відрізком, причому*
якщо m — непарне, то $\Delta^\mu_{c_1c_2\ldots c_{2k-1}} = [a-\delta; a]$, де

$$a = (1-\mu)^{c_1-1} - (1-\mu)^{c_1-1}\mu^{c_2} + \ldots + (1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2k-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2k-2}},$$

$$\delta = (1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2k-1}-1} \cdot \mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2k-2}+1};$$

якщо m — парне, то $\Delta^\mu_{c_1c_2\ldots c_{2k}} = [a; a+\delta]$, де

$$a = (1-\mu)^{c_1-1} - (1-\mu)^{c_1-1}\mu^{c_2} + \ldots +$$

$$+(1-\mu)^{c_1+\ldots+c_{2k-1}-1}\mu^{c_2+\ldots+c_{2k-2}} - (1-\mu)^{c_1+\ldots+c_{2k-1}-1}\mu^{c_2+\ldots+c_{2k}},$$

$$\delta = (1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2k-1}} \cdot \mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2k}}.$$

Наслідок 3.4.1. *Довжина циліндра виражається формулою:*

$$|\Delta^\mu_{c_1c_2\ldots c_m}| = \begin{cases} (1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2k-1}-1} \cdot \mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2k-2}+1}, & m = 2k-1, \\ (1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2k-1}} \cdot \mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2k}}, & m = 2k. \end{cases}$$

Наслідок 3.4.2. *Якщо $\Delta^\mu_{c_1c_2\ldots c_m}$ — фіксований циліндр, то має місце рівність (основне метричне відношення)*

$$\frac{|\Delta^\mu_{c_1c_2\ldots c_m i}|}{|\Delta^\mu_{c_1c_2\ldots c_m}|} = \begin{cases} (1-\mu)\mu^{i-1}, & \text{коли } m = 2k-1, \\ \mu(1-\mu)^{i-1}, & \text{коли } m = 2k. \end{cases}$$

У підрозділі 3.5 розв'язано метричні задачі, пов'язані з Δ^{μ}-зображенням чисел, а саме: вивчено тополого-метричні властивості множин чисел з певними умовами на використання цифр у їх Δ^{μ}-зображенні.

Теорема 3.5.1. *Якщо V — власна підмножина множини $\mathbb{N}$, потужність якої більша за одиницю, то множина*

$$C[\Delta^{\mu}, V] = \{x : \ x = \Delta^{\mu}_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}, \ a_n \in V \subset \mathbb{N}\}$$

1) є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега; 2) самоподібною, якщо V — скінченна і N-самоподібною, якщо V — нескінченна. Її самоподібна розмірність співпадає з фрактальною розмірністю Гаусдорфа-Безиковича α_0, яка задовольняє умову:

$$\alpha_0\left(C\left[\Delta^{\mu}, V\right]\right) = \sup_n \left\{ x : \sum_{u,v \in V \cap \{1,2,\ldots,n\}} \left((1-\mu)^u \mu^v\right)^x = 1 \right\}.$$

Теорема 3.5.2. *Множина*

$$C \equiv C[\Delta^{\mu}, (V_n)] = \left\{ x : \ x = \Delta^{\mu}_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}, \ a_n(x) \in V_n \subset \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N} \right\} \text{ є:}$$

1) *об'єднанням відрізків, якщо $V_n \neq \mathbb{N}$ скінченну кількість разів;*

2) *ніде не щільною, якщо $V_n \neq \mathbb{N}$ нескінченну кількість разів;*

3) *її міра Лебега обчислюється за формулою:*

$$\lambda(C) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_{2k})}{\lambda(F_{2k-2})} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda(\overline{F}_{2k})}{\lambda(F_{2k-2})}\right),$$

де $F_0 = (0;1]$, F_{2k} — замикання об'єднання циліндрів рангу $2k$, серед внутрішніх точок яких є точки множини C, $\overline{F}_{2k} = F_{2k-2} \setminus F_{2k}$.

Теорема 3.5.3. *Нехай c і s — фіксовані натуральні числа. Множина*

$$D \equiv D[\Delta^{\mu}, \overline{cs}] = \{x : \ x = \Delta^{\mu}_{a_1 \ldots a_n \ldots}, \ \text{де } \overline{a_n a_{n+1}} \neq \overline{cs} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\}$$

є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега.

Властивість числа $x \in (0;1]$ називають *нормальною* [40], якщо вона має місце для майже всіх (у розумінні міри Лебега) чисел з цього проміжку.

Теорема 3.6.1 (Про нормальну властивість числа). 1. *Множина B всіх чисел з $(0;1]$, послідовність цифр Δ^{μ}-зображення яких обмежена, є всюди щільною, континуальною множиною нульової міри Лебега.* 2. *Майже всі числа з $(0;1]$ задовольняють умову $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n(x) = \infty$.*

Четвертий розділ **“Застосування Δ^{μ}-зображення чисел”** присвячено застосуванням Δ^{μ}-зображення у фрактальному аналізі, метричній та ймовірнісній теоріях чисел.

У підрозділі 4.1 вивчаються функції з фрактальними властивостями, які визначені у термінах Δ^{μ}-зображення числа, досліджуються структурні властивості самої функції і фрактальні (самоподібні, самоафінні тощо) властивості суттєвих для неї множин.

Теорема 4.1.1. *Функція f, означена на множині H рівністю:* $y = f\left(\Delta^{\mu}_{a_1a_2a_3a_4\ldots}\right) = \Delta^{\mu}_{a_2a_1a_4a_3\ldots}$, 1) *є бієктивним відображенням;*
2) *у точках виду $\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_n i(\varnothing)}$ має неусувні розриви першого роду; у точках, що мають нескінченне Δ^{μ}-зображення, — усувний розрив.*
3) *Частина $\Gamma^i_f \equiv \{(x;y): \ \ x \in \Delta^{\mu}_{ii}, i \in \mathbb{N}, \ \ y = f(x)\}$ графіка Γ_f функції f подібна всьому графіку з коефіцієнтом подібності $k=(1-\mu)^i\mu^i$, причому*

$$\Gamma^i_f = \psi_i\left(\Gamma_f\right), \text{ де } \psi_i : \begin{cases} x' = (1-\mu)^i\mu^i \cdot x + (1-\mu)^{i-1}(1-\mu^i), \\ y' = (1-\mu)^i\mu^i \cdot y + (1-\mu)^{i-1}(1-\mu^i). \end{cases}$$

Графік функції f є N-самоафінною множиною: $\Gamma_f = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \psi_{ij}\left(\Gamma_f\right)$, *де*

$$\psi_{ij}: \begin{cases} x' = \Delta^{\mu}_{ija_1(x)a_2(x)\ldots}, \\ y' = \Delta^{\mu}_{jia_2(x)a_1(x)\ldots}, \end{cases} \text{ з } N\text{-самоподібною розмірністю } x = \frac{-1}{\log_2(1-\mu)\mu};$$

4) *перетворення f зберігає частоти цифр Δ^{μ}-зображення.*

Теорема 4.1.2. *Функція φ, означена на множині H рівністю:*

$$y = \varphi\left(\Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_{2n-1}a_{2n}\ldots}\right) = \Delta^{\mu}_{[a_1a_2][a_3a_4]\ldots},$$

1) *є сюр'єктивним, але не є ін'єктивним відображенням;*

2) *у точках виду $\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_n i(\varnothing)}$ має неусувні розриви першого роду; у точках, що мають нескінченне Δ^{μ}-зображення, — усувний розрив;*

3) *є ніде не монотонною функцією.*

4) *Якщо в Δ^{μ}-зображенні числа $y_0 \in H$ міститься нескінченна кількість цифр, відмінних від 1, то рівень $\varphi^{-1}(y_0)$ функції φ є континуальним; рівень $\varphi^{-1}\left(\Delta^{\mu}_{c_1\ldots c_m(1)}\right)$ є скінченним, $\varphi^{-1}\left(\Delta^{\mu}_{(1)}\right) = \Delta^{\mu}_{(1)}$.*

Теорема 4.1.3. *Функція γ, означена на множині H рівністю:*

$$y = \gamma\left(\Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_{2n-1}a_{2n}\ldots}\right) = \Delta^{\mu}_{[a_1a_2][a_2a_3]\ldots},$$

1) *є відображенням ні сюр'єктивним, ні ін'єктивним;*

2) *у точках виду $\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_n i(\varnothing)}$ має неусувні розриви першого роду; у точках, що мають нескінченне Δ^{μ}-зображення, — усувний розрив;*

3) *її множина значень має канторівський тип (є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега) і дробову фрактальну розмірність Гаусдорфа-Безиковича.*

Зауважимо, що функції, які розглядались, є фрактальними з різних точок зору. Графік першої функції є N-самоафінною множиною, друга функція має множину рівнів з фрактальними властивостями, суттєва для третьої функції множина — множина її значень — є фрактальною множиною.

Означення 4.2.1. Кажуть, що два Δ^{μ}-зображення $\Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}$ і $\Delta^{\mu}_{b_1b_2\ldots b_n\ldots}$ *мають однаковий хвіст* (або *перебувають у відношенні* $\sim$), якщо існують натуральні числа k та m такі, що $a_{k+j} = b_{m+j}$ для будь-якого $j \in \mathbb{N}$.

Бінарне відношення $\sim$, будучи відношенням еквівалентності, розбиває множину, на якій воно задане, на класи еквівалентності. Кожен з класів еквівалентності називається *хвостовою множиною.* Кожна хвостова множина визначається довільним своїм елементом (представником).

Будемо говорити, що два числа x і y з множини H мають однаковий хвіст у Δ^{μ}-зображенні (або перебувають у відношенні $\sim$), якщо їх Δ^{μ}-зображення перебувають у відношенні $\sim$. Символічно: $x \sim y$.

Теорема 4.2.1. *Кожна хвостова множина є зліченною і щільною в $(0,1]$ множиною; фактор-множина $F \equiv (0,1]/\sim$ є континуальною.*

Означення 4.2.2. Казатимемо, що функція f, яка визначена на множині H і набуває значень з цієї множини, *зберігає хвости* Δ^{μ}-зображень чисел, якщо для будь-якого $x \in (0,1]$ існують натуральні числа $k = k(x)$ і $m = m(x)$ такі, що $a_{k+n}(x) = a_{m+n}\left(f(x)\right) \quad$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

У підрозділі 4.2 конструюються і досліджуються властивості кусково-неперервних функцій та неперервних перетворень відрізка $[0;1]$, які зберігають властивості Δ^{μ}-зображення чисел, зокрема, їх хвости.

Зрозуміло, що функцій, які зберігають хвости Δ^{μ}-зображень чисел, існує нескінченна множина, але нас цікавлять лише неперервні функції. Найпростішим прикладом такої функції є тотожне перетворення $y = e(x)$.

Лема 4.2.1. *Функція $y = \sigma_1(x)$, означена на H рівністю*

$$y = \sigma_1(x) = \sigma_1\left(\Delta^{\mu}_{a_1(x)a_2(x)a_3(x)\ldots a_n(x)\ldots}\right) = \Delta^{\mu}_{[a_1+a_2+a_3]a_4a_5\ldots a_n\ldots},$$

аналітично виражається формулою

$$\sigma_1(x) = \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{a_2(x)} \cdot x + \nu^{a_1(x)+a_2(x)-1}\left(1 - \frac{1}{\mu^{a_2(x)}}\right), \text{ де } \nu = 1-\mu,$$

є лінійною на кожному циліндрі 2-го рангу, причому:

1) *є неперервною строго зростаючою;* 2) $\sup\limits_{x\in\Delta^{\mu}_{ij}} \sigma_1(x) = \nu^{i+j}$, $\inf\limits_{x\in\Delta^{\mu}_{ij}} \sigma_1(x) = 0$;

3) $\int\limits_{\Delta^{\mu}_{ij}} \sigma_1(x)dx = \frac{1}{2}\nu^{2i+j}\mu^j$; 4) $\int\limits_0^1 \sigma_1(x)dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\nu^3}{1+\nu^3}$.

Теорема 4.2.2. *Нехай s — фіксоване натуральне число. Функція d_s, означена на півінтервалі $(0,1]$ рівністю*

$$y = d_s(x) = d_s\left(\Delta^{\mu}_{a_1(x)a_2(x)a_3(x)\ldots}\right) = \Delta^{\mu}_{[s+a_1]a_2a_3\ldots},$$

аналітично виражається формулою $d_s(x) = \nu^s \cdot x$ і є:

1) *лінійною строго зростаючою функцією,*

2) $\inf\limits_{x\in(0,1]} d_s(x) = 0$, $\sup\limits_{x\in(0,1]} d_s(x) = \nu^s$*; крім цього, рівняння $\sigma_1(x) = d_s(x)$ не має розв'язків, якщо $a_2 \geqslant s$, а при $a_2 < s$ має їх зліченну множину:*

$$E = \left\{x : x = \Delta^{\mu}_{a_1(a_2[s-a_2])}, \text{ де } a_1 \in \mathbb{N},\ a_2 \in \{1,2,\ldots,s-1\}\right\}.$$

Лема 4.2.2. *Оператор лівостороннього зсуву цифр ω_2, означений на множині H рівністю $\omega_2\left(\Delta^{\mu}_{a_1a_2a_3a_4\ldots a_n\ldots}\right) = \Delta^{\mu}_{a_3a_4\ldots a_n\ldots}$, є сюр'єктивним, але не є ін'єктивним відображенням; аналітично виражається формулою*

$$\omega_2(x) = \frac{x}{\nu^{a_1(x)}\mu^{a_2(x)}} - \frac{1-\mu^{a_2(x)}}{\nu\mu^{a_2(x)}},$$

і є неперервною зростаючою функцією на кожному циліндрі 2-го рангу.

Лема 4.2.3. *Рівняння* $d_s(x)=\omega_2(x)$ *має зліченну множину розв'язків:* $x=\Delta^{\mu}_{a_1(a_2[s+a_1])}$, *де* a_1, a_2 *— довільні натуральні числа.*

Лема 4.2.4. *Нехай* i,j *— фіксовані натуральні числа. Функція, означена на* H *рівністю* $\delta_{ij}(x)=\delta_{ij}(\Delta^{\mu}_{a_1(x)a_2(x)\ldots})=\Delta^{\mu}_{ija_1a_2\ldots}$, *аналітично виражається формулою* $y=\delta_{ij}(x)=\nu^i\mu^j\cdot x+\nu^{i-1}\left(1-\mu^j\right)$ *і є лінійною строго зростаючою функцію на півінтервалі* $(0,1]$.

Теорема 4.2.3. *Мають місце наступні твердження.*

1. *Рівняння* $\sigma_1(x)=\delta_{ij}(x)$ *не має жодного розв'язку, якщо* $a_1+a_2\geqslant i$, *а при* $a_1+a_2<i$ *має їх зліченну множину*

$$\{x:\ x=\Delta^{\mu}_{(a_1a_2[i-a_1-a_2]j)},\ a_1,a_2\in\mathbb{N},\ (a_1+a_2)\in\{1,2,\ldots,i-1\}\}.$$

2. *Рівняння* $d_s(x)=\delta_{ij}(x)$ *не має розв'язків, якщо* $s\geqslant i$, *а при* $s<i$ *має їх зліченну множину* $\{x:x=\Delta^{\mu}_{([i-s]j)},\ s\in\{1,\ldots,i-1\}\}$.

3. *Рівняння* $\omega_2(x)=\delta_{ij}(x)$ *має безліч розв'язків:* $x=\Delta^{\mu}_{(a_1a_2ij)}$, *де* (a_1,a_2) *— довільна пара натуральних чисел.*

Нагадаємо, що *перетворенням* непорожньої множини E називається кожне взаємно однозначне, тобто бієктивне (одночасно ін'єктивне і сюр'єктивне), відображення цієї множини на себе.

Простими прикладами неперервних строго зростаючих перетворень, які зберігають хвости Δ^{μ}-зображення чисел, є функції:

$$\varphi_\tau(x)=\begin{cases} d_i(x), & \text{якщо}\ \ 0<x\leqslant x_1\equiv\Delta^{\mu}_{a_1(a_2[i+a_1])},\\ \omega_2(x), & \text{якщо}\ \ x_1<x\leqslant x_2\equiv\Delta^{\mu}_{(a_1a_2)},\\ e(x), & \text{якщо}\ \ x_2<x\leqslant 1,\end{cases}$$

де $\tau=(i,a_1,a_2)$ — довільна трійка натуральних чисел;

$$\psi(x)=\begin{cases} d_1(x), & \text{якщо}\ \ 0<x\leqslant x_1\equiv\Delta^{\mu}_{1(12)},\\ \omega_2(x), & \text{якщо}\ \ x_1<x\leqslant x_2\equiv\Delta^{\mu}_{(1112)},\\ \delta_{12}(x), & \text{якщо}\ \ x_2<x\leqslant x_3\equiv\Delta^{\mu}_{(12)},\\ e(x), & \text{якщо}\ \ x_3<x\leqslant 1.\end{cases}$$

Теорема 4.2.4. *Множина G всіх неперервних строго зростаючих перетворень півінтервала $(0,1]$, які зберігають хвости Δ^{μ}-зображення чисел, відносно операції $\circ$ — "суперпозиція функцій" утворює нескінченну некомутативну групу.*

Підрозділ 4.3 присвячений дослідженню розподілів цифр Δ^{μ}-зображення рівномірно розподіленої випадкової величини.

Теорема 4.3.1. *Якщо випадкова величина $\tau = \Delta^{\mu}_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots}$ має рівномірний на відрізку $[0,1]$ розподіл, то цифри τ_n її Δ^{μ}-зображення є незалежними випадковими величинами, причому цифри послідовності (τ_n) з непарними номерами однаково розподілені: $P\{\tau_{2k-1} = i\} = \mu \cdot \nu^{i-1}$; і цифри послідовності (τ_n) з парними номерами мають однаковий розподіл: $P\{\tau_{2k} = i\} = \nu \cdot \mu^{i-1}$.*

У підрозділі 4.4 розглядається випадкова величина $\tau = \Delta^{\mu}_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots}$, де (τ_n) — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, які набувають значень $1, 2, \ldots, n, \ldots$ відповідно з ймовірностями $P\{\tau_i = i\} = p_i$.

Лема 4.4.1. *Функція розподілу $F_\tau(x)$ випадкової величини τ має вигляд*

$$F_\tau(x) = \beta_1 + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\beta_k \prod_{j=1}^{k-1} p_{a_j(x)}\right), \tag{4.4.1}$$

де $\beta_k = \sum\limits_{i=a_k(x)+1}^{\infty} p_i$, при непарному k і $\beta_k = \sum\limits_{i=1}^{a_k(x)-1} p_i$ при парному k.

Теорема 4.4.1. *Якщо (τ_n) — задана послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, то розподіл випадкової величини $\tau = \Delta^{\mu}_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots}$ є сингулярним.*

Подяка. Автор висловлює щиру вдячність науковому керівнику доктору фізико-математичних наук, професору Миколі Вікторовичу Працьовитому за постановку задач, постійну увагу до роботи, цінні поради і зауваження, підтримку та допомогу.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА КОНЦЕПТУАЛЬНІ ЗАСАДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Цей розділ має вступний характер. У ньому ми формулюємо означення ключових понять та відомих фактів, які будуть використані у дослідженні. Разом з цим у ньому розглядається одне узагальнення відомої функції Мінковського і вивчається її відповідне зображення.

1.1. Елементи теорії фракталів

1.1.1. Самоподібність множин простору $\mathbb{R}^1$.

Означення 1.1.1. Непорожня обмежена множина E простору $\mathbb{R}^1$ називається *самоподібною*, якщо

1) $E = E_1 \bigcup E_2 \bigcup \ldots \bigcup E_n$, $n > 1$, причому

2) $E \overset{k_i}{\sim} E_i = f_i(E)$, де f_i — перетворення подібності з коефіцієнтом $k_i < 1$;

3) мінімальні відрізки, що містять E_i і E_j $(i \neq j)$ не перекриваються.

Найменше таке число n називається *показником самоподібності*, а (K, n) — *законом самоподібності*, де $K = \{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$.

Означення 1.1.2. Якщо E — самоподібна множина з законом самоподібності (K, n), $K = \{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$, то число α, яке є розв'язком рівняння

$$k_1^x + k_2^x + \ldots + k_n^x = 1, \tag{1.1.1}$$

називається *самоподібною розмірністю* множини E і позначається $\alpha_s(E)$.

Зауважимо, що рівняння (1.1.1) завжди має єдиний корінь, причому додатний.

Означення 1.1.3. Якщо ж множину E не можна подати у вигляді скінченного, але можна подати у вигляді зліченного об'єднання власних підмножин E_i, які подібні E, то її називають N*-самоподібною.*

Для N-самоподібної множини аналогічно вводиться поняття N-самоподібної розмірності. Рівняння для її визначення має вигляд:

$$\sum_{i=1}^{\infty} k_i^x = 1. \tag{1.1.2}$$

Зауважимо, що рівняння (1.1.2) не завжди має корінь, але коли має, то він задовольняє умову

$$\alpha_s^N = \sup_n \left\{ x : \sum_{i<n} k_i^x = 1 \right\}.$$

Тому саме це число α_s^N ми називаємо розв'язком рівняння (1.1.2).

Ще один підхід до самоподібних множин запропонував Хатчинсон [78]. Його зміст в наступному. Якщо задано набір перетворень подібності $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ простору $\mathbb{R}^n$ з коефіцієнтами $k_i < 1$, $i = \overline{1, n}$, то існує єдиний компакт (обмежена замкнена множина) X такий, що

$$X = f_1(X) \cup f_2(X) \cup \ldots \cup f_n(X), \tag{1.1.3}$$

тобто при вказаних умовах рівняння (1.1.3) має єдиний розв'язок у метричному просторі (K, ρ) всіх компактів з $\mathbb{R}^n$, де ρ — метрика Гаусдорфа.

Нагадаємо [57], що *метрикою Гаусдорфа* у просторі компактів K (всіх компактних підмножин евклідового простору $\mathbb{R}^n$) називається функція пари множин X і Y, означена рівністю: $\rho_H(X, Y) = \max\{\delta(X, Y), \delta(Y, X)\}$, де $\delta(X, Y) = \inf\{\varepsilon : \varepsilon > 0, Y \subset O_\varepsilon X\}$ — відхилення множини X від множини Y, при цьому $O_\varepsilon Z$ — ε-окіл множини Z, тобто

$$O_\varepsilon Z = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho_e(x, Z) \equiv \inf\{\rho_e(x, y), y \in Z\} < \varepsilon\}.$$

Зауважимо, що відхилення δ не володіє властивістю симетрії, а отже, не є метрикою.

1.1.2. Міри Гаусдорфа і розмірність Гаусдорфа-Безиковича. Нагадаємо деякі теоретичні відомості з теорії фракталів [40, с. 53–56].

Діаметр $d(E)$ множини $E\subset\mathbb{R}^1$ означується рівністю $d(E)\equiv\sup\limits_{x,y\in E}|x-y|$. Нехай Φ — сім'я підмножин простору $\mathbb{R}^1$ така, що для довільної підмножини $E\subset\mathbb{R}^1$ і для довільного $\varepsilon>0$ існує не більш ніж зліченне ε-покриття $\{E_j\}$ множини E, а саме: $E\subset\bigcup\limits_j E_j,\ E_j\in\Phi,\ d(E_j)\leqslant\varepsilon$.

Для заданої обмеженої множини $E\subset\mathbb{R}^1$, довільних $\alpha>0$ і $\varepsilon>0$ означимо величину $m^\alpha_\varepsilon(E,\Phi)=\inf\limits_{d(E_j)\leqslant\varepsilon}\left\{\sum\limits_j d^\alpha(E_j)\right\}$, де інфімум береться за всіма не більш ніж зліченним ε-покриттями $\{E_j\}$ множини E множинами $E_j\in\Phi$.

Означення 1.1.4. Невід'ємне число або нескінченність

$$H^\alpha(E,\Phi)=\lim_{\varepsilon\to0}m^\alpha_\varepsilon(E,\Phi)=\sup_{\varepsilon>0}m^\alpha_\varepsilon(E,\Phi)$$

називається *α-мірною мірою Гаусдорфа* (або *H^α-мірою Гаусдорфа*) обмеженої множини $E\subset\mathbb{R}^1$ відносно сім'ї покриттів Φ.

Міра Гаусдорфа має властивості:

1) $H^\alpha\left(\bigcup\limits_i E_i,\Phi\right)\leqslant\sum\limits_i H^\alpha(E_i,\Phi)$;
2) якщо $\alpha_1<\alpha_2$, то $H^{\alpha_1}(E,\Phi)\geqslant H^{\alpha_2}(E,\Phi)$;
3) якщо $H^{\alpha_1}(E,\Phi)=0$, то $H^{\alpha_2}(E,\Phi)=0$ при $\alpha_1<\alpha_2$;
4) якщо $H^{\alpha_2}(E,\Phi)=\infty$, то $H^{\alpha_1}(E,\Phi)=\infty$ при $0<\alpha_1<\alpha_2$.

Означення 1.1.5. Невід'ємне число

$$\alpha_0(E,\Phi)=\sup\{\alpha: H^\alpha(E,\Phi)=+\infty\}=\inf\{\alpha: H^\alpha(E,\Phi)=0\}$$

називається *розмірністю Гаусдорфа–Безиковича* множини E відносно сім'ї покриттів Φ.

Зауважимо, що розмірність Гаусдорфа–Безиковича для множини з $\mathbb{R}^1$ може набувати всіх значень з $[0;1]$ і має наступні властивості.

1) $\alpha_0(E,\Phi)=0$ для довільної не більш ніж зліченної множини E;
2) $\alpha_0(E_1,\Phi)\leqslant\alpha_0(E_2,\Phi)$, якщо $E_1\subset E_2$;

3) $\alpha_0(\bigcup\limits_n E_n, \Phi) = \sup\limits_n \alpha_0(E_n, \Phi)$;

4) якщо E_1 і E_2 — геометрично подібні множини, то $\alpha_0(E_1, \Phi) = \alpha_0(E_2, \Phi)$;

5) якщо Φ_1 — ширший клас множин, ніж Φ_2, то $\alpha_0(E, \Phi_1) \leqslant \alpha_0(E, \Phi_2)$.

Якщо Φ — сім'я всіх інтервалів або відрізків, то $\alpha_0(E, \Phi)$ ми позначаємо через $\alpha_0(E)$ і називаємо просто розмірністю Гаусдорфа–Безиковича.

Розмірність Гаусдорфа-Безиковича є показником масивності множини та "компактності" її точок. Завдяки властивості 3 (зліченної стабільності) по своїй суті вона є локальним поняттям. Розмірності двох афінно-еквівалентних множин евклідової площини мають однакові фрактальні розмірності Гаусдорфа-Безиковича. Ті континуальні множини, які мають нульову розмірність Гаусдорфа-Безиковича називаються *аномально фрактальними*.

Якщо самоподібна (N-самоподібна) множина задовольняє умову відкритої множини, то її самоподібна розмірність співпадає з розмірністю Гаусдорфа-Безиковича.

Кажуть [75], що самоподібна множина простору R^n, породжена набором перетворень подібності $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, задовольняє умову відкритої множини, якщо існує відкрита множина V така, що містить $\bigcup\limits_{i=1}^{n} f_i(V)$, причому елементи об'єднання не перекриваються.

1.2. Системи кодування дійсних чисел з нескінченним алфавітом

Під *системою кодування* чисел за допомогою алфавіту A називається сукупність засобів для ототожнення числа з впорядкованим скінченним або нескінченним набором елементів цього алфавіту.

1.2.1. Елементарні ланцюгові дроби. Одним з класичних способів кодування чисел півінтервала $(0; 1]$ за допомогою алфавіту, який складають натуральні числа, є розклад числа в елементарний ланцюговий дріб [40, 59]. Нагадаємо, що кожне раціональне число x можна подати у вигляді

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_k}}} \equiv [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k], \tag{1.2.1}$$

а ірраціональне — у вигляді

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}} \equiv [a_0; a_1, a_2, \ldots], \tag{1.2.2}$$

де $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_k \in \mathbb{N}$, який називається *розкладом x в елементарний ланцюговий дріб*, а символічний запис $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ — *зображенням цього числа.*

Очевидно, що $[a_0; a_1, \ldots, a_k + 1] = [a_0; a_1, \ldots, a_k, 1]$. Якщо домовитись не використовувати останнє зображення, то кожне дійсне число x єдиним чином представляється ланцюговим дробом, кожний елемент якого однозначно визначається x, тобто є функцією від x: $a_k = a_k(x)$. Вираз (1.2.1) є раціональним числом, тобто зображається звичайним дробом $\frac{p_k}{q_k}$, який називається *підхідним дробом порядку k* даного ланцюгового дробу.

Для кожного x, яке задовольняє умову $\dfrac{1}{s_1+1} < x < \dfrac{1}{s_1}$, виконується рівність $a_1(x) = s_1$, тобто $a_1 = a_1(x)$ є ступінчатою фукцією, яка постійна в кожному з півінтервалів (*півінтервалів 1-го рангу*) $\Delta_{s_1} = \left(\dfrac{1}{s_1+1}; \dfrac{1}{s_1}\right]$, має розриви в усіх точках, для яких $\dfrac{1}{x}$ є цілим числом, і необмежено зростає при $x \to 0$. Аналогічними властивостями володіє функція $a_2(x)$:

$$a_2(x) = s_2, \quad \text{якщо } x \in \Delta_{s_1 s_2} = \left(\frac{1}{s_1 + \frac{1}{s_2}}; \frac{1}{s_1 + \frac{1}{s_2+1}}\right] =$$

$$= \left[\frac{p_2(x)}{q_2(x)}; \frac{p_2(x)+p_1(x)}{q_2(x)+q_1(x)}\right) \quad \text{і} \quad \mathbb{N} \ni a_2(x) \to \infty \ \left(x \to \frac{1}{s_1}\right).$$

Півінтервали $\Delta_{s_1 i}$ $(i \in \mathbb{N})$ називають *півінтервалами 2-го рангу.* Кожний півінтервал 1-го рангу розбивається на зліченну множину півінтервалів 2-го рангу $\Delta_{s_1} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Delta_{s_1 i}$, причому $\sup \Delta_{s_1 i} = \inf \Delta_{s_1(i+1)}$, в середині яких $a_2(x)$ постійна. І т.д. Півінтервал $\Delta_{a_1(x)\ldots a_k(x)}$ з кінцями

$$\frac{p_k(x)}{q_k(x)} = [0; a_1(x), \ldots, a_k(x)] \quad \text{і} \quad \frac{p_k(x)+p_{k-1}(x)}{q_k(x)+q_{k-1}(x)} = [0; a_1(x), \ldots, a_k(x)+1],$$

називають *півінтервалом k-го рангу.* Причому

$$\Delta_{a_1(x)\ldots a_{2k}(x)} = \left[[0; a_1(x), \ldots, a_{2k}(x)]; [0; a_1(x), \ldots, a_{2k}(x)+1]\right),$$

$$\Delta_{a_1(x)\ldots a_{2k-1}(x)} = \left([0; a_1(x), \ldots, a_{2k-1}(x)+1]; [0; a_1(x), \ldots, a_{2k-1}(x)]\right].$$

Для довжини півінтервала k-го рангу має місце формула:

$$\left|\Delta_{a_1(x)\ldots a_k(x)}\right| = \frac{1}{q_k(x)\left(q_k(x)+q_{k-1}(x)\right)},$$

де $q_k(x)$, $q_{k-1}(x)$ — знаменники підхідних дробів довільно числа x даного циліндра, що визначаються рекурентно $q_{-1} = 0$, $q_0 = 1$, $q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Лема 1.2.1 ([40, с. 231]). *В будь-якому інтервалі k-го рангу $\nabla_{a_1 a_2 \ldots a_k}$ інтервал $\nabla_{a_1 a_2 \ldots a_k s}$ займає таку частину*

$$\frac{|\nabla_{a_1\ldots a_k s}|}{|\nabla_{a_1\ldots a_k}|} = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}}{\left(1 + \frac{q_{n-1}}{s q_n}\right)\left(1 + \frac{1}{s} + \frac{q_{n-1}}{s q_n}\right)} \quad \text{і} \quad \frac{1}{3s^2} < \frac{|\nabla_{a_1\ldots a_k s}|}{|\nabla_{a_1\ldots a_k}|} < \frac{2}{s^2}.$$

1.2.2. $\widetilde{Q}_\infty$-зображення дійсних чисел.

Теорема 1.2.1 ([40, с. 269],[49]). *Якщо* $\widetilde{Q}_\infty = (q_0, q_1, \ldots, q_n, \ldots)$ *— задана послідовність додатних чисел така, що* $q_0 + q_1 + \ldots + q_n + \ldots = 1$, *то для будь-якого числа* $x \in (0;1]$ *існує скінченний набір* $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ *або послідовність натуральних чисел* (a_n) *такі, що*

$$x = \beta_{a_1(x)} + \sum_{k=2}^{m}\left[\beta_{a_k(x)}\prod_{j=1}^{k-1} q_{a_j(x)}\right] \equiv \Delta^{\widetilde{Q}_\infty}_{a_1a_2\ldots a_m(\varnothing)} \tag{1.2.3}$$

або

$$x = \beta_{a_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty}\left[\beta_{a_k(x)}\prod_{j=1}^{k-1} q_{a_j(x)}\right] \equiv \Delta^{\widetilde{Q}_\infty}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}, \tag{1.2.4}$$

де $\beta_0 = 0$, $\beta_{a_{2k}} = \sum\limits_{j=0}^{a_{2k}-1} q_j$, $\beta_{a_{2k-1}} = 1 - \sum\limits_{j=0}^{a_{2k-1}} q_j$.

Запис $\Delta^{\widetilde{Q}_\infty}_{a_1a_2\ldots a_m(\varnothing)}$ для скінченного розкладу числа x і $\Delta^{\widetilde{Q}_\infty}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}$ для представлення його рядом називається $\widetilde{Q}_\infty$*-зображенням цього числа.*

Зауваження 1.2.1. Циліндр $\Delta^{\widetilde{Q}_\infty}_{c_1c_2\ldots c_m}$ є відрізком з кінцями $[a-\delta; a]$, коли m — непарне число і $[a; a+\delta]$, коли m — парне число, де

$$a = \sum_{k=1}^{m}\left[\beta_{c_k}\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j}\right], \qquad \delta = \prod_{j=1}^{m} q_{c_j},$$

а отже, породжує метричні співвідношення:

$$1)\ \left|\Delta^{\widetilde{Q}_\infty}_{c_1c_2\ldots c_m}\right| = \prod_{j=1}^{m} q_{c_j}; \qquad 2)\ \left|\Delta^{\widetilde{Q}_\infty}_{c_1c_2\ldots c_m i}\right| = q_i\left|\Delta^{\widetilde{Q}_\infty}_{c_1c_2\ldots c_m}\right|.$$

Останнє називається *основним метричним відношенням.*

Зауваження 1.2.2. $\widetilde{Q}_\infty$-зображення є N-самоподібним в силу основного метричного відношення $\dfrac{\left|\Delta^{\widetilde{Q}_\infty}_{c_1c_2\ldots c_m i}\right|}{\left|\Delta^{\widetilde{Q}_\infty}_{c_1c_2\ldots c_m}\right|} = q_i$, яке залежить лише від останньої цифри i і не залежить від основи циліндра $\Delta^{\widetilde{Q}_\infty}_{c_1c_2\ldots c_m}$.

1.2.3. Зображення чисел за допомогою збіжних знакопочережних рядів. Широкий спектр нескінченно-символьних систем кодувань складають моделі дійсного числа у вигляді збіжного знакопочережного ряду, членами якого є числа, обернені до натуральних. Це кодування чисел за допомогою рядів Люрота ($\widetilde{L}$-зображення) [58, 79, 80], Остроградського-Серпінського-Пірса ($\overline{O}^1$-зображення) [2, 3], Остроградського 2-го виду ($\overline{O}^2$-зображення) [30] тощо.

У 1990 році S. Kalpazidou, A. Knopfmacher і J. Knopfmacher [79] довели, що довільне дійсне число $x \in (0,1]$ можна подати у вигляді скінченної суми або нескінченного знакопочережного ряду:

$$x = \frac{1}{a_1} + \sum_{n \geqslant 2} \frac{(-1)^{n-1}}{a_1(a_1+1)\ldots a_{n-1}(a_{n-1}+1)a_n},\ a_n \in \mathbb{N}, \tag{1.2.5}$$

(далі знакопочережного ряду Люрота), причому кожне ірраціональне число має єдине нескінченне і неперіодичне представлення, а кожне раціональне число або скінченне, або періодичне. Цією ж групою авторів у 1991 році в роботі [80] було проведено дослідження деяких метричних властивостей представлення чисел знакопочережними рядами Люрота. Рівність (1.2.5) скорочено записують $\Delta^{\widetilde{L}}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}$ або $\Delta^{\widetilde{L}}_{a_1a_2\ldots a_k(\varnothing)}$ в залежності від того нескінченним чи скінченним є розклад числа x.

Дисертаційне дослідження Ю. В. Хворостіни [58] було присвячене геометрії $\widetilde{L}$-зображення, відповідній метричній та ймовірнісній теоріям чисел і їх застосуванням у теорії розподілів випадкових величин. Зауважимо лише, що для $\widetilde{L}$-зображення має місце основне метричне відношення:

$$\frac{|\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1c_2\ldots c_ni}|}{|\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1c_2\ldots c_n}|} = \frac{\frac{1}{c_1(c_1+1)\ldots c_n(c_n+1)i(i+1)}}{\frac{1}{c_1(c_1+1)\ldots c_n(c_n+1)}} = \frac{1}{i(i+1)}.$$

З виразу основного метричного відношення для $\widetilde{L}$-зображення, яке залежить лише від останньої цифри i і не залежить від основи циліндра $\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1c_2\ldots c_n}$, випливає, що $\widetilde{L}$-зображення є N-самоподібним.

Для будь-якого $x \in (0,1)$ існує послідовність (g_n), $g_n \in \mathbb{N}$ така, що

$$x = \frac{1}{g_1} - \frac{1}{g_1(g_1+g_2)} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{g_1(g_1+g_2)\dots(g_1+g_2+\dots g_n)} + \dots . \quad (1.2.6)$$

Розклад (1.2.6) числа x в ряд Остроградського 1-го виду скорочено записується $x = \overline{O}^1(g_1, g_2 \dots, g_n, \dots)$ і називається $\overline{O}^1$-зображенням числа x.

Основне метричне відношення для $\overline{O}^1$-зображення має вид:

$$\frac{\left|\Delta^{\overline{O}^1}_{c_1c_2\dots c_m i}\right|}{\left|\Delta^{\overline{O}^1}_{c_1c_2\dots c_m}\right|} = \frac{\frac{1}{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_m(\sigma_m+i)(\sigma_m+i+1)}}{\frac{1}{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_m(\sigma_m+1)}} = \frac{\sigma_m+1}{(\sigma_m+i-1)(\sigma_m+i)},$$

де $\sigma_m = \sigma_m(c_1, \dots, c_m) = \sum\limits_{i=1}^{m} c_i$, і залежить не лише від цифри i, а і від основи циліндра $\Delta^{\overline{O}^1}_{c_1c_2\dots c_m}$, що свідчить про несамоподібність $\overline{O}^1$-зображення.

Для довільного числа $x \in (0,1]$ існує послідовність натуральних чисел (q_n) така, що $q_k \in \mathbb{N}$, $q_{k+1} \geqslant q_k(q_k+1)$ і

$$x = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} + \dots + \frac{(-1)^{m-1}}{q_m} \equiv O^2(q_1, q_2, \dots, q_m) \quad (1.2.7)$$

або

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{q^n} \equiv O^2(q_1, q_2, \dots, q_n \dots). \quad (1.2.8)$$

Подання числа x у вигляді (1.2.7) називається його *розкладом в ряд Остроградського 2-го виду*, а символічний запис — O^2-*зображенням* цього числа.

Урівноправити цифри у зображенні числа можна перекодуванням:

$$x = O^2(q_1, q_2, \dots, q_n \dots) = \overline{O}^2(d_1, d_2, \dots, d_n \dots),$$

де $d_1 \equiv q_1$, $d_{n+1} \equiv q_{n+1} - q_n(q_n+1) + 1$, $n = 1, 2, \dots$.

Основне метричне відношення для $\overline{O}^2$-зображення має вид:

$$\frac{\left|\Delta^{\overline{O}^2}_{c_1c_2\dots c_m i}\right|}{\left|\Delta^{\overline{O}^2}_{c_1c_2\dots c_m}\right|} = \frac{\sigma_m(\sigma_m+1)}{(\sigma_m(\sigma_m+1)+i-1)(\sigma_m(\sigma_m+1)+i)},$$

де $\sigma_1 = c_1$, $\sigma_k = \sigma_{k-1}(\sigma_{k-1}+1) + c_k - 1$, $1 < k \leqslant m$, що свідчить про несамоподібність $\overline{O}^2$-зображення.

Тополого-метричну теорію рядів Остроградського-Серпінського-Пірса розвивав у своєму дисертаційному дослідженні О. М. Барановський [2], тополого-метричну, фрактальну та ймовірнісну теорії для рядів Остроградського 2-го виду — І. М. Працьовита [30].

1.3. Сингулярна функція Мінковського

Інтерес до функції Мінковського $?(x)$, введеної у 1911 р., не згасає протягом століття. У 1932 р. Данжуа [71] досліджував її властивості, а у 1938 р. довів її сингулярність [72] (похідна функції рівна нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега). У 1943 р. Салем [101], окрім доведення сингулярності, показав, що функція $?(x)$ в ірраціональних точках відрізка $[0;1]$ аналітично виражається рядом:

$$? \, (x) = ?([0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]) =$$
$$= 2^{1-a_1} - 2^{1-a_1-a_2} + 2^{1-a_1-a_2-a_3} + \ldots + (-1)^{n+1} 2^{1-a_1-\ldots-a_n} + \ldots ,$$

а в раціональних точках виражається скінченною сумою.

Вивчаючи модуль неперервності функції $?(x)$, Салем довів, що вона задовольняє умову Ліпшица порядку $\alpha = \frac{\log 2}{2 \log \gamma}$, де $\gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Часткова систематизація властивостей функції Мінковського наведена у [40], де, зокрема, зазначається, що функція $?(x)$:

— є функцією розподілу випадкової величини, елементи елементарного ланцюгового зображення якої є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами, що набувають значень $1, 2, ..., k, ...$ з ймовірностями $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2^2}, ..., \dfrac{1}{2^k}, ...$ відповідно.

— взаємно однозначно переводить раціональні числа в двійково-раціональні; квадратичні ірраціональності (числа виду $a+\sqrt{b}$, де a і b - раціональні) в раціональні числа. Справді, x є квадратичною ірраціональністю лише тоді, коли його розклад в ланцюговий дріб періодичний, що рівносильно періодичності двійкового запису.

У 1960 р. Kinney J. [82] довів, що розмірність Гаусдорфа-Безиковича множини точок росту функції $?(x)$ дорівнює $\alpha = \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^1 log_2(1+x)d?(x)\right)^{-1}$.

У 1995 р. Tichy R., Uitz J. [103], подовжуючи дослідження Kinney, отримали чисельні оцінки цієї константи; вивчали сім'ю неперервних строго зростаючих сингулярних функцій на одиничному відрізку та досліджували розмірність Гаусдорфа-Безиковича множин точок, де сингулярні функції мають не нульові похідні.

У 1998 р. Paradis J., Viader P., Bibiloni L. [93] функцію Мінковського подали у формі асимптотичної функції розподілу нумерації раціональних чисел з півінтервалу $(0, 1]$ та довели її сингулярність двома способами: вказано множину міри 1, на якій $?'(x) = 0$; з іншого боку, знайдено множину міри 1, яка відображається на множину міри 0 і навпаки. Продовжуючи дослідження, в 2001 р. [94], встановили, що похідна функції $?(x)$, якщо вона існує, може набувати лише двох значень — нуль або нескінченність.

Особлива увага до сингулярних функцій в останні десятиліття породжує природній інтерес до класичних прикладів таких функцій, які є основою для розробки нових методів їх дослідження. Цим обумовлено підвищення інтересу до функції $?(x)$ в останній час [15,62–68,73,74,81,83,88,92].

У 2004 р. Beaver O. і Garrity T. [68] побудували функцію подібну до функції Мінковського, яка є неперервною і має похідну рівну нулю майже скрізь, а також зберігає властивість взаємно однозначної відповідності між квадратичними ірраціональностями одиничного відрізку і раціональними числами на тому ж відрізку.

У 2006 р. Lamberger M. [83] розглядав певну точкову міру функції розподілу, яка дуже схожа на функцію Мінковського і означена за допомогою алгоритму Евкліда. Крім того, ним розглядається ціла сім'я функцій розподілу для якої доведено, що всі міри, які відповідають згаданим функціям, є взаємно сингулярними.

У 2007 р. Okamoto H., Wunsch M. [88] побудували ще одне узагальнення функції $?(x)$.

У 2008 р. Kessebohmer M., Stratmann B. [81] вивчали фрактальні властивості множин диференціальних особливостей функції Мінковського:

$$\Lambda_0 \equiv \{x\colon ?'(x) = 0\},\ \Lambda_\infty \equiv \{x\colon ?'(x) = \infty\},$$
$$\Lambda_\sim \equiv \{x\colon ?'(x) \text{ не існує, або } ?'(x) \neq \infty\}.$$

Дослідженням похідної функції $?(x)$ також займалися А. Душистова і Н. Мощевитін [15,74]. У 2010 р. для функції $?(x)$ було доведено, що $?'(x) = +\infty$ за умови $\limsup\limits_{t\to\infty} \frac{a_1+\ldots+a_t}{t} < \kappa_1 \equiv \frac{2\log\lambda_1}{\log 2} = 1{,}388^+$ і що $?'(x) = 0$ за умови $\liminf\limits_{t\to\infty} \frac{a_1+\ldots+a_t}{t} > \kappa_2 \equiv \frac{4L_5-5L_4}{L_5-L_4} = 4{,}401^+$, де $\log\left(\frac{j+\sqrt{j^2+4}}{2}\right) - j\cdot\frac{\log 2}{2}$. Сталі κ_1, κ_2 не можуть бути покращенні, також доведено, що $?'(x) = +\infty$ для всіх x, в яких всі неповні частки обмежені величиною 4. У 2013 р. [73] автори отримують необхідні й достатні умови, коли похідна функції Мінковського $?(x)$ дорівнює нулю або нескінченності. Ці умови сформульовані в термінах сум $S_x(t) = a_1 + \ldots + a_t$ елементів розвинення в ланцюговий дріб $x = [0; a_1, \ldots, a_t, \ldots]$. Зокрема, доводиться, що якщо існує таке C, що $S_x(t) \leqslant \kappa_1 t + \frac{\log t}{\log 2} + C$, де $\kappa_1 = \frac{2\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\log 2} = 1{,}388\ldots$, то $?'(x)$ існує і $?'(x) = +\infty$. Доведено, що коли існує така константа C, що $S_x(t) \geqslant \kappa_2 t - C$, де $\kappa_2 = \frac{4\log\frac{5+\sqrt{29}}{2} - 5\log(2+\sqrt{5})}{\log\frac{5+\sqrt{29}}{2} - \log(2+\sqrt{5}) - \log\sqrt{2}} = 4{,}401\ldots$. Тоді $?'(x)$ існує і $?'(x) = 0$. Показано, що умови на суму $S_x(t)$ непокращувані.

Alkauskas G. серію статей [62, 63, 65, 66] присвятив вивченню моментів і інтегральних перетворень функції $?(x)$. У 2011 р. [67] він встановив формулу для моментів, яка не містить явно елементарних ланцюгових дробів, хоча має приховану гарну інтерпретацію в термінах напівелементарних ланцюгових дробів. У 2012 р. [64] ним розглядаються можливі підходи до розв'язання гіпотези Салема [101] (Чи перетворення Фур'є–Стілтьєса функції Мінковського прямує до нуля на нескінченності), показується, що це перетворення задовольняє інтегральні й різнецеві функціональні рівняння.

1.4. Найпростіше узагальнення класичної функції Мінковського і йому відповідне зображення чисел

Функція Мінковського допускає різні узагальнення. Як вище зазначалося, вона є функцією розподілу випадкової величини $\xi = [0; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots]$, елементи ланцюгового зображення якої є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами, що набувають значень 1,2,..., $k, \ldots$ з ймовірностями $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, ..., \frac{1}{2^k}, ...$ відповідно. Заміною ймовірностей у розподілах елементів розкладу випадкової величини ξ в елементарний дріб на $(1-q), (1-q)q, ..., (1-q)q^{k-1}, ...$, отримується узагальнення функції Мінковського. Функція розподілу F_ξ випадкової величини ξ після такої заміни має наступний аналітичний вираз:

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = q^{a_1-1} - (1-q)q^{a_1+a_2-2} + (1-q)^2 q^{a_1+a_2+a_3-3} - \ldots +$$

$$+(1-q)^{2k-2} q^{a_1+\ldots+a_{2k-1}-(2k-1)} - (1-q)^{2k-1} q^{a_1+\ldots+a_{2k}-2k} + \ldots =$$

$$= \sum_k (V_k - V'_k) \equiv F_q(x), \tag{1.4.1}$$

де $V_k = (1-q)^{2k-2} q^{a_1+\ldots+a_{2k-1}-(2k-1)}$, $V'_k = (1-q)^{2k-1} q^{a_1+\ldots+a_{2k}-2k}$,

q — фіксований параметр з інтервала $(0;1)$.

Функція $F_q(x)$ є узагальненням функції Мінковського і породжує однопараметричне зображення дійсних чисел, яке ми позначаємо $\Delta^q_{a_1a_2\ldots a_k\ldots}$.

Теорема 1.4.1. *Нехай $(0;1) \ni q$ — фіксоване число. Для будь-якого $x \in (0;1]$ існує скінченний набір $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ або послідовність (a_n) натуральних чисел таких, що*

$$x = q^{a_1-1} - (1-q)q^{a_1+a_2-2} + \ldots + (1-q)^{2k-2} q^{a_1+a_2+\ldots+a_{2k-1}-(2k-1)} -$$

$$-(1-q)^{2k-1} q^{a_1+a_2+\ldots+a_{2k}-2k} + \ldots = \sum_k (A_k - A'_k), \tag{1.4.2}$$

де $A_k = (1-q)^{2k-2} q^{a_1+a_2+\ldots+a_{2k-1}-(2k-1)}$, $A'_k = (1-q)^{2k-1} q^{a_1+a_2+\ldots+a_{2k}-2k}$.

Доведення. Нехай x — довільне число з $(0;1]$. Оскільки $(0;1] = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(q^n;q^{n-1}]$, то очевидно, що існує $a_1 \in \mathbb{N}$ таке, що

$$q^{a_1} < x \leqslant q^{a_1-1}, \quad -(1-q)q^{a_1-1} = q^{a_1} - q^{a_1-1} < x - q^{a_1-1} \equiv x_1 \leqslant 0,$$

Якщо $x_1 = 0$, то $x = q^{a_1-1}$. Нехай $x_1 \neq 0$. Оскільки

$$x_1 \in (-(1-q)q^{a_1-1}; 0] = \bigcup_{n=1}^{\infty}(-(1-q)q^{a_1+(n-1)-1}; -(1-q)q^{a_1+n-1}],$$

то очевидно, що існує $a_2 \in \mathbb{N}$ таке, що

$$-(1-q)q^{a_1+a_2-2} \leqslant x_1 < -(1-q)q^{a_1+a_2-1},$$

$$0 \leqslant x_2 \equiv x_1 + (1-q)q^{a_1+a_2-2} < (1-q)^2 q^{a_1+a_2-2}, \quad 0 \leqslant x_2 < (1-q)^2 q^{a_1+a_2-2}.$$

Якщо $x_2 = 0$, то $x = q^{a_1-1} - (1-q)q^{a_1+a_2-2}$. Якщо ж $x_2 \neq 0$, то $|x_2| < (1-q)^2 q^{a_1+a_2-2}$. Оскільки

$$x_2 \in (0; (1-q)^2 q^{a_1+a_2-2}] = \bigcup_{n=1}^{\infty}((1-q)^2 q^{a_1+a_2+n-1}; (1-q)^2 q^{a_1+a_2+(n-1)-1}],$$

то існує $a_3 \in \mathbb{N}$ таке, що

$$(1-q)^2 q^{a_1+a_2+a_3-2} < x_2 \leqslant (1-q)^2 q^{a_1+a_2+a_3-3},$$

$$-(1-q)^3 q^{a_1+a_2+a_3-3} < x_2 - (1-q)^2 q^{a_1+a_2+a_3-3} \equiv x_3 \leqslant 0,$$

$$-(1-q)^3 q^{a_1+a_2+a_3-3} < x_3 \leqslant 0.$$

Якщо $x_3 = 0$, то $x = q^{a_1-1} - (1-q)q^{a_1+a_2-2} + (1-q)^2 q^{a_1+a_2+a_3-3}$.
Якщо $x_3 \neq 0$, то $|x_3| < (1-q)^3 q^{a_1+a_2+a_3-3}$. І т.д.

Якщо $x_k = 0$ при деякому $k \in \mathbb{N}$, то отримуємо скінченний розклад числа x. Якщо ж $x_k \neq 0$ для жодного $k \in \mathbb{N}$, то матимемо нескінченний, але збіжний процес, оскільки $q \in (0;1)$, а отже, $x_k \to 0$ при $k \to \infty$. І тому

$$x = \sum_{k=1}^{\infty}\left((1-q)^{2k-2} q^{a_1+a_2+\ldots+a_{2k-1}-(2k-1)} - (1-q)^{2k-1} q^{a_1+a_2+\ldots+a_{2k}-2k}\right),$$

що й вимагалось довести. □

Подання числа x у формі суми (1.4.2) називається його Δ^q-*представленням*, а його символічний запис $\Delta^q_{a_1a_2\ldots a_n(\varnothing)}$ або $\Delta^q_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}$ в залежності від скінченності чи нескінченності розкладу — Δ^q-*зображенням* числа x.

Зауваження 1.4.1. При $q = \frac{1}{2}$ вираз функції $F_q(x)$ співпадає з виразом функції Мінковського. Разом з цим, Δ^q-зображення є окремим випадком $\widetilde{Q}_\infty$-зображення при $q_0 = 1 - q$, $q_k = (1-q)q^k$.

1.4.1. Геометрія циліндричного Δ^q-зображення дійсних чисел.

Циліндри Δ^q-зображення мають наступні властивості:

1. $\inf \Delta^q_{c_1c_2\ldots c_{2k-1}i} = \sup \Delta^q_{c_1c_2\ldots c_{2k-1}(i+1)}$; $\quad \sup \Delta^q_{c_1c_2\ldots c_{2k}i} = \inf \Delta^q_{c_1c_2\ldots c_{2k}(i+1)}$;
2. Для діаметра циліндра виконується рівність $d(\Delta^q_{c_1c_2\ldots c_m}) = (1-q)^m \cdot q^{c_1+c_2+\ldots+c_m-m}$;
3. Циліндри одного рангу не перетинаються або співпадають (рівні), причому $\Delta^q_{c_1c_2\ldots c_m} = \Delta^q_{c'_1c'_2\ldots c'_m} \iff c_i = c'_i \quad i=\overline{1,m}$.

Лема 1.4.1. *Циліндр $\Delta^q_{c_1c_2\ldots c_m}$ є відрізком, причому*

$$\Delta^q_{c_1c_2\ldots c_m} = [a-\delta; a], \quad \textit{коли} \quad m = 2k-1 \quad \textit{і}$$
$$\Delta^q_{c_1c_2\ldots c_m} = [a; a+\delta], \quad \textit{коли} \quad m = 2k, \quad \textit{де}$$
$$\delta = (1-q)^m \cdot q^{c_1+c_2+\ldots+c_m-m},$$
$$a = q^{c_1-1} - (1-q)q^{c_1+c_2-2} + \ldots + (-1)^{m-1}(1-q)^{m-1}q^{c_1+c_2+\ldots+c_m-m}.$$

Доведення. Введемо позначення

$$C \equiv \Delta^q_{c_1c_2\ldots c_m},\ A \equiv [a-\delta; a],\ B \equiv [a; a+\delta].$$

1. Розглянемо випадок, коли $m = 2k-1$. Покажемо, що $C \subset A$.

Нехай $x = \Delta^q_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}$ – довільний елемент множини C, тобто

$$x = q^{c_1-1} - (1-q)q^{c_1+c_2-2} + \ldots + (1-q)^{2k-2}q^{c_1+c_2+\ldots+c_{2k-1}-(2k-1)} -$$
$$-(1-q)^{2k-1}q^{c_1+c_2+\ldots+c_{2k-1}-(2k-1)}\underbrace{\left(q^{a_{2k}-1} - (1-q)q^{a_{2k}+a_{2k+1}-2} + \ldots\right)}_{x_{2k}}.$$

Тоді

$$\min C = q^{c_1-1} - (1-q)q^{c_1+c_2-2} + \ldots + (1-q)^{2k-2}q^{c_1+c_2+\ldots+c_{2k-1}-(2k-1)} -$$
$$-(1-q)^{2k-1}q^{c_1+c_2+\ldots+c_{2k-1}-(2k-1)} = a-\delta,$$

що досягається при $x_{2k} = q^{1-1} = 1$, а

$$\max C = q^{c_1-1} - (1-q)q^{c_1+c_2-2} + \ldots + (1-q)^{2k-2}q^{c_1+c_2+\ldots+c_{2k-1}-(2k-1)} = a.$$

Отже, $x \in [a-\delta; a]$, а це означає, що $C \subset A$.

Доведемо тепер таке включення: $A \subset C$. Нехай $x \in [a-\delta; a]$. Покажемо, що в цьому випадку або

$$x = \Delta^q_{c_1c_2\ldots c_{2k-1}(\varnothing)}, \quad \text{або} \tag{1.4.3}$$

$$x = \Delta^q_{c_1c_2\ldots c_{2k-1}a_{2k}a_{2k+1}\ldots a_{2k+n}(\varnothing)}, \quad \text{або} \tag{1.4.4}$$

$$x = \Delta^q_{c_1c_2\ldots c_{2k-1}a_{2k}a_{2k+1}\ldots}, \tag{1.4.5}$$

де $a_{2k+j} \in \mathbb{N}$, тобто що $x \in C$, а отже, $A \subset C$.

Справді, якщо $x = a$, то очевидно, що виконується рівність (1.4.3); якщо $x = a-\delta$, то виконується рівність (1.4.4), а саме: $x = a-\delta = \Delta^q_{c_1c_2\ldots c_{2k-1}1(\varnothing)}$. Нехай тепер $a-\delta < x < a$. Покажемо, що в цьому випадку $a_i(x) = c_i$ для всіх $i \leqslant m = 2k-1$. Для цього скористаємось методом від супротивного. Припустимо, що існує $a_i(x) = c'_i \neq c_i$ при $i \leqslant 2k-1$.

Випадок A. Розглянемо число $x' = \Delta^q_{c_1c_2\ldots c_{i-1}c'_i(\varnothing)}$. Тоді або $c'_i < c_i$, або $c'_i > c_i$, причому або $i = 2j-1$, або $i = 2j$.

Розглянемо випадок, коли $c'_{2j-1} < c_{2j-1}$. Тоді різниця

$x' - a = (1-q)^{2j-2}q^{c_1+\ldots+c_{2j-2}+c'_{2j-1}-(2j-1)} - \big((1-q)^{2j-2}q^{c_1+\ldots+c_{2j-1}-(2j-1)} -$
$-(1-q)^{2j-1}q^{c_1+\ldots+c_{2j}-2j} + \ldots + (1-q)^{2k-2}q^{c_1+\ldots+c_{2k-1}-(2k-1)}\big) \geqslant$
$\geqslant (1-q)^{2j-2}q^{c_1+\ldots+c_{2j-2}+c'_{2j-1}-(2j-1)} - (1-q)^{2j-2}q^{c_1+\ldots+c_{2j-1}-(2j-1)} > 0.$

Отже, число x' лежить за межами інтервала $(a-\delta; a)$. Аналогічно міркуючи, можна показати, що у випадках, коли $c'_{2j-1} > c_{2j-1}$, $c'_{2j} < c_{2j}$ і $c'_{2j} > c_{2j}$, число x' також лежить за межами інтервала $(a-\delta; a)$. Таким чином, з $x \in A$ випливає, що $a_i(x) = c_i$ для всіх $i \leqslant 2k-1$ і має місце рівність (1.4.5), тобто $x \in C$.

Випадок B. Розглянемо тепер число $x' = \Delta^q_{c_1c_2\ldots c_{i-1}c'_ia_{i+1}\ldots a_{i+n}(\varnothing)}$. Тоді також або $c'_i < c_i$, або $c'_i > c_i$, причому i може бути парне, чи непарне.

Нехай $c'_{2j-1} > c_{2j-1}$. Тоді різниця

$x' - a = \big((1-q)^{2j-2}q^{c_1+\ldots+c_{2j-2}+c'_{2j-1}-(2j-1)} -$
$-(1-q)^{2j-1}q^{c_1+\ldots+c'_{2j-1}+a_{2j}-2j} + \ldots (1-q)^{2(j+n)-2}q^{c_1+\ldots+c'_{2j-1}+a_{2j}+\ldots+a_{2(j+n)-1}-(2(j+n)-1)}\big) -$

$$-\Big((1-q)^{2j-2}q^{c_1+\ldots+c_{2j-1}-(2j-1)}-\ldots+(1-q)^{2k-2}q^{c_1+\ldots+c_{2k-1}-(2k-1)}\Big)\leqslant$$
$$\leqslant(1-q)^{2j-2}q^{c_1+\ldots+c_{2j-2}+c'_{2j-1}-(2j-1)}-(1-q)^{2j-2}q^{c_1+\ldots+c_{2j-1}-(2j-1)}<$$
$$<-(1-q)^{2k-1}q^{c_1+\ldots+c_{2j-1}+\ldots+c_{2k-1}-(2k-1)}=-\delta.$$

Аналогічно, коли $c'_{2j}>c_{2j}$, $c'_{2j}<c_{2j}$ і $c'_{2j-1}<c_{2j-1}$, можна показати, що число x' лежить за межами інтервала $(a-\delta;a)$.

Випадок C. Розглянемо тепер число $x'=\Delta^q_{c_1c_2\ldots c_{i-1}c'_ia_{i+1}a_{i+2}\ldots}$. В цьому випадку також або $c'_i<c_i$, або $c'_i>c_i$, причому i може бути непарним, чи парним числом.

Нехай $c'_{2j}<c_{2j}$. Тоді різниця

$$x'-a=\Big(-(1-q)^{2j-1}q^{c_1+\ldots+c_{2j-1}+c'_{2j}-2j}+(1-q)^{2j}q^{c_1+\ldots+c'_{2j}+a_{2j+1}-(2j+1)}-\ldots\Big)-$$
$$-\Big(-(1-q)^{2j-1}q^{c_1+\ldots+c_{2j}-2j}+(1-q)^{2j}q^{c_1+\ldots+c_{2j+1}-(2j+1)}-\ldots+$$
$$+(1-q)^{2k-2}q^{c_1+\ldots+c_{2k-1}-(2k-1)}\Big)=$$
$$=\Big(-(1-q)^{2j-1}q^{c_1+\ldots+c_{2j-1}+c'_{2j}-2j}+(1-q)^{2j-1}q^{c_1+\ldots+c_{2j}-2j}\Big)+$$
$$+\Big((1-q)^{2j}q^{c_1+\ldots+c'_{2j}+a_{2j+1}-(2j+1)}-(1-q)^{2j}q^{c_1+\ldots+c_{2j+1}-(2j+1)}\Big)-\ldots\leqslant$$
$$\leqslant-(1-q)^{2j-1}q^{c_1+\ldots+c_{2j-1}+c'_{2j}-2j}(1-q)^{2j-1}q^{c_1+\ldots+c_{2j}-2j}<$$
$$<-(1-q)^{2k-1}q^{c_1+\ldots+c_{2j-1}+\ldots+c_{2k-1}-(2k-1)}=-\delta.$$

Аналогічно можна довести, що число x' лежить поза інтервалом $(a-\delta;a)$, коли $c'_{2j}>c_{2j}$, $c'_{2j-1}>c_{2j-1}$ і $c'_{2j-1}<c_{2j-1}$.

Отже, x не може мати зображення, відмінне від (1.4.3)-(1.4.5), а це означає, що $x\in C$ і $A\subset C$. Враховуючи першу частину доведення, маємо $C\subset A$ і $A\subset C$, тобто $A=C$. Таким чином, при $m=2k-1$ циліндр $\Delta^q_{c_1c_2\ldots c_m}$ є відрізком $[a-\delta;a]$. Для випадку парного m доведення аналогічне. □

Наслідок 1.4.1. *Для довжини циліндра рангу m мають місце співвідношення: $|\Delta^q_{c_1\ldots c_m}|=(1-q)^m\cdot q^{c_1+\ldots+c_m-m}\leqslant(1-q)^m\to0$ при $m\to\infty$.*

Наслідок 1.4.2. *Якщо $\Delta^q_{c_1c_2\ldots c_m}$ — фіксований циліндр, то має місце рівність (основне метричне відношення)*

$$\frac{|\Delta^q_{c_1c_2\ldots c_mi}|}{|\Delta^q_{c_1c_2\ldots c_m}|}=(1-q)\cdot q^{i-1}.$$

1.4.2. Метричні задачі, пов'язані з Δ^q-зображенням чисел. З основного метричного відношення, виразу довжини циліндра та формул суми членів геометричної прогресії випливають наступні рівності.

Лема 1.4.2. *Для міри Лебега λ мають місце наступні рівності:*

1. $\lambda\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k}\Delta^q_{c_1\ldots c_m i}\right)=\left(1-q^k\right)\cdot|\Delta^q_{c_1\ldots c_m}|=\left(1-q^k\right)(1-q)^m q^{c_1+\ldots+c_m-m}$;
2. $\lambda\left(\bigcup\limits_{i=k+1}^{\infty}\Delta^q_{c_1\ldots c_m i}\right)=q^k\cdot|\Delta^q_{c_1\ldots c_m}|=(1-q)^m q^{c_1+\ldots+c_m+k-m}$;
3. $\lambda\left(\bigcup\limits_{i=k+1}^{\infty}\Delta^q_{c_1\ldots c_m i}\right)=q^k\left(1-q^{n-k}\right)\cdot|\Delta^q_{c_1\ldots c_m}|=\left(1-q^{n-k}\right)(1-q)^m q^{c_1+\ldots+c_m+k-m}$.

Теорема 1.4.2. *Множина $C[\Delta^q,V]=\{x: x=\Delta^q_{a_1a_2\ldots a_n\ldots},\ a_n\in V\neq\mathbb{N}\}$ має нульову міру Лебега.*

Доведення. Проведемо міркування для випадку, коли $\mathbb{N}\backslash V=\{v\}$ — множина, що складається з одного елемента, враховуючи, що якщо $V_1\subset V_2$, то $C[\Delta^q;V_1]\subset C[\Delta^q;V_2]$.

$$\lambda(C[\Delta^q;V])=1-|\Delta^q_v|-\sum_{i_1\neq v}|\Delta^q_{i_1v}|-\sum_{i_1\neq v}\sum_{i_2\neq v}|\Delta^q_{i_1i_2v}|-\ldots=$$
$$=1-(1-q)q^{v-1}-\sum_{i_1\neq v}(1-q)^2q^{i_1+v-2}-\sum_{i_1\neq v}\sum_{i_2\neq v}(1-q)^3q^{i_1+i_2+v-3}-\ldots=$$
$$=1-(1-q)q^{v-1}-(1-q)^2q^{v-2}\sum_{i_1\neq v}q^{i_1}-(1-q)^3q^{v-3}\sum_{i_1\neq v}\sum_{i_2\neq v}q^{i_1+i_2}-\ldots=$$
$$=1-(1-q)q^{v-1}-(1-q)^2q^{v-2}\left(\frac{q}{1-q}-q^v\right)-(1-q)^3q^{v-3}\left(\frac{q}{1-q}-q^v\right)^2-\ldots=$$
$$=1-(1-q)q^{v-1}-(1-q)q^{v-1}\left(1-q^{v-1}(1-q)\right)-(1-q)q^{v-1}\left(1-q^{v-1}(1-q)\right)^2-\ldots=$$
$$=1-\frac{(1-q)q^{v-1}}{1-(1-q^{v-1}(1-q))}=1-\frac{(1-q)q^{v-1}}{q^{v-1}(1-q)}=1-1=0.\qquad\square$$

Теорема 1.4.3. *Множина $C[\Delta^q,V]$ є самоподібною, якщо V — скінченна, і N–самоподібною, якщо V — нескінченна, самоподібна і фрактальна розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої є розв'язком рівняння*

$$\sum_{v\in V}\left((1-q)q^{v-1}\right)^x=1.$$

Доведення. Оскільки $C = \bigcup\limits_n C_n$ і $C \overset{\frac{1-q}{q^{1-c_n}}}{\sim} C_n = \Delta^q_{c_n} \cap C$, то множина C є самоподібною у випадку скінченного об'єднання і N-самоподібною, якщо $n \to \infty$. Її самоподібна (N-самоподібна) розмірність набуває значень з нескінченної множини і є розв'язком рівняння $\sum\limits_{c_n \in V} \left((1-q)q^{c_n-1}\right)^x = 1.$ □

Теорема 1.4.4. *Міра Лебега множини*

$$C \equiv C[\Delta^q, (V_n)] = \left\{x : \ x = \Delta^q_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots} \quad a_n(x) \in V_n \subseteq \mathbb{N}\right\}$$

обчислюється за формулою $\lambda(C) = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})} = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda(\overline{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})}\right).$

Доведення. Нехай $F_0 = (0;1]$. Оскільки F_k — це об'єднання циліндрів рангу k, серед внутрішніх точок яких є точки множини C, то $C \subset F_{k+1} \subset F_k$ для всіх $k \in \mathbb{N}$ і $C = \lim\limits_{k \to \infty} F_k = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k$ та $\lambda(C) = \lim\limits_{k\to\infty} \lambda(F_k)$. Тому з рівності $F_k = F_{k-1} \backslash \overline{F}_k$ маємо $\lambda(F_k) = \lambda(F_{k-1}) - \lambda(\overline{F}_k)$. Звідки

$$\lambda(C) = \lim_{k\to\infty} \lambda(F_k) = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})} \cdot \frac{\lambda(F_{k-1})}{\lambda(F_{k-2})} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda(F_1)}{\lambda(F_0)}\right) =$$

$$= \prod_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_i)}{\lambda(F_{i-1})} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_{i-1}) - \lambda(\overline{F}_i)}{\lambda(F_{i-1})} = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda(\overline{F}_i)}{\lambda(F_{i-1})}\right).$$

А отже, $\lambda(C) = \prod\limits_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda(\overline{F}_i)}{\lambda(F_{i-1})}\right).$ □

Наслідок 1.4.3. *Міра Лебега множини* $C[\Delta^q, (V_n)]$ *дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли розбігається ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(\overline{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})}$.

Теорема 1.4.5. *Нехай* c *і* s *— фіксовані натуральні числа. Множина*

$$D \equiv D[\Delta^q, \overline{cs}]\{x : \ x = \Delta^q_{a_1 \ldots a_n \ldots}, \ \textit{де} \ \overline{a_n a_{n+1}} \neq \overline{cs} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\}$$

є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега.

Доведення. Доведемо, що D є ніде не щільною множиною за означенням. Нехай (u, v) — довільний інтервал, що належить $(0,1]$. Не порушуючи загальності можемо вважати, що числа u і v мають нескінченні розклади. Легко вказати циліндр такий, що повністю належить інтервалу (u, v). Справді, оскільки $u < v$, то існує k таке, що $a_k(u) \neq a_k(v)$, але $a_i(u) = a_i(v)$ при $i < k$. Тоді можливі випадки: 1) $k -$ непарне; 2) $k -$ парне.

Тому в першому випадку: $a_k(u)>a_k(v)$, а отже,

$$\Delta^q_{a_1(u)\ldots a_k(u)[a_{k+1}(u)+1]}\subset(u,v),\quad \text{і}\quad \nabla^q_{a_1(u)\ldots a_k(u)[a_{k+1}(u)+1]cs}\cap D=\varnothing.$$

У другому випадку: $a_k(u)<a_k(v)$, тому

$$\Delta^q_{a_1(v)\ldots a_k(v)[a_{k+1}(v)+1]}\subset(u,v),\quad \text{і}\quad \nabla^q_{a_1(v)\ldots a_k(v)[a_{k+1}(v)+1]cs}\cap D=\varnothing.$$

Отже, множина D є ніде не щільною за означенням.

Доведемо, що міра Лебега множини D дорівнює нулю. Можливі випадки: 1) $c=s$; 2) $c\neq s$.

Нехай $\overline{\Delta}^q_{c_1\ldots c_m}\equiv\Delta^q_{c_1\ldots c_m}\cap D$. Тоді у першому випадку

$$D=\left[\bigcup_{i\neq c}\overline{\Delta}^q_i\right]\cup\left[\bigcup_{i\neq c}\overline{\Delta}^q_{ci}\right].$$

У другому випадку

$$D=\left[\bigcup_{i\neq c}\overline{\Delta}^q_i\right]\cup\left[\bigcup_{c\neq i\neq s}\overline{\Delta}^q_{ci}\right]\cup\left[\bigcup_{c\neq i\neq s}\overline{\Delta}^q_{cci}\right]\cup\ldots\cup\left[\bigcup_{c\neq i\neq s}\overline{\Delta}^q_{\underbrace{c\ldots c}_{k}i}\right]\cup\ldots\cup\overline{\Delta}^q_{(c)}.$$

Нехай $F_0=(0,1]$, F_{2k}— об'єднання циліндрів рангу $2k$, серед внутрішніх точок яких є точки множини D,

$$\overline{F}_{2(k+1)}=F_{2k}\setminus F_{2(k+1)}. \tag{1.4.6}$$

Очевидно, що $F_{2k}\supset F_{2(k+1)}\supset D\quad\forall\, k\in\mathbb{N}$ і $D=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}F_{2k}=\lim\limits_{k\to\infty}F_{2k}$.

За неперервністю міри Лебега зверху $\lambda(D)=\lim\limits_{k\to\infty}\lambda(F_{2k})$. Тоді

$$\lambda(D)=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{\lambda(F_{2k})}{\lambda(F_{2(k-1)})}\cdot\frac{\lambda(F_{2(k-1)})}{\lambda(F_{2(k-2)})}\cdot\ldots\cdot\frac{\lambda(F_2)}{\lambda(F_0)}\right]=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\prod_{m=1}^{k}\frac{\lambda(F_{2m})}{\lambda(F_{2(m-1)})}=\prod_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda(F_{2m})}{\lambda(F_{2(m-1)})}. \tag{1.4.7}$$

З (1.4.6) маємо $\lambda(F_{2(k+1)})=\lambda(F_{2k})-\lambda(\overline{F}_{2(k+1)})$ і

$$\frac{\lambda(F_{2(k+1)})}{\lambda(F_{2k})}=1-\frac{\lambda(\overline{F}_{2(k+1)})}{\lambda(F_{2k})}.$$

Підставивши в (1.4.7) отриманий вираз, одержимо

$$\lambda(D) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda(\overline{F}_{2(k+1)})}{\lambda(F_{2k})}\right).$$

Останній нескінченний добуток розбігається до нуля тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(\overline{F}_{2(k+1)})}{\lambda(F_{2k})} = \infty. \tag{1.4.8}$$

Знайдемо оцінки останнього відношення.

Нехай $\Delta^q_{c_1\ldots c_{2k}}$ — циліндр з F_{2k}. Можливі випадки: 1)$c_{2k} = c$, 2)$c_{2k} \neq c$. Якщо $c_{2k} = c$, то $\nabla^q_{c_1\ldots c_{2k}s} \bigcap D = \varnothing$ і $\dfrac{|\Delta^q_{c_1\ldots c_{2k}s}|}{|\Delta^q_{c_1\ldots c_{2k}}|} = (1-q)q^{s-1}$.

Якщо $c_{2k} \neq c$, то $\nabla^q_{c_1\ldots c_{2k}cs} \bigcap D = \varnothing$ і $\dfrac{|\Delta^q_{c_1\ldots c_{2k}cs}|}{|\Delta^q_{c_1\ldots c_{2k}}|} = (1-q)^2 q^{c+s-2}$.

Тому, враховуючи це, маємо $0 < (1-q)^2 q^{c+s-2} \leqslant \dfrac{\lambda(\overline{F}_{2(k+1)})}{\lambda(F_{2k})} \leqslant (1-q)q^{s-1} < 1$. Отже, ряд (1.4.8) розбігається, оскільки не виконується необхідна умова збіжності ряду і тому $\lambda(D) = 0$. Теорему доведено. $\square$

1.5. Однопараметричне узагальнення сингулярної функції Мінковського

У роботах Алкаускаса [62, 67], пізніше Калашнікова А.В. [20] доведено, що класична функція Мінковського $?(x)$ є єдиним розв'язком у класі неперервних функцій наступної системи функціональних рівнянь:

$$\begin{cases} ?\left(\dfrac{x}{1+x}\right) = \dfrac{1}{2}?(x), \\ ?\left(1-x\right) = 1 - ?(x), \end{cases}$$

які можуть бути покладені в означення функції. Ця ідея дозволяє побудувати принципово інше узагальнення функції Мінковського.

У 2010 р. Працьовитим М. В., Калашніковим А. В. і Безбородовим В. К. у роботі [48] побудовано однопараметричне узагальнення φ_μ класичної функції Мінковського, яке є єдиним неперервним розв'язком системи функціональних рівнянь:

$$\begin{cases} \varphi_\mu\left(\dfrac{x}{1+x}\right) = (1-\mu)\varphi_\mu(x), \\ \varphi_\mu(1-x) = 1 - \varphi_{1-\mu}(x), \end{cases} \tag{1.5.1}$$

де $\varphi(x,\mu) \equiv \varphi_\mu(x)$ — функція двох змінних x та μ $(x \in [0,1], \mu \in (0,1))$ або функція однієї змінної x, залежна від параметра $\mu \in (0,1)$. Цими ж авторами встановлено, що функція φ_μ у ірраціональній точці інтервалу $(0,1)$ має наступний аналітичний вигляд:

$$\varphi_\mu(x) = \varphi_\mu([0; a_1, a_2, ..., a_n, ...]) = (1-\mu)^{a_1-1} - (1-\mu)^{a_1-1}\mu^{a_2} + ...+$$

$$+ (1-\mu)^{a_1+a_3+...+a_{n-1}+a_{n+1}-1}\mu^{a_2+a_4+...+a_n} - \tag{1.5.2}$$

$$-(1-\mu)^{a_1+a_3+...+a_{n-1}+a_{n+1}-1}\mu^{a_2+a_4+...+a_n+a_{n+2}} + ... =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k\,(1-\mu^{a_{2k}}), \tag{1.5.3}$$

де $A_k = (1-\mu)^{a_1+a_3+...+a_{2k-1}-1}\mu^{a_2+a_4+...+a_{2k-2}}$, а в раціональних точках інтервалу $(0;1)$ доозначується за неперервністю і виражається скінченною сумою. Більше того, $\varphi_\mu(0) = 0$ і $\varphi_\mu(1) = 1$.

Функція $\varphi_\mu(x)$ має наступні властивості [21]:

- Рівність (1.5.3) коректно визначає функцію φ_μ, означену в кожній ірраціональній точці відрізка $[0,1]$.
- Функція φ_μ на множині ірраціональних чисел відрізка $[0,1]$ набуває невід'ємних значень, які не перевищують одиниці.
- Функція $\varphi_\mu(x)$ є неперервною в кожній точці інтервала $(0,1)$, в точці $x=0$ — справа, а в точці $x=1$ — зліва.
- Функція $\varphi_\mu(x)$, визначена в ірраціональних точках $[0,1]$ рівністю (1.5.2), є строго зростаючою функцією.
- При довільному значенні параметра μ функція φ_μ є сингулярною строго зростаючою функцією.

Висновки до розділу 1

У цьому розділі, який має вступний характер, ми означили ключові поняття, сформулювали необхідні для подальших досліджень факти, здійснили огляд літератури, який безпосередньо стосується теми дисертаційної роботи. Разом з цим ми розглянули одне з можливих узагальнень (найпростіше) класичної функції Мінковського і ним породжене Δ^q-зображення чисел півінтервала $(0;1]$, зосередивши лише увагу на його геометрії і залежності властивостей від значення параметра $q \in (0;1)$.

Основні результати цього розділу опубліковані у роботі [4а] та доповідались на наукових конференціях [10а, 17а].

РОЗДІЛ 2
$\Delta^\sharp$-ЗОБРАЖЕННЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ

Розділ присвячений зображенню і представленню чисел, яке вперше фігурувало у роботі Салема [101] у виразі значення класичної сингулярної строго зростаючої функції Мінковського [87]. Вивчається геометрія цього зображення, описуються властивості оператора зсуву цифр, доводиться критерій раціональності числа. Вказуються застосування даного зображення чисел у теорії фрактальної розмірності, у фрактальній геометрії, метричній та ймовірнісній теоріях чисел.

2.1. Означення $\Delta^\sharp$-зображення дійсних чисел

Лема 2.1.1. *При довільних натуральному n і наборі натуральних чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ число*

$$x = 2^{1-a_1} - 2^{1-a_1-a_2} + \ldots + (-1)^{n-1} 2^{1-a_1-\ldots-a_{n-1}-a_n} \equiv \Delta^\sharp_{a_1\ldots a_{n-1}a_n(\varnothing)} \quad (2.1.1)$$

є раціональним числом з півінтервалу $(0; 2^{1-a_1}]$, причому якщо $a_n = 1$, то

$$x = 2^{1-a_1} - 2^{1-a_1-a_2} + \ldots + (-1)^{n-2} 2^{1-a_1-\ldots-a_{n-2}-a'_{n-1}} \equiv \Delta^\sharp_{a_1\ldots a_{n-2}a'_{n-1}(\varnothing)}, \quad (2.1.2)$$

де $a'_{n-1} = a_{n-1} + 1$.

Доведення. Раціональність числа x очевидна. Спочатку доведемо першу частину твердження. Для цього використаємо метод математичної індукції. При $n = 1$ твердження очевидно правильне, оскільки $x = 2^{1-a_1}$. Припускаємо правильність твердження для $n = k$, тобто, що

$$2^{1-a_1} - 2^{1-a_1-a_2} + \ldots + (-1)^{k-1} 2^{1-a_1-a_2-\ldots-a_k} = x \in (0; 2^{1-a_1}].$$

Розглянемо випадок, коли $n = k+1$. Очевидно, що $x = 2^{1-a_1} - 2^{-a_1}x_1$, де $x_1 = 2^{1-a_2} - 2^{1-a_2-a_3} + \ldots + (-1)^k 2^{1-a_2-a_3-\ldots-a_{k+1}}$. За припущенням $x_1 \in (0; 2^{1-a_2}]$. Тому $0 < 2^{1-a_1} - 2^{1-a_1-a_2} \leqslant x = 2^{1-a_1} - 2^{-a_1}x_1 < 2^{1-a_1}$, що й вимагалось довести. Тепер доведемо другу частину твердження.

Розглянувши різницю виразів (2.1.1) і (2.1.2) при $a_n = 1$, отримаємо:

$$(-1)^{n-2}\big((2^{1-a_1-a_2-\ldots-a_{n-1}} - 2^{1-a_1-a_2-\ldots-a_{n-1}-1}) - 2^{1-a_1-a_2-\ldots-a_{n-2}-(a_{n-1}+1)}\big) =$$
$$= (-1)^{n-2}(2^{-a_1-a_2-\ldots-a_{n-1}} - 2^{-a_1-a_2-\ldots-a_{n-1}}) = 0.$$

Отже, при $a_n = 1$ для числа x має місце розклад (2.1.2). □

Лема 2.1.2. *Число x, що є значенням виразу* (2.1.1) *або* (2.1.2), *є двійково-раціональним, тобто має класичне двійкове зображення з періодом* (0).

Доведення. Враховуючи лему 2.1.1, ми можемо вважати, що n є числом парним, тобто $n{=}2m$. Тоді

$$x = (2^{1-a_1} - 2^{1-a_1-a_2}) + \ldots + (2^{1-a_1-\ldots-a_{2m-1}} - 2^{1-a_1-\ldots-a_{2m-1}-a_{2m}}) =$$
$$= \frac{2^{a_2}-1}{2^{a_1+a_2-1}} + \frac{2^{a_4}-1}{2^{a_1+a_2+a_3+a_4-1}} + \ldots + \frac{2^{2m}-1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_{2m}-1}}.$$

Оскільки $2^{a_i} - 1 = 2^{a_i-1} + 2^{a_i-2} + \ldots + 2^1 + 2^0$, то

$$\frac{2^{a_i}-1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_i-1}} = \frac{2^{a_i-1} + 2^{a_i-2} + \ldots + 2^1 + 2^0}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_i-1}} =$$
$$= \frac{1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_{i-1}}} + \frac{1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_{i-1}+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_i-1}}.$$

Тому

$$x = \left(\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_1+1}} + \frac{1}{2^{a_1+2}} + \ldots + \frac{1}{2^{a_1+a_2-1}}\right) +$$
$$+ \left(\frac{1}{2^{a_1+a_2+a_3}} + \frac{1}{2^{a_1+a_2+a_3+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{a_1+a_2+a_3+a_4-1}}\right) + \ldots +$$
$$+ \left(\frac{1}{2^{a_1+\ldots+a_{2m-1}}} + \frac{1}{2^{a_1+\ldots+a_{2m-1}+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{a_1+\ldots+a_{2m-1}+a_{2m}-1}}\right) =$$
$$= \Delta^2_{\underbrace{0\ldots0}_{a_1-1}\underbrace{1\ldots1}_{a_2}\underbrace{0\ldots0}_{a_3}\underbrace{1\ldots1}_{a_4}\underbrace{0\ldots0}_{a_5}\ldots\underbrace{1\ldots1}_{a_{2m}}(0)}.$$

□

Лема 2.1.3. *При довільній послідовності натуральних чисел* (a_n) *сума* x *ряду*

$$x = 2^{1-a_1} - 2^{1-a_1-a_2} + \ldots + (-1)^{n-1} 2^{1-a_1-\ldots-a_n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 2^{1-a_1-\ldots-a_n} \tag{2.1.3}$$

належить інтервалу $(0; 2^{1-a_1})$*, причому різним послідовностям відповідають різні суми.*

Доведення. Збіжність ряду (2.1.3) і те, що його сума $x \leqslant 2^{1-a_1}$ випливає з теореми Лейбніца — ознаки збіжності знакозмінного ряду.

Оскільки $x = 2^{1-a_1} - 2^{-a_1} x_1$, де

$$x_1 = 2^{1-a_2} - 2^{1-a_2-a_3} + \ldots + (-1)^{n-1} 2^{1-a_2-a_3-\ldots-a_n} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \left(2^{1-a_2-\ldots-a_n} - 2^{1-a_2-\ldots-a_n-a_{n+1}}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} 2^{1-a_2-\ldots-a_n} \left(1 - \frac{1}{2^{a_{n+1}}}\right) > 0$$

і $x_1 \leqslant 2^{1-a_2}$ за ознакою Лейбніца, тобто $0 < x_1 \leqslant 2^{1-a_2}$. Тоді

$$0 < 2^{-a_1} \leqslant x < 2^{1-a_1}.$$

Тепер доведемо, що для різних послідовностей (a_n) і (a'_n) суми x і x' відповідних рядів не є рівними.

Оскільки $(a_n) \neq (a'_n)$, то існує $m \in N$ таке, що $a_m \neq a'_m$, але $a_i = a'_i$ при $i < m$. Тоді

$$x - x' = (-1)^{m-1} 2^{1-a_1-\ldots-a_{m-1}-1} \times$$
$$\times \left(2^{-a_m} - 2^{-a'_m} + \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-a_m-\ldots-a_{m+i}} - \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-a'_m-\ldots-a'_{m+i}}\right).$$

Не порушуючи загальності, вважатимемо, що $a_m < a'_m$. Тоді

$$2^{-a_m} - 2^{-a'_m} = \frac{1}{2^{a_m}} - \frac{1}{2^{a'_m}} \geqslant \frac{1}{2^{a_m}} - \frac{1}{2^{a_m+1}} = \frac{1}{2^{a_m+1}}.$$

Оскільки $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{a_m+a_{m+1}+\ldots+a_{m+i}}} > 0$,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{a'_m+a'_{m+1}+\ldots+a'_{m+i}}} = \frac{1}{2^{a'_m}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{a'_{m+1}+\ldots+a'_{m+i}}} \leqslant \frac{1}{2^{a'_m}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{a'_m}} \leqslant \frac{1}{2^{a_m+1}},$$

то $\sum\limits_{i=1}^{\infty} 2^{-a_m-\ldots-a_{m+i}} - \sum\limits_{i=1}^{\infty} 2^{-a'_m-\ldots-a'_{m+i}} > -\frac{1}{2^{a_m+1}}$, а отже,

$$\sum_{i=1}^{\infty}(2^{-a_m}-2^{-a'_m}) + \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-a'_m-\ldots-a'_{m+i}} - \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-a'_m-\ldots-a'_{m+i}} > \frac{1}{2^{a_m+1}} - \frac{1}{2^{a_m+1}} = 0,$$

тобто $x > x_1$, що й вимагалось довести. $\square$

Теорема 2.1.1. *Для будь-якого $x \in (0;1]$ існує скінченна або нескінченна послідовність натуральних чисел (a_n) така, що*

$$x = \sum_k (-1)^{k-1} 2^{1-a_1-a_2-\ldots-a_k}. \tag{2.1.4}$$

Доведення. Оскільки $(0;1] = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n};\frac{1}{2^{n-1}}\right]$, то існує $a_1 \in N$ таке, що

$$x \in \left(\frac{1}{2^{a_1}};\frac{1}{2^{a_1-1}}\right] \Leftrightarrow \frac{1}{2^{a_1}} < x \leqslant \frac{1}{2^{a_1-1}}.$$

Звідки $-\frac{1}{2^{a_1}} < x - \frac{1}{2^{a_1-1}} \equiv x_1 \leqslant 0$. Якщо $x_1 = x - \frac{1}{2^{a_1-1}} = 0$, то $x = \frac{1}{2^{a_1-1}}$.

Нехай $x_1 \neq 0$. Оскільки $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{1}{2^{a_1+n-1}};-\frac{1}{2^{a_1+n}}\right)$, то існує a_2, таке, що

$$-\frac{1}{2^{a_1+a_2-1}} \leqslant x_1 < -\frac{1}{2^{a_1+a_2}}.$$

Звідки $0 \leqslant x_1 + \frac{1}{2^{a_1+a_2-1}} \equiv x_2 < \frac{1}{2^{a_1+a_2}}$. Якщо $x_2 = x_1 + \frac{1}{2^{a_1+a_2-1}} = 0$, то $x_1 = -\frac{1}{2^{a_1+a_2-1}}$ і $x = \frac{1}{2^{a_1-1}} - \frac{1}{2^{a_1+a_2-1}}$.

Якщо $x_2 \neq 0$, то процес продовжується до тих пір, поки не буде отримано $x_k = 0$, яке виражається $x_k \equiv x_{k-1} + \frac{(-1)^k}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_k-1}}$.

Звідки $x_{k-1} = \frac{(-1)^{k+1}}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_k-1}} + x_k$. Тоді

$$x_{k-2} = \frac{(-1)^k}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}-1}} + x_{k-1} = \frac{(-1)^k}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}-1}} + \frac{(-1)^{k+1}}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_k-1}} + x_k$$

і т.д. А отже, $x = \frac{1}{2^{a_1-1}} - \frac{1}{2^{a_1+a_2-1}} + \ldots + \frac{(-1)^{k+1}}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_k-1}} + x_k$.

Якщо $x_k = 0$, то $x = \dfrac{1}{2^{a_1-1}} - \dfrac{1}{2^{a_1+a_2-1}} + \ldots + \dfrac{(-1)^{k+1}}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_k-1}}$. Якщо ж $x_k \neq 0$ для довільного $k \in N$, то $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_k-1}}$, оскільки збіжність процесу гарантує умова

$$|x_k| \leqslant \frac{1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_{k+1}-1}} \leqslant \frac{1}{2^k} \to 0 \qquad (k \to \infty). \qquad \square$$

Означення 2.1.1. Подання числа x у формі (2.1.4) називається його $\Delta^{\sharp}$-*представленням*, а його символічний запис $\Delta^{\sharp}_{a_1 \ldots a_n \ldots}$ у випадку нескінченної суми та $\Delta^{\sharp}_{a_1 \ldots a_n(\varnothing)}$ у випадку скінченного розкладу — $\Delta^{\sharp}$-*зображенням.*

З теореми 2.1.1 і лем 2.1.1–2.1.3 випливає, що кожне ірраціональне число має єдине $\Delta^{\sharp}$-зображення. Єдине зображення мають також двійково-ірраціональні числа, двійково-раціональні числа, які утворюють підмножину множини раціональних чисел, мають їх два (для одного з них $a_n = 1$).

Зв'язок між $\Delta^{\sharp}$-зображенням числа і його класичним двійковим зображенням встановлює наступне твердження.

Теорема 2.1.2. *Мають місце рівності:*

1) $\Delta^{\sharp}_{a_1 a_2 \ldots a_{2k}(\varnothing)} = \Delta^2_{\underbrace{0\ldots0}_{a_1-1}\underbrace{1\ldots1}_{a_2}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{a_{2k-1}}\underbrace{1\ldots1}_{a_{2k}}(0)}$;

2) $\Delta^{\sharp}_{a_1 a_2 \ldots a_{2k} a_{2k+1}(\varnothing)} = \Delta^2_{\underbrace{0\ldots0}_{a_1-1}\underbrace{1\ldots1}_{a_2}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{a_{2k-1}}\underbrace{1\ldots1}_{a_{2k}}\underbrace{0\ldots0}_{a_{2k+1}-1}1(0)}$;

3) $\Delta^{\sharp}_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots} = \Delta^2_{\underbrace{0\ldots0}_{a_1-1}\underbrace{1\ldots1}_{a_2}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{a_{2k-1}}\underbrace{1\ldots1}_{a_{2k}}\ldots}$.

Доведення. 1. Справедливість твердження випливає з леми 2.1.2.

2. Оскільки можливі випадки $a_{2k+1} = 1$ або $a_{2k+1} > 1$ і враховуючи рівності (2.1.1), (2.1.2) та лему 2.1.2, отримаємо:

$$\Delta^{\sharp}_{a_1 a_2 \ldots a_{2k} a_{2k+1}(\varnothing)} = \Delta^2_{\underbrace{0\ldots0}_{a_1-1}\underbrace{1\ldots1}_{a_2}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{a_{2k-1}}\underbrace{1\ldots1}_{a_{2k}}\underbrace{0\ldots0}_{a_{2k+1}-1}1(0)}$$

3. Оскільки

$$\begin{aligned} x =& (2^{1-a_1} - 2^{1-a_1-a_2}) + \ldots + (2^{1-a_1-\ldots-a_{2k-1}} - 2^{1-a_1-\ldots-a_{2k-1}-a_{2k}}) + \ldots = \\ &= \frac{2^{a_2}-1}{2^{a_1+a_2-1}} + \frac{2^{a_4}-1}{2^{a_1+a_2+a_3+a_4-1}} + \ldots + \frac{2^{2k}-1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_{2k}-1}} + \ldots \end{aligned}$$

і $2^{a_i}-1=2^{a_i-1}+2^{a_i-2}+\ldots+2^1+2^0$, то, міркуючи аналогічно, отримаємо

$$x=\left(\frac{1}{2^{a_1}}+\frac{1}{2^{a_1+1}}+\frac{1}{2^{a_1+2}}+\ldots+\frac{1}{2^{a_1+a_2-1}}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{2^{a_1+a_2+a_3}}+\frac{1}{2^{a_1+a_2+a_3+1}}+\ldots+\frac{1}{2^{a_1+a_2+a_3+a_4-1}}\right)+\ldots+$$

$$+\left(\frac{1}{2^{a_1+\ldots+a_{2k-1}}}+\frac{1}{2^{a_1+\ldots+a_{2k-1}+1}}+\ldots+\frac{1}{2^{a_1+\ldots+a_{2k-1}+a_{2k}-1}}\right)+\ldots=$$

$$=\Delta^2_{\underbrace{0\ldots0}_{a_1-1}\underbrace{1\ldots1}_{a_2}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{a_{2k-1}}\underbrace{1\ldots1}_{a_{2k}}\ldots}. \qquad \square$$

2.2. Задача, яка приводить до поняття $\Delta^\sharp$-зображення

Розглядається випадкова величина ξ, представлена елементарним ланцюговим дробом $\xi=[0;\eta_1,\eta_2,...,\eta_n,...]$, елементи η_n якого утворюють послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, які набувають значень $1,2,3,\ldots,k,\ldots$ з ймовірностями $\frac{1}{2^1},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\ldots,\frac{1}{2^k},\ldots$ відповідно. Знайдемо вираз функції розподілу F_ξ випадкової величини ξ. Оскільки згідно з означенням $F_\xi(x)=P\{\xi<x\}$, то проаналізуємо подію $\{\xi<x\}$ і виразимо її ймовірність.

Враховуючи геометрію ланцюгового представлення (зображення) чисел, маємо

$$\{\xi<x\}=\{\eta_1>a_1(x)\}\cup\{\eta_1=a_1(x)\ \wedge\ \eta_2<a_2(x)\}\cup\ldots\cup$$

$$\cup\{\eta_i=a_i(x),\ \text{при}\, i=\overline{1,2k-1}\ \wedge\ \eta_{2k}<a_{2k}(x)\}\cup$$

$$\cup\{\eta_i=a_i(x),\ \text{при}\ i=\overline{1,2k}\ \wedge\ \eta_{2k+1}>a_{2k+1}(x)\}\cup\ldots,$$

де події в правій частині рівності попарно несумісні.

Враховуючи незалежність випадкових величин η_n, знайдемо вирази ймовірностей подій, які беруть участь в останньому об'єднанні:

$$P\{\eta_1>a_1(x)\}=\sum_{n=1}^{\infty}P\{\eta_1=a_1(x)+n\}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{a_1+n}}=\frac{1}{2^{a_1}};$$

$$P\{\eta_i = a_i(x),\ \text{при}\ i = \overline{1, 2k-1}\ \wedge\ \eta_{2k} < a_{2k}(x)\} =$$

$$= \prod_{i=1}^{2k-1} P\{\eta_i = a_i(x)\} \cdot \sum_{j=1}^{a_{2k}(x)-1} P\{\eta_{2k} = j\} = \prod_{i=1}^{2k-1} \frac{1}{2^{a_i(x)}} \cdot \sum_{j=1}^{a_{2k}(x)-1} \frac{1}{2^j} =$$

$$= \frac{1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_{2k-1}}} - \frac{1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_{2k}-1}};$$

$$P\{\eta_i = a_i(x),\ \text{при}\ i = \overline{1, 2k}\ \wedge\ \eta_{2k+1} > a_{2k+1}(x)\} =$$

$$= \prod_{i=1}^{2k} P\{\eta_i = a_i(x)\} \sum_{j=a_{2k+1}(x)+1}^{\infty} P\{\eta_{2k+1} = j\} =$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{2k} \frac{1}{2^{a_i(x)}}\right) \cdot \frac{1}{2^{a_{2k+1}}} = \frac{1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_{2k}+a_{2k+1}}}.$$

Тоді

$$P\{\xi < x\} = \frac{1}{2^{a_1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_{2k-1}}} - \frac{1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_{2k}-1}} + \frac{1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_{2k}+a_{2k+1}}}\right] =$$

$$= \frac{1}{2^{a_1-1}} - \frac{1}{2^{a_1+a_2-1}} + \frac{1}{2^{a_1+a_2+a_3-1}} - \ldots + \frac{(-1)^{k-1}}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_k-1}} + \ldots = F_\xi(x).$$

Зауваження 2.2.1. Вираз значення функції розподілу $F_\xi(x)$ в ірраціональній точці x інтервалу $(0;1)$ є $\Delta^\sharp$-представленням. Оскільки розподіл випадкової величини ξ є неперервним, то $F_\xi(x)$ є неперервною функцією, значення якої в раціональних точках теж має відповідне $\Delta^\sharp$-зображення.

Зауваження 2.2.2. Як видно, з щойно викладено, класична функція Мінковського $?(x)$ є функцією розподілу $F_\xi(x)$ випадкової величини ξ.

2.3. Критерій раціональності числа у його $\Delta^\sharp$-зображенні

Теорема 2.3.1. *Для того щоб число $x \in (0,1]$ було раціональним, необхідно і достатньо, щоб його $\Delta^\sharp$-зображення було скінченним або періодичним.*

Доведення. Н е о б х і д н і с т ь. Якщо $x = 1$, то $x = 2^{1-1} = \Delta^\sharp_{1(\varnothing)}$. Нехай $x = \dfrac{p}{q}$ – раціональне число з $(0,1)$, причому дріб $\dfrac{p}{q}$ є нескоротним. Тоді $p < q$. Зрозуміло, що $\Delta^\sharp$-зображення числа x може бути скінченним. Розглянемо випадок, коли його розклад є нескінченним. Подамо x у вигляді

$$x = 2^{1-a_1} - 2^{1-a_1-a_2} + \ldots + (-1)^{n-2}2^{1-a_1-\ldots-a_{n-1}} + (-1)^{n-1}2^{-a_1-\ldots-a_{n-1}}x_{n-1},$$

де $x_{n-1} = 2^{1-a_n} - 2^{1-a_n-a_{n+1}} + 2^{1-a_n-a_{n+1}-a_{n+2}} - \ldots.$

Після множення останньої рівності на 2^{a_n}, отримуємо

$$2^{a_n}x_{n-1} = 2 - (\underbrace{2^{1-a_{n+1}} - 2^{1-a_{n+1}-a_{n+2}} + \ldots}_{x_n}) = 2 - x_n.$$

Тоді кожне x_n є раціональним і

$$x_n = 2 - 2^{a_n}x_{n-1} = 2 - 2^{a_n}(2 - 2^{a_{n-1}}x_{n-2}) = 2 - 2^{a_n+1} + 2^{a_{n-1}+a_n}x_{n-2} =$$

$$= 2 - 2^{a_n+1} + 2^{a_{n-1}+a_n}(2 - 2^{a_{n-2}}x_{n-3}) = 2 - 2^{a_n+1} + 2^{a_{n-1}+a_n+1} - 2^{a_{n-2}+a_{n-1}+a_n}x_{n-3} = \ldots =$$

$$= 2 - 2^{a_n+1} + 2^{a_{n-1}+a_n+1} - \ldots + (-1)^{n-1}2^{a_2+\ldots+a_n+1} + (-1)^n 2^{a_1+\ldots+a_n}x =$$

$$= \frac{2q - q2^{a_n+1} + \ldots + (-1)^{n-1}q2^{a_2+\ldots+a_n+1} + (-1)^n q2^{a_1+\ldots+a_n}p}{q} = \frac{p_n}{q}.$$

Оскільки $x \in (0,1]$ для всіх n, то або $x_n = 1$ для деякого натурального n, і в цьому випадку розклад скінченний, або ж для кожного n

$$x_n \in \left\{\frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \ldots \frac{q-1}{q}\right\}.$$

Тому існують $t,\ n \in \mathbb{N}$ такі, що $x_n = x_{n+t}$. Остання рівність і доводить періодичність $\Delta^\sharp$-зображення числа x.

Д о с т а т н і с т ь. Якщо розклад числа x є скінченним, то x як результат скінченної кількості арифметичних операцій над цілими числами, є раціональним.

Нехай $x = \Delta^{\sharp}_{a_1a_2\ldots a_n(c_1c_2\ldots c_t)}$ — дійсне число з $(0,1]$, що має періодичне $\Delta^{\sharp}$-зображення з періодом $(c_1c_2\ldots c_t)$. Якщо покласти

$$a \equiv a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \qquad c \equiv c_1 + c_2 + \ldots + c_t,$$

$$B = 2^{1-a_1} - 2^{1-a_1-a_2} + \ldots + (-1)^{n-1}2^{1-a},$$

$$D = 2^{-c_1} - 2^{-c_1-c_2} + \ldots + (-1)^{t-1}2^{-c},$$

то $x = B+S$, де $S = (-1)^n 2^{1-a}\cdot D + (-1)^{n+t}2^{1-a-c}\cdot D + (-1)^{n+2t}2^{1-a-2c}\cdot D + \ldots$ як сума всіх членів нескінченно спадної геометричної прогресії з першим членом $b_1 = (-1)^n 2^{1-a}\cdot D$ і знаменником $q = (-1)^t 2^{-c}$ виражається

$$S = \frac{(-1)^n 2^{1-a}\cdot D}{1-(-1)^t 2^{-c}}.$$

Оскільки B і S є раціональними числами, раціональною є і їх сума x. $\square$

Очевидно, що число $x = \Delta^{\sharp}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}$, цифри у $\Delta^{\sharp}$-зображенні якого утворюють арифметичну прогресію, тобто $a_{n+1} - a_n = d = const$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, є раціональним тоді і тільки тоді, коли $d = 0$. Якщо ж цифри у $\Delta^{\sharp}$-зображенні числа x утворюють геометричну прогресію, тобто $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q = const$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, то воно є раціональним тоді і тільки тоді, коли $q = 1$.

Означення 2.3.1. Число x називається $\Delta^{\sharp}$-*раціональним*, якщо його $\Delta^{\sharp}$-зображення є скінченним.

Як випливає з леми 2.1.1, $\Delta^{\sharp}$-раціональне число має два $\Delta^{\sharp}$-зображення і є раціональним числом. Таким чином, $\Delta^{\sharp}$-раціональні числа утворюють зліченну підмножину множини раціональних чисел, а доповнення множини $\Delta^{\sharp}$-раціональних чисел до множини раціональних чисел — це множина чисел, що мають періодичні $\Delta^{\sharp}$-зображення.

2.4. Геометрія циліндричного $\Delta^\sharp$-зображення чисел

Циліндри мають наступні властивості.

1. $\inf \Delta^\sharp_{c_1\ldots c_{2k-1}i} = \sup \Delta^\sharp_{c_1\ldots c_{2k-1}(i+1)}$; $\sup \Delta^\sharp_{c_1\ldots c_{2k}i} = \inf \Delta^\sharp_{c_1\ldots c_{2k}(i+1)}$;
2. Для діаметра циліндра $\Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m}$ виконується рівність
$$d(\Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m}) = \frac{1}{2^{c_1+c_2+\ldots+c_m}};$$
3. Циліндри одного рангу не перетинаються або співпадають (рівні), причому $\Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m} = \Delta^\sharp_{c'_1c'_2\ldots c'_m} \iff c_i = c'_i \quad i=\overline{1,m}$.

Лема 2.4.1. *Циліндр $\Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m}$ є відрізком, причому*
$$\Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m} = [a-\delta; a], \quad \textit{коли} \quad m = 2k-1, \qquad \textit{і}$$
$$\Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m} = [a; a+\delta], \quad \textit{коли} \quad m = 2k, \qquad \textit{де}$$
$$\delta = \frac{1}{2^{c_1+c_2+\ldots+c_m}},$$
$$a = \frac{1}{2^{c_1-1}} - \frac{1}{2^{c_1+c_2-1}} + \ldots + \frac{(-1)^{m-2}}{2^{c_1+c_2+\ldots+c_{m-1}-1}} + \frac{(-1)^{m-1}}{2^{c_1+c_2+\ldots+c_m-1}}.$$

Доведення. Позначимо $C \equiv \Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m}$, $A \equiv [a-\delta; a]$, $B \equiv [a; a+\delta]$.

Розглянемо випадок, коли $m = 2k-1$. Покажемо, що $C \subset A$.

Нехай $x = \Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}$ — довільний елемент множини C, тобто
$$x = \frac{1}{2^{c_1-1}} - \ldots + \frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2k-1}-1}} - \frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2k-1}}}\underbrace{\left(\frac{1}{2^{a_{2k}-1}} - \frac{1}{2^{a_{2k}+a_{2k+1}-1}} + \ldots\right)}_{x_{2k}}.$$

Тоді $\min C = \frac{1}{2^{c_1-1}} - \frac{1}{2^{c_1+c_2-1}} + \ldots + \frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2k-1}-1}} - \frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2k-1}}}$, що досягається при $x_{2k} = \frac{1}{2^{1-1}} = 1$, а $\max C = \frac{1}{2^{c_1-1}} - \frac{1}{2^{c_1+c_2-1}} + \ldots + \frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2k-1}-1}}$.

Отже,
$$\underbrace{\frac{1}{2^{c_1-1}} - \ldots + \frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2k-1}-1}}}_{a} - \underbrace{\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2k-1}}}}_{\delta} \leqslant x \leqslant \underbrace{\frac{1}{2^{c_1-1}} - \ldots + \frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2k-1}-1}}}_{a}$$
або $a-\delta \leqslant x \leqslant a$, а це означає, що $C \subset A$.

Доведемо тепер таке включення: $A \subset C$.

Нехай $x \in [a-\delta; a]$. Покажемо, що в цьому випадку або

$$x = \Delta^{\sharp}_{c_1c_2\ldots c_{2k-1}(\varnothing)}, \qquad \text{або} \tag{2.4.1}$$

$$x = \Delta^{\sharp}_{c_1c_2\ldots c_{2k-1}a_{2k}a_{2k+1}\ldots a_{2k+n}(\varnothing)}, \qquad \text{або} \tag{2.4.2}$$

$$x = \Delta^{\sharp}_{c_1c_2\ldots c_{2k-1}a_{2k}a_{2k+1}\ldots}, \tag{2.4.3}$$

де $a_{2k+j} \in \mathbb{N}$, тобто що $x \in C$, а отже, $A \subset C$.

Справді, якщо $x = a$, то очевидно, що виконується рівність (2.4.1); якщо $x = a-\delta$, то виконується рівність (2.4.2), а саме: $x = a-\delta = \Delta^{\sharp}_{c_1c_2\ldots c_{2k-1}1(\varnothing)}$. Нехай тепер $a-\delta < x < a$. Покажемо, що в цьому випадку $a_i(x) = c_i$ для всіх $i \leqslant m = 2k-1$. Для цього скористаємось методом від супротивного. Припустимо, що існує $a_i(x) = c'_i \neq c_i$ при $i \leqslant 2k-1$.

Випадок A. Розглянемо число $x' = \Delta^{\sharp}_{c_1c_2\ldots c_{i-1}c'_i(\varnothing)}$. Тоді або $c'_i < c_i$, або $c'_i > c_i$, причому можливі дві ситуації: 1) $i-$ непарне, тобто $i = 2j-1$; 2) $i-$ парне, тобто $i = 2j$. Розглянемо випадок, коли $c'_{2j-1} < c_{2j-1}$.
Тоді різниця

$$x'-a=\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c'_{2j-1}-1}}-\left(\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c_{2j-1}-1}}-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2j-1}+c_{2j}-1}}+\ldots+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2k-1}-1}}\right)\geqslant\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c'_{2j-1}-1}}-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c_{2j-1}-1}}>0.$$

Отже, у випадку A число x' лежить за межами інтервала $(a-\delta; a)$.

Аналогічно міркуючи, можна показати, що у випадках, коли $c'_{2j} < c_{2j}$, $c'_{2j} > c_{2j}$ і $c'_{2j-1} > c_{2j-1}$, число x' також лежить за межами інтервала $(a–\delta; a)$. Таким чином, з $x \in A$ випливає, що $a_i(x) = c_i$ для всіх $i \leqslant 2k-1$, тобто $x \in C$.

Випадок B. Розглянемо тепер число $x' = \Delta^{\sharp}_{c_1c_2\ldots c_{i-1}c'_ia_{i+1}\ldots a_{i+n}(\varnothing)}$. Тоді також або $c'_i < c_i$, або $c'_i > c_i$, причому можливі ситуації: 1) $i-$ непарне, тобто $i = 2j-1$; 2) $i-$ парне, тобто $i = 2j$.

Розглянемо випадок, коли $c'_{2j-1} > c_{2j-1}$. Тоді різниця

$$x'-a=\left(\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c'_{2j-1}-1}}-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c'_{2j-1}+a_{2j}-1}}+\ldots+\frac{(-1)^{2j+n-1}}{2^{c_1+\ldots+c'_{2j-1}+a_{2j}+\ldots+a_{2j+n}-1}}\right)-$$

$$-\left(\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c_{2j-1}-1}}-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2j-1}+c_{2j}-1}}+\ldots+\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2k-1}-1}}\right)=$$
$$=\left(\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c'_{2j-1}-1}}-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c_{2j-1}-1}}\right)-$$
$$-\left(\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c'_{2j-1}+a_{2j}-1}}-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2j-1}+c_{2j}-1}}\right)+\ldots+$$
$$+\left(\frac{(-1)^{2j+n-1}}{2^{c_1+\ldots+c'_{2j-1}+a_{2j}+\ldots+a_{2j+n}-1}}-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2k-1}-1}}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c'_{2j-1}-1}}-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c_{2j-1}-1}}<-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2j}+\ldots+c_{2k-1}}}=-\delta.$$

Аналогічно у випадках, коли $c'_{2j}>c_{2j}$, $c'_{2j}<c_{2j}$ і $c'_{2j-1}<c_{2j-1}$, можна показати, що число x' лежить за межами інтервала $(a-\delta;a)$.

Випадок C. Розглянемо тепер число $x'=\Delta^{\sharp}_{c_1c_2\ldots c_{i-1}c'_ia_{i+1}a_{i+2}\ldots}$. В цьому випадку також або $c'_i<c_i$, або $c'_i>c_i$, причому можливо: 1) $i-$ непарне, тобто $i=2j-1$; 2) $i-$ парне, тобто $i=2j$. Коли $c'_{2j}<c_{2j}$, то різниця

$$x-a=\left(-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c'_{2j-1}-1}}+\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c'_{2j-1}+a_{2j}-1}}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c'_{2j-1}+a_{2j}+a_{2j+1}-1}}+\ldots\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c_{2j-1}-1}}-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2j-1}+c_{2j}-1}}+\ldots+\frac{(-1)^{2k-2}}{2^{c_1+\ldots+c_{2k-1}-1}}\right)=$$
$$=\left(-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c'_{2j-1}-1}}+\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c_{2j-1}-1}}\right)-$$
$$-\left(-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c'_{2j-1}+a_{2j}-1}}+\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2j-1}+c_{2j}-1}}\right)+\ldots+$$
$$+\left(-\frac{(-1)^{2j+n-1}}{2^{c_1+\ldots+c'_{2j-1}+a_{2j}+\ldots+a_{2j+n}-1}}+\frac{(-1)^{2k-2}}{2^{c_1+\ldots+c_{2k-1}-1}}\right)+\ldots\leqslant$$
$$\leqslant-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c'_{2j-1}-1}}+\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c_{2j-1}-1}}<-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2j}+\ldots+c_{2k-1}}}=-\delta.$$

Аналогічно можна довести, що число x' не належить $(a-\delta;a)$, коли $c'_{2j-1}<c_{2j-1}$, $c'_{2j-1}>c_{2j-1}$ і $c'_{2j}>c_{2j}$.

Отже, x не може мати зображення, відмінне від (2.4.1)-(2.4.3), а це означає, що $x\in C$ і, отже, $A\subset C$. Враховуючи першу частину доведення, маємо $C\subset A$ і $A\subset C$, тобто $A=C$. Таким чином, при $m=2k-1$ циліндр $\Delta^{\sharp}_{c_1c_2\ldots c_m}$ є відрізком $[a-\delta;a]$, що і вимагалось довести. Аналогічними міркуваннями можна дійти того ж висновку, коли $m=2k$. $\square$

Наслідок 2.4.1. *Для довжини циліндра* $\Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m}$ *рангу* m *мають місце співвідношення:* $|\Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m}| = \dfrac{1}{2^{c_1+c_2+\ldots+c_m}} \leqslant \dfrac{1}{2^m} \to 0 \quad (m \to \infty)$.

Наслідок 2.4.2. *Для довільного циліндра* $\Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m}$ *має місце рівність (основне метричне відношення)*

$$\frac{|\Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m i}|}{|\Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m}|} = \frac{1}{2^i}, \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Зауважимо, що значення основного метричного відношення залежить лише від останньої цифри в основі циліндра $\Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m i}$.

2.5. Оператори у просторі $\Delta^\sharp$-зображень

У множині всіх $\Delta^\sharp$-зображень дійсних чисел півінтервала $(0;1]$ розглянемо *оператор* $\widehat{\omega}$ *лівостороннього зсуву цифр зображення числа* (далі — оператор лівостороннього зсуву), означений рівностями:

$$\widehat{\omega}\left(\Delta^\sharp_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}\right) = \Delta^\sharp_{a_2a_3\ldots a_n\ldots}, \quad \widehat{\omega}\left(\Delta^\sharp_{a_1a_2\ldots a_n(\varnothing)}\right) = \Delta^\sharp_{a_2a_3\ldots a_n(\varnothing)},$$

$$\widehat{\omega}\left(\Delta^\sharp_{[i+1](\varnothing)}\right) = \widehat{\omega}\left(\Delta^\sharp_{i1(\varnothing)}\right) = \Delta^\sharp_{1(\varnothing)}.$$

Він породжує функцію $\omega : (0;1] \to (0;1]$, коректно означену в $\Delta^\sharp$-ірраціональних точках в силу однозначності $\Delta^\sharp$-зображення; а в $\Delta^\sharp$-раціональних точках після домовленості використовувати лише одне з $\Delta^\sharp$-зображень, а саме: $\Delta^\sharp_{a_1a_2\ldots a_n1(\varnothing)}$.

Даний оператор володіє властивістю сюр'єктивності, але не має властивості ін'єктивності, оскільки $\widehat{\omega}(\Delta^\sharp_{ia_2\ldots a_n\ldots}) = \widehat{\omega}(\Delta^\sharp_{ja_2\ldots a_n\ldots})$ при $i \neq j$.

Точки $\Delta^\sharp_{(i)}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ є інваріантними для відображення ω.

Лема 2.5.1. 1. *Функція* $\omega(x)$ *є кусково-лінійною, причому лінійною на кожному циліндрі першого рангу:*

$$\omega(x) = 2 - 2^i x \quad \text{при} \quad x \in \Delta^\sharp_i, \tag{2.5.1}$$

тобто $x = \Delta^\sharp_{ia_2\ldots a_n\ldots}$, $\quad i = 1, 2, 3, \ldots$.

2. *В кожній точці виду* $x = \Delta^{\sharp}_{[i+1](\varnothing)}$, $i \in \mathbb{N}$, *вона має розрив першого роду зі стрибком* 1.

Доведення. 1. Справді,

$$x = \Delta^{\sharp}_{ia_2a_3\ldots a_n\ldots} = \frac{1}{2^{i-1}} - \frac{1}{2^i}\left(\frac{1}{2^{a_2-1}} - \frac{1}{2^{a_2+a_3-1}} + \ldots\right),$$

тобто $x = \dfrac{1}{2^{i-1}} - \dfrac{1}{2^i}\omega(x)$, звідки випливає (2.5.1).

2. Дослідимо поведінку $\omega(x)$ в правому ε-півоколі точки $x = \Delta^{\sharp}_{[i+1](\varnothing)}$. Оскільки $x \to \Delta^{\sharp}_{[i+1](\varnothing)} + 0$ рівносильна умові $x \in \Delta^{\sharp}_{i1j}$, де $j \to \infty$, то

$$\lim_{x \to \Delta^{\sharp}_{[i+1](\varnothing)}+0} \omega(x) = \lim_{j\to\infty} \omega\left(\Delta^{\sharp}_{i1j}\right) = \lim_{j\to\infty} \Delta^{\sharp}_{1j} = 1.$$

У лівому ε-півоколі точки $x = \Delta^{\sharp}_{[i+1](\varnothing)}$ умова $x \to \Delta^{\sharp}_{[i+1](\varnothing)} - 0$ рівносильна умові $x \in \Delta^{\sharp}_{[i+1]j}$, де $j \to \infty$. Тоді

$$\lim_{x \to \Delta^{\sharp}_{[i+1](\varnothing)}-0} \omega(x) = \lim_{j\to\infty} \omega\left(\Delta^{\sharp}_{[i+1]j}\right) = \lim_{j\to\infty} \Delta^{\sharp}_{j} = 0. \qquad \square$$

Зауваження 2.5.1. Всі прямі, що є графіками лінійних функцій (2.5.1), мають різні кутові коефіцієнти, але вісь ординат перетинають в одній точці.

Наслідок 2.5.1. *Оператор лівостороннього зсуву символів* $\widehat{\omega}$ *кожну підмножину півінтервала* $(0; 1]$ *нульової міри Лебега переводить в множину нульової міри Лебега, а підмножину повної міри — в множину повної міри; більше того, прообразом множини нульової міри є множина нульової міри, а множини повної міри — множина повної міри.*

Нехай i — фіксоване натуральне число. Оператор, залежний від параметра i, коректно означений на півінтервалі $(0, 1]$ рівністю

$$\delta_i(x) = \delta_i\left(\Delta^{\sharp}_{a_1(x)a_2(x)\ldots}\right) = \Delta^{\sharp}_{ia_1a_2\ldots},$$

який визначає зліченний клас функцій $y = \delta_i(x)$, $i \in \mathbb{N}$, називається *оператором правостороннього зсуву цифр* $\Delta^{\sharp}$-зображення.

Лема 2.5.2. *При кожному фіксованому значенні параметра* $i \in \mathbb{N}$ *відображення*

$$\delta_i(x) = \Delta^\sharp_{ia_1(x)\ldots a_n(x)\ldots} = -\frac{1}{2^i}x + \frac{1}{2^{i-1}}$$

є стискуючим відображенням з коефіцієнтом $\dfrac{1}{2^i}$ *і інваріантною точкою* $x = \Delta^\sharp_{(i)}$.

Доведення. Дане твердження випливає з того, що

$$\delta_i(x) = \Delta^\sharp_{ia_1(x)\ldots a_n(x)\ldots} = \frac{1}{2^{i-1}} - \frac{1}{2^i}\left(\frac{1}{2^{a_1-1}} - \frac{1}{2^{a_1+a_2-1}} + \frac{1}{2^{a_1+a_2+a_3-1}} - \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{2^{i-1}} - \frac{1}{2^i}x,$$

а тому, $\left|\dfrac{\delta_i(x_2) - \delta_i(x_1)}{x_2 - x_1}\right| = \dfrac{1}{2^i}$ і $\delta_i\left(\Delta^\sharp_{(i)}\right) = \Delta^\sharp_{(i)}$. □

Зауваження 2.5.2. Для операторів лівостороннього зсуву $\widehat{\omega}$ і правостороннього зсуву $\delta_i(x)$ мають місце рівності:

$$\widehat{\omega}(\delta_i(x)) = x; \qquad \delta_{a_1(x)}(\widehat{\omega}(x)) = x.$$

У множині $\mathcal{Z}^\sharp_{(0,1]}$ всіх $\Delta^\sharp$-зображень чисел $(0,1]$ введемо бінарне відношення еквівалентності “мати однаковий хвіст” (символічно: $\sim$).

Означення 2.5.1. Будемо говорити, що два $\Delta^\sharp$-зображення

$$\Delta^\sharp_{a_1a_2\ldots a_n\ldots} \ i \ \Delta^\sharp_{b_1b_2\ldots b_n\ldots}$$

мають однаковий хвіст, або *перебувають у відношенні* $\sim$, якщо існують натуральні числа m та k такі, що $a_{m+j} = b_{k+j}$ для будь-якого $j \in N$.

Очевидно, що відношення $\sim$ є відношенням еквівалентності (тобто має властивості рефлективності, симетричності та транзитивності) і розбиває множину, на якій воно задане, на класи еквівалентності. Кожен з класів еквівалентності називається *хвостовою множиною*, яка однозначно визначається довільним своїм елементом (представником).

Означення 2.5.2. Будемо говорити, що два числа x і y *мають однаковий хвіст* (або пребувають у відношенні $\sim$), якщо їх $\Delta^{\sharp}$-зображення перебувають у відношенні $\sim$. Символічно: $x \sim y$.

Лема 2.5.3. *Кожна хвостова множина є зліченною і щільною в* $(0,1]$ *множиною.*

Доведення. Нехай K — довільний клас еквівалентності, $x_0 = \Delta^{\sharp}_{c_1 \ldots c_k \ldots}$ — його представник. Тоді очевидно, що для довільного натурального m існує множина K_m таких чисел x, що $a_{k+j}(x) = c_{m+j}$ для довільного $j \in N$, $k = 1, 2, \ldots$. Тоді множина $K = \bigcup\limits_{m \in N} K_m$, будучи зліченним об'єднанням зліченних множин, є множиною зліченною.

Доведемо тепер, що множина K щільна в $(0,1]$. Оскільки належність числа x до множини K не залежить від довільної скінченної кількості перших символів його $\Delta^{\sharp}$-зображення, то в кожному з циліндрів довільного рангу m існує точка множини K. Отже, K є всюди щільною в $(0,1]$ множиною. Що й вимагалось довести. □

Теорема 2.5.1. *Фактор-множина* $G \equiv (0,1]/\sim$ *є континуальною.*

Доведення. Скористаємось методом доведення від супротивного. Припустимо, що G є зліченною. Тоді, згідно з лемою 2.5.3, півінтервал $(0,1]$ є зліченним об'єднанням зліченних множин. Але добре відомо, що остання множина є зліченною, а півінтервал $(0,1]$ є континуальною множиною. Отримана суперечність доводить теорему. □

2.6. Фрактальна розмірність Гаусдорфа-Безиковича і $\Delta^\sharp$-циліндри

Однією з традиційних задач теорії розмірності Гаусдорфа–Безиковича є задача [3, 5, 45] про те, чи достатньо класу множин Φ для того, щоб $\alpha_0(E,\Phi)=\alpha_0(E)$.

Нехай W — клас усіх зв'язних множин, що є об'єднаннями циліндрів однакового рангу, які належать одному і тому ж циліндру попереднього рангу, тобто множин вигляду

$$(1)\quad \Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m},\quad (2)\quad \bigcup_{i=n}^{\infty}\Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m i},\quad (3)\quad \bigcup_{i=1}^{n}\Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m i},\quad (4)\quad \bigcup_{i=k}^{n}\Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m i}$$

для всіх $k,m,n\in\mathbb{N}$ і наборів натуральних чисел $(c_1,c_2,\ldots,c_m)$.

Позначимо через W_ε клас множин з W, діаметри яких не перевищують ε.

Лема 2.6.1. *Для довільного інтервалу $u\subset(0,1]$ існує не більше чотирьох множин з $\mathrm{W}_{|u|}$, які покривають u і мають діаметри не більші за $|u|$.*

Доведення. Нехай $u=(a,b)$. Точки a і b можуть належати: 1) різним циліндрам 1-го рангу; 2) одному циліндру 1-го рангу.

1. Нехай $a\in\Delta^\sharp_{a_1}$, $b\in\Delta^\sharp_{b_1}$, $c=\max\Delta^\sharp_{a_1}$, $d=\min\Delta^\sharp_{b_1}$. Оскільки $a<b$, то $a_1>b_1$ і $a<d<b$.

Можливі підвипадки: 1) $a_1-b_1>1$ і 2) $a_1-b_1=1$.

1.1. Нехай $a_1-b_1>1$. Тоді $(a,b)=(a,d]\cup(d,b)$.

Якщо $a=\min\Delta^\sharp_{a_1}$, то $[a,d]=\bigcup\limits_{i=b_1+1}^{a_1}\Delta^\sharp_i\subset\mathrm{W}_{d-a}\subset\mathrm{W}_{b-a}$. Якщо $a\in\nabla^\sharp_{a_1}$, то (a,d) покривається двома множинами з W_{d-a}, а саме: $\Delta^\sharp_{a_1}$ і $\bigcup\limits_{j=b_1+1}^{a_1-1}\Delta^\sharp_j$.

Таким чином, для покриття $[a,d]$ достатньо двох множин з W_{d-a}, а отже, і з W_{b-a}.

Розглянемо $[d,b]$. Якщо $b=\max\Delta^{\sharp}_{b_1}$, то $[d,b]=\Delta^{\sharp}_{b_1}\subset W_{b-d}\subset W_{b-a}$. Якщо $b\in\nabla^{\sharp}_{b_1}$, то розглянемо циліндри 2-го рангу $\Delta^{\sharp}_{b_1j}$, які належать $\Delta^{\sharp}_{b_1}$.

Якщо $b=\max\Delta^{\sharp}_{b_1n}$, то $[d,b]=\bigcup\limits_{j=1}^{n}\Delta^{\sharp}_{b_1j}\subset W_{b-d}$. Якщо $b\in\nabla^{\sharp}_{b_1n}$, то $[d,b]$ покривають:

а) дві множини з W_{b-a}: $\bigcup\limits_{j=1}^{n-1}\Delta^{\sharp}_{b_1j}$ і $\Delta^{\sharp}_{b_1n}$, якщо $n>1$,

б) одна множина $\Delta^{\sharp}_{b_11}$, якщо $n=1$, оскільки $|\Delta^{\sharp}_{b_11}|<|\Delta^{\sharp}_{b_1+1}|$, $\Delta^{\sharp}_{b_1+1}\subset[a,b]$.

Отже, для покриття $[d,b]$ досить двох множин з W_{b-a} і не більше чотирьох множин для покриття $[a,b]$.

1.2. Нехай $a_1-b_1=1$. Тоді $c=d$, $a\in\nabla^{\sharp}_{a_1}$. Розглянемо $[a,d]$. Якщо $a=\min\Delta^{\sharp}_{a_1k}$, то $[a,d]=\bigcup\limits_{j=k}^{\infty}\Delta^{\sharp}_{a_1j}\subset W_{d-a}\subset W_{b-a}$.

Якщо $a\in\nabla^{\sharp}_{a_1k}$, то $[a,d]$ покривається двома множинами з W_{b-a}, а саме: $\Delta^{\sharp}_{a_1k}$ і $\bigcup\limits_{j=k+1}^{\infty}\Delta^{\sharp}_{a_1j}$, оскільки згідно з рівністю $|\Delta^{\sharp}_{c_1\ldots c_ms}|=\sum\limits_{j=s+1}^{\infty}|\Delta^{\sharp}_{c_1\ldots c_mj}|$ маємо $|\Delta^{\sharp}_{a_1k}|=\sum\limits_{j=k+1}^{\infty}|\Delta^{\sharp}_{a_1j}|$. Отже, для покриття $[a,d]$ досить двох множин з W_{b-a}.

Тепер розглянемо $[d,b]$. Якщо $b=\max\Delta^{\sharp}_{b_1n}$, то $[d,b]=\bigcup\limits_{j=1}^{n}\Delta^{\sharp}_{b_1j}\subset W_{b-d}$.

Якщо $b\in\nabla^{\sharp}_{b_1n}$ і $n>1$, то $[d,b]$ покривається двома множинами з W_{b-a}, а саме: $\bigcup\limits_{j=1}^{n-1}\Delta^{\sharp}_{b_1j}$ і $\Delta^{\sharp}_{b_1n}$, оскільки $|\Delta^{\sharp}_{b_1n}|<|\Delta^{\sharp}_{b_11}|$, $\Delta^{\sharp}_{b_11}\subset[d,b]$.

Якщо ж $b\in\nabla^{\sharp}_{b_11}$, то розглянемо циліндри $\Delta^{\sharp}_{b_11j}$ 3-го рангу, які належать $\Delta^{\sharp}_{b_11}$. В цьому випадку $[d,b]$ покривається не більш ніж двома множинами з W_{b-a}, а саме:

а) якщо $b=\max\Delta^{\sharp}_{b_11s}$, то однією множиною: $\bigcup\limits_{j=s}^{\infty}\Delta^{\sharp}_{b_11j}$,

б) якщо $b\in\nabla^{\sharp}_{b_11s}$, то двома множинами: $\bigcup\limits_{j=s+1}^{\infty}\Delta^{\sharp}_{b_11j}$ і $\Delta^{\sharp}_{b_11s}$, оскільки довжина останньої є меншою діаметра першої. Отже, для покриття $[d,b]$ досить двох множин з W_{b-a} і чотирьох множин для покриття всього $[a,b]$.

2. Якщо a і b належать одному циліндру 1-го рангу, то існує циліндр $\Delta^{\sharp}_{c_1c_2\ldots c_m}$ деякого рангу m, якому належать числа a і b, але не існує циліндра рангу $m+1$, якому б вони належали.

У випадку, коли m парне, для доведення леми досить повторити міркування випадку 1, де роль $(0,1]$ буде відігравати циліндр $\Delta^{\sharp}_{c_1c_2\ldots c_m}$.

Якщо ж m — число непарне, дійти до висновку можна аналогічними міркуваннями. При цьому числа a і b, c і d обмінюються ролями. □

Теорема 2.6.1. *Класу множин* W *достатньо для визначення розмірності Гаусдорфа–Безиковича довільної борелівської множини* $E \subset [0,1]$, *тобто*

$$\alpha_0(E, \mathrm{W}) = \alpha_0(E). \tag{2.6.1}$$

Доведення. З леми 2.6.1 випливає $m^{\alpha}_{\varepsilon}(E,\mathrm{W}) \leqslant 4m^{\alpha}_{\varepsilon}(E)$. Справді, для довільного відрізка u, що бере участь в покритті E, існує не більше чотирьох множин ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 з W, для яких $|\omega_i|^{\alpha} \leqslant |u|^{\alpha}$ при довільному $\alpha \in (0,1)$.

З іншого боку, $m^{\alpha}_{\varepsilon}(E) \leqslant m^{\alpha}_{\varepsilon}(E,\mathrm{W})$, оскільки у визначенні $m^{\alpha}_{\varepsilon}(E)$ інфімум береться за ширшим класом покриттів, який включає і множини з W. Таким чином, $m^{\alpha}_{\varepsilon}(E) \leqslant m^{\alpha}_{\varepsilon}(E,\mathrm{W}) \leqslant 4m^{\alpha}_{\varepsilon}(E)$ для будь-якого $\varepsilon > 0$. Звідки перехід до границь дає $H^{\alpha}(E) \leqslant H^{\alpha}(E,\mathrm{W}) \leqslant 4H^{\alpha}(E)$, тобто $H^{\alpha}(E)$ і $H^{\alpha}(E,\mathrm{W})$ одночасно по α набувають значень 0 та ∞. А це означає, що має місце рівність (2.6.1). □

2.7. Метричні задачі: фрактали канторівського типу

З виразу довжини циліндра і формул для геометричної прогресії випливає наступне твердження.

Лема 2.7.1. *Для міри Лебега* λ *мають місце наступні рівності:*

1. $\lambda\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k}\Delta_{c_1\ldots c_m i}\right) = \left(1-\dfrac{1}{2^k}\right)|\Delta^{\sharp}_{c_1\ldots c_m}| = \left(1-\dfrac{1}{2^k}\right)\dfrac{1}{2^{c_1+c_2+\ldots+c_m}}$;

2. $\lambda\left(\bigcup\limits_{i=k+1}^{\infty}\Delta_{c_1\ldots c_m i}\right)=\frac{1}{2^k}|\Delta^\sharp_{c_1\ldots c_m}|==\frac{1}{2^k}\frac{1}{2^{c_1+c_2+\ldots+c_m}};$

3. $\lambda\left(\bigcup\limits_{i=k+1}^{n}\Delta_{c_1\ldots c_m i}\right)=\left(1-\frac{1}{2^{n-k}}\right)|\Delta^\sharp_{c_1\ldots c_m}|=\left(1-\frac{1}{2^{n-k}}\right)\frac{1}{2^{c_1+c_2+\ldots+c_m}}.$

Теорема 2.7.1. *Множина*

$$C\equiv C[\Delta^\sharp,V]=\{x:\ x=\Delta^\sharp_{a_1a_2\ldots a_n\ldots},\ a_n\in V\neq N\}:$$

1) досконала; 2) ніде не щільна; 3) має нульову міру Лебега; 4) самоподібна, якщо V — скінченна множина, і N-самоподібна, якщо V — нескінченна множина, її фрактальна розмірність Гаусдорфа-Безиковича є розв'язком рівняння

$$\sum_{v\in V}\left(\frac{1}{2^v}\right)^x=1.$$

Доведення. 1. Нехай $x_0=\Delta^\sharp_{c_1\ldots c_n\ldots}$ — гранична точка множини C, тобто така, що для будь-якого $\varepsilon>0$ інтервал $(x_0-\varepsilon;x_0+\varepsilon)$ містить нескінченну кількість точок множини C.

Доведемо, що $x_0\in C$, тобто покажемо, що всі c_j належать V, $j\in\mathbb{N}$. Припустимо, що це не так, тобто існує $c_i\in\mathbb{N}\setminus V$. Тоді $x_0\in\Delta^\sharp_{c_1\ldots c_{i-1}c_i}$. Але $\nabla^\sharp_{c_1\ldots c_{i-1}c_i}\cap C=\varnothing$ і тому $(x_0-\varepsilon;x_0+\varepsilon)\cap C=\varnothing$ при $\varepsilon<\frac{1}{2^{i+1}}$, що суперечить тому, що x_0 є граничною для C. Тобто всі $c_j\in V$ і $x_0\in C$. Отже, C є замкненою множиною.

Тепер покажемо, що C не містить ізольованих точок. Припустимо супротивне. Нехай $x_1=\Delta^\sharp_{c_1\ldots c_n\ldots}$ — ізольована точка множини C ($c_j\in V$), тобто існує $\varepsilon>0$ таке, що $(x_1-\varepsilon;x_1)\cap C=\varnothing=C\cap(x_1;x_1+\varepsilon)$. Але, взявши m достатньо великим, а саме: $\frac{1}{2^{c_1+c_2+\ldots+c_m}}<\varepsilon$, матимемо $\Delta^\sharp_{c_1\ldots c_m}\subset(x_1-\varepsilon;x_1+\varepsilon)$. Тоді точка $x_2=\Delta^\sharp_{c_1\ldots c_m i(v)}\in C\cap(x_1-\varepsilon;x_1+\varepsilon)$, де $i\in V\setminus\{c_{m+1}\}$, $v\in V$, що суперечить припущенню, оскільки $x_2\neq x_1$.

Таким чином, множина C є замкненою і не містить ізольованих точок, тобто є досконалою.

2. Скористаємось означенням ніде не щільної множини. Для цього покажемо, що для довільного інтервалу $(a,b) \subset (0,1)$ існує підінтервал $(a',b') \subset (a,b)$, який не містить точок множини C. Не порушуючи загальності, можна вважати, що числа a і b мають нескінченні зображення. Нехай

$$a = \Delta^{\sharp}_{c_1 \ldots c_{m-1} c_m c_{m+1} \ldots}, \; b = \Delta^{\sharp}_{c_1 \ldots c_{m-1} c'_m c'_{m+1} \ldots}, \quad \text{де } c_m \neq c'_m.$$

1) Якщо m — число непарне, то $c_m > c'_m$ і $c_j = c'_j$ при $j < m$. Тоді

$$(a',b') = \nabla_{c_1 \ldots c_{m-1} c_m [c_{m+1}+1] j}, \quad \text{де } j \in \mathbb{N} \setminus V.$$

2) Якщо ж m — парне, то $c_m < c'_m$ і $c_j = c'_j$ при $j < m$. І тоді

$$(a',b') = \nabla_{c_1 \ldots c_{m-1} c'_m [c'_{m+1}+1] j}, \quad \text{де } j = \mathbb{N} \setminus V.$$

3. Якщо $V_1 \subset V_2$, то очевидно, що $C[\Delta^{\sharp}, V_1] \subset C[\sharp, V_2]$. Тоді міркування досить провести для випадку, коли множина $N \setminus V = \{u\}$ складається з одного елемента.

Нехай F_k — це об'єднання всіх циліндрів k-го рангу, серед внутрішніх точок яких є точки множини C. Тоді $C \subset F_{k+1} \subset F_k$. А отже,

$$\lambda(C) \leqslant \lambda(F_k) \quad \text{для всіх } k \in \mathbb{N}.$$

Оскільки $F_k = \bigcup\limits_{i_1 \neq u} \bigcup\limits_{i_2 \neq u} \ldots \bigcup\limits_{i_k \neq u} \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, то

$$\lambda(F_k) = \sum_{i_1 \neq u} \sum_{i_2 \neq u} \ldots \sum_{i_k \neq u} |\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k}| = \sum_{i_1 \neq u} \sum_{i_2 \neq u} \ldots \sum_{i_{k-1} \neq u} |\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}| \sum_{i_k \neq u} \frac{1}{2^{i_k}} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2^u}\right) \sum_{i_1 \neq u} \ldots \sum_{i_{k-1} \neq u} |\Delta_{i_1 \ldots i_{k-1}}| = \left(1 - \frac{1}{2^u}\right) \sum_{i_1 \neq u} \ldots \sum_{i_{k-2} \neq u} |\Delta_{i_1 \ldots i_{k-2}}| \sum_{i_{k-1} \neq u} \frac{1}{2^{i_{k-1}}} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2^u}\right)^2 \sum_{i_1 \neq u} \ldots \sum_{i_{k-2} \neq u} |\Delta_{i_1 \ldots i_{k-2}}| = \ldots = \left(1 - \frac{1}{2^u}\right)^{k-1} \sum_{i_1 \neq u} |\Delta_{i_1}| =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2^u}\right)^{k-1} \sum_{i_1 \neq u} \frac{1}{2^{i_1}} = \left(1 - \frac{1}{2^u}\right)^k.$$

Тоді $\lambda(C) \leqslant \lambda(F_k) = \left(1 - \dfrac{1}{2^u}\right)^k \to 0$, коли $k \to \infty$. А отже, $\lambda(C) = 0$.

4. Оскільки $C = \bigcup\limits_n C_n$ і $C \overset{2^{-c_n}}{\sim} C_n = \Delta^{\sharp}_{c_n} \cap C$, то множина C є самоподібною у випадку скінченного об'єднання і N-самоподібною, якщо $n \to \infty$.

Її самоподібна (N-самоподібна) розмірність набуває значень з нескінченної множини і є розв'язком рівняння $\sum\limits_{c_n\in V}\left(\frac{1}{2^{c_n}}\right)^x = 1.$ $\square$

Наслідок 2.7.1. *Якщо* $V = \mathbb{N}\setminus\{1\}$, *то* $\alpha_0(C) = \log_2 \frac{2}{\sqrt{5}-1}$.

Теорема 2.7.2. *Нехай c і s — фіксовані натуральні числа. Множина*

$$D \equiv D[\Delta^\sharp, \overline{cs}] = \{x: \ x = \Delta^\sharp_{a_1\ldots a_n\ldots}, \text{ де } \overline{a_n a_{n+1}} \neq \overline{cs} \ \forall n \in \mathbb{N}\}$$

є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега.

Доведення. Доведемо, що D є ніде не щільною множиною за означенням. Нехай (a, b) — довільний інтервал, що належить $(0, 1]$. Легко вказати циліндр $\Delta^\sharp_{c_1\ldots c_m} \subset (a, b)$.

Справді, оскільки $a < b$, то існує k таке, що $a_k(a) \neq a_k(b)$, але $a_i(a) = a_i(b)$ при $i < k$. Тоді можливі випадки: 1) k – непарне; 2) k – парне.

1) $\Delta^\sharp_{a_1(a)\ldots a_k(a)[a_{k+1}(a)+1]} \subset (a, b)$, а $\Delta^\sharp_{a_1(a)\ldots a_k(a)[a_{k+1}(a)+1]cs} \cap D = \varnothing$.

2) $\Delta^\sharp_{a_1(b)\ldots a_k(b)[a_{k+1}(b)+1]} \subset (a, b)$, а $\Delta^\sharp_{a_1(b)\ldots a_k(b)[a_{k+1}(b)+1]cs} \cap D = \varnothing$.

Тому множина D є ніде не щільною за означенням.

Доведемо, що міра Лебега множини D рівна нулю. Можливі випадки: 1) $c = s$; 2) $c \neq s$. Нехай $\overline{\Delta}^\sharp_{c_1\ldots c_m} \equiv \Delta^\sharp_{c_1\ldots c_m} \cap D$. Тоді у першому випадку

$$D = \left[\bigcup_{i\neq c} \overline{\Delta}^\sharp_i\right] \cup \left[\bigcup_{i\neq c} \overline{\Delta}^\sharp_{ci}\right].$$

У другому випадку

$$D = \left[\bigcup_{i\neq c} \overline{\Delta}^\sharp_i\right] \cup \left[\bigcup_{c\neq i\neq s} \overline{\Delta}^\sharp_{ci}\right] \cup \left[\bigcup_{c\neq i\neq s} \overline{\Delta}^\sharp_{cci}\right] \cup\ldots\cup \left[\bigcup_{c\neq i\neq s} \overline{\Delta}^\sharp_{\underbrace{c\ldots c}_{k}i}\right] \cup\ldots\cup \Delta^\sharp_{(c)}.$$

Нехай $F_0 = (0, 1]$, F_{2k} — об'єднання циліндрів рангу $2k$, які містять точки множини D,

$$\overline{F}_{2(k+1)} = F_{2k} \setminus F_{2(k+1)}. \tag{2.7.1}$$

Очевидно, що $F_{2k} \supset F_{2(k+1)} \supset D \;\; \forall\, k \in \mathbb{N}$ і $D = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} F_{2k}$.
За неперервністю міри Лебега зверху $\lambda(D) = \lim\limits_{k\to\infty} \lambda(F_{2k})$. Тоді

$$\lambda(D) = \lim_{k\to\infty}\left[\frac{\lambda(F_{2k})}{\lambda(F_{2(k-1)})}\cdot\frac{\lambda(F_{2(k-1)})}{\lambda(F_{2(k-2)})}\cdot\ldots\cdot\frac{\lambda(F_{2})}{\lambda(F_{0})}\right] =$$

$$\lim_{k\to\infty}\prod_{m=1}^{k}\frac{\lambda(F_{2m})}{\lambda(F_{2(m-1)})} = \prod_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda(F_{2m})}{\lambda(F_{2(m-1)})}. \tag{2.7.2}$$

З (2.7.1) маємо

$$\lambda(F_{2(k+1)}) = \lambda(F_{2k}) - \lambda(\overline{F}_{2(k+1)}) \quad \text{і} \quad \frac{\lambda(F_{2(k+1)})}{\lambda(F_{2k})} = 1 - \frac{\lambda(\overline{F}_{2(k+1)})}{\lambda(F_{2k})}.$$

Підставивши в (2.7.2) отриманий вираз, одержимо

$$\lambda(D) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - \frac{\lambda(\overline{F}_{2(k+1)})}{\lambda(F_{2k})}).$$

Останній нескінченний добуток розбігається до нуля тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(\overline{F}_{2(k+1)})/\lambda(F_{2k}) = \infty. \tag{2.7.3}$$

Знайдемо оцінки останнього відношення.

Нехай $\Delta^{\sharp}_{c_1\ldots c_{2k}}$ — циліндр з F_{2k}. Можливі випадки: 1)$c_{2k} = c$, 2)$c_{2k} \neq c$.

Якщо $c_{2k} = c$, то $\nabla^{\sharp}_{c_1\ldots c_{2k}s} \cap D = \varnothing$ і $\dfrac{|\Delta^{\sharp}_{c_1\ldots c_{2k}s}|}{|\Delta^{\sharp}_{c_1\ldots c_{2k}}|} = \dfrac{1}{2^s}$.

Якщо $c_{2k} \neq c$, то $\nabla^{\sharp}_{c_1\ldots c_{2k}cs} \cap D = \varnothing$ і $\dfrac{|\Delta^{\sharp}_{c_1\ldots c_{2k}cs}|}{|\Delta^{\sharp}_{c_1\ldots c_{2k}}|} = \dfrac{1}{2^{c+s}}$.

Тому, враховуючи це, маємо $0 < \dfrac{1}{2^{c+s}} \leqslant \dfrac{\lambda(\overline{F}_{2(k+1)})}{\lambda(F_{2k})} \leqslant \dfrac{1}{2^s} < 1$. Отже, ряд (2.7.3) розбігається, оскільки не виконується необхідна умова збіжності і тому $\lambda(D) = 0$. $\square$

2.8. Деякі задачі ймовірнісної теорії чисел, пов'язані з $\Delta^{\sharp}$-зображенням чисел

У традиційному розумінні ймовірнісна теорія чисел займається теоретико-числовими проблемами з використанням ймовірнісних засобів. Ймовірнісна теорія зображень дійсних чисел розв'язує ймовірнісні проблеми з використанням різних систем зображення чисел. Її важливою складовою є вивчення розподілів ймовірностей на множинах дійсних чисел, визначених умовами на їх зображення у тій чи іншій системі, зокрема випадкових величин, цифри зображення яких є випадковими величинами з наперед заданими розподілами.

Теорема 2.8.1. *Якщо випадкова величина $\tau = \Delta^{\sharp}_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_k\ldots}$ має рівномірний на $(0,1]$ розподіл, то цифри τ_k її $\Delta^{\sharp}$-зображення є незалежними випадковими величинами, що мають однакові розподіли*

$$P\{\tau_k = i\} = \frac{1}{2^i}, \quad i = 1, 2, \ldots . \qquad (2.8.1)$$

Доведення. Оскільки τ має рівномірний розподіл на $(0,1]$, то

1. $P\{\tau = a\} = 0$ для довільного $a \in (0,1]$;

2. $P\{\tau \in (a,b)\} = P\{\tau \in [a,b]\} = P([a,b]) = = b-a$, зокрема для довільного циліндра $\Delta^{\sharp}_{c_1\ldots c_m}$, враховуючи вираз його довжини, має місце рівність

$$P(\Delta^{\sharp}_{c_1\ldots c_m}) = |\Delta^{\sharp}_{c_1\ldots c_m}| = \frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_m}} = \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{2^{c_i}}.$$

Скористаємось методом математичної індукції, тобто доведемо, що для довільного $k \in N$ випадкова величина τ_k не залежить від τ_j, де $j < k$ і мають місце рівності (2.8.1).

Враховуючи неперервність розподілу випадкової величини τ та властивості циліндрів, маємо

$$P\{\tau_1 = i\} = P\{\tau \in \Delta^{\sharp}_i\} = P(\Delta^{\sharp}_i) = |\Delta^{\sharp}_i| = \frac{1}{2^i};$$

$$P\{\tau_1 = i, \tau_2 = j\} = P\{\tau \in \Delta^{\sharp}_{ij}\} = P(\Delta^{\sharp}_{ij}) = |\Delta^{\sharp}_{ij}| = \frac{1}{2^{i+j}} = |\Delta^{\sharp}_i| \cdot |\Delta^{\sharp}_j| =$$

$$=P(\Delta^\sharp_i)P(\Delta^\sharp_j)=P\{\tau_1=i\}\cdot P\{\tau_2=j\}=\frac{1}{2^{i+j}};$$

$$P\{\tau_2=i\}=P\{\tau\in\bigcup_{j=1}^{\infty}\Delta^\sharp_{ji}\}=P(\bigcup_{j=1}^{\infty}\Delta^\sharp_{ji})=$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}|\Delta^\sharp_{ji}|=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^{i+j}}=\frac{1}{2^i}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}=\frac{1}{2^i}.$$

Аналогічно,

$$P\{\tau_{k+1}=i\}=P\{\tau\in\bigcup_{j_1=1}^{\infty}...\bigcup_{j_k=1}^{\infty}\Delta^\sharp_{j_1...j_ki}\}=\sum_{j_1=1}^{\infty}...\sum_{j_k=1}^{\infty}|\Delta^\sharp_{j_1...j_ki}|=$$
$$=\frac{1}{2^i}\sum_{j_1=1}^{\infty}...\sum_{j_k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{j_1+j_2+...+j_k}}=\frac{1}{2^i}.$$

Оскільки остання ймовірність не залежить від k, а лише від i, то τ_k є незалежними і однаково розподіленими. □

Теорема 2.8.2. *Якщо цифри ξ_k $\Delta^\sharp$-зображення випадкової величини $\xi=\Delta^\sharp_{\xi_1\xi_2...\xi_n...}$ є незалежними випадковими величинами, які набувають значень $1,2,\dots,i,\dots$ відповідно з ймовірностями $p_{1k},p_{2k},\dots,p_{ik},\dots$ ($p_{1k}+...+p_{ik}+...=1$, $k\in\mathbb{N}$), то розподіл ξ є або чисто дискретним, або чисто неперервним (неатомарним), причому чисто дискретним — тоді і тільки тоді, коли $M=\prod\limits_{k=1}^{\infty}\max\limits_i\{p_{ik}\}>0$.*

Точковий спектр (множина атомів) дискретно розподіленої випадкової величини ξ складається з точки x_0 такої, що $p_{a_j(x_0)j}=\max\limits_i\{p_{ik}\}$, і всіх точок x, які мають властивість $p_{a_j(x)j}>0$ для будь-якого $j\in\mathbb{N}$ і існує таке $m\in\mathbb{N}$, що $a_j(x)=a_j(x_0)$ при $j\geqslant m$.

Доведення. Зауважимо, що випадкова величина ξ не набуває значень з множини точок, які мають скінченні $\Delta^\sharp$-зображення. Тому у подальших міркуваннях ми нехтуємо точками цієї множини. А решта точок $(0;1]$ мають єдине $\Delta^\sharp$-зображення. З незалежності ξ_k і єдиності $\Delta^\sharp$-зображення випливає, що $P\{\xi=\Delta^\sharp_{c_1c_2...c_m...}\}=\prod\limits_{k=1}^{\infty}p_{c_kk}$, тобто $P\{\xi=x\}=\prod\limits_{j=1}^{\infty}p_{a_j(x)j}$.

Спочатку доведемо *необхідність*: якщо $M>0$, то розподіл ξ є чисто дискретним. Оскільки $P\{\xi=x_0\}=M$, то $P\{\xi=x_0\}>0$.

Якщо $p_{a_k(x')k} > 0$ для будь-якого $k \in N$ і $\Delta^\sharp$-зображення точки x' відрізняється від зображення точки x_0 не більше, ніж першими $(m-1)$ $\Delta^\sharp$-символами, то

$$P\{\xi = x'\} = \prod_{k=1}^{m-1} p_{a_k(x')k} \cdot \prod_{k=m}^{\infty} p_{a_k(x_0)k} = \prod_{k=1}^{m-1} p_{a_k(x')k} \cdot \frac{M}{\prod\limits_{k=1}^{m} p_{a_k(x_0)k}}.$$

Нехай A_m — множина всіх точок x', $\Delta^\sharp$-цифри яких співпадають з $\Delta^\sharp$-цифрами точки x_0, починаючи з m. Тоді послідовність множин A_m має властивості:

1. $\{x_0\} = A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_m \subset A_{m+1} \subset \ldots;$
2. $P\{\xi \in A_m\} = \sum\limits_{a_1 \in N} \ldots \sum\limits_{a_{m-1} \in N} \left(\prod\limits_{k=1}^{m-1} p_{a_k(x')k} \cdot \frac{M}{\prod\limits_{k=1}^{m} p_{a_k(x_0)k}} \right) = \frac{M}{\prod\limits_{k=1}^{m} p_{a_k(x_0)k}} \to 1,$

коли $m \to \infty$.

Отже, зліченна множина $A = \lim\limits_{m\to\infty} A_m = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m$ є носієм розподілу випадкової величини ξ, тобто розподіл є дискретним.

Достатність. Якщо ξ має дискретний розподіл, то існує x' таке, що

$$0 < P\{\xi = x'\} = \prod_{k=1}^{\infty} p_{a_k(x')k} \leqslant \prod_{k=1}^{\infty} \max_i \{p_{ik}\} = M, \quad \text{тобто } M > 0. \qquad \square$$

Висновки до розділу 2

Цей розділ був присвячений нескінченно-символьному зображенню чисел півінтервала (0;1], яке породжується класичною неперервною строго зростаючою сингулярною функцією Мінковського і називається $\Delta^{\sharp}$-зображенням. В ньому ми обґрунтували критерій раціональності числа; вивчили геометрію цього зображення (з'ясували геометричний зміст цифр, описали властивості циліндричних і хвостових множин, обґрунтували основне метричне відношення, розв'язали кілька задач метричного змісту) і вказали застосування $\Delta^{\sharp}$-зображення у ймовірнісній теорії чисел, а саме: в теорії розподілів випадкових величин, індукованих розподілами їх цифр. В ньому також описано властивості операторів лівостороннього та правостороннього зсуву цифр $\Delta^{\sharp}$-зображення, зокрема встановлено їх кускову лінійність, що свідчить про N-самоподібність зображення.

Доведено, що при обчисленні (рівноцінно означенню) розмірності Гаусдорфа-Безиковича борелівських підмножин [0;1] можна обмежитись зв'язними об'єднаннями циліндрів. Для множин канторівського типу, визначених обмеженнями на вживання цифр, виведені рівняння для обчислення самоподібної розмірності та формули для обчислення міри Лебега.

Основними науковими результатами цього розділу є теореми 2.6.1 (про довірчість класу покриттів зв'язними об'єднаннями циліндрів та еквівалентне означення розмірності Гаусдорфа-Безиковича), 2.7.2 (про нуль-мірність Лебега множини чисел з забороною у їх $\Delta^{\sharp}$-зображенні пари фіксованих цифр), 2.8.1 (про "статистичну" незалежність цифр $\Delta^{\sharp}$-зображення чисел та незалежність цифр $\Delta^{\sharp}$-зображення чисел рівномірно розподіленої в.в.), 2.8.2 (про лебегівську чистоту розподілу в.в., цифри $\Delta^{\sharp}$-зображення якої є незалежними в.в., та критерій її неперервності).

Основні результати цього розділу опубліковані у роботах [1a, 2a] і апробовані на наукових конференціях, про що свідчать тези доповідей [7a, 9a].

РОЗДІЛ 3
Δ^{μ}-ЗОБРАЖЕННЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ

Розділ присвячений зображенню (кодуванню) чисел з півінтервала $(0;1]$ з нескінченним алфавітом, залежне від одного параметра $\mu \in (0;1)$, яке є узагальненням $\Delta^{\sharp}$-зображення і називається Δ^{μ}-зображенням. Вивчається геометрія цього зображення та розв'язуються задачі йому відповідної метричної теорії. Вводиться поняття раціонального Δ^{μ}-зображення, доводиться ознака раціональності числа у його раціональному Δ^{μ}-зображенні.

3.1. Означення Δ^{μ}-зображення числа

Нехай $(0,1) \ni \mu$ — фіксоване число (параметр).

Теорема 3.1.1. *Для будь-якого $x \in (0,1]$ існує скінченний впорядкований набір $(a_1, \ldots, a_m)$ або послідовність натуральних чисел (a_n) такі, що*

$$x = (1-\mu)^{a_1-1} - (1-\mu)^{a_1-1}\mu^{a_2} + (1-\mu)^{a_1+a_3-1}\mu^{a_2} - (1-\mu)^{a_1+a_3-1}\mu^{a_2+a_4} + \ldots +$$

$$+(1-\mu)^{a_1+a_3+\ldots+a_{2n-1}-1}\mu^{a_2+a_4+\ldots+a_{2n-2}} - (1-\mu)^{a_1+a_3+\ldots+a_{2n-1}-1}\mu^{a_2+a_4+\ldots+a_{2n}} + \ldots =$$

$$= \sum_n (B_n - B_n{}'), \tag{3.1.1}$$

де $B_n = (1-\mu)^{a_1+a_3+\ldots+a_{2n-1}-1}\mu^{a_2+a_4+\ldots+a_{2n-2}}$, $B_n{}' = B_n \cdot \mu^{a_{2n}}$.

Зауваження. Не дивлячись на те, що дане твердження є наслідком фактів, доведених у роботі [48], ми дамо йому нове незалежне доведення.

Доведення. Нехай x — довільне число з $(0;1]$. Оскільки

$$(0;1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left((1-\mu)^n; (1-\mu)^{n-1}\right],$$

то очевидно, що існує $a_1 \in \mathbb{N}$ таке, що $(1-\mu)^{a_1} < x \leqslant (1-\mu)^{a_1-1}$,

$$(1-\mu)^{a_1}-(1-\mu)^{a_1-1}=-\mu(1-\mu)^{a_1-1}<x-(1-\mu)^{a_1-1}\equiv x_1\leqslant 0.$$

Якщо $x_1=0$, тоді $x=(1-\mu)^{a_1-1}$. Якщо $x_1\neq 0$, тоді $|x_1|<\mu(1-\mu)^{a_1-1}$.

Оскільки

$$x_1\in\left[-\mu(1-\mu)^{a_1-1};0\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[-\mu^n(1-\mu)^{a_1-1};-\mu^{n+1}(1-\mu)^{a_1-1}\right),$$

то існує $a_2\in\mathbb{N}$ таке, що $-(1-\mu)^{a_1-1}\mu^{a_2}\leqslant x_1<-(1-\mu)^{a_1-1}\mu^{a_2+1}$,

$0\leqslant x_1+(1-\mu)^{a_1-1}\mu^{a_2}\equiv x_2<-(1-\mu)^{a_1-1}\mu^{a_2+1}+(1-\mu)^{a_1-1}\mu^{a_2}=(1-\mu)^{a_1}\mu^{a_2}$.

Якщо $x_2=0$, то $x=(1-\mu)^{a_1-1}-(1-\mu)^{a_1-1}\mu^{a_2}$. Якщо $x_2\neq 0$, то $|x_2|<(1-\mu)^{a_1}\mu^{a_2}$.

Аналогічно, оскільки

$$x_2\in(0;(1-\mu)^{a_1}\mu^{a_2}]=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left((1-\mu)^{a_1+n}\mu^{a_2};(1-\mu)^{a_1+n-1}\mu^{a_2}\right],$$

тоді існує $a_3\in\mathbb{N}$ таке, що $(1-\mu)^{a_1+a_3}\mu^{a_2}<x_2\leqslant(1-\mu)^{a_1+a_3-1}\mu^{a_2}$,

$$(1-\mu)^{a_1+a_3}\mu^{a_2}-(1-\mu)^{a_1+a_3-1}\mu^{a_2}=-(1-\mu)^{a_1+a_3-1}\mu^{a_2+1}<$$
$$<x_2-(1-\mu)^{a_1+a_3-1}\mu^{a_2}\equiv x_3\leqslant 0.$$

Якщо $x_3=0$, тоді $x=(1-\mu)^{a_1-1}-(1-\mu)^{a_1-1}\mu^{a_2}+(1-\mu)^{a_1+a_3-1}\mu^{a_2}$. Якщо $x_3\neq 0$, тоді $|x_3|<(1-\mu)^{a_1+a_3-1}\mu^{a_2+1}$. І т.д.

Якщо при деякому $k\in\mathbb{N}$ матимемо $x_k=0$, то отримаємо скінченний розклад числа x. В іншому випадку матимемо розвинення числа x в ряд, оскільки процес розкладу буде збіжним завдяки тому, що $x_n\to 0$ при $n\to\infty$ і $\mu\in(0,1)$. При цьому отримаємо:

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\left((1-\mu)^{a_1+\ldots+a_{2n-1}-1}\mu^{a_2+\ldots+a_{2n-2}}-(1-\mu)^{a_1+\ldots+a_{2n-1}-1}\mu^{a_2+\ldots+a_{2n}}\right). \quad \square$$

Наслідок 3.1.1. *Для будь-якого $x\in(0,1]$ існує скінченний впорядкований набір $(a_1,\ldots,a_m)$ або послідовність натуральних чисел (a_n) такі, що*

$$x=(1-\mu)^{a_1-1}(1-\mu^{a_2})+(1-\mu)^{a_1+a_3-1}\mu^{a_2}(1-\mu^{a_4})+\ldots+$$
$$+(1-\mu)^{a_1+a_3+\ldots+a_{2n-1}-1}\mu^{a_2+a_4+\ldots+a_{2n-2}}(1-\mu^{a_{2n}})+\ldots=$$
$$=\sum_n A_n(1-\mu^{a_{2n}}), \qquad (3.1.2)$$

де $A_n=(1-\mu)^{a_1+a_3+\ldots+a_{2n-1}-1}\mu^{a_2+a_4+\ldots+a_{2n-2}}$.

Означення 3.1.1. Δ^μ-*представленням* називається подання числа x у формі (3.1.1), а Δ^μ-*зображенням* — його символічний запис $\Delta^\mu_{a_1a_2...a_n(\varnothing)}$ або $\Delta^\mu_{a_1a_2...a_n...}$ в залежності від скінченності чи нескінченності суми (3.1.1) (ряду).

Зауваження 3.1.1. При $\mu = \dfrac{1}{2}$ рівність (3.1.1) набуває вигляду (2.1.4), а отже, Δ^μ-зображення є узагальненням $\Delta^\sharp$-зображення.

3.2. Задача, яка приводить до поняття Δ^μ-зображення

Для фіксованого Δ^μ-зображення чисел розглядається випадкова величина $\xi = [0; \xi_1, \xi_2, ...]$, представлена елементарним ланцюговим дробом, елементи ξ_k якого утворюють послідовність незалежних випадкових величин, що набувають значень $1, 2, \ldots, k, \ldots$ з ймовірностями

$$P\left\{\xi_{2k-1} = i\right\} = p_{i,2k-1} = \mu(1-\mu)^{i-1} \equiv p_{i,1},$$
$$P\left\{\xi_{2k} = i\right\} = p_{i,2k} = (1-\mu)\mu^{i-1} \equiv p_{i,2}$$

відповідно.

Знайдемо вираз функції розподілу F_ξ випадкової величини ξ. Оскільки згідно з означенням $F_\xi(x) = P\{\xi < x\}$, то проаналізуємо подію $\{\xi < x\}$ і виразимо її ймовірність. Враховуючи геометрію ланцюгового представлення (зображення) чисел, маємо

$$\{\xi < x\} = \{\xi_1 > a_1(x)\} \cup \{\xi_1 = a_1(x) \ \wedge \ \xi_2 < a_2(x)\} \cup \ldots$$
$$\cup \{\xi_i = a_i(x), \text{ при } i = \overline{1, 2k-1} \ \wedge \ \xi_{2k} < a_{2k}(x)\} \cup$$
$$\cup \{\xi_i = a_i(x), \text{ при } i = \overline{1, 2k} \ \wedge \ \xi_{2k+1} > a_{2k+1}(x)\} \cup \ldots,$$

де події в правій частині рівності попарно несумісні.

Враховуючи незалежність випадкових величин ξ_n, знайдемо вирази ймовірностей подій, які беруть участь в останньому об'єднанні:

$$P\{\xi_1 > a_1(x)\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{\xi_1 = a_1(x) + n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(1-\mu)^{a_1(x)+n-1} =$$

$$= \mu \cdot (1-\mu)^{a_1-1} \cdot \frac{1-\mu}{\mu} = \mu^{a_1(x)};$$

$$P\{\xi_i = a_i(x), \text{ при } i = \overline{1, 2k-1} \ \wedge \ \xi_{2k} < a_{2k}(x)\} =$$

$$= \prod_{i=1}^{2k-1} P\{\xi_i = a_i(x)\} \cdot \sum_{j=1}^{a_{2k}(x)-1} P\{\xi_{2k} = j\} =$$

$$= \mu(1-\mu)^{a_1(x)-1} \cdot (1-\mu)\mu^{a_2(x)-1} \cdot \ldots \cdot \mu(1-\mu)^{a_{2k-1}(x)-1} \cdot \sum_{j=1}^{a_{2k}(x)-1} (1-\mu)\mu^{j-1} =$$

$$= (1-\mu)^{a_1(x)+a_3(x)+\ldots+a_{2k-1}(x)-1} \mu^{a_2(x)+a_4(x)+\ldots+a_{2k-2}(x)+1} \cdot \frac{(1-\mu)\cdot(1-\mu^{a_{2k}(x)-1})}{1-\mu} =$$

$$= (1-\mu)^{a_1(x)+a_3(x)+\ldots+a_{2k-1}(x)-1} \mu^{a_2(x)+a_4(x)+\ldots+a_{2k-2}(x)+1} \left(1-\mu^{a_{2k}(x)-1}\right).$$

$$P\{\xi_i = a_i(x), \text{ при } i = \overline{1, 2k} \ \wedge \ \xi_{2k+1} > a_{2k+1}(x)\} =$$

$$= \prod_{i=1}^{2k} P\{\xi_i = a_i(x)\} \cdot \sum_{j=a_{2k+1}(x)+1}^{\infty} P\{\xi_{2k+1} = j\} =$$

$$= \mu(1-\mu)^{a_1(x)} \cdot (1-\mu)\mu^{a_2(x)} \cdot \ldots \cdot (1-\mu)\mu^{a_{2k-1}(x)} \sum_{j=a_{2k+1}(x)+1}^{\infty} \mu(1-\mu)^{j-1} =$$

$$= (1-\mu)^{a_1(x)+a_3(x)+\ldots+a_{2k-1}(x)} \mu^{a_2(x)+a_4(x)+\ldots+a_{2k}(x)} \cdot \frac{\mu(1-\mu)^{a_{2k+1}(x)+1)}}{1-(1-\mu)} =$$

$$= (1-\mu)^{a_1(x)+a_3(x)+\ldots+a_{2k-1}(x)+a_{2k+1}(x)} \mu^{a_2(x)+a_4(x)+\ldots+a_{2k}(x)}.$$

Тоді

$$P\{\xi < x\} = \mu^{a_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(1-\mu)^{a_1+a_3+\ldots+a_{2k-1}-1} \mu^{a_2+a_4+\ldots+a_{2k-2}+1} \left(1-\mu^{a_{2k}-1}\right) + \right.$$

$$\left. +(1-\mu)^{a_1+a_3+\ldots+a_{2k-1}+a_{2k+1}} \mu^{a_2+a_4+\ldots+a_{2k}}\right] =$$

$$= (1-\mu)^{a_1} + (1-\mu)^{a_1-1}\mu - (1-\mu)^{a_1-1}\mu^{a_2} + (1-\mu)^{a_1+a_3}\mu^{a_2} +$$

$$+(1-\mu)^{a_1+a_3-1}\mu^{a_2+1} - (1-\mu)^{a_1+a_3-1}\mu^{a_2+a_4} + (1-\mu)^{a_1+a_3+a_5}\mu^{a_2+a_4} + \ldots =$$

$$= (1-\mu)^{a_1-1} - (1-\mu)^{a_1-1}\mu^{a_2} + (1-\mu)^{a_1+a_3-1}\mu^{a_2} - (1-\mu)^{a_1+a_3-1}\mu^{a_2+a_4} + \ldots =$$

$$= \Delta^{\mu}_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}.$$

Таким чином, вираз значення функції розподілу $F_\xi(x)$ в ірраціональних точках x інтервалу $(0;1)$ є Δ^μ-представленням числа x.

3.3. Раціональне Δ^{μ}-зображення

Означення 3.3.1. Якщо μ — раціональне число з інтервалу $(0;1)$, то Δ^{μ}-зображення числа x називається *раціональним* Δ^{μ}*-зображенням.*

Легко бачити, що $\Delta^{\sharp}$-зображення є раціональним Δ^{μ}-зображенням.

Лема 3.3.1. *Якщо раціональне* Δ^{μ}*-зображення числа* x *скінченне або періодичне, то саме число* x *є раціональним.*

Доведення. Якщо розклад числа x є скінченним, то очевидно, що x як значення виразу, що містить скінченну кількість арифметичних операцій над цілими числами, є раціональним.

Нехай $x = \Delta^{\mu}_{a_1 a_2 \ldots a_n (c_1 c_2 \ldots c_k)}$ — дійсне число з $(0,1]$, що має періодичне Δ^{μ}-зображення з періодом $(c_1 c_2 \ldots c_k)$. Розглянемо випадок, коли n і k — парні числа. Якщо покласти

$$a = a_1 + a_3 + \ldots + a_{2m-1}, \quad a' = a_2 + a_4 + \ldots + a_{2m-2},$$

$$c = c_1 + c_3 + \ldots + c_{2t-1}, \quad c' = c_2 + c_4 + \ldots + c_{2t-2},$$

$$B = (1-\mu)^{a_1-1}(1-\mu^{a_2}) + (1-\mu)^{a_1+a_3-1}\mu^{a_2}(1-\mu^{a_4}) + \ldots + (1-\mu)^{a-1}\mu^{a'}(1-\mu^{a_{2m}}),$$

$$D = (1-\mu)^{c_1-1}(1-\mu^{c_2}) + (1-\mu)^{c_1+c_3-1}\mu^{c_2}(1-\mu^{c_4}) + \ldots + (1-\mu)^{c-1}\mu^{c'}(1-\mu^{c_{2t}}),$$

то $x = B + S$, де

$$S = (1-\mu)^{a} \cdot \mu^{a'+a_{2m}} \cdot D + (1-\mu)^{a+c} \cdot \mu^{a'+a_{2m}+c'+c_{2t}} \cdot D +$$

$$+ (1-\mu)^{a+2c} \cdot \mu^{a'+a_{2m}+2(c'+c_{2t})} \cdot D + \ldots\,,$$

як сума всіх членів нескінченно спадної геометричної прогресії з першим членом $b_1 = (1-\mu)^{a} \cdot \mu^{a'+a_{2m}} \cdot D$ і знаменником $q = (1-\mu)^{c} \cdot \mu^{c'+c_{2t}}$ виражається

$$S = \frac{(1-\mu)^{a} \cdot \mu^{a'+a_{2m}} \cdot D}{1 - (1-\mu)^{c} \cdot \mu^{c'+c_{2t}}}.$$

Оскільки B і S є раціональними числами, раціональною є і їх сума x. Аналогічні міркування приводять до того ж висновку і у випадках, коли: 1) n і k — непарні; 2) n — парне, k — непарне; 3) n — непарне, k — парне. $\square$

Обернене твердження неправильне. Про це свідчить наступна

Теорема 3.3.1. *Якщо число* $\frac{1}{2}\neq\mu=\frac{p}{s}$ *— правильний нескоротний дріб, причому s — просте число і $s-p\neq 1$, то число* $\frac{1}{s-p}$ *має нескінченне неперіодичне* Δ^{μ}*-зображення.*

Доведення. Скористаємось методом від супротивного.

1. Припустимо спочатку, що число $\frac{1}{s-p}$ має скінченне Δ^{μ}-зображення: $\Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_m(\varnothing)}$. Розглянемо випадок, коли m є числом непарним ($m=2n-1$). Тоді маємо

$$\frac{1}{s-p}=\left(1-\frac{p}{s}\right)^{a_1-1}-\left(1-\frac{p}{s}\right)^{a_1-1}\cdot\left(\frac{p}{s}\right)^{a_2}+\left(1-\frac{p}{s}\right)^{a_1+a_3-1}\cdot\left(\frac{p}{s}\right)^{a_2}-$$

$$-\left(1-\frac{p}{s}\right)^{a_1+a_3-1}\cdot\left(\frac{p}{s}\right)^{a_2+a_4}+\ldots+\left(1-\frac{p}{s}\right)^{a_1+a_3+\ldots+a_{2n-1}-1}\cdot\left(\frac{p}{s}\right)^{a_2+a_4+\ldots+a_{2n-2}}=$$

$$=\frac{A}{s^{a_1+a_2+\ldots+a_{2n-1}-1}},$$

де

$$A=(s-p)^{a_1-1}s^{a_2+a_3+\ldots+a_{2n-1}}-(s-p)^{a_1-1}p^{a_2}s^{a_3+a_4+\ldots+a_{2n-1}}+$$

$$+(s-p)^{a_1+a_3-1}p^{a_2}s^{a_4+\ldots+a_{2n-1}}-(s-p)^{a_1+a_3-1}p^{a_2+a_4}s^{a_5+\ldots+a_{2n-1}}+\ldots+$$

$$+(s-p)^{a_1+a_3+\ldots+a_{2n-1}-1}p^{a_2+a_4+\ldots+a_{2n-2}}.$$

Звідки $s^{a_1+a_2+\ldots+a_{2n-1}-1}=(s-p)\cdot A$.

Оскільки A — ціле число, то права частина останньої рівності є цілим числом, кратним $(s-p)$. Тому і ліва частина має бути кратна $(s-p)$, що очевидно не виконується. Отримане протиріччя спростовує припущення.

Міркуючи аналогічно, можна дійти до того ж висновку, припустивши, що $m=2n$. Отже, Δ^{μ}-зображення розглядуваного числа є нескінченним.

2. Нехай тепер число $\frac{1}{s-p}$ має періодичне Δ^{μ}-зображення: $\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_m(c_1\ldots c_k)}$. Можливі випадки: 1) числа m і k — парні, 2) числа m і k — непарні, 3) $m-$ непарне, k — парне, 4) $m-$ — парне, k — непарне.

1) Нехай $\frac{1}{s-p}=\Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_{2n}(c_1c_2\ldots c_{2t})}$. Введемо позначення:

$$a = a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1}, \quad a' = a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n},$$
$$c = c_1 + c_3 + \ldots + c_{2t-1}, \quad c' = c_2 + c_4 + \ldots + c_{2t}.$$

Тоді

$$\frac{1}{s-p} = \left[\left(1-\frac{p}{s}\right)^{a_1-1} - \left(1-\frac{p}{s}\right)^{a_1-1} \cdot \left(\frac{p}{s}\right)^{a_2} + \left(1-\frac{p}{s}\right)^{a_1+a_3-1} \cdot \left(\frac{p}{s}\right)^{a_2} - \right.$$
$$- \left(1-\frac{p}{s}\right)^{a_1+a_3-1} \left(\frac{p}{s}\right)^{a_2+a_4} + \ldots + \left(1-\frac{p}{s}\right)^{a-1} \cdot \left(\frac{p}{s}\right)^{a_2+\ldots+a_{2n-2}} -$$
$$\left. + \left(1-\frac{p}{s}\right)^{a-1} \cdot \left(\frac{p}{s}\right)^{a'}\right] +$$
$$+ \left(1-\frac{p}{s}\right)^{a} \left(\frac{p}{s}\right)^{a'} \cdot \left[\left(1-\frac{p}{s}\right)^{c_1-1} - \left(1-\frac{p}{s}\right)^{c_1-1} \left(\frac{p}{s}\right)^{c_2} + \ldots - \right.$$
$$\left. - \left(1-\frac{p}{s}\right)^{c-1} \left(\frac{p}{s}\right)^{c'}\right] +$$
$$+ \left(1-\frac{p}{s}\right)^{a+c} \left(\frac{p}{s}\right)^{a'+c'} \cdot \left[\left(1-\frac{p}{s}\right)^{c_1-1} - \left(1-\frac{p}{s}\right)^{c_1-1} \left(\frac{p}{s}\right)^{c_2} + \ldots - \right.$$
$$\left. - \left(1-\frac{p}{s}\right)^{c-1} \left(\frac{p}{s}\right)^{c'}\right] +$$
$$+ \left(1-\frac{p}{s}\right)^{a+2c} \left(\frac{p}{s}\right)^{a'+2c'} \cdot \left[\left(1-\frac{p}{s}\right)^{c_1-1} - \left(1-\frac{p}{s}\right)^{c_1-1} \left(\frac{p}{s}\right)^{c_2} + \ldots - \right.$$
$$\left. - \left(1-\frac{p}{s}\right)^{c-1} \left(\frac{p}{s}\right)^{c'}\right] + \ldots =$$
$$= \frac{(s-p)^{a_1-1}s^{a_2+\ldots+a_{2n}} - (s-p)^{a_1-1}p^{a_2}s^{a_3+\ldots+a_{2n}} + \ldots - (s-p)^{a-1}p^{a'}}{s^{a+a'-1}} +$$
$$+ \frac{\left(1-\frac{p}{s}\right)^{a} \cdot \left(\frac{p}{s}\right)^{a'} \cdot \left[\left(1-\frac{p}{s}\right)^{c_1-1} - \left(1-\frac{p}{s}\right)^{c_1-1} \left(\frac{p}{s}\right)^{c_2} + \ldots - \left(1-\frac{p}{s}\right)^{c-1} \left(\frac{p}{s}\right)^{c'}\right]}{1 - \left(1-\frac{p}{s}\right)^{c} \cdot \left(\frac{p}{s}\right)^{c'}} =$$
$$= \frac{(s-p)^{a_1-1}s^{a_2+\ldots+a_{2n}} - (s-p)^{a_1-1}p^{a_2}s^{a_3+\ldots+a_{2n}} + \ldots - (s-p)^{a-1}p^{a'}}{s^{a+a'-1}} +$$
$$+ \frac{(s-p)^{a}p^{a'}\left[(s-p)^{c_1-1}s^{c_2+\ldots+c_{2t}} - (s-p)^{c_1-1}p^{c_2}s^{c_3+\ldots+c_{2t}} + \ldots - (s-p)^{c-1}p^{c'}\right]}{s^{a+a'-1}\left(s^{c+c'} - (s-p)^{c}p^{c'}\right)} =$$
$$= \frac{\left(s^{c+c'} - (s-p)^{c}p^{c'}\right)\left[(s-p)^{a_1-1}s^{a_2+\ldots+a_{2n}} - \ldots - (s-p)^{a-1}p^{a'}\right]}{s^{a+a'-1}\left(s^{c+c'} - (s-p)^{c}p^{c'}\right)} +$$

$$+\frac{(s-p)^a p^{a'}\left[(s-p)^{c_1-1}s^{c_2+\ldots+c_{2t}}-(s-p)^{c_1-1}p^{c_2}s^{c_3+\ldots+c_{2t}}+\ldots-(s-p)^{c-1}p^{c'}\right]}{s^{a+a'-1}\left(s^{c+c'}-(s-p)^c p^{c'}\right)},$$

звідки

$$s^{a+a'+c+c'-1}=$$

$$(s-p)\cdot\left[\left(s^{c+c'}-(s-p)^c p^{c'}\right)\left((s-p)^{a_1-1}s^{a_2+\ldots+a_{2n}}-\ldots-(s-p)^{a-1}p^{a'}\right)+\right.$$

$$+(s-p)^a p^{a'}\left((s-p)^{c_1-1}s^{c_2+\ldots+c_{2t}}-(s-p)^{c_1-1}p^{c_2}s^{c_3+\ldots+c_{2t}}+\ldots-(s-p)^{c-1}p^{c'}\right)+$$

$$\left.+(s-p)^{c-1}p^{c'}s^{a+a'-1}\right].$$

Права частина останньої рівності є цілим числом, кратним $(s-p)$, тому і ліва частина має бути кратна $(s-p)$, тобто s має ділитись на $(s-p)$, що неможливо (оскільки s — просте, а $1<s-p<s$). Отримали протиріччя.

2) Нехай тепер $\dfrac{1}{s-p}=\Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_{2n-1}(c_1c_2\ldots c_{2t})}$. Введемо позначення:

$$a=a_1+a_3+\ldots+a_{2n-1},\quad a'=a_2+a_4+\ldots+a_{2n-2},$$

$$c=c_1+c_3+\ldots+c_{2t-1},\quad c'=c_2+c_4+\ldots+c_{2t}.$$ Тоді

$$\frac{1}{s-p}=\left[\left(1-\frac{p}{s}\right)^{a_1-1}-\left(1-\frac{p}{s}\right)^{a_1-1}\left(\frac{p}{s}\right)^{a_2}+\left(1-\frac{p}{s}\right)^{a_1+a_3-1}\left(\frac{p}{s}\right)^{a_2}-\right.$$

$$\left.-\left(1-\frac{p}{s}\right)^{a_1+a_3-1}\left(\frac{p}{s}\right)^{a_2+a_4}+\ldots+\left(1-\frac{p}{s}\right)^{a-1}\cdot\left(\frac{p}{s}\right)^{a'}\right]-$$

$$-\left(1-\frac{p}{s}\right)^{a-1}\left(\frac{p}{s}\right)^{a'}\cdot\left[\left(\frac{p}{s}\right)^{c_1}-\left(1-\frac{p}{s}\right)^{c_2}\left(\frac{p}{s}\right)^{c_1}+\ldots-\left(1-\frac{p}{s}\right)^{c'}\left(\frac{p}{s}\right)^{c}\right]-$$

$$-\left(1-\frac{p}{s}\right)^{a+c'-1}\left(\frac{p}{s}\right)^{a'+c}\cdot\left[\left(\frac{p}{s}\right)^{c_1}-\left(1-\frac{p}{s}\right)^{c_2}\left(\frac{p}{s}\right)^{c_1}+\ldots-\left(1-\frac{p}{s}\right)^{c'}\left(\frac{p}{s}\right)^{c}\right]-$$

$$-\left(1-\frac{p}{s}\right)^{a+2c'-1}\left(\frac{p}{s}\right)^{a'+2c}\cdot\left[\left(\frac{p}{s}\right)^{c_1}-\left(1-\frac{p}{s}\right)^{c_2}\left(\frac{p}{s}\right)^{c_1}+\ldots-\left(1-\frac{p}{s}\right)^{c'}\left(\frac{p}{s}\right)^{c}\right]-\ldots=$$

$$=\frac{(s-p)^{a_1-1}s^{a_2+\ldots+a_{2n-1}}-(s-p)^{a_1-1}p^{a_2}s^{a_3+\ldots+a_{2n-1}}+\ldots+(s-p)^{a-1}p^{a'}}{s^{a+a'-1}}-$$

$$-\frac{\left(1-\frac{p}{s}\right)^{a-1}\cdot\left(\frac{p}{s}\right)^{a'}\cdot\left[\left(\frac{p}{s}\right)^{c_1}-\left(1-\frac{p}{s}\right)^{c_2}\left(\frac{p}{s}\right)^{c_1}+\ldots-\left(1-\frac{p}{s}\right)^{c'}\left(\frac{p}{s}\right)^{c}\right]}{1-\left(1-\frac{p}{s}\right)^{c'}\cdot\left(\frac{p}{s}\right)^{c}}=$$

$$=\frac{(s-p)^{a_1-1}s^{a_2+\ldots+a_{2n-1}}-(s-p)^{a_1-1}p^{a_2}s^{a_3+\ldots+a_{2n-1}}+\ldots+(s-p)^{a-1}p^{a'}}{s^{a+a'-1}}-$$

$$-\frac{(s-p)^{a-1}p^{a'}\left[p^{c_1}s^{c_2+\ldots+c_{2t}}-(s-p)^{c_2}p^{c_1}s^{c_3+\ldots+c_{2t}}+\ldots-(s-p)^{c'}p^{c}\right]}{s^{a+a'-1}\left(s^{c+c'}-(s-p)^{c'}p^{c}\right)}=$$

$$=\frac{\left(s^{c+c'}-(s-p)^{c'}p^{c}\right)\left[(s-p)^{a_1-1}s^{a_2+\ldots+a_{2n-1}}-\ldots+(s-p)^{a-1}p^{a'}\right]}{s^{a+a'-1}\left(s^{c+c'}-(s-p)^{c'}p^{c}\right)}-$$

$$-\frac{(s-p)^{a-1}p^{a'}\left[p^{c_1}s^{c_2+\ldots+c_{2t}}-(s-p)^{c_2}p^{c_1}s^{c_3+\ldots+c_{2t}}+\ldots-(s-p)^{c'}p^{c}\right]}{s^{a+a'-1}\left(s^{c+c'}-(s-p)^{c'}p^{c}\right)},$$

звідки

$$s^{a+a'+c+c'-1}=$$

$$=(s-p)\cdot\left[\left(s^{c+c'}-(s-p)^{c'}p^{c}\right)\left((s-p)^{a_1-1}s^{a_2+\ldots+a_{2n-1}}-\right.\right.$$

$$\left.-(s-p)^{a_1-1}p^{a_2}s^{a_3+\ldots+a_{2n-1}}+\ldots++(s-p)^{a-1}p^{a'}\right)-$$

$$-(s-p)^{a-1}p^{a'}\left(p^{c_1}s^{c_2+\ldots+c_{2t}}-(s-p)^{c_2}p^{c_1}s^{c_3+\ldots+c_{2t}}+\ldots-(s-p)^{c'}p^{c}\right)+$$

$$\left.+(s-p)^{c'}p^{c}s^{a+a'-1}\right].$$

Права частина останньої рівності є цілим числом, кратним $(s-p)$, тому і ліва частина має ділитись на $(s-p)$, що неможливо. Отримане протиріччя спростовує припущення.

І в цьому випадку отримали протиріччя, оскільки права частина останньої рівності є цілим числом, кратним $(s-p)$, а ліва частина не ділиться на $(s-p)$, що спростовує припущення. Отже, число $\frac{1}{s-p}$ має неперіодичне Δ^{μ}-зображення.

Міркуючи аналогічно, можна дійти того ж висновку і у випадках, коли $\frac{1}{s-p}=\Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_{2n-1}(c_1c_2\ldots c_{2t-1})}$, або $\frac{1}{s-p}=\Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_{2n}(c_1c_2\ldots c_{2t-1})}$. □

Аналогічними міркуваннями можна довести наступне твердження:

Для того, щоб число $\frac{1}{s-p}$ *мало скінченне або періодичне* Δ^{μ}*-зображення, де* $\mu=\frac{p}{s}$*, необхідно, щоб для деяких натуральних* m *і* k *виконувалась рівність* $s^m=k(s-p)$.

3.4. Геометрія циліндричного Δ^{μ}-зображення чисел

Циліндри мають наступні властивості:

1. $\min \Delta^{\mu}_{c_1\ldots c_{2k-1}i} = \max \Delta^{\mu}_{c_1\ldots c_{2k-1}(i+1)}$; $\max \Delta^{\mu}_{c_1\ldots c_{2k}i} = \min \Delta^{\mu}_{c_1\ldots c_{2k}(i+1)}$;
2. Циліндри одного рангу не перетинаються або співпадають, причому

$$\Delta^{\mu}_{c_1c_2\ldots c_m} = \Delta^{\mu}_{c'_1c'_2\ldots c'_m} \iff c_i = c'_i \quad i = \overline{1, m}.$$

Лема 3.4.1. *Циліндр* $\Delta^{\mu}_{c_1c_2\ldots c_m}$ *є відрізком, причому якщо* m *— непарне, то* $\Delta^{\mu}_{c_1c_2\ldots c_{2k-1}} = [a - \delta; a]$, *де*

$$a = (1-\mu)^{c_1-1} - (1-\mu)^{c_1-1}\mu^{c_2} + \ldots + (1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2k-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2k-2}},$$

$$\delta = (1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2k-1}-1} \cdot \mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2k-2}+1};$$

якщо m *— парне, то* $\Delta^{\mu}_{c_1c_2\ldots c_{2k}} = [a; a+\delta]$, *де*

$$a = (1-\mu)^{c_1-1} - (1-\mu)^{c_1-1}\mu^{c_2} + \ldots +$$

$$+(1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2k-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2k-2}} - (1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2k-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2k}},$$

$$\delta = (1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2k-1}} \cdot \mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2k}}.$$

Доведення. Позначимо $C \equiv \Delta^{\mu}_{c_1c_2\ldots c_m}$, $A \equiv [a-\delta; a]$, $B \equiv [a; a+\delta]$.

1. Розглянемо випадок, коли $m = 2k-1$. Покажемо, що $C \subset A$.

Нехай $x = \Delta^{\mu}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}$ — довільний елемент множини C, тобто

$$x = (1-\mu)^{c_1-1} - (1-\mu)^{c_1-1}\mu^{c_2} + \ldots + (1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2k-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2k-2}} -$$

$$-(1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2k-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2k-2}}\underbrace{\left(\mu^{a_{2k}} - (1-\mu)^{a_{2k+1}}\mu^{a_{2k}} + \ldots\right)}_{y_{2k}}.$$

Тоді

$$\min C = (1-\mu)^{c_1-1} - (1-\mu)^{c_1-1}\mu^{c_2} + \ldots + (1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2k-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2k-2}} -$$

$$-(1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2k-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2k-2}+1} = a - \delta,$$

що досягається при $y_{2k}=\mu$, а

$$\max C=(1-\mu)^{c_1-1}-(1-\mu)^{c_1-1}\mu^{c_2}+\ldots+(1-\mu)^{c_1+\ldots+c_{2k-1}-1}\mu^{c_2+\ldots+c_{2k-2}}=a.$$

Отже, $a-\delta\leqslant x\leqslant a$, а це означає, що $C\subset A$.

Доведемо тепер таке включення: $A\subset C$. Нехай $x\in[a-\delta;a]$. Покажемо, що в цьому випадку або

$$x=\Delta^{\mu}_{c_1c_2\ldots c_{2k-1}(\varnothing)},\qquad \text{або} \tag{3.4.1}$$

$$x=\Delta^{\mu}_{c_1c_2\ldots c_{2k-1}a_{2k}a_{2k+1}\ldots a_{2k+n}(\varnothing)},\qquad \text{або} \tag{3.4.2}$$

$$x=\Delta^{\mu}_{c_1c_2\ldots c_{2k-1}a_{2k}a_{2k+1}\ldots}, \tag{3.4.3}$$

де $a_{2k+j}\in\mathbb{N}$, тобто що $x\in C$, а отже, $A\subset C$.

Справді, якщо $x=a$, то очевидно, що виконується рівність (3.4.1); якщо $x=a-\delta$, то виконується рівність (3.4.2), а саме: $x=a-\delta=\Delta^{\mu}_{c_1c_2\ldots c_{2k-1}1(\varnothing)}$. Нехай тепер $a-\delta<x<a$. Покажемо, що в цьому випадку $a_i(x)=c_i$ для всіх $i\leqslant m=2k-1$. Для цього скористаємось методом від супротивного. Припустимо, що існує $a_i(x)=c'_i\neq c_i$ при $i\leqslant 2k-1$.

Випадок A. Розглянемо число $x'=\Delta^{\mu}_{c_1c_2\ldots c_{i-1}c'_i(\varnothing)}$. Тоді або $c'_i<c_i$, або $c'_i>c_i$, причому можливі дві ситуації: 1) $i-$ непарне, тобто $i=2j-1$; 2) $i-$ парне, тобто $i=2j$.

A.1. Розглянемо випадок, коли $c'_{2j-1}<c_{2j-1}$. Тоді різниця

$$x'-a=(1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c'_{2j-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2j-2}}-\Big((1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2j-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2j-2}}-$$
$$-(1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2j-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2j}}+\ldots+(1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2k-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2k-2}}\Big)\geqslant$$
$$\geqslant(1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c'_{2j-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2j-2}}-(1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2j-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2j-2}}>0.$$

A.2. Нехай тепер $c'_{2j}<c_{2j}$. Тоді різниця

$$x'-a=-(1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2j-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c'_{2j}}+\Big((1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2j-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2j}}-$$
$$-(1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2j+1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2j}}+\ldots+(1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2k-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2k-2}}\Big)\leqslant$$
$$\leqslant-(1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2j-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c'_{2j}}+(1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2j-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2j}}<$$
$$<-(1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2j-1}+\ldots+c_{2k-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2j}+\ldots+c_{2k-2}+1}=-\delta.$$

Отже, у випадках А.1, А.2 число x' лежить за межами інтервала $(a-\delta;a)$. Аналогічно міркуючи, можна показати, що у випадках, коли $c'_{2j}>c_{2j}$ і $c'_{2j-1}>c_{2j-1}$, число x' також лежить за межами інтервала $(a-\delta;a)$. Таким чином, з $x\in A$ випливає, що $a_i(x)=c_i$ для всіх $i\leqslant 2k-1$ і має місце рівність (3.4.3), тобто $x\in C$.

Випадок В. Розглянемо тепер число $x'=\Delta^{\mu}_{c_1c_2\ldots c_{i-1}c'_ia_{i+1}\ldots a_{i+n}(\varnothing)}$. Тоді також або $c'_i<c_i$, або $c'_i>c_i$, причому можливі ситуації: 1) $i-$ непарне, тобто $i=2j-1$; 2) $i-$ парне, тобто $i=2j$.

В.1. Розглянемо випадок, коли $c'_{2j-1}>c_{2j-1}$. Тоді різниця

$$x'-a=\Big((1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c'_{2j-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2j-2}}-$$
$$-(1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c'_{2j-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2j-2}+a_{2j}}+\ldots+$$
$$+(1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c'_{2j-1}+a_{2j+1}+\ldots+a_{2(j+n)-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2j-2}+a_{2j}+\ldots+a_{2(j+n)-2}}\Big)-$$
$$-\Big((1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2j-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2j-2}}-(1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2j-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2j}}+\ldots+$$
$$+(1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2k-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2k-2}}\Big)\leqslant$$
$$\leqslant(1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c'_{2j-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2j-2}}-(1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2j-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2j-2}}<$$
$$<-(1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2j-1}+\ldots+c_{2k-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2j}+\ldots+c_{2k-2}+1}=-\delta.$$

В.2. Нехай тепер $c'_{2j}>c_{2j}$, тоді різниця

$$x'-a=\Big(-(1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2j-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c'_{2j}}+$$
$$+(1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2j-1}+a_{2j+1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c'_{2j}}-\ldots+$$
$$+(1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2j-1}+a_{2j+1}+\ldots+a_{2(j+n)-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c'_{2j}+a_{2j+2}+\ldots+a_{2(j+n)-2}}\Big)+$$
$$+\Big((1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2j-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2j}}-(1-\mu)^{c_1+\ldots+c_{2j-1}+c_{2j+1}-1}\mu^{c_2+\ldots+c_{2j}}+\ldots+$$
$$+(1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2k-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2k-2}}\Big)\geqslant$$
$$\geqslant-(1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2j-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c'_{2j}}+(1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2j-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2j-2}}>0.$$

Аналогічно у випадках, коли $c'_{2j}<c_{2j}$ і $c'_{2j-1}<c_{2j-1}$, можна показати, що число x' лежить за межами інтервала $(a-\delta;a)$.

Випадок С. Розглянемо тепер число $x'=\Delta^{\mu}_{c_1c_2\ldots c_{i-1}c'_ia_{i+1}a_{i+2}\ldots}$. В цьому випадку також або $c'_i<c_i$, або $c'_i>c_i$, причому можливо: 1) $i-$ непарне, тобто $i=2j-1$; 2) $i-$ парне, тобто $i=2j$.

C.1. Розглянемо випадок, коли $c'_{2j-1} < c_{2j-1}$. Тоді різниця

$$x' - a = \Big((1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c'_{2j-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2j-2}} -$$
$$-(1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c'_{2j-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2j-2}+a_{2j}} + \ldots -$$
$$+(1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c'_{2j-1}+a_{2j+1}+\ldots+a_{2(j+n)-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2j-2}+a_{2j}+\ldots+a_{2(j+n)}} + \ldots\Big) -$$
$$-\Big((1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2j-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2j-2}} - (1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2j-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2j}} + \ldots +$$
$$+(1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2k-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2k-2}}\Big) =$$
$$= \Big((1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c'_{2j-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2j-2}} - (1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2j-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2j-2}}\Big) -$$
$$-\Big((1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c'_{2j-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2j-2}+a_{2j}} - (1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2j-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2j}}\Big) + \ldots \geqslant$$
$$\geqslant (1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c'_{2j-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2j-2}} - (1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2j-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2j-2}} > 0.$$

C.2. У випадку, коли $c'_{2j-1} > c_{2j-1}$, різниця

$$x' - a = \Big((1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c'_{2j-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2j-2}} -$$
$$-(1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c'_{2j-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2j-2}+a_{2j}} + \ldots -$$
$$-(1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c'_{2j-1}+a_{2j+1}+\ldots+a_{2(j+n)-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2j-2}+a_{2j}+\ldots+a_{2(j+n)}} + \ldots\Big) -$$
$$-\Big((1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2j-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2j-2}} - (1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2j-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2j}} + \ldots +$$
$$+(1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2k-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2k-2}}\Big) =$$
$$= \Big((1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c'_{2j-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2j-2}} - (1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2j-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2j-2}}\Big) -$$
$$-\Big((1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c'_{2j-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2j-2}+a_{2j}} - (1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2j-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2j}}\Big) + \ldots \leqslant$$
$$\leqslant (1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c'_{2j-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2j-2}} - (1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2j-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2j-2}} <$$
$$< -(1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2j-1}+\ldots+c_{2k-1}-1}\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2j}+\ldots+c_{2k-2}+1} = -\delta.$$

Аналогічно можна довести, що x' лежить поза інтервалом $(a-\delta; a)$, коли $c'_{2j} > c_{2j}$ і $c'_{2j} < c_{2j}$.

Отже, x не може мати зображення, відмінне від (3.4.1)-(3.4.3), а це означає, що $x \in C$ і $A \subset C$. Враховуючи першу частину доведення, маємо $C \subset A$ і $A \subset C$, тобто $A = C$. Таким чином, при $m = 2k-1$ циліндр $\Delta^{\mu}_{c_1c_2\ldots c_m}$ є відрізком $[a-\delta; a]$, що і вимагалось довести. Для випадку, коли $m = 2k$, доведення аналогічне. $\square$

Наслідок 3.4.1. *Довжина циліндра рангу m обчислюється за формулами:*

$$|\Delta^{\mu}_{c_1c_2\ldots c_m}| = \begin{cases} (1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2k-1}-1}\cdot\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2k-2}+1}, & \text{коли } m=2k-1, \\ (1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2k-1}}\cdot\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2k}}, & \text{коли } m=2k. \end{cases}$$

Наслідок 3.4.2. *Якщо $\Delta^{\mu}_{c_1c_2\ldots c_m}$ — фіксований циліндр, то має місце рівність (основне метричне відношення)*

$$\frac{|\Delta^{\mu}_{c_1c_2\ldots c_m i}|}{|\Delta^{\mu}_{c_1c_2\ldots c_m}|} = \begin{cases} (1-\mu)\mu^{i-1}, & \text{коли } m=2k-1, \\ \mu(1-\mu)^{i-1}, & \text{коли } m=2k. \end{cases}$$

3.5. Метричні задачі, пов'язані з Δ^{μ}-зображенням чисел

З основного метричного відношення, виразу довжини циліндра та формул суми членів геометричної прогресії випливає наступне твердження.

Лема 3.5.1. *Для міри Лебега λ мають місце наступні рівності:*

1. Якщо m — парне число, то

1) $\lambda\left(\bigcup\limits_{i=1}^{s}\Delta^{\mu}_{c_1\ldots c_m i}\right) = (1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2k-1}}\cdot\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2k}}\cdot(1-(1-\mu)^s)$;

2) $\lambda\left(\bigcup\limits_{i=s+1}^{\infty}\Delta^{\mu}_{c_1\ldots c_m i}\right) = (1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2k-1}+s}\cdot\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2k}}$;

3) $\lambda\left(\bigcup\limits_{i=s+1}^{n}\Delta^{\mu}_{c_1\ldots c_m i}\right) = (1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2k-1}+s}\cdot\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2k}}\cdot(1-(1-\mu)^{n-s})$.

2. Якщо m — непарне число, то

1) $\lambda\left(\bigcup\limits_{i=1}^{s}\Delta^{\mu}_{c_1\ldots c_m i}\right) = (1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2k-1}-1}\cdot\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2k-2}+1}\cdot(1-\mu^s)$;

2) $\lambda\left(\bigcup\limits_{i=s+1}^{\infty}\Delta^{\mu}_{c_1\ldots c_m i}\right) = (1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2k-1}-1}\cdot\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2k-2}+s+1}$;

3) $\lambda\left(\bigcup\limits_{i=s+1}^{n}\Delta^{\mu}_{c_1\ldots c_m i}\right) = (1-\mu)^{c_1+c_3+\ldots+c_{2k-1}-1}\cdot\mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2k-2}+s+1}\cdot(1-\mu^{n-s})$.

Теорема 3.5.1. *Якщо V — власна підмножина множини $\mathbb{N}$, потужність якої більша за одиницю, то множина*

$$C[\Delta^{\mu}, V] = \{x: \ x = \Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}, \ a_n \in V \subset \mathbb{N}\}$$

1) є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега; 2) самоподібною, якщо V — скінченна і N-самоподібною, якщо V — нескінченна. Її са-

моподібна розмірність співпадає з фрактальною розмірністю Гаусдорфа-Безиковича α_0, яка задовольняє умову:

$$\alpha_0 \left(C\left[\Delta^{\mu}, V\right]\right) = \sup_{n} \left\{ x : \sum_{u,v \in V \cap N_n^1} \left((1-\mu)^u \mu^v\right)^x = 1 \right\}, \qquad (3.5.1)$$

де $N_n^1 = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Доведення. 1. Спочатку доведемо, що множина $C[\Delta^{\mu}, V]$ є ніде не щільною за означенням. Для цього покажемо, що для довільного інтервалу $(a, b) \subset (0, 1)$ існує підінтервал $(a', b') \subset (a, b)$, який не містить точок множини C. Не порушуючи загальності, можна вважати, що числа a і b мають нескінченні Δ^{μ}-зображення. Нехай

$$a = \Delta^{\mu}_{c_1 \ldots c_{m-1} c_m c_{m+1} \ldots}, \; b = \Delta^{\mu}_{c_1 \ldots c_{m-1} c'_m c'_{m+1} \ldots}, \quad \text{де } \; c_m \neq c'_m.$$

1) Якщо m — число непарне, то $c_m > c'_m$ і $c_j = c'_j$ при $j < m$. Тоді

$$(a', b') = \nabla^{\mu}_{c_1 \ldots c_{m-1} c_m [c_{m+1}+1] j}, \quad \text{де } \; j \in \mathbb{N} \setminus V.$$

2) Якщо ж m — парне, то $c_m < c'_m$ і $c_j = c'_j$ при $j < m$. І тоді

$$(a', b') = \nabla^{\mu}_{c_1 \ldots c_{m-1} c'_m [c'_{m+1}+1] j}, \quad \text{де } \; j \in \mathbb{N} \setminus V.$$

Для доведення другої частини першого твердження проведемо міркування для випадку, коли множина $\mathbb{N} \setminus V = \{v\}$ складається з одного елемента, враховуючи, що якщо $V_1 \subset V_2$, то $C[\Delta^{\mu}; V_1] \subset C[\Delta^{\mu}; V_2]$. Тоді

$$\lambda(C[\Delta^{\mu}; V]) = 1 - |\Delta^{\mu}_{v}| - \sum_{i_1 \neq v} |\Delta^{\mu}_{i_1 v}| - \sum_{i_1 \neq v} \sum_{i_2 \neq v} |\Delta^{\mu}_{i_1 i_2 v}| - \sum_{i_1 \neq v} \sum_{i_2 \neq v} \sum_{i_3 \neq v} |\Delta^{\mu}_{i_1 i_2 i_3 v}| - \ldots =$$

$$= 1 - (1-\mu)^{v-1} \cdot \mu - \sum_{i_1 \neq v} (1-\mu)^{i_1} \cdot \mu^{v} - \sum_{i_1 \neq v} \sum_{i_2 \neq v} (1-\mu)^{i_1+v-1} \cdot \mu^{i_2+1} -$$

$$- \sum_{i_1 \neq v} \sum_{i_2 \neq v} \sum_{i_3 \neq v} (1-\mu)^{i_1+i_3} \cdot \mu^{i_2+v} - \ldots =$$

$$= 1 - (1-\mu)^{v-1} \cdot \mu - \mu^v \cdot \left(\frac{1-\mu}{\mu} - (1-\mu)^v\right) -$$

$$-\mu(1-\mu)^{v-1} \cdot \left(\frac{1-\mu}{\mu} - (1-\mu)^v\right) \cdot \left(\frac{\mu}{1-\mu} - \mu^v\right) -$$

$$-\mu^v \cdot \left(\frac{1-\mu}{\mu} - (1-\mu)^v\right)^2 \cdot \left(\frac{\mu}{1-\mu} - \mu^v\right) - \ldots =$$

$$= 1 - \frac{\mu(1-\mu)^{v-1}}{1-\left(\frac{1-\mu}{\mu} - (1-\mu)^v\right)\left(\frac{\mu}{1-\mu} - \mu^v\right)} - \frac{\mu^v \cdot \left(\frac{1-\mu}{\mu} - (1-\mu)^v\right)}{1-\left(\frac{1-\mu}{\mu} - (1-\mu)^v\right)\left(\frac{\mu}{1-\mu} - \mu^v\right)} =$$

$$= \frac{\mu^{v-1}(1-\mu) + \mu(1-\mu)^{v-1} - \mu^v(1-\mu)^v - \mu(1-\mu)^{v-1} - \mu^{v-1}(1-\mu) + \mu^v(1-\mu)^v}{\mu^{v-1}(1-\mu) + \mu(1-\mu)^{v-1} - \mu^v(1-\mu)^v} = 0.$$

Отже, $\lambda(C[\Delta^\mu; V]) = 0$.

2. Оскільки $C = \bigcup\limits_n C_{2n}$ і $C \overset{k}{\sim} C_{2n} = \Delta^\mu_{v_1 v_2} \cap C$, $k = (1-\mu)^{v_2}\mu^{v_1}$, то множина C є самоподібною у випадку, коли множина V є скінченною, і N-самоподібною, якщо V — нескінченна. У першому випадку самоподібна розмірність є розв'язком рівняння

$$\sum_{v_1, v_2 \in V} \left((1-\mu)^{v_2}\mu^{v_1}\right)^x = 1. \qquad (3.5.2)$$

Нехай V — множина нескінченна. Тоді $C[\Delta^\mu, V_n] \subset C[\Delta^\mu, V]$, де $V_n = V \cap N^1_n$. Оскільки перша множина є самоподібною, її самоподібна розмірність обчислюється за формулою (3.5.2) і вона співпадає з фрактальною розмірністю Гаусдорфа-Безиковича, то, враховуючи властивість монотонності розмірності, приходимо до рівності (3.5.1). Теорему доведено. $\square$

Розглянемо множину

$$C \equiv C[\Delta^\mu, (V_n)] = \left\{x : \ x = \Delta^\mu_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}, a_n(x) \in V_n \subset \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N}\right\},$$

де (V_n) — фіксована послідовність підмножин множини $\mathbb{N}$.

Якщо $V_n = \mathbb{N}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то $C[\Delta^\mu, (V_n)] = (0; 1]$.

Лема 3.5.2. *Якщо $|V_n| = 1$ при всіх n, більших деякого $m \in \mathbb{N}$, то множина C є не більше, ніж зліченною, причому якщо серед V_i, $i \leqslant m$ є зліченна множина, то C є зліченною, якщо ж усі V_i, $i \leqslant m$ скінченні, то і C скінченна; якщо $|V_n| > 1$ нескінченну кількість разів, то C є континуальною.*

Доведення. Якщо $V_n = \{v_n\}$ для всіх натуральних n, то очевидно, що $C = \left\{\Delta^{\mu}_{v_1 \ldots v_n \ldots}\right\}$. Нехай $V_n = \{v_n\}$ для всіх $n > m \in \mathbb{N}$. Оскільки

$$C = \bigcup_{a_1 \in V_1} \bigcup_{a_2 \in V_2} \cdots \bigcup_{a_m \in V_m} \Delta^{\mu}_{a_1 a_2 \ldots a_m c_{m+1} \ldots c_{m+j} \ldots} \qquad \{c_{m+j} \in V_{m+j}\},$$

то легко бачити скінченність множини C, якщо всі V_i при $i \leqslant m$ скінченні, і зліченність множини C, якщо серед V_i при $i \leqslant m$ є зліченна множина.

Якщо ж потужність множин послідовності $V_{n_k} = \left\{v_1^{(n_k)}, v_2^{(n_k)}, \ldots\right\}$ більша 1, то між множиною чисел

$$E = \left\{x : \; a_{n_k}(x) \in \left\{v_1^{(n_k)}, v_2^{(n_k)}\right\}, \; a_j(x) = v_1^{(j)}, j \notin \{n_k\}\right\}$$

і півінтервалом $(0;1]$ взаємно однозначну відповідність встановлює відображення $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\alpha_k}{2^k}$, де $\alpha_k = 0$, якщо $a_{n_k} = v_1^{(n_k)}$ і $\alpha_k = 1$, якщо $a_{n_k} = v_2^{(n_k)}$. Тоді E — континуальна множина. Але $E \subset C$, а тому і множина C континуальна. $\square$

Теорема 3.5.2. *Множина C має властивості:*

1) *є об'єднанням відрізків, якщо $V_n \neq \mathbb{N}$ скінченну кількість разів;*
2) *є ніде не щільною, якщо $V_n \neq \mathbb{N}$ нескінченну кількість разів;*
3) *міра Лебега множини C обчислюється за формулою:*

$$\lambda(C) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_{2k})}{\lambda(F_{2k-2})} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda(\overline{F}_{2k})}{\lambda(F_{2k-2})}\right),$$

де $F_0 = (0;1]$, F_{2k} — замикання об'єднання циліндрів рангу $2k$, серед внутрішніх точок яких є точки множини C, $\overline{F}_{2k} = F_{2k-2} \setminus F_{2k}$.

Доведення. 1. Нехай $V_n = \mathbb{N}$ для всіх $n > m$. Тоді $\Delta^{\mu}_{a_1 \ldots a_m a} \subset C$, де $a_n \in V_n$, $n = \overline{1, m}$, $a \in \mathbb{N}$, і $C = \bigcup\limits_{a_1 \in V_1} \ldots \bigcup\limits_{a_m \in V_m} \Delta^{\mu}_{a_1 \ldots a_m}$.

2. Нехай $V_{n_k} \neq \mathbb{N}$ для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ і $V_j = \mathbb{N}$ при $j \notin (n_k)$.

Нехай $(a;b)$ — довільний інтервал, що належить $(0;1]$. Легко вказати циліндр $\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_m}$, який повністю належить інтервалу $(a;b)$. Тоді циліндричний інтервал $\nabla^{\mu}_{a_1\ldots a_m\ldots a_{n_k-1}c} \cap C = \varnothing$, де $c \in \mathbb{N} \setminus V_{n_k}$. Тому множина C є ніде не щільною за означенням.

3. Нехай $F_0 = (0;1]$. Введемо позначення F_{2k} — замикання об'єднання циліндрів рангу $2k$, серед внутрішніх точок яких є точки множини C, а множину $\overline{F}_{2k}$ означимо рівністю $\overline{F}_{2k} = F_{2k-2} \setminus F_{2k}$. Тоді

$$F_{2k-2} = \bigcup_{a_1\in V_1} \bigcup_{a_2\in V_2} \ldots \bigcup_{a_{2k-2}\in V_{2k-2}} \Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_{2k-2}},$$

$$\overline{F}_{2k} = \bigcup_{a_1\in V_1} \bigcup_{a_2\in V_2} \ldots \bigcup_{a_{2k-1}\in V_{2k-1}} \bigcup_{a_{2k}\notin V_{2k}} \Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_{2k-1}a_{2k}}.$$

Міра Лебега множин F_{2k-2} і $\overline{F}_{2k}$ визначається рівностями

$$\lambda(F_{2k-2}) = \sum_{a_1\in V_1} \sum_{a_2\in V_2} \ldots \sum_{a_{2k-2}\in V_{2k-2}} |\Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_{2k-2}}|,$$

$$\lambda(\overline{F}_{2k}) = \sum_{a_1\in V_1} \sum_{a_2\in V_2} \ldots \sum_{a_{2k-1}\in V_{2k-1}} \sum_{a_{2k}\notin V_{2k}} |\Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_{2k-1}a_{2k}}|.$$

Оскільки $\overline{F}_{2k} = F_{2k-2} \setminus F_{2k}$, то $\lambda(\overline{F}_{2k}) = \lambda(F_{2k-2}) - \lambda(F_{2k})$ або

$$\frac{\lambda(\overline{F}_{2k})}{\lambda(F_{2k-2})} = 1 - \frac{\lambda(F_{2k})}{\lambda(F_{2k-2})}.$$

З означення множин $C,\ F_{2k}$ і $\overline{F}_{2k}$ і неперервності міри Лебега λ маємо:

$$\lambda(C) \leqslant \lambda(F_{2k}) \neq 0 \ \ \forall k \in \mathbb{N},$$

$$\lambda(C) = \lim_{k\to\infty} \lambda(F_{2k}) \quad \text{і} \quad \lambda(C) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(\overline{F}_{2k}).$$

Очевидно, що $F_{2k+2} \subset F_{2k} \subset F_{2k-2}$ для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ і

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_{2k} = \lim_{k\to\infty} F_{2k}.$$

Тому $\lambda(C) < \lambda(F_{2k})$ і

$$\lambda(C) = \lim_{k\to\infty} \lambda(F_{2k}) = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\lambda(F_{2k})}{\lambda(F_{2k-2})} \cdot \frac{\lambda(F_{2k-2})}{\lambda(F_{2k-4})} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda(F_4)}{\lambda(F_2)} \cdot \frac{\lambda(F_2)}{\lambda(F_0)} \right) =$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_{2k})}{\lambda(F_{2k-2})} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_{2k-2}) - \lambda(\overline{F}_{2k})}{\lambda(F_{2k-2})} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda(\overline{F}_{2k})}{\lambda(F_{2k-2})}\right). \qquad \square$$

Наслідок 3.5.1. *Міра Лебега множини C дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли розбігається ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(\overline{F}_{2k})}{\lambda(F_{2k-2})}.$$

Теорема 3.5.3. *Нехай c і s — фіксовані натуральні числа. Множина*

$$D \equiv D[\Delta^{\mu}, \overline{cs}] = \{x: \ x = \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_n\ldots}, \ \text{де}\ \overline{a_n a_{n+1}} \neq \overline{cs} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\}$$

є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега.

Доведення. Доведемо, що D є ніде не щільною за означенням.

Нехай (u, v) — довільний інтервал, що належить $(0, 1]$. Не порушуючи загальності можемо вважати, що числа u і v мають нескінченні розклади. Легко вказати циліндр такий, що повністю належить інтервалу (u, v). Справді, оскільки $u < v$, то існує k таке, що $a_k(u) \neq a_k(v)$, але $a_i(u) = a_i(v)$ при $i < k$. Тоді можливі випадки: 1) $k -$ непарне; 2) $k -$ парне.

Тому в першому випадку: $a_{2k-1}(u) > a_{2k-1}(v)$, а отже,

$$\Delta^{\mu}_{a_1(u)\ldots a_{2k-1}(u)[a_{2k}(u)+1]} \subset (u, v), \quad \text{і} \quad \nabla^{\mu}_{a_1(u)\ldots a_{2k-1}(u)[a_{2k}(u)+1]cs} \cap D = \varnothing.$$

У другому випадку: $a_{2k}(u) < a_{2k}(v)$, тому

$$\Delta^{\mu}_{a_1(v)\ldots a_{2k}(v)[a_{2k+1}(v)+1]} \subset (u, v), \quad \text{і} \quad \nabla^{\mu}_{a_1(v)\ldots a_{2k}(v)[a_{2k+1}(v)+1]cs} \cap D = \varnothing.$$

Тому множина D є ніде не щільною за означенням.

Доведемо, що міра Лебега множини D дорівнює нулю. Можливі випадки: 1) $c = s$; 2) $c \neq s$. Нехай $\overline{\Delta}^{\mu}_{c_1\ldots c_m} \equiv \Delta^{\mu}_{c_1\ldots c_m} \cap D$. Тоді у першому випадку

$$D = \left[\bigcup_{i\neq c} \overline{\Delta}^{\mu}_{i}\right] \cup \left[\bigcup_{i\neq c} \overline{\Delta}^{\mu}_{ci}\right].$$

У другому випадку

$$D = \left[\bigcup_{i\neq c} \overline{\Delta}^{\mu}_{i}\right] \cup \left[\bigcup_{c\neq i\neq s} \overline{\Delta}^{\mu}_{ci}\right] \cup \left[\bigcup_{c\neq i\neq s} \overline{\Delta}^{\mu}_{cci}\right] \cup \ldots \cup \left[\bigcup_{c\neq i\neq s} \overline{\Delta}^{\mu}_{\underbrace{c\ldots c}_{k}i}\right] \cup \ldots \cup \overline{\Delta}^{\mu}_{(c)}.$$

Оскільки $F_0 = (0,1]$, F_{2k} — об'єднання циліндрів рангу $2k$, серед внутрішніх точок яких є точки множини D,

$$\overline{F}_{2k} = F_{2k-2} \setminus F_{2k}. \tag{3.5.3}$$

Очевидно, що $F_{2k-2} \supset F_{2k} \supset D \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$ і $D = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} F_{2k}$.

За неперервністю міри Лебега зверху $\lambda(D) = \lim\limits_{k\to\infty} \lambda(F_{2k})$. Тоді

$$\lambda(D) = \lim_{k\to\infty} \left[\frac{\lambda(F_{2k})}{\lambda(F_{2k-2})} \cdot \frac{\lambda(F_{2k-2})}{\lambda(F_{2k-4})} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda(F_4)}{\lambda(F_2)} \cdot \frac{\lambda(F_2)}{\lambda(F_0)}\right] =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \prod_{m=1}^{k} \frac{\lambda(F_{2m})}{\lambda(F_{2m-2})} = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_{2m})}{\lambda(F_{2m-2})}. \tag{3.5.4}$$

З (3.5.3) маємо

$$\lambda(F_{2k}) = \lambda(F_{2k-2}) - \lambda(\overline{F}_{2k}) \quad \text{і} \quad \frac{\lambda(F_{2k})}{\lambda(F_{2k-2})} = 1 - \frac{\lambda(\overline{F}_{2k})}{\lambda(F_{2k-2})}.$$

Підставивши в (3.5.4) отриманий вираз, одержимо

$$\lambda(D) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda(\overline{F}_{2k})}{\lambda(F_{2k-2})}\right).$$

Останній нескінченний добуток прямує до нуля тоді і тільки тоді, коли розбігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(\overline{F}_{2k})}{\lambda(F_{2k-2})} = \infty. \tag{3.5.5}$$

Знайдемо оцінки останнього відношення.

Нехай $\Delta^{\mu}_{c_1\ldots c_{2k}}$ — циліндр з F_{2k}. Можливі випадки: 1)$c_{2k}=c$, 2)$c_{2k}\neq c$.

Якщо $c_{2k}=c$, то $\nabla^{\mu}_{c_1\ldots c_{2k}s}\cap D=\varnothing$ і $\dfrac{|\Delta^{\mu}_{c_1\ldots c_{2k}s}|}{|\Delta^{\mu}_{c_1\ldots c_{2k}}|}=\mu(1-\mu)^{s-1}$.

Якщо $c_{2k}\neq c$, то $\nabla^{\mu}_{c_1\ldots c_{2k}cs}\cap D=\varnothing$ і $\dfrac{|\Delta^{\mu}_{c_1\ldots c_{2k}cs}|}{|\Delta^{\mu}_{c_1\ldots c_{2k}}|}=(1-\mu)^c\mu^s$.

Тому, враховуючи це, маємо

$$0<(1-\mu)^c\mu^s\leqslant\frac{\lambda(\overline{F}_{2k+2})}{\lambda(F_{2k})}\leqslant\mu(1-\mu)^{s-1}<1.$$

Отже, ряд (3.5.5) розбігається, оскільки не виконується необхідна умова збіжності ряду і тому $\lambda(D)=0$. □

3.6. Нормальні властивості дійсних чисел у їх Δ^{μ}-зображенні

Властивість дійсного числа $x\in(0;1]$ називають *нормальною* [40], якщо вона має місце для майже всіх (у розумінні міри Лебега) чисел з цього проміжку.

Теорема 3.6.1 (Про нормальну властивість числа). 1. *Множина B всіх чисел з півінтервала $(0;1]$, послідовність цифр Δ^{μ}-зображення яких обмежена, є всюди щільною, континуальною множиною нульової міри Лебега.*

2. *Майже всі (у розумінні міри Лебега) числа півінтервалу $(0;1]$ задовольняють умову $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n(x)=\infty$.*

Доведення. 1. Очевидно, що кожна точка $x\in(0;1]$, яка має скінченне Δ^{μ}-зображення, належить множині B. Тому B є всюди щільною множиною в $(0;1]$. Також очевидно, що кожна множина $C[\Delta^{\mu},V]$, де V — скінченна множина, міститься в B. Якщо ж V містить більше одного елемента, то $C[\Delta^{\mu},V]$ є континуальною. А отже, континуальною є і B.

Нехай B_s є множиною чисел, цифри Δ^{μ}-зображення яких не перевищують числа s. Тоді $B_s=C[\Delta^{\mu},\mathbb{N}_1^s]$ і $B=\bigcup\limits_{s=1}^{\infty}B_s$, де $\mathbb{N}_1^s=\{1,2,\ldots,s\}$.

За властивістю міри Лебега $\lambda(B) \leqslant \sum\limits_{s=1}^{\infty} B_s = 0$. Тому $\lambda(B) = 0$.

2. Оскільки множина

$$B_{\infty} = \left\{x : \varlimsup_{n\to\infty} a_n(x) = \infty\right\}$$

є доповненням множини B до проміжка $(0;1]$, то друга частина твердження є наслідком першої. (Справді, $\lambda(B_{\infty}) = 1 - \lambda(B) = 1$.) $\square$

Наслідок 3.6.1. *Множина B всіх чисел з півінтервала $(0;1]$, послідовність цифр Δ^{μ}-зображення яких обмежена, є всюди розривною множиною.*

Висновки до розділу 3

У даному розділі ми отримали узагальнення $\Delta^{\sharp}$-зображення чисел півінтервала $(0;1]$, залежне від параметра μ, який може набувати довільного значення з інтервалу $(0;1)$. Це зображення тісно пов'язане з узагальненням $\varphi_\mu(x)$ функції Мінковського $?(x)$, запропоноване у роботі [48]. Сингулярність функції φ_μ при довільному значенні параметра μ знаходить відображення у метричних властивостях Δ^{μ}-зображення, яке є N-самоподібним. Виділено зліченний підклас Δ^{μ}-зображень, названих раціональними, до яких зокрема відноситься $\Delta^{\sharp}$-зображення. Для них вказано ознаку раціональності числа.

Основними результатами цього розділу є:

- теорема 3.1.1 (про існування Δ^{μ}-розкладу чисел і єдиність нескінченного розкладу);
- лема 3.3.1(ознака раціональності числа за його раціональним Δ^{μ}-зображенням);
- теорема 3.3.1, що спростовує гіпотезу про критерій раціональності числа за його Δ^{μ}-зображенням;
- теорема 3.5.1 (про тополого-метричні та фрактальні властивості множини чисел зі сталими заборонами на використання цифр);
- теорема 3.5.2 (про тополого-метричні властивості множини чисел з умовами на використання цифр);
- теорема 3.5.3 (про ніде не щільність та нуль-мірність множини чисел з забороною вживання комбінації двох цифр).

Основні результати цього розділу опубліковані у роботі [3а] і доповідались на наукових конференціях [8а, 10а–13а].

РОЗДІЛ 4
ЗАСТОСУВАННЯ Δ^{μ}-ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ

Розділ присвячено застосуванню Δ^{μ}-зображення чисел у теорії функцій та ймовірнісній теорії чисел. А саме: вивчаються функції з фрактальними властивостями, які визначені у термінах Δ^{μ}-зображення числа, досліджуються структурні властивості самої функції і фрактальні (самоподібні, самоафінні тощо) властивості суттєвих для неї множин; конструюються класи неперервних строго зростаючих функцій, що зберігають "хвости" Δ^{μ}-зображення чисел, за допомогою яких будуються неперервні перетворення $(0,1]$; доводиться, що множина всіх таких перетворень є нескінченною і відносно операції "композиція" (суперпозиція) утворює некомутативну групу.

4.1. Фрактальні функції, пов'язані з Δ^{μ}-зображенням чисел

Фрактальні властивості функцій досліджуються в різних аспектах [12, 18, 21, 34, 40, 43, 46–48, 50, 51, 61, 85, 95–97, 107]. Вивчаються фрактальні властивості їх рівнів [43, 97], графіків [50], множин особливостей [95, 107], атракторів одновимірних динамічних систем [61], породжених функцією, деформації фрактальних властивостей множин під дією функції [95] тощо. При цьому розв'язуються задачі конструктивної та загальної теорії функцій. Особлива увага приділяється неперервним функціям [18, 34, 43, 51, 60, 97], для яких необхідною умовою фрактальності їх графіка (як множини простору $\mathbb{R}^2$) є глобальна або локальна ніде не монотонність, або навіть звивистість [34, 43], та існування принаймні одного континуального рівня.

Однією з достатньо плідних ідей теорії фракталів (фрактальної геометрії та фрактального аналізу [40]) є ідея автомодельності [60] (самоподібності, самоафінності тощо). Серед неперервних функцій, які мають складні локальні властивості, саме такі складають в деякій мірі найпростіший клас. Локально-неоднорідні структурні та тополого-метричні властивості суттєвих для функцій множин є ознакою їх фрактальних властивостей.

Множину всіх чисел, що мають єдине (тобто нескінченне) Δ^{μ}-зображення позначатимемо через H, а множину тих чисел, що мають скінченне Δ^{μ}-зображення, — через S.

У задачах метричної теорії чисел, яка займається задачами про міру Лебега множин чисел, визначених умовами на їх зображення, можна нехтувати множинами нульової міри (нуль-множинами), до яких зокрема відносяться всі зліченні множини.

4.1.1. Функція $f(x)$ та її властивості. Розглядається функція f, яка на множині H визначається рівністю:

$$y = f\left(\Delta^{\mu}_{a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots}\right) = \Delta^{\mu}_{a_2 a_1 a_4 a_3 \ldots}\,. \tag{4.1.1}$$

Легко бачити, що для будь-якого $x \in (0;1)$ має місце рівність $f(f(x)) = x$. З цього випливає, що графік функції f симетричний відносно прямої $y = x$.

Теорема 4.1.1. *Функція f володіє наступними властивостями:*

1) *вона є бієктивним відображенням;*

2) *має зліченну всюди щільну множину точок розриву 1 роду, а саме:*
у точках виду $\Delta^{\mu}_{a_1 \ldots a_{2k}[i+1](\varnothing)}$ зі стрибком

$$(1-\mu)^{a_2+a_4+\ldots+a_{2k}} \mu^{a_1+a_3+\ldots+a_{2k-1}} \left(1-\mu^{i}\right),$$

у точках виду $\Delta^{\mu}_{a_1 \ldots a_{2k-1}[i+1](\varnothing)}$ зі стрибком

$$(1-\mu)^{a_2+a_4+\ldots+a_{2k-2}+i-1} \mu^{a_1+a_3+\ldots+a_{2k-3}+1} \left(1-\mu^{a_{2k-1}}\right),$$

у точках, що мають нескінченне Δ^{μ}-зображення, функція має усувний розрив;

3) *частина* $\Gamma_f^i \equiv \{(x;y): \ \ x\in\Delta^{\mu}_{ii},\ i\in\mathbb{N},\ \ y=f(x)\}$ *графіка* Γ_f *функції* f *подібна всьому графіку з коефіцієнтом подібності* $k=(1-\mu)^i\mu^i$*, причому* $\Gamma_f^i=\psi_i\left(\Gamma_f\right)$*, де*

$$\psi_i:\begin{cases} x' &= (1-\mu)^i\mu^i\cdot x + (1-\mu)^{i-1}(1-\mu^i),\\ y' &= (1-\mu)^i\mu^i\cdot y + (1-\mu)^{i-1}(1-\mu^i).\end{cases}$$

Графік функції f *— N-самоафінна множина, причому* $\Gamma_f=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\psi_i\left(\Gamma_f\right)$*, де*

$$\psi_i:\begin{cases} x' &= \Delta^{\mu}_{ija_1(x)a_2(x)\ldots},\\ y' &= \Delta^{\mu}_{jia_2(x)a_1(x)\ldots}\end{cases}$$

з N-самоподібною розмірністю $x=-\dfrac{1}{\log_2(1-\mu)\mu}$;

4) *перетворення* f *зберігає частоти цифр* Δ^{μ}*-зображення.*

Доведення. 1) Бієктивність (ін'єктивність та сюр'єктивність) відображення f випливає з єдиності Δ^{μ}-зображення чисел з множини H і означення функції.

2.1) Дослідимо поведінку функції f в правому і лівому ε-півоколах точки $x_0=\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}[i+1](\varnothing)}$. Умова $x\to\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}[i+1](\varnothing)}+0$ рівносильна умові $x\in\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}i1j}$, де $j\to\infty$. Тоді

$$D_1=\lim_{x\to x_0+0}f(x)=\lim_{j\to\infty}f\left(\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}i1j(\varnothing)}\right)=\lim_{j\to\infty}\Delta^{\mu}_{a_2a_1\ldots a_{2k}a_{2k-1}1ij(\varnothing)}=$$
$$=\Delta^{\mu}_{a_2a_1\ldots a_{2k}a_{2k-1}1i(\varnothing)}.$$

Оскільки умова $x\to\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}[i+1](\varnothing)}-0$ рівносильна умові $x\in\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}[i+1]j}$, де $j\to\infty$, то

$$D_2=\lim_{x\to x_0-0}f(x)=\lim_{j\to\infty}f\left(\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}[i+1]j(\varnothing)}\right)=\lim_{j\to\infty}\Delta^{\mu}_{a_2a_1\ldots a_{2k}a_{2k-1}j[i+1](\varnothing)}=$$
$$=\Delta^{\mu}_{a_2a_1\ldots a_{2k}a_{2k-1}(\varnothing)}.$$

Величина стрибка функції f у точці x_0 дорівнює різниці $|D_1-D_2|$:

$$(1-\mu)^{a_2+a_4+\ldots+a_{2k}}\mu^{a_1+a_3+\ldots+a_{2k-1}}\left(1-\mu^i\right).$$

2.2) Дослідимо тепер поведінку функції f в правому і лівому ε-півоколах точки $x_1 = \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k-1}[i+1](\varnothing)}$. Умова $x \to \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k-1}[i+1](\varnothing)} + 0$ рівносильна умові $x \in \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k-1}[i+1]j}$, де $j \to \infty$. Тоді

$$D_3 = \lim_{x\to x_1+0} f(x) = \lim_{j\to\infty} f\left(\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k-1}[i+1]j(\varnothing)}\right) = \lim_{j\to\infty} \Delta^{\mu}_{a_2 a_1\ldots[i+1]a_{2k-1}j(\varnothing)} = \\ = \Delta^{\mu}_{a_2 a_1\ldots[i+1]a_{2k-1}(\varnothing)}.$$

Оскільки умова $x \to \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k-1}[i+1](\varnothing)} - 0$ рівносильна умові $x \in \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k-1}i1j}$, де $j \to \infty$, то

$$D_4 = \lim_{x\to x_1-0} f(x) = \lim_{j\to\infty} f\left(\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k-1}i1j(\varnothing)}\right) = \lim_{j\to\infty} \Delta^{\mu}_{a_2 a_1\ldots i a_{2k-1}j1(\varnothing)} = \\ = \Delta^{\mu}_{a_2 a_1\ldots i a_{2k-1}(\varnothing)}.$$

Величина стрибка функції f у точці x_1 дорівнює різниці $|D_3 - D_4|$:

$$(1-\mu)^{a_2+a_4+\ldots+a_{2k-2}+i-1}\mu^{a_1+a_3+\ldots+a_{2k-3}+1}\left(1-\mu^{a_{2k-1}}\right).$$

3) Справді, якщо $(x;y) \in \Gamma_f$ і $\begin{cases} x = \Delta^{\mu}_{a_1a_2a_3a_4\ldots}, \\ y = \Delta^{\mu}_{a_2a_1a_4a_3\ldots}, \end{cases}$ то точка $(x';y')$, отримана в результаті перетворення подібності

$$\begin{cases} x' &= (1-\mu)^i\mu^i \cdot x + (1-\mu)^{i-1}(1-\mu^i) = \Delta^{\mu}_{iia_1a_2\ldots}, \\ y' &= (1-\mu)^i\mu^i \cdot y + (1-\mu)^{i-1}(1-\mu^i) = \Delta^{\mu}_{iia_2a_1\ldots}, \end{cases}$$

теж належить графіку Γ_f, причому образом Γ_f є множина Γ^i_f. Більше того,

$$\psi\left(\Gamma_f\right) = \Gamma^i_f \quad \text{і} \quad \Gamma_f = \bigcup_{i=1}^{\infty} \psi_i\left(\Gamma_f\right).$$

Оскільки $\Gamma_f \overset{((1-\mu)\mu)^i}{\sim} \Gamma^i_f$, то її N-самоподібна розмірність є розв'язком рівняння $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left((1-\mu)\mu\right)^{kx} = 1$, звідки $x = -\dfrac{1}{\log_2(1-\mu)\mu}$.

4) Нехай $N_i(x,k)$ — кількість символів «i» в Δ^{μ}–зображенні числа x до k-го місця включно. Нагадаємо, що границя (якщо вона існує)

$$\nu_i\left(x,\Delta^{\mu}\right) = \lim_{k\to\infty}\frac{N_i(x,k)}{k}$$

називається *частотою цифри «i»* в Δ^{μ}–зображенні числа x.

Кажуть, що перетворення f зберігає частоти цифр $\Delta^\mu-$зображення, якщо $\nu_i\left(f(x),\Delta^\mu\right)=\nu_i\left(x,\Delta^\mu\right)$. Оскільки для довільного $k\in\mathbb{N}$

$$N_i(y,2k)=N_i(x,2k),\quad N_i(y,2k+1)=N_i(x,2k)+\varepsilon_i(x),$$

де $\varepsilon_i(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо}\quad a_{2k+1}(x)\neq i,\\ 1, & \text{якщо}\quad a_{2k+1}(x)=i,\end{cases}$ тому має місце рівність

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_i(y,n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{N_i(x,n)}{n}+0$$

у випадку існування останньої границі або ж обидві границі не існують одночасно. □

4.1.2. Функція $\varphi(x)$ та її властивості. Розглядається функція, яка на множині H визначена рівністю:

$$y=\varphi\left(\Delta^\mu_{a_1a_2\ldots a_{2n-1}a_{2n}\ldots}\right)=\Delta^\mu_{[a_1a_2][a_3a_4]\ldots},\tag{4.1.2}$$

першою цифрою Δ^μ-зображення якої є добуток a_1a_2 перших двох цифр аргумента, другою — добуток a_3a_4 і т.д.

Теорема 4.1.2. *Функція φ володіє наступними властивостями:*

1) *відображення φ є сюр'єктивним, але не є ін'єктивним;*

2) *має зліченну всюди щільну множину точок розриву 1 роду, а саме у точках виду $\Delta^\mu_{a_1\ldots a_{2k}[i+1](\varnothing)}$ зі стрибком*

$$(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}+i-1}\cdot\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}},\ \text{якщо } k \text{ — парне},$$
$$(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}-1}\cdot\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}+i},\ \text{якщо } k \text{ — непарне;}$$

у точках виду $\Delta^\mu_{a_1\ldots a_{2k-1}[i+1](\varnothing)}$ зі стрибком

$$(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}-1}\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-1}i}\left(1-\mu^{a_{2k-1}}\right),\ \text{якщо } k \text{ — парне},$$
$$(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-1}i-1}\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}}\left(1-(1-\mu)^{a_{2k-1}}\right),\ \text{якщо } k \text{ — непарне;}$$

у точках, що мають нескінченне Δ^μ-зображення, — усувний розрив;

3) *є ніде не монотонною функцією;*

4) *якщо в* Δ^{μ}*-зображенні числа* $y_0 \in H$ *міститься нескінченна кількість цифр, відмінних від* 1*, то рівень* $\varphi^{-1}(y_0)$ *функції* φ *є континуальним; рівень* $\varphi^{-1}\left(\Delta^{\mu}_{c_1\ldots c_m(1)}\right)$ *є скінченним, причому* $\varphi^{-1}\left(\Delta^{\mu}_{(1)}\right) = \Delta^{\mu}_{(1)}$.

Доведення. 1) Оскільки функція φ визначена на множині H, то множиною значень функції буде також множина H. Тому сюр'єктивність відображення φ очевидна.

Для різних значень аргумента, наприклад, для

$$x = \Delta^{\mu}_{a_1a_2(1)} \neq \Delta^{\mu}_{a_2a_1(1)} = x'$$

значення функції φ співпадають

$$y = \varphi(x) = \varphi(\Delta^{\mu}_{a_1a_2(1)}) = \Delta^{\mu}_{[a_1a_2](1)} = \Delta^{\mu}_{[a_2a_1](1)} = \varphi(\Delta^{\mu}_{a_2a_1(1)}) = \varphi(x').$$

Отже, відображення φ не є ін'єктивним.

2.1) Дослідимо поведінку функції $\varphi(x)$ в правому і лівому ε-півоколах точки $x_0 = \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}[i+1](\varnothing)}$. Можливі випадки: k — парне, k — непарне число.

a) Нехай k — парне число. Умова $x \to \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}[i+1](\varnothing)} + 0$ рівносильна умові $x \in \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}i1j}$, де $j \to \infty$, тоді

$$D_1 = \lim_{x\to x_0+0} \varphi(x) = \lim_{j\to\infty} \varphi\left(\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}i1j(1)}\right) = \lim_{j\to\infty} \Delta^{\mu}_{\underbrace{[a_1a_2]\ldots[a_{2k-1}a_{2k}]}_{\text{парне}}[i\cdot 1][j\cdot 1](1)} =$$

$$= (1-\mu)^{a_1a_2-1} - (1-\mu)^{a_1a_2-1}\mu^{a_3a_4} + \ldots - (1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}-1}\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}} +$$
$$+ (1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}+i-1}\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}}.$$

Оскільки умова $x \to \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}[i+1](\varnothing)} - 0$ рівносильна умові $x \in \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}[i+1]j}$, де $j \to \infty$, то

$$D_2 = \lim_{x\to x_0-0} \varphi(x) = \lim_{j\to\infty} \varphi\left(\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}[i+1]j(1)}\right) = \lim_{j\to\infty} \Delta^{\mu}_{\underbrace{[a_1a_2]\ldots[a_{2k-1}a_{2k}]}_{\text{парне}}[(i+1)j](1)} =$$

$$= (1-\mu)^{a_1a_2-1} - (1-\mu)^{a_1a_2-1}\mu^{a_3a_4} + \ldots - (1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}-1}\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}}.$$

Величина стрибка у точці x_0, коли k — парне число, дорівнює різниці $|D_1 - D_2| = (1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}+i-1}\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}}$.

b) Нехай k — непарне число. Умова $x \to \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}[i+1](\varnothing)} + 0$ рівносильна умові $x \in \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}i1j}$, де $j \to \infty$, тоді

$$D_3 = \lim_{x\to x_0+0}\varphi(x) = \lim_{j\to\infty}\varphi\left(\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}i1j(1)}\right) = \lim_{j\to\infty}\Delta^{\mu}_{\underbrace{[a_1a_2]\ldots[a_{2k-1}a_{2k}]}_{\text{непарне}}[i\cdot 1][j\cdot 1](1)} =$$

$$= (1-\mu)^{a_1a_2-1} - (1-\mu)^{a_1a_2-1}\mu^{a_3a_4} + \ldots + (1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}-1}\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}} -$$

$$-(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}-1}\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}+i}.$$

Оскільки умова $x \to \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}[i+1](\varnothing)} - 0$ рівносильна умові $x \in \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}[i+1]j}$, де $j \to \infty$, то

$$D_4 = \lim_{x\to x_0-0}\varphi(x) = \lim_{j\to\infty}\varphi\left(\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}[i+1]j(1)}\right) = \lim_{j\to\infty}\Delta^{\mu}_{\underbrace{[a_1a_2]\ldots[a_{2k-1}a_{2k}]}_{\text{непарне}}[(i+1)j](1)} =$$

$$= (1-\mu)^{a_1a_2-1} - (1-\mu)^{a_1a_2-1}\mu^{a_3a_4} + \ldots + (1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}-1}\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}}.$$

Величина стрибка у точці x_0, коли k — непарне число, дорівнює різниці $|D_3 - D_4| = (1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}-1}\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}+i}$.

Дослідження поведінки функції $\varphi(x)$ в правому і лівому ε-півоколах точки $x_1 = \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k-1}[i+1](\varnothing)}$ аналогічне.

3) Для доведення ніде не монотонності покажемо, що для будь-якого циліндра рангу $2k$ знайдеться циліндр рангу $2k+2$ такий, що прирости

$$\delta_{\varphi} = \delta\left(\Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_{2k}}\right) \quad \text{і} \quad \delta_{\varphi} = \delta\left(\Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_{2k}ij}\right)$$

набувають різних знаків. Позначимо кінці циліндра $\Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_{2k}}$ через

$$x_1 = \Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_{2k-2}[a_{2k-1}+1](\varnothing)} \quad \text{і} \quad x_2 = \Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_{2k-1}[a_{2k}+1](\varnothing)}.$$

Приріст на цьому циліндрі $\delta_{\varphi} = \delta\left(\Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_{2k}}\right) = \varphi(x_2) - \varphi(x_1)$. Можливі випадки:

$$1.\delta_{\varphi} = \delta\left(\Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_{2k}}\right) = \varphi(x_2) - \varphi(x_1) =$$

$$= \varphi\left(\Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_{2k-1}[a_{2k}+1](\varnothing)}\right) - \varphi\left(\Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_{2k-2}[a_{2k-1}+1](\varnothing)}\right) =$$

$$= \Delta^{\mu}_{\underbrace{[a_1a_2][a_3a_4]\ldots[a_{2k-1}(a_{2k}+1)]}_{\text{парне}}(\varnothing)} - \Delta^{\mu}_{\underbrace{[a_1a_2]\ldots[a_{2k-3}a_{2k-2}][a_{2k-1}+1]}_{\text{непарне}}(\varnothing)} =$$

$$= (1-\mu)^{a_1a_2-1} - (1-\mu)^{a_1a_2-1}\mu^{a_3a_4} + \ldots +$$

$$+(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}-1}\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-5}a_{2k-4}} -$$

$$-(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}-1}\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}+a_{2k-1}} -$$

$$-\Big((1-\mu)^{a_1a_2-1} - (1-\mu)^{a_1a_2-1}\mu^{a_3a_4} + \ldots +$$

$$+(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}-1}\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-5}a_{2k-4}} -$$

$$-(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}-1}\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-1}+1}\Big) =$$

$$= -(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}-1}\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}+a_{2k-1}}+$$
$$+(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}-1}\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-1}+1} =$$
$$= (1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}-1}\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-5}a_{2k-4}+a_{2k-1}+1}\left(1-\mu^{a_{2k-1}a_{2k}-1}\right) \geqslant 0.$$

$$\delta_\varphi = \delta\left(\Delta^\mu_{a_1a_2\ldots a_{2k}ij}\right) = \varphi(x_2') - \varphi(x_1') =$$
$$= \varphi\left(\Delta^\mu_{a_1a_2\ldots a_{2k}i[j+1](\varnothing)}\right) - \varphi\left(\Delta^\mu_{a_1a_2\ldots a_{2k}[i+1](\varnothing)}\right) =$$
$$= \Delta^\mu_{\underbrace{[a_1a_2][a_3a_4]\ldots[a_{2k-1}a_{2k}]}_{\text{парне}}[i(j+1)](\varnothing)} - \Delta^\mu_{\underbrace{[a_1a_2][a_3a_4]\ldots[a_{2k-1}a_{2k}]}_{\text{парне}}[i+1](\varnothing)} =$$
$$= (1-\mu)^{a_1a_2-1} - (1-\mu)^{a_1a_2-1}\mu^{a_3a_4} + \ldots -$$
$$-(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}-1}\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}}+$$
$$+(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}+i(j+1)-1}\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}}-$$
$$-\Big((1-\mu)^{a_1a_2-1} - (1-\mu)^{a_1a_2-1}\mu^{a_3a_4} + \ldots -$$
$$-(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}-1}\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}}+$$
$$+(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}+i}\,\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}}\Big) =$$
$$= (1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}+ij+i-1}\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}}-$$
$$-(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}+i}\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}} =$$
$$= (1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}+i}\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}}\left((1-\mu)^{ij-1}-1\right) \leqslant 0.$$

2. $$\delta_\varphi = \delta\left(\Delta^\mu_{a_1a_2\ldots a_{2k}}\right) = \varphi(x_2) - \varphi(x_1) =$$
$$= \varphi\left(\Delta^\mu_{a_1a_2\ldots a_{2k-1}[a_{2k}+1](\varnothing)}\right) - \varphi\left(\Delta^\mu_{a_1a_2\ldots a_{2k-2}[a_{2k-1}+1](\varnothing)}\right) =$$
$$= \Delta^\mu_{\underbrace{[a_1a_2]\ldots[a_{2k-1}(a_{2k}+1)]}_{\text{непарне}}(\varnothing)} - \Delta^\mu_{\underbrace{[a_1a_2]\ldots[a_{2k-3}a_{2k-2}][a_{2k-1}+1]}_{\text{парне}}(\varnothing)} =$$
$$= (1-\mu)^{a_1a_2-1} - (1-\mu)^{a_1a_2-1}\mu^{a_3a_4} + \ldots -$$
$$-(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-5}a_{2k-4}-1}\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}}+$$
$$+(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}+a_{2k-1}-1}\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}}-$$
$$-\Big((1-\mu)^{a_1a_2-1} - (1-\mu)^{a_1a_2-1}\mu^{a_3a_4} + \ldots -$$
$$-(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-5}a_{2k-4}-1}\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}}+$$
$$+(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-5}a_{2k-4}+a_{2k-1}}\,\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}}\Big) =$$
$$= (1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}+a_{2k-1}-1}\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}}-$$
$$-(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-5}a_{2k-4}+a_{2k-1}}\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}} =$$
$$= (1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-5}a_{2k-4}+a_{2k-1}}\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}}\left((1-\mu)^{a_{2k-1}a_{2k}-1}-1\right) \leqslant 0.$$

$$\delta_\varphi=\delta\left(\Delta^\mu_{a_1a_2\ldots a_{2k}ij}\right)=\varphi(x'_2)-\varphi(x'_1)=$$
$$=\varphi\left(\Delta^\mu_{a_1a_2\ldots a_{2k}i[j+1](\varnothing)}\right)-\varphi\left(\Delta^\mu_{a_1a_2\ldots a_{2k}[i+1](\varnothing)}\right)=$$
$$=\Delta^\mu_{\underbrace{[a_1a_2][a_3a_4]\ldots[a_{2k-1}a_{2k}]}_{\text{непарне}}[i(j+1)](\varnothing)}-\Delta^\mu_{\underbrace{[a_1a_2][a_3a_4]\ldots[a_{2k-1}a_{2k}]}_{\text{непарне}}[i+1](\varnothing)}=$$
$$=(1-\mu)^{a_1a_2-1}-(1-\mu)^{a_1a_2-1}\mu^{a_3a_4}+\ldots+$$
$$+(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}-1}\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}}-$$
$$-(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}-1}\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}+ij+i}-$$
$$-\Big((1-\mu)^{a_1a_2-1}-(1-\mu)^{a_1a_2-1}\mu^{a_3a_4}+\ldots+$$
$$+(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}-1}\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}}-$$
$$-(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}-1}\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}+i+1}\Big)=$$
$$=-(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}-1}\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}+ij+i}+$$
$$+(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}-1}\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}+i+1}=$$
$$=(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}-1}\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}+i+1}\left(1-\mu^{ij-1}\right)\geqslant 0.$$

4) *Множиною рівня* y_0 функції φ називається множина

$$\varphi^{-1}(y_0)=\{x:\ \varphi(x)=y_0\}.$$

Нехай $a_{n_k}(y_0)=b_k\neq 1$, $k\in\mathbb{N}$ і $a_j(y_0)=1$ при $j\in\mathbb{N}\setminus(n_k)$. Тоді образом кожного числа x такого, що

$$\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}a_{2n_k-1}(x)=b_k,\\ a_{2n_k}(x)=1,\end{array}\right.\\ a_{2j-1}(x)=a_{2j}(x)=1\end{array}\right.\qquad\text{або}\qquad\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}a_{2n_k-1}(x)=1,\\ a_{2n_k}(x)=b_k,\end{array}\right.\\ a_{2j-1}(x)=a_{2j}(x)=1\end{array}\right.$$

є число y_0. Оскільки таких чисел континуальна множина (що легко доводиться встановленням бієктивного відображення з відрізком $[0;1]$ за допомогою класичного двійкового зображення), то рівень $\varphi^{-1}(y_0)$ функції φ є континуальним.

Нехай b_j — кількість різних розкладів числа c_j з зображення $\Delta^\mu_{c_1\ldots c_m(1)}$ числа y_0 на два множники ($j=\overline{1,m}$). Тоді рівень $\varphi^{-1}\left(\Delta^\mu_{c_1\ldots c_m(1)}\right)$ функції φ є скінченним і містить $\prod\limits_{j=1}^{m}2\cdot b_j$ точок. Зокрема, рівень $\varphi^{-1}\left(\Delta^\mu_{(1)}\right)$ містить єдину точку. $\square$

4.1.3. Функція $\gamma(x)$ та її властивості. Розглядається функція, яка на множині H визначена рівністю:

$$y = \gamma\left(\Delta^{\mu}_{a_1 a_2 \ldots a_{2n-1} a_{2n} \ldots}\right) = \Delta^{\mu}_{[a_1 a_2][a_2 a_3]\ldots}. \tag{4.1.3}$$

Лема 4.1.1. *Множина $C \equiv C\left[\Delta^{\mu}, \overline{abcd}\right]$ є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега.*

Доведення. 1. Скористаємось означенням ніде не щільної множини. Нехай $(u;v)$ довільний підінтервал з інтервалу $(0;1)$. $\Delta^{\mu}_{c_1 c_2 \ldots c_m}$ — циліндр, що повністю належить $(u;v)$. Тоді циліндричний інтервал $\nabla^{\mu}_{c_1 c_2 \ldots c_m abcd}$, який належить циліндру $\Delta^{\mu}_{c_1 c_2 \ldots c_m}$ точок множини C не містить. Отже, множина C є ніде не щільною.

2. Нехай $F_0 = (0;1]$. Введемо позначення F_{2k-2} — замикання об'єднання циліндрів рангу $2k-2$, серед внутрішніх точок яких є точки множини C, тобто

$$F_{2k-2} = \underbrace{\bigcup\bigcup\ldots\bigcup}_{\overline{a_{i-2}a_{i-1}a_i a_{i+2}} \neq \overline{abcd}} \Delta^{\mu}_{a_1 a_2 \ldots a_{2k-2}}.$$

А множину $\overline{F}_{2k+2}$ означимо рівністю $\overline{F}_{2k+2} = F_{2k-2} \setminus F_{2k+2}$. Тоді

$$\lambda(\overline{F}_{2k+2}) = \lambda(F_{2k-2}) - \lambda(F_{2k+2})$$

або

$$\frac{\lambda(\overline{F}_{2k+2})}{\lambda(F_{2k-2})} = 1 - \frac{\lambda(F_{2k+2})}{\lambda(F_{2k-2})}.$$

З означення множин C, F_{2k+2} і $\overline{F}_{2k+2}$ і неперервності міри Лебега λ маємо:

$$\lambda(C) \leqslant \lambda(F_{2k+2}) \neq 0 \ \ \forall k \in \mathbb{N},$$

$$\lambda(C) = \lim_{k\to\infty} \lambda(F_{2k+2}) \quad \text{і} \quad \lambda(C) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(\overline{F}_{2k+2}).$$

Очевидно, що $C \subset F_{2k+2} \subset F_{2k-2}$ для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ і

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_{2k+2} = \lim_{k\to\infty} F_{2k+2}.$$

Тому $\lambda(C) < \lambda(F_{2k+2})$ і

$$\lambda(C) = \lim_{k\to\infty} \lambda(F_{2k+2}) = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\lambda(F_{2k+2})}{\lambda(F_{2k-2})} \cdot \frac{\lambda(F_{2k-2})}{\lambda(F_{2k-6})} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda(F_4)}{\lambda(F_0)} \right) =$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_{2k+2})}{\lambda(F_{2k-2})} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_{2k-2}) - \lambda(\overline{F}_{2k+2})}{\lambda(F_{2k-2})} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda(\overline{F}_{2k+2})}{\lambda(F_{2k-2})} \right).$$

Останній нескінченний добуток прямує до нуля тоді і тільки тоді, коли розбігається ряд, тобто

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(\overline{F}_{2k+2})}{\lambda(F_{2k-2})} = \infty. \tag{4.1.4}$$

Знайдемо оцінки останнього відношення.

$$0 < \frac{\lambda(\overline{F}_{2k+2})}{\lambda(F_{2k-2})} \leqslant (1-\mu)^{a+c} \mu^{b+d} < 1.$$

Отже, ряд (4.1.4) розбігається, оскільки не виконується необхідна умова збіжності ряду і тому $\lambda(C) = 0$. $\square$

Теорема 4.1.3. *Функція γ володіє наступними властивостями:*

1) *є відображенням ні сюр'єктивним, ні ін'єктивним;*

2) *має зліченну всюди щільну множину точок розриву 1 роду, а саме:*

у точках виду $\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}[i+1](\varnothing)}$ зі стрибком

$$(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}-1} \mu^{a_2a_3+\ldots+a_{2k}i} \left(1 - \mu^{a_{2k}} - (1-\mu)^i\right);$$

у точках виду $\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k-1}[i+1](\varnothing)}$ зі стрибком

$$(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-1}i-1} \mu^{a_2a_3+\ldots+a_{2k-2}a_{2k-1}} \left(1 - \mu^{i} - (1-\mu)^{a_{2k-1}}\right);$$

у точках, що мають нескінченне Δ^{μ}-зображення, — усувний розрив;

3) *її множина значень має канторівський тип (є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега) і дробову фрактальну розмірність Гаусдорфа-Безиковича.*

Доведення. 1) Наприклад, для різних значень аргумента

$$x=\Delta^{\mu}_{a_1a_2(1)}\neq\Delta^{\mu}_{a_2a_1(1)}=x'$$

значення функції γ співпадають

$$y=\gamma(x)=\gamma(\Delta^{\mu}_{a_1a_2(1)})=\Delta^{\mu}_{[a_1a_2](1)}=\Delta^{\mu}_{[a_2a_1](1)}=\gamma(\Delta^{\mu}_{a_2a_1(1)})=\gamma(x')=y.$$

Отже, відображення γ не є ін'єктивним.

А для значення функції $y=\Delta^{\mu}_{1234(1)}$ знайти значення аргументу, Δ^{μ}-символи якого є натуральними, неможливо. Тому відображення γ не є сюр'єктивним.

2.1) Дослідимо поведінку функції $\gamma(x)$ в правому і лівому ε-півоколах точки $x_0=\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}[i+1](\varnothing)}$. Умова $x\to\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}[i+1](\varnothing)}+0$ рівносильна умові $x\in\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}i1j}$, де $j\to\infty$, тоді

$$\begin{aligned}
D_1=&\lim_{x\to x_0+0}\gamma(x)=\lim_{j\to\infty}\gamma\left(\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}i1j(\varnothing)}\right)=\\
=&\lim_{j\to\infty}\Delta^{\mu}_{\underbrace{[a_1a_2]\ldots[a_{2k}i][i\cdot 1][1\cdot j]}_{\text{парне}}(\varnothing)}=\\
=&(1-\mu)^{a_1a_2-1}-(1-\mu)^{a_1a_2-1}\mu^{a_2a_3}+\ldots+\\
&+(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}-1}\mu^{a_2a_3+\ldots+a_{2k-2}a_{2k-1}}-\\
&-(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}-1}\mu^{a_2a_3+\ldots+a_{2k}i}+\\
&+(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}+i-1}\mu^{a_2a_3+\ldots+a_{2k}i}.
\end{aligned}$$

Оскільки умова $x\to\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}[i+1](\varnothing)}-0$ рівносильна умові $x\in\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}[i+1]j}$, де $j\to\infty$, то

$$\begin{aligned}
D_2=&\lim_{x\to x_0-0}\gamma(x)=\lim_{j\to\infty}\gamma\left(\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}[i+1]j(\varnothing)}\right)=\\
=&\lim_{j\to\infty}\Delta^{\mu}_{\underbrace{[a_1a_2]\ldots[a_{2k}(i+1)][(i+1)j]}_{\text{непарне}}(\varnothing)}=\\
=&(1-\mu)^{a_1a_2-1}-(1-\mu)^{a_1a_2-1}\mu^{a_2a_3}+\ldots+\\
&+(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}-1}\mu^{a_2a_3+\ldots+a_{2k-2}a_{2k-1}}-\\
&-(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}-1}\mu^{a_2a_3+\ldots+a_{2k}i+a_{2k}}.
\end{aligned}$$

Величина стрибка у точці x_0 дорівнює різниці $|D_1-D_2|$:

$$(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}-1}\mu^{a_2a_3+\ldots+a_{2k}i}\left(1-\mu^{a_{2k}}-(1-\mu)^{i}\right).$$

Дослідження поведінки функції $\gamma(x)$ в правому і лівому ε-півоколах точки $x_1 = \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k-1}[i+1](\varnothing)}$ аналогічне.

3) Легко бачити, що кожне число y, у Δ^{μ}-зображенні якого зустрічається комбінація цифр $1bc$, де $c \not| b$, не має прообразу. Тоді множина значень функції не міститиме чисел, Δ^{μ}-зображення яких містить комбінацію цифр $1bcd$. Тому згідно з лемою 1 вона є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега.

Легко бачити, що множина $E(\gamma)$ значень функції γ містить множину:

$$G = \left\{ y : \ y = \Delta^{\mu}_{a_1a_1a_2a_2a_3a_3\ldots}, \ \ \text{де}\, a_n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \right\},$$

яка має додатну фрактальну розмірність меншу 1. Такою ж є і множина $E(\gamma)$, тобто фрактальною множиною канторівського типу. □

Зауважимо, що функції, які розглядались, є фрактальними з різних точок зору. Графік першої функції є N-самоафінною множиною, друга функція має множину рівнів з фрактальними властивостями, суттєва для третьої функції множина, а саме: множина її значень, є фрактальною множиною.

4.2. Функції, що зберігають хвости Δ^{μ}-зображення чисел

4.2.1. Хвостові множини і функції, що зберігають хвости Δ^{μ}-зображення чисел. У множині $\mathcal{Z}^{\mu}_{H}$ всіх Δ^{μ}-зображень чисел з множини H введемо бінарне відношення "мати однаковий хвіст" (символічно: $\sim$).

Означення 4.2.1. Кажуть, що два Δ^{μ}-зображення

$$\Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots} \ \ i \ \ \Delta^{\mu}_{b_1b_2\ldots b_n\ldots}$$

мають однаковий хвіст (або *перебувають у відношенні* $\sim$), якщо існують натуральні числа k та m такі, що $a_{k+j} = b_{m+j}$ для будь-якого $j \in \mathbb{N}$.

Очевидно, що бінарне відношення $\sim$ є відношенням еквівалентності (тобто є рефлексивним, симетричним і транзитивним) та розбиває множину, на якій воно задане, на класи еквівалентності. Кожен з класів еквівалентності називатимемо *хвостовою множиною.* Кожна хвостова множина однозначно визначається довільним своїм елементом (представником).

Будемо говорити, що два числа x і y з множини H мають однаковий хвіст у Δ^μ-зображенні (або перебувають у відношенні $\sim$), якщо їх Δ^μ-зображення перебувають у відношенні $\sim$. Символічно: $x \sim y$.

Теорема 4.2.1. *Кожна хвостова множина є зліченною і щільною в* $(0,1]$ *множиною; фактор-множина* $F \equiv (0,1]/\sim$ *є континуальною.*

Доведення. Нехай K — довільний клас еквівалентності, $x_0 = \Delta^\mu_{c_1\ldots c_n\ldots}$ — його представник. Тоді, очевидно, що для довільного $m \in \mathbb{Z}_0$ існує множина

$$K_m = \left\{x:\ x = \Delta^\mu_{a_1\ldots a_k c_{m+1} c_{m+2}\ldots},\quad a_i \in \mathbb{N},\ k = 0,1,2,\ldots\right\}$$

таких чисел x, для яких при деякому $k \in \mathbb{Z}_0$

$$a_{k+j}(x) = c_{m+j} \quad \text{для довільного } j \in \mathbb{N} \quad \text{і} \quad K = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}_0} K_m\,.$$

Множина K, будучи зліченним об'єднанням зліченних множин, є множиною зліченною.

Доведемо тепер, що K — щільна в $(0,1]$. Оскільки належність числа x до множини K не залежить від довільної скінченної кількості перших цифр його Δ^μ-зображення, то в кожному з циліндрів довільного рангу m існує точка множини K. Тому K є всюди щільною в півінтервалі $(0,1]$ множиною.

Для доведення континуальності фактор-множини $F \equiv (0,1]/\sim$ скористаємось методом від супротивного. Припустимо, що F — зліченна множина. Тоді півінтервал $(0,1]$ є зліченною множиною як зліченне об'єднання зліченних множин (класів еквівалентності фактор-множини F), що суперечить його континуальності. Отримане протиріччя доводить теорему. $\square$

Зауважимо, що фактор-множину F можна легко метризувати, тобто ввести відстань (метрику).

Означення 4.2.2. Казатимемо, що функція f, яка визначена на множині H і набуває значень з цієї множини, *зберігає хвости* Δ^{μ}-зображень чисел, якщо для будь-якого $x \in (0,1]$ існують натуральні числа $k = k(x)$ і $m = m(x)$ такі, що

$$a_{k+n}(x) = a_{m+n}\left(f(x)\right) \quad \text{для всіх } n \in \mathbb{N}.$$

Зрозуміло, що функцій, які зберігають хвости Δ^{μ}-зображень чисел, існує нескінченна множина, але нас цікавлять лише неперервні функції. Найпростішим прикладом такої функції є тотожне перетворення $y = e(x)$.

Клас функцій, що задовольняють означення 4.2.2, позначимо через X і розглянемо кілька представників цього класу.

4.2.2. Функція $\sigma_1(x)$.

Розглядається функція, означена на множині H рівністю

$$y = \sigma_1(x) = \sigma_1\left(\Delta^{\mu}_{a_1(x)a_2(x)a_3(x)\ldots a_n(x)\ldots}\right) = \Delta^{\mu}_{[a_1+a_2+a_3]a_4a_5\ldots a_n\ldots}.$$

Коректність означення цієї функції випливає з єдиності Δ^{μ}-зображення чисел з множини H і очевидно, що вона зберігає хвости Δ^{μ}-зображення чисел.

Лема 4.2.1. *Функція $y = \sigma_1(x)$ аналітично виражається формулою*

$$\sigma_1(x) = \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{a_2(x)} \cdot x + \nu^{a_1(x)+a_2(x)-1}\left(1 - \frac{1}{\mu^{a_2(x)}}\right), \tag{4.2.1}$$

є лінійною на кожному циліндрі 2-го рангу і має наступні властивості:

1) *є неперервною строго зростаючою;*
2) $\sup\limits_{x \in \Delta^{\mu}_{ij}} \sigma_1(x) = \nu^{i+j}$, $\inf\limits_{x \in \Delta^{\mu}_{ij}} \sigma_1(x) = 0$;
3) $\int\limits_{\Delta^{\mu}_{ij}} \sigma_1(x)dx = \frac{1}{2}\nu^{2i+j}\mu^{j}$; 4) $\int\limits_0^1 \sigma_1(x)dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\nu^3}{1+\nu^3}$.

Доведення. 1. Справді, якщо $x = \Delta^{\mu}_{a_1a_2a_3a_4a_5\ldots a_n\ldots}$, то

$$x = \nu^{a_1-1} - \nu^{a_1-1}\mu^{a_2} + \nu^{a_1+a_3-1}\mu^{a_2} - \nu^{a_1+a_3-1}\mu^{a_2+a_4} + \ldots =$$

$$= \nu^{a_1-1} - \nu^{a_1-1}\mu^{a_2} + \frac{\mu^{a_2}}{\nu^{a_2}}\underbrace{\left(\nu^{a_1+a_2+a_3-1} - \nu^{a_1+a_2+a_3-1}\mu^{a_4} + \ldots\right)}_{\sigma_1(x)} =$$

$$= \nu^{a_1-1} - \nu^{a_1-1}\mu^{a_2} + \frac{\mu^{a_2}}{\nu^{a_2}} \cdot \sigma_1(x).$$

Звідки $\sigma_1(x) = \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{a_2(x)} \cdot x + \nu^{a_1(x)+a_2(x)-1}\left(1 - \frac{1}{\mu^{a_2(x)}}\right)$ і очевидно, що функція $\sigma_1(x)$ є лінійною, а отже, неперервною строго зростаючою на множині $H \cap \Delta^{\mu}_{a_1a_2}$. Довизначення її по неперервності в Δ^{μ}-скінченних точках приводить до неперервності на всьому циліндрі $\Delta^{\mu}_{a_1a_2}$.

2. Граничні значення функції $\sigma_1(x)$ на циліндрі Δ^{μ}_{ij}:

$$\sup_{x \in \Delta^{\mu}_{ij}} \sigma_1(x) = \lim_{k\to\infty} \sigma_1\left(\Delta^{\mu}_{ij1(k)}\right) = \Delta^{\mu}_{[i+j+1](\varnothing)} = \nu^{i+j}.$$

$$\inf_{x \in \Delta^{\mu}_{ij}} \sigma_1(x) = \lim_{k\to\infty} \sigma_1\left(\Delta^{\mu}_{ij(k)}\right) = \lim_{k\to\infty} \Delta^{\mu}_{[i+j+k](k)} = 0.$$

3. Обчислимо

$$\int\limits_{\Delta^{\mu}_{ij}} \sigma_1(x)dx = \int\limits_{\Delta^{\mu}_{ij(\varnothing)}}^{\Delta^{\mu}_{i[j+1](\varnothing)}} \sigma_1(x)dx =$$

$$= \int\limits_{\nu^{i-1}(1-\mu^j)}^{\nu^{i-1}\left(1-\mu^{j+1}\right)} \left(\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^j \cdot x + \nu^{i+j-1}\left(1 - \frac{1}{\mu^j}\right)\right) dx =$$

$$= \left(\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^j \cdot \frac{x^2}{2} + \nu^{i+j-1}\left(1 - \frac{1}{\mu^j}\right) \cdot x\right)\Bigg|_{\nu^{i-1}(1-\mu^j)}^{\nu^{i-1}\left(1-\mu^{j+1}\right)} = \frac{1}{2}\nu^{2i+j}\mu^j.$$

4.

$$\int\limits_0^1 \sigma_1(x)dx = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\nu^{2i}\sum_{j=1}^{\infty}\nu^j\mu^j = \frac{1}{2}\cdot\frac{\nu^2}{1-\nu^2}\cdot\frac{\nu\mu}{1-\nu\mu} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\nu^3}{1+\nu^3}. \qquad \square$$

4.2.3. Функція $d_s(x)$. Нехай s — фіксоване натуральне число. Розглянемо функцію, залежну від параметра s, коректно означену на півінтервалі $(0,1]$ рівністю $y = d_s(x) = d_s\left(\Delta^{\mu}_{a_1(x)a_2(x)a_3(x)\ldots}\right) = \Delta^{\mu}_{[s+a_1]a_2a_3\ldots}$.

Оскільки s — довільне натуральне число, то маємо зліченний клас функцій $y = d_s(x)$.

Теорема 4.2.2. *Функція d_s аналітично виражається формулою:*

$$d_s(x) = \nu^s \cdot x$$

і є: 1) лінійною строго зростаючою функцією,

2) $\inf\limits_{x\in(0,1]} d_s(x) = 0$, $\sup\limits_{x\in(0,1]} d_s(x) = \nu^s$;

крім цього, рівняння $\sigma_1(x) = d_s(x)$ не має розв'язків, якщо $a_2 \geqslant s$, а при $a_2 < s$ має їх зліченну множину:

$$E = \left\{x : x = \Delta^{\mu}_{a_1(a_2[s-a_2])}, \quad \text{де } a_1 \in \mathbb{N},\ a_2 \in \{1, 2, \ldots, s-1\}\right\}.$$

Доведення. За означенням функції d_s маємо

$$d_s(x) = \Delta^{\mu}_{[s+a_1]a_2a_3\ldots} = \nu^{s+a_1-1} - \nu^{s+a_1-1}\mu^{a_2} + \ldots =$$

$$= \nu^s \underbrace{\left(\nu^{a_1-1} - \nu^{a_1-1}\mu^{a_2} + \ldots\right)}_{x} = \nu^s \cdot x,$$

Отже, $d_s(x) = \nu^s \cdot x$. Звідки очевидно, що функція d_s є лінійною строго зростаючою на півінтервалі $(0,1]$. Причому

$$\inf_{x\in(0,1]} d_s(x) = \lim_{x\to 0+0} d_s(x) = \lim_{k\to\infty} d_s\left(\Delta^{\mu}_{(k)}\right) = \lim_{k\to\infty} \Delta^{\mu}_{[s+k](k)} = 0;$$

$$\sup_{x\in(0,1]} d_s(x) = \lim_{x\to 1-0} d_s(x) = \lim_{k\to\infty} d_s\left(\Delta^{\mu}_{1(k)}\right) = \Delta^{\mu}_{[s+1](\varnothing)} = \nu^s.$$

Рівняння $\sigma_1(x) = d_s(x)$ можна записати у вигляді

$$\Delta^{\mu}_{[a_1(x)+a_2(x)+a_3(x)]a_4(x)\ldots} = \Delta^{\mu}_{[s+a_1(x)]a_2(x)a_3(x)a_4(x)\ldots}.$$

З єдиності Δ^{μ}-зображення чисел з множини H випливає одночасне виконання рівностей:

$$a_1(x)+a_2(x)+a_3(x)=s+a_1(x), \quad a_4(x)=a_2(x),$$
$$a_5(x)=a_3(x)=s-a_2(x), \quad \ldots \quad a_{2k}(x)=a_2(x),$$
$$a_{2k+1}(x)=s-a_2(x), \quad k\in\mathbb{N}.$$

Очевидно, що ця система несумісна при $a_2 \geqslant s$. А при $a_2<s$ рівняння має зліченну множину розв'язків виду $x=\Delta^{\mu}_{a_1(a_2[s-a_2])}$, де a_1, a_2 — незалежні натуральні параметри. □

4.2.4. Оператор лівостороннього зсуву цифр Δ^{μ}-зображення числа. У множині $\mathcal{Z}^{\mu}_{H}$ всіх Δ^{μ}-зображень дійсних чисел з H розглянемо оператор ω_2 зсуву цифр, означений рівністю

$$\omega_2\left(\Delta^{\mu}_{a_1a_2a_3a_4\ldots a_n\ldots}\right)=\Delta^{\mu}_{a_3a_4\ldots a_n\ldots},$$

який породжує на множині H функцію $y=\omega_2(x)=\Delta^{\mu}_{a_3(x)a_4(x)\ldots a_n(x)\ldots}$.

Даний оператор володіє властивістю сюр'єктивності, але не має властивості ін'єктивності, оскільки

$$\omega_2(\Delta^{\mu}_{i_1i_2a_3\ldots a_n\ldots})=\omega_2(\Delta^{\mu}_{j_1j_2a_3\ldots a_n\ldots}) \quad \text{при } i_1\neq j_1,\ i_2\neq j_2.$$

Кожна точка $\Delta^{\mu}_{(ij)}=\dfrac{\nu^{i-1}(1-\mu^j)}{1-\nu^i\mu^j}$, де (i,j) — довільна пара натуральних чисел, є інваріантною для відображення ω_2.

Лема 4.2.2. *Функція $y=\omega_2(x)$, яка аналітично виражаєтьcя формулою*

$$\omega_2(x)=\frac{x}{\nu^{a_1(x)}\mu^{a_2(x)}}-\frac{1-\mu^{a_2(x)}}{\nu\mu^{a_2(x)}}, \tag{4.2.2}$$

є неперервною монотонно зростаючою функцією на кожному циліндрі 2-го рангу.

Доведення. Нехай $x\in\Delta^{\mu}_{ij}$. Тоді $x=\Delta^{\mu}_{ija_3a_4\ldots}$ і

$$x=\nu^{i-1}-\nu^{i-1}\mu^j+\nu^{i+a_3-1}\mu^j-\nu^{i+a_3-1}\mu^{j+a_4}+\ldots=$$

$$= \nu^{i-1} - \nu^{i-1}\mu^j + \nu^i\mu^j \underbrace{\left(\nu^{a_3-1} - \nu^{a_3-1}\mu^{a_4} + \ldots\right)}_{\omega_2(x)} = \nu^{i-1} - \nu^{i-1}\mu^j + \nu^i\mu^j \cdot \omega_2(x).$$

Звідки $\omega_2(x) = \dfrac{x}{\nu^i\mu^j} - \dfrac{1-\mu^j}{\nu\mu^j}$.

Отже, будучи лінійною, функція ω_2 є неперервною строго зростаючою на множині $H \cap \Delta^{\mu}_{a_1a_2}$. Довизначивши її по неперервності в точках множини S, отримаємо неперервну функцію на всьому циліндрі $\Delta^{\mu}_{a_1a_2}$. $\square$

Лема 4.2.3. *Рівняння $d_s(x) = \omega_2(x)$ має зліченну множину розв'язків, які мають загальний вигляд $x = \Delta^{\mu}_{a_1(a_2[s+a_1])}$, де a_1, a_2 — довільні натуральні числа.*

Доведення. Рівняння $d_s(x) = \omega_2(x)$ можна записати у вигляді

$$\Delta^{\mu}_{[s+a_1(x)]a_2(x)a_3(x)a_4(x)\ldots} = \Delta^{\mu}_{a_3(x)a_4(x)\ldots}.$$

З єдиності Δ^{μ}-зображення чисел з множини H випливає одночасне виконання рівностей:

$$\begin{aligned} &s + a_1(x) = a_3(x), \quad a_2(x) = a_4(x), \quad a_3(x) = a_5(x) = s + a_1(x), \\ &a_4(x) = a_6(x) = a_2(x), \quad \ldots \quad a_{2k+1}(x) = s + a_1(x), \\ &a_{2k}(x) = a_2(x), \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Тоді розв'язками рівняння будуть числа $x = \Delta^{\mu}_{a_1(a_2[s+a_1])}$, де $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$. $\square$

4.2.5. Оператор правостороннього зсуву цифр Δ^{μ}-зображення числа. Нехай i, j — фіксовані натуральні числа. Розглядається оператор, залежний від параметрів i, j, коректно означений на півінтервалі $(0, 1]$ рівністю $\delta_{ij}(x) = \delta_{ij}\left(\Delta^{\mu}_{a_1(x)a_2(x)\ldots}\right) = \Delta^{\mu}_{ija_1a_2\ldots}$, який визначає зліченний клас функцій $y = \delta_{ij}(x)$, $i \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$.

Лема 4.2.4. *Функція $y = \delta_{ij}(x)$, яка аналітично виражається формулою $y = \delta_{ij}(x) = \nu^i\mu^j \cdot x + \nu^{i-1}\left(1 - \mu^j\right)$, є лінійною строго зростаючою функцією на півінтервалі $(0, 1]$, причому*

$$\inf_{x\in(0,1]} \delta_{ij}(x) = \Delta^{\mu}_{ij(\varnothing)} = \nu^{i-1}\left(1 - \mu^j\right), \quad \sup_{x\in(0,1]} \delta_{ij}(x) = \Delta^{\mu}_{ij1(\varnothing)} = \nu^{i-1}\left(1 - \mu^{j+1}\right).$$

Доведення. Справді, за означенням функціїї δ_{ij} маємо:

$$y = \delta_{ij}(\Delta^{\mu}_{a_1 a_2 \ldots}) = \Delta^{\mu}_{ij a_1 a_2 \ldots} = \nu^{i-1} - \nu^{i-1}\mu^j + \nu^{i+a_1-1}\mu^j - \nu^{i+a_1-1}\mu^{j+a_2} + \ldots =$$

$$= \nu^{i-1} - \nu^{i-1}\mu^j + \nu^i\mu^j \underbrace{\left(\nu^{a_1-1} - \nu^{a_1-1}\mu^{a_2} + \ldots\right)}_{x} = \nu^{i-1} - \nu^{i-1}\mu^j + \nu^i\mu^j \cdot x.$$

Отже, $y = \delta_{ij}(x) = \nu^i\mu^j \cdot x + \nu^{i-1}\left(1 - \mu^j\right)$. Звідки з лінійності функції δ_{ij} випливає, що вона є неперервною строго зростаючою на $(0,1]$ для кожної впорядкованої пари натуральних чисел (i,j). Причому

$$\inf_{x\in(0,1]} \delta_{ij}(x) = \lim_{x\to 0+0} \delta_{ij}(x) = \lim_{k\to\infty} d_i\left(\Delta^{\mu}_{(k)}\right) = \lim_{k\to\infty} \Delta^{\mu}_{ij(k)} = \Delta^{\mu}_{ij(\varnothing)} = \nu^{i-1}\left(1-\mu^j\right);$$

$$\sup_{x\in(0,1]} \delta_{ij}(x) = \lim_{x\to 1-0} \delta_{ij}(x) = \lim_{k\to\infty} \delta_{ij}\left(\Delta^{\mu}_{1(k)}\right) = \Delta^{\mu}_{ij1(\varnothing)} = \nu^{i-1}\left(1 - \mu^{j+1}\right).$$

□

Для функцій ω_2 і δ_{ij} очевидними є наступні рівності:

$$\omega_2\left(\delta_{ij}\right) = x \qquad \delta_{a_1(x)a_2(x)}\left(\omega_2(x)\right) = x.$$

Теорема 4.2.3. *Для функції δ_{ij} мають місце наступні твердження.*

1. *Рівняння $\sigma_1(x) = \delta_{ij}(x)$ не має жодного розв'язку, якщо $a_1 + a_2 \geqslant i$, а при $a_1 + a_2 < i$ має їх зліченну множину*

$$\left\{x:\ x = \Delta^{\mu}_{(a_1 a_2 [i-a_1-a_2] j)},\ a_1 \in \mathbb{N},\ a_2 \in \mathbb{N},\ a_1 + a_2 \in \{1, 2, \ldots, i-1\}\right\}.$$

2. *Рівняння $d_s(x) = \delta_{ij}(x)$ не має жодного розв'язку, якщо $s \geqslant i$, а при $s < i$ має їх зліченну множину*

$$\left\{x:\ x = \Delta^{\mu}_{([i-s]j)},\ s \in \mathbb{N},\ s \in \{1, 2, \ldots, i-1\}\right\}.$$

3. *Рівняння $\omega_2(x) = \delta_{ij}(x)$ має безліч розв'язків, які мають загальний вигляд $x = \Delta^{\mu}_{(a_1 a_2 ij)}$, де (a_1, a_2) — довільна пара натуральних чисел.*

Доведення. 1. Рівняння $\sigma_1(x) = \delta_{ij}(x)$ можна записати у вигляді

$$\Delta^{\mu}_{[a_1(x)+a_2(x)+a_3(x)]a_4(x)a_5(x)\ldots} = \Delta^{\mu}_{ija_1(x)a_2(x)a_3(x)a_4(x)\ldots}.$$

З єдиності Δ^{μ}-зображення чисел з множини H випливає одночасне виконання рівностей:

$$a_1(x) + a_2(x) + a_3(x) = i, \;\; a_4(x) = j, \;\; a_5(x) = a_1(x), \;\; a_6(x) = a_2(x),$$
$$a_7(x) = a_3 = i - (a_1 + a_2), \;\; a_8(x) = a_4 = j, \;\; \ldots \;\; a_{4k-1}(x) = i - (a_1 + a_2),$$
$$a_{4k}(x) = j, \;\; a_{4k+1}(x) = a_1, \;\; a_{4k+2}(x) = a_2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тоді ця система не має жодного розв'язку, якщо $a_1+a_2 \geqslant i$, і має їх зліченну множину $E = \left\{x : \; x = \Delta^{\mu}_{(a_1a_2[i-a_1-a_2]j)}\right\}$, де a_1, a_2 — незалежні натуральні параметри, якщо $a_1 + a_2 < i$.

2. Рівняння $d_s(x) = \delta_{ij}(x)$ можна записати у вигляді

$$\Delta^{\mu}_{[s+a_1(x)]a_2(x)a_3(x)\ldots} = \Delta^{\mu}_{ija_1(x)a_2(x)a_3(x)\ldots}.$$

З єдиності Δ^{μ}-зображення чисел з множини H випливає одночасне виконання рівностей:

$$s + a_1(x) = i, \;\; a_2(x) = j, \;\; a_3(x) = a_1(x) = i - s,$$
$$a_4(x) = a_2(x) = j, \;\; \ldots \;\; a_{2k-1}(x) = i - s, \;\; a_{2k}(x) = j, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тоді остання система несумісна, якщо $s \geqslant i$. Якщо ж $s < i$, то рівняння має зліченну множину розв'язків вигляду $x = \Delta^{\mu}_{([i-s]j)}$.

3. Рівняння $\omega_2(x) = \delta_{ij}(x)$ можна записати у вигляді

$$\Delta^{\mu}_{a_3(x)a_4(x)a_5(x)\ldots} = \Delta^{\mu}_{ija_1(x)a_2(x)a_3(x)\ldots}.$$

З єдиності Δ^{μ}-зображення чисел з множини H випливає одночасне виконання рівностей:

$$i = a_3(x), \quad j = a_4(x), \quad a_1(x) = a_5(x), \quad a_2(x) = a_6(x),$$
$$a_3(x) = a_7(x) = i, \quad \ldots \quad a_{4k-1}(x) = i, \quad a_{4k}(x) = j,$$
$$a_{4k+1}(x) = a_1, \quad a_{4k+2}(x) = a_2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тоді розв'язками будуть числа виду $x = \Delta^{\mu}_{(a_1a_2ij)}$, де a_1, $a_2 \in \mathbb{N}$. $\square$

4.2.6. Перетворення, що зберігають хвости Δ^{μ}-зображення чисел. Нагадаємо, що *перетворенням* непорожньої множини E називається кожне взаємно однозначне, тобто бієктивне (одночасно ін'єктивне і сюр'єктивне), відображення цієї множини на себе.

Зрозуміло, що неперервними перетвореннями $[0,1]$ є строго монотонні (зростаючі або спадні) функції такі, що $f(0)=0$ і $f(1)=1$ або $f(0)=1$ і $f(1)=0$.

Якщо f — перетворення $[0,1]$, то $\varphi(x)=1-f(x)$ теж є перетворенням цієї множини. Саме тому при вивченні неперервних перетворень $[0,1]$ можна обмежитись строго зростаючими функціями, якими є неперервні функції розподілу ймовірностей.

Простими прикладами неперервних строго зростаючих перетворень, які зберігають хвости Δ^{μ}-зображення чисел, є функції:

$$\varphi_\tau(x)=\begin{cases} d_i(x), & \text{якщо } 0<x\leqslant x_1\equiv\Delta^{\mu}_{a_1(a_2[i+a_1])},\\ \omega_2(x), & \text{якщо } x_1<x\leqslant x_2\equiv\Delta^{\mu}_{(a_1a_2)},\\ e(x), & \text{якщо } x_2<x\leqslant 1,\end{cases}$$

де $\tau=(i,a_1,a_2)$ — довільна трійка натуральних чисел;

$$\psi(x)=\begin{cases} d_1(x), & \text{якщо } 0<x\leqslant x_1\equiv\Delta^{\mu}_{1(12)},\\ \omega_2(x), & \text{якщо } x_1<x\leqslant x_2\equiv\Delta^{\mu}_{(1112)},\\ \delta_{12}(x), & \text{якщо } x_2<x\leqslant x_3\equiv\Delta^{\mu}_{(12)},\\ e(x), & \text{якщо } x_3<x\leqslant 1;\end{cases}$$

$$\gamma(x)=\begin{cases} d_3(x), & \text{якщо } 0<x\leqslant x_1\equiv\Delta^{\mu}_{1(12)},\\ \sigma_1(x), & \text{якщо } x_1<x\leqslant x_2\equiv\Delta^{\mu}_{(1111)},\\ \delta_{31}(x), & \text{якщо } x_2<x\leqslant x_3\equiv\Delta^{\mu}_{(1231)},\\ \omega_2(x), & \text{якщо } x_3<x\leqslant x_4\equiv\Delta^{\mu}_{(1212)},\\ e(x), & \text{якщо } x_4<x\leqslant 1.\end{cases}$$

Теорема 4.2.4. *Множина G всіх неперервних строго зростаючих перетворень півінтервала $(0,1]$, які зберігають хвости Δ^{μ}-зображення чисел, відносно операції $\circ$ — "суперпозиція функцій" утворює нескінченну некомутативну групу.*

Доведення. Множина неперервних перетворень $(0,1]$ є підмножиною всіх перетворень $(0,1]$, які, як відомо, утворюють групу. Тому скористаємось критерієм підгрупи. Замкненість множини G відносно операції суперпозиція є очевидною. Функція, обернена до неперервної строго зростаючої, сама є неперервною і строго зростаючою функцією. І якщо перетворення f зберігає "хвости" Δ^{μ}-зображень, то обернене перетворення теж їх зберігає. Тому перетворення, обернене до даного перетворення з множини G теж належить G.

Оскільки множина перетворень φ_τ, $\tau \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, є зліченною, то зрозуміло, що нескінченною є і множина G.

Для доведення некомутативності групи $(G,\circ)$ наведемо приклад пари перетворень f_1 і f_2, які не комутують, тобто $f_2\circ f_1 \neq f_1\circ f_2$. Розглянемо два перетворення $\varphi_{\tau_1}(x)$ і $\varphi_{\tau_2}(x)$, де $\tau_1=(1,2,3)$, $\tau_2=(1,1,2)$, тобто

$$\varphi_{\tau_1}(x)=\begin{cases} d_1(x), & \text{якщо } 0<x\leqslant x_1\equiv\Delta^{\mu}_{2(33)},\\ \omega_2(x), & \text{якщо } x_1<x\leqslant x_2\equiv\Delta^{\mu}_{(23)},\\ e(x), & \text{якщо } x_2<x\leqslant 1;\end{cases}$$

$$\varphi_{\tau_2}(x)=\begin{cases} d_1(x), & \text{якщо } 0<x\leqslant x_3\equiv\Delta^{\mu}_{1(22)},\\ \omega_2(x), & \text{якщо } x_3<x\leqslant x_4\equiv\Delta^{\mu}_{(12)},\\ e(x), & \text{якщо } x_4<x\leqslant 1.\end{cases}$$

Тоді для $x_0=\Delta^{\mu}_{12(3)}$, враховуючи, що

$$x_0>x_2=\Delta^{\mu}_{(23)},\quad \text{а}\quad \varphi_{\tau_1}(x_0)<x_3=\Delta^{\mu}_{1(22)}\quad \text{і}$$

$$x_0<x_3=\Delta^{\mu}_{1(22)},\quad \text{а}\quad \varphi_{\tau_2}(x_0)<x_1=\Delta^{\mu}_{2(33)},$$

отримуємо

$$\varphi_{\tau_2}\left(\varphi_{\tau_1}\left(\Delta^{\mu}_{12(3)}\right)\right) = \varphi_{\tau_2}\left(\Delta^{\mu}_{12(3)}\right) = \Delta^{\mu}_{22(3)};$$

$$\varphi_{\tau_1}\left(\varphi_{\tau_2}\left(\Delta^{\mu}_{12(3)}\right)\right) = \varphi_{\tau_1}\left(\Delta^{\mu}_{22(3)}\right) = \Delta^{\mu}_{32(3)} \neq \Delta^{\mu}_{22(3)}.$$

Отже, $\varphi_{\tau_2} \circ \varphi_{\tau_1} \neq \varphi_{\tau_1} \circ \varphi_{\tau_2}$ і група $(G, \circ)$ некомутативна. □

4.3. Розподіли цифр Δ^{μ}-зображення рівномірно розподіленої випадкової величини

Теорема 4.3.1. *Якщо випадкова величина $\tau = \Delta^{\mu}_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots}$ має рівномірний на відрізку $[0,1]$ розподіл, то цифри τ_n її Δ^{μ}-зображення є незалежними випадковими величинами, причому цифри послідовності (τ_n) з непарними номерами однаково розподілені:*

$$P\{\tau_{2k-1} = i\} = \mu \cdot \nu^{i-1}; \tag{4.3.1}$$

і цифри послідовності (τ_n) з парними номерами мають однаковий розподіл:

$$P\{\tau_{2k} = i\} = \nu \cdot \mu^{i-1}. \tag{4.3.2}$$

Доведення. Оскільки τ має рівномірний розподіл на $[0,1]$, то

1. $P\{\tau = a\} = 0$ для довільного $a \in [0,1]$;

2. $P\{\tau \in (a,b)\} = P\{\tau \in [a,b]\} = P([a,b]) = b - a.$

Зауважимо, що подія $\{\tau_n = i\}$ рівносильна події

$$\left\{\tau \in \bigcup_{c_1=1}^{\infty}\bigcup_{c_2=1}^{\infty}\ldots\bigcup_{c_{n-1}=1}^{\infty}\Delta^{\mu}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}i}\right\}.$$

Розглянемо цифри з непарними номерами. Для довільного циліндра непарного рангу $\Delta^{\mu}_{c_1\ldots c_{2k-1}}$, враховуючи вираз його довжини, має місце рівність

$$P(\Delta^{\mu}_{c_1\ldots c_{2k-1}}) = |\Delta^{\mu}_{c_1\ldots c_{2k-1}}| = \nu^{c_1+c_3+\ldots+c_{2k-1}-1} \cdot \mu^{c_2+c_4+\ldots+c_{2k-2}+1} =$$

$$= \prod_{i=1}^{2k-1} \nu^{c_{2i-1}-1}\mu^{c_{2i-2}+1}.$$

Скористаємось методом математичної індукції, тобто доведемо, що для довільного $k \in \mathbb{N}$ цифри послідовності (τ_n) з непарними номерами однаково розподілені і мають місце рівності (4.3.1).

Враховуючи неперервність розподілу випадкової величини τ та властивості циліндрів, маємо

$$P\{\tau_1 = i\} = P\{\tau \in \Delta_i^\mu\} = P(\Delta_i^\mu) = |\Delta_i^\mu| = \nu^{i-1}\mu;$$

$$P\{\tau_3 = i\} = P\left\{\tau \in \bigcup_{j_1=1}^{\infty}\bigcup_{j_2=1}^{\infty}\Delta^\mu_{j_1 j_2 i}\right\} = \sum_{j_1=1}^{\infty}\sum_{j_2=1}^{\infty}|\Delta^\mu_{j_1 j_2 i}| =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{\infty}\sum_{j_2=1}^{\infty}\nu^{j_1+i-1}\mu^{j_2+1} = \nu^{i-1}\mu\sum_{j_1=1}^{\infty}\nu^{j_1}\sum_{j_2=1}^{\infty}\mu^{j_2} = \nu^{i-1}\cdot\mu.$$

Аналогічно,

$$P\{\tau_{2k-1} = i\} = P\left\{\tau \in \bigcup_{j_1=1}^{\infty}\bigcup_{j_2=1}^{\infty}\ldots\bigcup_{j_{2k-2}=1}^{\infty}\Delta^\mu_{j_1 j_2 \ldots j_{2k-2} i}\right\} =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{\infty}\sum_{j_2=1}^{\infty}\ldots\sum_{j_{2k-2}=1}^{\infty}\left|\Delta^\mu_{j_1 j_2 \ldots j_{2k-2} i}\right| =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{\infty}\sum_{j_2=1}^{\infty}\ldots\sum_{j_{2k-2}=1}^{\infty}\nu^{j_1+j_3+\ldots+j_{2k-3}+i-1}\mu^{j_2+j_4+\ldots+j_{2k-2}+1} =$$

$$= \nu^{i-1}\mu\sum_{j_1=1}^{\infty}\sum_{j_2=1}^{\infty}\ldots\sum_{j_{2k-2}=1}^{\infty}\nu^{j_1+j_3+\ldots+j_{2k-3}}\mu^{j_2+j_4+\ldots+j_{2k-2}} = \nu^{i-1}\mu.$$

Оскільки остання ймовірність не залежить від k, а лише від i, то цифри послідовності (τ_{2k-1}), $k \in \mathbb{N}$ є однаково розподіленими.

Доведемо, що для будь-яких натуральних k і l розподіл випадкової величини τ_{2k-1} не залежить від розподілу τ_{2l-1}, де $k < l$, і має місце рівність

$$P\left\{\tau_{2k-1} = i,\, \tau_{2l-1} = j\right\} = P\left\{\tau_{2k-1} = i\right\}\cdot P\left\{\tau_{2l-1} = j\right\}.$$

$$P\left\{\tau_1 = i,\, \tau_3 = j\right\} = P\left\{\tau \in \bigcup_{j_2=1}^{\infty}\Delta^\mu_{i j_2 j}\right\} = \sum_{j_2=1}^{\infty}\left|\Delta^\mu_{i j_2 j}\right| = \sum_{j_2=1}^{\infty}\nu^{i+j-1}\mu^{j_2+1} =$$

$$= \nu^{i+j-2}\mu^2 = \nu^{i-1}\mu \cdot \nu^{j-1}\mu = |\Delta_i^\mu| \cdot \left|\Delta_j^\mu\right| =$$

$$= P\left(\Delta_i^\mu\right) \cdot P\left(\Delta_j^\mu\right) = P\left\{\tau_1 = i\right\} \cdot P\left\{\tau_3 = j\right\};$$

$$P\left\{\tau_{2k-1} = i,\, \tau_{2l-1} = j\right\} =$$

$$= P\left\{\tau \in \bigcup_{j_1=1}^{\infty} \ldots \bigcup_{j_{2k-2}=1}^{\infty} \bigcup_{j_{2k}=1}^{\infty} \ldots \bigcup_{j_{2l-2}=1}^{\infty} \Delta^\mu_{j_1 \ldots j_{2k-2} i j_{2k} \ldots j_{2l-2} j}\right\} =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{j_{2k-2}=1}^{\infty} \sum_{j_{2k}=1}^{\infty} \ldots \sum_{j_{2l-2}=1}^{\infty} \left|\Delta^\mu_{j_1 \ldots j_{2k-2} i j_{2k} \ldots j_{2l-2} j}\right| =$$

$$= \nu^{i+j-1}\mu \sum_{j_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{j_{2k-2}=1}^{\infty} \sum_{j_{2k}=1}^{\infty} \ldots \sum_{j_{2l-2}=1}^{\infty} \nu^{j_1 + \ldots + j_{2k-3} + j_{2k+1} + \ldots + j_{2l-3}} \times$$

$$\times \mu^{j_2 + \ldots + j_{2k-2} + j_{2k} + \ldots + j_{2l-2}} =$$

$$= \nu^{i+j-1}\mu \cdot \frac{\mu}{\nu} = \nu^{i-1}\mu \cdot \nu^{j-1}\mu = P\left\{\tau_{2k-1} = i\right\} \cdot P\left\{\tau_{2l-1} = j\right\}.$$

Розглянемо тепер цифри з парними номерами. Для довільного циліндра парного рангу $\Delta^\mu_{c_1 \ldots c_{2k}}$, враховуючи вираз його довжини, має місце рівність

$$P(\Delta^\mu_{c_1 \ldots c_{2k}}) = |\Delta^\mu_{c_1 \ldots c_{2k}}| = \nu^{c_1 + c_3 + \ldots + c_{2k-1}} \cdot \mu^{c_2 + c_4 + \ldots + c_{2k}} = \prod_{i=1}^{2k} \nu^{c_{2i-1}} \mu^{c_{2i}}.$$

Методом математичної індукції доведемо, що для довільного $k \in \mathbb{N}$ цифри послідовності (τ_n) з парними номерами однаково розподілені і мають місце рівності (4.3.2).

Враховуючи неперервність розподілу випадкової величини τ та властивості циліндрів, маємо

$$P\{\tau_2 = i\} = P\left\{\tau \in \bigcup_{j=1}^{\infty} \Delta^\mu_{ji}\right\} = \sum_{j=1}^{\infty} |\Delta^\mu_{ji}| = \sum_{j=1}^{\infty} \nu^j \mu^i = \nu \cdot \mu^{i-1};$$

Аналогічно,

$$P\{\tau_{2k} = i\} = P\left\{\tau \in \bigcup_{j_1=1}^{\infty} \bigcup_{j_2=1}^{\infty} \ldots \bigcup_{j_{2k-1}=1}^{\infty} \Delta^\mu_{j_1 j_2 \ldots j_{2k-1} i}\right\} =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{\infty}\sum_{j_2=1}^{\infty}\dots\sum_{j_{2k-1}=1}^{\infty}\left|\Delta^{\mu}_{j_1j_2\dots j_{2k-1}i}\right| =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{\infty}\sum_{j_2=1}^{\infty}\dots\sum_{j_{2k-1}=1}^{\infty}\nu^{j_1+j_3+\dots+j_{2k-1}}\mu^{j_2+j_4+\dots+j_{2k-2}+i} =$$

$$= \mu^i\sum_{j_1=1}^{\infty}\sum_{j_2=1}^{\infty}\dots\sum_{j_{2k-1}=1}^{\infty}\nu^{j_1+j_3+\dots+j_{2k-1}}\mu^{j_2+j_4+\dots+j_{2k-2}} = \nu\cdot\mu^{i-1}.$$

Оскільки остання ймовірність не залежить від k, а лише від i, то цифри послідовності (τ_{2k}), $k\in\mathbb{N}$ є однаково розподіленими.

Доведемо, що для будь-яких натуральних k і l розподіл випадкової величини τ_{2k} не залежить від розподілу τ_{2l}, де $k<l$, і має місце рівність

$$P\left\{\tau_{2k}=i,\,\tau_{2l}=j\right\} = P\left\{\tau_{2k}=i\right\}\cdot P\left\{\tau_{2l}=j\right\}.$$

$$P\left\{\tau_2=i,\,\tau_4=j\right\} = P\left\{\tau\in\bigcup_{j_1=1}^{\infty}\bigcup_{j_3=1}^{\infty}\Delta^{\mu}_{j_1ij_3j}\right\} = \sum_{j_1=1}^{\infty}\sum_{j_3=1}^{\infty}\left|\Delta^{\mu}_{j_1ij_3j}\right| =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{\infty}\sum_{j_3=1}^{\infty}\nu^{j_1+j_3}\mu^{i+j} = \mu^{i+j}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^2 = \mu^{i-1}\nu\cdot\mu^{j-1}\nu = P\left\{\tau_2=i\right\}\cdot P\left\{\tau_4=j\right\};$$

$$P\left\{\tau_{2k}=i,\,\tau_{2l}=j\right\} =$$

$$= P\left\{\tau\in\bigcup_{j_1=1}^{\infty}\dots\bigcup_{j_{2k-1}=1}^{\infty}\bigcup_{j_{2k+1}=1}^{\infty}\dots\bigcup_{j_{2l-1}=1}^{\infty}\Delta^{\mu}_{j_1\dots j_{2k-1}ij_{2k+1}\dots j_{2l-1}j}\right\} =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{\infty}\dots\sum_{j_{2k-1}=1}^{\infty}\sum_{j_{2k+1}=1}^{\infty}\dots\sum_{j_{2l-1}=1}^{\infty}\left|\Delta^{\mu}_{j_1\dots j_{2k-1}ij_{2k+1}\dots j_{2l-1}j}\right| =$$

$$= \mu^{i+j}\sum_{j_1=1}^{\infty}\dots\sum_{j_{2k-1}=1}^{\infty}\sum_{j_{2k+1}=1}^{\infty}\dots\sum_{j_{2l-1}=1}^{\infty}\nu^{j_1+\dots+j_{2k-1}+j_{2k+1}+\dots+j_{2l-1}}\times$$

$$\times\mu^{j_2+\dots+j_{2k-2}+j_{2k+2}+\dots+j_{2l-2}} =$$

$$= \mu^{i+j}\cdot\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^2 = \mu^{i-1}\nu\cdot\mu^{j-1}\nu = P\left\{\tau_{2k}=i\right\}\cdot P\left\{\tau_{2l}=j\right\}. \qquad \square$$

4.4. Розподіли випадкових величин з незалежними цифрами Δ^{μ}-зображення

Розглядається випадкова величина $\tau = \Delta^{\mu}_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots}$, де (τ_n) — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, які набувають значень $1, 2, \ldots, n, \ldots$ відповідно з ймовірностями $P\{\tau_i = i\} = p_i$.

Очевидно, що коли $p_j = 1$, то розподіл випадкової величини τ є виродженим з єдиним атомом $\Delta^{\mu}_{(j)}$. В решті випадків розподіл τ є неперервним. Далі ми виключаємо цей випадок з розгляду.

Лема 4.4.1. *Функція розподілу $F_\tau(x)$ в.в. τ має вигляд*

$$F_\tau(x) = \beta_1 + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\beta_k \prod_{j=1}^{k-1} p_{a_j(x)}\right), \tag{4.4.1}$$

де $\beta_k = \begin{cases} \sum\limits_{i=a_k(x)+1}^{\infty} p_i, & \text{при непарному } k, \\ \sum\limits_{i=1}^{a_k(x)-1} p_i, & \text{при парному } k. \end{cases}$

Доведення. За означенням функції розподілу $F_\tau(x) = P\{\tau < x\}$, де $x = \Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_k\ldots}$. Оскільки подія $\{\tau < x\}$ подається у вигляді об'єднання несумісних подій

$$\{\tau < x\} = \{\tau_1 > a_1(x)\} \cup \{\tau_1 = a_1(x) \wedge \tau_2 < a_2(x)\} \cup \ldots$$

$$\cup \left\{\tau_i = a_i(x), \text{ якщо } i = \overline{1, 2k-1} \ \wedge \ \tau_{2k} < a_{2k}(x)\right\} \cup$$

$$\cup \left\{\tau_i = a_i(x), \text{ якщо } i = \overline{1, 2k} \ \wedge \ \tau_{2k+1} > a_{2k+1}(x)\right\} \cup \ldots\,,$$

то

$$P\left\{\tau_1 > a_1(x)\right\} = \sum_{j=a_1(x)+1}^{\infty} P\{\tau_j = j\} = \sum_{j=a_1(x)+1}^{\infty} p_j;$$

$$P\left\{\tau_i = a_i(x), \text{ якщо } i = \overline{1, 2k-1} \ \wedge \ \tau_{2k} < a_{2k}(x)\right\} =$$

$$= \prod_{i=1}^{2k-1} P\{\tau_i = a_i(x)\} \cdot \sum_{j=1}^{a_{2k}(x)-1} P\{\tau_{2k} = j\} = \prod_{i=1}^{2k-1} p_{a_i(x)} \cdot \sum_{j=1}^{a_{2k}(x)-1} p_j;$$

$$P\left\{\tau_i = a_i(x),\ \text{якщо}\ \ i = \overline{1,2k}\ \wedge\ \tau_{2k+1} > a_{2k+1}(x)\right\} =$$

$$= \prod_{i=1}^{2k} P\{\tau_i = a_i(x)\} \cdot \sum_{j=a_{2k+1}+1}^{\infty} P\{\tau_{2k+1} = j\} = \prod_{i=1}^{2k} p_{a_i(x)} \cdot \sum_{j=a_{2k+1}(x)+1}^{\infty} p_j.$$

Отже,

$$F_\tau(x) = \sum_{j=a_1+1}^{\infty} p_j + \ldots + \sum_{j=1}^{a_{2k}-1} p_j \cdot \prod_{i=1}^{2k-1} p_{a_i} + \sum_{j=a_{2k+1}+1}^{\infty} p_j \cdot \prod_{i=1}^{2k} p_{a_i} + \ldots =$$

$$= \beta_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\beta_k \prod_{j=1}^{k-1} p_{a_j} \right),$$

де $\beta_k = \begin{cases} \sum\limits_{i=a_k(x)+1}^{\infty} p_i, & \text{при непарному } k, \\ \sum\limits_{i=1}^{a_k(x)-1} p_i, & \text{при парному } k. \end{cases}$ □

Теорема 4.4.1. *Якщо (τ_n) — задана послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин і $\mu \neq \frac{1}{2}$, то розподіл випадкової величини $\tau = \Delta^{\mu}_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots}$ є сингулярним.*

Доведення. З виразу (4.4.1) функції розподілу F_τ на довільному циліндрі $\Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_{2k}}$ приріст функції має вид

$$\delta = F_\tau\left(\Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots[a_{2k}+1](\varnothing)}\right) - F_\tau\left(\Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_{2k}(\varnothing)}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{a_{2k}} p_j \cdot \prod_{i=1}^{2k-1} p_{a_i(x)} - \sum_{j=1}^{a_{2k-1}} p_j \cdot \prod_{i=1}^{2k} p_{a_i(x)} = \prod_{i=1}^{2k} p_{a_i(x)}.$$

Тоді

$$F'_\tau(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{\delta}{|\Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_{2k}}|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\prod\limits_{i=1}^{2k} p_{a_i(x)}}{\nu^{a_1+a_3+\ldots+a_{2k-1}} \mu^{a_2+a_4+\ldots+a_{2k}}} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{p_{a_1}}{\nu^{a_1}} \cdot \frac{p_{a_2}}{\mu^{a_2}} \cdot \ldots \cdot \frac{p_{a_{2k-1}}}{\nu^{a_{2k-1}}} \cdot \frac{p_{a_{2k}}}{\mu^{a_{2k}}}.$$

Якщо точка x має нормальну властивість, а саме: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n(x) = \infty$, то $F'_\tau(x) = 0$, оскільки $p_n \to 0$, коли $n \to \infty$, і необхідна умова збіжності нескінченного добутку не виконується. □

Теорема 4.4.2. *Якщо* $\zeta = \Delta^{\mu}_{\zeta_1\zeta_2\ldots\zeta_n\ldots}$ *— випадкова величина, цифри* Δ^{μ}*-зображення якої є незалежними випадковими величинами, має чистий лебегівський тип розподілу (чисто дискретний, чисто абсолютно неперервний або чисто сингулярно неперервний).*

Дане твердження є аналогом теореми Джессена-Вінтнера [36] для суми випадкового ряду з незалежними дискретно розподіленими доданками. Його доведення можна провести за аналогією з доведенням аналогічного твердження для $\widetilde{Q}_{\infty}$-зображення [36, 49].

Висновки до розділу 4

Даний розділ був присвячений застосуванням Δ^{μ}-зображення чисел. У ньому досліджувались функції з фрактальними властивостями, неперервні перетворення відрізка $[0;1]$ та розподіли випадкових величин, означені в термінах Δ^{μ}-зображення чисел. Перше застосування стосується теорії функцій, друге — геометрії, третє — теорії ймовірностей.

Апарат Δ^{μ}-зображення чисел створює широкі можливості для конструювання функцій зі складною локальною тополого-метричною структурою і фрактальними властивостями, зокрема, функцій, що володіють N-самоподібними, N-самоафінними та автомодельними властивостями.

Неперервні перетворення відрізка $[0;1]$ вичерпуються строго зростаючими та строго спадними функціями. А вони, згідно з відомою теоремою Лебега, мають скінченну похідну майже скрізь у розумінні міри Лебега. Не дивлячись на це, диференціальні властивості таких функцій можуть бути вкрай неоднорідними. Існують функції (причому їх більшість), які в будь-якому як завгодно малому інтервалі містять континуальну множину точок, в яких похідна рівна нулю, і континуальну множину точок, в яких похідна є нескінченною. До таких відносяться сингулярні функції, похідна яких майже скрізь рівна нулю. Добре відомо, що клас всіх неперервних перетворень відрізка $[0;1]$ відносно операції композиція перетворень утворює некомутативну групу. У пункті 4.2.6 знайдена її некомутативна підгрупа — це неперервні перетворення, що зберігають хвости Δ^{μ}-зображення чисел.

Основними результатами цього розділу є його теореми.

Основні результати цього розділу опубліковані у роботах [5a, 6a] і доповідались на наукових конференціях [14a–19a].

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

Аналітичні кодування дійсних чисел засобами нескінченного алфавіту є продуктивним засобом розвитку метричної та ймовірнісної теорії чисел і виявленню їх нормальних властивостей. Серед них окремої уваги заслуговують зображення, що ґрунуються на представленнях числа рядом (знакододатним або знакопочережним), членами якого є числа, обернені до натуральних. Запропоноване в роботі $\Delta^{\sharp}$-зображення є саме таким. Воно тісно пов'язане з класичними двосимвольними зображеннями (двійковим та нега-двійковим) і відповідає виразу неперервної строго зростаючої сингулярної функції Мінковського, інтерес до якої не згасає протягом століття. Не зважаючи на те, що $\Delta^{\sharp}$-зображення є окремим випадком $\widetilde{Q}_{\infty}$-зображення, яке вивчалось у роботах М.В. Працьовитого та О.Л. Лещинського, воно вповні заслуговує на самостійне дослідження, оскільки в даному випадку моделлю числа є знакопочережний ряд, членами якого є числа обернені до натуральних. Саме ця обставина дозволила суттєво поглибити теорію і вичерпно розв'язати інші задачі, зокрема, довести критерій раціональності числа.

У роботі знайдено континуальну сім'ю нових зображень чисел півінтервала $(0;1]$, визначених параметром $\mu \in (0;1)$. Таке зображення ми назваємо Δ^{μ}-зображенням. Воно є $\Delta^{\sharp}$-зображенням при $\mu = \dfrac{1}{2}$. Вказавши ймовірнісну задачу, яка приводить до Δ^{μ}-зображення, ми детально вивчили його геометрію, факти якої використали для постановки та розв'язання задач метричної та ймовірнісної теорії чисел. Виділивши злічений клас раціональних Δ^{μ}-зображень, ми вказали достатні умови раціональності числа і спростували гіпотезу про те, що критерій раціональності числа, знайдений для $\Delta^{\sharp}$-зображення, матиме місце для довільного Δ^{μ}-зображення.

У дисертаційному дослідженні ми використовували методологію, запропоновану у роботах М.В. Працьовитого та його учнів при дослідженні різних зображень чисел з нескінченним алфавітом, зокрема таких, що ґрунтуються на розкладах чисел в знакодотанті ряди Люрота, Енгеля, Сильвестера та знакопочережні ряди Люрота, Остроградського-Серпінського-Пірса, Остроградського, в елементарні ланцюгові дроби. Ці зображення (за виключенням розкладів чисел у ряди Люрота) не мають властивостей самоподібності тоді, як Δ^{μ}-зображення є N-самоподібним.

Наукову новизну даного дисертаційного дослідження складають:

1) цілісна теорія $\Delta^{\sharp}$-зображення, яка включає критерій раціональності числа, опис властивостей циліндричних та хвостових множин, властивостей операторів лівостороннього та правостороннього зсуву цифр, розв'язки задач про метричні, топологічні та фрактальні властивості множин чисел з певними обмеженнями на вживання цифр тощо;
2) теорія Δ^{μ}-зображення, яка включає геометричне тлумачення цифр зображення, метричні відношення, породжені властивостями циліндрів, нормальні властивості чисел, опис тополого-метричних і фрактальних властивостей множин канторівського типу, зокрема, формули для обчислення їх міри Лебега;
3) застосування Δ^{μ}-зображення для конструювання і дослідження властивостей кусково-неперервних функцій та неперервних перетворень відрізка $[0;1]$, які зберігають властивості Δ^{μ}-зображення чисел, зокрема, їх хвости; розподілів випадкових величин, індукованих розподілами цифр Δ^{μ}-зображення та ін.

Наявність різних (за своїми суто геометричними та тополого-метричними властивостями) зображень чисел з нескінченним алфавітом суттєво розширює можливості дослідження математичних об'єктів зі складною локальною тополого-метричною структурою.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Арнольд В. И.* Цепные дроби / В. И. Арнольд. — Москва: МЦНМО, 2001. — (Б-ка «Математическое просвещение»; Вып. 14). — 40 с.
2. *Барановський О. М.* Метрична та ймовірнісна теорія чисел, представлених рядами Остроградського 1-го виду: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз-мат. наук: спец.: 01.01.01 – математичний аналіз / О. М. Барановський. — Київ, 2007. — 20 с.
3. *Барановський О. М.* Ряди Остроградського-Серпінського-Пірса та їхні застосування / О. М. Барановський, М. В. Працьовитий, Г. М. Торбін. — Київ: Наукова думка, 2013. — 268 с.
4. *Барановський О. М.* Тополого-метричні властивості множин чисел з умовами на їх розклади в ряди Остроградського / О. М. Барановський, М. В. Працьовитий, Г. М. Торбін // Укр.Матем.Журн. — 2007. — № 59 (9). — С. 1155 – 1168.
5. *Биллингслей П.* Эргодическая теория и информация / П. Биллингслей. — М.: Мир, 1969. — 238 с.
6. *Боревич З. И.* Теория чисел / З. И. Боревич, И. Р. Шафарефич. — М.: Наука. Главная редакция физ.-мат. литературы, 1985. — 504 с.
7. *Бородін О. І.* Теорія чисел / О. І. Бородін. — Київ: Вища школа, 1970. — 275 с.
8. *Василенко Н. М.* Використання фібоначчієвої системи числення для дослідження фрактальних властивостей математичних об'єктів зі складною локальною будовою: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз-мат. наук: спец.: 01.01.06 – алгебра та теорія чисел / Н. М. Василенко. — Київ, 2010. — 20 с.

9. *Виноградов И. М.* Основы теории чисел / И. М. Виноградов. — М.-Л.: Гостехиздат, 1952. — 180 с.
10. *Гельфонд А. О.* Об одном общем свойстве систем счисления / А. О. Гельфонд // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. — 1959. — № 23. — С. 809–814.
11. *Гетьман Б. І.* Тополого-метрична і фрактальна теорія зображень чисел рядами Енгеля: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз-мат. наук: спец.: 01.01.06 – алгебра та теорія чисел / Б. І. Гетьман. — Київ, 2012. — 20 с.
12. *Гончаренко Я. В.* Геометрія нескінченно-символьного q_0^∞-зображення дійсних чисел та її застосування у метричній теорії чисел / Я. В. Гончаренко, І. М. Лисенко // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2013, № 15. — С. 100–118.
13. *Грубер П.М.* Геометрия чисел / П. М. Грубер, К. Г. Леккеркеркер. — М.: Наука, 2008. — 727 с.
14. *Гуревич В.* Теория размерности / В. Гуревич, Г. Волмэн. — Москва: Изд-во иностр. лит., 1948. — 231 с.
15. *Душистова А.А.* О производной функции Минковского $?(x)$ / А. А. Душистова, Н. Г. Мощевитин // Фундамент. и прикл. математика. — 2010. — Т. 16, № 6. — С. 33–44.
16. *Дюгак П.* Понятие предела и иррациональные числа. Концепции Шарля Мерэ и Карла Вейерштрасса / П. Дюгак // Историко-математические исследования. — 1973. — XVIII. — С. 176–180.
17. *Жихарєва Ю. І.* Сингулярні розподіли ймовірностей, пов'язані з представленнями чисел знакододатними рядами Люрота: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз-мат. наук: спец.: 01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика / Ю. І. Жихарєва. — Донецьк, 2014. — 20 с.

18. *Замрій І. В.* Сингулярність інверсора цифр Q_3-зображення дробової частини дійсного числа, його фрактальні та інтегральні властивості / І. В. Замрій, М. В. Працьовитий // Нелінійні коливання. — 2015. — Том 18, № 1. — С. 55–64.
19. *Кавун Н. И.* Обоснование теории вещественных чисел по способу А. Н. Колмогорова / Н. И. Кавун // Успехи математических наук. — 1947. — Т. II, вип. 5. — С. 119–229.
20. *Калашніков А. В.* Еквівалентне означення та властивості сингулярної функції Мінковського / А. В. Калашніков // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2009. — № 10. — С. 50–56.
21. *Калашніков А. В.* Сингулярність функцій однопараметричного класу, який містить функцію Мінковського / А. В. Калашніков, М. В. Працьовитий // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2011. — № 12. — С. 59–65.
22. *Кац М.* Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел / М. Кац. — М.: Изд-во иностр лит-ры, 1963. — 156 с.
23. *Колмогоров А. Н.* К обоснованию теории вещественных чисел / А. Н. Колмогоров // Успехи математических наук. — 1946. — Т.1. — Выпуск 1(11). — С.217–219.
24. *Коробов Н. М.* Тригонометрические суммы и их приложения / Н. М. Коробов. — М.: Наука, 1989. — 240 с.
25. *Кроновер Р. М.* Фракталы и хаос в динамических системах / Р. М. Кроновер. — М.: Техносфера, 2006. — 488 с.
26. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной / И. П. Натансон. — М.: Наука, 1972. — 480 с.

27. *Постников А. Г.* Арифметическое моделирование случайных процессов / А. Г. Постников // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. — 1960. — Т.57. — С. 3–84.

28. *Постников А. Г.* Вероятностная теория чисел / А. Г. Постников. — Москва: Знание, 1974. — 62 с.

29. *Працьовита І. М.* Про розклади чисел у знакозмінні s-адичні ряди і ряди Остроградського 1- та 2-го видів / І. М. Працьовита // Укр. мат. журн. — 2009. — Т.61, № 7 — С. 958–968.

30. *Працьовита І. М.* Зображення дійсних чисел рядами Остроградського 2-го виду та їх застосування: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз-мат. наук: спец.: 01.01.06 – алгебра та теорія чисел / І. М. Працьовита. — Київ, 2010. — 21 с.

31. *Працьовитий М. В.* Геометрія дійсних чисел у їх кодуваннях засобами нескінченного алфавіту як основа топологічних, метричних, фрактальних і ймовірнісних теорій / М. В. Працьовитий // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2013. — № 14. — С. 189–216.

32. *Працьовитий М. В.* Геометрія класичного двійкового зображення дійсних чисел / М. В. Працьовитий. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2012. — 68 с.

33. *Працьовитий М. В.* Геометрія чисел, представлених знакозмінними рядами / М. В. Працьовитий // Наукові записки НПУ імені М.П.Драгоманова. Вип. 2. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998. — С. 159-164.

34. *Працьовитий М. В.* Ніде не монотонні сингулярні функції / М. В. Працьовитий // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2011. — № 12. — С. 24–36.

35. *Працьовитий М. В.* Поліосновне $\tilde{Q}$-представлення і фрактальні математичні об'єкти, з ним пов'язані / М. В. Працьовитий // Фрактальний аналіз та суміжні питання. — Київ: Ін-т математики НАН України; НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998. — № 2. — С. 14–35.
36. *Працьовитий М. В.* Про означення фрактала та фрактальний підхід в дослідженнях розподілів ймовірностей / М. В. Працьовитий // Фрактальний аналіз та суміжні питання. — Київ: ІМ НАН України; НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998. — № 1. — С. 5–26.
37. *Працевитый Н. В.* Случайные величины с независимыми Q_2-символами / Н. В. Працевитый // Асимптотические методы в исследовании стохастических моделей. — К.: Ин-т математики АН УССР. — 1987. — С. 92–102.
38. *Працьовитий М. В.* Системи числення зі змінною основою та змінним алфавітом (або розвинення чисел в ряди Кантора) / М. В. Працьовитий // Студентські фізико-математичні етюди. — К.: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2009. — № 8. — С. 6–18.
39. *Працьовитий М. В.* Структура досконалих обмежених множин і сингулярних розподілів в R_n / М. В. Працьовитий // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2009. — № 10. — С. 179–190.
40. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів / М. В. Працьовитий. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.
41. *Працьовитий М. В.* Про міру Лебега деяких множин чисел, визначених властивостями їх розкладу в ряд Остроградського / М. В. Працьовитий, О. М. Барановський // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2004. — № 5. — С. 217-227.

42. *Працьовитий М. В.* Перетворення і функції, які зберігають хвости E-зображення чисел / М. В. Працьовитий, О. М. Барановський, Ю. Г. Кондратьєв. — Рукопис, 2015 р.
43. *Працьовитий М. В.* Одна сім'я неперервних ніде не монотонних функцій з фрактальними властивостями / М.В. Працьовитий, Н.А. Василенко // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2013. — № 14. — С. 176–188.
44. *Працьовитий М. В.* Ряди Енгеля та їх застосування / М. В. Працьовитий, Б. І. Гетьман // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2006. — № 7. — С. 105–116.
45. *Працьовитий М. В.* Геометрія і основи метричної теорії зображення дійсних чисел рядами Сільвестера / М. В. Працьовитий, М. В. Задніпряний // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2011. — № 12. — С. 65–73.
46. *Працьовитий М. В.* Лінійні фрактали типу Безиковича-Егглстона / М. В. Працьовитий, С. О. Климчук // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2012. — № 13. — С. 80–93.
47. *Працьовитий М.В.* Чистота цифри у зображенні числа і його асимптотичне середнє значення цифри / М.В. Працьовитий, С.О. Климчук, О.П. Макарчук // Укр. мат. журн. — 2014. — Том 66, № 3. — С. 302–310.
48. *Працьовитий М. В.* Про один клас сингулярних функцій, що містить класичну функцію Мінковського / М. В. Працьовитий, А. В. Калашніков, В. К. Безбородов // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2010. — № 11. — С. 207–213.

49. *Працьовитий М.В.* Властивості випадкових величин, заданих розподілами елементів свого $\tilde{Q}_\infty$-зображення / М.В. Працьовитий, О.Л. Лещинський // Теор. ймовір. та мат. стат. — 1997. — № 57. — С. 134–139.

50. *Працьовитий М. В.* Диференціальні і фрактальні властивості одного класу самоафінних функцій / М. В. Працьовитий, О. Б. Панасенко // Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. — 2009. — № 70. — С. 128–139.

51. *Працьовитий М.В.* Сингулярні немонотонні функції, визначені в термінах Q_s^*-зображення аргумента / М.В. Працьовитий, О.В. Свинчук // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2013. — № 15. — С. 144–155.

52. *Працьовитий М. В.* Перетворення простору R^1, що зберігають самоподібну фрактальну розмірність / М. В. Працьовитий, С. А. Сотникова // Труды ИПММ НАН Украины. — Т.13. — Донецк: Цифровая типография, 2006. — С. 142–147.

53. *Працьовитий М.В.* Група перетворень простору, які зберігають фрактальну ентропійну розмірність / М.В. Працьовитий, С.А. Сотникова // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2006. — № 7. — С. 218–229.

54. *Працьовитий М. В.* Основи метричної теорії зображення дійсних чисел знакозмінними рядами Люрота та найпростіші застосування / М. В. Працьовитий, Ю. В. Хворостіна // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. — К.: НПУ імені М.П.Драгоманова. — 2010. — № 11. — С. 102–118.

55. *Ралко Ю. В.* Зображення чисел рядами Кантора та деякі його застосування / Ю. В. Ралко // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. — К.: НПУ імені М.П.Драгоманова. — 2009. — № 10. — С. 132–140.

56. *Турбин А. Ф.* Фрактальные множества, функции, распределения / А. Ф. Турбин, Н. В. Працевитый. — К.: Наук. думка, 1992. — 208 с.
57. *Федорчук В. В.* Общая топология. Основные конструкции: Учеб. пособие / В. В. Федорчук, В. В. Филиппов. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 336 с.
58. *Хворостина Ю. В.* Розподіли випадкових величин з фрактальними властивостями, пов'язані зі знакозмінними рядами Люрота: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз-мат. наук: спец.: 01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика / Ю. В. Хворостина. — Київ, 2015. — 20 с.
59. *Хинчин А.Я.* Цепные дроби / А.Я. Хинчин. — М.: Наука, 1978. — 116 с.
60. *Albeverio S.* On one class of function related to Osrogradsky series and containing singular and nowhere monotonic functions / S. Albeverio, O. Baranovskyi, Yu. Kondratiev, V. Pratsiovytyi // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2013. — № 15. — С. 35–55.
61. *Albeverio S.* Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension / S. Albeverio, M. Pratsiovytyi, G. Torbin // Ergod.Th. and Dynam. Sys. — 2004. — Vol. 24. — Pp. 1–16.
62. *Alkauskas G.* An asymptotic formula for the moments of the Minkowski question mark function in the interval $[0, 1]$ / G. Alkauskas // Lithuanian Mathematical Journal. — 2008. — Vol. 48, no. 4. — Pp. 357–367.
63. *Alkauskas G.* Generating and zeta functions, structure, spectral and analytic properties of the moments of Minkowski question mark function / G. Alkauskas // Involve. — 2009. — Vol. 2, no. 2. — Pp. 121–159.
64. *Alkauskas G.* The Minkowski $?(x)$ function and Salem's problem / G. Alkauskas // C. R. Acad. Sci. Paris. — 2012. — Vol. 350, no. 3-4. — Pp. 137–140.

65. *Alkauskas G.* The Minkowski question mark function: explicit series for the dyadic period function and moments / G. Alkauskas // Mathematics of Computation. — 2010. — Vol. 79, no. 269. — Pp. 383–418.
66. *Alkauskas G.* The moments of Minkowski question mark function: the dyadic period function / G. Alkauskas // Glasd. Math. J. — 2010. — Vol. 52, no. 1. — Pp. 41–64.
67. *Alkauskas G.* Semi–regular continued fractions and an exact formula for the moments of the Minkowski question mark function / G. Alkauskas // Ramanujan J. — 2011. — Vol. 25, no. 3. — Pp. 359–367.
68. *Beaver O.* A two-dimensional Minkowski $?(x)$ function / O. Beaver, T. Garrity // Number Theory. — 2004. — no. 107. — Pp. 105–134.
69. *Cantor G.* Über die einfachen Zahlensysteme / G. Cantor // Z. Math. Phys. — 1869. — Bd. 14. — Pp. 121–128.
70. *Dedekind R.* Stetigkeit und irrationale Zahlen / R. Dedekind. — Vieweg: Braunschweig (originally published as a separate booklet). — Vol. 3. — Pp. 315–334.
71. *Denjoy A.* Sur une fonction de Minkowski / A. Denjoy // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1932. — Vol. 194. — Pp. 44–46.
72. *Denjoy A.* Sur une fonction réelle de Minkowski / A. Denjoy // J. Math. Pures Appl. — 1938. — Vol. 17. — Pp. 105–151.
73. *Dushistova A. A.* Differentiability of the Minkowski question mark function / A. A. Dushistova, I. D. Kan, N. G. Moshchevitin // J. Math. Anal. Appl. — 2013. — Vol. 401, no. 2. — Pp. 774–794.
74. *Dushistova A. A.* On the derivative of the Minkowski question mark function $?(x)$ / A. A. Dushistova, N. G. Moshchevitin // Math. Sci. (N.Y.). — 2012. — Vol. 182, no. 4. — Pp. 463–471.
75. *Falconer K. J.* Fractal geometry: mathematical foundations and applications / K. J. Falconer. — New York: J. Wiley and Sons, 1990. — 400 p.

76. *Galambos J.* Representations of real numbers by infinite series / J. Galambos. — Berlin: Springer-Verlag, 1976. — 146 p.

77. *Hutchinson J.E.* On the relationship betwen Hausdorff measure and a measure of a Girdi, Colombini and Piccinini / J. E. Hutchinson // Boll. Unione mat. ital. — 1981. — 18, № 2. — Pp. 619–628.

78. *Hutchinson J.E.* Fractals and self similarity / J. E. Hutchinson // Indiana Univ. Math. J. — 1981. — 30. — Pp. 713–747.

79. *Kalpazidou S.* Lüroth-type alternating series representations for real numbers / S. Kalpazidou, A. Knopfmacher, J. Knopfmacher // Acta Arith. — 1990. — Vol. 55. — P. 311–322.

80. *Kalpazidou S.* Metric properties of alternating Lüroth series / S. Kalpazidou, A. Knopfmacher, J. Knopfmacher // Portugal. Math. — 1991. — Vol. 48, no. 3. — P. 319–325.

81. *Kessebohmer M.* Fractal analysis for sets of nondifferentiability of Minkowski's question mark function / M. Kessebohmer, B. Stratmann // Number Theory. — 2008. — Vol. 128, no. 9. — Pp. 2663–2686.

82. *Kinney J. R.* Note on a singular function of Minkowski / J. R. Kinney // Proc. Amer. Math. Soc. — 1960. — Vol. 11, no. 5. — Pp. 788–794.

83. *Lamberger M.* On a family of singular measures related to Minkowski's $?(x)$ function / M. Lamberger // Indag. Math. — 2006. — Vol. 17, no. 1. — Pp. 45–63.

84. *Lapidus M. L.* Fractal geometry and number theory: complex dimensions of fractal strings and zeros of zeta functions / M. L. Lapidus, M. van Frankenhuysen. — Birkhäuser Boston, 2000. — 263 p.

85. *Massopust P. R.* Fractal functions, fractal surfaces, and wavelets / P. R. Massopust. — Academic Press; 1 edition (January 18, 1995). — 383 p.

86. *Minkowski H.* Geometrie der Zahlen / H. Minkowski. — Leipzig: Teubner, 1896 (Reprinted: Leipzig: Teubner, 1910, 1925; Chelsea, 1953; New York: Johnson Reprint Corporation, 1968). — 256 c.

87. *Minkowski H.* Gesammelte Abhandlungen / H. Minkowski. — Berlin, 1911. — vol 2. — Pp. 50–51.

88. *Okamoto H.* A geometric construction of continuous, strictly increasing singular functions / H. Okamoto, M. Wunsch // Proc. Japan Acad. — 2007. — Vol. 83, Ser. A. — Pp. 114–118.

89. *Oliynyk B.* The diagonal limits of Hamming spaces / B. Oliynyk // Algebra Discrete Math.— 2013. — Vol. 15, no. 2. — P. 229–236.

90. *Oliynyk B.* Isometry groups of non standard metric products / B. Oliynyk // Cent. Eur. J. Math. — 2013. — Vol. 11, no. 2. — P. 264–273.

91. *Oliynyk B. V.* Imprimitivity systems and lattices of normal subgroups in D-hyperoctahedral groups / B.V. Oliynyk and V.I. Sushchanski // Siberian Mathematical Journal. — 2014. — Vol. 55, No. 1. — P. 132–141.

92. *Panti G.* Multidimensional continued fractions and a Minkowski function / G. Panti // Monatsh. Math. — 2008. — Vol. 154, no. 3. — Pp. 247–264.

93. *Paradis J.* A new light on Minkowski's $?(x)$ function / J. Paradis, P. Viader, L. Bibiloni // J. Number. Theory. — 1998. — Vol. 73., no. 2 — Pp. 212–227.

94. *Paradis J.* The derivative of Minkowski's $?(x)$ function / J. Paradis, P. Viader, L. Bibiloni // J.Math.Anal.Appl. — 2001. — Vol. 253. — Pp. 107–125.

95. *Pratsiovytyi M.* Topological and metric properties of distributions of random variables represented by the alternating Luroth series with independent elements / M. Pratsiovytyi, Yu. Khvorostina // Random Oper. Stoch. Equ.— 2013. — Vol. 21, no. 4. — Pp. 385–401.

96. *Pratsiovytyi M. V.* Probability measures on fractal curves (probability distributions on the Vicsek fractal) / M. V. Pratsiovytyi, V. M. Kovalenko // Random Oper. Stoch. Equ. — 2015. — Vol. 23 (3). — Pp. 161–168.

97. *Pratsiovytyi M.* Fractal properties of functions defined in terms of Q-representation / M. Pratsiovytyi, N. Vasylenko // International Journal of Math. Analysis. — 2013. — Vol. 7, no. 61-67. — Pp. 3155–3169.

98. *Pratsiovytyi M.* Topological and metric properties of distributions of random variables represented by the alternating Luroth series with independent elements / M. Pratsiovytyi, Yu. Khvorostina // Random Oper. Stoch. Equ. — 2013. — Vol. 21, no. 4. — Pp. 385–401.
99. *Ramharter G.* On Minkowski's singular function / G. Ramharter // Proc. of the AMS. — 1987. — Vol. 99, no. 3. — Pp. 596–597.
100. *Ryde F.* On the relation between two Minkowski funktion / F. Ryde // Number Theory. — 1983. — Vol. 77. — Pp. 47–51.
101. *Salem R.* On some singular monotonic function which are strictly increasing / R. Salem // Trans. Amer. Math. Soc. — 1943. — 53. — Pp. 427–439.
102. *Schweiger F.* Ergodic theory of fibred systems and metric number theory. Oxford Science Publications / F. Schweiger — New York: The Clarendon Press, Oxford University Press, 1995. — 295 p.
103. *Tichy R. F.* An extension of Minkowski's singular function / R. F. Tichy, J. Uitz // Appl. Math. Lett. — 1995. — Vol. 8, no. 5. — Pp. 39–46.
104. *Varbanets P.* On the number of primitive integer points on elliptic cones / P. Varbanets // Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. — 2006. — 26. — Pp. 146–160.
105. *Varbanets P.* On divisor function over $Z[i]$ / P. Varbanets // Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp. — 2007. — 27. — Pp. 75–90.
106. *Weierstrass K.* Mathematische werke von Karl Weierstrass. Herausgegeben unter mitwirkung einer von der Königlich preussischen akademie der wissenschaften eingesetzten commission. Erster band. Abhandlungen I. — Berlin: Mayer and Müller, 1894. — 360 p.
107. *Zhykharyeva Yu.* Expansions of numbers in positive Luroth series and their applications to metric, probabilistic and fractal theories of numbers / Yu. Zhykharyeva, M. Pratsiovytyi // Algebra and Discrete Mathematics. — 2012. — Vol. 14, no. 1. — Pp. 145–160.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ АВТОРА

1a. *Ісаєва Т. М.* Кодування дійсних чисел з нескінченним алфавітом і основою 2 / М.В. Працьовитий, Т.М. Ісаєва // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. — К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2013. — №15. — С. 6–23.

2a. *Ісаєва Т. М.* Про деякі застосування $\Delta^{\sharp}$-зображення дійсних чисел / М. В. Працьовитий, Т. М. Ісаєва // Буковинський математичний журнал. — 2014. — Т.2, №2-3. — С. 187–197.

3a. *Ісаєва Т. М.* Δ^{μ}-зображення як узагальнення $\Delta^{\sharp}$-зображення і основа нової метричної теорії дійсних чисел / Т. М. Ісаєва, М. В. Працьовитий // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2014. — №16. — С. 164–185.

4a. *Ісаєва Т.М.* Геометрія та основи метричної теорії зліченно-символьного зображення дійсних чисел одиничного півінтервала / Т.М. Ісаєва, М.В. Працьовитий // Наукові записки НаУКМА. Фізико-математичні науки. — 2015. — Т. 165. — С. 11–18.

5a. *Ісаєва Т. М.* Фрактальні функції, пов'язані з Δ^{μ}-зображенням чисел / М. В. Працьовитий, Т. М. Ісаєва // Буковинський математичний журнал. — 2015.— Т.3, №3-4. — С. 156-165.

6a. *Isaieva T.* Transformations of $(0,1]$ preserving tails of Δ^{μ}-representation of numbers / M. Pratsiovytyi, T. Isaieva // Algebra and Discrete Mathematics. — 2016. — Vol. 22, no. 1. — Pp. 102–115.

7a. *Ісаєва Т. М.* $\Delta^{\sharp}$-зображення як частинний випадок $\overset{\leftrightarrow}{Q}_{\infty}$ / М. В. Працьовитий, Т. М. Ісаєва. — Міжнародна математична конференція "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки" до 100-річчя від дня народження члена-кореспондента НАН України Г.М. Положого, 23–24 квітня 2014 р., м. Київ, Україна: Матер. конф. — С. 106.

8а. *Ісаєва Т. М.* Одна однопараметрична сім'я систем кодування дійсних чисел з нескінченним алфавітом / М. В. Працьовитий, Т. М. Ісаєва. — П'ятнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 15–17 травня, 2014 р., Київ: Мат. конф. Т. 2. Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз. — К.: НТУУ "КПІ", 2014. — С. 154.

9а. *Ісаєва Т.М.* Про деякі застосування $\Delta^{\sharp}$-зображення дійсних чисел / М.В. Працьовитий, Т.М. Ісаєва. — IV Міжнар. Ганська конф., присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана, 30 червня – 5 липня 2014: Тези доп. — ЧНУ ім. Ю. Федьковича, 2014. — С. 166–167.

10а. *Isaieva T. M.* Spectral and fractal properties of singular probability distribution functions of Minkowski type / M. V. Pratsiovytyi, T. M. Isaieva. — International conference "Probability, Reliability And Stochastic Optimization", April 7–10, 2015, Kyiv, Ukraine: Conf. materials. — P. 22.

11а. *Ісаєва Т. М.* Основи метричної теорії дійсних чисел у їх Δ^{λ}-зображенні / Т. М. Ісаєва, М. В. Працьовитий. — IV всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики, 23–25 квітня 2015, м. Київ, Україна: Тези доповідей. — К.: НТУУ "КПІ", 2015. — С. 39–40.

12а. *Ісаєва Т. М.* Умови нуль-мірності та аномальної фракальності компактів, визначених в термінах Δ^{λ}-зображення дійсних чисел / Т. М. Ісаєва. — International Conference of Young Mathematicians, June 3–6, 2015, Kyiv, Ukraine. Abstracts. — Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2015. — P. 35.

13а. *Ісаєва Т.М.* Нормальні властивості дійсних чисел у їх Δ^{μ}-зображенні / Т.М. Ісаєва. — Матеріали Міжнародної науково-методичної конференції "Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі", 25–26 червня 2015 р. — К.: НУХТ, 2015. — С. 88–90.

14a. *Ісаєва Т. М.* Фрактальні функції, пов'язані з Δ^μ-зображенням / М. В. Працьовитий, Т. М. Ісаєва. — Наукова конференція, присвячена 100-річчю від дня народження К. Фішмана та М. Фаге, 1–4 липня 2015 р.: Тез. доп. — ЧНУ ім. Ю. Федьковича, 2015. — С. 101–102.

15a. *Ісаєва Т. М.* Простір Δ^μ-зображень дійсних чисел з нескінченним алфавітом та алгебраїчні структури в ньому / М. В. Працьовитий, Т. М. Ісаєва. — X Міжнародна алгебраїчна конференція, присвячена 70-річчю Ю.А. Дрозда. 20–27 серпня 2015 р., Одеса, Україна. Тези доповідей. — Одеса: ТЕС, 2015. — С. 141.

16a. *Ісаєва Т. М.* Група перетворень $(0,1]$, які зберігають хвости Δ^μ-зображення чисел / Т. М. Ісаєва, М. В. Працьовитий. — П'ята всеукр. конф. молодих вчених з математики та фізики, 25–26 квітня 2016, м. Київ: Тези доп. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2016. — С. 48.

17a. *Ісаєва Т.М.* Одна система кодування дійсних чисел, залежна від одного параметра, та її застосування / М.В. Працьовитий, Т.М. Ісаєва // IV Міжнар. наук.-практ. конф. "Відкриті еволюціонуючі системи", 20–21 травня 2016, Ніжин: Збірник праць: Ч. 2. — Ніжин: ВНЗ ВП НУБіП України НАІ. — 2017. — С. 57–63.

18a. *Ісаєва Т. М.* Δ^μ-зображення у задачах ймовірнісної теорії чисел / Т. М. Ісаєва, М. В. Працьовитий. — Всеукраїнська науково-методична конференція "Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі", 7–8 жовтня 2016, м. Київ, Україна: Збірник тез. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2016. — С. 45.

19a. *Ісаєва Т. М.* Метричний простір Δ^μ-зображення чисел і групи неперервних перетворень $(0;1]$ / М. В. Працьовитий, Т. М. Ісаєва. — International mathematical conference "Groups and Actions: Geometry and Dynamics" dedicated to the memory of professor V. Sushchanskyy, December 19–22, 2016, Kyiv, Ukraine. — P. 67.