НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ТРОЦЕНКО Юрій Володимирович

УДК 532:539.3

РОЗВИТОК МЕТОДІВ АНАЛІТИЧНОЇ МЕХАНІКИ В ЗАДАЧАХ ПРО КОЛИВАННЯ БАГАТОКОМПОНЕНТНИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

01.02.01 – теоретична механіка

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ – 2017

Дисертацією є рукопис
Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий консультант:	доктор фізико-математичних наук, професор, академік НАН України **Луковський Іван Олександрович** Інститут математики НАН України, завідувач відділу математичних проблем механіки та теорії керування
Офіційні опоненти:	доктор фізико-математичних наук, професор **Кононов Юрій Микитович** Донецький національний університет імені Василя Стуса (м. Вінниця), професор кафедри прикладної механіки і комп'ютерних технологій
	доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник **Щербак Володимир Федорович** Інститут прикладної математики і механіки НАН України (м. Слов’янськ), заступник директора з наукової роботи
	доктор фізико-математичних наук, професор **Янчевський Ігор Владиславович** Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», професор кафедри теоретичної механіки

Захист відбудеться «27» червня 2017 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.02 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ-4, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий «26» травня 2017 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Г.П. Пелюх

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Значна кількість сучасних реальних механічних конструкцій являються багатокомпонентними системами, які містять в собі великі маси рідини та приєднані різним чином тверді або пружні тіла скінчених розмірів. Найбільш типовими об’єктами такого роду є ракети-носії, космічні апарати з рідинними двигунами та літаки. Також такі конструкції досить широко представлені у кораблебудуванні та інших галузях промислового будівництва.

При дослідженні динамічної поведінки таких механічних систем доводиться долати значні труднощі, які полягають в необхідності сумісного описання руху декількох істотно різних об’єктів механіки – абсолютно твердого тіла, твердого – деформівного тіла та рідини. Дослідження таких багатокомпонентних механічних систем, як об’єктів аналітичної механіки, що знаходяться під дією нестаціонарного динамічного навантаження зводиться до розв’язування досить складних початково-граничних задач в частинних похідних. Побудова розв’язків таких задач, як правило, базується на зведенні їх до розв’язування систем звичайних диференціальних рівнянь відносно узагальнених координат, що характеризують збурений рух розглядуваних механічних систем. Для ефективної реалізації цього підходу необхідно знати власні форми коливань відповідних підсистем конструкції. Тому визначення резонансних частот і форм коливань механічної системи є першочерговою задачею в загальному комплексі дослідження її динамічної поведінки. Оскільки ці задачі є базовими, то при побудові наближених методів їх розв’язування перевага надається методам, які дають аналітичну форму розв’язку та забезпечують гарантовану точність обчислювального процесу.

Особливе місце займають задачі про коливання довільних оболонок обертання з приєднаними до них абсолютно твердими тілами. В ряді випадків розмірами тіла можна знехтувати і вважати його приєднаною масою.

До числа перших робіт, в яких досліджувалися поздовжні та крутильні коливання циліндричної оболонки із зосередженими масами на її торцях належать роботи В.Е. Бреславського. Теоретичному дослідженню коливань циліндричної оболонки з зосередженими масами, що приєднані до поверхні оболонки присвячені роботи І.Я. Аміро та В.Г. Паламарчука. Дослідження власних коливань попередньо-напруженої безмоментної оболонки із гіперпружного матеріалу з приєднаним дископодібним тілом наведено в роботах В.А. Троценка та В.С. Кладиноги. При певних геометричних параметрах оболонки з твердим тілом її коливання можуть бути описані за допомогою спрощених моделей, які базуються на використанні розрахункової балкової схеми для оболонки. Такі моделі потребують встановлення меж їх застосування Із сказаного вище можна зробити висновок, що задачі про коливання оболонок з приєднаними до їх торців твердих тіл відносяться до числа малодосліджених задач.

Система диференціальних рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами, що описує вільні коливання тонкої пружної оболонки обертання має одну із суттєвих особливостей, що пов'язана з наявністю малого параметра при старшій похідній, який обумовлений тонкостінністю оболонки. Цей факт є визначальним при виборі існуючих та розробці нових методів інтегрування таких рівнянь.

Традиційні методи розв'язування крайових задач (апроксимація операторів різницевими співвідношеннями, методи типу Рітца, скінченних елементів та ін.) можуть бути ефективно використані лише при середніх значеннях параметра при старшій похідній і виявляються непридатними при його малих значеннях. Це пов'язано з наявністю вузьких примежових зон, у яких розв'язки мають великі градієнти. Для апроксимації таких розв'язків доводиться зменшувати крок дискретизації, або брати велику кількість членів в розкладах, що призводить до втрати стійкості обчислювального процесу. Як правило, при розв'язуванні сингулярно збурених задач існує така область малого параметра, де асимптотичні методи ще не дають необхідної точності розв'язку задачі (необхідно брати велику кількість наближень), а традиційні методи вже не можуть бути використані.

У зв'язку з цим виникає проблема розробки таких методів розв'язування граничних задач для рівнянь з параметром при старшій похідній, які мали б однакову швидкість збіжності, як при малих, так і при середніх його значеннях. Такі методи розв'язування задач з примежовими зонами в літературі отримали назву рівномірних методів по параметру. Розробці різницевих схем, що збігаються рівномірно по параметру присвячені роботи О.А. Самарського, М.М. Яненко, В.Л. Макарова, Є. Дулана, Дж. Міллєра, У. Шилдерса та багатьох інших авторів. Використання асимптотичних методів стосовно спектральних задач теорії оболонок викладено в монографії О.Л. Гольденвейзера, В.Б. Лідського і П.Є. Товстіка. Широке застосування для розв'язання одномірних задач теорії оболонок отримав чисельний метод, який базується на зведенні вихідної крайової задачі до розв'язування послідовності задач Коші з дискретною ортогоналізацією розв'язків по С.К. Годунову. Однак цей чисельний метод не є рівномірно збіжним по параметру.

Застосування аналітичних методів типу Рітца до розв'язування задач теорії оболонок істотно ускладнено у зв'язку з побудовою таких систем базисних функцій, які враховували б наявність в точних розв'язках високих градієнтів у вузьких зонах граничних точок задачі.

На практиці часто зустрічаються крайові задачі для рівнянь з розривними коефіцієнтами, розривними граничними умовами або навантаженнями. До числа таких задач відносяться задачі про коливання багатокомпонентних пружних тіл і оболонок, контактні задачі, задачі про коливання рідини у частково заповнених пружних посудинах, а також багато інших задач механіки суцільного середовища. Наближені розв’язки таких задач в ряді випадків можуть бути побудовані шляхом розбиття області визначення шуканих функцій на окремі підобласті, вводячи на суміжних границях цих підобластей відповідні умови спряження. У зв’язку з цим розробка методів розв’язування задач спряження є актуальною задачею як в теоретичному, так і в прикладному значенні.

Якщо підобласті мають канонічну форму, то за допомогою методу Фур’є вихідну задачу можна звести до розв’язування нескінченної системи алгебраїчних рівнянь (Н.Х. Арутюнян, Б.Л. Абрамян). При розв’язуванні задач спряження може бути використаний метод Шварца. Розробці алгоритмів розв’язування задач спряження на основі методу скінченних елементів в літературі приділяється значна увага. Серед цих досліджень можна виділити роботи Я.М. Григоренка, С.С. Кокошкіна, І.В. Сергієнка, В.В. Скопецького, В.С. Дейнеки, Н.П. Абовського, Л.О. Розіна, В.М. Паймушина, L.K. Chieton, P. Seshayer, F. Collino та багатьох інших авторів. Ці розв’язки мають багатовимірну дискретну структуру і для їх застосування необхідно залучати потужні обчислювальні комплекси. Отримання розв’язків задач спряження в аналітичній формі можливе при застосуванні методу Рітца. Однак цей метод не отримав належного розвитку у зв’язку зі складністю виконання умов спряження на суміжних границях підобластей. Тому розробка варіаційного методу для розв’язування задач спряження є важливою задачею для механіки суцільних середовищ.

Інтерес до дослідження динаміки пружних конструкцій, що несуть жорсткі резервуари з рідиною викликаний запитами ракетної та космічної техніки, а також підвищеними вимогами до проектування деяких промислових резервуарів в сейсмічно небезпечних районах.

Теорія коливань конструкцій, що несуть резервуари з рідиною розроблена в роботах Б.І. Рабіновича, В.П. Шмакова. Використання еквівалентної маятникової моделі для дослідження коливань розглядуваних механічних систем запропоновано в роботах A.M. Sweedan і S. Dutta, A. Mandal, S.C. Dutta. Експериментальні дані дослідження вимушених коливань стержня, до верхнього торця якого прикріплений резервуар з рідиною при гармонічному збуренні основи стержня наведені в роботі H.A. Dieterman.

При дослідженні руху розглядуваних конструкцій під дією зосереджених та розподілених навантажень базовою задачею є спектральна задача, що описує власні коливання стержнів з приєднаними до них резервуарами з рідиною. Для розв’язування цієї задачі широко використовується чисельний метод (В.П. Шмаков), який вимагає великої кількості обчислень.

Великий внесок в розробку методів розрахунку та експериментальних досліджень коливань рідини в рухомих порожнинах та пружних конструкціях, а також в розв’язання багатьох практично важливих задач внесли Ю.Г. Балакірєв, І.Б. Богоряд, В.В. Болотін, О.М. Гузь, Л.В. Докучаєв, М.Є. Жуковський, М.А. Ільгамов, К.С. Колесніков, В.Д. Кубенко, Р.Є. Лампер, І.О. Луковський, Г.Н. Мікішев, М.М. Моісєєв, Г.С. Наріманов, Б.І. Рабінович, І.М. Рапопорт, В.В. Румянцев, Ф.Л. Черноусько, Ю.Ю. Швейко, Ф.М. Шклярчук, В.П. Шмаков, H.N. Abramson, D.D. Kana, J.W. Miles та інші.

Крайові задачі гідропружності відносяться до числа досить складних задач математичної фізики, оскільки необхідно сумісно інтегрувати систему диференціальних рівнянь для переміщення оболонки і рівнянь в частинних похідних для потенціалу зміщень рідини. Тим не менш серед публікацій є роботи в яких побудовані точні розв’язки розглядуваних задач (В.Б. Кулешов, Ю.Ю. Швейко, Ф.М. Шклярчук). Особливо слід відмітити роботу В.Б. Кулешова і Ю.Ю. Швейка, в якій у найбільш загальній постановці з урахуванням хвильових рухів рідини побудовано точний розв’язок задачі про власні неосесиметричні коливання кругової циліндричної оболонки, частково заповненої рідиною.

Для оболонок обертання довільного виду розроблено ряд наближених аналітичних методів розв’язування розглядуваних крайових задач гідропружності. Побудова цих розв’язків базується на застосуванні методів Рітца (Р.Є. Лампер, Ф.М. Шклярчук) і Бубнова – Гальоркіна (В.П. Шмаков, Ю.Г. Балакірєв). При їх застосуванні основна проблема полягає у виборі координатних функцій для переміщень оболонки і рідини. Мабуть з цієї причини варіаційні методи розв’язування задач гідропружності не отримали належного розвитку та застосування. При використанні метода Бубнова – Гальоркіна труднощі побудови систем базисних функцій можуть бути подолані шляхом його модифікації, запропонованим В.П. Шмаковим. Слідуючи цим шляхом в роботах В.П. Шмакова, Ю.Г. Балакірєва, В.С. Кобичкіна були запропоновані оригінальні розв’язки для ряду задач гідропружності.

Розвиток чисельних методів розрахунку динамічних характеристик пружних оболонок обертання, частково заповнених рідиною мабуть бере свій початок з робіт В.П. Шмакова, який запропонував алгоритм розрахунку вільних та вимушених коливань пружних оболонок з рідиною. Вихідна задача зводиться до системи інтегро-диференціальних рівнянь за рахунок введення в розгляд допоміжної спектральної задачі з параметром в граничній умові (І.О. Луковський). Сформульована крайова задача зводиться до відповідних задач Коші, розв’язки яких знаходяться чисельним методом. Існує також велика кількість літератури по застосуванню різних варіантів метода скінченних елементів в задачах гідропружності (В.Г. Григорьєв, Л.В. Мокеєв, Olson L.G., Bathe K.J., Alphose Z.) та ін. Розглянуті чисельні методи володіють універсальністю по охвату розв’язуваних задач.

У зв’язку з вище сказаним, проблема розробки аналітичних методів розрахунку коливань довільних оболонок обертання, частково заповнених рідиною з урахуванням хвильових рухів її вільної поверхні є актуальною як з теоретичної, так і з практичної точки зору.

Наведений короткий огляд літературних джерел свідчить про те, що задачі про динамічну поведінку розглядуваних механічних систем відносяться до числа малодосліджених задач і мають науковий і практичний інтерес.

Зв’язок роботи з науковими програмами. Результати дисертаційної роботи отримано при виконанні наукових досліджень згідно з планом відділу динаміки та стійкості багатовимірних систем Інституту математики НАН України на 2003 – 2016 роки в рамках держбюджетної теми № III-13-11 «Розробка і дослідження некласичних математичних моделей динаміки багатовимірних механічних систем типу «тверде тіло – рідина» (номер держ. реєстрації 0111U001031), а також в межах науково-дослідної теми № III-23-12 «Математичні моделі поліагрегатних систем та чисельно-аналітичні методи розв’язування сучасних задач динаміки, стійкості та оптимального керування» (номер держ. реєстрації 0112U001015) за програмою «Розробка математичних моделей та чисельно-аналітичних методів розв’язування сучасних задач фізико-технічних і медико-біологічних наук та інформаційних технологій».

Частина результатів була отримана під час роботи над DFG проектом «Чисельно-аналітичні моделі і методи для дослідження динаміки рідини в резервуарах» (GZ: 436 UKR 113/33/0-4) в університеті Фрідріха Шиллера, Йена (2004 – 2010 р.р.).

Мета і задачі дисертаційної роботи полягають в наступному:

- побудувати математичні моделі руху наступних механічних систем: довільної оболонки обертання з приєднаним до одного з її торців твердим тілом скінчених розмірів; пружних стержнів з підвісними резервуарами з рідиною, що знаходяться під дією зовнішнього;
- розробити аналітичні методи розрахунку частот і форм вільних коливань розглядуваних механічних систем;
- розвинути аналітичні підходи до розв’язування спектральної задачі про коливання довільних оболонок обертання, що частково заповнені рідиною;
- дослідити основні закономірності впливу параметрів зазначених механічних систем на їх частоти і форми власних коливань та встановити межі застосування спрощених постановок розглядуваних задач.

Об’єктом дослідження є багатокомпонентні механічні системи, що включають в себе пружні елементи, та тонкостінні резервуари з рідиною.

Предметом дослідження є спектральні задачі, що описують коливання розглядуваних механічних систем.

Методи дослідження. Побудова математичних моделей механічних систем здійснюється на основі загальної теорії теоретичної механіки, рівнянь руху рідини та тонкостінних оболонок. Загальна ідеологія побудови наближених розв’язків граничних задач базується на поєднанні варіаційних методів та аналітичної теорії диференціальних рівнянь. При цьому враховується наявність розривів у граничних умовах, навантаженнях, та коефіцієнтах рівнянь; наявність у шуканих розв’язках високих градієнтів у вузьких примежових зонах. Врахування цих особливостей задач дозволяє при побудові їх розв’язків уникнути розв’язання алгебраїчних систем великої розмірності, отримувати для розв’язків та їх перших похідних збіжність в рівномірній метриці.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в наступному:

- Сформульована спектральна задача, що описує неосесиметричні коливання довільної оболонки обертання з приєднаним до її торця твердим тілом, та запропоновано підхід до побудови її наближеного розв’язку.
- Розвинуто застосування методу Рітца до розв’язання задач з використанням декомпозиції області визначення шуканих розв’язків. Отримані на цій основі алгоритми забезпечують поточкову збіжність для розв’язків та їх перших похідних, що входять в умови спряження.
- Розроблено енергетичний метод розв’язування сингулярно збуреної спектральної задачі про коливання оболонок обертання. Результати розрахунків свідчать, що запропонований метод відноситься до числа методів з рівномірною збіжністю за малим параметром.
- Запропоновано варіаційний метод визначення власних коливань стержня з підвісним резервуаром, що частково заповнений рідиною. Розв’язані задачі про вимушені коливання розглядуваної механічної системи під дією зовнішніх навантажень та при кінематичному збуренні основи стержня.
- Розвинуто варіаційний метод визначення коливань довільної пружної оболонки обертання, що частково заповнена рідиною. Цей метод базується на застосуванні декомпозиції області визначення для переміщень оболонки та на побудові оберненого оператора для гідродинамічної частини задачі.

Достовірність одержаних в дисертації результатів забезпечується порівнянням отриманих розрахункових даних з існуючими теоретичними та експериментальними даними інших авторів; дослідженням практичної збіжності запропонованих алгоритмів розв’язування задач та контрольованою точністю всіх виконаних обрахунків; перевіркою точності задоволення побудованих розв’язків вихідним рівнянням.

Практичне значення одержаних результатів визначається розробкою ефективних підходів до розв’язування складних та важливих у прикладному відношенні класів задач механіки суцільного середовища. Розвинуті в роботі методи дослідження складають основу підвищення ефективності проектноконструкторських робіт по створенню нових транспортних засобів, які мають в собі приєднані тверді тіла та великі маси рідини.

Апробація роботи. Основні результати роботи доповідались на таких міжнародних конференціях: International Conference, «Dynamic System Modelling and Stability Investigation» (22 – 25 may 2007, Kyiv); Український математичний конгрес (27 – 29 серпня 2009, м. Київ); Міжнародна математична конференція «Боголюбівські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування» (23 – 30 червня 2013, м. Севастополь); XII International Conference «Dynamical system modelling and stability investigation» (27 – 29 May, 2015, Kyiv).

Результати роботи обговорювалися на наступних наукових семінарах: Friedrich-Schiller-Universität Jena, Faculty of Mathematics and Computer Science (Prof. Dr. M. Hermann) (Jena, Germany, 2006, 2008); «Математичні проблеми механіки та обчислювальна математика» при Інституті математики НАН України (керівники – академіки НАН України І.О. Луковський та В.Л. Макаров) (м. Київ, 2006 р.); сумісний семінар «Математичні проблеми механіки та обчислювальна математика» та відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань (Інститут математики НАН України, м. Київ, 2017 р.).

Також результати досліджень обговорювалися на вченій раді Інституту математики НАН України (м. Київ, 2007, 2015 р.р.)

Публікації та особистий внесок здобувача. Зміст дисертаційної роботи викладено в двадцяти трьох наукових працях, що відповідають вимогам щодо публікацій (результатів дисертаційних робіт у фахових наукових виданнях) сім із яких входять до міжнародних наукометричних баз даних Scopus, Thomson Reuters, zbMath і чотирьох тезах доповідей на міжнародних конференціях. В роботах, що опубліковані у співавторстві, особистий внесок автора полягає в виведенні основних рівнянь та співвідношень, чисельна реалізація розроблених алгоритмів. Співавторам належить постановка задач, рекомендації щодо методів їх розв’язування, участь в обговоренні та систематизації отриманих результатів.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається із вступу, шести розділів, висновків і списку використаних джерел. Загальний обсяг дисертації становить 296 сторінок, у тому числі 27 рисунків, 31 таблиць та бібліографічний список із 158 найменувань.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано необхідність проведення досліджень, актуальність обраної теми, визначено наукову новизну та практичну цінність отриманих результатів, надано дані про апробацію та публікацію результатів дисертації.

Перший розділ присвячений аналізу праць за темою дисертаційної роботи, розгляду методів дослідження механічних систем, що вивчаються в роботі, обґрунтуванню вибору найбільш ефективних способів моделювання та методів розв’язання розглядуваних спектральних задач.

Другий розділ дисертаційної роботи присвячений розробці варіаційного методу побудови наближеного розв’язку задачі про власні коливання довільної оболонки обертання з жорстко приєднаним до одного з її торців абсолютно твердим тілом. На основі принципу можливих переміщень отримана інтегро-диференціальна постановка граничної задачі про визначення рівноважного стану оболонки з тілом при дії на них навантаження самого загального вигляду. Сформульована спектральна задача про власні неосесиметричні коливання розглядуваної механічної системи та побудовані її розв’язки з використанням методу Рітца. Розглянута спрощена постановка задачі в припущенні, що для оболонки виконується гіпотеза плоских перерізів. В результаті проведених обчислень зроблені висновки про межі застосування спрощеної схеми розрахунку коливань розглядуваної механічної системи.

Малість параметрів руху та осьова симетрія системи «тіло – оболонка» дозволяє незалежно розглядати коливання в двох взаємно ортогональних площинах симетрії, лінією перетину яких є вісь Oz. В подальшому розглядаються поперечні коливання системи в площині Oxz при умові, що вільний від твердого тіла торець оболонки жорстко закріплений. В цьому випадку компоненти вектора переміщень оболонки можна представити в наступному вигляді:

$$u = e^{i\omega t}U_n(s)\cos n\varphi, \quad v = e^{i\omega t}V_n(s)\sin n\varphi, \quad w = e^{i\omega t}W_n(s)\cos n\varphi, \tag{1}$$

де $n-$ число хвиль в круговому напрямку оболонки, $s-$ довжина дуги меридіана, що відраховується від кінця оболонки, до якого прикріплене тверде тіло.

При цьому показано, що при $n=1$ шукані функції повинні задовольняти граничним умовам

$$\begin{gathered} U_1(0) = u_{01}k_1 - \vartheta_{02}k_2; \quad V_1(0) = -(u_{01} - \vartheta_{02}k_3); \\ W_1(0) = u_{01}k_4 - \vartheta_{02}k_5; \quad \frac{dW_1}{ds}\Big|_{s=0} = u_{01}k_6 - \vartheta_{02}k_7; \\ U_1(l_s) = V_1(l_s) = W_1(l_s) = \frac{dW_1}{ds}\Big|_{s=l_s} = 0, \end{gathered} \tag{2}$$

де

$$k_1 = \cos\theta, \quad k_2 = l_c\cos\theta - \sin\theta, \quad k_3 = l_c, \quad k_4 = \sin\theta,$$

$$k_5 = l_c\sin\theta + \cos\theta, \quad k_6 = \frac{k_1}{R_1}, \quad k_7 = 1 + \frac{k_2}{R_1},$$

ϑ_{02} та $u_{01}-$ кутове та поздовжнє переміщення твердого тіла в площині Oxz, l_s- довжина оболонки, $\theta-$ кут між нормаллю до поверхні оболонки та віссю

Oz при $s=0$, R_1- радіус кривизни меридіана оболонки при $s=0$, l_c- координата центра мас твердого тіла.

У випадку, коли $n>1$ повинні виконуватися умови

$$U_n(0)=V_n(0)=W_n(0)=\frac{dW_n}{ds}\Big|_{s=0}=0,\quad U_n(l_s)=V_n(l_s)=W_n(l_s)=\frac{dW_n}{ds}\Big|_{s=l_s}=0. \quad (3)$$

Оскільки силові граничні умови при $s=0$, які мають досить складний вигляд, є природними граничними умовами для відповідного функціоналу I, то пошук його стаціонарних значень здійснюється на класі функцій, що задовольняють граничним умовам (2) та (3). У зв'язку з цим функції $U_n(s)$, $V_n(s)$ та $W_n(s)$ представляються у вигляді наступних скінчених рядів:

$$U_n(s)=\sum_{j=1}^{N}a_j u_j(s)+\delta_{1n}(u_{01}k_1-\vartheta_{02}k_2)u_0(s);$$

$$V_n(s)=\sum_{j=1}^{N}b_j v_j(s)+\delta_{1n}(u_{01}-\vartheta_{02}k_3)v_0(s);$$

$$W_n(s)=\sum_{j=1}^{N}c_j w_j(s)+\delta_{1n}(u_{01}w_0(s)+\vartheta_{02}\psi_0(s)), \quad (4)$$

де $a_j, b_j, c_j, u_{01}, \vartheta_{02}-$ постійні, що підлягають визначенню. Координатні функції $u_n(s)$, $v_n(s)$ та $w_n(s)$ вибираються у формі

$$u_j(s)=v_j(s)=s(l_s-s)P_j\Big(\frac{2s}{l_s}-1\Big);\quad w_j(s)=s^2(l_s-s)^2P_j\Big(\frac{2s}{l_s}-1\Big),\quad j=1,2,\ldots,N.$$

Тут $P_j(s)-$ поліноми Лежандра. Функції $u_0(s)$, $v_0(s)$, $w_0(s)$ та $\psi_0(s)$ мають вигляд

$$u_0(s)=\frac{l_s-s}{l_s};\quad v_0(s)=-u_0(s);$$

$$w_0(s)=\frac{3k_4+k_6l_s}{l_s^2}(s-l_s)^2+\frac{k_6l_s+2k_4}{l_s^3}(s-l_s)^3;\quad \delta_{in}=\begin{cases}1\ при\ n=1,\\0\ при\ n>1.\end{cases}$$

$$\psi_0(s)=-\frac{3k_5+k_7l_s}{l_s^2}(s-l_s)^2-\frac{k_7l_s+2k_5}{l_s^3}(s-l_s)^3,$$

Наведені ряди (4) задовольняють граничним умовам (2) та (3) при довільних значеннях вектора $\vec{X}=[a_1,a_2,\ldots,a_N,b_1,b_2,\ldots,b_N,c_1,c_2,\ldots,c_N,u_{01},\vartheta_{02}]$. При цьому забезпечується повнота та лінійна незалежність базисних функцій.

Компоненти вектора $\vec{X}$ в подальшому можна визначити з умов стаціонарності функціоналу I. На відміну від традиційного методу Рітца ряди (4) для шуканих функцій не є незалежними, оскільки в них входять параметри руху твердого тіла u_{01} та ϑ_{02}, які підлягають визначенню. У зв’язку з цим побудова таким чином алгебраїчної системи є не простою задачею і призводить до досить громіздких виразів для елементів матриць цієї системи, що робить алгоритм мало придатним до подальшого застосування. Щоб уникнути цих труднощів в роботі пропонується будувати алгебраїчну систему виходячи з варіації функціоналу I, яка представляється в наступному вигляді:

$$\delta I=\int_0^{l_s}\left[\Psi_{11}(U_n,\delta U_n)+\Psi_{12}(V_n,\delta U_n)+\Psi_{13}(W_n,\delta U_n)+\right.$$
$$+\Psi_{12}(\delta V_n,U_n)+\Psi_{22}(V_n,\delta V_n)+\Psi_{23}(W_n,\delta V_n)+$$
$$\left.+\Psi_{13}(\delta W_n,U_n)+\Psi_{23}(\delta W_n,V_n)+\Psi_{33}(W_n,\delta W_n)\right]rds-$$
$$-\omega^2\int_0^{l_s}(U_n\delta U_n+V_n\delta V_n+W_n\delta W_n)rds-\delta_{1n}\omega^2(m_0u_{01}\delta u_{01}+J_{y_c}\vartheta_{02}\delta\vartheta_{02})=0,$$

де m_0 та J_{y_c} – маса та момент інерції твердого тіла відповідно.

Вирази для операторів $\Psi_{ij}(p,q)$ від довільних неперервних функцій p та q наведені як для загальної теорії оболонок (В.В. Новожилов), так і для технічної теорії В.З. Власова. В результаті елементи матриць алгебраїчної системи набувають простого вигляду в які входять інтеграли від операторів Ψ_{ij} з аргументами у вигляді базисних функцій та їх похідних. Все це забезпечує простоту отриманого алгоритму знаходження розв’язків розглядуваної спектральної задачі та зручність його програмної реалізації.

На практиці використовують різного роду спрощені моделі реальної конструкції за рахунок введення в розгляд додаткових гіпотез та припущень. Як правило використовується класична балкова теорія Ейлера – Бернуллі. Природним чином виникає питання про можливість розширення меж застосування спрощеної моделі шляхом врахування деформацій зсуву та інерції повороту поперечного перерізу балки. Розглядається механічна система, яка складається з балки Тимошенка та абсолютно твердого тіла, яке приєднане до одного з її торців. Сформульована спектральна задача, що описує вільні коливання даної системи. З цієї задачі отримується, як частковий випадок, задача про коливання балки Ейлера – Бернуллі з приєднаним твердим тілом. Отримано точний розв’язок для балки Тимошенка. З наведеного аналізу результатів розрахунку частот та форм власних коливань циліндричної оболонки з приєднаним твердим тілом випливає, що балкова теорія, побудована на врахуванні деформацій зсуву та інерції повороту поперечного перерізу має значно ширшу область застосування по відношенню до елементарної теорії балок. Теорія балок Тимошенка дає прийнятні для практичних розрахунків результати при визначенні не лише нижчих, але і вищих форм коливань даної механічної системи.

Третій розділ дисертаційної роботи присвячений розробці аналітичного методу для розв'язування спектральної задачі про коливання довільних оболонок обертання в умовах її сингулярного збурення.

Розглядається тонкостінна пружна оболонка, серединна поверхня якої є поверхнею обертання. У якості криволінійних координат вибирається довжина дуги твірної s та кут в круговому напрямку β. При цьому $s_1 \leqslant s \leqslant s_2$ для незамкнутих в меридіональному напрямку оболонки і $0 \leqslant s \leqslant s_1$ для оболонок у формі купола. Позначимо через R_1 і R_2 головні радіуси кривизни серединної поверхні оболонки, а через $r = r(s)$ відстань від точки меридіану до її осі обертання. Проекції переміщень точок серединної поверхні оболонки на додатні напрямки твірної, паралелі та зовнішньої нормалі позначимо відповідно через u, v та w. Розглядаючи усталені вільні неосесиметричні коливання оболонки з частотою ω і n хвилями в круговому напрямку, переміщення оболонки можна представити у вигляді

$$u = e^{i\omega t} u(s) \cos n\beta, \quad v = e^{i\omega t} v(s) \sin n\beta, \quad w = e^{i\omega t} w(s) \cos n\beta, \quad (n > 0).$$

Позначимо через R_0 будь-який характерний лінійний розмір оболонки. Тоді після переходу до безрозмірних величин, рівняння для визначення вектор-функції $\vec{u} = \{u, v, w\}$ і частоти коливань ω можна представити в наступній формі

$$\mathrm{A}\vec{u} - \lambda \vec{u} = 0, \tag{5}$$

де

$$\mathrm{A} = \mu^4 K + L, \quad \mu^4 = \frac{h^2}{12 R_0^2}, \quad \lambda = \frac{(1-\nu^2)\rho R_0^2 \omega^2}{E},$$

$h-$ товщина оболонки, E, ν і $\rho-$ модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона та густина матеріалу оболонки.

Диференціальні вирази, що входять в елементи матриць L і K для рівнянь Власова мають вигляд

$$L_{11} = -\frac{d}{ds}\frac{1}{r}\frac{d}{ds} r + \frac{1-\nu}{2}\Big(\frac{n^2}{r^2} - \frac{2}{R_1 R_2}\Big), \quad L_{12} = -n \frac{d}{ds}\frac{1}{r} + \frac{1-\nu}{2}\frac{n}{r^2}\frac{d}{ds} r,$$

$$L_{13} = \frac{1-\nu}{R_2}\frac{d}{ds} - \frac{d}{ds}\Big(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\Big), \quad L_{21} = \frac{n}{r^2}\frac{d}{ds} r - \frac{(1-\nu)n}{2}\frac{d}{ds}\frac{1}{r},$$

$$L_{22} = \left(\frac{n^2}{r^2} - \frac{1-\nu}{R_1 R_2}\right) - \frac{(1-\nu)}{2}\frac{d}{ds}\frac{1}{r}\frac{d}{ds}r, \quad L_{23} = \frac{n}{r}\left(\frac{\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

$$L_{31} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\frac{d}{ds}r - \frac{1-\nu}{r}\frac{d}{ds}\frac{r}{R_2}, \quad L_{32} = \frac{n}{r}\left(\frac{\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

$$L_{33} = \frac{1}{R_1^2} + \frac{2\nu}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2}, \quad \Delta_n = \frac{1}{r}\frac{d}{ds}r\frac{d}{ds} - \frac{n^2}{r^2},$$

$$K_{33} = \Delta_n \Delta_n + \frac{1-\nu}{r}\left(\frac{d}{ds}\frac{r}{R_1 R_2}\frac{d}{ds} - \frac{n^2}{r R_1 R_2}\right), \quad K_{ij} = 0 \quad при \quad i + j < 6.$$

Скориставшись принципом можливих переміщень, розв’язок вихідної системи рівнянь (5) при відповідних граничних умовах можна звести до варіаційної задачі відшукання стаціонарних значень деякого функціонала. Розв’язок цієї задачі знаходиться за допомогою метода Рітца, успіх застосування якого істотно залежить від вибору базисних функцій для апроксимації шуканих розв’язків.

Послідовності координатних функцій повинні бути повними та лінійно незалежними. Слід відзначити, що виконання цих вимог є необхідною, але не достатньою умовою для ефективної побудови мінімізуючої послідовності Рітца. При великій кількості координатних функцій необхідно розв’язувати алгебраїчні системи великої розмірності. При цьому похибки округлення починають відігравати суттєву роль з одного боку при обчисленні коефіцієнтів алгебраїчної системи, а з іншого – при розв’язуванні цієї системи рівнянь. Все це призводить до втрати стійкості обчислювального процесу до досягнення граничних значень розв’язків. Таким чином вибір базисних функцій є далеко не тривіальною задачею.

На швидкість збіжності методу Рітца суттєво впливає відносна товщина оболонки. Зменшення її призводить до того, що розглядувана гранична задача переходить у розряд сингулярно збурених спектральних задач. Для таких задач характерно наявність вузьких примежових шарів у яких шукані розв’язки мають великі градієнти. У зв’язку з цим виникає проблема побудови таких базисних функцій, для яких алгоритм знаходження розв’язків вихідної задачі володів би рівномірною збіжністю за параметром. У зв’язку з цим попередньо встановлюється структура розв’язку задачі і характеру його виродження, коли параметр при старшій похідній наближається до нуля. Для встановлення цього факту використовується загальна теорія асимптотичного інтегрування сингулярно збурених задач. Побудова регулярних інтегралів вихідних рівнянь здійснюється за допомогою прямого розкладу їх за малим параметром. При цьому показано, що ці інтеграли є аналітичними функціями і можуть бути представлені у вигляді ряду Тейлора в інтервалі $[s_1, s_2]$.

Наступні інтеграли шукаються у вигляді розвинень, що включають в себе експоненціальний множник. При цьому для цього множника отримані такі вирази:

$$e^{\beta_k(s)}\cos\beta_k(s);\quad e^{\beta_k(s)}\sin\beta_k(s);$$
$$\beta_k(s)=\frac{(-1)^k}{\mu\sqrt{2}}\int_{s_k}^{s}|b_0(t)|^{1/4}\,dt,\quad b_0(t)=\lambda-\frac{1-\nu^2}{R_2^2(t)};\quad (k=1,2). \tag{6}$$

В інтегралах рівнянь вирази (6) множаться на відповідні функції, які можна представити у вигляді розвинень в ряди Тейлора в околі точок $s=s_k$. Таким чином вклад примежових функцій у загальний розв'язок вихідного рівняння суттєвий лише поблизу країв оболонки на відстані $|s-s_k|\quad(k=1,2)$ порядку $O(\mu)$ від краю.

Для тих оболонок обертання, для яких інтеграл, що входить в $\beta_k(s)$ не обчислюється в елементарних функціях, зручно користуватися зображенням примежових функцій у формі Вішика – Люстерника.

Наявність множників (6) в примежових інтегралах свідчить в якійсь мірі про те, що класичні методи розв'язування граничних задач не можуть однаково добре працювати в усій області зміни параметра μ. При малих показниках, експонента обчислюється відомим рядом Тейлора, тоді як при великих показниках вона обчислюється за допомогою апроксимації Паде.

Виходячи з вищесказаного, можна сформулювати основні принципи побудови координатних функцій для розв'язування розглядуваної задачі варіаційним методом.

З урахуванням встановленої формальної структури інтегралів рівнянь (5) загальний розв'язок для функцій $u(s),v(s)$ і $w(s)$ для незамкнених оболонок в меридіональному напрямку, можна зобразити в наступному вигляді:

$$\begin{gathered}f(s)=\sum_{i=0}^{\infty}f_{i,0}s^i+e^{\beta_1(s)}\cos\beta_1(s)\sum_{i=0}^{\infty}f_{i,1}(s-s_1)^i+e^{\beta_1(s)}\sin\beta_1(s)\sum_{i=0}^{\infty}f_{i,2}(s-s_1)^i+\\+e^{\beta_2(s)}\cos\beta_2(s)\sum_{i=0}^{\infty}f_{i,3}(s-s_2)^i+e^{\beta_2(s)}\sin\beta_2(s)\sum_{i=0}^{\infty}f_{i,4}(s-s_2)^i,\quad(k=1,2),\end{gathered}\tag{7}$$

де $f_{i,j}$ – невизначені постійні, а під функцією $f(s)$ будемо розуміти будь-яку з невідомих функцій u,v і w.

Загальний розв'язок (7) необхідно задовольнити головним граничним умовам задачі. Виходячи з цих умов, знаходяться додаткові співвідношення між коефіцієнтами $f_{i,j}$. Після підстановки цих співвідношень в загальний розв’язок (7) і деяких перетворень отримуємо набори базисних функцій для апроксимації шуканих розв’язків.

Під куполоподібними оболонками ($0\leqslant s\leqslant s_1$) будемо розуміти такі оболонки, для яких у вершині існує горизонтальна дотична площина і для радіусів кривизни виконуються співвідношення $(R_1)_{s=0}=(R_2)_{s=0}=R$. Для таких оболонок деякі коефіцієнти рівнянь (5) при $s=0$ мають в знаменнику нулі першого або другого порядку. При чисельному інтегруванні цих рівнянь в літературі є різні рекомендації наближеного характеру, що дозволяють обійти цю складність. Пропонується вважати, що в полюсі оболонки є отвір малого радіуса r_0 з відповідними граничними умовами на його контурі. Такий підхід дозволяє з певною точністю обчислювати частоти коливань оболонки і не дає можливості визначення її напружено-деформованого стану. У зв’язку з цим встановлюється структура фундаментальних інтегралів вихідних рівнянь використовуючи аналітичну теорію диференціальних рівнянь.

Перші регулярні інтеграли рівнянь, які приймають обмежені значення при $s=0$, шукаються у вигляді прямого розвинення розв’язків за параметром μ. При цьому показано, що системи рівнянь для визначення функцій при різних параметрах μ відносяться до класу диференціальних рівнянь з регулярною особливою точкою. Використовуючи аналітичну теорію таких рівнянь, побудовані обмежені при $s=0$ інтеграли вихідних рівнянь. Складаючи лінійну комбінацію цих інтегралів і інтегралів примежового шару при $s=s_1$, загальний розв’язок має наступну формальну структуру

$$\begin{gathered}\left[u,v,w\right]=R\left[u,v,w\right]+\exp^{\beta_0(s)}\cos\beta_0(s)\sum_{i=0}^{\infty}\left[u_{i,1},v_{i,1},w_{i,1}\right](s-s_1)^i+\\+\exp^{\beta_0(s)}\sin\beta_0(s)\sum_{i=0}^{\infty}\left[u_{i,2},v_{i,2},w_{i,2}\right](s-s_1)^i,\quad \beta_0(s)=\frac{\sqrt[4]{\left|b_0(s_1)\right|}}{\mu\sqrt{2}}(s-s_1).\end{gathered}\tag{8}$$

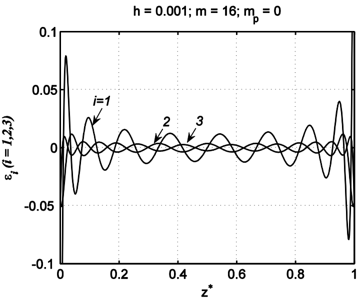
Тут $R\left[u,v,w\right]-$ регулярна частина загального розв’язку в околі точки $s=0$, яка зображується у вигляді

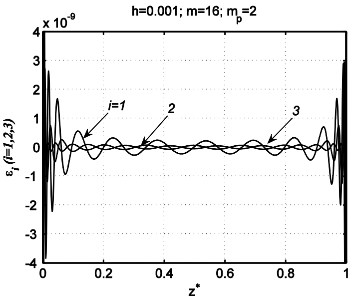
$$\begin{cases}u=s^{n-1}(a_1+a_2s^2+a_3s^4+\ldots),\\ v=s^{n-1}(b_1+b_2s^2+b_3s^4+\ldots),\quad (n>0,\quad b_1=-a_1),\\ w=s^n(c_1+c_2s^2+c_3s^4+\ldots),\end{cases}$$

$$\begin{cases}u=s(a_1+a_2s^2+a_3s^4+\ldots),\\ w=c_1+c_2s^2+c_3s^4+\ldots,\end{cases}\quad (n=0).\tag{9}$$

Асимптотика розв’язків (9) при $s \to 0$ забезпечує скінченність деформацій оболонки в її полюсі. По суті представлення розв’язків (8) включають в себе всі послідовні наближення при асимптотичному інтегруванні вихідних рівнянь. В подальшому невизначені постійні в розкладах (8) знаходяться із головних граничних умов і умов стаціонарності відповідного функціонала. Отриманий при цьому степеневий базис замінюється поліномами Лежандра, абсолютні значення яких не ростуть на відрізку ортогональності зі збільшенням їх порядку. Це дозволяє в значній мірі підвищити стійкість обчислюваного процесу.

Для оцінки ефективності запропонованих алгоритмів розглядуваної спектральної задачі проведено розрахунок частот і форм власних коливань циліндричної, зрізаної конічної та сферичної оболонок. Розрахунки показують, що запропоновані системи базисних функцій забезпечують рівномірну збіжність розв’язків і перших чотирьох похідних в усіх точках інтегрування вихідних рівнянь. Розроблений алгоритм відноситься до числа рівномірних алгоритмів за параметром. Порівняння розрахункових даних за частотами з існуючими їх точними значеннями (Ю.Ю. Швейко) свідчить про їх повне співпадання. Поточкова збіжність розв’язків і їх похідних дозволяє провести перевірку задоволення їх вихідним рівнянням. При цьому виявилося, що побудовані варіаційним методом узагальнені розв’язки задовольняють вихідним рівнянням з точністю до 10^{-9}.





Так на наведених вище рисунках показано поведінку значень лівих частин рівнянь (5) $\varepsilon_i(z^*), (i=1,2,3)$, обчислених на всьому інтервалі їх інтегрування $z^* \in [0,1]$ з використанням в розвиненнях лише регулярної частини базису, та з врахуванням примежових функцій. Результати рисунків показують, що розв’язки, побудовані з використанням тільки регулярного базису задовольняють всі три рівняння з точністю, що не перевищує 0.1. Додавання до регулярного базису двох координатних функцій m_p, локалізованих в околі закріплених торців, призводить до того, що значення ε_i

не перевищують величину близько $4{\cdot}10^{-9}$. При цьому найбільші значення ε_i приймають, як і слід було очікувати, поблизу границь кріплення оболонки.

На прикладі розрахунку частот та форм коливань сферичного купола показано, що запропонований алгоритм дає можливість визначати сили та моменти в усіх точках серединної поверхні оболонки. Це дозволяє використовувати цей алгоритм для аналізу динамічної міцності оболонок.

Четвертий розділ дисертаційної роботи присвячений розробці варіаційного метода побудови наближених розв’язків спектральних задач, поставлених з позиції спряження розв’язків. При цьому розглядаються вільні коливання стержня кусково-неперервної структури та крайова задача для рівнянь в частинних похідних про вільні коливання рідини в резервуарах складної геометрії. Ці задачі мають самостійне прикладне значення.

Розглядається стержень довжиною l, який складається з двох спряжених стержнів з різними фізичними та геометричними характеристиками. Сумістимо вісь Oz з віссю симетрії складеного стержня і покладемо, що спряження стержнів відбувається при $z=\zeta$. У відповідності до лінійної теорії згинні коливання розглядуваного стержня описуються наступними рівняннями:

$$\frac{d^2}{dz^2}\left(EJ\,\frac{d^2w}{dz^2}\right)-\omega^2\rho Sw=0,\ z\in G, \tag{10}$$

де

$$EI=\begin{cases}E^{(1)}J^{(1)},z\in G^{(1)},\\ E^{(2)}J^{(2)},z\in G^{(2)},\end{cases}\quad \rho S=\begin{cases}\rho^{(1)}S^{(1)},z\in G^{(1)},\\ \rho^{(2)}S^{(2)},z\in G^{(2)},\end{cases}\quad w=\begin{cases}w^{(1)},z\in G^{(1)},\\ w^{(2)},z\in G^{(2)},\end{cases}$$

$$G^{(1)}=[0,\zeta],\quad G^{(2)}=[\zeta,l],\quad G=G^{(1)}\cup G^{(2)},$$

$J(z)$ і $S(z)-$ момент інерції та площа поперечного перерізу стержня, $E(z)$ та $\rho(z)-$ модуль пружності та густина матеріалу стержня, ω та $w(z)-$ частота вільних коливань та поперечне переміщення нейтральної лінії стержня.

Вважається, що згинні жорсткості $E^{(i)}J^{(i)}$ та погонні маси $\rho^{(i)}S^{(i)}$ є неперервно-диференційованими функціями в областях $G^{(i)}$ $(i=1,2)$.

Для визначеності вважається, що один торець стержня закріплений, а другий – вільний. Тоді на кінцях відрізка $[0,l]$ повинні виконуватися граничні умови

$$w(0)=\left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=0}=0, \tag{11}$$

$$Q^{(2)}\Big|_{z=l} = \frac{d}{dz}\left(E^{(2)}J^{(2)}\frac{d^2w^{(2)}}{dz^2}\right)\Bigg|_{z=l} = 0, M^{(2)}\Big|_{z=l} = E^{(2)}J^{(2)}\frac{d^2w^{(2)}}{dz^2}\Bigg|_{z=l} = 0. \qquad (12)$$

Крім цих граничних умов у точці $z=\zeta$ повинні виконуватися граничні умови спряження:

$$[w^{(2)} - w^{(1)}]_{z=\zeta} = 0, \quad \left[\frac{dw^{(2)}}{dz} - \frac{dw^{(1)}}{dz}\right]_{z=\zeta} = 0, \qquad (13)$$

$$[Q^{(2)} - Q^{(1)}]_{z=\zeta} = 0, \quad [M^{(2)} - M^{(1)}]_{z=\zeta} = 0. \qquad (14)$$

Похідні другого і більш високого порядку від шуканих розв’язків допускають розриви першого роду в точці $z=\zeta$.

Для побудови розв’язків вводиться у розгляд квадратичний функціонал

$$F_1(w) = \sum_{k=1}^{2}\int_{G^{(k)}}\left[E^{(k)}J^{(k)}\left(\frac{d^2w^{(k)}}{dz^2}\right)^2 - \omega^2\rho^{(k)}S^{(k)}(w^{(k)})^2\right]dG^{(k)}. \qquad (15)$$

Якщо припустити, що на класі допустимих функцій виконуються кінематичні граничні умови (13), то з першої варіації від функціонала (15) випливає, що силові умови спряження (14) будуть природними граничними умовами для функціонала (15). У зв’язку з цим виникає проблема побудови такого функціонала $F(w)$, для якого умови спряження (13) і (14) були б природними граничними умовами.

Для цього скориставшись методом Лагранжа, будується новий функціонал $F_2(w,\alpha_1,\alpha_2)$, що включає в себе невизначені множники Лагранжа α_1 і α_2. Для уникнення штучного підвищення числа невідомих за рахунок цих множників, з умови стаціонарності функціонала F_2 знаходяться явні вирази для множників α_1 і α_2. Отримані вирази дозволяють виключити їх з функціоналу F_2. В результаті отримано функціонал $F(w)$

$$F = F_1(w) - [(Q^{(1)} + Q^{(2)})(w^{(2)} - w^{(1)})]_{z=\zeta} + \left[(M^{(1)} + M^{(2)})\left(\frac{dw^{(2)}}{dz} - \frac{dw^{(1)}}{dz}\right)\right]_{z=\zeta} \qquad (16)$$

Показується, що рівняннями Ейлера для функціонала (16) є рівняння (10). При цьому граничні умови (12) та умови спряження (13) і (14) є природними умовами для функціонала (16).

Визначення стаціонарних значень функціонала (16) здійснюється за допомогою метода Рітца, в якому шукані розв’язки варіюються незалежно від їх визначення в кожній з підобластей. Система координатних функцій для області $G^{(1)}$ повинна бути підкорена граничним умовам (11). В результаті вихідна задача зводиться до розв'язання узагальненої алгебраїчної проблеми.

Аналогічний метод побудови наближеного розв'язку розроблено для випадку двовимірної спектральної задачі. Розглядається задача про вільні коливання ідеальної рідини в резервуарі, що має форму тіла обертання. Вісь Oz декартової системи координат сумістимо з віссю симетрії резервуара. Тоді визначення частот і форм антисиметричних коливань рідини зводиться до розв'язування наступної спектральної задачі в області G меридіонального перерізу резервуара (в циліндричній системі координат):

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\Big)+\frac{\partial}{\partial z}\Big(r\frac{\partial\psi}{\partial z}\Big)-\frac{1}{r}\psi=0,\quad (z,r)\in G,\\ \Big(\frac{\partial\psi}{\partial z}-\varkappa\psi\Big)\Big|_{L_0}=0,\quad \frac{\partial\psi}{\partial\nu}\Big|_{L}=0,\quad \psi(0,z)=0.\end{gathered}\tag{17}$$

Тут L_0 і $L-$ лінії перетину меридіонального перерізу резервуара з вільною поверхнею рідини і змочуваною поверхнею резервуара, $\varkappa-$ частотний параметр.

Однорідна задача (17) еквівалентна варіаційній задачі для функціонала

$$I=\int\limits_G r\Big[\Big(\frac{\partial\psi}{\partial z}\Big)^2+\Big(\frac{\partial\psi}{\partial r}\Big)^2+\frac{1}{r}\psi^2\Big]dG-\varkappa\int\limits_{L_0} r\psi^2 ds \tag{18}$$

Стаціонарні значення функціонала (18) досягаються на власних значеннях і власних функціях задачі (17).

На основі варіаційного формулювання і методу Трефтца раніше було розв'язано широкий клас задач по визначенню частот і форм коливань рідини в осесиметричних резервуарах (І.О. Луковський). Однак для видовжених вздовж осі Oz резервуарів, у яких радіус вільної поверхні рідини набагато менший поздовжнього перерізу резервуара, збіжність метода Трефтца суттєво уповільнюється. Для розглядуваного класу резервуарів розв'язок задачі (17) може бути ефективно побудований, якщо виходити при цьому з позицій задач спряження. Розіб'ємо область G лінією γ на дві підобласті $G^{(1)}$ і $G^{(2)}$. Розв'язки в цих підобластях позначимо через $\psi^{(1)}$ і $\psi^{(2)}$ відповідно. При цьому на лінії γ повинні виконуватись умови спряження

$$\Big(\psi^{(1)}=\psi^{(2)}\Big)\Big|_{\gamma},\quad \Big(\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial\nu^{(1)}}=-\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial\nu^{(2)}}\Big)\Big|_{\gamma},\tag{19}$$

де $\nu^{(1)}$ і $\nu^{(2)}$ – зовнішні нормалі до областей $G^{(1)}$ і $G^{(2)}$.

Для побудови наближеного розв'язку сформульованої спектральної задачі спряження використовується підхід, який вище застосовувався для розв’язування одновимірної задачі. У відповідності з цим узагальнений функціонал $F(\psi^{(1)},\psi^{(2)})$ буде мати вигляд

$$F(\psi^{(1)},\psi^{(2)}) = I + \int\limits_{\gamma} \left(\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\right)\left(\frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} - \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}}\right) r ds.$$

Проводячи міркування у зворотному напрямку, переконуємося, що рівняннями Ейлера для цього функціонала будуть рівняння (17). При цьому граничні умови задачі та умови спряження (19) будуть природними граничними умовами, оскільки вони автоматично виконуються для функцій $\psi^{(k)}$, що доставляють функціоналу F стаціонарні значення. Отримані результати дозволяють будувати наближені розв’язки вихідної задачі на основі методу Трефтца. Запропонований спосіб побудови розв’язку можна суттєво спростити, якщо одна з підобластей є канонічною.

Результати проведених розрахунків свідчать, що запропонований алгоритм розв’язування задач спряження з використанням методу Рітца забезпечує ефективне обчислення нижньої частини спектра розглядуваних задач на власні значення. При цьому алгоритм володіє поточковою збіжністю як для самих розв’язків, так і для похідних, що входять в граничні умови спряження.

Цей алгоритм в наступних розділах роботи використано при побудові розв’язків спектральних задач, що мають важливе прикладне значення.

П’ятий розділ дисертаційної роботи присвячений дослідженню поперечних коливань вертикально розташованого пружного стержня, який має на вільному торці резервуар з рідиною, а також тонкостінного стержня з приєднаним до нього в деякому перерізі резервуара у формі тіла обертання, який частково заповнений ідеальною рідиною.

Розглядається осесиметрична конструкція, що складається з вертикально розташованої пружної оболонки обертання, до однієї з паралелей якої за допомогою шпангоута приєднаний абсолютно жорсткий резервуар, частково заповнений ідеальною нестисливою рідиною. Типовими конструкціями такого роду є корпус рідинної ракети, фюзеляж літака, а також деякі промислові резервуари. Динаміка таких конструкцій розглядається в рамках лінійної теорії пружності і гідродинаміки. При певних геометричних параметрах даної конструкції тонкостінну оболонку в деякому сенсі можна ототожнити з пружним стержнем (розділ 2). Тому в якості розрахункової схеми нами використовується пружний стержень з підвішеним в деякому його перерізі жорстким резервуаром з рідиною. Для визначеності вважається, що нижній торець стержня закріплений, а верхній – вільний. Вважається, що до розглядуваної механічної системи прикладені зовнішні зосереджені та розподілені навантаження.

В подальшому розглядається стержень зі змінними по осі Oz_1 площею поперечного перерізу S, екваторіальним моментом інерції J, модулем пружності E і густиною матеріалу стержня ρ_1.

Виходячи з варіаційного принципу можливих переміщень побудована загальна математична модель динаміки розглядуваної механічної системи, що знаходиться під дією зовнішнього навантаження. Отримані граничні задачі для рівнянь в частинних похідних далі за допомогою метода Бубнова – Гальоркіна приводяться до системи звичайних диференціальних рівнянь з незалежною змінною за часом. Ця система приймає найбільш простий вигляд, якщо у якості базисних функцій при апроксимації шуканих розв'язків взяти власні форми коливань стержня з рухомим резервуаром.

Нехай резервуар прикріплений до стержня в його перерізі $z = \zeta$. Для побудови розв'язків введеної спектральної задачі область $G = [0, l]$ зміни координати z_1 розіб'ємо її на дві підобласті $G^{(1)} = [0, \zeta]$ і $G^{(2)} = [\zeta, l]$. Розв'язки у кожній з цих підобластей позначимо через $\eta^{(1)}(z_1)$ і $\eta^{(2)}(z_1)$ відповідно. Після переходу до безрозмірних величин однорідна гранична задача відносно частоти ω та переміщень $\eta^{(i)}(z_1)$ буде мати вигляд:

$$\Im_1^{(i)}(\eta^{(i)}) = \frac{d^2}{dz_1^2}\Big(E^{(i)} J^{(i)} \frac{d^2\eta^{(i)}}{dz_1^2}\Big) + \frac{d}{dz_1}\Big(N^{(i)} \frac{d\eta^{(i)}}{dz_1}\Big) - \omega^2 \frac{\rho_1^{(i)}}{\rho} DS^{(i)}\eta^{(i)} = 0, z_1 \in G^{(i)},$$

$$M^{(2)}\big|_{z_1=l} = Q_*^{(2)}\big|_{z_1=l} = 0, \quad \Big[Q_*^{(2)} - Q_*^{(1)}\Big]_{z_1=\zeta} = \omega^2 D\Big[m\eta + mz_c \frac{d\eta}{dz_1} + \sum_{n=1}^{n_0} c_n\lambda_n\Big]_{z_1=\zeta},$$

$$\Big[M^{(1)} - M^{(2)}\Big]_{z_1=\zeta} = \omega^2 D\Big[I \frac{d\eta}{dz_1} + mz_c\eta - \sum_{n=1}^{n_0} c_n\lambda_{0n}\Big]_{z_1=\zeta} + Dmz_c \frac{d\eta}{dz_1}\Big|_{z_1=\zeta} + D\sum_{n=1}^{n_0} c_n\lambda_n,$$

$$\Big[\eta^{(1)} = \eta^{(2)} = \eta\Big]_{z_1=\zeta}, \quad \Big[\frac{d\eta^{(1)}}{dz_1} = \frac{d\eta^{(2)}}{dz_1} = \frac{d\eta}{dz_1}\Big]_{z_1=\zeta}, \quad \eta^{(1)}\Big|_{z_1=0} = \frac{d\eta^{(1)}}{dz_1}\Big|_{z_1=0} = 0. \qquad (20)$$

До цих рівнянь слід додати співвідношення, що випливають з динамічної умови на вільній поверхні рідини

$$\mu_n(\sigma_n^2 - \omega^2)c_n + \Big[\omega^2\Big(\lambda_{0n} \frac{d\eta}{dz_1} - \lambda_n\eta\Big) - \lambda_n \frac{d\eta}{dz_1}\Big]_{z_1=\zeta} = 0, \quad (n = 1, 2, \ldots, n_0). \qquad (21)$$

В рівняннях (20) і (21)

$$Q_*^{(i)} = \frac{d}{dz_1}\Big(E^{(i)} J^{(i)} \frac{d^2\eta^{(i)}}{dz_1^2}\Big) + N^{(i)} \frac{d\eta^{(i)}}{dz_1}, \quad M^{(i)} = E^{(i)} J^{(i)} \frac{d^2\eta^{(i)}}{dz_1^2}, \ (i = 1, 2),$$

$\rho -$ густина рідини, $D -$ деякий безрозмірний параметр, $m -$ маса рідини, $z_c -$ координата центра мас рідини на осі Oz, $N^{(i)}(z_1) -$ стискуючі сили. Гідродинамічні коефіцієнти, що входять у формули (21) мають вигляд

$$\lambda_n = \int\limits_{\Sigma} y \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} dS, \; \lambda_{0n} = \int\limits_{\Sigma} \Psi \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} dS, \; I = \int\limits_{\Sigma \cup S_0} \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} dS, \mu_n = \int\limits_{\Sigma} \varphi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} dS.$$

Тут функції φ_n і Ψ визначаються з розв'язання наступних граничних задач:

$$\Delta \varphi_n = 0, \quad (x, y, z) \in Q, \qquad \Delta \Psi = 0, \quad (x, y, z) \in Q,$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} \right|_{S_0} = 0, \quad \left. \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial z} - \sigma_n^2 \varphi_n \right) \right|_{\Sigma} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} \right|_{\Sigma \cup S_0} = y \cos(\nu, z) - z \cos(\nu, y),$$

де $\Delta -$ оператор Лапласа, $S_0 -$ змочувана поверхня рідини, $\nu -$ орт зовнішньої нормалі до поверхні, $\Sigma -$ вільна поверхня рідини, $Oxyz -$ зв'язана з резервуаром декартова система координат, $Q -$ область, що обмежена поверхнями S_0 та Σ. Для випадку, коли масові та жорсткістні характеристики стержня є кусково-сталими функціями, для розв'язування подібної спектральної задачі використовувався чисельний метод початкових параметрів (Б.І. Рабінович, В.П. Шмаков). Оскільки граничні умови спектральної задачі (20) мають в точці $z = \zeta$ розриви першого роду, то для її розв'язання використовується метод Рітца в поєднанні з декомпозицією області визначення шуканого розв'язку. Задача зводиться до відшукання стаціонарних значень узагальненого функціонала, для якого умови спряження є природними граничними умовами. В результаті визначення частот і форм коливань стержня з підвісним резервуаром зведено до розв'язання однорідної алгебраїчної задачі невеликої розмірності.

Окремо також розв'язана задача про коливання пружного стержня з приєднаним до нього на вільному торці резервуаром з рідиною. Оскільки розглядувана задача не має розривних граничних умов, то при її розв'язуванні отримано більш простий алгоритм ніж алгоритм для стержня з підвісним резервуаром. Слід відзначити, що другий алгоритм дозволяє розраховувати і випадок кріплення резервуара до верхнього торця стержня. Це використовувалось для незалежного контролю обчислень за запропонованими схемами. Для резервуара в формі кругового циліндра проаналізована ефективність алгоритмів розв'язування розглядуваних задач та наведено деякі результати розрахунку частот і форм коливань даних механічних систем.

На практиці зустрічаються задачі, коли коливання розглядуваних конструкцій викликаються деяким заданим горизонтальним гармонічним рухом основи стержня. Розв’язування цієї задачі по визначенню амплітуд усталених коливань зведено до розв’язування неоднорідної алгебраїчної системи. Проведено порівняння теоретичних даних з експериментальними даними (H.A. Dieterman). Порівняння амплітудно-частотних характеристик свідчить про їх задовільне співпадіння в області невеликих амплітуд коливань стержня і рідини в резервуарі.

Шостий розділ присвячено розробці наближеного методу розв’язування задачі про коливання оболонок обертання, які частково заповнені ідеальною нестисливою рідиною.

Розглядається тонкостінна пружна оболонка обертання, яка на глибину H заповнена ідеальною рідиною. Вважається, що прискорення поля масових сил $\vec{g}$ паралельне осі симетрії оболонки. При формулюванні даної задачі використовується лінійна теорія оболонок та теорія малих хвильових рухів рідини. В якості ортогональних координат для довільної точки серединної поверхні оболонки обирається довжина дуги меридіану s, що відраховується від деякої початкової паралелі $(s_1 \le s \le s_2)$ або від полюса оболонки $(s_1 = 0)$, і кут β, що визначає положення точки на відповідній паралелі. Проекції переміщення точок серединної поверхні оболонки на додатні напрямки її твірної, паралелі і зовнішньої нормалі позначаються відповідно через u, v та w. Нехай ν, E і h – коефіцієнт Пуассона, модуль пружності матеріалу оболонки та її товщина відповідно.

Збурений рух оболонки з рідиною може бути описаний системою рівнянь в частинних похідних

$$L_{i1}(u) + L_{i2}(v) + L_{i3}(w) = \frac{1-\nu^2}{Eh} Q_i, \; (i = \overline{1,3}), \tag{22}$$

де L_{ij} – відомі диференціальні оператори теорії тонких оболонок.

Компоненти поверхневого навантаження Q_i в напрямку додатного відліку координат s, β і зовнішньої нормалі до поверхні оболонки мають вигляд

$$Q_1 = -\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + X_1, \quad Q_2 = -\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + X_2, \quad Q_3 = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + X_3 + \Delta P. \tag{23}$$

Тут ρ – густина матеріалу оболонки; X_i – компоненти вектора поверхневого навантаження зовнішніх сил.

Динамічний тиск ΔP на оболонку з боку рідини визначається за формулою

$$\Delta P = -\rho_0 \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} d\Sigma \right), \tag{24}$$

де ρ_0 – густина рідини, Σ – незбурена вільна поверхня рідини.

Потенціал зміщень частинок рідини $\chi(z,r,\beta,t)$ визначається з розв'язування наступної крайової задачі

$$\Delta\chi = 0. \quad (z,r,\beta)\in D,$$
$$\left.\frac{\partial\chi}{\partial n}\right|_{S_1} = w(s,\beta,t), \quad \left.\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\chi}{\partial z} + f(t)\right)\right|_{\Sigma} = 0. \tag{25}$$

Тут n – зовнішня нормаль до серединної поверхні оболонки S; Δ – оператор Лапласа; g – модуль вектора $\vec{g}$; S_1 – поверхня оболонки, що змочена рідиною і D – область, що зайнята рідиною.

Рівняння збуреного руху оболонки в безрозмірних величинах можна представити в наступній векторно-матричній формі:

$$L\vec{U} + \vec{f} = \vec{X}. \tag{26}$$

Тут L – матричний оператор, породжений рівняннями (22) і визначений на множині функцій $\vec{U}$, які задовольняють граничним умовам закріплення країв оболонки. Трикомпонентні вектори $\vec{f},\vec{X}$ і $\vec{U}$ мають вигляд

$$\vec{f} = \left\{\ddot{u},\ddot{v},\ddot{w} + a\delta(p)\Big(\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} - \frac{1}{\Sigma}\int\limits_{\Sigma}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}d\Sigma\Big)\right\};\ \vec{X} = \{X_1, X_2, X_3\};\ X_i = \frac{1-\nu^2}{Eh}\tilde{X}_i, \quad i = \overline{1,3};$$

$$\vec{U} = \{u,v,w\}, \ a = \frac{\rho_0 R_0}{\rho h};\ \delta(p) = \begin{cases} 1 \,при \quad p\in S_1 \\ 0 \;\, при \;\, p\notin \mathrm{S}_1 \end{cases}$$

де p – координати довільної точки, що належить серединній поверхні оболонки; R_0 – який-небудь характерний розмір оболонки.

Наведені рівняння разом з відповідними початковими умовами для переміщень оболонки і для хвильових рухів рідини однозначно визначають зв'язані коливання оболонки та рідини.

Досить складну крайову задачу (25), (26) можна спростити шляхом зведення її до нескінченної системи звичайних диференціальних рівнянь.

Аналогічно, як і в динаміці твердого тіла з рідким наповнювачем (Г.С.Наріманов) потенціал зміщень рідини зобразимо у вигляді суми двох гармонічних функцій

$$\chi = \Phi(x,y,z,t) + \Psi(x,y,z,t), \tag{27}$$

де Φ – потенціал зміщень частинок рідини, обумовлений деформацією оболонки, за умови, що вільна поверхня являє собою площину, паралельну поверхні Σ; Ψ – потенціал хвильових рухів рідини.

Функцію Φ визначимо як розв'язок наступної крайової задачі:

$$\Delta\Phi = 0, (x,y,z)\in D; \frac{\partial\Phi}{\partial n}\Big|_{S_1} = w(p,t); \frac{\partial\Phi}{\partial n}\Big|_{\Sigma} = c(t);\ c(t) = -\frac{1}{\Sigma}\int\limits_{S_1} w(p,t)dS. \qquad (28)$$

Приведення вихідних рівнянь з урахуванням відповідних граничних умов до нескінченної системи звичайних диференціальних рівнянь можна здійснити методом Бубнова – Гальоркіна. Для реалізації цього методу необхідно мати у своєму розпорядженні деяку систему лінійно незалежних функцій, що задовольняють граничним умовам задачі і умовам повноти. У зв'язку з цим для апроксимації хвильових рухів рідини вводиться у розгляд спектральна задача з параметром в граничній умові

$$\Delta\varphi_k = 0, \quad \frac{\partial\varphi_k}{\partial n}\Big|_{S_1} = 0, \quad \left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial n} - \varkappa_k\varphi_k\right)\Big|_{\Sigma} = 0, \qquad (29)$$

Крайова задача (29) описує власні коливання рідини в абсолютно жорсткій оболонці. При цьому квадрат частоти σ_k^2 $k-$ї форми коливань зв'язаний з частотним параметром $\varkappa_k$ співвідношенням

$$\sigma_k^2 = \eta\varkappa_k; \quad \eta = \frac{\rho g R_0(1-\nu^2)}{E}. \qquad (30)$$

Далі виберемо базис для апроксимації переміщень оболонки і складової потенціалу зміщень рідини Φ. Сформулюємо допоміжну спектральну задачу, що описує вільні коливання оболонки з рідиною за умови, що хвильові рухи рідини не виникають. Цю задачу можна сформулювати виходячи з рівнянь (26). Для цього в них слід покласти $\vec{X}\equiv 0, \Psi\equiv 0, [u,v,w] = \exp^{i\Omega t}[u,v,w];$ $\Phi = \exp^{i\Omega t}\Phi$ $c(t) = \exp^{i\Omega t}C.$ Тоді з урахуванням введених позначень сформульована задача набуде наступного вигляду:

$$L\vec{U} - \Omega^2 M\vec{U} = 0, \quad M\vec{U} = \left\{u, v, w + a\delta(p)\left(\Phi - \frac{1}{\Sigma}\int\limits_{\Sigma}\Phi d\Sigma\right)\right\}, \qquad (31)$$

$$\Delta\Phi = 0, \quad (x,y,z)\in D, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n}\Big|_{S_1} = w, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big|_{\Sigma} = C. \qquad (32)$$

Можна показати, що оператори L і M є симетричними та додатними. Із загальної теорії спектральних задач випливає, що розглядувана задача має дискретний спектр $0<\Omega_1^2\leqslant\Omega_2^2\leqslant\ldots\leqslant\Omega_n^2,$ причому $\Omega_n^2\to\infty$ при $n\to\infty$. Сукупність відповідних власних функцій $\vec{U}_i$ повна і задовольняє відповідним умовам ортогональності. Тобто власні функції задачі (31), (32) можуть бути використані для зведення вихідних рівнянь до системи звичайних диференціальних рівнянь. При цьому ця система буде мати найбільш простий вигляд.

Зобразимо переміщення поверхні оболонки і потенціал зміщень рідини у вигляді наступних розвинень

$$\vec{U}(p,t)=\sum_{j=1}^{\infty}s_j(t)\vec{U}_j(p);\quad \Phi=\sum_{j=1}^{\infty}s_j(t)\Phi_j;\quad \Psi=\sum_{k=1}^{\infty}r_k(t)\varphi_k, \qquad (33)$$

де Φ_j − гармонічні функції, що задовольняють граничним умовам

$$\frac{\partial\Phi_j}{\partial n}\Big|_{S_1}=w_j(p);\quad \frac{\partial\Phi_j}{\partial z}\Big|_{\Sigma}=-\frac{1}{\Sigma}\int\limits_{S_1}w_j(p)dS.$$

Після підстановки розкладів (33) в рівняння (31), в граничні умови на вільній поверхні рідини (25) та застосування процедури Бубнова – Гальоркіна отримаємо наступну систему диференціальних рівнянь відносно узагальнених координат $s_i(t)$ і $r_k(t)$:

$$a_i\left(\ddot{s}_i+\Omega_i^2 s_i\right)+a\sum_{k=1}^{\infty}\ddot{r}_k\lambda_{ik}=Y_i,$$

$$a\mu_k\left(\ddot{r}_k+\sigma_k^2 r_k\right)+a\sum_{i=1}^{\infty}\ddot{s}_i\gamma_{ki}=0,\quad (i,k=1,2,\ldots). \qquad (34)$$

Тут

$$a_i=\int\limits_S\left(u_i^2+v_i^2+w_i^2\right)dS+a\int\limits_{S_1}\left(\Phi_i-\frac{1}{\Sigma}\int\limits_{\Sigma}\Phi_i dS\right)w_i dS,\quad \mu_k=\int\limits_{\Sigma}\varphi_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial n}dS,$$

$$\lambda_{ik}=\int\limits_{S_1}\varphi_k w_i dS,\quad \gamma_{ki}=\int\limits_{\Sigma}\Phi_i\frac{\partial\varphi_k}{\partial n}dS,\quad Y_i=\int\limits_S\left(\vec{X},\vec{U}_i\right)dS.$$

Ці рівняння можуть бути використані для визначення вільних коливань системи «оболонка – рідина». Для цього слід покласти

$$s_i=\exp^{i\omega t}S_i,\ (i=1,2,\ldots,s_0),\quad r_k=\exp^{i\omega t}R_k,\ (k=1,2\ldots,r_0),\quad Y_i\equiv 0. \qquad (35)$$

Тоді для визначення амплітуд S_i і R_k та частот коливань ω отримаємо наступну однорідну систему алгебраїчних рівнянь:

$$\left(G-\lambda^2F\right)\vec{y}=0,\quad \vec{y}=\left\{S_1,S_2,\ldots,S_{s_0};R_1,R_2,\ldots,R_{r_0}\right\},\quad \lambda^2=\frac{(1-\nu^2)\rho R_0^2\omega^2}{E}. \qquad (36)$$

Визначення коефіцієнтів рівнянь (34) пов’язано з обчисленням квадратур від розв’язків спектральних задач (29) і (31), (32).

Розв’язок задачі (29) може бути знайдений за допомогою методу Трефтца, запропонованого в роботах І.А. Луковського. Для оболонок обертання компоненти вектора переміщень поверхні оболонки u,v і w та потенціал зміщень частинок рідини Φ можна зобразити в наступному вигляді

$$\begin{aligned} u(s,\beta)&=u(s)\cos n\beta,\quad v(s,\beta)=v(s)\sin n\beta,\\ w(s,\beta)&=w(s)\cos n\beta,\quad \Phi(z,r,\beta)=\Phi(z,r)\cos n\beta. \end{aligned} \qquad (37)$$

В подальшому обмежимося розглядом неосесиметричних коливань оболонки $(n>0)$. Після відокремлення кутової координати β для функції $\Phi(z,r)$ будемо мати наступну задачу Неймана

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\Big)-\frac{n^2}{r^2}\Phi=0,\quad (z,r)\in Q,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big|_{L_0}=0;\quad \frac{\partial\Phi}{\partial n}\Big|_{L_1}=w, \tag{38}$$

де Q, L_0 і L_1 меридіональний переріз області D, поверхонь Σ і S_1 відповідно.

Введемо у розгляд оператор G, який значенням функції $w(s)$, що задана на контурі L_1 ставить у відповідність функцію Φ, визначену в області Q і є розв'язком задачі (38). Ця відповідність представляється у вигляді $\Phi=Gw$, де $G-$ інтегральний оператор, ядром якого є функція Гріна другої граничної задачі (38). У випадку, коли область Q має канонічну форму, цю функцію можливо побудувати в явному вигляді. Якщо вважати, що вектор-функція $\vec{U}=\{u(s),v(s),w(s)\}$ належить класу функцій, що задовольняють умовам кріплення торців оболонки, то вихідну спектральну задачу (31), (32) можна представити в наступному операторному вигляді:

$$L\vec{U}-\Omega^2M\vec{U}=0;\quad M=diag\{1,1,1+\delta(p)aG\}. \tag{39}$$

Оскільки оболонка знаходиться під дією розривного динамічного навантаження, то для забезпечення можливості обчислення переміщень оболонки та їх перших похідних в кожній точці інтервалу інтегрування рівнянь доцільно розбити цей інтервал на дві підобласті. Нехай $s=\zeta$ відповідає рівню рідини, на який заповнена оболонка. Розіб'ємо область $[s_1,s_2]$ точкою $s=\zeta$ на дві підобласті $G^{(1)}=[s_1,\zeta]$ і $G^{(2)}=[\zeta,s_2]$. Позначимо розв'язки вихідної задачі в підобластях $G^{(1)}$ і $G^{(2)}$ відповідно через $\vec{U}^{(1)}$ і $\vec{U}^{(2)}$. В перерізі $s=\zeta$ повинні виконуватися граничні умови

$$u^{(1)}=u^{(2)};\quad v^{(1)}=v^{(2)};\quad w^{(1)}=w^{(2)};\quad \frac{dw^{(1)}}{ds}=\frac{dw^{(2)}}{ds} \tag{40}$$

$$T_1^{(1)}=T_1^{(2)};\quad S^{(1)}=S^{(2)};\quad M_1^{(1)}=M_1^{(2)};\quad \tilde{Q}_1^{(1)}=\tilde{Q}_1^{(2)} \tag{41}$$

де T_1,S,M_1 і $\tilde{Q}_1-$ сили, момент і узагальнена перерізуюча сила, що діють в серединній поверхні оболонки.

Сформульовану задачу спряження будемо розв'язувати за допомогою варіаційного методу. Еквівалентне варіаційне формулювання вихідної спектральної задачі можна отримати з принципу можливих переміщень. В результаті вихідна здача зведеться до відшукання стаціонарних значень для функціонала $I(\vec{U})$, який можна представити у вигляді:

$$I = \sum_{k=1}^{2} I^{(k)}; \quad I^{(k)} = \int_{G^{(k)}} F(\vec{U}^{(k)}) dG^{(k)}. \tag{42}$$

Відшукуючи стаціонарні значення функціоналу (42) на класі функцій, що задовольняють головним граничним умовам задачі при $s = s_1$ і $s = s_2$, можна показати, що в межах кожної з ведених підобластей будуть виконуватися рівняння і силові граничні умови вихідної задачі. В припущенні, що клас допустимих функцій при $s = \zeta$ задовольняє умови (40) показується, що умови (41) будуть природними граничними умовами для функціонала (42). Отже при використанні методу Рітца для розв'язання варіаційного рівняння $\delta I = 0$, апроксимації для шуканих функцій повинні вибиратися таким чином, щоб вони забезпечували виконання умов (40). Це суттєво ускладнює алгоритм розв'язування задачі спряження. У зв'язку з цим, у відповідності з розділом 4, в роботі побудовано узагальнений функціонал $I_1(\vec{U})$, для якого умови спряження (40) і (41) є природними граничними умовами. Цей функціонал має вигляд

$$\begin{gathered} I_1(\vec{U}) = I(\vec{U}) - \frac{1}{2}[(T_1^{(1)} + T_1^{(2)})(u^{(1)} - u^{(2)}) + (S_1^{(1)} + S_1^{(2)})(v^{(1)} - v^{(2)}) + \\ +(\tilde{Q}_1^{(1)} + \tilde{Q}_1^{(2)})(w^{(1)} - w^{(2)}) - (M_1^{(1)} + M_1^{(2)})(\frac{dw^{(1)}}{ds} - \frac{dw^{(2)}}{ds})]\Big|_{s=\zeta} . \end{gathered} \tag{43}$$

Функціонал (43) служить теоретичною основою для побудови прямих методів розв'язання розглядуваної задачі. Функції $u^{(k)}(s), v^{(k)}(s)$ і $w^{(k)}(s)$ представляються у вигляді наступних відрізків узагальнених рядів

$$u^{(1)} = \sum_{j=1}^{N} x_j U_j^{(1)}(s); \quad v^{(1)} = \sum_{j=1}^{N} x_{j+N} V_j^{(1)}(s); \quad w^{(1)} = \sum_{j=1}^{N} x_{j+2N} W_j^{(1)}(s);$$

$$u^{(2)} = \sum_{j=1}^{N} x_{j+3N} U_j^{(2)}(s); \quad v^{(2)} = \sum_{j=1}^{N} x_{j+4N} V_j^{(2)}(s); \quad w^{(2)} = \sum_{j=1}^{N} x_{j+5N} W_j^{(2)}(s).$$

Тут $x_j \ (j = \overline{1,6N})$ – довільні постійні, що підлягають визначенню в подальшому; $\{U_j^{(k)}(s)\}, \{V_j^{(k)}(s)\}, \{W_j^{(k)}(s)\}, (k = 1,2)$ – системи координатних функцій, які вибиралися у відповідності до рекомендацій, розроблених у розділі 3.

З необхідних умов стаціонарності узагальненого функціонала (43) отримаємо однорідну систему алгебраїчних рівнянь

$$(A - \Omega^2 B)\vec{X} = 0, \quad \vec{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_{6N}\}. \tag{44}$$

Для обчислення деяких елементів матриці B необхідно знати функції $F_k = GW_k^{(1)}, \quad (k = \overline{1,N})$. Функції $F_k(z,r)$ знаходяться за допомогою метода

Трефтца розв'язання задачі Неймана (38) вже при відомих функціях в граничній умові на контурі L_1.

Коефіцієнти алгебраїчних рівнянь (44) в загальному випадку мають досить складну структуру. У зв'язку з цим в роботі на основ варіації функціонала (43) розроблено універсальний метод обчислення елементів матриць A і B, зручний для реалізації запропонованого алгоритму при програмуванні. Зауважимо, що отриманий алгоритм дає можливість використати стратегію розпаралелювання розв'язку задачі з використанням багатопроцесорних систем.

На основі запропонованої методики визначення динамічних характеристик довільних оболонок обертання, які частково заповнені рідиною, наведені результати розрахунків вільних коливань циліндричної оболонки і рідини. Проаналізована ефективність розв'язання задачі спряження для оболонок обертання на основі розробленого варіаційного методу; збіжність наближених розв'язків в залежності від числа базисних функцій для переміщень оболонки і для потенціалу зміщень рідини.

Проведені розрахунки вільних коливань розглядуваної механічної системи як з врахуванням хвильових рухів рідини, так і без них, а також порівняння розрахункових даних з існуючими в літературі точними розв'язками задачі.

Основні результати і висновки роботи полягають в наступному:

- Побудована математична модель руху довільної оболонки обертання з приєднаним на одному з її торців твердим тілом під дією зосереджених та розподілених навантажень довільного вигляду. Запропоновано наближений метод розрахунку вільних неосесиметричних коливань розглядуваної механічної системи.

- Проведено детальний аналіз частот і форм згинних коливань системи «тіло – оболонка» в спрощеній постановці задачі в припущенні, що для оболонки виконується гіпотеза плоских перерізів з врахуванням деформацій зсуву та інерції повороту поперечного перерізу (балка Тимошенка). Показано, що теорія балок Тимошенка має істотно більшу область застосувань по відношенню до балки Ейлера – Бернуллі, крім того вона дає можливість визначення вищих форм коливань.

- Розроблено варіаційний метод розв'язування спектральної задачі про коливання довільних тонкостінних оболонок обертання. Використовуючи елементи аналітичної теорії диференціальних рівнянь з малим параметром при старшій похідній і рівнянь з регулярною особливою точкою встановлена формальна структура загального розв'язку вихідної системи рівнянь. На цій основі побудовані системи базисних функцій в методі Рітца, які враховують наявність в розв'язках примежових функцій та асимптотичну поведінку регулярних розв'язків в околі полюса куполоподібних оболонок.

- На основі проведених чисельних розрахунків показано, що запропонований алгоритм розв’язування задачі про вільні коливання оболонок обертання відноситься до числа рівномірних алгоритмів за параметром. Розрахунки, проведені для циліндричної, зрізаної конічної та сферичної оболонок, показали, що алгоритм забезпечує поточкову збіжність розв’язків і їх перших похідних в усій області інтегрування рівнянь. Це дозволяє проводити обчислення сил та моментів, що дає можливість використовувати цей алгоритм для аналізу динамічної міцності оболонок.
- Запропоновано алгоритм застосування метода Рітца до побудови наближених розв’язків спектральних задач, поставлених з позицій спряження розв’язків. Розроблений алгоритм забезпечує ефективне обчислення нижчої частини спектра задач на власні значення і збіжність в рівномірній метриці самих розв’язків і їх похідних, що входять до складу умов спряження.
- Побудована загальна математична модель динаміки пружних стержнів, що несуть резервуари, частково заповнені рідиною. Розглядувана модель має зміст лише для нижчих форм поперечних коливань, оскільки при збільшенні частоти власних коливань системи втрачають силу припущення, які використовуються при описанні коливань стержня.
- Розроблені варіаційні методи розв’язування спектральних задач, що описують вільні коливання стержня з приєднаним до його верхнього торця резервуаром, а також стержня з підвішеним в деякому його перерізі резервуаром, частково заповненим рідиною. Розрахунки показують ефективність запропонованих алгоритмів і що хвильові рухи рідини можуть бути досить суттєвими.
- Розроблено метод розв’язування задачі про коливання довільних оболонок обертання, які частково заповнені ідеальною нестисливою рідиною. Розв’язок задачі гідропружності базується на застосуванні метода декомпозиції області інтегрування рівнянь теорії оболонок і на побудові оберненого оператора для гідродинамічної частини задачі. Побудовано узагальнений функціонал відносно переміщень оболонки для якого умови спряження розв’язків в підобластях відносяться до числа природних граничних умов.
- На основі запропонованого алгоритму наведені результати розрахунків неосесиметричних коливань циліндричної оболонки, частково заповненої рідиною. При цьому проілюстрована ефективність розв’язування задачі спряження на основі варіаційного методу; збіжність наближених розв’язків в залежності від числа власних функцій, як для переміщень оболонки, так і для потенціалу зміщень рідини. Відмічається повне співпадіння отриманих розрахункових даних з існуючими в літературі точними розв’язками розглядуваної задачі.

- Наведено порівняння частот вільних коливань оболонки з урахуванням хвильових рухів рідини та частот в припущенні, що при збуреному русі рідини її вільна поверхня залишається плоскою і паралельною до осі оболонки. Встановлено, що розв’язки в спрощеній постановці задачі можуть бути використані для практичних розрахунків нижньої границі мінімальних частот пружних коливань оболонок обертання з рідиною.

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. Троценко Ю.В. О применении модели балки Тимошенко в задаче о собственных неосесимметричных колебаниях цилиндрической оболочки с присоединенным твердым телом / Ю.В. Троценко // Акустичний вісник. 2003. – т.6, № 4. – С. 54 – 64.
2. Троценко Ю.В. Применение метода Ритца в задаче о собственных колебаниях усеченной конической оболочки / Ю.В. Троценко // Збірник праць ін-ту математики НАН України «Динаміка та стійкість багатовимірних систем». – 2005. – т. 2, № 1, С. 364 – 380.
3. Троценко В.А. Решение задачи о собственных колебаниях незамкнутой оболочки вращения в условиях ее сингулярного возмущения / В.А. Троценко, Ю.В. Троценко // Нелелінійні коливання. – 2005. – т. 8, № 3. – С. 415 – 432.
4. Троценко Ю.В. Свободные колебания оболочки вращения с присоединенным на торце абсолютно твердым телом / Ю.В. Троценко // Збірник праць Ін-ту математики НАН України «Комплексний аналіз і течії з вільними границями». – 2006. – т. 3, № 4. – С. 474 – 495.
5. Троценко Ю.В. Структура интегралов уравнений колебаний оболочек вращения в форме купола / Ю.В. Троценко // Збірник праць Ін-ту математики НАН України «Аналітична механіка та її застосування». – 2008. – т. 5, № 2, С. 334 – 348.
6. Троценко В.А. Равномерно сходящийся метод Ритца в задаче об осесимметричных колебаниях оболочки вращения в форме купола / В.А. Троценко, Ю.В. Троценко // Акустичний вісник. – 2008, т. 11, № 2, С. 45 – 57.
7. Троценко В.А. Поперечные колебания упругого стержня, несущего на свободном конце резервуар с жидкостью / В.А. Троценко, Ю.В. Троценко // Акустичний вісник. – 2010, т. 13, № 3, С. 51 – 67.
8. Троценко В.А. Применение метода Ритца к расчету свободных поперечных колебаний составного стержня / В.А. Троценко, Ю.В. Троценко // Збірник праць Ін-ту математики НАН України «Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем». – 2011. – т. 8, № 2. – С. 244 – 257.
9. Троценко Ю.В. Колебания упругих конструкций, содержащих подвесные резервуары с жидкостью / Ю.В. Троценко // Збірник праць Ін-ту математики НАН України «Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем». – 2011. – т. 8, № 2. – С. 258 – 275.

10. Троценко Ю.В. Свободные колебания тонкостенного стержня с подвесным резервуаром, частично заполненным жидкостью / Ю.В. Троценко // Акустичний вісник. – 2012. – т. 15, № 3. – С. 53 – 66.
11. Троценко Ю.В. К вариационному методу решения задачи сопряжения о свободных колебаниях цилиндрической оболочки / Ю.В. Троценко // Збірник праць Ін-ту математики НАН України «Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем». – 2013. – 10, № 2. – С. 209 – 221.
12. Троценко Ю.В. О колебаниях стержня с подвесным резервуаром при гармоническом возбуждении основания стержня / Ю.В. Троценко // Збірник праць Ін-ту математики НАН України «Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем». – 2013. – т. 10, № 2. – С. 201 – 208.
13. Троценко Ю.В. Вынужденные колебания стержня с подвесным резервуаром, частично заполненным жидкостью / Ю.В. Троценко // Доповіді НАН України. – 2014. – № 4. – С. 56 – 63.
14. Троценко Ю.В. Об определении собственных колебаний тонкостенных незамкнутых в меридиональном направлении оболочек вращения / Ю.В. Троценко // Збірник праць Ін-ту математики НАН України «Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем». – 2014. – т. 11, № 4. – С. 330 – 354.
15. Троценко Ю.В. Применение метода Ритца к расчету колебаний упругих оболочек вращения, частично заполненных жидкостью / Ю.В. Троценко // Збірник праць Ін-ту математики НАН України «Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики». – 2015. – т. 12, № 4. – С. 203 – 234.
16. Троценко Ю.В. Колебания упругих оболочек вращения, частично заполненных идеальной жидкостью / Ю.В. Троценко // Нелелінійні коливання. – 2017. – т. 20, № 1, С. 127 – 144.
17. Gavrilyuk I. Axisymmetric oscillations of a cupola-shaped shell / Gavrilyuk I., Hermann M., Trotsenko V., Trotsenko Yu., Timokha A. // Journal of Engineering Mathematics. – 2010. – Vol. 68 – P. 165 – 178.
18. Gavrilyuk I. Studying the coupled eigenoscillations of an axisymmetric tower-elevated tank system by the multimodal method / Gavrilyuk I., Hermann M., Trotsenko Yu., Timokha A. // Journal of Fluids and Structures. – 2013. – Vol. 42. – P. 152 – 165.
19. Gavrilyuk I. Eigenoscillations of a thin-walled azimuthally closed, axially open shell of revolution / Gavrilyuk I., Hermann M., Trotsenko V., Trotsenko Yu., Timokha A. // Journal of Engineering Mathematics. – 2014. – Vol. 85. – P. 83 – 97.
20. Trotsenko Yu.V. Frequencies and modes of vibration of a cylindrical shell with attached rigid body / Yu.V. Trotsenko // Journal of Sound and Vibration. – 2006. – Vol. 292, – P. 535 – 551.
21. Trotsenko Yu.V. Determination of the frequencies and modes of natural oscillations of liquids in composed vessels / Yu.V. Trotsenko // Journal of Mathematical Sciences. — 2016. — Vol. 215, — No. 3. — P. 395 – 407.

22. Trotsenko V.A. Nonaxisymmetric vibrations of a shell of revolution partially filled with liquid / V.A. Trotsenko, Yu.V. Trotsenko, // Journal of Mathematical Sciences. — 2017. — 220, — No. 3. — P. 341 – 358.
23. Trotsenko Yu.V. On the construction of coordinate functions for the Ritz method in the numerical analysis of nonaxially symmetric eigenoscillations of a dome-shaped shell of revolution / Yu.V. Trotsenko, // Journal of Mathematical Sciences. — 2017. — 220, — No. 4. — P. 514 – 532.
24. Троценко Ю.В. Применение вариационных методов к решению некоторых задач теории колебаний оболочек в условиях их сингулярного возмущения / Ю.В. Троценко // Thesis of International Conference, «Dynamic System Modelling and Stability Investigation» (22 – 25 may 2007, Kyiv), p. 334.
25. Троценко Ю.В. Равномерно сходящийся метод Ритца в задачах о свободных колебаниях оболочек вращения / Ю.В. Троценко // Український математичний конгрес – 2009 (до 100 – річчя від дня народження М.М. Боголюбова); Київ, 27–29 серпня. 2009 р. / Інститут математики НАН України: Тези доповідей. – Київ, 2009. – www.imath.kiev.ua/~congress2009/.
26. Троценко Ю.В. Вариационный метод расчета свободных колебаний тонких упругих оболочек / Ю.В. Троценко // Тези міжнародної математичної конференції «Боголюбівські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування» (23 – 30 червня 2013, Севастополь), с. 307.
27. Троценко Ю.В. Особенности применения метода Ритца к решению задачи о собственных колебаниях тонкостенных куполообразных оболочек вращения / Ю.В. Троценко // Thesis of XII International Conference «Dynamical system modelling and stability investigation» (27 – 29 May, 2015, Kiev, Ukraine), с. 126.

АНОТАЦІЇ

Троценко Ю.В. Розвиток методів аналітичної механіки в задачах про коливання багатокомпонентних механічних систем. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.01 – теоретична механіка. – Інститут математики НАН України, Київ, 2017.

Побудована математична модель руху довільної оболонки обертання з приєднаним до її торця твердим тілом скінчених розмірів під дією зосереджених та розподілених навантажень. Сформульована спектральна задача про неосесиметричні вільні коливання розглядуваної механічної системи та побудовані її розв’язки з використанням методу Рітца. Розглянута спрощена постановка задачі в припущенні, що для оболонки виконується гіпотеза плоских перерізів. Показано, що балкова теорія Тимошенка має істотно більшу область застосування по відношенню до класичної теорії балок Ейлера – Бернуллі.

Розвинуто варіаційний метод побудови наближеного розв’язку сингулярно збуреної спектральної задачі про вільні коливання довільних оболонок обертання. Побудова систем координатних функцій для методу Рітца базується на врахуванні попередньо встановленій формальної структури фундаментальних розв’язків вихідної системи рівнянь. Отримані на цій основі системи базисних функцій враховують наявність у розв’язках примежових функцій, що локалізовані у вузьких зонах біля торців оболонки, а також асимптотичну поведінку розв’язків в околі регулярної особливої точки вихідних рівнянь. Запропонований алгоритм володіє поточковою збіжністю розв’язків та її перших чотирьох похідних у всій області інтегрування рівнянь, а також відноситься до числа рівномірних алгоритмів по малому параметру розв’язання сингулярно збурених задач.

Запропоновано застосування метода Рітца до побудови розв’язків спектральних задач з умовами спряження. Знаходження розв’язків цих задач базується на формулюванні узагальненого функціоналу, для якого умови спряження відносяться до числа його природних граничних умов. Ефективність такого підходу продемонстрована при побудові розв’язків одномірної задачі на власні значення про коливання стержня з кусково-неперервними пружно-масовими характеристиками, а також спектральної задачі з параметром в граничній умові для рівнянь в частинних похідних про вільні коливання рідини в резервуарі складної геометрії. Розроблений алгоритм забезпечує збіжність в рівномірній метриці розв’язків та їх похідних, що входять в умови спряження.

Наведено дослідження поперечних коливань вертикально розташованого пружного стержня, який має на вільному торці резервуар з рідиною, а також стержня з приєднаним в деякому перерізі резервуаром в формі тіла обертання, який частково заповнений рідиною. Використовуючи основні положення лінійної теорії руху твердого тіла з рідиною та лінійної теорії пружних стержнів, побудовано математичні моделі динаміки розглядуваних механічних систем під дією зосереджених та розподілених зовнішніх навантажень. Наближені розв’язки задач про вільні коливання системи «стержень – резервуар – рідина» будуються на основі варіаційних методів. При цьому, в задачі про коливання стержня з підвісним резервуаром у зв’язку з наявністю розривних граничних умов при побудові розв’язків використовується метод Рітца у поєднанні з методом декомпозиції області визначення шуканих розв’язків. Розв’язано також задачі про вимушені коливання розглядуваних механічних систем під дією зовнішніх сил, а також при заданому гармонічному збуренні основи стержня.

Запропоновано наближений метод розрахунку вільних коливань довільних оболонок обертання, які частково заповнені рідиною. Оскільки оболонка знаходиться під дією розривного гідродинамічного навантаження, то розв’язок вихідної задачі гідропружності базується на застосуванні методу декомпозиції області інтегрування рівнянь теорії оболонок в поєднанні з методом Рітца, а також на наближеній побудові оберненого оператора для гідродинамічної частини задачі.

Ключові слова: оболонка обертання, сингулярно збурені задачі, метод Рітца, метод декомпозиції, множники Лагранжа, пружні конструкції з рідиною.

Троценко Ю.В. Развитие методов аналитической механики в задачах о колебаниях многокомпонентных механических систем. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.01 – теоретическая механика. – Институт математики НАН Украины, Киев, 2017.

Построена математическая модель движения произвольной оболочки вращения с присоединенным к ее торцу твердым телом конечных размеров под действием сосредоточенных и распределенных нагрузок. Сформулирована спектральная задача о неосесимметричных свободных колебаниях рассматриваемой механической системы и построены ее решения с использованием метода Ритца. Рассмотрена упрощенная постановка задачи в предположении, что для оболочки выполняется гипотеза плоских сечений. Показано, что балочная теория Тимошенко имеет существенно большую область применения по отношению к классической теории балок Эйлера – Бернулли.

Развит вариационный метод построения приближенного решения сингулярно возмущенной спектральной задачи о свободных колебаниях произвольных оболочек вращения. Построение систем координатных функций для метода Ритца базируется на учете предварительно установленной формальной структуры фундаментальных решений исходной системы уравнений. Полученные на этой основе системы базисных функций учитывают наличие в решениях пригpаничных функций, локализованных в узких зонах у торцов оболочки, а также асимптотическое поведение решений в окрестности регулярной особой точки исходных уравнений. Предложенный алгоритм обладает поточечной сходимостью решений и ее первых четырех производных во всей области интегрирования уравнений, а также относится к числу равномерных алгоритмов по малому параметру решения сингулярно возмущенных задач.

Предложено применение метода Ритца к построению решений спектральных задач с условиями сопряжения. Нахождение решений этих задач базируется на формулировке обобщенного функционала, для которого условия сопряжения относятся к числу его естественных граничных условий. Эффективность такого подхода продемонстрирована при построении решений одномерной задачи на собственные значения о колебаниях стержня с кусочно-непрерывными упруго-массовыми характеристиками, а также спектральной

задачи с параметром в граничном условии для уравнений в частных производных о свободных колебаниях жидкости в резервуаре сложной геометрии. Разработанный алгоритм обеспечивает сходимость в равномерной метрике решений и их производных, входящих в условия сопряжения.

Приведены исследования поперечных колебаний вертикально расположенного упругого стержня, который имеет на свободном торце резервуар с жидкостью, а также стержня с присоединенным в некотором сечении резервуаром в форме тела вращения, частично заполненным жидкостью. Используя основные положения линейной теории движения твердого тела с жидкостью и линейной теории упругих стержней, построены математические модели динамики рассматриваемых механических систем под действием сосредоточенных и распределенных внешних нагрузок. Приближенные решения задач о свободных колебания системы «стержень - резервуар - жидкость» строятся на основе вариационных методов. При этом, в задаче о колебаниях стержня с подвесным резервуаром в связи с наличием разрывных граничных условий при построении решений используется метод Ритца в сочетании с методом декомпозиции области определения искомых решений. Решены также задачи о вынужденных колебаниях рассматриваемых механических систем под действием внешних сил, а также при заданном гармоничном возбуждении основания стержня.

Предложен приближенный метод расчета свободных колебаний произвольных оболочек вращения, частично заполненных жидкостью. Поскольку оболочка находится под действием разрывной гидродинамической нагрузки, то решение исходной задачи гидроупругости базируется на применении метода декомпозиции области интегрирования уравнений теории оболочек в сочетании с методом Ритца, а также на приближенном построении обратного оператора для гидродинамической части задачи.

Ключевые слова: оболочка вращения, сингулярно возмущенные задачи, метод Ритца, метод декомпозиции, множители Лагранжа, упругие конструкции с жидкостью.

Trotsenko Yu.V. Development the methods of analytical mechanics in the problems about oscillations of multi-component mechanical systems. – Manuscript.

Doctor of Sciences thesis on Physics and Mathematics, speciality 01.02.01 – theoretical mechanics. – Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2017.

A mathematical model of the motion of an arbitrary shell of revolution with attached of the solid body of finite size on its end under the influence of concentrated and distributed loads is obtained. The spectral problem of non-axisymmetric vibrations for this mechanical system is formulated and its solutions are built using the Ritz method. The simplified formulation of the problem is considered assuming that the hypothesis of flat sections for the shell is performed. It is shown that the theory of Timoshenko has a much greater range of applicability with respect to the classical theory of Euler-Bernoulli beams.

For a singularly perturbed spectral problem about free oscillations of arbitrary shells of revolution the variational method is developed. The coordinate functions are built taking into account the structure of the fundamental solutions of the initial system of equations. This coordinate functions take into account the existence of border functions in solutions and the asymptotic behavior of solutions in the field of special regular point of the original equations. The proposed algorithm has the pointwise convergence in the whole domain of integration equations. It also refers to the uniform algorithms in the small parameter of the solution of singularly perturbed problems.

The Ritz method is proposed for construct the solutions of spectral problems with the transmission conditions. Finding the solutions to these problems is based on the construction of a generalized functional for which the transmission conditions are natural boundary conditions. The effectiveness of this approach is demonstrated by solving a one-dimensional eigenvalues problem about the vibrations of a rod with piecewise continuous elastic mass characteristics and by spectral problem with a parameter in the boundary condition for partial differential equations about free vibrations of a liquid in a tank of complex geometry. The developed algorithm ensures the convergence in the uniform metric for solutions and their derivatives, which are included in the transmission conditions.

Researches of transverse vibrations of a vertical rod, which has at the free end of the fluid reservoir, and for a rod with a suspended tank partially filled with liquid, are presented. By use of the linear theory of motion of a solid with a liquid and the linear theory of elastic rods, mathematical models of the dynamics of these mechanical systems under the action of concentrated and distributed loads are built. Approximate solutions of problems of natural vibrations of systems «rod – tank – liquid» are based on the variational methods. Since the problem of beam oscillation with outboard tank contains discontinuous boundary conditions, the Ritz method and decomposition method of domain solutions is applied. Problems about forced vibrations of these mechanical systems under the action of external forces and for a given harmonic effects on rod base are also solved.

Approximate method for solving of problem about the natural oscillations of arbitrary shells of revolution, partially filled with liquid is proposed. Since the shell is subjected to breaking hydrodynamic load, that the solution of the original problem hydroelasticity boundary is based on a domain decomposition method of integrating the equations shell in combination with the method of the Ritz, as well as on the constructing of the approximate inverse of operator for the hydroelastic part of the problem.

Keywords: shell of revolution, singularly perturbed problems, Ritz method, decomposition method, Lagrange multipliers, the elastic structure with liquid.

Підп. до друку 12.04.2017. Формат $60 \times 84/16$. Папір друк. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 2.Ум. друк. арк. 1,86. Тираж 100 прим. Зам. 23.

Віддруковано в друкарні ТОВ "Фірма "ЕСЕ"
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4133 від 08.08.2011 р.
03142, м. Київ, пр-т. Академіка Вернадського, 34/1