

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

Троценко Юрій Володимирович

РОЗВИТОК МЕТОДІВ АНАЛІТИЧНОЇ
МЕХАНІКИ В ЗАДАЧАХ ПРО КОЛИВАННЯ
БАГАТОКОМПОНЕНТНИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

УДК 532:539.3

Спеціальність 01.02.01 — теоретична механіка

Дисертація

на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень.

Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на
відповідне джерело

Ю.В. Троценко

Науковий консультант
доктор фізико-математичних наук,
професор, академік НАН України
Луковський Іван Олександрович

Київ - 2017

АНОТАЦІЯ

Троценко Ю.В. Розвиток методів аналітичної механіки в задачах про коливання багатокомпонентних механічних систем. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.01 – теоретична механіка. – Інститут математики НАН України, Київ, 2017.

Побудована математична модель руху довільної оболонки обертання з приєднаним до її торця твердим тілом скінчених розмірів під дією зосереджених та розподілених навантажень. Сформульована спектральна задача про неосесиметричні вільні коливання розглядуваної механічної системи та побудовані її розв'язки з використанням методу Рітца. Розглянута спрощена постановка задачі в припущенні, що для оболонки виконується гіпотеза плоских перерізів. Показано, що балкова теорія Тимошенка має істотно більшу область застосування по відношенню до класичної теорії балок Ейлера – Бернуллі.

Розвинуто варіаційний метод побудови наближеного розв'язку сингулярно збуреної спектральної задачі про вільні коливання довільних оболонок обертання. Побудова систем координатних функцій для методу Рітца базується на врахуванні попередньо встановленій формальній структури фундаментальних розв'язків вихідної системи рівнянь. Отримані на цій основі системи базисних функцій враховують наявність у розв'язках примежових функцій, що локалізовані у вузьких зонах біля торців оболонки, а також асимптотичну поведінку розв'язків в околі регулярної особливої точки вихідних рівнянь. Запропонований алгоритм володіє поточною збіжністю розв'язків та її перших чотирьох похідних у всій області інтегрування рівнянь, а також відноситься до числа рівномірних алгоритмів по малому параметру розв'язання сингулярно збурених задач.

Запропоновано застосування метода Рітца до побудови розв'язків спектральних задач з умовами спряження. Знаходження розв'язків цих задач базується на формулюванні узагальненого функціоналу, для якого умови спряження відносяться до числа його природних граничних умов. Ефективність такого підходу продемонстрована при побудові розв'язків одномірної задачі на власні значення про коливання стержня з кусково-неперервними пружно-масовими характеристиками, а також спектральної задачі з параметром в граничній умові для рівнянь в частинних похідних про вільні коливання рідини в резервуарі складної геометрії. Розроблений алгоритм забезпечує збіжність в рівномірній метриці розв'язків та їх похідних, що входять в умови спряження.

Наведено дослідження поперечних коливань вертикально розташованого пружного стержня, який має на вільному торці резервуар з рідиною, а також стержня з приєднаним в деякому перерізі резервуаром в формі тіла обертання, який частково заповнений рідиною. Використовуючи основні положення лінійної теорії руху твердого тіла з рідиною та лінійної теорії пружних стержнів, побудовано математичні моделі динаміки розглядуваних механічних систем під дією зосереджених та розподілених зовнішніх навантажень. Наближені розв'язки задач про вільні коливання системи «стержень – резервуар – рідина» будуються на основі варіаційних методів. При цьому, в задачі про коливання стержня з підвісним резервуаром у зв'язку з наявністю розривних граничних умов при побудові розв'язків використовується метод Рітца у поєднанні з методом декомпозиції області визначення шуканих розв'язків. Розв'язано також задачі про вимушені коливання розглядуваних механічних систем під дією зовнішніх сил, а також при заданому гармонічному збуренні основи стержня.

Запропоновано наближений метод розрахунку вільних коливань довірливих оболонок обертання, які частково заповнені рідиною. Оскільки оболонка знаходиться під дією розривного гідродинамічного навантаження, то розв'я-

зок вихідної задачі гідропружності базується на застосуванні методу декомпозиції області інтегрування рівнянь теорії оболонок в поєднанні з методом Рітца, а також на наближеній побудові оберненого оператора для гідродинамічної частини задачі.

Ключові слова: оболонка обертання, сингулярно збурені задачі, метод Рітца, метод декомпозиції, множники Лагранжа, пружні конструкції з рідиною.

Trotsenko Yu.V. Development the methods of analytical mechanics in the problems about oscillations of multicomponent mechanical systems. – Manuscript.

Doctor of Sciences thesis on Physics and Mathematics, speciality 01.02.01 – theoretical mechanics. – Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2017.

A mathematical model of the motion of an arbitrary shell of revolution with attached of the solid body of finite size on its end under the influence of concentrated and distributed loads is obtained. The spectral problem of non-axisymmetric vibrations for this mechanical system is formulated and its solutions are built using the Ritz method. The simplified formulation of the problem is considered assuming that the hypothesis of flat sections for the shell is performed. It is shown that the theory of Timoshenko has a much greater range of applicability with respect to the classical theory of Euler-Bernoulli beams.

For a singularly perturbed spectral problem about free oscillations of arbitrary shells of revolution the variational method is developed. The coordinate functions are built taking into account the structure of the fundamental solutions of the initial system of equations. This coordinate functions take into account the existence of border functions in solutions and the asymptotic behavior of solutions in the field of special regular point of the original equations. The proposed algorithm has the pointwise convergence in the whole domain of integration equations. It also refers to the uniform algorithms in the small parameter of the solution of singularly perturbed problems.

The Ritz method is proposed for construct the solutions of spectral problems

with the transmission conditions. Finding the solutions to these problems is based on the construction of a generalized functional for which the transmission conditions are natural boundary conditions. The effectiveness of this approach is demonstrated by solving a one-dimensional eigenvalues problem about the vibrations of a rod with piecewise continuous elastic mass characteristics and by spectral problem with a parameter in the boundary condition for partial differential equations about free vibrations of a liquid in a tank of complex geometry. The developed algorithm ensures the convergence in the uniform metric for solutions and their derivatives, which are included in the transmission conditions.

Researches of transverse vibrations of a vertical rod, which has at the free end of the fluid reservoir, and for a rod with a suspended tank partially filled with liquid, are presented. By use of the linear theory of motion of a solid with a liquid and the linear theory of elastic rods, mathematical models of the dynamics of these mechanical systems under the action of concentrated and distributed loads are built. Approximate solutions of problems of natural vibrations of systems «rod – tank – liquid» are based on the variational methods. Since the problem of beam oscillation with outboard tank contains discontinuous boundary conditions, the Ritz method and decomposition method of domain solutions is applied. Problems about forced vibrations of these mechanical systems under the action of external forces and for a given harmonic effects on rod base are also solved.

Approximate method for solving of problem about the natural oscillations of arbitrary shells of revolution, partially filled with liquid is proposed. Since the shell is subjected to breaking hydrodynamic load, that the solution of the original problem hydroelasticity boundary is based on a domain decomposition method of integrating the equations shell in combination with the method of the Ritz, as well as on the constructing of the approximate inverse of operator for the hydroelastic part of the problem.

Keywords: shell of revolution, singularly perturbed problems, Ritz method, decomposition method, Lagrange multipliers, the elastic structure with liquid.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ

1. Троценко Ю.В. О применении модели балки Тимошенко в задаче о собственных неосесимметричных колебаниях цилиндрической оболочки с присоединенным твердым телом / Ю.В. Троценко // Акустичний вісник. — 2003. — **6**, № 4. — С. 54 – 64.
2. Троценко Ю.В. Применение метода Ритца в задаче о собственных колебаниях усеченной конической оболочки / Ю.В. Троценко // Збірник праць ін-ту математики НАН України «Динаміка та стійкість багатовимірних систем». — 2005. — **2**, № 1, С. 364 – 380.
3. Троценко В.А. Решение задачи о собственных колебаниях незамкнутой оболочки вращения в условиях ее сингулярного возмущения / В.А. Троценко, Ю.В. Троценко // Нелелінійні коливання. — 2005. — **8**, № 3. — С. 415 – 432.
4. Троценко Ю.В. Свободные колебания оболочки вращения с присоединенным на торце абсолютно твердым телом / Ю.В. Троценко // Збірник праць Ін-ту математики НАН України «Комплексний аналіз і течії з вільними границями». — 2006. — **3**, № 4. — С. 474 – 495.
5. Троценко Ю.В. Структура интегралов уравнений колебаний оболочек вращения в форме купола / Ю.В. Троценко // Збірник праць Ін-ту математики НАН України «Аналітична механіка та її застосування». — 2008. — **5**, № 2, С. 334 – 348.
6. Троценко В.А. Равномерно сходящийся метод Ритца в задаче об осесимметричных колебаниях оболочки вращения в форме купола / В.А.Троценко, Ю.В.Троценко // Акустичний вісник. — 2008, **11**, № 2, С. 45 – 57.

7. Троценко В.А. Поперечные колебания упругого стержня, несущего на свободном конце резервуар с жидкостью / В.А. Троценко, Ю.В. Троценко // Акустичний вісник. — 2010, **13**, № 3, С. 51 – 67.
8. Троценко В.А. Применение метода Ритца к расчету свободных поперечных колебаний составного стержня / В.А. Троценко, Ю.В. Троценко // Збірник праць Ін-ту математики НАН України «Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем». — 2011. — **8**, № 2. — С. 244 – 257.
9. Троценко Ю.В. Колебания упругих конструкций, содержащих подвесные резервуары с жидкостью / Ю.В. Троценко // Збірник праць Ін-ту математики НАН України «Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем». — 2011. — **8**, № 2. — С. 258 – 275.
10. Троценко Ю.В. Свободные колебания тонкостенного стержня с подвесным резервуаром, частично заполненным жидкостью / Ю.В. Троценко // Акустичний вісник. — 2012. — **15**, № 3. — С. 53 – 66.
11. Троценко Ю.В. К вариационному методу решения задачи сопряжения о свободных колебаниях цилиндрической оболочки / Ю.В. Троценко // Збірник праць Ін-ту математики НАН України «Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем». — 2013. — **10**, № 2. — С. 209 – 221.
12. Троценко Ю.В. О колебаниях стержня с подвесным резервуаром при гармоническом возбуждении основания стержня / Ю.В. Троценко // Збірник праць Ін-ту математики НАН України «Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем». — 2013. — **10**, № 2. — С. 201 – 208.
13. Троценко Ю.В. Вынужденные колебания стержня с подвесным резервуаром, частично заполненным жидкостью / Ю.В. Троценко // Доповіді НАН України. — 2014. — № 4. — С. 56 – 63.

14. Троценко Ю.В. Об определении собственных колебаний тонкостенных незамкнутых в меридиональном направлении оболочек вращения / Ю.В. Троценко // Збірник праць Ін-ту математики НАН України «Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем». — 2014. — **11**, № 4. — С. 330 – 354.
15. Троценко Ю.В. Применение метода Ритца к расчету колебаний упругих оболочек вращения, частично заполненных жидкостью / Ю.В. Троценко // Збірник праць Ін-ту математики НАН України «Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики». — 2015. — **12**, № 4. — С. 203 – 234.
16. Троценко Ю.В. Колебания упругих оболочек вращения, частично заполненных идеальной жидкостью / Ю.В. Троценко // Нелінійні коливання. — 2017. — **20**, № 1, С. 127 – 144.
17. Gavrilyuk I. Axisymmetric oscillations of a cupola-shaped shell / I. Gavrilyuk, M. Hermann, V. Trotsenko, Yu. Trotsenko, A. Timokha // Journal of Engineering Mathematics. — 2010. — **68**. — P. 165 – 178.
18. Gavrilyuk I. Studying the coupled eigenoscillations of an axisymmetric tower-elevated tank system by the multimodal method / I. Gavrilyuk, M. Hermann, Yu. Trotsenko, A. Timokha // Journal of Fluids and Structures. — 2013. — **42**. — P. 152 – 165.
19. Gavrilyuk I. Eigenoscillations of a thin-walled azimuthally closed, axially open shell of revolution / I. Gavrilyuk, M. Hermann, V. Trotsenko, Yu. Trotsenko, A. Timokha // Journal of Engineering Mathematics. — 2014. — **85**. — P. 83 – 97.

20. Trotsenko Yu.V., Frequencies and modes of vibration of a cylindrical shell with attached rigid body / Yu.V. Trotsenko, // Journal of Sound and Vibration. — 2006. — **292**, — P. 535 – 551.
21. Trotsenko Yu.V. Determination of the frequencies and modes of natural oscillations of liquids in composed vessels / Yu.V. Trotsenko // Journal of Mathematical Sciences. — 2016. — **215**, — No. 3. — P. 395 – 407.
22. Trotsenko V.A. Nonaxisymmetric vibrations of a shell of revolution partially filled with liquid / V.A. Trotsenko, Yu.V. Trotsenko, // Journal of Mathematical Sciences. — 2017. — **220**, — No. 3. — P. 341 – 358.
23. Trotsenko Yu.V. On the construction of coordinate functions for the Ritz method in the numerical analysis of nonaxially symmetric eigenoscillations of a dome-shaped shell of revolution / Yu.V. Trotsenko, // Journal of Mathematical Sciences. — 2017. — **220**, — No. 4. — P. 514 – 532.
24. Троценко Ю.В. Применение вариационных методов к решению некоторых задач теории колебаний оболочек в условиях их сингулярного возмущения / Ю.В. Троценко // Thesis of International Conference, «Dynamic System Modelling and Stability Investigation» (22 – 25 may 2007, Kyiv), p. 334.
25. Троценко Ю.В. Равномерно сходящийся метод Ритца в задачах о свободных колебаниях оболочек вращения / Ю.В. Троценко // Український математичний конгрес — 2009 (до 100 – річчя від дня народження М.М. Боголюбова); Київ, 27–29 серпня 2009 р. / Інститут математики НАН України: Тез. доповідей. — Київ, 2009. — <http://www.imath.kiev.ua/congress2009/>.
26. Троценко Ю.В. Вариационный метод расчета свободных колебаний тонких упругих оболочек / Ю.В. Троценко // Тези міжнародної матема-

тичної конференції «Боголюбівські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування» (23 – 30 червня 2013, Севастополь), с. 307.

27. Троценко Ю.В. Особенности применения метода Рунге к решению задачи о собственных колебаниях тонкостенных куполообразных оболочек вращения / Ю.В. Троценко // XII International Conference «Dynamical system modelling and stability investigation» (27 – 29 May, 2015, Kiev, Ukraine), с. 126.

ЗМІСТ

ВСТУП	15
РОЗДІЛ 1. РОЗВИТОК ДОСЛІДЖЕНЬ ДИНАМІКИ БАГАТОКОМПОНЕНТНИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ (ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ)	34
РОЗДІЛ 2. КОЛИВАННЯ ДОВІЛЬНОЇ ОБОЛОНКИ ОБЕРТАННЯ З ПРИЄДНАНИМ АБСОЛЮТНО ТВЕРДИМ ТІЛОМ	47
2.1 Постановка задачі	48
2.2 Застосування методу Рітца до побудови наближених розв'язків задачі	55
2.3 Спрощена постановка задачі про поперечні коливання механічної системи «оболонка-тверде тіло»	62
2.4 Побудова точних розв'язків для спрощеної постановки задачі	69
2.5 Аналіз ефективності алгоритмів та результати розрахунків власних коливань системи	73
2.5.1 Вільні коливання системи «оболонка-тверде тіло»	73
2.5.2 Вільні коливання системи «балка Тимошенка-тверде тіло»	78
РОЗДІЛ 3. ПОБУДОВА НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ СПЕКТРАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ ПРО КОЛИВАННЯ ДОВІЛЬНИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ В УМОВАХ ЇЇ СИНГУЛЯРНОГО ЗБУРЕННЯ	84
3.1 Постановка задачі	84
3.2 Загальні принципи побудови наближених розв'язків задачі	87
3.2.1 Побудова координатних функцій для незамкнених оболонок обертання	89

3.2.2	Формальна структура регулярних інтегралів вихідних рівнянь для куполоподібних оболонок обертання в околі їх полюса та побудова координатних функцій	98
3.3	Чисельні результати та аналіз ефективності запропонованих алгоритмів	113
3.3.1	Незамкнені оболонки обертання	113
3.3.2	Куполоподібні оболонки обертання	122

РОЗДІЛ 4. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДА РІТЦА В ПОЄДНАННІ З МЕТОДОМ ДЕКОМПОЗИЦІЇ ОБЛАСТІ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ КОЛИВАНЬ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ 132

4.1	Вільні коливання складеного стержня	132
4.1.1	Постановка задачі	132
4.1.2	Побудова розв'язку	134
4.1.3	Деякі чисельні результати і аналіз ефективності запропонованого алгоритму	140
4.2	Власні коливання рідини в резервуарах складної геометрії	145
4.2.1	Постановка задачі	145
4.2.2	Варіаційний метод розв'язання задачі	147
4.2.3	Побудова розв'язків задачі для випадку, коли одна з підобластей є канонічною	152
4.2.4	Деякі результати розрахунків та їх аналіз	157

РОЗДІЛ 5. КОЛИВАННЯ ТОНКОСТІННИХ КОНСТРУКЦІЙ, ЩО МІСТЯТЬ РЕЗЕРВУАРИ, ЧАСТКОВО ЗАПОВНЕНІ РІДИНОЮ 163

5.1	Поперечні коливання пружного стержня, що несе на вільному кінці резервуар з рідиною	164
5.1.1	Визначення силової дії рідини на резервуар при заданому його русі	164

5.1.2	Математична модель поперечних рухів резервуара з рідиною, закріпленого на пружній опорі	174
5.1.3	Постановка і розв'язання задачі про власні коливання системи «стержень – резервуар – рідина»	184
5.1.4	Вимушені коливання стержня, закріпленого на пружній опорі . .	187
5.2	Колівання стержня з підвісним резервуаром, частково заповненим рідиною	193
5.2.1	Основні припущення і постановка задачі	193
5.2.2	Варіаційний метод розв'язання задачі про власні коливання системи	201
5.2.3	Вимушені коливання стержня з підвісним резервуаром при дії на нього навантаження довільного виду	209
5.2.4	Вимушені коливання стержня з підвісним резервуаром при гармонічному збуренні його основи	215
5.3	Деякі результати розрахунків і їх аналіз	219
5.3.1	Власні коливання резервуара з рідиною, закріпленого на пружній опорі	219
5.3.2	Вимушені коливання резервуара з рідиною, закріпленого на пружній опорі	225
5.3.3	Власні коливання тонкостінного стержня з підвісним резервуаром, частково заповненим рідиною	229
5.3.4	Вимушені коливання системи «стержень - резервуар - рідина» (порівняння з експериментом)	237

РОЗДІЛ 6. НЕОСЕСИМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ, ЧАСТКОВО ЗАПОВНЕНИХ РІДИНОЮ		239
6.1	Постановка задачі	239
6.2	Зведення рівнянь збуреного руху оболонки з рідиною до системи звичайних диференціальних рівнянь	244

6.3	Застосування варіаційних методів для побудови розв'язків додатково введених спектральних задач	251
6.4	Результати розрахунку коливань циліндричної оболонки, частково заповненої рідиною	264
6.4.1	Аналіз розв'язання задачі спряження на основі методу Рітца . . .	265
6.4.2	Колівання оболонки без врахування хвильових рухів рідини . . .	267
6.4.3	Власні коливання оболонки з рідиною з урахуванням хвильових рухів рідини	269
	ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ	274
	СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	277

ВСТУП

Значна кількість сучасних реальних механічних конструкцій являються багатокомпонентними системами, які містять в собі великі маси рідини та приєднані різним чином тверді або пружні тіла скінчених розмірів. Найбільш типовими об'єктами такого роду є ракети-носії, космічні апарати з рідинними двигунами та літаки. Також такі конструкції досить широко представлені у кораблебудуванні та інших галузях промислового будівництва.

При дослідженні динамічної поведінки таких механічних систем доводиться долати значні труднощі, які полягають в необхідності сумісного описання руху декількох істотно різних об'єктів механіки – абсолютно твердого тіла, твердого – деформівного тіла та рідини. Дослідження таких багатокомпонентних механічних систем, як об'єктів аналітичної механіки, що знаходяться під дією нестационарного динамічного навантаження зводиться до розв'язування досить складних початково-граничних задач в частинних похідних. Побудова розв'язків таких задач, як правило, базується на зведенні їх до розв'язування систем звичайних диференціальних рівнянь відносно узагальнених координат, що характеризують збурений рух розглядуваних механічних систем. Для ефективної реалізації цього підходу необхідно знати власні форми коливань відповідних підсистем конструкції. Тому визначення резонансних частот і форм коливань механічної системи є першочерговою задачею в загальному комплексі дослідження її динамічної поведінки. Оскільки ці задачі є базовими, то при побудові наближених методів їх розв'язування перевага надається методам, які дають аналітичну форму розв'язку та забезпечують гарантовану точність обчислювального процесу.

Особливе місце в розрахунковій практиці займають задачі про коливання довільних оболонок обертання з приєднаними до їх торцевих перерізів абсолютно твердих тіл скінчених розмірів. Ці задачі відносяться до числа малодосліджених задач, як в плані побудови математичних моделей розгля-

дуваних механічних систем, так і в плані побудови ефективних алгоритмів для розв'язання відповідних граничних задач. При певних геометричних та фізичних параметрах вказаної системи її коливання можуть бути описані за допомогою спрощених моделей, які базуються на гіпотезі плоских перерізів для деформації оболонки. Такі моделі потребують встановлення їх границь застосування в розрахунковій практиці сучасного машинобудування.

Успіх побудови аналітичного розв'язку задачі про коливання довільних оболонок обертання, що частково заповнені рідиною в істотній мірі залежить від знаходження аналітичної форми розв'язку задачі про власні коливання оболонки без рідини. Розв'язки цієї задачі для системи диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами можна отримати на основі метода Рітца. Розглядувана задача має суттєву особливість, що пов'язана з наявністю малого параметра при старшій похідній, який обумовлений товщиною оболонки. Цей факт є визначальним при виборі існуючих та розробці нових методів інтегрування вихідних рівнянь. У зв'язку з цим, розробка методу Рітца розв'язання сингулярно збурених граничних задач є актуальною задачею в теоретичному і практичному значенні.

Більшість задач динаміки складних механічних систем зводяться до інтегрування рівнянь з кусково-неперервними коефіцієнтами, до крайових задач з розривними граничними умовами, або з розривними навантаженнями. Як правило, такі задачі можуть бути ефективно розв'язані, якщо при цьому застосувати метод декомпозиції області визначення шуканих розв'язків. Тому розвиток методу Рітца для розв'язання задач спряження є важливою задачею механіки суцільного середовища.

Для багатьох практичних випадків має великий інтерес проблема дослідження поперечних коливань вертикально розташованого стержня, який має на вільному торці резервуар з рідиною, а також стержня з приєднаним до нього в деякому перерізі резервуаром у формі тіла обертання (підвісний резервуар), що частково заповнений рідиною. Інтерес до дослідження динаміки

таких конструкцій обумовлений запитами ракетно-космічної техніки, а також високими вимогами до проектування промислових резервуарів в сейсмічно-небезпечних регіонах.

При дослідженні коливань розглядуваних конструкцій під дією зосереджених та розподілених зовнішніх навантажень базовою задачею являється спектральна задача, що описує вільні коливання стержнів з приєднаними до них резервуарами з рідиною. Побудова ефективних розв'язків цієї задачі, що мають аналітичну форму і забезпечують гарантовану точність обчислень, має важливе практичне значення. Представляє також інтерес дослідження вимушених коливань розглядуваних механічних систем при кінематичному збуренні основи стержня.

Дослідженню коливань та стійкості пружних оболонок з рідким наповненням при наявності вільної поверхні приділяється значна увага в науковій літературі. Перші дослідження в цій галузі були проведені у спрощеній постановці задачі в припущенні, що для оболонки виконується гіпотеза плоских перерізів. Таке наближення може бути справедливим тільки для оболонок з певними геометричними характеристиками. В загальному випадку потребується більш точна постановка задачі з використанням рівнянь теорії оболонок. В останні роки набув бурхливого розвитку метод скінченних елементів при розв'язанні задач гідропружності. Цей метод володіє великою універсальністю, але його реалізація потребує потужної обчислювальної техніки, а також прискіпливого аналізу точності отриманих результатів обчислення. Із-за принципових труднощів апроксимації скінченими рядами переміщень оболонки та потенціалу зміщень рідини у всій області їх визначення, метод Рітца, незважаючи на його привабливість, не знайшов широкого застосування в задачах гідропружності.

Таким чином, дослідження в згаданих напрямках є актуальними, як в теоретичному, так і в прикладному значенні.

Результати дисертаційної роботи отримано при виконанні наукових дослі-

джень згідно з планом відділу динаміки та стійкості багатовимірних систем Інституту математики НАН України на 2003 – 2016 роки в рамках держбюджетної теми № III-13-11 «Розробка і дослідження неklasичних математичних моделей динаміки багатовимірних механічних систем типу «тверде тіло – рідина» (номер держ. реєстрації 0111U001031), а також в межах науководослідної теми № III-23-12 «Математичні моделі поліагрегатних систем та чисельно-аналітичні методи розв’язування сучасних задач динаміки, стійкості та оптимального керування» (номер держ. реєстрації 0112U001015) за програмою «Розробка математичних моделей та чисельно-аналітичних методів розв’язування сучасних задач фізико-технічних і медико-біологічних наук та інформаційних технологій».

Частина результатів була отримана під час роботи над DFG проектом німецької наукової спільноти та НАН України «Чисельно-аналітичні моделі і методи для дослідження динаміки рідини в резервуарах» (GZ: 436 UKR 113/33/0-4) в університеті Фрідріха Шиллера, Йена (2004 – 2010 р.р.).

Мета і задачі дисертаційної роботи полягають в наступному:

- побудувати математичні моделі руху наступних механічних систем: довільної оболонки обертання з приєднаним до одного з її торців твердим тілом скінчених розмірів; пружних стержнів з підвісними резервуарами з рідиною, що знаходяться під дією зовнішнього навантаження загального вигляду;
- розробити методи розрахунку частот і форм вільних коливань розглядуваних механічних систем;
- розвиток аналітичних підходів до розв’язання спектральної задачі про коливання довільних оболонок обертання, що частково заповнені рідиною;
- дослідити основні закономірності впливу параметрів зазначених механічних систем на їх частоти і форми власних коливань та встановити межі застосування спрощених постановок розглядуваних задач.

Об’єктом дослідження є складні механічні системи, що включають в себе пружні елементи, та тонкостінні резервуари з рідиною.

Предметом дослідження є спектральні задачі, що описують коливання розглядуваних механічних систем.

Побудова математичних моделей механічних систем здійснюється на основі загальної теорії теоретичної механіки, рівнянь руху рідини та тонкостінних оболонок. Загальна ідеологія побудови наближених розв'язків граничних задач базується на поєднанні варіаційних методів та аналітичної теорії диференціальних рівнянь. При цьому враховується наявність розривів у граничних умовах, навантаженнях, та коефіцієнтах рівнянь; наявність у шуканих розв'язках високих градієнтів у вузьких примезових зонах. Врахування цих особливостей задач дозволяє при побудові їх розв'язків уникнути розв'язання алгебраїчних систем великої розмірності, отримувати для розв'язків та їх перших похідних збіжність в рівномірній метриці.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в наступному:

- Сформульована спектральна задача, що описує неосесиметричні коливання довільної оболонки обертання з приєднаним до її торця твердим тілом, та запропоновано підхід до побудови її наближеного розв'язку в аналітичній формі.

- Розвинуто застосування методу Рітца до розв'язання задач з використанням декомпозиції області визначення шуканих розв'язків. Отримані на цій основі алгоритми забезпечують поточкову збіжність для розв'язків та їх перших похідних, що входять в умови спряження.

- Розроблено енергетичний метод розв'язування сингулярно збуреної спектральної задачі про коливання оболонок обертання. Результати розрахунків свідчать, що запропонований метод відноситься до числа методів з рівномірною збіжністю за малим параметром.

- Запропоновано варіаційний метод визначення власних коливань стержня з підвісним резервуаром, що частково заповнений рідиною. Розв'язані задачі про вимушені коливання розглядуваної механічної системи під дією зовнішніх навантажень та при кінематичному збуренні основи стержня.

- Розвинуто варіаційний метод визначення коливань довільної пружної оболонки обертання, що частково заповнена рідиною. Цей метод базується на застосуванні декомпозиції області визначення для переміщень оболонки та на побудові оберненого оператора для гідродинамічної частини задачі.

Достовірність одержаних в дисертації результатів забезпечується порівнянням отриманих розрахункових даних з існуючими теоретичними та експериментальними даними інших авторів; дослідженням практичної збіжності запропонованих алгоритмів розв'язання задач та контрольованою точністю всіх виконаних обрахунків; перевіркою точності задоволення побудованих розв'язків вихідним рівнянням.

Практичне значення одержаних результатів визначається розробкою ефективних підходів розв'язання складних та важливих у прикладному відношенні класів задач механіки суцільного середовища. Розвинуті в роботі методи дослідження складають основу підвищення ефективності проектно-конструкторських робіт по створенню нових транспортних засобів, які мають в собі приєднані тверді тіла та великі маси рідини.

Основні результати роботи доповідались на таких міжнародних конференціях: International Conference, «Dynamic System Modelling and Stability Investigation» (22 – 25 may 2007, Kyiv); Український математичний конгрес (27 – 29 серпня 2009, м. Київ); Міжнародна математична конференція «Боголюбівські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування» (23 – 30 червня 2013, м. Севастополь); XII International Conference «Dynamical system modelling and stability investigation» (27 – 29 May, 2015, Kyiv).

Результати роботи обговорювалися на наступних наукових семінарах:

Friedrich-Schiller-Universitat Jena, Faculty of Mathematics and Computer Science (Prof. Dr. M. Hermann) (Jena, Germany, 2006, 2008); «Математичні проблеми механіки та обчислювальна математика» при Інституті математики НАН України (керівники – академіки НАН України І.О. Луковський та В.Л.

Макаров) (м. Київ, 2006 р.).

У повному обсязі результати досліджень обговорювалися на сумісному семінарі «Математичні проблеми механіки та обчислювальна математика» та відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань при Інституті математики НАН України (керівники – академік НАН України І.О. Луковський та член-кореспондент НАН України О.А. Бойчук) (м. Київ, 2017 р.).

Також результати досліджень обговорювалися на вченій раді Інституту математики НАН України (м. Київ, 2007, 2015 р.р.)

Зміст дисертаційної роботи викладено в двадцяти трьох наукових працях [99] – [114], [137] – [139], [152] – [155] і чотирьох тезах доповідей на конференціях [115] – [118]. В роботах, що опубліковані у співавторстві, особистий внесок автора полягає в виведенні основних рівнянь та співвідношень, чисельна реалізація розроблених алгоритмів. Співавторам належить постановка задач, рекомендації щодо методів їх розв’язування, участь в обговоренні та систематизації отриманих результатів.

Перший розділ присвячений аналізу праць за темою дисертаційної роботи, розгляду методів дослідження механічних систем, що вивчаються в роботі, обґрунтуванню вибору найбільш ефективних способів моделювання та методів розв’язання розглядуваних спектральних задач.

В другому розділі роботи побудована математична модель взаємодії довільної оболонки обертання з абсолютно твердим тілом скінченних розмірів, яке жорстко прикріплене до одного з її торців та запропоновано наближений метод розрахунку власних коливань розглядуваної механічної системи.

З використанням принципу можливих переміщень отримано варіаційне формулювання розглядуваної задачі. Користуючись традиційними методами варіаційного числення сформульована інтегро-диференціальна постановка задачі про визначення рівноважного стану довільної оболонки обертання та твердого тіла при дії на них навантаження самого загального вигляду.

Спираючись на принцип Д’Аламбера сформульована крайова задача на

власні значення, що описує вільні коливання тіла і оболонки. При цьому показано, що сумісні коливання оболонки та твердого тіла можливі лише при числі хвиль оболонки в круговому напрямку рівному одиниці. При числі хвиль більшому за одиницю, коливання відбуваються так, як і у випадку жорсткого кріплення контура оболонки в місці приєднання твердого тіла.

Проаналізовано ускладнення з якими доводиться стикатися при розв'язанні сформульованої спектральної задачі та обгрунтовано доцільність застосування варіаційного методу при побудові її наближеного розв'язку. На основі метода Рітца запропонована схема знаходження стаціонарних значень відповідного квадратичного функціоналу. На відміну від традиційного методу Рітца, побудовані представлення для переміщень оболонки не є незалежними, оскільки містять в собі параметри руху твердого тіла, що підлягають визначенню. Базисні функції у цих представленнях будувалися на класі степеневих функцій та з використанням многочленів Лежандра. Відзначено, що апроксимація шуканих розв'язків на основі поліномів Лежандра дозволяє істотно покращити стійкість обчислювального процесу по відношенню до степеневого базису.

На практиці використовують різного роду спрощені моделі реальної конструкції за рахунок введення в розгляд додаткових гіпотез та припущень. Як правило використовується класична балкова теорія Ейлера – Бернуллі. Природним чином виникає питання про можливість розширення меж застосування спрощеної моделі шляхом врахування деформацій зсуву та інерції повороту поперечного перерізу балки.

Розглядається механічна система, яка складається з балки Тимошенка та абсолютно твердого тіла, яке приєднане до одного з її торців. Сформульована спектральна задача, що описує вільні коливання даної системи. З цієї задачі отримується, як частинний випадок, задача про коливання балки Ейлера – Бернуллі з приєднаним твердим тілом. Отримано точний розв'язок для балки Тимошенка. З наведеного аналізу результатів розрахунку частот та форм

власних коливань циліндричної оболонки з приєднаним твердим тілом впливає, що балкова теорія, побудована на врахуванні деформацій зсуву та інерції повороту поперечного перерізу має суттєво більшу область застосування по відношенню до елементарної теорії балок. Теорія балок Тимошенка дає прийнятні для практичних розрахунків результати при визначенні не лише нижчих, але і вищих форм коливань даної механічної системи.

Третій розділ дисертаційної роботи присвячений розробці рекомендацій щодо побудови координатних функцій в методі Рітца при розв'язанні задачі про коливання довільних оболонок обертання в умовах її сингулярного збурення.

Скориставшись принципом можливих переміщень, розв'язок вихідної системи рівнянь при відповідних граничних умовах можна звести до варіаційної задачі відшукування стаціонарних значень деякого функціонала. Розв'язок цієї задачі знаходиться за допомогою метода Рітца, успіх застосування якого істотно залежить від вибору базисних функцій для апроксимації шуканих розв'язків.

Послідовності координатних функцій повинні бути повними та лінійно незалежними. Слід відзначити, що виконання цих вимог є необхідною, але не достатньою умовою для ефективно побудови мінімізуючої послідовності Рітца. При великій кількості координатних функцій необхідно розв'язувати алгебраїчні системи великої розмірності. При цьому похибки округлення починають відігравати суттєву роль з одного боку при обчисленні коефіцієнтів алгебраїчної системи, а з іншого – при розв'язанні цієї системи рівнянь. Все це призводить до втрати стійкості обчислювального процесу до досягнення граничних значень розв'язків. Таким чином вибір базисних функцій є далеко не тривіальною задачею.

На швидкість збіжності методу Рітца суттєво впливає відносна товщина оболонки. Зменшення її призводить до того, що розглядувана гранична задача переходить у розряд сингулярно збурених спектральних задач. Для

таких задач характерно наявність вузьких примежових шарів у яких шукані розв'язки мають великі градієнти. У зв'язку з цим виникає проблема побудови таких базисних функцій, для яких алгоритм знаходження розв'язків вихідної задачі володів би рівномірною збіжністю по параметру. У зв'язку з цим попередньо встановлюється структура розв'язку задачі і характеру його виродження, коли параметр при старшій похідній наближається до нуля. Для встановлення цього факту використовується загальна теорія асимптотичного інтегрування сингулярно збурених задач. Для незамкнених в меридіональному напрямку оболонок побудова регулярних інтегралів вихідних рівнянь здійснюється за допомогою прямого розкладу їх по малому параметру. При цьому показано, що ці інтеграли є аналітичними функціями і можуть бути представлені у вигляді ряду Тейлора.

Наступні інтеграли шукаються у вигляді розкладів, що включають в себе експоненціальний множник. Побудовані таким чином лінійно незалежні розв'язки вихідної системи рівнянь локалізовані лише поблизу країв оболонки. Для таких оболонок обертання, коли інтеграл, що входить в показник експоненціального множника не обчислюється в елементарних функціях, пропонується користуватися представленням примежових функцій у формі Вішика – Люстерника.

Наявність експоненціальних множників у примежових інтегралах свідчить в якійсь мірі про те, що традиційні методи розв'язання сингулярно збурених задач не можуть однаково добре працювати в усій області зміни параметра при старшій похідній. При малих показниках експонента обчислюється відомим рядом Тейлора для неї, тоді як при великих показниках, вона обчислюється за допомогою раціональної апроксимації.

Отримані результати дозволяють сформулювати основні принципи побудови координатних функцій для розв'язання розглядуваної задачі варіаційним методом. Загальний розв'язок необхідно підкорити головним граничним умовам задачі. Виходячи з цих умов, знаходяться додаткові співвідношення

між коефіцієнтами в формальних представленнях для шуканих розв'язків. Після підстановки цих співвідношень у загальний розв'язок і деяких перетворень отримуємо набір базисних функцій.

Далі розглядаються куполоподібні оболонки обертання, для яких у вершині радіуси кривизни співпадають та існує горизонтальна дотична площина. Для таких оболонок деякі коефіцієнти вихідних рівнянь мають нулі першого і другого порядку. При чисельному інтегруванні цих рівнянь в літературі є різні рекомендації наближеного характеру, що дозволяють обійти цю трудність. Пропонується вважати, що в полюсі оболонки є отвір малого радіуса з відповідними граничними умовами на його контурі. Такий підхід дозволяє з певною точністю обчислювати частоти коливань оболонки і не дає можливості визначення її напружено-деформованого стану. У зв'язку з цим встановлюється структура фундаментальних інтегралів вихідних рівнянь використовуючи аналітичну теорію диференціальних рівнянь.

Отримана асимптотика розв'язків забезпечує скінченність деформацій оболонки в її полюсі. По суті отримані представлення розв'язків включають в себе всі послідовні наближення при асимптотичному інтегруванні вихідних рівнянь. В подальшому невизначені постійні в цих розкладах знаходяться із головних граничних умов і умов стаціонарності відповідного функціонала. Отриманий при цьому степеневий базис замінюється поліномами Лежандра, абсолютні значення яких не ростуть зі збільшенням їх порядку. Це дозволяє в значній мірі підвищити стійкість обчислюваного процесу.

Для оцінки ефективності запропонованих алгоритмів розглядуваної спектральної задачі проведено розрахунок частот і форм власних коливань циліндричної, зрізаної конічної та сферичної оболонок. Розрахункові дані для циліндричної та конічної оболонок показують, що запропоновані системи базисних функцій забезпечують рівномірну збіжність розв'язків і перших чотирьох похідних в усіх точках інтегрування вихідних рівнянь. Розроблений алгоритм відноситься до числа рівномірних алгоритмів за параметром. По-

рівняння розрахункових даних по частотам з існуючими їх точними значеннями (Ю.Ю. Швейко) свідчить про їх повне співпадання. Поточкова збіжність розв'язків і їх похідних дозволяє провести перевірку задоволення їх вихідним рівнянням. При цьому виявилось, що побудовані варіаційним методом узагальнені розв'язки в певному сенсі близькі до точних розв'язків.

На прикладі розрахунку частот та форм коливань сферичного купола показано, що запропонований алгоритм дає можливість визначати сили та моменти в усіх точках серединної поверхні оболонки. Це дозволяє використовувати цей алгоритм для аналізу динамічної міцності оболонок.

Четвертий розділ дисертаційної роботи присвячений розробці варіаційного метода побудови наближених розв'язків спектральних задач, поставлених з позиції спряження розв'язків. При цьому розглядаються вільні коливання стержня кусково-неперервної структури та крайова задача для рівнянь в частинних похідних про вільні коливання рідини в резервуарах складної геометрії. Ці задачі мають самостійне прикладне значення.

В багатьох задачах математичної фізики при їх розв'язанні виникає необхідність в розбитті області інтегрування вихідних рівнянь на окремі підобласті з наступним введенням на поверхнях розділу відповідних умов спряження. У зв'язку з цим розробка методів розв'язання граничних задач з використанням методу декомпозиції області є актуальною задачею.

Побудова наближених розв'язків задач в такій постановці має певні труднощі, які пов'язані в першу чергу з виконанням граничних умов спряження на суміжних границях введених підобластей. Розробці різних алгоритмів розв'язання задач спряження, які базуються на застосуванні метода скінченних елементів, присвячена велика кількість робіт. В той же час застосування метода Рітца в поєднанні з методом декомпозиції області не знайшло достатнього розвитку. В даній роботі розвинуто варіаційний метод розв'язання граничних задач, поставлених з позицій задач спряження.

Загальна ідеологія такого підходу до побудови розв'язків полягає в на-

ступному. Вихідна задача зводиться до еквівалентної варіаційної задачі для деякого квадратичного функціоналу I , використовуючи при цьому (наприклад) принцип можливих переміщень. При цьому встановлюється, що шукані функції на суміжній границі ведених підобластей повинні задовольняти певним кінематичним та силовим умовам спряження. При цьому показується, що якщо клас допустимих функцій задовольняє кінематичним умовам спряження, то силові умови будуть природними граничними умовами для функціоналу I . Побудова класу допустимих функцій, що задовольняють кінематичним умовам спряження представляє собою в загальному випадку досить складну задачу. У зв'язку з цим виникає питання про перетворення функціоналу I в такий узагальнений функціонал, для якого всі умови спряження були б природними умовами. Теорія перетворення варіаційних задач створена вже досить давно (Р. Курант, Д. Гільберт), але в літературі відомо досить незначна кількість робіт до її застосування.

Кінематичні умови спряження можливо розглядати як допоміжні обмеження на задачу знаходження стаціонарних значень функціоналу I . Виключити їх з розв'язку можливо за допомогою методу множників Лагранжа. в результаті розв'язок розглядуваної задачі зводиться до знаходження стаціонарних значень функціоналу I_1 відносно варіацій шуканих функцій та множників Лагранжа. Для уникнення штучного збільшення числа невідомих в задачі з першої варіації функціонала I_1 при вільному варіюванні шуканих функцій та множників Лагранжа знаходяться явні вирази для цих множників. Виключаючи їх з функціоналу I_1 , отримуємо узагальнений функціонал I_2 , який залежить лише від шуканих функцій. Граничні умови спряження для функціоналу I_2 будуть автоматично виконуватись для функцій, що доставляють цьому функціоналу стаціонарні значення. Це є досить важливим моментом в застосуванні методу Рітца в поєднанні з методом декомпозиції області при побудові наближених розв'язків спектральних задач.

Розглядувана методика була застосована до знаходження частот вільних

поперечних коливань стержня, що складається з двох спряжених стержнів з різними фізичними та геометричними характеристиками. Для цієї задачі похідні другого і більш високого порядку від шуканих розв'язків допускають розриви першого роду в точці спряження стержнів. Визначення стаціонарних значень узагальненого функціоналу здійснюється за допомогою метода Рітца з використанням многочленів Лежандра, в якому шукані розв'язки варіюються незалежно від їх визначення в кожній з підобластей. В результаті вихідна задача зводиться до розв'язання узагальненої алгебраїчної проблеми.

Приклади розрахунку частот і форм коливань розглядуваного стержня показують, що запропонований алгоритм забезпечує ефективне обчислення нижчої частини спектра розглядуваної задачі та збіжність в рівномірній метриці розв'язків і їх похідних, що входять до складу умов спряження. Граничні значення частот, форм, моментів і перерізуючих сил співпадають з точними розв'язками задачі.

Із загальної теорії варіаційних методів (С.Г. Міхлін) випливає, що послідовні наближення для функцій і їх перших похідних збігаються до своїх точних значень рівномірно, тоді як похідні від форми коливань вище другого порядку збігаються лише в середньому. Результати обчислень показують, що варіаційний метод має збіжність розв'язків і перших трьох її похідних в рівномірній метриці, як на границях підобластей, так і в середині їх.

Аналогічний підхід був використаний при розв'язанні двомірної спектральної задачі про вільні коливання рідини в складному резервуарі, що має форму тіла обертання. Як і в попередній задачі розрахунок власних коливань рідини в конкретному резервуарі свідчить про те, що даний алгоритм забезпечує поточкову збіжність для розв'язків та їх нормальних похідних на суміжній границі введених підобластей. Запропонований вище спосіб побудови розв'язків розглядуваної задачі можна істотно спростити, якщо одна з підобластей є канонічною (границі підобластей співпадають з координатними лініями однієї з систем координат).

Таким чином, побудова наближених розв'язків спектральних задач з використанням методу декомпозиції та методу Рітца для функціоналу, для якого умови спряження є природними граничними умовами, дозволяє отримати досить ефективний алгоритм розрахунку частот і власних функцій цих задач. Цей метод в наступних розділах роботи використовується при побудові розв'язків задач з розривними граничними умовами та розривними навантаженнями.

П'ятий розділ дисертаційної роботи присвячений дослідженню поперечних коливань вертикально розташованого пружного стержня, який має на вільному торці резервуар з рідиною, а також тонкостінного стержня з приєднаним до нього в деякому перерізі резервуара у формі тіла обертання, який частково заповнений ідеальною рідиною.

Розглядається осесиметрична конструкція, що складається з вертикально розташованої пружної оболонки обертання, до однієї з паралелей якої за допомогою шпангоута прикріпленій абсолютно жорсткий резервуар, частково заповнений ідеальною нестисливою рідиною. Типовими конструкціями такого роду є корпус рідинної ракети, фюзеляж літака, а також деякі промислові резервуари. Динаміка таких конструкцій розглядається в рамках лінійної теорії пружності і гідродинаміки. При певних геометричних параметрах даної конструкції тонкостінну оболонку в деякому сенсі можна ототожнити з пружним стержнем (розділ 2). Тому в якості розрахункової схеми використовується пружний стержень з підвішеним в деякому його перерізі жорстким резервуаром з рідиною. Для визначеності вважається, що нижній торець стержня закріпленій, а верхній – вільний. Вважається, що до розглядуваної механічної системи прикладені зовнішні зосереджені та розподілені навантаження.

Виходячи з варіаційного принципу можливих переміщень побудована загальна математична модель динаміки розглядуваної механічної системи, що знаходиться під дією зовнішнього навантаження. Отримані граничні задачі для рівнянь в частинних похідних далі за допомогою метода Бубнова –

Гальоркіна приводяться до системи звичайних диференціальних рівнянь з незалежною змінною по часу. Ця система приймає найбільш простий вигляд, якщо у якості базисних функцій при апроксимації шуканих розв'язків взяти власні форми коливань стержня з рухомим резервуаром.

Для випадку, коли масові та жорсткісні характеристики стержня є кусково-сталими функціями, для розв'язання подібної спектральної задачі використовується чисельний метод початкових параметрів (Б.І. Рабінович, В.П. Шмаков). Оскільки граничні умови спектральної задачі в місті кріплення резервуара мають в точці розриви першого роду, то для її розв'язання використовується метод Рітца в поєднанні з декомпозицією області визначення шуканого розв'язку. Задача зводиться до відшукування стаціонарних значень узагальненого функціонала, для якого умови спряження є природними граничними умовами. В результаті визначення частот і форм коливань стержня з підвісним резервуаром зведено до розв'язання однорідної алгебраїчної задачі невеликої розмірності.

Окремо також розв'язана задача про коливання пружного стержня з приєднаним до нього на вільному торці резервуаром з рідиною. Оскільки розглядувана задача не має розривних граничних умов, то при її розв'язанні отримано більш простий алгоритм ніж алгоритм для стержня з підвісним резервуаром. Слід відзначити, що другий алгоритм дозволяє розраховувати і випадок кріплення резервуара до верхнього торця стержня. Це використовувавалось для незалежного контролю обчислень за запропонованими схемами. Для резервуара в формі кругового циліндра проаналізована ефективність алгоритмів розв'язання розглядуваних задач та наведено деякі результати розрахунку частот і форм коливань даних механічних систем.

На практиці зустрічаються задачі, коли коливання розглядуваних конструкцій викликаються деяким заданим горизонтальним гармонічним рухом основи стержня. Розв'язання цієї задачі по визначенню амплітуд усталених коливань зведено до розв'язання неоднорідної алгебраїчної системи. Наведені

результати розрахунку для випадку кінематичного збурення основи стержня показують, що малі відхилення стержня від положення рівноваги можуть викликати великі амплітуди коливань рідини в резервуарі.

Шостий розділ присвячено розробці наближеного методу розв'язання задачі про коливання оболонок обертання, які частково заповнені ідеальною нестисливою рідиною. Виходячи з лінійної теорії руху ідеальної, нестисливої рідини та лінійної теорії тонких оболонок, наведено формулювання початково-граничної задачі, що описує взаємозв'язані коливання оболонки та рідини, яка в ній знаходиться, при наявності вільної поверхні. У зв'язку з достатньою складністю сформульованої задачі для рівнянь в частинних похідних, як правило її розв'язання зводиться до розв'язання системи звичайних диференціальних рівнянь з незалежною змінною по часу, використовуючи при цьому метод Бубнова – Гальоркіна. При реалізації цього підходу необхідно володіти деякими системами базисних функцій для апроксимації потенціалу зміщень рідини та переміщень оболонки. Для визначення хвильових рухів рідини в якості базисних функцій вибираються власні функції спектральної задачі з параметром в граничній умові, яка пов'язана з вільними коливаннями рідини в абсолютно жорсткому резервуарі. В свою чергу для апроксимації переміщень оболонки і потенціалу зміщень рідини, що обумовлений деформацією оболонки, вибираються власні форми коливань оболонки з рідиною при відсутності хвильових рухів на її вільній поверхні. Показується, що введена допоміжна задача має дискретний спектр з точкою згущення на нескінченності, а її власні функції володіють повнотою на всій серединній поверхні оболонки, та задовольняють певним умовам ортогональності.

Таким чином основною проблемою при розв'язанні розглядуваної задачі гідропружності є проблема знаходження скінченного числа власних функцій додатково введеної спектральної задачі. В даній роботі розроблено наближений метод розв'язання цієї задачі з використанням її еквівалентного варіаційного формулювання.

За допомогою введення до розгляду функції Гріна для задачі Неймана, додатково введена спектральна задача зводиться до граничної задачі для системи інтегро-диференціальних рівнянь. Оскільки оболонка знаходиться під дією розривного динамічного навантаження зі сторони рідини, то для ефективної апроксимації розв'язків розглядуваної задачі та забезпечення можливості вирахування переміщень оболонки і її перших похідних в кожній точці інтервалу інтегрування рівнянь, доцільно розбити цей інтервал на дві підобласті. Перша підобласть відповідає змоченій частині поверхні оболонки, а друга – не змоченій частині оболонки, що залишилась. При цьому на граничній лінії цих підобластей повинні виконуватись вісім досить складних граничних умов спряження розв'язків. Сформульована задача спряження для системи інтегро-диференціальних рівнянь розв'язується за допомогою метода Рітца. При цьому, згідно з розділом 3 роботи, попередньо будується узагальнений функціонал, для якого всі вісім умов спряження будуть автоматично виконуватись при знаходженні його стаціонарних значень. Оскільки знайти функцію Гріна для даної граничної задачі в довільній області не вдається, то в роботі запропонована наближена побудова оберненого оператора для гідродинамічної частини задачі, яка зводиться до розв'язання неоднорідних задач Неймана для скінченного числа відповідних граничних умов. Такий підхід дозволяє розділити труднощі побудови розв'язків вихідної задачі гідропружності, які виникають при сумісному інтегруванні рівнянь в частинних похідних для потенціалу зміщень та системи звичайних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, що описують коливання довільної оболонки обертання.

На основі запропонованої методики визначення динамічних характеристик довільних оболонок обертання, які частково заповнені рідиною, наведені результати розрахунків вільних коливань циліндричної оболонки і рідини. Проаналізована ефективність розв'язання задачі спряження для оболонок обертання на основі розробленого варіаційного методу, збіжність наближених

розв'язків в залежності від числа базисних функцій для переміщень оболонки і для потенціалу зміщень рідини. Проведені розрахунки вільних коливань розглядуваної механічної системи як з врахуванням хвильових рухів рідини, так і без них, а також порівняння розрахункових даних з існуючими в літературі точними розв'язками задачі.

Дисертаційна робота виконана у відділі динаміки та стійкості багатовимірних систем Інституту математики НАН України.

РОЗДІЛ 1

РОЗВИТОК ДОСЛІДЖЕНЬ ДИНАМІКИ БАГАТОКОМПОНЕНТНИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ (ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ)

Дисертаційна робота присвячена розробці наближених методів розрахунку власних коливань довільних оболонок обертання з приєднаними до їх торців твердих тіл скінченних розмірів, пружних стержнів з підвсними ємностями з рідиною та довільних тонкостінних оболонок обертання, що частково заповнені рідиною.

В розрахунковій практиці часто зустрічаються задачі про визначення власних коливань довільних оболонок обертання з приєднаними до їх торцевих перерізів абсолютно твердими тілами. Наявність цих приєднаних тіл може призвести до суттєвої зміни як частот, так і форм власних коливань оболонки, яка є одним із складових елементів в механічній системі «оболонка – приєднані тіла». В залежності від властивостей приєднаних елементів (їх жорсткості або пружності) та способів їх кріплення до оболонки можливі різні розрахункові схеми, які дозволяють в деякій мірі спростити постановку та розв'язання розглядуваної задачі. В ряді випадків розмірами тіла можна знехтувати і говорити про нього як про приєднану масу.

До числа перших робіт, в яких досліджувалися поздовжні та крутильні коливання кругової циліндричної оболонки із зосередженими масами на її торцях відносяться роботи В.Є. Бреславського [14, 15]. Теоретичному та експериментальному дослідженню коливань ребристої циліндричної оболонки, деформівний стан якої описується на основі конструктивно ортотропної моделі, присвячені роботи [5, 81, 82]. При цьому розглядаються оболонки, що несуть зосереджені маси та тверді тіла, які приєднані до поверхні оболонки за допомогою жорстких або пружних в'язів. При побудові розв'язків задачі про сумісні коливання оболонки та приєднаних до її поверхні тіл часто

використовуються форми коливань шарнірно опертої по торцям циліндричної оболонки. Дослідження коливань оболонок обертання з зосередженими масами та осциляторами на їх поверхні розглянуті в роботах [63, 65].

В роботах А.С. Каірова [43, 44] побудована математична модель та запропонована методика розрахунку власних форм та частот вільних коливань підкріплених оболонок обертання з приєднаними тілами до її поверхні. Методика розв'язання розглядуваних задач базується на використанні варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського і методу Рітца. Координатні функції для переміщень оболонки вибираються у вигляді добутку тригонометричних і балкових функцій, які залежать від кутової та поздовжньої координат відповідно.

Дослідженню вільних коливань попередньо напруженої безмоментної оболонки обертання із гіперпружного матеріалу з приєднаним на одному з її торців абсолютно твердим дископодібним тілом присвячені роботи В.С. Кладіноги та В.А. Троценка [51, 52, 94]. Задача розв'язується у два етапи. Перший етап пов'язаний з розв'язанням нелінійної задачі статичної високоеластичної безмоментної оболонки обертання та приєднаною до неї жорсткою концентричною вставкою з метою знаходження її напружено-деформованого стану під дією гідростатичного навантаження. На другому етапі розв'язується задача про зв'язані коливання дископодібного тіла та деформованої рівномірним тиском оболонки обертання. Запропоновано ефективні методи розв'язання вказаних граничних задач на основі їх еквівалентних варіаційних формулювань і встановлено границі застосування теорії пологих оболонок в припущенні лінійної залежності внутрішніх зусиль від деформацій.

При певних параметрах розглядуваної механічної системи її коливання можуть бути описані за допомогою спрощених розрахункових моделей в яких оболонка замінюється пружним тонкостінним стержнем. Такі моделі значно спрощують розрахунок динаміки механічних систем, до складу яких входять оболонки з приєднаними тілами в якості підконструкцій. Такі спрощені мо-

делі потребують встановлення границь їх застосування.

Наведений вище короткий аналіз літературних джерел свідчить про те, що на теперішній час існує досить значна кількість робіт по вивченню коливань оболонок з приєднаними до її поверхні твердими тілами. Значно менш робіт відноситься до дослідження коливань оболонок з приєднаними до їх торцевих перерізів твердих тіл. Вивчення динамічних процесів в таких системах викликає певні труднощі як при побудові їх математичних моделей, так і при розробці методів розв'язання граничних задач, що виникають при цьому.

На теперішній час теорія оболонок отримала досить повний розвиток. Побудові математичних моделей оболонок і методам їх розрахунку присвячені узагальнюючі монографії [5, 12, 18, 19, 29, 34, 38, 39, 40, 48, 49, 64, 75, 76, 77, 79, 122]. В роботах В.З. Власова, В.В. Новожилова та А.І. Лур'є теорія тонких оболонок базується на гіпотезах Кірхгофа – Лява. Моментна теорія оболонок, що побудована на цих гіпотезах досить успішно використовується для розв'язання задач статички та динаміки. В рамках гіпотез Кірхгофа – Лява отримуються спрощені крайові задачі. Це дозволяє формулювати умови ортогональності для власних форм коливань оболонки і гарантувати дійсність їх частот.

Широке застосування в практичних розрахунках отримав варіант технічної теорії оболонок, запропонований В.З. Власовим, який приводить до найбільш простих рівнянь і самоспряжених крайових задач. Рівняння цієї теорії можуть бути отримані з варіаційних принципів механіки, що дозволяє використовувати для побудови наближених розв'язків крайових задач прямі методи математичної фізики [71, 72].

Традиційний підхід до дослідження вільних коливань пружних елементів пов'язаний з розглядом ізотропних оболонок канонічної конфігурації типу кругового циліндра, конуса, сфери та ін. В якості основного засобу для розв'язання відповідних крайових задач тут використовуються точні аналіти-

чні методи, які дозволяють виявити якісні і кількісні особливості динамічних характеристик оболонкових елементів. Детальний аналіз спектра власних частот деяких типів оболонок з використанням точного розв'язання крайових задач наведено в роботах [4, 13, 30, 123, 136, 149]. Отримані результати мають важливе значення для розуміння математичної і фізичної суті задачі і є своєрідним еталоном для побудови наближених розв'язків.

Природне розширення класу оболонок і часто складна форма розв'язків, які отримані на основі точного інтегрування вихідних рівнянь, приводять до необхідності використання різного роду наближених методів математичної фізики для відшукування частот і форм власних коливань пружних конструкцій. Широкого розвитку для розв'язання одновимірних динамічних задач теорії оболонок набув метод, який базується на зведенні вихідної граничної задачі на власні значення до послідовності задач Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами [35, 48]. У зв'язку з тим, що розв'язки для оболонок в більшості випадків є функціями з великою змінністю, то пряме зведення задачі до розв'язання послідовності задач Коші може призвести до нестійкості обчислень. Це обумовлено тим, що за рахунок втрати значущих цифр, система векторів - розв'язків задач Коші стає майже лінійно залежною і це не дозволяє знайти постійні інтегрування при виконанні граничних умов на другому кінці інтервалу інтегрування системи рівнянь. Уникнути в деякій мірі вищевказані труднощі дозволяє метод дискретної ортогоналізації С.К. Годунова [28]. Обчислювальні експерименти показали на певну ефективність і точність при чисельному розв'язанні розглядуваного класу задач [2, 35, 48, 77].

При розв'язанні задач теорії пластин та оболонок часто використовують варіаційні принципи механіки. Відомо, що основні закони механіки описуються диференціальними співвідношеннями і одночасно підкорюються так званим мінімальним принципам [1, 20, 62, 89]. При цьому проблема розв'язання граничних задач теорії пластин та оболонок може бути зведена до еквівален-

тної варіаційної задачі відшукування стаціонарних значень деяких функціоналів, для яких вихідні диференціальні рівняння є рівняннями Ейлера. Для розв'язання задачі варіаційного числення можуть використовуватися прямі методи, які дозволяють звести вихідну задачу до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь. В силу вказаної вище еквівалентності, розв'язки, отримані за допомогою цих методів, є одночасно і розв'язками в узагальненому сенсі [71, 88] крайових задач для диференціальних рівнянь.

З іншого боку, варіаційні принципи механіки є потужним засобом для виведення основних диференціальних рівнянь і відповідних їм граничних умов. Так із варіаційного принципу Лагранжа можна отримати рівняння рівноваги, граничні умови і умови спряження конструкцій.

Найбільш поширеним методом для відшукування стаціонарних значень функціоналів є метод Рітца [47, 88, 91]. Відповідно до основної ідеї цього методу, розв'язки для переміщень оболонки представляються у вигляді розкладів по деяким системам координатних функцій. Підставивши ці розклади у функціонал, задача зводиться до відшукування екстремуму функції, яка залежить від коефіцієнтів введених розкладів. Необхідні умови стаціонарності цієї функції приводять до системи алгебраїчних рівнянь. Послідовності координатних функцій повинні бути повними і лінійно незалежними. Слід відзначити, що виконання цих вимог не є достатньою умовою для ефективно побудови мінімізуючої послідовності Рітца. Справа в тому, що при великому числі координатних функцій необхідно розв'язувати алгебраїчні системи великої розмірності. При цьому похибки округлення чисел починають відігравати суттєву роль при обчисленні коефіцієнтів алгебраїчної системи, а також при розв'язанні цієї системи. Все це приводить до втрати стійкості обчислювального процесу до досягнення граничних значень розв'язків. Таким чином, успіх застосування варіаційного методу до розв'язання крайових задач в значній мірі залежить від вибору послідовності координатних функцій. В якості координатних функцій, як правило, використовуються одновимірні

або двовимірні многочлени, а також тригонометричні функції [24, 46, 88].

Тригонометричний базис найбільш доцільно використовувати для апроксимації періодичних розв'язків. Поліноміальні координатні функції придатні лише для тих випадків, коли в розкладах Рітца можна обійтися невеликою кількістю членів. В іншому випадку елементи алгебраїчної системи дуже швидко зростають по абсолютній величині і це може суттєво вплинути на стійкість обчислювального процесу. Певне розповсюдження в теорії оболонок отримали координатні функції з використанням балкових функцій, які задовольняють граничним умовам у відповідності з вихідною задачею [31, 43, 45, 120]. Однак, як показали обчислення, при розв'язанні задачі про коливання циліндричної оболонки, яка має точний розв'язок, використання цих базисних функцій ведуть до завищених результатів по частоті коливань на 5–7%. Цілком ймовірно, що це обумовлено тим, що при апроксимації переміщень оболонки в тангенціальному напрямку відбувається звуження класу допустимих функцій за рахунок граничних умов, яким задовільняють балкові функції.

При варіаційному підході до розв'язання задач про коливання оболонкових систем, найбільш доцільним є використання варіаційного принципу Лагранжа. В цьому випадку системи координатних функцій повинні задовольняти лише геометричним граничним умовам. Задоволення силових граничних умов не є необхідним, оскільки вони є природними граничними умовами для відповідного функціоналу. Ця обставина є важливою перевагою варіаційного методу розв'язання крайових задач в порівнянні з іншими методами математичної фізики.

В той же час в багатьох випадках не вдається використати метод Рітца із за принципових труднощів апроксимації шуканого розв'язку єдиним чином у всій області інтегрування вихідних рівнянь. Тому в останній час бурхливого розвитку набув метод скінченних елементів (МСЕ) при розв'язанні задач сучасного машинобудування [27, 42]. МСЕ виник відносно недавно, хоча

ідея представлення деякого суцільного середовища у вигляді системи елементів скінченних розмірів бере свій початок ще від Пуассона (1829 р.). У відповідності з цим методом вихідна область розбивається на малі частинки – скінченні елементи. Далі в середині кожного елемента задаються в максимально простому вигляді шукані функції, які тотожно дорівнюють нулю всюди, окрім розглядуваного елемента. Як правило, в якості інтерполяційних функцій використовуються поліноми другої, третьої, або четвертої степені, як найбільш прості та зручні у використанні при обчисленнях. Спряження скінченних елементів здійснюється у вузлах. Далі для визначення невідомих величин у вузлах області використовують один з варіаційних принципів. В результаті отримується алгебраїчна система рівнянь стрічкової структури. Критерієм достовірності отриманих результатів є порівняння їх з точними для модельних задач, або співставлення результатів при збільшенні числа вузлів. МСЕ володіє великою універсальністю і дозволяє розв'язувати досить широкий клас задач.

Наведені вище методи розв'язування граничних задач теорії оболонок істотно залежать від величини відносної товщини оболонки.

Система диференціальних рівнянь, що описує власні коливання оболонки, має одну з істотних особливостей, яка пов'язана з наявністю малого параметра при старшій похідній, обумовленого тонкостінністю оболонки. Для сингулярно збурених крайових задач характерна наявність вузьких приміжових шарів, в яких розв'язки мають високі градієнти. Апроксимація цих розв'язків скінченними різницями чи відрізками рядів не дає позитивного результату, оскільки для отримання з необхідною точністю розв'язків доводиться зменшувати крок дискретизації, або брати велику кількість членів в розкладах для шуканих функцій. Як наслідок це призводить до ускладнення отриманих розв'язків і втрати стійкості обчислень. У зв'язку з цим виникає проблема розробки таких методів розв'язання сингулярно збурених задач, які мали б однакову збіжність, як при малих, так і при середніх значеннях

параметра при старшій похідній. Такі методи отримали в літературі назву рівномірних методів за параметром. Розробці рівномірних різницевих схем присвячена монографія Є. Дулана, Дж. Міллера, У. Шилдерса [41], в якій наведено досить загальний огляд літературних джерел з даного питання.

Широке застосування асимптотичних методів стосовно до спектральних задач теорії оболонок наведено в монографії А.Л. Гольденвейзера, В.Б. Лідського та П.Є. Товстіка [30].

Застосування аналітичних методів типу Рітца до розв'язання задач теорії оболонок істотно ускладнено у зв'язку з побудовою систем базисних функцій, які враховували б наявність у розв'язках великих градієнтів у вузьких зонах граничних точок задачі.

Наближені розв'язки крайових задач з розривними коефіцієнтами в рівняннях, а також рівнянь з розривними граничними умовами чи навантаженнями в ряді випадків можуть бути ефективно побудовані, якщо область визначення шуканих функцій розбити на окремі підобласті з введенням при цьому на поверхнях розділу відповідних умов спряження. Тому розробка алгоритмів розв'язання крайових задач з використанням методу декомпозиції області є важливою задачею, про що свідчать роботи [90, 129, 130, 133, 135, 141, 151] та наведені в них посилання. Побудова розв'язків в такій постановці має певні труднощі, які в першу чергу пов'язані з виконанням граничних умов спряження на суміжних границях уведених підобластей. Якщо підобласті мають канонічну форму, то допомогою методу Фур'є вихідну задачу можливо звести до розв'язання систем алгебраїчних рівнянь [6]. При розв'язанні задач методом спряження може бути використаний ітераційний метод Шварца [47], який отримав свій подальший розвиток в багатьох роботах, наприклад [143, 144].

При застосуванні варіаційних методів з використанням декомпозиції області виникає проблема побудови такого узагальненого функціоналу, для якого умови спряження були б природними граничними умовами.

Розробці різного роду модифікацій метода скінченних елементів до розв'я-

зання задач спряження в літературі приділяється значна увага [1, 33, 80, 83, 89, 146]. В той же час метод Рітца при розв'язуванні задач спряження не знайшов належного застосування.

Дослідження поперечних коливань вертикально розташованого стержня з приєднаним до нього резервуаром з рідиною мають великий практичний інтерес. Теорія коливань конструкцій, що несуть резервуари з рідиною розроблена в роботах Б.І. Рабіновича [86] та В.П. Шмакова [126]. Використання еквівалентної маятникової моделі для дослідження коливань таких механічних систем запропоновано в роботах Dutta S., Mandal A., Dutta S.C. [134] і Sweedan A.M. [150]. Експериментальні дослідження вимушених коливань стержня з приєднаним до його верхнього торця резервуаром з рідиною при гармонічному збуренні основи стержня наведені в роботі [132]. При дослідженні руху розглядуваних конструкцій під дією зосереджених розподілених навантажень базовою задачею є спектральна задача, що описує власні коливання стержня з приєднаним до нього резервуаром з рідиною. Для розв'язання цієї задачі в інженерній практиці використовуються чисельні методи, які вимагають проведення великої кількості обчислень.

Найбільш ефективним чисельним методом розрахунку частот і форм власних коливань є метод початкових параметрів, який було запропоновано О.М. Криловим [58] для розрахунку балок на пружній основі. У відповідності з цим методом стержень розбивається на ділянки, на кожній з яких згинна жорсткість і погонна маса є постійними величинами. Диференціальні рівняння четвертого порядку з постійними коефіцієнтами для будь якої ділянки стержня повинні розв'язуватися при прийнятих граничних умовах кріплення його торців і умовах спряження ділянок стержня, які визначають собою неперервність переміщень, кутів повороту, моментів та перерізуючих сил.

Загальний розв'язок для кожної ділянки представляється через балкові функції Крилова. Далі за допомогою побудованої матриці переходу, розв'яз-

зок на кожній ділянці виражається через його початкові значення на першій ділянці. Після задоволення знайдених розв'язків граничним умовам кріплення торців стержня отримується трансцендентне рівняння відносно частотного параметра. Отриманий алгоритм дозволяє побудувати точний розв'язок спектральної задачі про власні коливання неоднорідної балки з кусково-постійними пружно-масовими характеристиками. При цьому характеристичне рівняння відносно частоти коливань стержня не залежить від номеру тону коливань і від числа ділянок стержня з постійними геометричними та фізичними параметрами. Сам алгоритм зводиться до перемноження матриць четвертого порядку і знаходження коренів трансцендентного рівняння. Він успішно застосовується для наближеного розрахунку власних коливань пружних стержневих систем зі змінними параметрами по їх довжині.

Оскільки спектральна задача про коливання стержня з підвісним резервуаром має розривні граничні умови, то застосування методу Рітца для побудови її наближеного розв'язку не знайшло відображення в науковій літературі.

Великий вклад в розробку методів розрахунку та експериментальних досліджень коливань рідини в рухомих порожнинах та пружних конструкціях, а також в розв'язання багатьох практично важливих задач внесли Ю.Г. Балакіреєв, І.Б. Богоряд, В.В. Болотін, О.М. Гузь, Л.В. Докучаєв, М.Є. Жуковський, М.А. Ільгамов, К.С. Колесніков, В.Д. Кубенко, Р.Є. Лампер, І.О. Луковський, Г.Н. Мікішев, М.М. Моїсєєв, Г.С. Наріманов, Б.І. Рабінович, І.М. Рапопорт, В.В. Румянцев, Ф.Л. Черноусько, Ю.Ю. Швейко, Ф.М. Шклярчук, В.П. Шмаков, Н.Н. Abramson, D.D. Kana, J.W. Miles та інші.

Крайові задачі гідропружності відносяться до числа досить складних задач математичної фізики, оскільки необхідно сумісно інтегрувати систему диференціальних рівнянь для переміщення оболонки і рівнянь в частинних похідних для потенціалу зміщень рідини. Тим не менш серед публікацій є роботи в яких побудовані точні розв'язки розглядуваних задач В.Б. Кулешов, Ю.Ю. Швейко [60], Ф.М. Шклярчук [32].

Точні розв'язки для осесиметричних коливань пружної циліндричної оболонки, яка повністю заповнена стисливою рідиною; стислої рідини в абсолютно жорсткому циліндричному резервуарі з пружним дном у вигляді пологої сферичної оболонки; пружної напівсферичної оболонки, що повністю заповнена нестисливою рідиною наведені в монографії [32].

В роботі [60] розроблено алгоритм розрахунку частот та форм власних коливань циліндричних оболонок, які частково заповнені нестисливою рідиною при різних граничних умовах на її торцях. Задача розв'язується в лінійній постановці, нехтуючи при цьому початковим пружно-деформівним станом оболонки, який виникає за рахунок гідростатичного тиску рідини в незбуреному стані системи. Хвильові рухи на вільній поверхні рідини враховуються. Рух оболонки описується за допомогою технічної теорії оболонок В.З. Власова [23].

Оскільки рівняння коливань циліндричної оболонки представляють собою систему звичайних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами восьмого порядку, то побудова розв'язків базується на знаходженні загальних інтегралів рівнянь оболонки для незмочуваної рідиною частини, та відповідно для її змочуваної частини. Загальний розв'язок для змочуваної частини оболонки будується з урахуванням алгоритму розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром, використовуючи при цьому результати роботи [125]. Після підстановки побудованих загальних розв'язків на суміжній границі змоченої і не змоченої частини оболонки отримана система однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь шістнадцятого порядку відносно постійних інтегрування. На основі отриманого алгоритму наведені табличні результати розрахунку неосесиметричних коливань циліндричних оболонок при різних умовах кріплення їх торців. Отримані розрахункові дані для частот та форм коливань розглядуваної механічної системи можуть бути використані для оцінки точності різних наближених розв'язків задачі в зазначеній постановці.

Для оболонок обертання довільного виду розроблено ряд наближених аналітичних методів розв'язання розглядуваних крайових задач гідропружності. Побудова цих розв'язків базується на застосуванні методів Рітца [3, 32] і Бубнова – Гальоркіна [10, 53, 124, 126]. При їх застосуванні основна проблема полягає у виборі координатних функцій для переміщень оболонки і рідини. Мабуть з цієї причини варіаційні методи розв'язання задач гідропружності не отримали належного розвитку та застосування. При використанні метода Бубнова – Гальоркіна труднощі побудови систем базисних функцій можуть бути подолані шляхом його модифікації, запропонованим В.П. Шмаковим [125]. Слідуючи цим шляхом в роботах [9, 10, 53, 126] були запропоновані оригінальні розв'язки для ряду задач гідропружності.

Останнім часом інтенсивно розвиваються чисельні методи розрахунку динамічних характеристик пружних оболонок обертання, частково заповнених рідиною. Так в роботі [17] запропоновано алгоритм розрахунку вільних та вимушених коливань пружних оболонок з рідиною. Вихідна задача зводиться до системи інтегро-диференціальних рівнянь за рахунок введення в розгляд допоміжної спектральної задачі з параметром в граничній умові. Сформульована крайова задача зводиться до відповідних задач Коші, розв'язки яких знаходяться методом Кутта – Мерсона з ортогоналізацією розв'язків по С.К. Годунову.

Існує також велика кількість літератури по застосуванню різних варіантів метода скінченних елементів в задачах гідропружності [32, 36, 74, 128, 148] та ін. Слід відзначити роботу [128], яка присвячена огляду публікацій за останні п'ятнадцять років по дослідженню динаміки, міцності і стійкості оболонок обертання, що містять рідину. З наведеного аналізу випливає, що при розв'язанні даних задач основна перевага віддається переважно методу скінченних елементів, що на можливо пов'язано з його універсальністю і наявністю програмного забезпечення (NASTRAN, ANSYS), яке забезпечує відносно простоту його застосування. У той же час у багатьох з опублікованих досліджень

авторами відзначаються значні розбіжності між експериментальними і розрахунковими результатами, що вказує на необхідність покращення теорій і подальшого розвитку існуючих та розробку нових методів розв'язання розглядуваних задач.

У зв'язку з вище сказаним, проблема побудови алгоритмів розрахунку коливань довільних оболонок обертання, частково заповнених рідиною з урахуванням хвильових рухів її вільної поверхні є актуальною як з теоретичної, так і з практичної точки зору.

Наведений короткий огляд літературних джерел свідчить про те, що задачі про динамічну поведінку розглядуваних механічних систем відносяться до числа малодосліджених задач і мають певний науковий і практичний інтерес.

РОЗДІЛ 2

КОЛИВАННЯ ДОВІЛЬНОЇ ОБОЛОНКИ ОБЕРТАННЯ З ПРИЄДНАНИМ АБСОЛЮТНО ТВЕРДИМ ТІЛОМ

Даний розділ присвячений розробці варіаційного методу побудови наближеного розв'язку задачі про вільні коливання тонкостінної пружної довільної оболонки обертання з жорстко приєднаним до одного з її торців абсолютно твердим тілом скінченних розмірів.

Використовуючи принцип можливих переміщень отримана інтегродиференціальна постановка крайової задачі про визначення рівноважного стану системи «оболонка-тверде тіло» при дії на неї малого навантаження загального вигляду.

На основі отриманого еквівалентного варіаційного формулювання задачі з використанням методу Рітца запропонований алгоритм побудови розв'язку задачі про вільні коливання системи «оболонка-тверде тіло». Ефективність підходу проілюстрована на прикладі конічної оболонки із приєднаним твердим тілом. Проаналізовано вплив маси тіла й кута піврозтвору конуса на власні коливання даної механічної системи.

Розглянута спрощена постановка задачі в припущенні, що оболонка замінюється балкою Тимошенка [91]. На основі побудованих точних розв'язків отримана досить проста розрахункова схема розв'язання задачі про власні згинні коливання оболонки з приєднаним на торці абсолютно твердим тілом. Розв'язки представлені для жорсткого кріплення і незакріпленого торця балки. За рахунок подання точного розв'язку у запропонованому вигляді, можна без особливих труднощів реалізувати і інші, що найбільш часто зустрічаються на практиці типи граничних умов.

На основі порівняння чисельних даних, отриманих за різними розрахунковими схемами зроблено висновки про межі застосування спрощених схем

розрахунку системи «оболонка-тверде тіло».

2.1 Постановка задачі

Розглянемо механічну систему, що складається з тонкостінної пружної оболонки обертання і абсолютно твердого тіла, яке жорстко прикріплено до одного з її торців. Для визначеності будемо вважати, що нижній торець оболонки жорстко закріплений рис. 2.1.

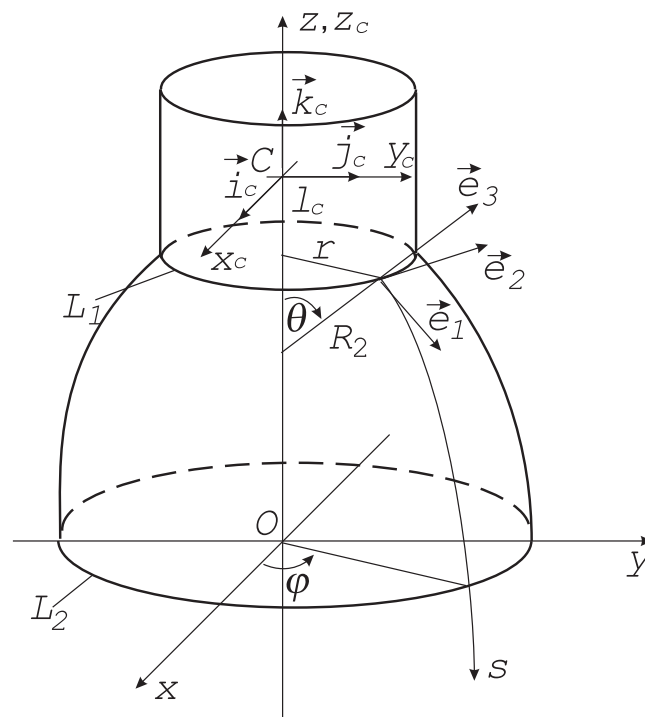


Рис. 2.1. Загальний вигляд розглядуваної механічної системи.

Нехай тіло володіє двома взаємно ортогональними площинами симетрії, лінією перетину яких є вісь Oz , що збігається з поздовжньою віссю оболонки. Координатну площину Oxz сумістимо з однією з площин симетрії твердого тіла, а початок системи координат $Oxyz$ помістимо в площині торцевого перерізу оболонки, вільного від твердого тіла. Для описання руху твердого тіла введемо прямокутну систему координат $Cx_c y_c z_c$ з початком в центрі

інерції твердого тіла і осями Cx_c і Cy_c , паралельними до осей Ox і Oy відповідно. Орти системи координат $Cx_c y_c z_c$ позначимо через \vec{i}_c , \vec{j}_c і \vec{k}_c . Серединну поверхню оболонки віднесемо до ортогональної системи криволінійних координат s і φ , де φ – полярний кут, відлічуваний від осі Ox за годинниковою стрілкою якщо дивитися в бік зростання координати z . s – довжина дуги меридіана, яка відраховується від торцевого перерізу оболонки, до якого прикріплено тверде тіло. З цими координатами зв'яжемо локальний ортогональний базис \vec{e}_1 , \vec{e}_2 і \vec{e}_3 в якому \vec{e}_1 і \vec{e}_2 – одиничні вектори, дотичні до ліній головних кривин серединної поверхні оболонки і спрямовані в бік зростання координат s і φ , а $\vec{e}_3 = [\vec{e}_1 \times \vec{e}_2]$.

Припустимо, що до даної конструкції прикладене мале навантаження загального вигляду: зосереджена в точці C сила

$$\Delta \vec{F} = \Delta F_1 \vec{i}_c + \Delta F_2 \vec{j}_c + \Delta F_3 \vec{k}_c,$$

момент відносно точки C

$$\Delta \vec{M} = \Delta M_1 \vec{i}_c + \Delta M_2 \vec{j}_c + \Delta M_3 \vec{k}_c,$$

що діють на тверде тіло і розподілене навантаження

$$\Delta \vec{Q} = \Delta Q_1 \vec{e}_1 + \Delta Q_2 \vec{e}_2 + \Delta Q_3 \vec{e}_3,$$

що діє на оболонку. В результаті механічна система «оболонка – тіло» прийде в рівноважний збурений стан, підкорюючись при цьому деформаціям і переміщенням. Рівноважний стан системи будемо характеризувати вектором переміщення точок серединної поверхні оболонки

$$\vec{U} = u \vec{e}_1 + v \vec{e}_2 + w \vec{e}_3,$$

вектором поступального переміщення центра мас твердого тіла

$$\vec{u}_0 = u_{01} \vec{i}_c + u_{02} \vec{j}_c + u_{03} \vec{k}_c$$

і вектором кута повороту навколо цього центра

$$\vec{\vartheta}_0 = \vartheta_{01}\vec{i}_c + \vartheta_{02}\vec{j}_c + \vartheta_{03}\vec{k}_c.$$

При цьому, припустимо, що переміщення твердого тіла і оболонки настільки малі, що можна знехтувати членами другого і більш високого порядку малості в порівнянні з лінійними. Будемо також вважати, що для оболонки справедливі гіпотези Кірхгофа-Лява.

Рівняння рівноважного стану даної системи, що знаходиться під дією зовнішніх сил, можна отримати з використанням будь-якого варіаційного принципу механіки. Такий підхід дозволить сформулювати варіаційну постановку задачі, яка буде використана в подальшому при побудові її наближеного розв'язку.

Скористаємося принципом можливих переміщень, згідно з яким

$$\delta\Pi = \delta A, \quad (2.1)$$

де $\delta\Pi$ — варіація потенціальної енергії пружної деформації оболонки, δA — робота зовнішніх сил, прикладених до системи на можливих переміщеннях, які можуть бути представлені в наступному вигляді:

$$\delta A = \iint_{\Sigma} \Delta\vec{Q} \cdot \delta\vec{U} d\Sigma + \Delta\vec{F} \cdot \delta\vec{u}_0 + \Delta\vec{M} \cdot \delta\vec{\vartheta}_0, \quad (2.2)$$

$$\delta\Pi = \iint_{\Sigma} (T_1\delta\varepsilon_1 + T_2\delta\varepsilon_2 + S\delta\omega + M_1\delta\chi_1 + M_2\delta\chi_2 + 2H\delta\tau) d\Sigma. \quad (2.3)$$

Тут:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2); & T_2 &= \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1); \\ M_1 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\chi_1 + \nu\chi_2); & M_2 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\chi_2 + \nu\chi_1); \\ S &= \frac{Eh}{2(1+\nu)}\omega; & H &= \frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\tau; \end{aligned} \quad (2.4)$$

E , ν и h — модуль пружності, коефіцієнт Пуассона и товщина оболонки відповідно, Σ — серединна поверхня оболонки. При цьому, компоненти тензора деформацій серединної поверхні оболонки ε_1 , ε_2 , \varkappa_1 , \varkappa_2 , ω , τ зв'язані с компонентами вектора переміщень наступними співвідношеннями [79]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R_1}; & \varepsilon_2 &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\cos \theta}{r} u + \frac{\sin \theta}{r} w; \\ \omega &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\cos \theta}{r} v; & \varkappa_1 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u}{R_1} \right); \\ \varkappa_2 &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{u}{R_1}; \\ \tau &= -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial s} + \frac{1}{r R_1} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\cos \theta \sin \theta}{r^2} v + \frac{\cos \theta}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial v}{\partial s},\end{aligned}\tag{2.5}$$

де $R_1(s)$ — радіус кривизни меридіана оболонки; $\theta(s)$ — кут, утворений нормаллю до серединної поверхні і віссю обертання оболонки Oz ; $r(s)$ — радіус кола, утвореного паралелями оболонки.

З урахуванням співвідношень (2.2) — (2.5), скориставшись формулами інтегрування по частинам для подвійних інтегралів, а також після ряду перетворень, варіаційне рівняння (2.1) можна представити в наступній формі:

$$\begin{aligned}& \iint_{\Sigma} \left[\left(-\frac{\partial T_1}{\partial s} + \frac{\cos \theta}{r} (T_2 - T_1) - \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial \varphi} - \frac{1}{r R_1} \frac{\partial}{\partial s} (M_1 r) + \right. \right. \\ & + M_2 \frac{\cos \theta}{r R_1} - \frac{2}{r R_1} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \left. \right) \delta u + \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial S}{\partial s} - \frac{2 \cos \theta}{r} S - \right. \\ & \left. - \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial M_2}{\partial \varphi} - 2H \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial s} (H \sin \theta) \right) \delta v + \\ & \left. + \left(\frac{T_1}{R_1} + T_2 \frac{\sin \theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial s^2} (M_1 r) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 M_2}{\partial \varphi^2} + \right. \right. \\ & \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} (M_2 \cos \theta) - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 H}{\partial s \partial \varphi} - \frac{2 \cos \theta}{r^2} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right) \delta w \Big] d\Sigma + \\ & + \oint_{L_2} \left[\left(T_1 + \frac{M_1}{R_1} \right) \delta u + \left(S + 2H \frac{\sin \theta}{r} \right) \delta v + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} (M_1 r) - M_2 \frac{\cos \theta}{r} + \frac{2}{r} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right) \delta w - M_1 \frac{\partial \delta w}{\partial s} \right] dL_2 -\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \oint_{L_1} \left[\left(T_1 + \frac{M_1}{R_1} \right) \delta u + \left(S + 2H \frac{\sin \theta}{r} \right) \delta v + \right. \\
& + \left. \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} (M_1 r) - M_2 \frac{\cos \theta}{r} + \frac{2}{r} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right) \delta w - M_1 \frac{\partial \delta w}{\partial s} \right] dL_1 = \\
& = \iint_{\Sigma} \Delta \vec{Q} \cdot \delta \vec{U} d\Sigma + \Delta \vec{F} \cdot \delta \vec{u}_0 + \Delta \vec{M} \cdot \delta \vec{\vartheta}_0, \tag{2.6}
\end{aligned}$$

де L_1 і L_2 — контури, що обмежують оболонку рис. 2.1.

Враховуючи незалежність варіацій δu , δv і δw в області Σ , з варіаційного рівняння (2.6) отримуємо три рівняння, які описують рівноважний стан оболонки під дією прикладеного розподіленого навантаження $\Delta \vec{Q}$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\partial T_1}{\partial s} + \frac{\cos \theta}{r} (T_2 - T_1) - \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial \varphi} - \frac{1}{R_1} \frac{\partial M_1}{\partial s} + \\
& + \frac{\cos \theta}{r R_1} (M_2 - M_1) - \frac{2}{r R_1} \frac{\partial H}{\partial \varphi} = \Delta Q_1; \\
& - \frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial S}{\partial s} - \frac{2 \cos \theta}{r} S - \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial M_2}{\partial \varphi} - \\
& - 2H \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial s} (H \sin \theta) = \Delta Q_2; \\
& \frac{T_1}{R_1} + T_2 \frac{\sin \theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial s^2} (M_1 r) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 M_2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} (M_2 \cos \theta) - \\
& - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 H}{\partial s \partial \varphi} - \frac{2 \cos \theta}{r^2} \frac{\partial H}{\partial \varphi} = \Delta Q_3. \tag{2.7}
\end{aligned}$$

Якщо в цих рівняннях перейти від зусиль до переміщень відповідно до формул (2.4) і (2.5), то отримуємо рівняння відносно переміщень u , v і w , які з огляду на їх достатню громіздкість тут не наводяться. З рівняння (2.6) впливають також і граничні умови задачі. Так, у разі жорсткого кріплення контуру оболонки L_2 матимемо

$$u = v = w = \left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_{L_2} = 0. \tag{2.8}$$

Варіації δu , δv і δw на контурі L_1 не є незалежними оскільки пов'язані геометричними граничними умовами, які виражаються в рівності відповідних переміщень і кутів повороту твердого тіла і оболонки, що приводить до

наступного співвідношення

$$\vec{U} = \vec{u}_0 + [\vec{\vartheta}_0 \times \vec{r}_0], \quad (2.9)$$

де $\vec{r}_0 = (r \cos \varphi) \vec{i}_c + (r \sin \varphi) \vec{j}_c - l_c \vec{k}_c$ — радіус-вектор точок контуру оболонки L_1 в системі координат $Cx_c y_c z_c$, l_c — відстань від центру мас твердого тіла вздовж осі Oz до торцевого перерізу оболонки, в якому прикріплено тверде тіло. Зв'язок одиничних векторів $\vec{i}_c, \vec{j}_c, \vec{k}_c$ і $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ має наступний вигляд

$$\begin{aligned} \vec{i}_c &= (\cos \theta \cos \varphi) \vec{e}_1 - (\sin \varphi) \vec{e}_2 + (\sin \theta \cos \varphi) \vec{e}_3, \\ \vec{j}_c &= (\cos \theta \sin \varphi) \vec{e}_1 + (\cos \varphi) \vec{e}_2 + (\sin \theta \sin \varphi) \vec{e}_3, \\ \vec{k}_c &= (-\sin \theta) \vec{e}_1 + (\cos \theta) \vec{e}_3. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Беручи до уваги співвідношення (2.10), в результаті прирівнювання відповідних компонентів векторів у формулі (2.9) отримаємо:

$$\begin{aligned} u|_{L_1} &= (u_{01} \cos \theta + \vartheta_{02} r \sin \theta - \vartheta_{02} l_c \cos \theta) \cos \varphi + \\ &+ (\vartheta_{01} l_c \cos \theta + u_{02} \cos \theta - \vartheta_{01} r \sin \theta) \sin \varphi - u_{03} \sin \theta; \\ v|_{L_1} &= (l_c \vartheta_{01} + u_{02}) \cos \varphi + (\vartheta_{02} l_c - u_{01}) \sin \varphi + \vartheta_{03} r; \\ w|_{L_1} &= (-\vartheta_{02} l_c \sin \theta + u_{01} \sin \theta - \vartheta_{02} r \cos \theta) \cos \varphi + \\ &+ (\vartheta_{01} l_c \sin \theta + u_{02} \sin \theta + \vartheta_{01} r \cos \theta) \sin \varphi + u_{03} \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Граничні умови накладаються також і на кут повороту

$$\theta_1 = -\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{u}{R_1}$$

вектора \vec{e}_1 навколо вектора \vec{e}_2 в результаті деформування серединної поверхні оболонки. Переходячи в $\vec{\vartheta}_0$ до базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ за допомогою співвідношень (2.10), отримаємо четверту геометричну граничну умову

$$\left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_{L_1} = \frac{u}{R_1} + \vartheta_{01} \sin \varphi - \vartheta_{02} \cos \varphi. \quad (2.12)$$

Із формул (2.11) і (2.12) неважко отримати вирази для варіацій $\left[\delta u, \delta v, \delta w, \frac{\partial \delta w}{\partial s} \right]_{L_1}$. Підставляючи ці вирази в відповідний контурний інтеграл з рівняння (2.6) і з огляду на незалежність варіацій від відповідних компонент вектора переміщень оболонки, отримаємо шість інтегральних співвідношень, які представляють собою силові граничні умови спряження оболонки і твердого тіла на контурі L_1 :

$$\begin{aligned}
& \oint_{L_1} \left[\left(T_1 \cos \theta - Q_1^* \sin \theta \right) \cos \varphi - \left(S + 2H \frac{\sin \theta}{r} \right) \sin \varphi \right] dL_1 = -\Delta F_1; \\
& \oint_{L_1} \left[\left(T_1 \cos \theta - Q_1^* \sin \theta \right) \sin \varphi + \left(S + 2H \frac{\sin \theta}{r} \right) \cos \varphi \right] dL_1 = -\Delta F_2; \\
& \oint_{L_1} \left(T_1 \sin \theta + Q_1^* \cos \theta \right) dL_1 = \Delta F_3; \\
& \oint_{L_1} \left\{ \left[T_1 \left(l_c \cos \theta - R \sin \theta \right) - Q_1^* \left(R \cos \theta + l_c \sin \theta \right) - M_1 \right] \sin \varphi + \right. \\
& \quad \left. + \left(S + 2H \frac{\sin \theta}{r} \right) l_c \cos \varphi \right\} dL_1 = -\Delta M_1; \\
& \oint_{L_1} \left\{ \left[T_1 \left(R \sin \theta - l_c \cos \theta \right) + Q_1^* \left(R \cos \theta + l_c \sin \theta \right) + M_1 \right] \cos \varphi + \right. \\
& \quad \left. + \left(S + 2H \frac{\sin \theta}{r} \right) l_c \sin \varphi \right\} dL_1 = -\Delta M_2; \\
& \oint_{L_1} \left(S + 2H \frac{\sin \theta}{r} \right) R dL_1 = -\Delta M_3,
\end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\text{де} \quad Q_1^* = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} (M_1 r) + M_2 \frac{\cos \theta}{r} - \frac{2}{r} \frac{\partial H}{\partial \varphi}.$$

Таким чином, задача про визначення рівноважного збуреного стану системи «оболонка обертання – тверде тіло», що знаходиться під дією малого навантаження загального вигляду звелася до інтегрування системи з трьох диференціальних рівнянь (2.7) при граничних умовах (2.8), (2.11) – (2.13). Щоб перейти від задачі статки до задачі про власні коливання розглядуваної

механічної системи необхідно скористатися принципом Даламбера, замінивши навантаження, що діє на систему відповідними силами інерції за такими формулами:

$$\begin{aligned} \Delta Q_1 &= -\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; & \Delta Q_2 &= -\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; & \Delta Q_3 &= -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \\ \Delta F_1 &= -m_0 \frac{\partial^2 u_{01}}{\partial t^2}; & \Delta F_2 &= -m_0 \frac{\partial^2 u_{02}}{\partial t^2}; & \Delta F_3 &= -m_0 \frac{\partial^2 u_{03}}{\partial t^2}; \\ \Delta M_1 &= -J_{x_c} \frac{\partial^2 \vartheta_{01}}{\partial t^2}; & \Delta M_2 &= -J_{y_c} \frac{\partial^2 \vartheta_{02}}{\partial t^2}; & \Delta M_3 &= -J_{z_c} \frac{\partial^2 \vartheta_{03}}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

де: ρ і m_0 — густина матеріалу оболонки і маса твердого тіла відповідно; J_{x_c} , J_{y_c} , J_{z_c} — моменти інерції твердого тіла відносно осей Cx_c , Cy_c , Cz_c відповідно.

Слід зазначити, що досить складні силові і моментні граничні умови (2.13) є природними для відповідного функціоналу, отриманого з принципу можливих переміщень і його мінімізацію досить проводити на класі функцій, що задовольняють лише граничним умовам (2.8), (2.11) і (2.12).

2.2 Застосування методу Рітца до побудови наближених розв'язків задачі

Малість параметрів руху і осьова симетрія при усталених вільних коливаннях системи «оболонка-тіло» з частотою ω дозволяє загальний її рух розкласти на незалежні складові в напрямку і навколо поздовжньої осі, а також в двох взаємно ортогональних площинах симетрії, лінією перетину яких є вісь Oz . Надалі будемо розглядати поперечні коливання системи в площині Oxz . У цьому випадку переміщення точок серединної поверхні оболонки можна представити в наступному вигляді

$$u = e^{i\omega t} U_n(s) \cos n\varphi, \quad v = e^{i\omega t} V_n(s) \sin n\varphi, \quad w = e^{i\omega t} W_n(s) \cos n\varphi, \quad (2.15)$$

де n — число хвиль в круговому напрямку оболонки.

Перейдемо до безрозмірних величин, які пов'язані з відповідними розмірними величинами наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \{U_n, V_n, W_n\} &= R\{\bar{U}_n, \bar{V}_n, \bar{W}_n\}; & \{r, s, R_1, l_c, h\} &= R\{\bar{r}, \bar{s}, \bar{R}_1, \bar{l}_c, \bar{h}\}; \\ c^2 &= \frac{h^2}{12R^2}; & \bar{m}_0 &= \frac{m_0}{\pi\rho hR^2}; & \bar{J}_{y_c} &= \frac{J_{y_c}}{\pi\rho hR^4}; & \bar{\omega}^2 &= \frac{R^2\rho(1-\nu^2)}{E}\omega^2, \end{aligned} \quad (2.16)$$

де R — радіус, що обмежує оболонку, контуру L_1 . Далі, для скорочення запису, риску над безрозмірними величинами будемо опускаати.

Тоді варіаційне рівняння задачі про усталені вільні коливання оболонки обертання з приєднаним на торці твердим тілом можна представити:

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_0^{l_s} \left[\Psi_{11}(U_n, \delta U_n) + \Psi_{12}(V_n, \delta U_n) + \Psi_{13}(W_n, \delta U_n) + \right. \\ &\quad \left. + \Psi_{12}(\delta V_n, U_n) + \Psi_{22}(V_n, \delta V_n) + \Psi_{23}(W_n, \delta V_n) + \right. \\ &\quad \left. + \Psi_{13}(\delta W_n, U_n) + \Psi_{23}(\delta W_n, V_n) + \Psi_{33}(W_n, \delta W_n) \right] r ds - \\ &\quad - \omega^2 \int_0^{l_s} (U_n \delta U_n + V_n \delta V_n + W_n \delta W_n) r ds - \\ &\quad - \delta_{1n} \omega^2 (m_0 u_{01} \delta u_{01} + J_{y_c} \vartheta_{02} \delta \vartheta_{02}) = 0, \end{aligned} \quad (2.17)$$

де l_s — довжина оболонки по координаті s ,

$$\delta_{1n} = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 1 \\ 0 & \text{при } n > 1. \end{cases}$$

Введені тут диференціальні оператори $\Psi_{ij}(p, q)$, де p і q довільні функції, мають вигляд:

$$\begin{aligned} \Psi_{11}(p, q) &= \left(\frac{\cos^2 \theta}{r^2} + \frac{\nu_1 n^2}{r^2} + \frac{c^2 \cos^2 \theta}{r^2 R_1^2} + \frac{2(1-\nu)c^2 n^2}{r^2 R_1^2} \right) pq + \\ &\quad + \left(\frac{dp}{ds} + \frac{\nu \cos \theta}{r} p \right) \frac{dq}{ds} + \frac{\nu \cos \theta}{r} \left[\frac{dp}{ds} + \frac{c^2}{R_1} \frac{d}{ds} \left(\frac{p}{R_1} \right) \right] q + \\ &\quad + c^2 \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{p}{R_1} \right) + \frac{\nu \cos \theta}{r R_1} p \right] \frac{d}{ds} \left(\frac{q}{R_1} \right), \end{aligned}$$

$$\Psi_{12}(p, q) = \frac{n \cos \theta}{r^2} \left(1 + \frac{c^2 \sin \theta}{r R_1} \right) pq + \frac{\nu n}{r} \left[\frac{dq}{ds} + \frac{c^2 \sin \theta}{r} \frac{d}{ds} \left(\frac{q}{R_1} \right) \right] p +$$

$$+ \left[\left(\frac{\nu_1 n}{r} + \frac{2(1-\nu)c^2 n \sin \theta}{r^2 R_1} \right) \left(\frac{\cos \theta}{r} p - \frac{dp}{ds} \right) \right] q,$$

$$\Psi_{13}(p, q) = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu \sin \theta}{r} \right) p \frac{dq}{ds} + \frac{\cos \theta}{r} \left(\frac{\sin \theta}{r} + \frac{\nu}{R_1} + \frac{c^2 n^2}{r^2 R_1} \right) pq -$$

$$- c^2 \left(\frac{d^2 p}{ds^2} - \frac{\nu n^2}{r^2} p + \frac{\nu \cos \theta}{r} \frac{dp}{ds} \right) \frac{d}{ds} \left(\frac{q}{R_1} \right) -$$

$$- \frac{c^2 \cos \theta}{r R_1} \left(\frac{\cos \theta}{r} \frac{dp}{ds} + \nu \frac{d^2 p}{ds^2} \right) q + \frac{2(1-\nu)c^2 n^2}{r^2 R_1} \left(\frac{\cos \theta}{r} p - \frac{dp}{ds} \right) q,$$

$$\Psi_{22}(p, q) = \frac{1}{r^2} \left(n^2 + \nu_1 \cos^2 \theta + \frac{c^2 n^2 \sin^2 \theta}{r^2} \right) pq -$$

$$- \frac{\nu_1 \cos \theta}{r} \left(\frac{dp}{ds} q + p \frac{dq}{ds} \right) + \nu_1 \frac{dp}{ds} \frac{dq}{ds} +$$

$$+ \frac{2(1-\nu)c^2 \sin^2 \theta}{r^2} \left[\left(\frac{\cos \theta}{r} q - \frac{dq}{ds} \right) \left(\frac{\cos \theta}{r} p - \frac{dp}{ds} \right) \right],$$

$$\Psi_{23}(p, q) = \left(\frac{n \sin \theta}{r^2} + \frac{\nu n}{r R_1} + \frac{c^2 n^3 \sin \theta}{r^4} \right) pq - \frac{c^2 n \sin \theta}{r^2} \left(\nu \frac{d^2 p}{ds^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos \theta}{r} \frac{dp}{ds} \right) q + 2(1-\nu)c^2 \left[\frac{n \sin \theta}{r^2} \left(\frac{dp}{ds} - \frac{\cos \theta}{r} p \right) \left(\frac{dq}{ds} - \frac{\cos \theta}{r} q \right) \right],$$

$$\Psi_{33}(p, q) = c^2 \left[\frac{d^2 p}{ds^2} \frac{d^2 q}{ds^2} + \frac{\nu \cos \theta}{r} \left(\frac{d^2 p}{ds^2} \frac{dq}{ds} + \frac{d^2 q}{ds^2} \frac{dp}{ds} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\nu n^2}{r^2} \left(\frac{d^2 p}{ds^2} q + \frac{d^2 q}{ds^2} p \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos^2 \theta + 2(1-\nu)n^2}{r^2} \frac{dp}{ds} \frac{dq}{ds} - \frac{n^2 \cos \theta (3-2\nu)}{r^3} \left(\frac{dq}{ds} p + \frac{dp}{ds} q \right) \right] +$$

$$+ \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} + \frac{2\nu \sin \theta}{r R_1} + \frac{c^2 n^4 + 2(1-\nu)c^2 n^2 \cos^2 \theta}{r^4} \right) pq,$$

де $\nu_1 = (1-\nu)/2$.

У разі застосування технічної теорії оболонок [23], замість наведених вище формул слід скористатися наступними виразами для функцій $\Psi_{ij}(p, q)$

$$\Psi_{11}(p, q) = \left(\frac{\cos^2 \theta}{r^2} + \frac{\nu_1 n^2}{r^2} \right) pq + \left(\frac{dp}{ds} + \frac{\nu \cos \theta}{r} p \right) \frac{dq}{ds} + \frac{\nu \cos \theta}{r} \frac{dp}{ds} q,$$

$$\Psi_{12}(p, q) = \left(\frac{n \cos \theta}{r^2} + \frac{\nu_1 n \cos \theta}{r^2} \right) pq + \frac{\nu n}{r} p \frac{dq}{ds} - \frac{\nu_1 n}{r} q \frac{dp}{ds},$$

$$\Psi_{13}(p, q) = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu \sin \theta}{r} \right) p \frac{dq}{ds} + \left(\frac{\cos \theta \sin \theta}{r^2} + \frac{\nu \cos \theta}{r R_1} \right) pq,$$

$$\Psi_{22}(p, q) = \left(\frac{n^2}{r^2} + \frac{\nu_1 \cos^2 \theta}{r^2} \right) pq + \left(\nu_1 \frac{dp}{ds} - \frac{\nu_1 \cos \theta}{r} p \right) \frac{dq}{ds} - \frac{\nu_1 \cos \theta}{r} \frac{dp}{ds} q,$$

$$\Psi_{23}(p, q) = \left(\frac{n \sin \theta}{r^2} + \frac{\nu n}{r R_1} \right) pq,$$

Вираз для $\Psi_{33}(p, q)$ залишається без змін.

При цьому, з аналізу співвідношень (2.11) і (2.12) випливає, що в разі, коли число хвиль в круговому напрямку оболонки n дорівнює одиниці, при знаходженні мінімуму функціоналу, відповідного варіаційного рівняння (2.17), підлягають задоволенню наступні граничні умови:

$$\begin{aligned} U_1(0) &= u_{01} k_1 - \vartheta_{02} k_2; & V_1(0) &= -(u_{01} - \vartheta_{02} k_3); \\ W_1(0) &= u_{01} k_4 - \vartheta_{02} k_5; & \left. \frac{dW_1}{ds} \right|_{s=0} &= u_{01} k_6 - \vartheta_{02} k_7; \\ U_1(l_s) &= V_1(l_s) = W_1(l_s) = \left. \frac{dW_1}{ds} \right|_{s=l_s} = 0, \end{aligned} \quad (2.18)$$

де

$$\begin{aligned} k_1 &= \cos \theta, & k_2 &= l_c \cos \theta - \sin \theta, & k_3 &= l_c, & k_4 &= \sin \theta, \\ k_5 &= l_c \sin \theta + \cos \theta, & k_6 &= \frac{k_1}{R_1}, & k_7 &= 1 + \frac{k_2}{R_1}. \end{aligned}$$

У випадку ж коли $n > 1$, підлягають задоволенню умови жорсткого кріплення обох торців оболонки

$$\begin{aligned} U_n(0) &= V_n(0) = W_n(0) = \left. \frac{dW_n}{ds} \right|_{s=0} = 0, \\ U_n(l_s) &= V_n(l_s) = W_n(l_s) = \left. \frac{dW_n}{ds} \right|_{s=l_s} = 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Неважко бачити, що при $n = 1$ мають місце сумісні коливання тіла і оболонки. У разі ж коли $n > 1$, тіло залишається нерухомим, а оболонка здійснює просторові рухи.

Пошук мінімуму функціоналу, варіація якого представлена в формі (2.17), на класі функцій, що задовольняють граничним умовам (2.18), (2.19) будемо здійснювати за допомогою методу Рітца, згідно з яким компоненти переміщень оболонки представимо у вигляді кінцевих рядів такого вигляду:

$$\begin{aligned} U_n(s) &= \sum_{j=1}^N a_j u_j(s) + \delta_{1n}(u_{01}k_1 - \vartheta_{02}k_2)u_0(s); \\ V_n(s) &= \sum_{j=1}^N b_j v_j(s) + \delta_{1n}(u_{01} - \vartheta_{02}k_3)v_0(s); \\ W_n(s) &= \sum_{j=1}^N c_j w_j(s) + \delta_{1n}(u_{01}w_0(s) + \vartheta_{02}\psi_0(s)), \end{aligned} \quad (2.20)$$

де $a_j, b_j, c_j, u_{01}, \vartheta_{02}$ — константи, що підлягають визначенню.

Координатні функції $u_j(s), v_j(s)$ і $w_j(s)$ виберемо у вигляді:

$$\begin{aligned} u_j(s) &= v_j(s) = s(l_s - s)P_j\left(\frac{2s}{l_s} - 1\right); \\ w_j(s) &= s^2(l_s - s)^2P_j\left(\frac{2s}{l_s} - 1\right), \\ j &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Тут $P_j(s)$ — зміщені на одиницю за індексом j многочлени Лежандра, обчислення яких і їх перших двох похідних можна проводити за допомогою рекурентних співвідношень:

$$\begin{aligned} P_{j+2}(s) &= \frac{1}{j+1} [(2j+1)sP_{j+1}(s) - jP_j(s)], \\ P'_{j+2}(s) &= sP'_{j+1}(s) + (j+1)P_{j+1}(s), \\ P''_{j+2}(s) &= sP''_{j+1}(s) + (j+2)P'_{j+1}(s), \\ P_1(s) &= 1; \quad P_2(s) = s, \quad (j = 1, 2, \dots, N-2). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Функції $u_0(s), v_0(s), w_0(s)$ і $\psi_0(s)$ виберемо в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} u_0(s) &= \frac{l_s - s}{l_s}; \quad v_0(s) = -u_0(s); \\ w_0(s) &= \frac{3k_4 + k_6 l_s}{l_s^2} (s - l_s)^2 + \frac{k_6 l_s + 2k_4}{l_s^3} (s - l_s)^3; \end{aligned}$$

$$\psi_0(s) = -\frac{3k_5 + k_7 l_s}{l_s^2} (s - l_s)^2 - \frac{k_7 l_s + 2k_5}{l_s^3} (s - l_s)^3. \quad (2.23)$$

При такому представленні, розклади (2.20) задовольняють граничним умовам (2.18) і (2.19) при будь-яких значеннях вектора

$$\vec{X} = [a_1, a_2, \dots, a_N, b_1, b_2, \dots, b_N, c_1, c_2, \dots, c_N, u_{01}, \vartheta_{02}].$$

При цьому забезпечується повнота і лінійна незалежність функцій, що входять в розклади (2.20).

Компоненти вектора \vec{X} надалі визначаються з умови стаціонарності відповідного функціоналу I . При цьому вихідна задача зводиться до розв'язання однорідної алгебраїчної системи

$$(A - \omega^2 B) \vec{X}^T = 0, \quad (2.24)$$

де \vec{X}^T — транспонований вектор \vec{X} , A і B — симетричні матриці порядку $3N + 2$ при $n = 1$ і $3N$ для випадку $n > 1$.

Елементи матриць A і B , які розташовані на головній діагоналі і вище, будуть обчислюватися за такими формулами

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= \int_0^{l_s} \Psi_{11}(u_j, u_i) r ds, & a_{i,j+N} &= \int_0^{l_s} \Psi_{12}(v_j, u_i) r ds, \\ a_{i,j+2N} &= \int_0^{l_s} \Psi_{13}(w_j, u_i) r ds, & a_{i+N,j+N} &= \int_0^{l_s} \Psi_{22}(v_j, v_i) r ds, \\ a_{i+N,j+2N} &= \int_0^{l_s} \Psi_{23}(w_j, v_i) r ds, & a_{i+2N,j+2N} &= \int_0^{l_s} \Psi_{33}(w_j, w_i) r ds, \\ a_{i,3N+1} &= \int_0^{l_s} [k_1 \Psi_{11}(u_0, u_i) + \Psi_{12}(v_0, u_i) + \Psi_{13}(w_0, u_i)] r ds, \\ a_{i,3N+2} &= \int_0^{l_s} [-k_2 \Psi_{11}(u_0, u_i) - k_3 \Psi_{12}(v_0, u_i) + \Psi_{13}(\psi_0, u_i)] r ds, \\ a_{i+N,3N+1} &= \int_0^{l_s} [k_1 \Psi_{12}(v_i, u_0) + \Psi_{22}(v_0, v_i) + \Psi_{23}(w_0, v_i)] r ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{i+N,3N+2} &= \int_0^{l_s} [-k_2\Psi_{12}(v_i, u_0) - k_3\Psi_{22}(v_0, v_i) + \Psi_{23}(\psi_0, v_i)] rds, \\
a_{i+2N,3N+1} &= \int_0^{l_s} [k_1\Psi_{13}(w_i, u_0) + \Psi_{23}(w_i, v_0) + \Psi_{33}(w_0, w_i)] rds, \\
a_{i+2N,3N+2} &= \int_0^{l_s} [-k_2\Psi_{13}(w_i, u_0) - k_3\Psi_{23}(w_i, v_0) + \Psi_{33}(\psi_0, w_i)] rds, \\
a_{3N+1,3N+1} &= \int_0^{l_s} [k_1^2\Psi_{11}(u_0, u_0) + 2k_1\Psi_{12}(v_0, u_0) + 2k_1\Psi_{13}(w_0, u_0) + \\
&\quad + \Psi_{22}(v_0, v_0) + 2\Psi_{23}(w_0, v_0) + \Psi_{33}(w_0, w_0)] rds, \\
a_{3N+1,3N+2} &= \int_0^{l_s} [-k_1k_2\Psi_{11}(u_0, u_0) - k_1k_3\Psi_{12}(v_0, u_0) + k_1\Psi_{13}(\psi_0, u_0) - \\
&\quad - k_2\Psi_{12}(v_0, u_0) - k_3\Psi_{22}(v_0, v_0) + \Psi_{23}(\psi_0, v_0) - \\
&\quad - k_2\Psi_{13}(w_0, u_0) - k_3\Psi_{23}(w_0, v_0) + \Psi_{33}(\psi_0, w_0)] rds, \\
a_{3N+2,3N+2} &= \int_0^{l_s} [k_2^2\Psi_{11}(u_0, u_0) + 2k_2k_3\Psi_{12}(v_0, u_0) - 2k_2\Psi_{13}(\psi_0, u_0) + \\
&\quad + k_3^2\Psi_{22}(v_0, v_0) - 2k_3\Psi_{23}(\psi_0, v_0) + \Psi_{33}(\psi_0, \psi_0)] rds, \\
b_{i,j} &= \int_0^{l_s} u_j u_i rds, \quad b_{i,j+N} = b_{i,j+2N} = b_{i+N,j+2N} = 0, \\
b_{i+N,j+N} &= \int_0^{l_s} v_j v_i rds, \quad b_{i+2N,j+2N} = \int_0^{l_s} w_j w_i rds, \\
b_{i,3N+1} &= \int_0^{l_s} k_1 u_0 u_i rds, \quad b_{i,3N+2} = \int_0^{l_s} -k_2 u_0 u_i rds, \\
b_{i+N,3N+1} &= \int_0^{l_s} v_0 v_i rds, \quad b_{i+N,3N+2} = \int_0^{l_s} -k_3 v_0 v_i rds, \\
b_{i+2N,3N+1} &= \int_0^{l_s} w_0 w_i rds, \quad b_{i+2N,3N+2} = \int_0^{l_s} \psi_0 w_i rds,
\end{aligned}$$

$$b_{3N+1,3N+1} = \int_0^{l_s} [k_1^2 u_0^2 + v_0^2 + w_0^2] r ds + m_0,$$

$$b_{3N+1,3N+2} = \int_0^{l_s} [-k_1 k_2 u_0^2 - k_3 v_0^2 + \psi_0 w_0] r ds,$$

$$b_{3N+2,3N+2} = \int_0^{l_s} [k_2^2 u_0^2 + k_3^2 v_0^2 + \psi_0^2] r ds + J_{yc}.$$

Нагадаємо, що в разі, коли $n > 1$, матриці A і B мають порядок $3N$ і отримуються з наведених шляхом відкидання останніх двох стовпців і рядків. При виведенні цих виразів було використано представлення для варіації функціонала δI в формі (2.17), що забезпечило простоту їх отримання і значні зручності при програмуванні запропонованого алгоритму розв'язання даної задачі.

2.3 Спрощена постановка задачі про поперечні коливання механічної системи «оболонка-тверде тіло»

Як видно з розділу 2.1 задача про коливання складової механічної конструкції, «оболонка - тверде тіло» відноситься до розряду неklasичних задач математичної фізики, оскільки мова йде про з'єднання елементів, поведінка яких, описується рівняннями різної розмірності. Це викликає певні труднощі при їх розв'язанні. У зв'язку з цим, на практиці використовують різного роду спрощені моделі реальної конструкції за рахунок введення в розгляд додаткових гіпотез і припущень.

Для спрощеної схеми як правило використовується класична балкова теорія Ейлера-Бернуллі. Природним чином виникає питання про можливість розширення меж застосування спрощеної моделі шляхом врахування деформацій зсуву та інерції повороту поперечного перерізу балки [91].

У зв'язку з цим, нижче наведемо на цій основі спрощену постановку розглядуваної задачі і побудуємо її точний розв'язок.

Розглянемо механічну систему, що складається з балки Тимошенка і абсолютно твердого тіла, яке жорстко прикріплено до одного з її торців. Передбачається, що другий торець балки деяким чином закріплений. Вважається, що тіло володіє двома взаємно ортогональними площинами симетрії, лінією перетину яких є вісь Oz , що співпадає з нейтральною лінією балки. Координатну площину Oxz сумістимо з однією з площин симетрії твердого тіла, а початок системи координат $Oxyz$ розмістимо в площині торцевого перерізу балки, вільного від твердого тіла. Для описання переміщень твердого тіла введемо прямокутну систему координат $Cx_c y_c z_c$ з початком в центрі інерції твердого тіла і осями Cx_c, Cy_c паралельними осям Ox і Oy відповідно. Крім того, зручно також ввести в розгляд систему координат $O_1x_1y_1z_1$ з одиничними ортами $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$, осі якої паралельні осям Ox, Oy і Oz , а початок зв'язано з точкою кріплення твердого тіла до балки.

Оскільки механічна система має дві площини симетрії, то її коливання в площинах Oxz і Oyz можна розглядати незалежно. Тому далі розглядатимемо рух системи тільки в площині Oxz .

Позначимо переміщення точок нейтральної лінії пружної балки в напрямку осі Ox через $w(z, t)$. Тоді кут нахилу дотичної можна представити у вигляді [91]:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \psi + \tau, \quad (2.25)$$

де ψ — кут нахилу дотичної до пружної лінії балки від дії тільки згинальних моментів; τ — кут нахилу від зміни перерізуючих сил.

У точці кріплення твердого тіла при $z = l$ повинні виконуватися кінематичні умови спряження, тобто рівність відповідних переміщень і кутів повороту балки і тіла.

$$w(l, t) = w_0, \quad \psi(l, t) = \vartheta_{02}.$$

Тут w_0 і ϑ_{02} - переміщення точки O_1 і кут повороту твердого тіла відносно осі O_1y_1 .

Вектор переміщення точок твердого тіла \vec{U}^* можна представити у вигляді

$$\vec{U}^* = \vec{U}_0 + [\vec{\theta}_0 \times \vec{r}], \quad (2.26)$$

де \vec{r} - радіус вектор точок твердого тіла, $\vec{U}_0 = \{w_0, 0, 0\}$ і $\vec{\theta}_0 = \{0, \vartheta_{02}, 0\}$ - вектори малого переміщення і повороту системи координат $O_1x_1y_1z_1$. У розгорнутому вигляді для вектора (2.26) будемо мати такий вираз:

$$\vec{U}^* = (w_0 + z_1\vartheta_{02})\vec{i}_1 + (-\vartheta_{02}x_1)\vec{k}_1. \quad (2.27)$$

Для виведення рівнянь руху системи скористаємося принципом можливих переміщень. Потенціальна енергія деформації для балки Тимошенка має вигляд [21]:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial \tau}{\partial z} \right)^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^l \kappa GF \tau^2 dz, \quad (2.28)$$

де l - довжина балки, κ - коефіцієнт, що залежить від характеру розподілу зсувів по перерізу і способу визначення середнього значення для кута зсуву τ , EJ і GF - згинна і зсувна жорсткості відповідно.

Робота сил інерції на можливих переміщеннях матиме вигляд:

$$\delta A = -\gamma \iiint_V \ddot{\vec{U}}^* \delta \vec{U}^* dV - \rho F \int_0^l \ddot{w} \delta w dz - \rho J \int_0^l \ddot{\psi} \delta \psi dz, \quad (2.29)$$

де γ і ρ густина матеріалів твердого тіла і балки відповідно. Двокрапка над величинами в рівнянні (2.29) означає дворазове диференціювання за часом t .

Прирівнявши варіацію від потенціальної енергії деформації балки до роботи зовнішніх сил на можливих переміщеннях, отримаємо наступне варіаційне рівняння:

$$EJ \int_0^l \frac{\partial \psi}{\partial z} \left(\frac{\partial \delta \psi}{\partial z} \right) dz + \kappa GF \int_0^l \tau \frac{\partial \delta w}{\partial z} dz - \kappa GF \int_0^l \tau \delta \psi dz =$$

$$\begin{aligned}
&= -\rho F \int_0^l \ddot{w} \delta w dz - \rho J \int_0^l \ddot{\psi} \delta \psi dz - (m_0 \ddot{w}_0 + L_{03} \ddot{\vartheta}_{02}) \delta w_0 - \\
&\quad - (L_{03} \ddot{w}_0 + J_{y_1} \ddot{\vartheta}_{02}) \delta \vartheta_{02}. \tag{2.30}
\end{aligned}$$

Тут:

$$L_{03} = \gamma \iiint_V z_1 dV \quad -$$

статичний момент інерції твердого тіла відносно площини $O_1 y_1 z_1$,

$$J_{y_1} = \gamma \iiint_V (x_1^2 + z_1^2) dV \quad -$$

момент інерції твердого тіла відносно осі $O_1 y_1$, m_0 – маса твердого тіла.

Позначимо через l_c координату центру мас твердого тіла в системі координат $O_1 y_1 z_1$. Тоді матимемо: $L_{03} = m_0 l_c$; $J_{y_1} = m_0 l_c^2 + J_{y_c}$, де J_{y_c} – момент інерції твердого тіла відносно осі $C y_c$.

Виконавши в лівій частині рівняння (2.30) інтегрування по частинах і взявши до уваги кінематичні умови спряження, а також незалежність варіацій δw і $\delta \psi$, отримаємо наступну початково-крайову задачу:

$$\begin{cases} \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \kappa G F \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = 0; \\ \rho J \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - E J \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \kappa G F \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \psi \right) = 0; \end{cases} \tag{2.31}$$

$$\begin{aligned}
&\left[\kappa G F \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \psi \right) + m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + L_{03} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right]_{z=l} = 0; \\
&\left[E J \frac{\partial \psi}{\partial z} + L_{03} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + J_{y_1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right]_{z=l} = 0. \tag{2.32}
\end{aligned}$$

Для жорстко закріпленого торця балки матимемо наступні граничні умови:

$$w(0, t) = 0; \quad \psi = 0. \tag{2.33}$$

У випадку вільного торця отримаємо:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial z} - \psi \right)_{z=0} = 0; \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0. \quad (2.34)$$

До співвідношень (2.31) - (2.34) необхідно додати відповідні початкові умови на шукані функції.

Систему рівнянь (2.31), шляхом нескладних перетворень, можна привести до наступного вигляду:

$$\begin{cases} EJ \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} - \rho J \left(1 + \frac{E}{\varkappa G} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 J}{\varkappa G} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0; \\ EJ \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} - \rho J \left(1 + \frac{E}{\varkappa G} \right) \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 J}{\varkappa G} \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^4} + \rho F \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0; \end{cases} \quad (2.35)$$

Для випадку вільних гармонічних коливань системи з частотою ω , представимо функції $w(z, t)$ і $\Psi(z, t)$ у вигляді

$$w(z, t) = W(z)e^{i\omega t}, \quad \psi(z, t) = \Psi(z)e^{i\omega t}. \quad (2.36)$$

Введемо в розгляд наступні безрозмірні величини, які пов'язані з відповідними розмірними за формулами:

$$\begin{aligned} \beta^2 &= \frac{\omega^2 L^4 \rho F}{EJ}; & r^2 &= \frac{J}{FL^2}; & s^2 &= \frac{EJ}{\varkappa GFL^2}; \\ \bar{m}_0 &= \frac{m_0}{\rho FL}; & \bar{J}_{y_c} &= \frac{J_{y_c}}{\rho FL^3}; & \bar{l}_c &= \frac{l_c}{L}; \\ \bar{W} &= \frac{W}{L}; & \bar{z} &= \frac{z}{L}; & \bar{J}_{y_1} &= \bar{m}_0 \bar{l}_c^2 + \bar{J}_{y_c}; \\ & & & & \bar{L}_{03} &= \bar{m}_0 \bar{l}_c. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Тут: β — безрозмірна власна частота коливань системи; r^2 — квадрат радіуса інерції балки (коефіцієнт, що враховує інерцію повороту поперечного перерізу балки); s^2 — коефіцієнт, що враховує вплив деформацій зсуву; L — деякий (поки довільний) лінійний розмір. Риски над безрозмірними величинами надалі для простоти запису будемо опускати.

З урахуванням формул (2.36) і (2.37), співвідношення (2.31) - (2.35) приймуть такий вигляд:

$$\begin{cases} \frac{d^4 W}{dz^4} + \beta^2(r^2 + s^2) \frac{d^2 W}{dz^2} + \beta^2(\beta^2 r^2 s^2 - 1)W = 0; \\ \frac{d^4 \Psi}{dz^4} + \beta^2(r^2 + s^2) \frac{d^2 \Psi}{dz^2} + \beta^2(\beta^2 r^2 s^2 - 1)\Psi = 0; \end{cases} \quad (2.38)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 W}{dz^2} - \frac{d\Psi}{dz} + \beta^2 s^2 W = 0; \\ s^2 \frac{d^2 \Psi}{dz^2} + \frac{dW}{dz} + (\beta^2 r^2 s^2 - 1)\Psi = 0; \end{cases} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dW}{dz} - \Psi - \beta^2 s^2 m_0 W - \beta^2 s^2 m_0 l_c \Psi \right)_{z=l} &= 0; \\ \left(\frac{d\Psi}{dz} - \beta^2 L_{03} W - \beta^2 J_{y_1} \Psi \right)_{z=l} &= 0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Граничні умови для вільного торця:

$$\left(\frac{dW}{dz} - \Psi \right)_{z=0} = 0; \quad \frac{d\Psi}{dz} \Big|_{z=0} = 0. \quad (2.41)$$

При закріпленому торці повинні виконуватися умови:

$$W(0) = 0; \quad \Psi(0) = 0. \quad (2.42)$$

Співвідношення (2.39) дають можливість виразити Ψ і $d\Psi/dz$ через функцію W і її похідні

$$\begin{cases} \Psi = \frac{s^2}{b_0} \frac{d^3 W}{dz^3} + \frac{(\beta^2 s^4 + 1)}{b_0} \frac{dW}{dz}, \\ \frac{d\Psi}{dz} = \frac{d^2 W}{dz^2} + \beta^2 s^2 W. \end{cases} \quad (2.43)$$

Підставляючи вирази (2.43) в рівняння (2.40) - (2.42) остаточно будемо мати наступну крайову задачу на власні значення відносно функції W при жорсткому закріпленні торця оболонки при $z = 0$:

$$\frac{d^4 W}{dz^4} + b_2 \frac{d^2 W}{dz^2} - \beta^2 b_0 W = 0; \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \left(f_1 \frac{d^3 W}{dz^3} + f_2 \frac{dW}{dz} + f_3 W \right)_{z=l} &= 0; \\ \left(f_4 \frac{d^3 W}{dz^3} + f_5 \frac{d^2 W}{dz^2} + f_6 \frac{dW}{dz} + f_7 W \right)_{z=l} &= 0; \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$W(0) = 0; \quad \left(b_1 \frac{dW}{dz} + s^2 \frac{d^3 W}{dz^3} \right)_{(z=0)} = 0; \quad (2.46)$$

У випадку вільного торця балки при $z = 0$, граничні умови (2.46) слід замінити на умови

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2 W}{dz^2} + \beta^2 s^2 W \right)_{z=0} &= 0; \\ \left(\frac{d^3 W}{dz^3} + b_2 \frac{dW}{dz} \right)_{z=0} &= 0. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Тут були введені такі позначення:

$$\begin{aligned} b_0 &= 1 - \beta^2 r^2 s^2; & b_1 &= \beta^2 s^4 + 1; \\ b_2 &= \beta^2 (r^2 + s^2); & f_1 &= 1 + \beta^2 s^2 L_{03}; \\ f_2 &= \beta^2 b_1 L_{03} + b_2; & f_3 &= \beta^2 m_0 b_0; \\ f_4 &= \beta^2 s^2 J_{y_1}; & f_5 &= -b_0; \\ f_6 &= \beta^2 b_1 J_{y_1}; & f_7 &= b_0 \beta^2 (L_{03} - s^2). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Таким чином, розв'язання задачі про власні згинні коливання балки Тимошенка з приєднаним на торці абсолютно твердим тілом звелось до інтегрування звичайного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами (2.44) при відповідних граничних умовах. При необхідності визначення величин Ψ і $d\Psi/dz$ необхідно скористатися виразами (2.43).

Зауважимо, що якщо в рівняннях (2.43) - (2.48) покласти $r^2 = s^2 = 0$, то отримаємо, як частинний випадок, задачі про власні коливання балки Ейлера-Бернуллі з приєднаним твердим тілом. Відповідно, якщо знехтувати тільки членами, які враховують деформації зсуву ($s^2 = 0$), матимемо балку Релея.

2.4 Побудова точних розв'язків для спрощеної постановки задачі

Перейдемо до побудови точного розв'язку сформульованої крайової задачі. Загальним розв'язком рівняння (2.44) при $\mu \geq b_2/2$ буде

$$W(\beta, z) = A \sinh \gamma_1 z + B \cosh \gamma_1 z + C \sin \gamma_2 z + D \cos \gamma_2 z, \\ \text{де } \gamma_1 = \sqrt{\mu - b_2/2}, \quad \gamma_2 = \sqrt{\mu + b_2/2}, \quad (2.49)$$

Для випадку, коли $\mu < b_2/2$ матимемо

$$W(\beta, z) = A' \sin \gamma_1 z + B' \cos \gamma_1 z + C' \sin \gamma_2 z + D' \cos \gamma_2 z, \\ \text{де } \gamma_1 = \sqrt{b_2/2 - \mu}, \quad \gamma_2 = \sqrt{\mu + b_2/2}. \quad (2.50)$$

Тут $\mu = \sqrt{(b_2/2)^2 + b_0 \beta^2}$.

Розв'язки (2.49), (2.50) зручно представити в наступному вигляді

$$W_i(\beta, z) = C_{1i} S_i(\beta, z) + C_{2i} T_i(\beta, z) + C_{3i} U_i(\beta, z) + C_{4i} V_i(\beta, z). \quad (2.51)$$

$$\text{Тут і далі } i = \begin{cases} 1, & \forall \mu \geq \frac{b_2}{2}, \\ 2, & \forall \mu < \frac{b_2}{2}. \end{cases}$$

Лінійно незалежні функції S_i, T_i, U_i і V_i є лінійними комбінаціями функцій, що входять в (2.49), (2.50) і володіють тією властивістю, що матриця Коші для них при $z = 0$ є одиничною.

Зазначені функції можна представити наступним чином:

$$S_1(\beta, z) = \frac{1}{2\mu} \left(\gamma_2^2 \cosh \gamma_1 z + \gamma_1^2 \cos \gamma_2 z \right); \\ T_1(\beta, z) = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\gamma_2^2}{\gamma_1} \sinh \gamma_1 z + \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2} \sin \gamma_2 z \right); \\ U_1(\beta, z) = \frac{1}{2\mu} \left(\cosh \gamma_1 z - \cos \gamma_2 z \right);$$

$$V_1(\beta, z) = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{1}{\gamma_1} \sinh \gamma_1 z - \frac{1}{\gamma_2} \sin \gamma_2 z \right). \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} S_2(\beta, z) &= \frac{1}{2\mu} \left(\gamma_2^2 \cos \gamma_1 z - \gamma_1^2 \cos \gamma_2 z \right); \\ T_2(\beta, z) &= \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\gamma_2^2}{\gamma_1} \sin \gamma_1 z - \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2} \sin \gamma_2 z \right); \\ U_2(\beta, z) &= \frac{1}{2\mu} \left(\cos \gamma_1 z - \cos \gamma_2 z \right); \\ V_2(\beta, z) &= \frac{1}{2\mu} \left(\frac{1}{\gamma_1} \sin \gamma_1 z - \frac{1}{\gamma_2} \sin \gamma_2 z \right). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Слід зауважити, що наведені функції дещо відрізняються від відомих балкових функцій Крилова, в тому сенсі, що не вдається виразити перші три похідні від них по змінній z через ці ж функції, що має місце в елементарній балковій теорії. У зв'язку з цим, введемо додатково в розгляд наступні функції:

$$\begin{aligned} Q_{11}(\beta, z) &= \frac{1}{2\mu} \left(\gamma_1 \sinh \gamma_1 z + \gamma_2 \sin \gamma_2 z \right); \\ Q_{21}(\beta, z) &= \frac{1}{2\mu} \left(\gamma_1^2 \cosh \gamma_1 z + \gamma_2^2 \cos \gamma_2 z \right); \\ Q_{31}(\beta, z) &= \frac{1}{2\mu} \left(\gamma_1^3 \sinh \gamma_1 z - \gamma_2^3 \sin \gamma_2 z \right); \\ Q_{12}(\beta, z) &= \frac{1}{2\mu} \left(\gamma_2 \sin \gamma_2 z - \gamma_1 \sin \gamma_1 z \right); \\ Q_{22}(\beta, z) &= \frac{1}{2\mu} \left(\gamma_2^2 \cos \gamma_2 z - \gamma_1^2 \cos \gamma_1 z \right); \\ Q_{32}(\beta, z) &= \frac{1}{2\mu} \left(\gamma_1^3 \sin \gamma_1 z - \gamma_2^3 \sin \gamma_2 z \right). \end{aligned} \quad (2.54)$$

Тут другий індекс відповідає значенню індексу i .

Тоді перші три похідні від $W_i(\beta, z)$ по змінній z можна обчислити за такими формулами:

$$\begin{aligned} W_1'(\beta, z) &= C_{11}\zeta V_1(\beta, z) + C_{21}S_1(\beta, z) + C_{31}Q_{11}(\beta, z) + C_{41}U_1(\beta, z); \\ W_1''(\beta, z) &= C_{11}\zeta U_1(\beta, z) + C_{21}\zeta V_1(\beta, z) + C_{31}Q_{21}(\beta, z) + C_{41}Q_{11}(\beta, z); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_1'''(\beta, z) &= C_{11}\zeta Q_{11}(\beta, z) + C_{21}\zeta U_1(\beta, z) + C_{31}Q_{31}(\beta, z) + C_{41}Q_{21}(\beta, z); \\
W_2'(\beta, z) &= -C_{12}\zeta V_2(\beta, z) + C_{22}S_2(\beta, z) + C_{32}Q_{12}(\beta, z) + C_{42}U_2(\beta, z); \\
W_2''(\beta, z) &= -C_{12}\zeta U_2(\beta, z) - C_{22}\zeta V_2(\beta, z) + C_{32}Q_{22}(\beta, z) + C_{42}Q_{12}(\beta, z); \\
W_2'''(\beta, z) &= -C_{12}\zeta Q_{12}(\beta, z) - C_{22}\zeta U_2(\beta, z) + C_{32}Q_{32}(\beta, z) + C_{42}Q_{22}(\beta, z).
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Тут і далі $\zeta = \gamma_1^2 \gamma_2^2$. Нагадаємо, що величини γ_1 і γ_2 визначаються формулами з (2.49) і (2.50). При представленні розв'язків в формі (2.51), довільні постійні можна виразити через значення функцій W_i і їх похідних в точці $z = 0$

$$\begin{aligned}
W_i(\beta, 0) &= C_{1i}; & W_i'(\beta, 0) &= C_{2i}; \\
W_i''(\beta, 0) &= C_{3i}; & W_i'''(\beta, 0) &= C_{4i}.
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Розглянемо випадок, коли вільний від твердого тіла торець балки жорстко закріплений. Підставляючи розв'язок (2.51) в граничні умови (2.45) і (2.46), отримаємо однорідну алгебраїчну систему відносно постійних інтегрування C_{3i} і C_{4i} , яка має наступний вигляд:

$$\begin{cases} C_{3i}a_{11}^{(i)} + C_{4i}a_{12}^{(i)} = 0, \\ C_{3i}a_{21}^{(i)} + C_{4i}a_{22}^{(i)} = 0. \end{cases} \tag{2.57}$$

При цьому $C_{1i} = 0$, $C_{2i} = -K_1 C_{4i}$, де $K_1 = s^2/b_1$. Величини $a_{kj}^{(i)}$, що входять в систему рівнянь (2.57), будуть визначатися за формулами:

$$\begin{aligned}
a_{11}^{(1)} &= f_1 Q_{31}(\beta, l) + f_2 Q_{11}(\beta, l) + f_3 U_1(\beta, l); \\
a_{12}^{(1)} &= f_1 (Q_{21}(\beta, l) - K_1 \zeta U_1(\beta, l)) + f_2 (U_1(\beta, l) - K_1 S_1(\beta, l)) + \\
&\quad + f_3 (V_1(\beta, l) - K_1 T_1(\beta, l)); \\
a_{21}^{(1)} &= f_4 Q_{31}(\beta, l) + f_5 Q_{21}(\beta, l) + f_6 Q_{11}(\beta, l) + f_7 U_1(\beta, l); \\
a_{22}^{(1)} &= f_4 (Q_{21}(\beta, l) - K_1 \zeta U_1(\beta, l)) + f_5 (Q_{11}(\beta, l) - K_1 \zeta V_1(\beta, l)) + \\
&\quad + f_6 (U_1(\beta, l) - K_1 S_1(\beta, l)) + f_7 (V_1(\beta, l) - K_1 T_1(\beta, l)); \\
a_{11}^{(2)} &= f_1 Q_{32}(\beta, l) + f_2 Q_{12}(\beta, l) + f_3 U_2(\beta, l);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{12}^{(2)} &= f_1(Q_{22}(\beta, l) + K_1\zeta U_2(\beta, l)) + f_2(U_2(\beta, l) - K_1S_2(\beta, l)) + \\
&+ f_3(V_2(\beta, l) - K_1T_2(\beta, l)); \\
a_{21}^{(2)} &= f_4Q_{32}(\beta, l) + f_5Q_{22}(\beta, l) + f_6Q_{12}(\beta, l) + f_7U_2(\beta, l); \\
a_{22}^{(2)} &= f_4(Q_{22}(\beta, l) + K_1\zeta U_2(\beta, l)) + f_5(Q_{12}(\beta, l) + K_1\zeta V_2(\beta, l)) + \\
&+ f_6(U_2(\beta, l) - K_1S_2(\beta, l)) + f_7(V_2(\beta, l) - K_1T_2(\beta, l)).
\end{aligned} \tag{2.58}$$

З умови існування розв'язку алгебраїчної системи (2.57) отримаємо характеристичне рівняння для визначення параметра β

$$\det \begin{vmatrix} a_{11}^{(i)} & a_{12}^{(i)} \\ a_{21}^{(i)} & a_{22}^{(i)} \end{vmatrix} = 0. \tag{2.59}$$

Якщо параметр β визначено, то з розв'язку системи (2.57) знайдемо $C_{3i} = -C_{4i}(a_{12}^{(i)}/a_{11}^{(i)})$.

Аналогічним чином, задовольняючи умови (2.45) і (2.47), отримаємо систему алгебраїчних рівнянь відносно постійних C_{1i} і C_{2i} для випадку, коли лівий торець балки вільний від навантажень

$$\begin{cases} C_{1i}a_{11}^{(i)} + C_{2i}a_{12}^{(i)} = 0, \\ C_{1i}a_{21}^{(i)} + C_{2i}a_{22}^{(i)} = 0. \end{cases} \tag{2.60}$$

При цьому $C_{3i} = -K_2C_{1i}$, $C_{4i} = -b_2C_{2i}$, де $K_2 = s^2\beta^2$. Відповідно величини $a_{kj}^{(i)}$, що входять в систему рівнянь (2.60), будуть визначатися наступним чином:

$$\begin{aligned}
a_{11}^{(1)} &= f_1(\zeta Q_{11}(\beta, l) - K_2Q_{31}(\beta, l)) + f_2(\zeta V_1(\beta, l) - K_2Q_{11}(\beta, l)) + \\
&+ f_3(S_1(\beta, l) - K_2U_1(\beta, l)); \\
a_{12}^{(1)} &= f_1(\zeta U_1(\beta, l) - b_2Q_{21}(\beta, l)) + f_2(S_1(\beta, l) - b_2U_1(\beta, l)) + \\
&+ f_3(T_1(\beta, l) - b_2V_1(\beta, l)); \\
a_{21}^{(1)} &= f_4(\zeta Q_{11}(\beta, l) - K_2Q_{31}(\beta, l)) + f_5(\zeta U_1(\beta, l) - K_2Q_{21}(\beta, l)) + \\
&+ f_6(\zeta V_1(\beta, l) - K_2Q_{11}(\beta, l)) + f_7(S_1(\beta, l) - K_2U_1(\beta, l));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{22}^{(1)} &= f_4(\zeta U_1(\beta, l) - b_2 Q_{21}(\beta, l)) + f_5(\zeta V_1(\beta, l) - b_2 Q_{11}(\beta, l)) + \\
&+ f_6(S_1(\beta, l) - b_2 U_1(\beta, l)) + f_7(T_1(\beta, l) - b_2 V_1(\beta, l)); \\
a_{11}^{(2)} &= -f_1(\zeta Q_{12}(\beta, l) + K_2 Q_{32}(\beta, l)) - f_2(\zeta V_2(\beta, l) + K_2 Q_{12}(\beta, l)) + \\
&+ f_3(S_2(\beta, l) - K_2 U_2(\beta, l)); \\
a_{12}^{(2)} &= -f_1(\zeta U_2(\beta, l) + b_2 Q_{22}(\beta, l)) + f_2(S_2(\beta, l) - b_2 U_2(\beta, l)) + \\
&+ f_3(T_2(\beta, l) - b_2 V_2(\beta, l)); \\
a_{21}^{(2)} &= -f_4(\zeta Q_{12}(\beta, l) + K_2 Q_{32}(\beta, l)) - f_5(\zeta U_2(\beta, l) + K_2 Q_{22}(\beta, l)) - \\
&- f_6(\zeta V_2(\beta, l) + K_2 Q_{12}(\beta, l)) + f_7(S_2(\beta, l) - K_2 U_2(\beta, l)); \\
a_{22}^{(2)} &= -f_4(\zeta U_2(\beta, l) + b_2 Q_{22}(\beta, l)) - f_5(\zeta V_2(\beta, l) + b_2 Q_{12}(\beta, l)) + \\
&+ f_6(S_2(\beta, l) - b_2 U_2(\beta, l)) + f_7(T_2(\beta, l) - b_2 V_2(\beta, l)). \quad (2.61)
\end{aligned}$$

Частотне рівняння матиме вигляд (2.59). Після визначення β , з розв'язку системи (2.60) знайдемо $C_{2i} = -C_{1i}(a_{11}^{(i)}/a_{12}^{(i)})$.

Таким чином, отримана досить проста розрахункова схема розв'язання задачі про власні згинні коливання балки Тимошенка з приєднаним на торці абсолютно твердим тілом. Розв'язки представлені для жорсткого кріплення і незакріпленого торця балки. За рахунок подання розв'язку у вигляді (2.51), можна без особливих труднощів реалізувати і інші, що найбільш часто зустрічаються на практиці типи граничних умов. Запропонована формульна схема розв'язання даної задачі зручна і для реалізації її на ПК.

2.5 Аналіз ефективності алгоритмів та результати розрахунків власних коливань системи

2.5.1 Вільні коливання системи «оболонка-тверде тіло»

Як приклад використання запропонованого підходу до розв'язання задачі про визначення власних коливань розглядуваної системи, нижче наведені деякі результати розрахунків для зрізаної конічної оболонки з приєднаним

на торці абсолютно твердим тілом. В цьому випадку слід покласти:

$$s = \frac{l - z}{\cos \alpha}; \quad r(s) = 1 + s \sin \alpha; \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad \frac{1}{R_1} = 0, \quad (2.62)$$

де l і α — висота і кут піврозтвору зрізаного конуса відповідно. Якщо в формулах (2.62) прийняти $\alpha = 0$, то отримаємо циліндричну оболонку одиничного радіуса. У розрахунках були використані вирази для $\Psi_{ij}(p, q)$, отримані на основі технічної теорії оболонок. Крім того, для визначеності вважалося, що до оболонки прикріплено тверде тіло, яке має форму кругового циліндра радіуса R і висотою H . У цьому випадку момент інерції J_{yc} визначатиметься за формулою

$$J_{yc} = \frac{m_0}{12}(3 + H^2), \quad \text{де } H = 2l_c.$$

У таблиці 2.1 представлені результати розрахунку перших п'яти частот зрізаної конічної оболонки з жорстко закріпленими торцями в залежності від числа членів N в розкладах (2.20) і кута піврозтвору конуса α , отриманих при наступних вхідних даних $n = 1$, $l = 10$, $h = 0.001$ і $\nu = 0.3$. Наведені в зазначеній таблиці результати розрахунків свідчать про швидку збіжність запропонованого варіанту побудови розв'язків у вигляді розкладів за поліномами Лежандра для досить тонких оболонок. При цьому забезпечується стійкість обчислювального процесу при утриманні в розкладах до шістдесяти координатних функцій без втрати точності розв'язку алгебраїчної системи (2.24). Крім того, слід зазначити, що запропонований алгоритм дозволяє отримувати відразу весь необхідний спектр частот без будь-яких істотних витрат машинного часу. При збільшенні кута піврозтвору конуса спостерігається деяке поліпшення збіжності розв'язків для першої частоти і незначне погіршення її на більш високих тонах власних коливань системи. Збільшення висоти l зрізаного конуса і зменшення відносної товщини оболонки h веде до погіршення процесу збіжності розв'язків.

На рис. 2.2 показано поведінку перших трьох власних частот системи «конічна оболонка-тверде тіло» в залежності від кута піврозтвору конуса α^o і

Таблиця 2.1

Перші п'ять частот зрізаної конічної оболонки в залежності від числа членів N в розкладах (2.20) і кута піврозтвору конуса α при $n = 1$, $l = 10$, $h = 0.001$, $\nu = 0.3$

N	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$\alpha = 0^\circ$					
24	0.09939	0.21122	0.33820	0.46218	0.57333
26	0.09938	0.21121	0.33819	0.46217	0.57332
28	0.09937	0.21120	0.33818	0.46217	0.57332
30	0.09936	0.21119	0.33818	0.46217	0.57332
32	0.09935	0.21119	0.33818	0.46217	0.57332
34	0.09935	0.21118	0.33817	0.46217	0.57332
36	0.09934	0.21118	0.33817	0.46216	0.57332
$\alpha = 30^\circ$					
24	0.10333	0.12595	0.12838	0.13170	0.13479
26	0.10332	0.12592	0.12823	0.13125	0.13422
28	0.10332	0.12591	0.12818	0.13099	0.13355
30	0.10332	0.12591	0.12816	0.13093	0.13327
32	0.10332	0.12591	0.12814	0.13083	0.13316
34	0.10332	0.12590	0.12813	0.13078	0.13296
36	0.10332	0.12590	0.12813	0.13077	0.13290
$\alpha = 60^\circ$					
24	0.02717	0.02781	0.02865	0.02942	0.03048
26	0.02717	0.02780	0.02858	0.02924	0.03016
28	0.02717	0.02779	0.02857	0.02919	0.03000
30	0.02717	0.02779	0.02854	0.02915	0.02994
32	0.02717	0.02778	0.02853	0.02910	0.02983
34	0.02717	0.02778	0.02853	0.02910	0.02980
36	0.02717	0.02778	0.02852	0.02908	0.02977

маси твердого тіла m_0 при $l_c = 0.5$, $l = 4$, $h = 0.01$ і $\nu = 0.3$.

Зі збільшенням маси твердого тіла m_0 спостерігається монотонне зниження власних частот даної системи. Зі збільшенням же кута піврозтвору конуса

α спостерігається зростання а потім зниження частот. При цьому, має місце суттєве зближення всього спектра власних частот. Так, вже при $\alpha = 40^\circ$ відмінність між сусідніми частотами спостерігається лише в третій значущій цифрі.

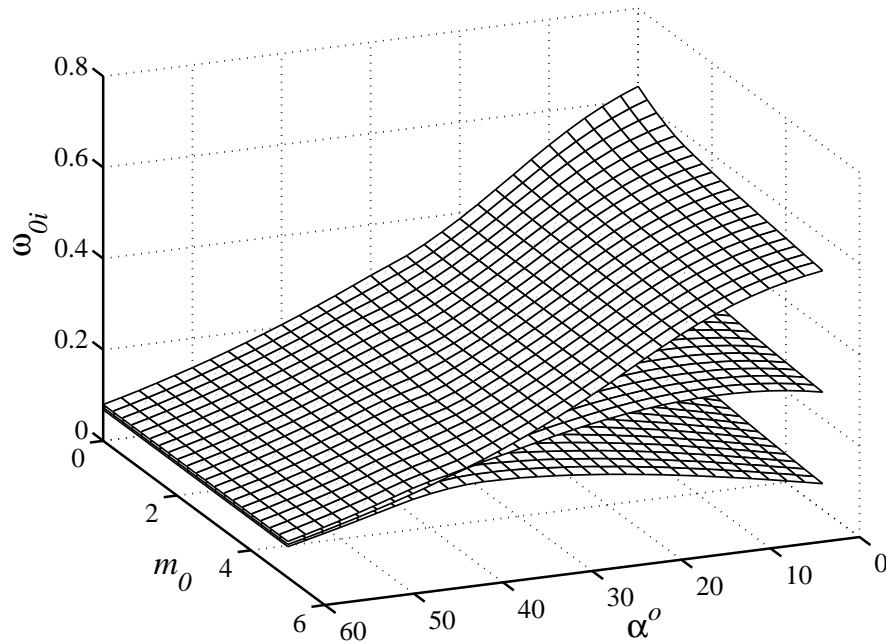


Рис. 2.2. Поведінка перших трьох власних частот системи «конічна оболонка-тверде тіло» в залежності від кута піврозтвора конуса α° і маси твердого тіла m_0 при $l_c = 0.5$, $l = 4$, $h = 0.01$ і $\nu = 0.3$.

На рис. 2.3 показано поведінку перших трьох форм власних коливань системи «конічна оболонка - тверде тіло» в залежності від маси твердого тіла m_0 . Результати отримані при наступних вихідних даних $l_c = 0.5$, $l = 4$, $h = 0.01$, $\nu = 0.3$, $n = 1$ і $\alpha = 15^\circ$. Тут було введено позначення $z^* = z/l$. Як бачимо, зміна маси тіла веде до зміни форм коливань розглянутої системи. Слід зазначити, що в граничному випадку, коли $m_0 \rightarrow \infty$, перші дві частоти наближаються до нуля, а третя до першої частоти зрізаної конічної оболонки з двома жорстко закріпленими торцями. При цьому, перші дві форми коливань розглядуваної системи вироджуються, оскільки нульовим частото-

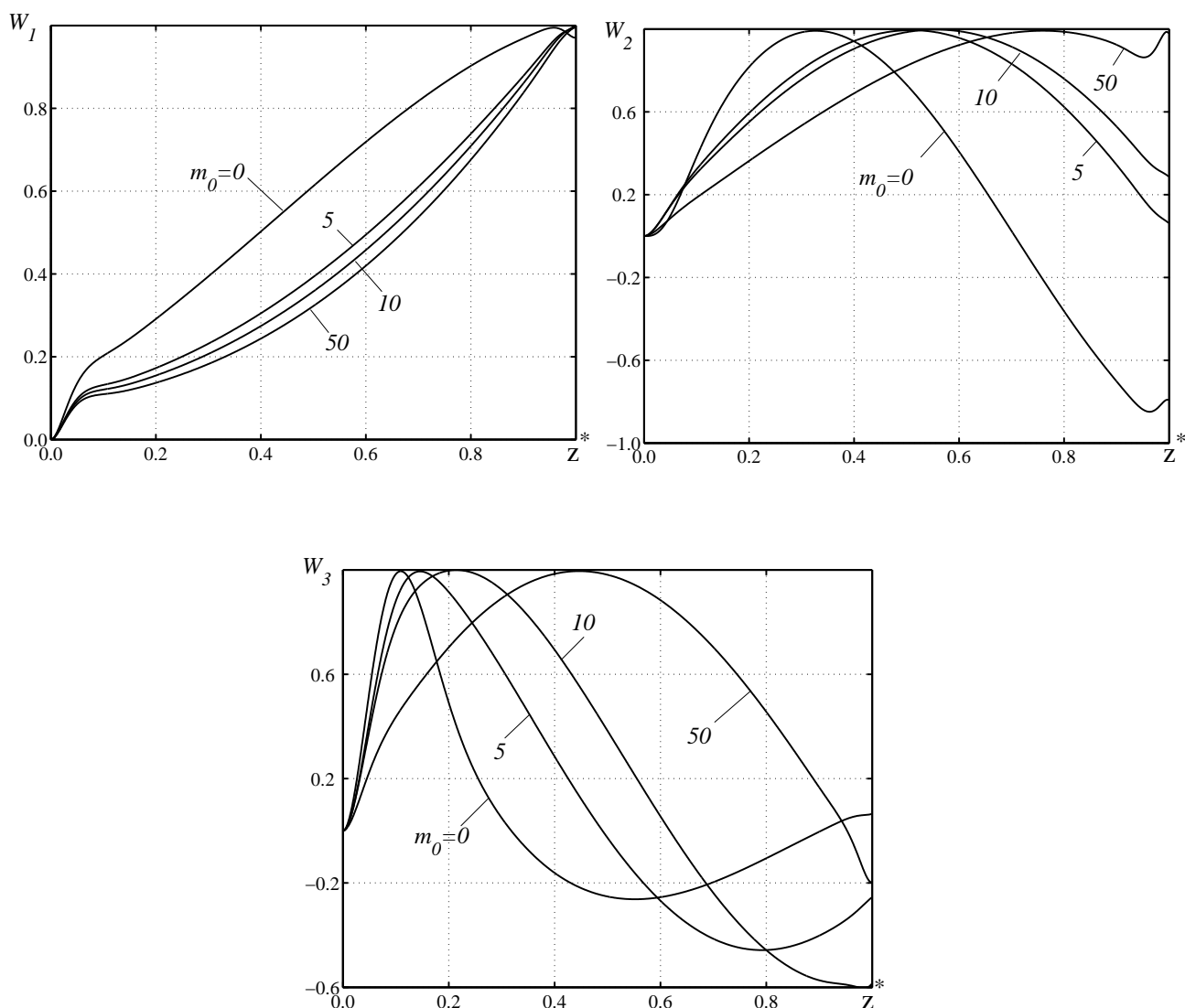


Рис. 2.3. Поведінка перших трьох форм власних коливань системи «конічна оболонка - тверде тіло» в залежності від маси твердого тіла m_0 при $l_c = 0.5$, $l = 4$, $h = 0.01$, $\nu = 0.3$, $n = 1$ і $\alpha = 15^\circ$.

там відповідають тривіальні розв'язки задачі (2.17) - (2.19), а третя форма наближається відповідно до виду першої форми коливань зрізаної конічної оболонки з двома жорстко закріпленими торцями.

Таким чином, на підставі наведених результатів розрахунку можна зробити висновок, що запропонована система базисних функцій з використанням поліномів Лежандра забезпечує високу стійкість обчислювального процесу при великій кількості членів в розкладах для переміщень оболонки. Це дозво-

ляє розраховувати нижчі частоти і форми коливань розглядуваної системи з досить високою точністю в широкому діапазоні її вхідних параметрів.

2.5.2 Вільні коливання системи «балка Тимошенка-тверде тіло»

Нижче наведені деякі результати розрахунків для випадку жорсткого кріплення торця оболонки при $z = 0$.

На рис. 2.4 показані перші чотири власні форми і відповідні їм частоти коливань жорстко закріпленої балки Тимошенка, що несе на вільному торці тверде тіло.

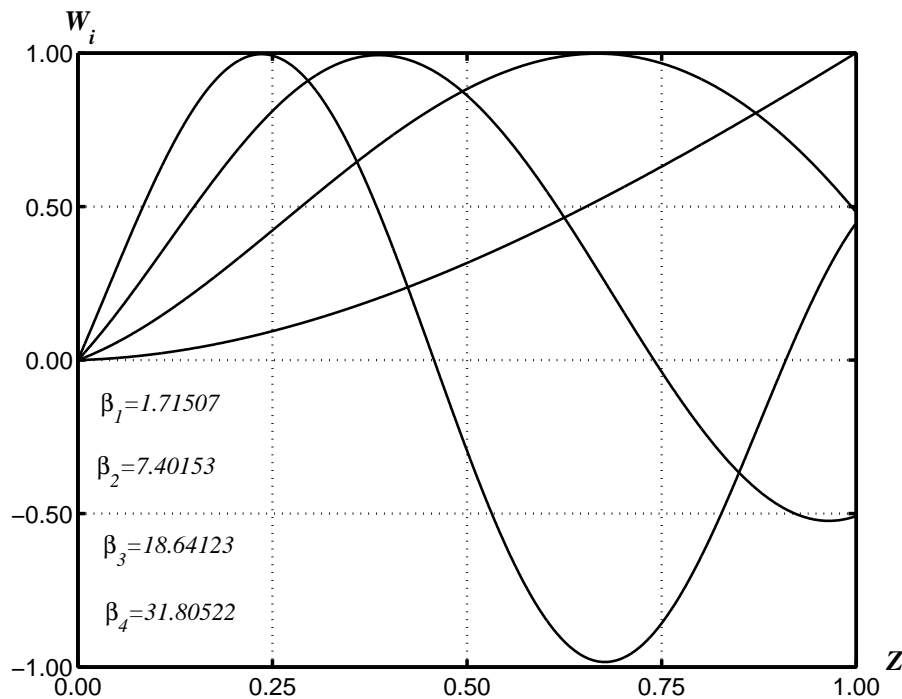


Рис. 2.4. Перші чотири власні форми коливань і відповідні їм частоти жорстко закріпленої балки Тимошенка, з приєднанням на торці твердим тілом.

В якості вхідних даних були прийняті дані роботи [142]: $e = 0.2$; $\eta = 0.01$; $\mu = 1$; $j = 0.2$; $\varkappa = 1/1.2$; $\nu = 0.3$. Зв'язок безрозмірних величин, введених в зазначеній роботі, з величинами представленими формулами (2.37) здійснюється за формулами:

$$\eta = r^2; \quad \lambda = \frac{2(1 + \nu)}{\varkappa}; \quad e = l_c; \quad \mu = m_0;$$

$$s^2 = \lambda\eta; \quad J_{y_1} = \mu(e^2 + j^2); \quad j = \sqrt{\frac{J_{y_c}}{\mu l^2}}.$$

При цьому всі лінійні розміри віднесені до довжини балки ($L = l$).

Порівняння отриманих результатів з частотами і формами, представленими в роботі [142], свідчить про їх повне співпадання.

Звернемося до питання про можливість застосування наведеної розрахункової схеми для визначення власних коливань циліндричної оболонки з приєднаним на торці абсолютно твердим тілом. Для можливості проведення порівняння отриманих результатів, перейдемо до безрозмірних величин, які далі позначені (*). Будемо вважати, що до оболонки приєднано тверде тіло, що має форму кругового циліндра радіуса R і довжиною $H = 2l_c$. Якщо в формулах (2.37) покласти $L = R$, а також врахувати, що $F = 2\pi R h$, $J = \pi R^3 h$, де h – товщина оболонки, тоді будемо мати:

$$\beta^{*2} = \frac{(1 - \nu^2)}{2} \beta^2; \quad m_0 = \frac{1}{2} m_0^*; \quad r^2 = \frac{1}{2};$$

$$J_{y_1} = \frac{1}{2} \left[m_0^* l_c^2 + \frac{m_0^*}{12} (H^2 + 3) \right].$$

Всі інші співвідношення, для введених за формулами (2.37) безрозмірних величин, залишаються без змін. У всіх розрахунках коефіцієнт зсуву κ визначався за такою формулою [131]:

$$\kappa = \frac{2(1 + \nu)}{(4 + 3\nu)}. \quad (2.63)$$

У таблиці 2.2 наведені результати обчислень перших трьох частот згинних коливань системи. При цьому були прийняті наступні вхідні дані: $m_0^* = 50$; $l_c = 0.5$; $\nu = 0.3$; $H = 0.01$. Довжина оболонки l варіювалася. Розрахунки були проведені на основі технічної теорії оболонок - (I), з використанням балкової теорії Тимошенка - (II), по балковій теорії з урахуванням тільки деформацій зсуву ($r^2 = 0$) - (III), з урахуванням тільки інерції повороту поперечного перерізу балки ($s^2 = 0$) - (IV) і за балковою схемою Ейлера-Бернуллі ($r^2 = s^2 = 0$) - (V).

Таблиця 2.2

Частоти коливань системи, отримані за різними розрахунковими схемами (*I*– оболонкова схема, *II*– балкова схема Тимошенка, *III* і *IV*– схема з урахуванням тільки деформацій зсуву або тільки інерції повороту, *V*– схема Ейлера-Бернуллі).

<i>l</i>	2	4	6	8	10
β_1^*					
<i>I</i>	0.04104	0.02062	0.01266	0.00868	0.00640
<i>II</i>	0.04152	0.02073	0.01269	0.00868	0.00640
<i>III</i>	0.04156	0.02076	0.01271	0.00869	0.00640
<i>IV</i>	0.05582	0.02372	0.01367	0.00909	0.00660
<i>V</i>	0.05600	0.02376	0.01369	0.00910	0.00660
β_2^*					
<i>I</i>	0.21491	0.16684	0.12665	0.09380	0.07040
<i>II</i>	0.21560	0.16707	0.12666	0.09380	0.07040
<i>III</i>	0.21856	0.16971	0.12842	0.09490	0.07110
<i>IV</i>	0.45942	0.24775	0.16542	0.11600	0.08380
<i>V</i>	0.46749	0.25257	0.16903	0.11840	0.08530
β_3^*					
<i>I</i>	0.59670	0.34020	0.25126	0.20393	0.16650
<i>II</i>	0.68582	0.35616	0.25673	0.20530	0.16650
<i>III</i>	0.68635	0.35722	0.25836	0.20749	0.16890
<i>IV</i>	2.39765	0.86431	0.46155	0.30342	0.22220
<i>V</i>	3.86339	1.02308	0.501883	0.32016	0.23180

Результати таблиці показують, що при вибраній масі тіла елементарна теорія балок дає хороші результати при обчисленні першої частоти тільки для довгих оболонок ($l \geq 10$). Врахування деформацій зсуву та інерції повороту в рівняннях балки значно покращують точність балкового наближення розглядуваної конструкції. Так при $l > 6$ перші дві частоти, обчислені з теорії оболонок і по теорії балок Тимошенка практично співпадають, а для третьої частоти розбіжність становить не більше 3%. При цьому визначальну роль

відіграє врахування деформацій зсуву. Інерція повороту може мати істотний вплив при розрахунку вищих частот системи.

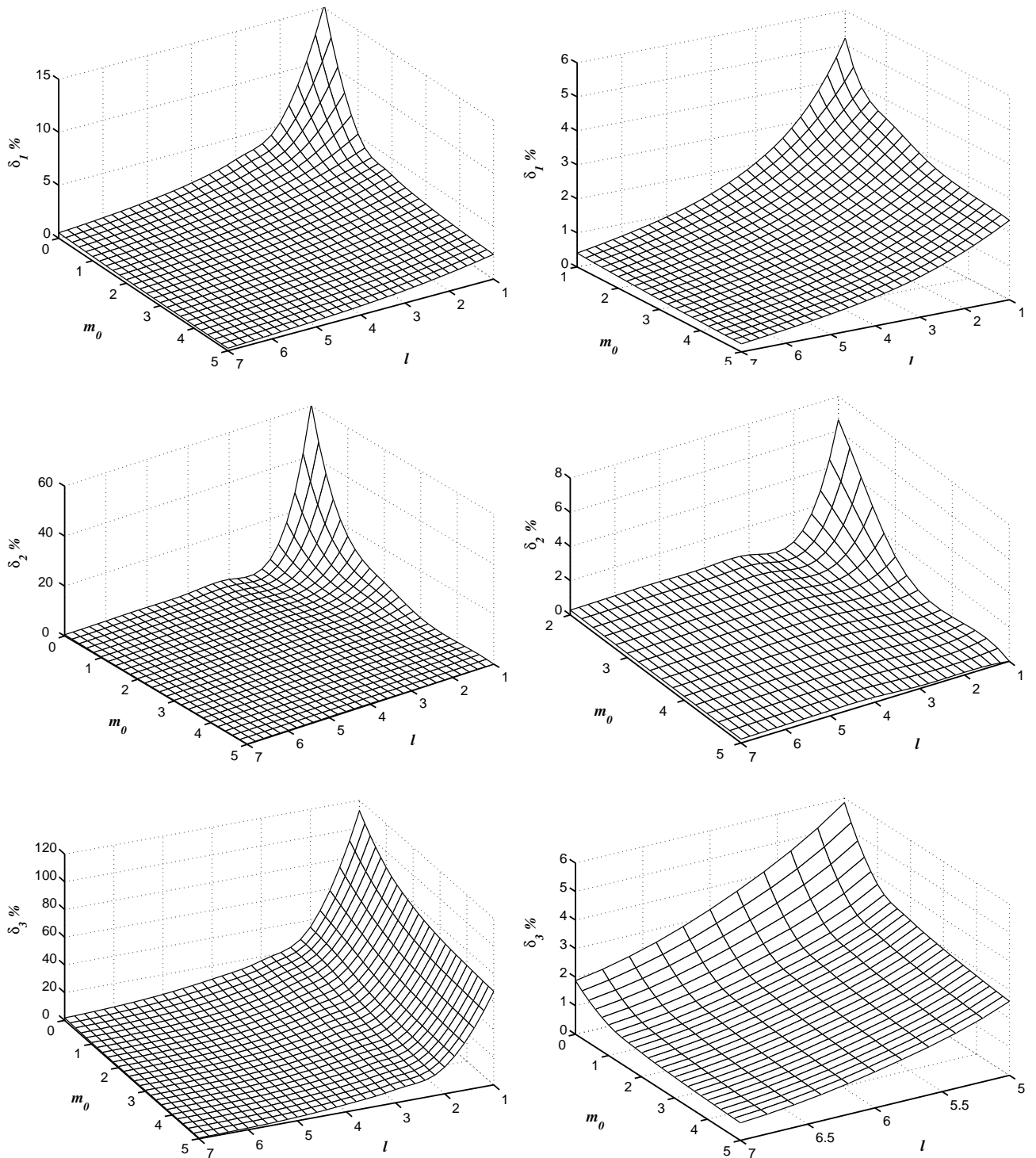


Рис. 2.5. Відносна похибка $\delta_i \%$ обчислення перших трьох частот системи по балковій теорії Тимошенка в залежності від маси твердого тіла m_0 і довжини оболонки l .

Просторове зображення поверхні відносної похибки δ_i , (вираженої в від-

сотках) визначення перших трьох частот коливань системи за балковою теорією Тимошенка, як функції від маси приєднаного тіла і довжини оболонки, представлено на рис. 2.5. З наведених рисунків видно, що похибки δ_i істотно залежать від маси приєднаного тіла і довжини оболонки.

Збільшення довжини оболонки при фіксованій масі тіла і збільшення маси тіла при фіксованій довжині оболонки призводить до зменшення похибок δ_i . Так вже при $m_0 > 1$ і $l > 1$ похибка визначення першої частоти системи не перевищує 5%. Похибки визначення перших трьох частот системи не перевищують 1% при $m_0 > 1$ і $l > 6$.

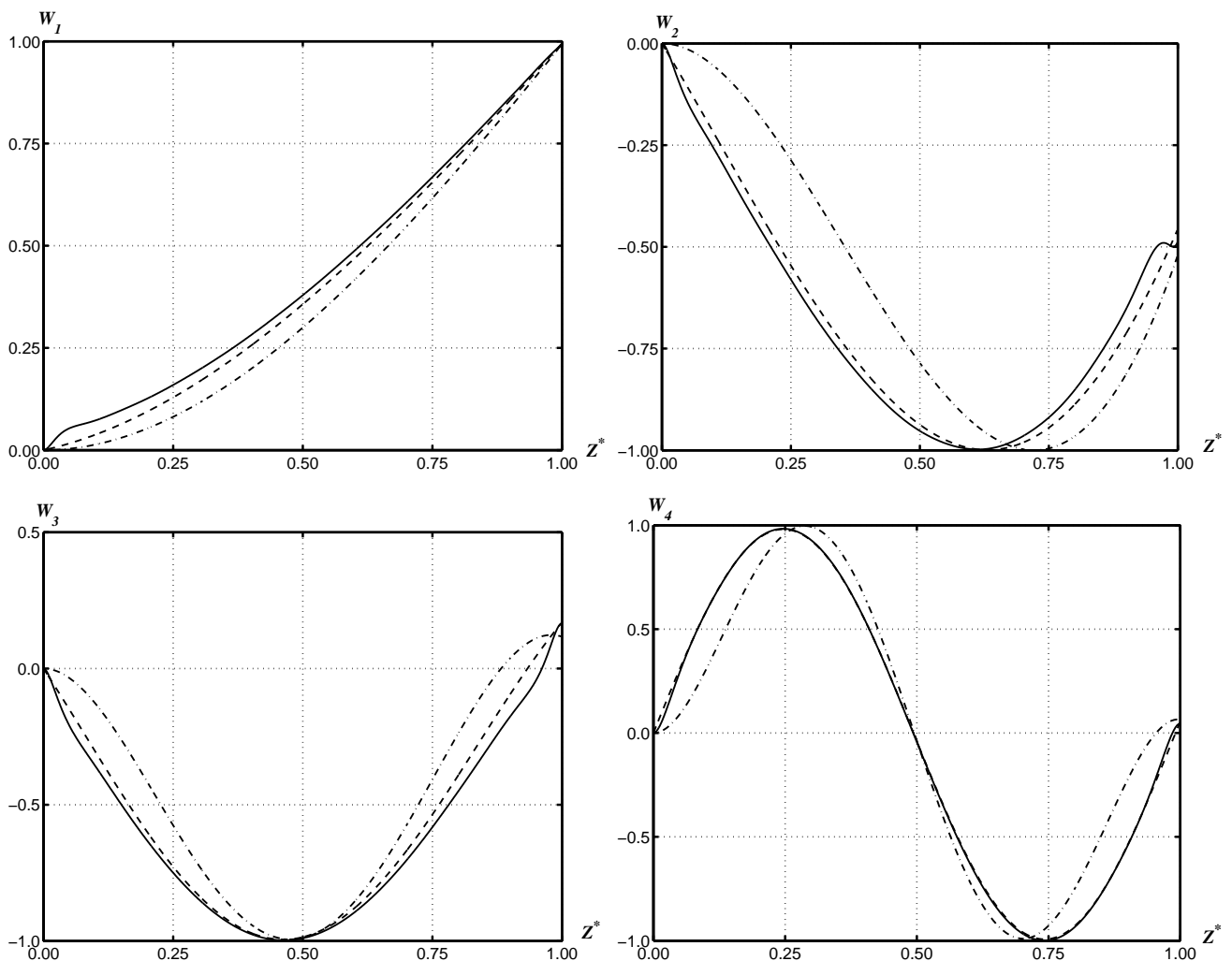


Рис. 2.6. Порівняння амплітудних значень перших чотирьох форм коливань системи, визначених з теорії оболонок (суцільні лінії), по балковій теорії Тимошенка (штрихові лінії) і по балковій теорії Ейлера Бернуллі (штрих-пунктирні лінії).

Амплітудні значення W_i перших чотирьох форм коливань оболонки, віднесені до їх максимальних значень, представлені на рис. 2.6 ($z^* = z/l$). Суцільними лініями показані форми коливань, визначені по теорії оболонок, штриховими лініями - по теорії балок Тимошенка і штрих-пунктирними лініями - з елементарної теорії балок. В якості вихідних даних вибиралися дані, при яких були отримані результати таблиці для $l = 4$. З наведених рисунків випливає, що балкова модель Тимошенка дозволяє визначати не тільки нижчі частоти розглянутої механічної конструкції, а й відповідні їм форми коливань. Максимальні відмінності в формах коливань при їх розрахунку за розглянутими схемами спостерігаються в околі торцевих перерізів оболонки. Ці відмінності носять локальний характер і обумовлені проявом крайових ефектів деформування оболонки, які посилюються при зменшенні її відносної товщини. У свою чергу елементарна теорія балок при вибраних параметрах системи дає задовільні результати лише при розрахунку першої форми коливань.

З наведеного аналізу результатів розрахунку частот і форм власних коливань циліндричної оболонки з приєднанням до її торця абсолютно твердим тілом випливає, що балкова теорія, побудована на врахуванні деформацій зсуву та інерції повороту поперечного перерізу, має істотно більшу область застосування по відношенню до класичної теорії балок Ейлера-Бернуллі. Вона дає прийнятні для практичного використання результати при визначенні не тільки нижчих, а й вищих форм коливань розглядуваної механічної системи.

РОЗДІЛ 3

ПОБУДОВА НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ СПЕКТРАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ ПРО КОЛИВАННЯ ДОВІЛЬНИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ В УМОВАХ ЇЇ СИНГУЛЯРНОГО ЗБУРЕННЯ

Даний розділ присвячений розвитку варіаційного методу для знаходження розв'язку спектральної задачі про вільні коливання довільних оболонок обертання, який має рівномірну збіжність як по малому параметру при старшій похідній у вихідних рівняннях, так і по незалежній змінній. При цьому, використовуючи елементи аналітичної теорії диференціальних рівнянь з малим параметром при старших похідних та рівнянь з особливою регулярною точкою, попередньо встановлена формальна структура фундаментальних розв'язків вихідної системи рівнянь. На цій основі побудовані системи базисних функцій для методу Рітца, які враховують особливість примежових функцій, що локалізовані в околі границь оболонки, та асимптотичну поведінку регулярних розв'язків в околі полюса куполоподібних оболонок.

На прикладі розрахунку частот та форм коливань циліндричної, конічної, та сферичної оболонки показано, що запропонований алгоритм забезпечує поточкову збіжність розв'язків та їх перших чотирьох похідних у всій області інтегрування рівнянь.

3.1 Постановка задачі

Розглянемо оболонку, серединна поверхня якої є поверхнею обертання. У такої оболонки лініями головних кривизн будуть її меридіани і паралелі. Припустимо, що оболонка обмежена двома паралелями L_1 і L_2 . В якості криволинійних координат візьмемо довжину дуги меридіана s ($s_1 \leq s \leq s_2$) і кут

φ , що визначає положення точки на відповідному паралельному колі. Позначимо через R_1 радіус кривизни меридіана, а через $r = r(s)$ – відстань від точки меридіана до осі обертання. Другий радіус кривизни R_2 дорівнює довжині відрізка нормалі до серединної поверхні від цієї поверхні до осі оболонки рис. 3.1.

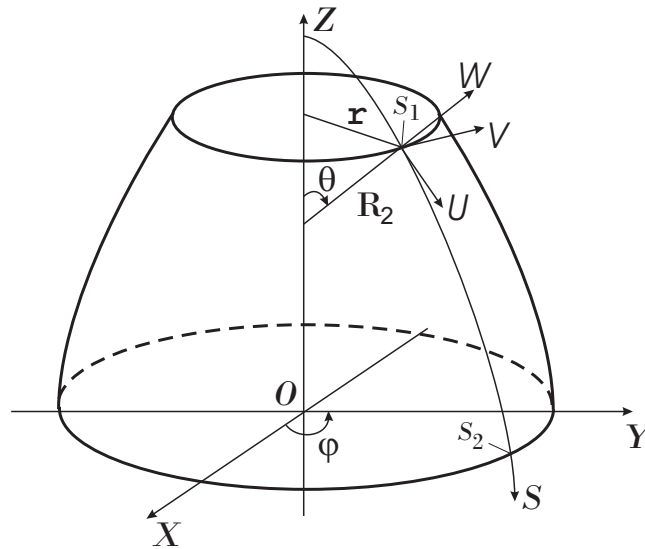


Рис. 3.1. Оболонка обертання.

Проекції переміщення точок серединної поверхні на додатні напрямки меридіана і паралелі, а також зовнішню нормаль до поверхні оболонки позначимо, відповідно, через u , v і w . Розглядаючи усталені коливання оболонки з n хвилями по паралелі, переміщення оболонки можна представити у вигляді

$$\begin{aligned} u(s, \varphi, t) &= e^{i\omega t} u(s) \cos n\varphi, \\ v(s, \varphi, t) &= e^{i\omega t} v(s) \sin n\varphi, \\ w(s, \varphi, t) &= e^{i\omega t} w(s) \cos n\varphi, \end{aligned} \quad (3.1)$$

Тоді визначення вектор-функції $\vec{u} = (u, v, w)$ і частоти коливань оболонки ω зводиться до інтегрування однорідної системи звичайних диференціальних рівнянь при відповідних граничних умовах, які визначають умови закріплення торців оболонки. Переходячи до безрозмірним величин, цю систему рів-

нянь можна записати в такій формі:

$$A\vec{u} - \lambda\vec{u} = 0, \quad (3.2)$$

де

$$A = c^2 K + L, \quad c^2 = \frac{h^2}{12R_0^2}, \quad \lambda = \frac{(1 - \nu^2)\rho R_0^2 \omega^2}{E},$$

h , R_0 – товщина і характерний лінійний розмір оболонки, E , ν , ρ – модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона і густина матеріалу оболонки. Диференціальні вирази, що входять до матриць L і K мають вигляд

$$\begin{aligned} L_{11} &= -\frac{d}{ds} \frac{1}{r} \frac{d}{ds} r + \frac{1 - \nu}{2} \left(\frac{n^2}{r^2} - \frac{2}{R_1 R_2} \right), & L_{12} &= -n \frac{d}{ds} \frac{1}{r} + \frac{1 - \nu}{2} \frac{n}{r^2} \frac{d}{ds} r, \\ L_{13} &= \frac{1 - \nu}{R_2} \frac{d}{ds} - \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), & L_{21} &= \frac{n}{r^2} \frac{d}{ds} r - \frac{(1 - \nu)n}{2} \frac{d}{ds} \frac{1}{r}, \\ L_{22} &= \left(\frac{n^2}{r^2} - \frac{1 - \nu}{R_1 R_2} \right) - \frac{(1 - \nu)}{2} \frac{d}{ds} \frac{1}{r} \frac{d}{ds} r, & L_{23} &= \frac{n}{r} \left(\frac{\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \\ L_{31} &= \frac{1}{r} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{d}{ds} r - \frac{1 - \nu}{r} \frac{d}{ds} \frac{r}{R_2}, & L_{32} &= \frac{n}{r} \left(\frac{\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \\ L_{33} &= \frac{1}{R_1^2} + \frac{2\nu}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2}, & \Delta_n &= \frac{1}{r} \frac{d}{ds} r \frac{d}{ds} - \frac{n^2}{r^2}, \\ K_{33} &= \Delta_n \Delta_n + \frac{1 - \nu}{r} \left(\frac{d}{ds} \frac{r}{R_1 R_2} \frac{d}{ds} - \frac{n^2}{r R_1 R_2} \right). \end{aligned}$$

Оператори K_{ij} , при яких стоїть параметр c^2 , містять диференціювання не вище другого порядку при $i, j \leq 2$ і не вище третього - при $i + j < 6$. Їх явний вигляд, на відміну від L_{ij} , залежить від припущень, які робляться в рамках різних теорій оболонок, що використовують гіпотезу Кирхгофа-Лява. Вирази для K_{ij} в разі оболонок довільного обрису і найбільш загальних співвідношеннях пружності наведено в роботі [7]. Нижче будемо вважати, що

$$K_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad i + j < 6. \quad (3.3)$$

Припущення (3.3) в термінології В.З. Власова [23] відповідає технічній теорії оболонок, в якій нехтується членами, залежними від дотичних переміщень в формулах для зміни кривизни та кручення.

Розв'язки системи звичайних диференціальних рівнянь (3.2) повинні бути підпорядковані відповідним однорідним граничним умовам.

3.2 Загальні принципи побудови наближених розв'язків задачі

Скориставшись принципом можливих переміщень (2.1), розв'язання вихідної однорідної системи диференціальних рівнянь (3.2) при відповідних граничних умовах можна звести до наступної еквівалентної варіаційної задачі відшукування стаціонарних значень функціоналу I , варіацію якого можна представити в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \delta I = \int_{s_1}^{s_2} & \left[\Psi_{11}(u, \delta u) + \Psi_{12}(v, \delta u) + \Psi_{13}(w, \delta u) + \Psi_{12}(\delta v, v) + \right. \\ & + \Psi_{22}(v, \delta v) + \Psi_{23}(w, \delta v) + \Psi_{13}(\delta w, u) + \Psi_{23}(\delta w, v) + \\ & \left. + \Psi_{33}(w, \delta w) \right] r ds - \lambda \int_{s_1}^{s_2} (u \delta u + v \delta v + w \delta w) r ds. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Диференціальні оператори $\Psi_{ij}(p, q)$, де p і q довільні функції, співпадають з аналогічними операторами, введеними в розділі 2.2.

Для знаходження стаціонарних значень відповідного функціоналу скористаємося методом Рітца. У зв'язку з цим, представимо функції $u(s)$, $v(s)$ і $w(s)$ у вигляді відрізків узагальнених рядів

$$\begin{aligned} u(s) &= \sum_{j=1}^N x_j U_j(s), & v(s) &= \sum_{j=1}^N x_{j+N} V_j(s), \\ w(s) &= \sum_{j=1}^N x_{j+2N} W_j(s). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Тут x_j ($j = 1, 2, \dots, 3N$) – поки невизначені постійні, $\{U_j\}$, $\{V_j\}$ і $\{W_j\}$ – системи координатних функцій, які підпорядковані граничним умовам кріплення торців оболонки.

При знаходженні стаціонарних значень функціоналу I , як функції x_1, x_2, \dots, x_{3N} в якості необхідних умов виступають рівності

$$\frac{\partial I}{\partial x_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, 3N).$$

В результаті, розв'язання вихідної задачі зводиться до розв'язання узагальненої алгебраїчної проблеми на власні значення

$$(A - \lambda B)\vec{x}^T = 0, \quad \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{3N}) \quad (3.6)$$

з симетричними матрицями A і B . Симетричність матриці A впливає з симетричності оператора \mathcal{A} . Власні числа алгебраїчної задачі (3.6) є наближеними значеннями перших $3N$ власних чисел даної граничної задачі. При цьому всі вони є верхніми межами для λ_i ($i = 1, 2, \dots, 3N$).

Послідовності координатних функцій повинні бути повними і лінійно незалежними [55]. Виконання першої умови забезпечує збіжність методу, а сам N -й член послідовності Рітца можна зробити як завгодно близьким до вихідного узагальненого розв'язку задачі, вибравши досить велике число N . Друга умова обумовлює існування тільки одного розв'язку алгебраїчної задачі (3.6). Слід зазначити, що виконання цих вимог є необхідною, але не достатньою умовою для ефективного побудови мінімізуючої послідовності Рітца. Справа в тому, що при великій кількості координатних функцій необхідно розв'язувати алгебраїчні системи великої розмірності. При цьому, помилки округлення чисел починають відігравати суттєву роль з одного боку при обчисленні коефіцієнтів алгебраїчної системи, а з іншого - при розв'язанні цієї системи рівнянь. Все це призводить до втрати стійкості обчислювального процесу до досягнення граничних значень розв'язків. Таким чином, питання про вибір послідовності координатних функцій далеко не є тривіальним і успіх використання варіаційного методу при побудові наближеного розв'язку граничних задач в значній мірі залежить від цього вибору.

В одновимірних задачах побудову координатних функцій можна здійсню-

вати на класі степеневих функцій. Однак, побудовані таким чином наближення придатні лише для тих випадків, коли в розкладах Рітца можна обійтися невеликим числом членів. Інакше елементи алгебраїчної системи дуже швидко зростають за абсолютною величиною і це істотно впливає на стійкість обчислювального процесу. Певних успіхів можна досягти, якщо при апроксимації шуканих розв'язків використовувати поліноми Лежандра, абсолютні значення яких не перевищують одиницю для будь-якого аргументу. Це дозволяє збільшити граничне значення числа N в три-чотири рази по відношенню до степеневому базису і тим самим розширити діапазон вхідних параметрів задачі, при яких можна проводити розрахунки з заданою точністю.

На швидкість збіжності послідовності Рітца в істотній мірі впливає відносна товщина оболонки. Зменшення її призводить до того, що розглядувана гранична задача переходить в розряд сингулярно збурених спектральних задач. Наявність малого параметра при старшій похідній в вихідній системі рівнянь вказує на те, що шукані розв'язки мають одночасно як швидко, так і повільно змінні компоненти. Апроксимація швидко змінних компонентів розв'язку поліноміальним базисом не призводить до бажаного результату і, таким чином, виникає принципове питання про розширення класу допустимих функцій такими функціями, які дозволяли б отримувати наближені розв'язки з однаково високим ступенем точності як при наявності вузької зони з великими градієнтами в розв'язках, так і без неї. Зазначена проблема відноситься до проблеми побудови наближених алгоритмів розв'язання сингулярно збурених крайових задач, що володіють рівномірною збіжністю [41].

3.2.1 Побудова координатних функцій для незамкнених оболонок обертання

Однією з важливих переваг методу Рітца є та обставина, що він дозволяє при побудові наближеного розв'язку врахувати властивості шуканих розв'яз-

ків, які можна встановити на основі чисто якісного аналізу даної задачі. З іншого боку, методи малого параметра, крім свого безпосереднього призначення, можуть служити основою для з'ясування якісних особливостей задачі. Тому з метою встановлення структури розв'язку задачі і характеру його виводження, коли параметр при старшій похідній наближається до нуля, наведемо формальні асимптотичні розклади фундаментальної системи розв'язків рівнянь (3.2). Система диференціальних рівнянь (3.2) приводиться до одного диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами відносно невідомої $w(s)$ [30]. Це рівняння може бути представлене в наступному вигляді:

$$\mu^{m-l}N(w) - M(w) = 0, \quad (3.7)$$

де

$$N(w) = \sum_{k=0}^m a_{m-k}(s) \frac{d^k w}{ds^k}, \quad M(w) = \sum_{k=0}^l b_{l-k}(s) \frac{d^k w}{ds^k}, \quad m > l.$$

Структура рівняння (3.7) вписується в загальну теорію диференціальних рівнянь m -го порядку з малим параметром при старшій похідній [18]. Позначення малого параметра ϵ^2 через μ^{m-l} використовується далі лише для зручності.

При $m = 8$ і $l = 4$ до цього рівняння зводиться система рівнянь, що описує неосесиметричні коливання оболонки обертання при невеликому числі хвиль по паралелі. Для випадку осесиметричних коливань оболонки маємо $m = 6$ і $l = 2$. Коефіцієнти рівняння $a_i(s)$ і $b_i(s)$ є дійсними і диференційовними функціями на скінченному замкнутому інтервалі $s_1 \leq s \leq s_2$. Крім того,

$$a_0(s) \equiv 1, \quad b_0(s) = \lambda - \frac{1 - \nu^2}{R_2^2}. \quad (3.8)$$

Явний вигляд інших коефіцієнтів нам не знадобитися, оскільки в подальшому нас буде цікавити тільки структура лінійно незалежних розв'язків рівняння (3.7). Вимагатимемо, щоб

$$b_0(s) \neq 0, \quad b_0(s) < 0 \quad \text{при} \quad s_1 \leq s \leq s_2. \quad (3.9)$$

Перша умова виключає з розгляду точки повороту для даного рівняння, а друга умова означає, що в подальшому будемо розглядати тільки нижчу частину частотного спектру оболонки.

Побудуємо спочатку l інтегралів рівняння (3.7), використовуючи для цієї мети прямий розклад його розв'язку по малому параметру:

$$w_j(s, \mu) = \sum_{p=0}^{\infty} \mu^{p(m-l)} w_{j,p}(s), \quad (j = 1, 2, \dots, l). \quad (3.10)$$

Підставимо цей ряд в рівняння (3.7) і прирівняємо до нуля коефіцієнти при однакових степенях μ . Тоді для нульового наближення отримаємо однорідне диференціальне рівняння

$$M(w_{j,0}(s)) = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, l). \quad (3.11)$$

Очевидно, що функції $w_{j,0}(s)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків для виродженого диференціального рівняння (3.7) при $\mu = 0$. Визначення наступних функцій $w_{j,p}(s)$ зводиться до інтегрування цього ж рівняння, в праву частину якого входять раніше знайдені функції $w_{j,p-1}(s)$:

$$M(w_{j,p}(s)) = N(w_{j,p-1}(s)), \quad (p = 1, 2, \dots). \quad (3.12)$$

Істотною властивістю побудованих таким чином перших l інтегралів рівняння (3.7) є те, що кожен з них може бути представлений у вигляді ряду Тейлора в інтервалі $s_1 \leq s \leq s_2$.

Наступні $(m-l)$ інтегралів будемо шукати у вигляді розкладів, що включають в себе експоненціальний множник [18]:

$$w_{l+j}(s, \mu) = \sum_{p=0}^{\infty} \mu^p w_{l+j,p}(s) \exp \left\{ \frac{1}{\mu} \int_{s_0}^s \varphi_j(t) dt \right\}, \quad (3.13)$$

$$j = 1, 2, \dots, (m-l).$$

Для визначення функцій $\varphi_j(s)$ і $w_{l+j,p}(s)$ підставляємо цей ряд в диференціальне рівняння (3.7) і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях μ .

Коефіцієнт при μ^{-l} дає характеристичне рівняння для визначення функцій $\varphi_j(s)$:

$$(\varphi_j(s))^{m-l} - b_0(s) = 0, \quad (3.14)$$

звідки знаходимо чотири ненульові значення $\varphi_j(s)$. Розташовуючи їх в порядку зростання дійсних частин, матимемо

$$\begin{aligned} \varphi_1(s) &= \frac{-1+i}{\sqrt{2}}|b_0|^{1/4}, & \varphi_2(s) &= \frac{-1-i}{\sqrt{2}}|b_0|^{1/4}, \\ \varphi_3(s) &= \frac{1+i}{\sqrt{2}}|b_0|^{1/4}, & \varphi_4(s) &= \frac{1-i}{\sqrt{2}}|b_0|^{1/4}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

За термінологією роботи [22] виродження вихідної крайової задачі в задачу при $\mu \rightarrow 0$ є регулярним, оскільки рівняння (3.14) в розглядуваному діапазоні частот вільних коливань оболонки має корені, з яких два мають від'ємну дійсну частину, а два додатну. Коефіцієнт при μ^{-l+1} дає однорідне лінійне рівняння першого порядку для знаходження функцій $w_{l+j,0}(s)$. У свою чергу коефіцієнт при μ^{-l+1+p} ($p = 1, 2, \dots$) призводить до розв'язання цього ж рівняння відносно функцій $w_{l+j,p}(s)$, але з правими частинами, які лінійно залежать від попередніх функцій $w_{l+j,k}(s)$ ($k < p$) і їх похідних. Структура цих рівнянь і аналітичні властивості їх коефіцієнтів дозволяє зробити висновок, що всі функції $w_{l+j,p}(s)$ можуть бути представлені у вигляді розкладів в ряд Тейлора в околі точок $s = s_1$ і $s = s_2$.

У представленні інтегралів (3.13) при $j = 1, 2$ покладемо $s_0 = s_1$, а при $j = 3, 4$ покладемо $s_0 = s_2$ і відокремимо в цих інтегралах їх дійсну і уявну частини. При цьому для експоненціального множника отримаємо вирази

$$\begin{aligned} e^{\beta_k(s)} \cos \beta_k(s), & \quad e^{\beta_k(s)} \sin \beta_k(s), \\ \beta_k(s) &= \frac{(-1)^k}{\mu\sqrt{2}} \int_{s_k}^s |b_0(t)|^{1/4} dt, \quad (k = 1, 2). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Виходячи з цього можна зробити висновок, що перші два інтеграла (3.13) локалізовані в околиці точки $s = s_1$, тоді як інші два інтеграла локалізовані в

околі точки $s = s_2$. Іншими словами їх внесок в загальний розв'язок рівняння (3.7) істотний тільки поблизу одного з країв оболонки на відстанях $|s - s_k|$ ($k = 1, 2$) порядку $O(\mu)$ від краю.

Для більшості оболонок обертання інтеграл, що входить у вираз для $\beta_k(s)$ не обчислюється в елементарних функціях. В цьому випадку інтеграли з великою змінністю можуть бути представлені в іншій формі, яка є більш зручною для їх побудови. Як показано в роботі [22], інтеграли (3.13), у яких $\text{Re}\varphi_j(s) < 0$, можуть бути представлені у вигляді:

$$w_{l+j}(s, \mu) = \sum_{p=0}^{\infty} \mu^p P_j^{(p)}(\tau) \exp\{\varphi_j(s_1)\tau\}, \quad \tau = \frac{s - s_1}{\mu}, \quad (3.17)$$

де $P_j^{(p)}(\tau)$ - поліном по τ степені не вище $2p$ з постійними коефіцієнтами, залежними від коефіцієнтів рівнянь $a_i(s)$ і $b_i(s)$ і їх похідних в точці $s = s_1$.

Аналогічне представлення інтегралів має місце і в околі точки $s = s_2$ при $\text{Re}\varphi_j(s) > 0$. Ці поліноми в літературі отримали назву поліномів Вішика-Люстерника.

Структура інтегралів з великою змінністю для функцій $u(s, \mu)$ і $v(s, \mu)$ збігається зі структурою інтегралів для функції $w(s, \mu)$ з тією лише різницею, що в розкладах типу (3.13) з'являється постійний множник, що залежить від параметра μ [30].

Побудова інтегралів (3.10) з повільною змінністю, як правило, здійснюється за допомогою стандартних чисельних методів інтегрування відповідної послідовності рівнянь. Явні вирази для інтегралів з великою змінністю для ряду оболонок (в тому числі з урахуванням точок повороту) для нульового та першого наближення побудовані в роботах Н.А. Алумяє [4], Г.І. Пшенічнова [84], [85], П.Є. Товстіка [30], [92] та інших авторів.

Наведені вище результати дозволяють тепер сформулювати основні принципи побудови координатних функцій при розв'язанні даної задачі варіаційним методом в умовах її сингулярного збурення.

З огляду на встановлену вище регулярність функцій $w_{j,p}(s)$ ($j = 1, 2, \dots, m, p = 0, 1 \dots$) в розкладах (3.10) і (3.13), їх можна представити у вигляді відповідних рядів Тейлора на замкнутому інтервалі $s_1 \leq s \leq s_2$ з невідомими коефіцієнтами. Тоді загальний розв'язок для функцій $u(s)$, $v(s)$ і $w(s)$ можна представити в такій формі:

$$\begin{aligned} f(s) = & \sum_{i=0}^{\infty} f_{i,0} s^i + e^{\beta_1(s)} \cos \beta_1(s) \sum_{i=0}^{\infty} f_{i,1} (s - s_1)^i + \\ & + e^{\beta_1(s)} \sin \beta_1(s) \sum_{i=0}^{\infty} f_{i,2} (s - s_1)^i + e^{\beta_2(s)} \cos \beta_2(s) \sum_{i=0}^{\infty} f_{i,3} (s - s_2)^i + \\ & + e^{\beta_2(s)} \sin \beta_2(s) \sum_{i=0}^{\infty} f_{i,4} (s - s_2)^i, \end{aligned} \quad (3.18)$$

де $f_{i,j}$ - невизначені постійні, залежні від параметра μ , а під функцією $f(s)$ будемо розуміти будь-яку з невідомих функцій $u(s)$, $v(s)$ і $w(s)$ з відповідними для них коефіцієнтами розкладів.

Відповідно до викладеного вище, загальні розв'язки (3.18) необхідно підпорядкувати головним граничним умовам даної задачі на власні значення. Виходячи з цих умов, знаходимо додаткові співвідношення між деякими коефіцієнтами в представленні (3.18). Підставляючи ці співвідношення в загальний вигляд розв'язків для функцій $u(s)$, $v(s)$, $w(s)$ і збираючи члени при однакових коефіцієнтах, отримаємо набори координатних функцій для апроксимації шуканих розв'язків. При цьому слід враховувати ту обставину, що другий і третій доданки у (3.18) суттєво відрізняються від нуля лише в околі точки $s = s_1$, тоді як четвертий та п'ятий — в околі точки $s = s_2$. Тому взаємним впливом цих двох груп доданків при виведенні координатних функцій будемо нехтувати, допускаючи при цьому малу похибку порядку

$$\exp \left\{ -\frac{1}{\mu\sqrt{2}} \int_{s_1}^{s_2} |b_0(t)|^{1/4} dt \right\}$$

Для отримання найбільш простих співвідношень між коефіцієнтами в ви-

разах (3.18) при виконанні граничних умов першу суму, не порушуючи спільності, можна представляти у вигляді розкладів за степенями $(s - s_1)$ або за степенями $(s - s_2)$. Отриманий при цьому степеневий базис з деякою ваговою функцією можна представити у вигляді добутку цієї вагової функції і поліномів Лежандра, абсолютні значення яких не зростають з ростом порядку полінома.

Для тих форм меридіана оболонки, для яких явне обчислення інтеграла, що входить у вираз для $\beta_k(s)$, не представляється можливим, побудова систем координатних функцій має здійснюватися на основі представлення інтегралів з великою змінністю в формі (3.17).

В якості прикладу використання систем базисних функцій нижче розглянемо задачу про вільні коливання зрізаної конічної оболонки з двома жорстко закріпленими краями. Граничні умови, що підлягають задоволенню в цьому випадку мають такий вигляд

$$u = v = w = \frac{dw}{ds} = 0. \quad (3.19)$$

Елементи матриць A і B алгебраїчної системи (3.6), які розташовані на головній діагоналі і вище неї, будуть обчислюватися за такими формулами:

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= \int_{s_1}^{s_2} \Psi_{11}(U_j, U_i) r ds, & a_{i,j+N} &= \int_{s_1}^{s_2} \Psi_{12}(V_j, U_i) r ds, \\ a_{i,j+2N} &= \int_{s_1}^{s_2} \Psi_{13}(W_j, U_i) r ds, & a_{i+N,j+N} &= \int_{s_1}^{s_2} \Psi_{22}(V_j, V_i) r ds, \\ a_{i+N,j+2N} &= \int_{s_1}^{s_2} \Psi_{23}(W_j, V_i) r ds, & a_{i+2N,j+2N} &= \int_{s_1}^{s_2} \Psi_{33}(W_j, W_i) r ds, \\ b_{i,j} &= \int_{s_1}^{s_2} U_j U_i r ds, & b_{i+N,j+N} &= \int_{s_1}^{s_2} V_j V_i r ds, \\ b_{i,j+N} &= b_{i,j+2N} = b_{i+N,j+2N} = 0, & b_{i+2N,j+2N} &= \int_{s_1}^{s_2} W_j W_i r ds. \end{aligned}$$

Координатні функції $U_i(s)$, $V_i(s)$ і $W_i(s)$ повинні бути підпорядковані головним граничним умовам (3.19).

В результаті застосування описаної вище процедури, система базисних функцій для апроксимації функції $w(s)$ матиме наступну структуру:

$$\{W_i\}_{i=1}^N = \{W_1, \dots, W_m; W_{m+1}, \dots, W_{m+m_p}; W_{m+m_p+1}, \dots, W_{m+2m_p}; \\ W_{m+2m_p+1}, \dots, W_{m+3m_p}; W_{m+3m_p+1}, \dots, W_{m+4m_p}\}. \quad (3.20)$$

У виразі (3.20) виділено п'ять груп функцій, які відокремлені одна від одної крапкою з комою. Перша група з m функцій представляє собою регулярний базис, утворений з поліномів Лежандра з певною ваговою функцією. Друга і третя групи функцій пов'язані з наявністю примежового шару в околі точки $s = s_1$, а четверта і п'ята групи функцій – в околі точки $s = s_2$. Кількість функцій в цих групах позначено через m_p . Аналогічну структуру мають і координатні функції для апроксимації розв'язків $u(s)$ і $v(s)$. Оскільки головні граничні умови для функцій $u(s)$ і $v(s)$ мають однаковий вигляд, то $V_i = U_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$).

Введемо в розгляд наступні позначення:

$$b_{0,k}(\lambda) = \lambda - \frac{1 - \nu^2}{R_2^2(s_k)}, \quad p_k = p_k(\lambda) = \frac{(-1)^k |b_{0,k}(\lambda)|^{1/4}}{\mu\sqrt{2}}, \\ g_{c_k} = e^{p_k(s-s_k)} \cos p_k(s - s_k), \quad g_{s_k} = e^{p_k(s-s_k)} \sin p_k(s - s_k), \quad (3.21) \\ (k = 1, 2).$$

Тоді явні вирази для координатних функцій U_j і W_j матимуть вигляд:

$$U_j(s) = (s - s_1)(s - s_2) P_j \left(\frac{2s}{l_s} - 1 \right), \\ W_j(s) = (s - s_1)^2 (s - s_2)^2 P_j \left(\frac{2s}{l_s} - 1 \right), \\ (j = 1, 2, \dots, m), \\ U_{m+1}(s) = g_{c_1} - 1 + \frac{s - s_1}{s_2 - s_1}, \quad W_{m+1}(s) = g_{c_1} - 1 + \frac{s - s_1}{s_2 - s_1}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(s-s_1)(s-s_2)[p_1(s-s_1)(s_2-s_1)+1]}{(s_1-s_2)(s_2-s_1)} \\
& - \frac{(s-s_1)^2(s-s_2)[p_1(s-s_1)(s_2-s_1)+2]}{(s_2-s_1)^3}, \\
W_{m+2}(s) &= g_{c_1}(s-s_1) + \frac{(s-s_1)(s-s_2)}{(s_2-s_1)} - \frac{(s-s_1)^2(s-s_2)}{(s_2-s_1)^2}, \\
U_{m+j}(s) &= g_{c_1}(s-s_1)s^{j-1}, \quad U_{m+m_p+1}(s) = g_{s_1}, \\
U_{m+m_p+j}(s) &= g_{s_1}(s-s_1)s^{j-1}, \\
U_{m+2m_p+1}(s) &= g_{c_2} - \frac{s-s_1}{s_2-s_1}, \quad U_{m+2m_p+j}(s) = g_{c_2}(s-s_2)s^{j-1}, \\
U_{m+3m_p+1}(s) &= g_{s_2}, \\
U_{m+3m_p+j}(s) &= g_{s_2}(s-s_2)s^{j-1}, \quad (j = 2, 3, \dots, m_p), \\
W_{m+j}(s) &= g_{c_1}(s-s_1)^2s^{j-1}, \\
W_{m+m_p+1}(s) &= g_{s_1} + \frac{p_1(s-s_1)^2(s-s_2)}{(s_2-s_1)} - \frac{p_1(s-s_1)^3(s-s_2)}{(s_2-s_1)^2}, \tag{3.22} \\
W_{m+m_p+2}(s) &= g_{s_1}(s-s_1), \quad W_{m+m_p+j}(s) = g_{s_1}(s-s_1)^2s^{j-1}, \\
W_{m+2m_p+1}(s) &= g_{c_2} - \frac{(s-s_1)}{(s_2-s_1)} - \frac{(s-s_1)(s-s_2)}{(s_1-s_2)^2} - \\
& - \frac{(s-s_1)^2(s-s_2)[p_2(s-s_2)(s_2-s_1)-2]}{(s_2-s_1)^3}, \\
W_{m+2m_p+2}(s) &= g_{c_2}(s-s_2) - \frac{(s-s_1)^2(s-s_2)}{(s_2-s_1)^2}, \\
W_{m+2m_p+j}(s) &= g_{c_2}(s-s_2)^2s^{j-1}, \\
W_{m+3m_p+1}(s) &= g_{s_2} - \frac{p_2(s-s_1)^2(s-s_2)^2}{(s_2-s_1)^2}, \\
W_{m+3m_p+2}(s) &= g_{s_2}(s-s_2), \\
W_{m+3m_p+j}(s) &= g_{s_2}(s-s_2)^2s^{j-1}, \quad (j = 3, 4, \dots, m_p), \quad l_s = s_2 - s_1.
\end{aligned}$$

Тут $P_j(s)$ – зміщені на одиницю за індексом j многочлени Лежандра.

Певні незручності при розв'язанні даної задачі на власні значення доставляє той факт, що, як і слід було очікувати, в показник змінності координатних функцій p_k (3.21), пов'язаних з наявністю крайових ефектів, входить параметр λ , який заздалегідь невідомий. Це призводить до необхідності ор-

ганізації ітераційного процесу послідовних наближень за параметром λ для знаходження його мінімального значення, що певним чином ускладнює алгоритм розв'язання задачі. Цього процесу можна уникнути, якщо знайти таке наближене значення $\tilde{\lambda}$, яке відрізняється від істинного значення λ на малу величину порядку μ . Оскільки параметр λ є інтегральною характеристикою задачі, то його обчислення з достатнім ступенем точності можна провести на основі використання лише регулярної частини базису навіть в умовах сингулярного збурення задачі. При цьому неточність обчислення λ в виразі для p_k в формулах (3.21) буде компенсуватися кількістю m_p членів для відповідних розв'язків з високими градієнтами. Отримання початкового значення параметра λ можна здійснити в рамках єдиної програми для ПК, поклавши в ній параметр m_p рівним нулю.

3.2.2 Формальна структура регулярних інтегралів вихідних рівнянь для куполоподібних оболонок обертання в околі їх полюса та побудова координатних функцій

Під куполоподібними рис. 3.2 будемо розуміти такі оболонки, для яких у вершині є горизонтальна дотична площина і для радіусів кривизни виконуються співвідношення

$$(R_1)_{s=0} = (R_2)_{s=0} = R.$$

Для таких оболонок функція $r(s)$ буде аналітичною і непарною функцією, яку в околі точки $s = 0$ можна представити у вигляді розкладу:

$$r(s) = s \left(1 - \frac{1}{6R^2} s^2 + a_4 s^4 + \dots \right). \quad (3.23)$$

При розв'язанні крайових задач на основі методу Рітца вибір апроксимуючих виразів для шуканих функцій істотно впливає на кінцевий результат і обсяг обчислень, необхідний для його отримання. Тому в подальшому побудову

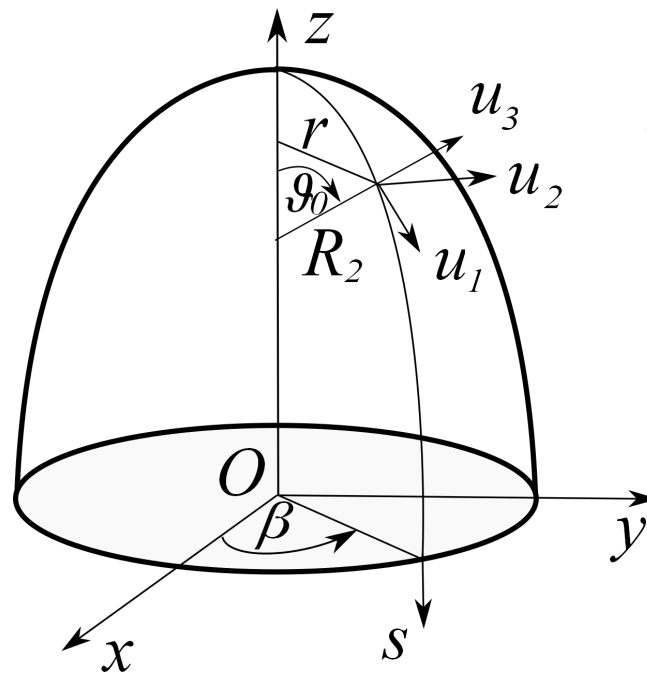


Рис. 3.2. Куполоподібна оболонка обертання

систем координатних функцій будемо здійснювати на основі максимального врахування особливостей задачі, що породжують повільну збіжність обчислювального процесу.

Однією з особливостей розглядуваних рівнянь є виродження деяких їх коефіцієнтів при наближенні s до нуля. При чисельному інтегруванні цих рівнянь в літературі є різні рекомендації наближеного характеру, що дозволяють обійти ці труднощі. Так в роботі [48] пропонується вважати, що в полюсі оболонки є отвір малого радіусу r_0 з деякими граничними умовами на його контурі. У роботі [19] пропонується малий окіл поблизу полюса оболонки замінити круглою пружною пластинкою з використанням для неї наявних точних розв'язків. Такі підходи дозволяють з певною точністю обчислювати частоти коливань оболонки але не дають можливості визначення її напружено-деформованого стану.

Другою характерною особливістю задачі, як вже зазначалося раніше, є наявність параметра s^2 при старшій похідній у вихідних рівняннях, який для тонкостінних оболонок може приймати малі значення.

У зв'язку з цим з'ясуємо структуру фундаментальних інтегралів вихідних рівнянь, використовуючи аналітичну теорію диференціальних рівнянь [18], [22].

Перші інтеграли рівнянь (3.2), які приймають обмежені значення при $s = 0$, будемо шукати у вигляді прямого розкладу по параметру μ :

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{4k} u_k(s); \quad v = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{4k} v_k(s); \quad w = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{4k} w_k(s). \quad (3.24)$$

Для визначення функцій $u_k(s)$, $v_k(s)$ і $w_k(s)$ підставимо розклади (3.24) в рівняння (3.2) і прирівняємо до нуля коефіцієнти при різних степенях параметра μ . При $\mu = 0$ отримаємо систему диференціальних рівнянь четвертого порядку відносно функцій $u_0(s)$, $v_0(s)$ і $w_0(s)$, яку можна привести до вигляду

$$\begin{aligned} \alpha_1 \frac{du_0}{ds} + \alpha_2 u_0 + \alpha_3 v_0 + \alpha_4 w_0 &= 0, \\ \beta_1 \frac{d^2 v_0}{ds^2} + \beta_2 \frac{dv_0}{ds} + \beta_3 v_0 + \beta_4 \frac{du_0}{ds} + \beta_5 u_0 + \beta_6 w_0 &= 0, \\ \gamma_1 \frac{dw_0}{ds} + \gamma_2 w_0 + \gamma_3 u_0 + \gamma_4 \frac{dv_0}{ds} + \gamma_5 v_0 &= 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Змінні коефіцієнти рівнянь (3.25) визначаються за такими формулами:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2}, \quad \alpha_2 = \frac{r'}{r} \left(\frac{\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad \alpha_3 = \frac{n}{r} \left(\frac{\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \\ \alpha_4 &= \frac{1}{R_1^2} + \frac{2\nu}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2} - \lambda, \quad \beta_1 = \frac{1-\nu}{2}, \quad \beta_2 = \beta_1 \frac{r'}{r}, \\ \beta_3 &= \frac{1-\nu}{R_1 R_2} + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{r'}{r} \right)' - \frac{n^2}{r^2} + \lambda, \quad \beta_4 = -\frac{n(1+\nu)}{2r}, \\ \beta_5 &= -\frac{(3-\nu)nr'}{2r^2}, \quad \beta_6 = -\frac{n}{r} \left(\frac{\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad \gamma_1 = -\alpha_1 \left(\lambda - \frac{1-\nu^2}{R_2^2} \right), \\ \gamma_2 &= (1-\nu^2) \left[\frac{1}{R_2^2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)' + \frac{2}{R_1 R_2} \left(\frac{1}{R_2} \right)' \right] + \\ &+ \lambda \left[\left(\frac{1}{R_1} \right)' + (2\nu-1) \left(\frac{1}{R_2} \right)' \right], \\ \gamma_3 &= (\nu-1) \left(\frac{r'}{r} \right)' \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{\nu-1}{R_1 R_2} - \frac{\nu}{R_2^2} \right) + (\nu^2-1) \frac{r'}{r} \times \\ &\times \left[\frac{1}{R_2} \left(\frac{1}{R_1} \right)' - \frac{1}{R_1} \left(\frac{1}{R_2} \right)' \right] + (1-\nu) \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \left(\frac{\nu}{R_1^2} + \frac{1-\nu}{R_1 R_2} - \frac{1}{R_2^2} \right) - \end{aligned}$$

$$- \alpha_1^2 \left(\lambda + \frac{1 - \nu}{R_1 R_2} - \beta_1 \frac{n^2}{r^2} \right),$$

$$\gamma_4 = \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_1^2 \beta_4, \quad \gamma_5 = \alpha_1 \alpha_3' - \beta_5 \alpha_1^2 - \alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1' \alpha_3 + \frac{r'}{r} \alpha_1 \alpha_3.$$

Очевидно, що функції $u_0(s)$, $v_0(s)$ і $w_0(s)$ визначають розв'язки для рівнянь безмоментної теорії оболонок обертання.

Визначення наступних членів розкладів (3.24) зводиться до інтегрування системи рівнянь (3.25), праві частини якої містять деякі оператори від розв'язків, знайдених на попередньому наближенні. Оскільки вищі наближення в розкладах (3.24) не впливають на структуру розв'язків нульового наближення, то далі встановимо поведінку інтегралів рівнянь (3.25) в околі точки $s = 0$. Для цього зведемо вихідну систему рівнянь до нормального вигляду, коефіцієнти якої є аналітичними функціями при $s \in [0, s_1]$. Зауважимо при цьому, що з урахуванням розкладу (3.23) коефіцієнти α_2 , α_3 , β_2 , β_4 , β_6 і γ_4 мають полюси першого порядку, а коефіцієнти β_3 , β_5 , γ_3 і γ_5 — полюси другого порядку при $s \rightarrow 0$. Решта коефіцієнтів є аналітичними функціями.

Введемо в розгляд нові функції

$$y_1 = u_0, \quad y_2 = v_0, \quad y_3 = sw_0, \quad y_4 = s \frac{dv_0}{ds}. \quad (3.26)$$

Тоді систему рівнянь (3.25) можна звести до системи чотирьох рівнянь першого порядку, розв'язних відносно похідних. У векторно - матричній формі ця система набуде вигляду

$$s \frac{d\vec{y}}{ds} = F(s, \lambda) \vec{y}. \quad (3.27)$$

Тут \vec{y} — вектор з компонентами $y_i (i = \overline{1, 4})$, а елементи матриці $F(s, \lambda)$ визначаються за такими формулами:

$$\begin{aligned} f_{11} &= -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} s, & f_{12} &= -\frac{\alpha_3}{\alpha_1} s, & f_{13} &= -\frac{\alpha_4}{\alpha_1}, & f_{14} &= 0, \\ f_{21} &= f_{22} = f_{23} = 0, & f_{24} &= 1, & f_{31} &= -\frac{\gamma_3}{\gamma_1} s^2, & f_{32} &= -\frac{\gamma_5}{\gamma_1} s^2, \\ f_{33} &= 1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} s & f_{34} &= -\frac{\gamma_4}{\gamma_1} s & f_{41} &= \left(\frac{\alpha_2 \beta_4}{\alpha_1 \beta_1} - \frac{\beta_5}{\beta_1} \right) s^2, \end{aligned}$$

$$f_{42} = \left(\frac{\alpha_3\beta_4}{\alpha_1\beta_1} - \frac{\beta_3}{\beta_1} \right) s^2, \quad f_{43} = \left(\frac{\alpha_4\beta_4}{\alpha_1\beta_1} - \frac{\beta_6}{\beta_1} \right) s, \quad f_{44} = 1 - \frac{\beta_2}{\beta_1} s.$$

Слід зазначити, що в такому представленні вихідної системи диференціальних рівнянь всі функції $f_{pq}(s)$ є аналітичними функціями при $s \in [0, s_1]$ і не обертаються одночасно в нуль в точці $s = 0$. З вигляду рівнянь (3.27) випливає, що точка $s = 0$ є регулярною особливою точкою для цих рівнянь [18]. Для побудови інтегралів рівнянь (3.27) будемо користуватися узагальненим методом степеневих рядів.

З урахуванням розкладу (3.23) матрицю $F(s, \lambda)$ можна представити у вигляді розкладу по парним степеням незалежної змінної s :

$$F(s, \lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} F_{2i} s^{2i}. \quad (3.28)$$

Тут матриці F_{2i} мають наступну структуру:

$$F_0 = \begin{vmatrix} f_{11}^{(0)} & f_{12}^{(0)} & f_{13}^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ f_{31}^{(0)} & f_{32}^{(0)} & f_{33}^{(0)} & f_{34}^{(0)} \\ f_{41}^{(0)} & f_{42}^{(0)} & f_{43}^{(0)} & 0 \end{vmatrix}, \quad F_{2i} = \begin{vmatrix} f_{11}^{(2i)} & f_{12}^{(2i)} & f_{13}^{(2i)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_{31}^{(2i)} & f_{32}^{(2i)} & f_{33}^{(2i)} & f_{34}^{(2i)} \\ f_{41}^{(2i)} & f_{42}^{(2i)} & f_{43}^{(2i)} & f_{44}^{(2i)} \end{vmatrix},$$

$$(k = 1, 2, \dots),$$

де

$$\begin{aligned} f_{11}^{(0)} &= -1, \quad f_{12}^{(0)} = -n, \quad f_{13}^{(0)} = \frac{\lambda R}{1 + \nu} - \frac{2}{R}, \quad f_{31}^{(0)} = \frac{n^2(1 - \nu^2)}{2Rb_0^{(0)}}, \\ f_{32}^{(0)} &= \frac{n(1 - \nu^2)}{2Rb_0^{(0)}}, \quad b_0^{(0)} = \lambda - \frac{1 - \nu^2}{R^2}, \quad f_{33}^{(0)} = 1, \quad f_{34}^{(0)} = f_{32}^{(0)}, \\ f_{41}^{(0)} &= 2n, \quad f_{42}^{(0)} = 1 + n^2, \quad f_{43}^{(0)} = \frac{n\lambda R}{1 - \nu}. \end{aligned}$$

Вирази для наступних елементів матриць F_{2i} тут не наводяться через їх громіздкість.

Розв'язок системи (3.27) будемо шукати у вигляді

$$y_i = s^\sigma \sum_{k=0}^{\infty} g_{i,k} s^k, \quad (i = \overline{1, 4}). \quad (3.29)$$

У цих розкладах σ і $g_{i,k}$ — невизначені постійні. Скориставшись далі формулою Коші для множення степеневих рядів, отримуємо

$$f_{p,q}y_q = s^\sigma \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k g_{q,j} f_{p,q}^{(k-j)} s^k, \quad (p, q = \overline{1,4}). \quad (3.30)$$

Підстановка рядів (3.29) і (3.30) в рівняння (3.27) і прирівнювання коефіцієнтів при s^σ в обох частинах отриманої рівності призводить до однорідної алгебраїчної системи відносно перших коефіцієнтів розкладів (3.29), яка в матричному представленні матиме вигляд

$$(F_0 - \sigma E)\vec{g}_0 = 0, \quad (3.31)$$

де E — одинична матриця; \vec{g}_0 — вектор з компонентами $g_{i,0}$ ($i = \overline{1,4}$).

Прирівнювання коефіцієнтів при $s^{\sigma+k}$ ($k = 1, 2, \dots$) приводить до неоднорідних алгебраїчних систем виду

$$[F_0 - (\sigma + k)]\vec{g}_k = \vec{d}_k, \quad (3.32)$$

Тут \vec{g}_k — вектори з компонентами $g_{i,k}$, а \vec{d}_k — вектори з компонентами $d_i^{(k)}$, які визначаються за формулами

$$d_i^{(k)} = - \sum_{q=1}^4 \sum_{j=0}^{k-1} g_{q,j} f_{i,q}^{(k-j)}.$$

Таким чином, визначення показника σ і коефіцієнтів розкладів (3.29) звелось до розв'язання однорідної алгебраїчної системи (3.31) відносно вектора \vec{g}_0 і послідовності неоднорідних систем (3.32) відносно векторів \vec{g}_k ($k = 1, 2, \dots$), праві частини яких лінійно виражаються через $k - 1$ розв'язки попередніх алгебраїчних систем.

З умови існування нетривіального розв'язку системи (3.31) отримуємо характеристичне рівняння четвертого порядку відносно показника σ

$$a_4\sigma^4 + a_3\sigma^3 + a_2\sigma^2 + a_1\sigma + a_0 = 0, \quad (3.33)$$

де

$$\begin{aligned}
 a_4 &= 1, \quad a_3 = 0, \quad a_2 = -1 - f_{32}^{(0)} f_{43}^{(0)} - f_{13}^{(0)} f_{31}^{(0)} - f_{42}^{(0)}, \\
 a_1 &= -f_{13}^{(0)} f_{32}^{(0)} f_{41}^{(0)} - f_{32}^{(0)} f_{43}^{(0)} - f_{12}^{(0)} f_{41}^{(0)} - f_{32}^{(0)} f_{43}^{(0)}, \quad a_0 = -f_{32}^{(0)} f_{43}^{(0)} + \\
 &+ f_{13}^{(0)} f_{31}^{(0)} f_{42}^{(0)} + f_{12}^{(0)} f_{41}^{(0)} - f_{13}^{(0)} f_{32}^{(0)} f_{41}^{(0)} + f_{42}^{(0)} - f_{12}^{(0)} f_{31}^{(0)} f_{43}^{(0)}.
 \end{aligned}$$

З урахуванням виразів для коефіцієнтів $f_{ij}^{(0)}$ після ряду перетворень можна показати, що корені рівняння (3.33), які розташовані в порядку їх зменшення, приймають такі цілочисельні значення:

$$\sigma_1 = n + 1, \quad \sigma_2 = n - 1, \quad \sigma_3 = -(n - 1), \quad \sigma_4 = -(n + 1). \quad (3.34)$$

Покладаючи в рівняннях (3.31) і (3.32) $\sigma = \sigma_1$ і розв'язуючи послідовності алгебраїчних рівнянь можна переконатися в тому, що перший розв'язок системи рівнянь (3.27) для функцій $y_i^{(1)}$ ($i = 1, 2, 3$) набуває вигляду

$$\begin{aligned}
 y_1^{(1)} &= s^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} g_{1,2k}^{(1)} s^{2k}, \quad y_2^{(1)} = s^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} g_{2,2k}^{(1)} s^{2k}, \\
 y_3^{(1)} &= s^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} g_{3,2k}^{(1)} s^{2k}.
 \end{aligned} \quad (3.35)$$

Тут і надалі верхній індекс при y_i і $g_{i,k}$ означатиме номер знайденого частинного розв'язку.

Зауважимо, що ряди (3.35) будуть збіжними рядами в області збіжності для рядів елементів матриці $F(s, \lambda)$.

Для отримання інших інтегралів рівнянь, коли корені характеристичного рівняння відрізняються від найбільшого кореня на ціле число, в загальному випадку необхідно знизити порядок вихідної системи за допомогою одного знайденого її розв'язку і потім для отримання розв'язку цієї нової системи застосувати знову описаний вище прийом. На цьому шляху отримуються розв'язки, які будуть мати логарифмічні члени. Так можна діяти лише тільки тоді, коли вдається переконатися в тому, що для випадку $\sigma = \sigma_2$ розв'язків неоднорідних систем (3.32) не існує. В іншому випадку виникає небезпека

втрати обмеженого в точці $s = 0$ інтеграла, що призведе до помилкового представлення загального розв'язку системи (3.27) в околі полюса оболонки.

Покладемо в рівняннях (3.31) і (3.32) $\sigma = \sigma_2$ і покажемо, що в цьому випадку існує обмежений в точці $s = 0$ інтеграл системи (3.27). Так як при $\sigma = \sigma_2$ визначник системи (3.31) дорівнює нулю, то існує її нетривіальний розв'язок. При цьому отримаємо

$$g_{1,0}^{(2)} = -g_{2,0}^{(2)}, \quad g_{3,0}^{(2)} = 0. \quad (3.36)$$

При $k = 1$ система (3.32) буде однорідною системою рівнянь, визначник якої не дорівнює нулю. Тому

$$g_{1,1}^{(2)} = g_{2,1}^{(2)}, \quad g_{3,1}^{(2)} = 0. \quad (3.37)$$

Для випадку $k = 2$ маємо неоднорідну алгебраїчну систему четвертого порядку, визначник якої дорівнює нулю, так як $\sigma_2 + 2$ є коренем характеристичного рівняння. Після нескладних але досить громіздких перетворень можна показати, що ранг матриці, складеної з коефіцієнтів рівнянь при невідомих дорівнює трьом і він співпадає з рангом розширеної матриці. Отже отримана система є сумісною і вона допускає існування нетривіального розв'язку.

При $k = 3$ маємо однорідну систему з нерівним нулю визначником. Отже

$$g_{1,3}^{(2)} = g_{2,3}^{(2)} = g_{3,3}^{(2)} = 0.$$

Скориставшись методом математичної індукції, можна показати, що другий регулярний розв'язок для функцій y_1 , y_2 і y_3 матиме наступну структуру:

$$\begin{aligned} y_1^{(2)} &= s^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} g_{1,2k}^{(2)} s^{2k}, & y_2^{(2)} &= s^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} g_{2,2k}^{(2)} s^{2k}, \\ y_3^{(2)} &= s^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} g_{3,2k}^{(2)} s^{2k}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

При цьому перші коефіцієнти цих розкладів повинні підкорюватися умовам (3.36).

Розв'язки даної системи диференціальних рівнянь, які відповідають кореням характеристичного рівняння σ_3 і σ_4 , будуть необмеженими при $s = 0$.

Таким чином, за допомогою прямого розкладу розв'язків по малому параметру (3.24) отримані асимптотичні представлення (3.35) і (3.38) двох регулярних розв'язків рівнянь неосесиметричних коливань тонкої пружної оболонки в околі вершини купола. Відповідно до теорії сингулярно збурених рівнянь [18], [22] два інші інтеграла вихідних рівнянь повинні включати в себе експоненційний множник. Ці розв'язки мають таке формальне представлення

$$\begin{aligned} u^{(j)}(s) &= \mu \gamma^{(j)}(s) \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} u_{k,i}^{(j)}(s - s_1)^i \right\}, \\ v^{(j)}(s) &= \mu^2 \gamma^{(j)}(s) \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} v_{k,i}^{(j)}(s - s_1)^i \right\}, \\ w^{(j)}(s) &= \gamma^{(j)}(s) \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} w_{k,i}^{(j)}(s - s_1)^i \right\}, \quad (j = 3, 4). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Тут $u_{k,i}^{(j)}$, $v_{k,i}^{(j)}$, $w_{k,i}^{(j)}$ — невідомі коефіцієнти розкладів; j — індекс, який вказує на номер знайденого частинного розв'язку,

$$\gamma^{(j)}(s) = \begin{cases} e^{\beta(s)} \cos(\beta(s)) & \text{при } j = 3, \\ e^{\beta(s)} \sin(\beta(s)) & \text{при } j = 4. \end{cases},$$

$$\beta(s) = \frac{1}{\mu\sqrt{2}} \int_{s_1}^s |b_0(t)|^{1/4} dt, \quad b_0(s) = \lambda - \frac{1 - \nu^2}{R_2^2(s)}, \quad b_0(s) < 0 \quad \text{при } s \in [0, s_1].$$

Ці розв'язки при малих значеннях параметра μ є сильно осцилюючими і експоненціально затухаючими при віддаленні від краю оболонки. Тому не можна розраховувати на те, що класичні методи розв'язання даної спектральної задачі будуть однаково добре працювати в усій області зміни параметра μ . Їх використання аналогічно апроксимації експоненційної функції відрізком ряду Тейлора або раціональної апроксимації Паде.

У випадку оболонок обертання, для яких інтеграл у виразі для $\beta(s)$ не обчислюється в елементарних функціях, функції $\gamma^{(j)}(s)$ відповідно до роботи

[22] можна представити в вигляді

$$\gamma^{(j)}(s) = \gamma_0^{(j)} \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k P_k^{(j)}(\eta), \quad (3.40)$$

де

$$\gamma_0^{(j)} = \gamma^{(j)}(\beta(s) = \beta_0(s)), \quad \beta_0(s) = p(s-s_1), \quad p = \frac{1}{\sqrt{2\mu}} \sqrt[4]{|b_0(s_1)|}, \quad \eta = \frac{s-s_1}{\mu},$$

$P_k^{(j)}(\eta)$ – поліном з постійними коефіцієнтами, що залежать від коефіцієнтів рівнянь (3.2) і їх похідних в точці $s = s_1$.

При побудові інтегралів (3.39) передбачалося, що область має такі геометричні параметри, при яких можна знехтувати впливом функцій примежового шару на поведінку розв'язків в околі її полюса. Для тих оболонок, для яких ця умова не виконується, користуватися формулами (3.39) не можна. В цьому випадку необхідно будувати два обмежених інтеграла в околі точки $s = 0$ з великою змінністю, які ростуть при віддаленні від полюса оболонки. Оскільки точка $s = 0$ є регулярною особливою точкою для вихідних рівнянь, то такі інтеграли повинні володіти встановленою асимптотикою в околі цієї точки. Тому інтеграли з великою змінністю замість експоненціального множника повинні мати множник іншої структури, що забезпечує асимптотику розв'язків при $s \rightarrow 0$ і аналітичність функцій $u_k(s)$, $v_k(s)$ і $w_k(s)$, що стоять при цьому множнику. В силу цього асимптотичне інтегрування вихідних рівнянь в цьому випадку істотно ускладнюється.

Отримані вище результати якісного характеру про поведінку інтегралів рівнянь, що описують власні коливання тонкостінної оболонки обертання в формі купола можуть бути використані для побудови систем базисних функцій під час розв'язання вихідної задачі методом Рітца.

Для знаходження структури загального розв'язку системи (3.2) складемо лінійну комбінацію інтегралів (3.35), (3.38) і (3.39). З огляду на представлення примежових функцій в формі Вішика - Люстерника (3.40), загальний розв'язок після перегрупування членів у виразах (3.39) можна представити

в наступному вигляді:

$$\begin{aligned}
 [u, v, w] = & R[u, v, w] + \exp^{\beta_0(s)} \cos \beta_0(s) \sum_{i=0}^{\infty} [u_{i,1}, v_{i,1}, w_{i,1}] (s - s_1)^i + \\
 & + \exp^{\beta_0(s)} \sin \beta_0(s) \sum_{i=0}^{\infty} [u_{i,2}, v_{i,2}, w_{i,2}] (s - s_1)^i.
 \end{aligned}
 \tag{3.41}$$

У квадратних дужках перераховані функції і відповідні їм невідомі коефіцієнти, які включають в себе також параметр μ . Тут $R[u, v, w]$ – регулярна частина загального розв’язку, структуру якого можна представити у вигляді:

$$\begin{cases} u = s^{n-1}(a_1 + a_2s^2 + a_3s^4 + \dots), \\ v = s^{n-1}(b_1 + b_2s^2 + b_3s^4 + \dots), \\ w = s^n(c_1 + c_2s^2 + c_3s^4 + \dots). \end{cases}
 \tag{3.42}$$

При цьому перші коефіцієнти при $s^{(n-1)}$ підпорядковані умові

$$b_1 = -a_1. \tag{3.43}$$

Представлення (3.42) показують, що виродження деяких коефіцієнтів рівнянь (3.2) при $s \rightarrow 0$ породжує цілком певну асимптотику шуканих розв’язків, що залежить від числа хвиль n оболонки в круговому напрямку. Ця асимптотика з урахуванням залежності (3.43) забезпечує скінченність переміщень і деформацій оболонки (2.5) в її полюсі. Слід зазначити, що асимптотика розв’язків (3.42) збігається з асимптотикою роботи [158], яка отримана на основі використання спрощеного варіанту методу Фробеніуса.

По суті, представлення розв’язків в формі (3.41) включають в себе всі послідовні наближення при асимптотичному інтегруванні сингулярно збурених рівнянь. Надалі невизначені коефіцієнти в розкладах (3.41) і (3.42) будемо знаходити з головних граничних умов задачі і умов стаціонарності відповідного квадратичного функціоналу.

Зауважимо, що якщо розв’язки шукати у вигляді розкладу в степеневі ряди (за винятком перших членів ряду для забезпечення скінченності деформацій при $s \rightarrow 0$), то побудовані на такій основі базиси для апроксимації

розв'язків відповідно до представлення (3.42) будуть неповними. Це призводить до повільної збіжності рядів для шуканих функцій.

Побудова систем координатних функцій здійснюється на основі підпорядкування загального розв'язку (3.41) головним граничним умовам вихідної спектральної задачі. Виходячи з цих умов отримуємо деякі додаткові співвідношення між коефіцієнтами в розкладах для шуканих функцій. Підставляючи ці співвідношення в загальний вигляд розв'язку, після ряду перетворень знаходимо системи базисних функцій для апроксимації розв'язків.

В якості прикладу наведемо алгоритм розв'язання задачі про неосесиметричні коливання куполоподібної оболонки обертання, де координатні функції побудовані з урахуванням асимптотики лише регулярної частини загального розв'язку (3.42)

У відповідності зі сказаним вище, функції $u(s)$, $v(s)$ і $w(s)$ можна представити у вигляді наступних відрізків узагальнених рядів:

$$u = \sum_{j=1}^N x_j U_j(s); \quad v = \sum_{j=1}^N x_{N+j} V_j(s); \quad w = \sum_{j=1}^N x_{2N+j} W_j(s), \quad (3.44)$$

де

$$U_1(s) = (s^2 - s_1^2)s^{n-1}; \quad W_1(s) = (s^2 - s_1^2)^2 s^n;$$

$$U_{j+1}(s) = U_j(s)s^2; \quad W_{j+1}(s) = W_j(s)s^2; \quad (j = \overline{1, N-1}).$$

Тут x_j — невизначені постійні, $U_j(s)$, $V_j(s)$, $W_j(s)$ — системи координатних функцій, що задовольняють лише кінематичним граничним умовам задачі при $s = s_1$. Крім цього, відповідно до асимптотики (3.42) в розкладах (3.44) слід покласти

$$x_{N+1} = -x_1. \quad (3.45)$$

Оскільки граничні умови для $u(s)$ і $v(s)$ мають однаковий вигляд, то

$$V_j(s) = U_j(s) \quad (j = \overline{1, N}).$$

Наведені системи координатних функцій виявляються придатними лише для тих випадків, коли в розкладах (3.44) можна утримувати невелику кількість членів N , оскільки при великих значеннях N спостерігається втрата стійкості обчислень. Тому в подальшому, не порушуючи повноти представлення розв'язків, степеневі функції замінимо відповідними многочленами Лежандра, які є лінійними комбінаціями степеневих функцій. Побудовані таким чином системи базисних функцій дозволяють істотно збільшити кількість членів в розкладах (3.44) по відношенню до степеневого базису і тим самим розширити діапазон вхідних параметрів задачі, при яких можна проводити розрахунки з заданою точністю.

Ці системи координатних функцій можна представити в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} u_1(s) &= s^{n-1}(s^2 - s_1^2); & U_i(s) &= u_1(s) \left[P_{2i-2}\left(\frac{s}{s_1}\right) - P_{2i-2}(0) \right]; \\ w_1(s) &= s^n(s^2 - s_1^2)^2; & W_i(s) &= w_1(s) \left[P_{2i-2}\left(\frac{s}{s_1}\right) - P_{2i-2}(0) \right]; \quad (i = 2, 3 \dots), \end{aligned} \quad (3.46)$$

де $P_j(s)$ – многочлени Лежандра.

З необхідних умов стаціонарності функціоналу I (3.4) отримаємо однорідну систему алгебраїчних рівнянь

$$(A - \lambda B)\vec{X}^T = 0, \quad (3.47)$$

де вектор \vec{X} має коефіцієнти

$$\vec{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_N, -x_1, x_{N+2}, x_{N+3}, \dots, x_{2N}, x_{2N+1}, x_{2N+2}, \dots, x_{3N}\}.$$

Елементи $\alpha_{i,j}$ верхньої частини відносно головної діагоналі симетричної матриці A можна представити таким чином:

$$\alpha_{1,1} = \int_0^{s_1} [\Psi_{11}(U_1, U_1) - 2\Psi_{12}(U_1, U_1) + \Psi_{22}(U_1, U_1)] r ds;$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{1,j} &= \int_0^{s_1} [\Psi_{11}(U_j, U_1) - \Psi_{12}(U_1, U_j)] r ds; \\
\alpha_{1,j+N-1} &= \int_0^{s_1} [\Psi_{12}(V_j, U_1) - \Psi_{22}(V_j, U_1)] r ds; \quad (j = \overline{2, N}); \\
\alpha_{1,j+2N-1} &= \int_0^{s_1} [\Psi_{13}(W_j, U_1) - \Psi_{23}(W_j, U_1)] r ds; \quad (j = \overline{1, N}); \\
\alpha_{i,j} &= \int_0^{s_1} \Psi_{11}(U_j, U_i) r ds; \quad (i = \overline{2, N}, \quad j = \overline{i, N}); \\
\alpha_{i,j+N-1} &= \int_0^{s_1} \Psi_{12}(V_j, U_i) r ds; \quad (i, j = \overline{2, N}); \\
\alpha_{i,j+2N-1} &= \int_0^{s_1} \Psi_{13}(W_j, U_i) r ds; \quad (i = \overline{2, N}, \quad j = \overline{1, N}); \\
\alpha_{i+N-1,j+N-1} &= \int_0^{s_1} \Psi_{22}(V_j, V_i) r ds; \quad (i = \overline{2, N}, \quad j = \overline{i, N}); \\
\alpha_{i+N-1,j+2N-1} &= \int_0^{s_1} \Psi_{23}(W_j, V_i) r ds; \quad (i = \overline{2, N}, \quad j = \overline{1, N}); \\
\alpha_{i+2N-1,j+2N-1} &= \int_0^{s_1} \Psi_{33}(W_j, W_i) r ds; \quad (i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{i, N}); \quad (3.48)
\end{aligned}$$

Симетричність матриці A випливає з симетричності вихідного оператора, породженого диференціальним рівнянням (3.2), визначеного на класі функцій, підкорених граничним умовам задачі і встановленим вище властивостями поведінки розв'язків в околі полюса оболонки.

У свою чергу ненульові елементи $\beta_{i,j}$ верхньої частини симетричної матриці B обчислюються за формулами:

$$\beta_{1,1} = 2 \int_0^{s_1} U_1^2 r ds; \quad \beta_{1,j} = \int_0^{s_1} U_j U_1 r ds;$$

$$\beta_{1,j+N-1} = - \int_0^{s_1} V_j V_1 r ds; \quad (j = \overline{2, N});$$

$$\beta_{i,j} = \int_0^{s_1} U_i U_j r ds; \quad \beta_{i+N-1,j+N-1} = \int_0^{s_1} V_j V_i r ds; \quad (i = \overline{2, N}, j = \overline{i, N});$$

$$\beta_{i+2N-1,j+2N-1} = \int_0^{s_1} W_i W_j r ds; \quad (i = \overline{1, N}, j = \overline{i, N}). \quad (3.49)$$

Оскільки координатні функції в виразах (3.48) і (3.49) є многочленами, то при обчисленні інтегралів доцільно користуватися квадратурною формулою Гауса.

Наведемо розрахункову схему розв'язання задачі про осесиметричні коливання куполоподібних оболонок обертання ($n = 0$) з урахуванням примежових функцій. Скориставшись аналогічним підходом можна показати, що в цьому випадку структура регулярної частини розв'язків $R[u, w]$ матиме такий вигляд

$$\begin{cases} u = s(a_1 + a_2 s^2 + a_3 s^4 + \dots), \\ w = c_1 + c_2 s^2 + c_3 s^4 + \dots \end{cases} \quad (3.50)$$

При цьому елементи a_{ij} матриці A і b_{ij} матриці B алгебраїчної системи (3.47) обчислюються за такими формулами:

$$a_{i,j} = \int_0^{s_1} \Psi_{11}(U_j, U_i) r ds, \quad a_{i+N,j+N} = \int_0^{s_1} \Psi_{22}(W_j, W_i) r ds,$$

$$b_{i,j} = \int_0^{s_1} U_j, U_i r ds, \quad b_{i+N,j+N} = \int_0^{s_1} W_j, W_i r ds,$$

$$(i = 1, 2, \dots, N, j \geq i),$$

$$a_{i,j+N} = \int_0^{s_1} \Psi_{12}(W_j, U_i) r ds, \quad b_{i,j+N} = 0, \quad (i, j = 1, 2, \dots, N).$$

В результаті застосування описаної вище процедури система базисних функцій для апроксимації функції $w(s)$ матиме наступну структуру:

$$\{W_i(s)\}_{i=1}^N = \{W_1, \dots, W_m; W_{m+1}, \dots, W_{m+m_p}; W_{m+m_p+1}, \dots, W_{m+2m_p}\} \quad (3.51)$$

У виразі (3.51) виділені три групи функцій, які відокремлені один від одного крапкою з комою. Перша група з m функцій представляє собою регулярний базис, утворений з поліномів Лежандра з певною ваговою функцією. Друга і третя групи пов'язані з апроксимацією примежових розв'язків в околі точки $s = s_1$. Кількість функцій в цих групах позначено через m_p . Аналогічну структуру мають і координатні функції для знаходження функції $u(s)$.

Явні вирази для координатних функцій $U_j(s)$ і $W_j(s)$ при використанні представлення примежових функцій в формі Вішика - Люстерника (3.17) будуть мати вигляд

$$U_j = s(s^2 - s_1^2)P_{2j-1}\left(\frac{2s}{s_1} - 1\right), \quad W_j = (s^2 - s_1^2)^2 P_{2j-1}\left(\frac{2s}{s_1} - 1\right),$$

$$(j = 1, 2, \dots, m),$$

$$U_{m+1} = g_c - \frac{s}{s_1}, \quad U_{m+2} = (s - s_1)g_c, \quad U_{m+m_p+1} = g_s, \quad U_{m+m_p+2} = (s - s_1)g_s,$$

$$W_{m+1} = g_c - 1 - \frac{p}{2s_1}(s^2 - s_1^2), \quad W_{m+2} = (s - s_1)g_c - \frac{1}{2s_1}(s^2 - s_1^2),$$

$$W_{m+m_p+1} = g_s - \frac{p}{2s_1}(s^2 - s_1^2), \quad W_{m+m_p+2} = (s - s_1)g_s,$$

$$U_{m+j} = W_{m+j} = (s - s_1)^{j-1}g_c, \quad U_{m+m_p+j} = W_{m+m_p+j} = (s - s_1)^{j-1}g_s,$$

$$(j = 3, 4, \dots, m_p).$$

Тут функції $g_c(s)$ і $g_s(s)$ обчислюються за формулами

$$g_c = \exp\{p(s - s_1)\} \cos p(s - s_1),$$

$$g_s = \exp\{p(s - s_1)\} \sin p(s - s_1),$$

$$p = p(\lambda) = \sqrt[4]{\left|\lambda - \frac{1 - \nu^2}{R_2^2(s_1)}\right|} / (\mu\sqrt{2}).$$

3.3 Чисельні результати та аналіз ефективності запропонованих алгоритмів

3.3.1 Незамкнені оболонки обертання

Наведемо деякі результати розрахунку частот і форм власних коливань конічної оболонки за запропонованому вище алгоритму. У цьому випадку будемо мати:

$$s = \frac{l - z}{\cos \alpha}; \quad r(s) = 1 + s \sin \alpha; \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \alpha; \quad \frac{1}{R_1} = 0, \quad (3.52)$$

де l і α — висота і кут піврозтвору зрізаного конуса відповідно.

Якщо в формулах (3.52) прийняти $\alpha = 0$, то отримаємо, як окремий випадок, циліндричну оболонку одиничного радіуса. У всіх розрахунках вважалося, що безрозмірна висота зрізаного конуса дорівнює 4, а коефіцієнт Пуассона дорівнює 0.3. Відношення радіусу оболонки при $s = s_1$ до її товщини позначимо через δ .

У таблиці 3.1 наведені результати розрахунків при $\delta = 1000$, $\alpha = 0^\circ$ перших трьох безрозмірних частот $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$, функцій $w_i(z^*)$, ($i = 1, 2, 3$) і їх похідних в точці $z^* = 0.99$ при неосесиметричних коливаннях оболонки $n = 1$ в залежності від кількості членів m в регулярному базисі. Тут і далі $z^* = z/l$.

Для апроксимації компонентів розв'язків з великими градієнтами, локалізованих в околі точок $z^* = 0$ і $z^* = 1$, було використано по дві координатні функції ($m_p = 2$). У таблиці наведено таку кількість знаків у обчислюваних величинах, які не змінюються зі збільшенням числа m_p . Отримані дані свідчать про рівномірну збіжність розв'язків і їх перших чотирьох похідних. Аналогічна збіжність спостерігається і в інших точках інтервалу $s_1 \leq s \leq s_2$, що дозволяє визначати значення сил і моментів в усіх точках серединної поверхні оболонки.

Швидкість збіжності обчислюваних величин до їх граничних значень, як і слід було очікувати, є неоднаковою. Так, для нижчої частоти перші дев'ять знаків стабілізуються, починаючи з $m = 8$, тоді як для третьої похідної при цьому ж значенні m стабілізується лише чотири значущі цифри. При збільшенні номера форми коливань спостерігається деяке уповільнення збіжності послідовностей Рітца.

Таблиця 3.1

Значення частот ω_i , функцій $w_i(z^*)$ і їх похідних в точці $z^* = 0.99$ коливань циліндричної оболонки при $n = 1$, $m_p = 2$, $\delta = 1000$, $\alpha = 0^\circ$ в залежності від кількості членів m в регулярному базисі

m	ω_i	w_i	w_i^I	w_i^{II}	w_i^{III}	w_i^{IV}
$i = 1$						
2	0.308517	0.078491	1.946292	-49.2410	-487.154	214694.6
4	0.305471	0.073404	1.824635	-41.1165	-372.750	157571.2
6	0.305466	0.073336	1.822331	-41.3055	-373.444	159370.3
8	0.305466	0.073334	1.822307	-41.3001	-373.457	159328.0
10	0.305466	0.073334	1.822307	-41.3002	-373.457	159328.4
12	0.305466	0.073334	1.822307	-41.3002	-373.457	159328.4
$i = 2$						
2	0.586145	-0.06180	-2.35139	39.9794	4031.075	-409828
4	0.573173	-0.05370	-1.88036	-8.33819	658.7091	-22648.6
6	0.573034	-0.05432	-1.92459	-1.31042	1112.712	-77168.2
8	0.573034	-0.05429	-1.92222	-1.74325	1087.452	-73777.6
10	0.573034	-0.05429	-1.92227	-1.72866	1088.174	-73892.9
12	0.573034	-0.05429	-1.92227	-1.72897	1088.161	-73890.4
14	0.573034	-0.05429	-1.92227	-1.72896	1088.161	-73890.5
$i = 3$						
2	0.883718	0.06e11	0.21e13	-0.1e14	-0.15e16	0.72e17
4	0.774417	-0.10408	-4.07654	1.15063	4020.93	-28653.0
6	0.759725	-0.07338	-2.76493	-17.0210	1460.89	-48932.4
8	0.759391	-0.07186	-2.71864	-12.8252	1657.91	-78465.8
10	0.759388	-0.07169	-2.71190	-13.1577	1637.33	-75411.5
12	0.759388	-0.07169	-2.71184	-13.1370	1637.96	-75571.5
14	0.759388	-0.07169	-2.71184	-13.1377	1637.94	-75565.2

Отримання аналогічних результатів з використанням лише регулярного базису можливо при $m = 80$. Це можна пояснити тією обставиною, що точні розв'язки, які включають в себе експоненти з великими аргументами, погано

представляються у вигляді рядів Тейлора. При подальшому зменшенні відносної товщини оболонки використання регулярного базису для отримання розв'язків такої якості стає неефективним, оскільки настає втрата стійкості обчислень до досягнення граничних значень обчислюваних величин.

Таблиця 3.2

Значення частоти ω_1 , функції $w_1(z^*)$ і її похідних в точці $z^* = 0.99$ коливань циліндричної оболонки при $n = 1$, $m_p = 2$, $\delta = 100$, $\delta = 2000$, $\alpha = 0^\circ$ в залежності від числа членів m в регулярному базисі

m	ω_1	w_1	w_1^I	w_1^{II}	w_1^{III}	w_1^{IV}
$\delta = 100$						
2	0.3073112	0.0225267	0.995807	15.25770	-450.78	3971.5
4	0.3058882	0.0222008	0.957922	13.48223	-430.34	6712.7
6	0.3058869	0.0221731	0.957494	13.51401	-430.49	6613.6
8	0.3058869	0.0221732	0.957485	13.51337	-430.47	6614.9
10	0.3058869	0.0221732	0.957485	13.51336	-430.47	6614.9
12	0.3058869	0.0221732	0.957485	13.51335	-430.47	6614.9
$\delta = 2000$						
2	0.3087912	0.0932625	1.360032	-72.72263	3868.799	118159.5
4	0.3054399	0.0876306	1.353135	-64.16305	2832.105	81459.6
6	0.3054344	0.0875060	1.347701	-64.21545	2866.972	82253.7
8	0.3054344	0.0875046	1.347749	-64.21226	2866.097	82241.1
10	0.3054344	0.0875046	1.347748	-64.21227	2866.106	82241.1
12	0.3054344	0.0875046	1.347748	-64.21227	2866.106	82241.1

У таблиці 3.2 наведені аналогічні дані для першої форми згинних коливань оболонки, отримані при $\delta = 100$ і $\delta = 2000$. Співставляючи ці результати, можна зробити висновок, що запропонований алгоритм розв'язання даної задачі володіє однаковою ефективністю як при середніх, так і при малих значеннях параметра при старшій похідній у вихідних рівняннях.

Слід також зауважити, що оскільки сама вихідна система рівнянь (3.2)

є неточною, то немає необхідності проводити обчислення з такою точністю. Зазначена кількість значущих цифр для обчислюваних величин в таблицях 3.1 і 3.2 ілюструє лише можливість запропонованого підходу до побудови наближеного розв'язку спектральної задачі. Обмежуючись в практичних розрахунках реальною точністю обчислень, можна істотно зменшити порядок розв'язуваної алгебраїчної системи.

Поточкова збіжність наближених розв'язків і їх перших чотирьох похідних дозволяє провести перевірку задоволення цих розв'язків вихідним рівнянням на всьому інтервалі їх інтегрування. Позначимо через $\varepsilon_i = \varepsilon_i(z^*)$, ($i = 1, 2, 3$) значення лівих частин рівнянь (3.2) обчислених в точках $z^* \in [0, 1]$.

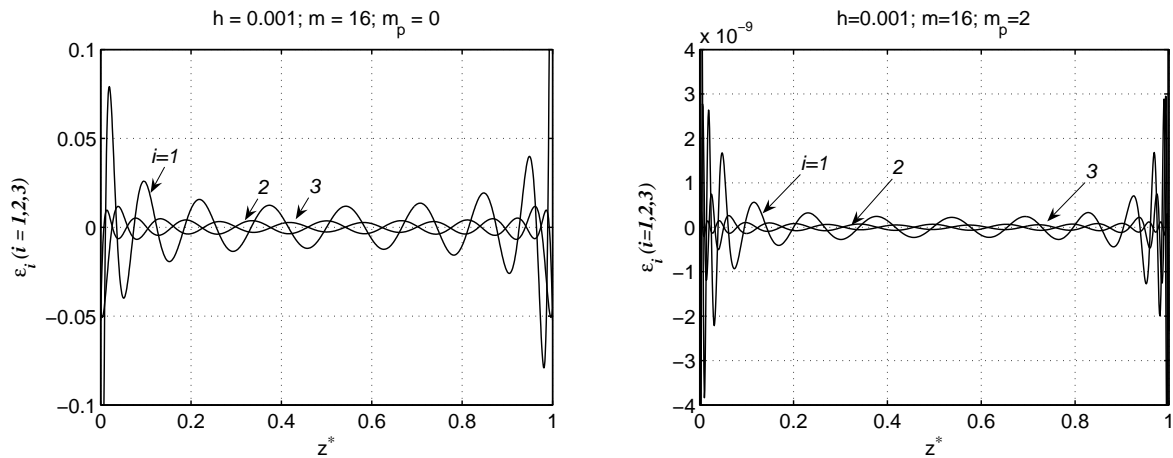


Рис. 3.3. Поведінка функцій $\varepsilon_i(z^*)$ у всій області інтегрування рівнянь (3.2) при $m_p = 0$ і $m_p = 2$.

На рис. 3.3 показано поведінку функцій $\varepsilon_i(z^*)$ в усій області інтегрування рівнянь (3.2) при $m_p = 0$ і $m_p = 2$. При цьому в обох випадках в регулярному базисі утримувалося шістнадцять координатних функцій. При виконанні розрахунків нормування власних функцій виконувалося таким чином, щоб максимум абсолютного значення для переміщень оболонки в її нормальному напрямку дорівнював одиниці. Результати рис. 3.3 показують, що розв'язки, побудовані з використанням тільки регулярного базису задовольняють

всі три рівняння з точністю, що не перевищує 0.1. Додавання до регулярного базису двох координатних функцій, локалізованих в околі закріплених торців, призводить до того, що значення ε_i не перевищують величину близько $4 \cdot 10^{-9}$. При цьому найбільші значення ε_i приймають, як і слід було очікувати, поблизу границь кріплення оболонки. Наведені результати дозволяють трактувати отримані наближені розв'язки розглядуваної спектральної задачі, як розв'язки близькі, в певному сенсі, до точних розв'язків задачі.

Перейдемо до деякого аналізу розв'язків для конічної оболонки. Розрахунки показують, що запропоновані координатні функції дозволяють, як і у випадку циліндричної оболонки, обчислювати розв'язки і їх перші чотири похідні в кожній точці інтервалу інтегрування рівнянь. Тим самим підтверджується ефективність представлень примезових функцій в формі Вішика-Люстерника для диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

Відомо, що на збіжність розв'язків впливає не тільки товщина оболонки, але і її довжина. В таблиці 3.3 представлені результати розрахунку перших трьох частот згинних коливань ($n = 1$) зрізаної конічної оболонки в залежності від числа членів в регулярному базисі m , отримані при наступних вхідних даних $l = 20; 30$, $\delta = 2000$ і $\alpha = 15^\circ$. При цьому було покладено $m_p = 2$. Як видно з таблиці 3.3 збільшення довжини оболонки, як і слід було очікувати, тягне за собою зниження швидкості збіжності. Для стабілізації шести значущих цифр в перших трьох частотах при $l = 20$ досить утримувати десять координатних функцій в регулярному базисі при $m_p = 2$. В другому випадку ($l = 30$) при $m = 16$ гарантується лише п'ять значущих цифр для перших трьох частот коливань. Щоб отримати аналогічний результат, без урахування примезових функцій, в першому випадку треба було утримувати п'ятдесят членів в розкладах. У другому - вдається досягти точності не більше трьох значущих цифр при $m = 100$. Подальше нарощування числа членів в розкладах Рітца веде до втрати стійкості обчислювального процесу.

Додаткові дослідження показали, що саме по собі збільшення кута α на

Таблиця 3.3

Значення перших трьох частот ω_i згинних коливань $n = 1$ зрізаної конічної оболонки в залежності від числа членів в регулярному базисі m , отримані при $l = 20; 30$, $\delta = 2000$, $\alpha = 15^\circ$ і $m_p = 2$.

m	$l = 20$			$l = 30$		
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3
2	0.059030	0.111711	0.146790	0.038377	0.074419	0.103706
4	0.057773	0.105058	0.144611	0.037463	0.068582	0.099733
6	0.057679	0.104800	0.143988	0.037363	0.068313	0.098588
8	0.057672	0.104789	0.143981	0.037351	0.068287	0.098567
10	0.057671	0.104788	0.143978	0.037348	0.068282	0.098562
12	0.057671	0.104788	0.143978	0.037345	0.068279	0.098559
14	0.057671	0.104788	0.143978	0.037340	0.068274	0.098557
16	0.057671	0.104788	0.143978	0.037335	0.068269	0.098554

Таблиця 3.4

Мінімальні частоти зрізаної конічної оболонки для $l = 4$ і $\alpha = 30^\circ$ при різних її відносних товщинах.

m	ω_{min}			
	$\delta = 100,$ $n = 7$	$\delta = 400,$ $n = 11$	$\delta = 1000,$ $n = 12$	$\delta = 2000,$ $n = 15$
2	0.0494923	0.0285036	0.0183033	0.0137052
4	0.0481154	0.0260378	0.0161554	0.0115560
6	0.0481085	0.0259863	0.0161529	0.0115525
8	0.0481084	0.0259860	0.0161528	0.0115523
10	0.0481084	0.0259860	0.0161527	0.0115523
12	0.0481084	0.0259860	0.0161527	0.0115523

процес збіжності не впливає. Однак, ситуація ускладнюється тим, що при його збільшенні і певних геометричних співвідношеннях оболонки, може істотно

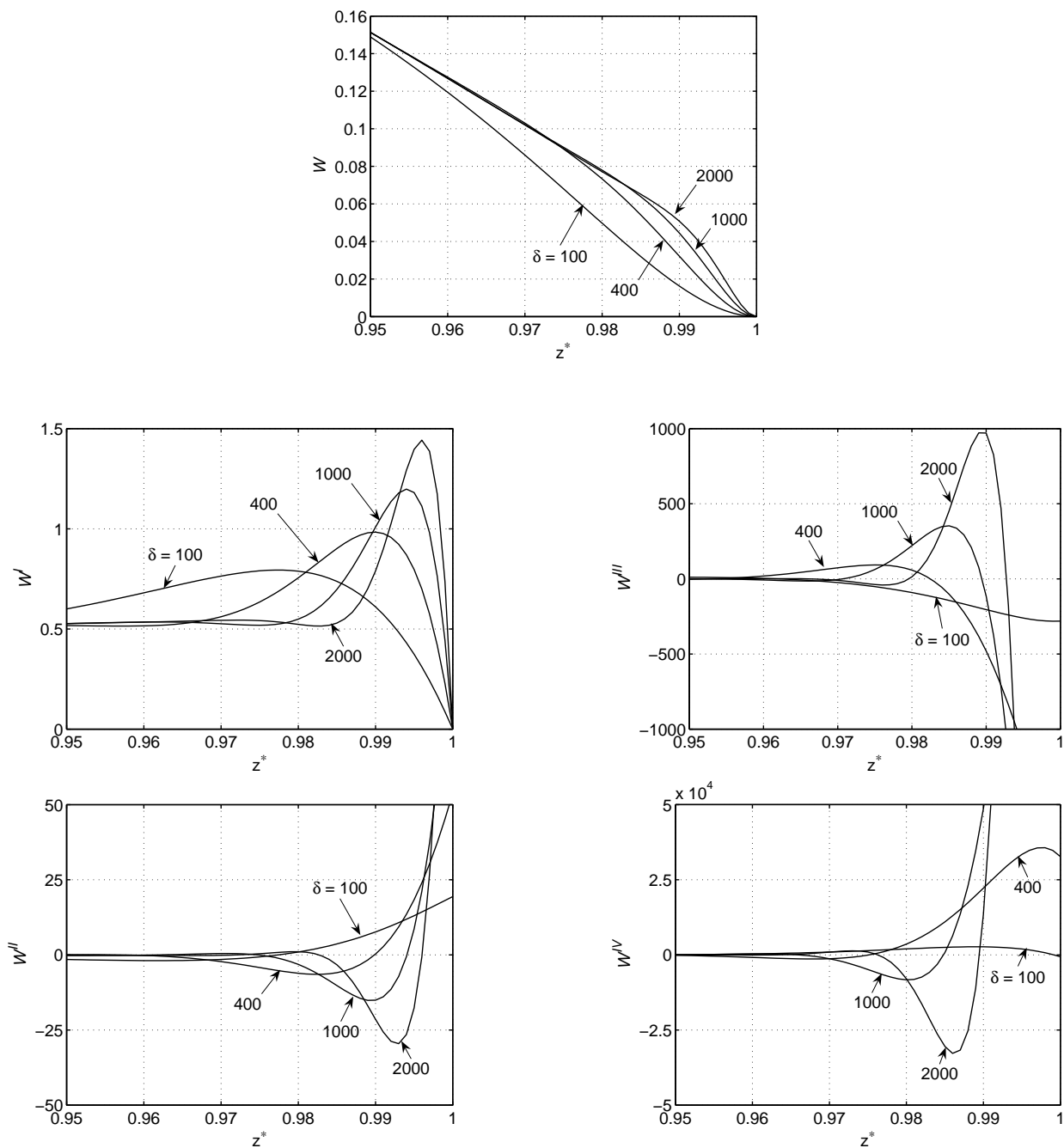


Рис. 3.4. Поведінка функції $w_1(z^*)$ і її перших чотирьох похідних в околі жорстко закріпленого краю зрізаної конічної оболонки при $\alpha = 30^\circ$.

звужитися діапазон застосовності викладеного тут підходу, оскільки перестають виконуватись умови (3.9). У цьому випадку, використання запропонованих примежових функцій виявляється малоєфективним. Як вже зазначалося вище, структура інтегралів вихідної системи рівнянь справедлива для невеликого числа хвиль в круговому напрямку оболонки. Однак, в якості експе-

рименту, за викладеною методикою, був проведений розрахунок мінімальних частот зрізаної конічної оболонки для $l = 4$ і $\alpha = 30^\circ$ при різних її відносних товщинах і відповідних числах хвиль в круговому напрямку. результати цих обчислень представлені в таблиці 3.4 в залежності від числа членів в регулярному базисі m при $m_p = 2$.

Дані таблиці 3.4 показують, що вже при $m = 6$ забезпечується точність обчислень до п'яти значущих цифр, як для середньої, так і для малої товщини оболонки. Аналогічний результат можна отримати, використовуючи тільки регулярний базис. При цьому необхідно утримувати понад п'ятдесят членів в розкладах. Таким чином, і в даному випадку, врахування примежових функцій дає певні переваги при визначенні частот з великим числом хвиль в круговому напрямку.

На рис. 3.4 показано поведінку функції $w_1(z^*)$ і її перших чотирьох похідних в околі жорстко закріпленого краю зрізаної конічної оболонки при куті піврозтвору конуса $\alpha = 30^\circ$. Наведені рисунки ілюструють виникнення і розвиток зони великих змін цих функцій по мірі зміни товщини оболонки від середніх до малих значень. Зі зменшенням товщини оболонки змінність функції і її похідних збільшується з одночасним зменшенням області цих змін. При цьому, чим вище порядок похідної, тим більші значення вона приймає.

Таким чином, запропоновані системи координатних функцій для розв'язання варіаційним методом спектральної крайової задачі про вільні коливання оболонки обертання забезпечують при невеликому порядку алгебраїчних систем рівномірну збіжність розв'язків і їх перших чотирьох похідних у всіх точках області інтегрування вихідних рівнянь. Розроблений алгоритм розв'язання даної задачі має однакову швидкість збіжності як при середніх, так і при малих значеннях відносної товщини оболонки. В області тих значень параметра при старшій похідній в рівняннях, коли можливе застосування регулярного базису на основі поліномів Лежандра, використання запропонованих систем координатних функцій призводить до зниження в два-три рази

порядку розв'язуваних алгебраїчних систем.

3.3.2 Куполоподібні оболонки обертання

Нижче представлені результати розрахунку за запропонованим вище алгоритмом частот і форм коливань сферичного купола з жорстко закріпленим краєм. В якості характерного лінійного розміру оболонки виберемо її радіус. Відношення радіусу оболонки до її товщини позначимо через δ . Кут між віссю симетрії оболонки і нормаллю до її серединної поверхні позначимо через ϑ . Значення цього кута для закріпленої нормалі оболонки позначимо через ϑ_0 . У всіх наведених розрахунках коефіцієнт Пуассона ν покладався рівним 0.3.

У таблиці 3.5 представлені значення перших п'яти безрозмірних частот $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$, ($i = \overline{1,5}$) неосесиметричних коливань ($n = 1$) розглядуваної оболонки в залежності від числа членів N в розкладах (3.44) при $\vartheta_0 = 90^\circ$ для трьох значень параметра δ . Результати таблиці 3.5 показують, що регулярні координатні функції, побудовані з урахуванням асимптотичної поведінки шуканих розв'язків в околі полюса оболонки, дозволяють розраховувати з високим ступенем точності нижчі частоти коливань як для оболонок середньої товщини, так і для дуже тонких оболонок.

Значення нормального прогину для першої форми коливань оболонки і його перших двох похідних в точці $\vartheta = 80^\circ$ в залежності від числа членів N в розкладах (3.44) наведені в таблиці 3.6 при різних значеннях параметра δ . Нормування власних форм коливань оболонки тут вибиралася з умови $w(\vartheta_0/2 = 1)$.

Дані таблиці 3.6 свідчать про те, що для оболонок середньої товщини ($\delta \leq 400$) запропонований вище алгоритм розв'язання вихідної спектральної задачі володіє поточною збіжністю як для самої функції $w(s)$, так і для її перших двох похідних. Зі зменшенням відносної товщини оболонки ця збіжність істотно уповільнюється.

Таблиця 3.5

Значення перших п'яти частот коливань оболонки ($n = 1$) в залежності від числа членів N в розкладах (3.44) при $\vartheta_0 = 90^\circ$

N	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$\delta = 100$					
8	.5417556	.8525449	.9215523	.9564843	1.0048565
10	.5417536	.8525446	.9215523	.9564067	.9969224
12	.5417535	.8525446	.9215523	.9564067	.9968500
14	.5417535	.8525446	.9215523	.9564067	.9968499
16	.5417535	.8525446	.9215523	.9564067	.9968499
$\delta = 1000$					
8	.5337277	.8414342	.9090418	.9302792	.9400686
10	.5326600	.8405728	.9087909	.9302271	.9397110
12	.5323757	.8404612	.9087818	.9302265	.9397103
14	.5323457	.8404580	.9087811	.9302262	.9397103
16	.5323436	.8404572	.9087810	.9302262	.9397103
18	.5323431	.8404572	.9087810	.9302262	.9397103
20	.5323430	.8404572	.9087810	.9302262	.9397103
$\delta = 2000$					
12	.5314705	.8391282	.9079635	.9295781	.9389937
14	.5312517	.8390431	.9079570	.9295777	.9389934
16	.5312150	.8390396	.9079563	.9295774	.9389934
18	.5312125	.8390385	.9079561	.9295774	.9389934
20	.5312116	.8390383	.9079561	.9295774	.9389934
22	.5312114	.8390383	.9079561	.9295774	.9389934

Підвищення точності обчислень можна досягти за рахунок збільшення числа наближень N в методі Рітца. При цьому число N обмежене зверху таким його значенням N^* , при якому алгебраїчна система (3.47) є погано обумовленою і порушується стійкість обчислювального процесу. З метою обчислення похідних від функції $w(s)$ аж до третього порядку з одночасним зменшенням

Таблиця 3.6

Значення w_1 , w'_1 і w''_1 в точці $\vartheta = 80^\circ$ для першої форми коливань в залежності від числа членів N в розкладах (3.44).

N	8	10	12	14	16	18
$\delta = 100$						
w_1	.8544	.8527	.8525	.8525	.8525	.8525
w'_1	-3.1329	-3.0925	-3.0889	-3.0889	-3.0889	-3.0889
w''_1	-38.2459	-37.9901	-38.0512	-38.0529	-38.0529	-38.0529
$\delta = 300$						
w_1	.9735	.9528	.9514	.9513	.9514	.9514
w'_1	-.5723	-.4685	-.5449	-.5542	-.5585	-.5586
w''_1	-24.1190	-17.1345	-13.4682	-13.3579	-13.3318	-13.3251
$\delta = 600$						
w_1	.9676	.9213	.9266	.9304	.9312	.9312
w'_1	.4812	-.1412	-.4686	-.5894	-.5772	-.5738
w''_1	-4.5266	15.0868	14.4900	9.7187	8.5375	8.0980
$\delta = 1000$						
w_1	.9625	.8968	.9201	.9289	.9297	.9290
w'_1	.8117	-.3595	-1.0541	-1.0456	-.9095	-.8735
w''_1	2.5390	32.0210	11.9583	1.9427	-1.6608	-.2282

розмірності алгебраїчної системи (3.47) необхідно розширити клас допустимих функцій функціями примежового шару (3.41), які локалізовані в околі закріпленого торця оболонки.

Власні частоти, отримані запропонованим методом, порівнюються в таблиці 3.7 з частотами, наведеними у роботі [158], які отримані за допомогою модифікованого чисельного методу розв'язання вихідної граничної задачі. За висновком авторів роботи [158], запропонований ними алгоритм дозволяє з високою точністю визначати частоти і форми коливань сферичної оболонки. Однак цей алгоритм істотно ускладнюється зі зменшенням відносної товщини

Таблиця 3.7

Значення нижчих частот першої форми коливань закріпленого сферичного купола, обчислені за запропонованим алгоритмом (верхній рядок), і відповідні значення роботи [158] (нижній рядок).

ϑ_0	n	δ			
		25	50	100	200
45°	1	.9944	.9424	.9270	.9210
		.9905	.9414	.9269	.9211
	2	1.1657	1.0207	.9704	.9469
		1.1635	1.0201	.9703	.9470
	3	1.3752	1.0892	.9974	.9606
		1.3670	1.0868	.9968	.9606
90°	1	.5600	.5485	.5418	.5375
		.5594	.5483	.5417	.5373
	2	.8749	.8636	.8599	.8583
		.8736	.8633	.8598	.8583
	3	.9471	.9155	.9044	.9003
		.9434	.9145	.9041	.9002

оболонки і при $\delta > 1000$ він не застосовний.

Як видно з таблиці, наведені частоти коливань досить добре узгоджуються між собою. Найбільша розбіжність в частотах таблиці 3.7 спостерігається для невеликих значень δ . Ця розбіжність пояснюється тим, що в роботі [158] були використані рівняння загальної теорії тонких оболонок, тоді як тут — спрощені рівняння в формі Муштарі - Донелла - Власова.

Нижче наведені деякі результати розрахунку частот і форм осесиметричних власних коливань сферичного купола з жорстко закріпленим краєм.

У таблиці 3.8 наведені значення перших п'яти безрозмірних частот $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$ осесиметричних коливань сферичного купола в залежності від числа членів m в регулярному базисі при $\vartheta_f = 135^\circ$ для трьох значень параметра δ .

Таблиця 3.8

Значення нижчих частот коливань сферичної оболонки в залежності від числа членів m в регулярному базисі при $m_p = 2$ і $\vartheta_f = 135^\circ$.

m	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$\delta = 100$					
2	0.424822	0.810329	0.935994	1.036195	1.595648
4	0.424767	0.801161	0.886484	0.925515	1.091895
6	0.424767	0.801159	0.885994	0.920509	0.951959
8	0.424767	0.801159	0.885994	0.920490	0.943053
10	0.424767	0.801159	0.885994	0.920490	0.942929
12	0.424767	0.801159	0.885994	0.920490	0.942929
$\delta = 1000$					
2	0.407475	0.810061	0.962506	1.067890	1.541983
4	0.407312	0.791919	0.880269	0.925323	0.959443
6	0.407312	0.791908	0.878332	0.910762	0.929201
8	0.407312	0.791908	0.878330	0.910476	0.925902
10	0.407312	0.791908	0.878330	0.910476	0.925853
12	0.407312	0.791908	0.878330	0.910476	0.925853
$\delta = 2000$					
2	0.405188	0.810334	0.966930	1.070927	1.562291
4	0.404998	0.790777	0.879828	0.926367	0.960434
6	0.404998	0.790765	0.877607	0.910297	0.929309
8	0.404998	0.790765	0.877605	0.909941	0.925456
10	0.404998	0.790765	0.877605	0.909941	0.925388
12	0.404998	0.790765	0.877605	0.909941	0.925388

Для апроксимації розв'язків, локалізованих в околі точки ϑ_f і маючих великі градієнти, було використано дві примежові координатні функції ($m_p = 2$).

Значення нормального прогину w_1 , меридіонального зусилля T_1 , згинального моменту M_1 і перерізуючої сили Q_1 в точці $\vartheta^* = \vartheta/\vartheta_f = 0.95$ при $\vartheta_f = 135^\circ$ для першої форми коливань оболонки в залежності від числа чле-

Таблиця 3.9

Значення w_1 , T_1 , M_1 , Q_1 в точці $\vartheta^* = 0.95$ при $\vartheta_f = 135^\circ$ для першої форми коливань в залежності від числа членів m в регулярному базисі ($m_p = 2$).

m	w_1	T_1	M_1	Q_1
$\delta = 100$				
2	-0.48655	0.32695	$-0.3572 \cdot 10^{-3}$	$0.1540 \cdot 10^{-2}$
4	-0.47964	0.32650	$-0.3433 \cdot 10^{-3}$	$0.1330 \cdot 10^{-2}$
6	-0.47954	0.32654	$-0.3427 \cdot 10^{-3}$	$0.1332 \cdot 10^{-2}$
8	-0.47953	0.32654	$-0.3427 \cdot 10^{-3}$	$0.1333 \cdot 10^{-2}$
10	-0.47952	0.32653	$-0.3427 \cdot 10^{-3}$	$0.1333 \cdot 10^{-2}$
12	-0.47952	0.32653	$-0.3427 \cdot 10^{-3}$	$0.1333 \cdot 10^{-2}$
$\delta = 1000$				
2	-0.66267	0.30698	$0.2381 \cdot 10^{-5}$	$0.1218 \cdot 10^{-4}$
4	-0.66974	0.31265	$0.1276 \cdot 10^{-5}$	$-0.1936 \cdot 10^{-4}$
6	-0.66974	0.31285	$0.1253 \cdot 10^{-5}$	$-0.2058 \cdot 10^{-4}$
8	-0.66972	0.31286	$0.1253 \cdot 10^{-5}$	$-0.2078 \cdot 10^{-4}$
10	-0.66971	0.31286	$0.1254 \cdot 10^{-5}$	$-0.2085 \cdot 10^{-4}$
12	-0.66970	0.31286	$0.1256 \cdot 10^{-5}$	$-0.2085 \cdot 10^{-4}$
14	-0.66970	0.31286	$0.1256 \cdot 10^{-5}$	$-0.2084 \cdot 10^{-4}$
$\delta = 2000$				
2	-0.65883	0.30248	$0.7736 \cdot 10^{-8}$	$0.1982 \cdot 10^{-4}$
4	-0.66188	0.31066	$0.6321 \cdot 10^{-7}$	$0.1384 \cdot 10^{-4}$
6	-0.66158	0.31068	$0.6789 \cdot 10^{-7}$	$0.1371 \cdot 10^{-4}$
8	-0.66154	0.31067	$0.6874 \cdot 10^{-7}$	$0.1372 \cdot 10^{-4}$
10	-0.66153	0.31067	$0.6908 \cdot 10^{-7}$	$0.1374 \cdot 10^{-4}$
12	-0.66153	0.31067	$0.6913 \cdot 10^{-7}$	$0.1375 \cdot 10^{-4}$
14	-0.66153	0.31067	$0.6901 \cdot 10^{-7}$	$0.1376 \cdot 10^{-4}$

нів m в регулярному базисі при фіксованому числі примежових базисних функцій ($m_p = 2$) наведені в таблиці 3.9 для трьох значень параметра δ .

Нормування власних форм коливань оболонки тут і далі вибиралося таким чином, щоб максимальний прогин оболонки в напрямку зовнішньої нор-

малі дорівнював одиниці.

Дані таблиць 3.8 і 3.9 свідчать про те, що запропонований алгоритм розв'язання даної спектральної задачі має однакову збіжність як при малих, так і при середніх значеннях відносної товщини оболонки.

Аналогічна збіжність, наведених в таблиці 3.9 величин, спостерігається і при інших значеннях незалежної змінної ϑ . Отже, побудовані вище системи координатних функцій забезпечують поточкову збіжність не тільки самих розв'язків, але і їх похідних до певного порядку. Це дозволяє визначати сили і моменти в усіх точках серединної поверхні оболонки. Таким чином, при вдалому виборі системи базисних функцій варіаційний метод дозволяє побудувати наближений розв'язок задачі, який в певному сенсі близький до її точного розв'язку.

Слід також зазначити, що аналогічні результати для даної оболонки можна отримати з використанням тільки регулярних координатних функцій ($m_p = 0$). Однак, побудований на такій основі алгоритм розв'язання задачі не буде володіти властивістю рівномірної збіжності по параметру μ . Для отримання результатів із заданою точністю, кількість членів в розкладах Рітца з використанням тільки регулярного базису необхідно збільшити відносно базису з примежовими функціями в 1.5; 2 і 3 рази при $\delta = 100; 1000$ і 2000 . відповідно. При подальшому зменшенні відносної товщини оболонки, використання тільки регулярного базису для отримання розв'язків розглядуваної якості стає неефективним, оскільки може настати втрата стійкості обчислювального процесу до досягнення граничних значень обчислюваних величин. Пояснення цього факту випливає з того, що точні розв'язки, які включають в себе експоненціальні функції з великим аргументом, погано апроксимуються рядами Тейлора. Якщо в практичних розрахунках немає необхідності обчислювати похідні від форм коливань, то відповідно до результатів таблиць 3.8 і 3.9 можна істотно знизити порядок розв'язуваної алгебраїчної системи.

На рис. 3.5 показано поведінку функцій $T_1(\vartheta^*)$, $M_1(\vartheta^*)$ і $Q_1(\vartheta^*)$ в залежно-

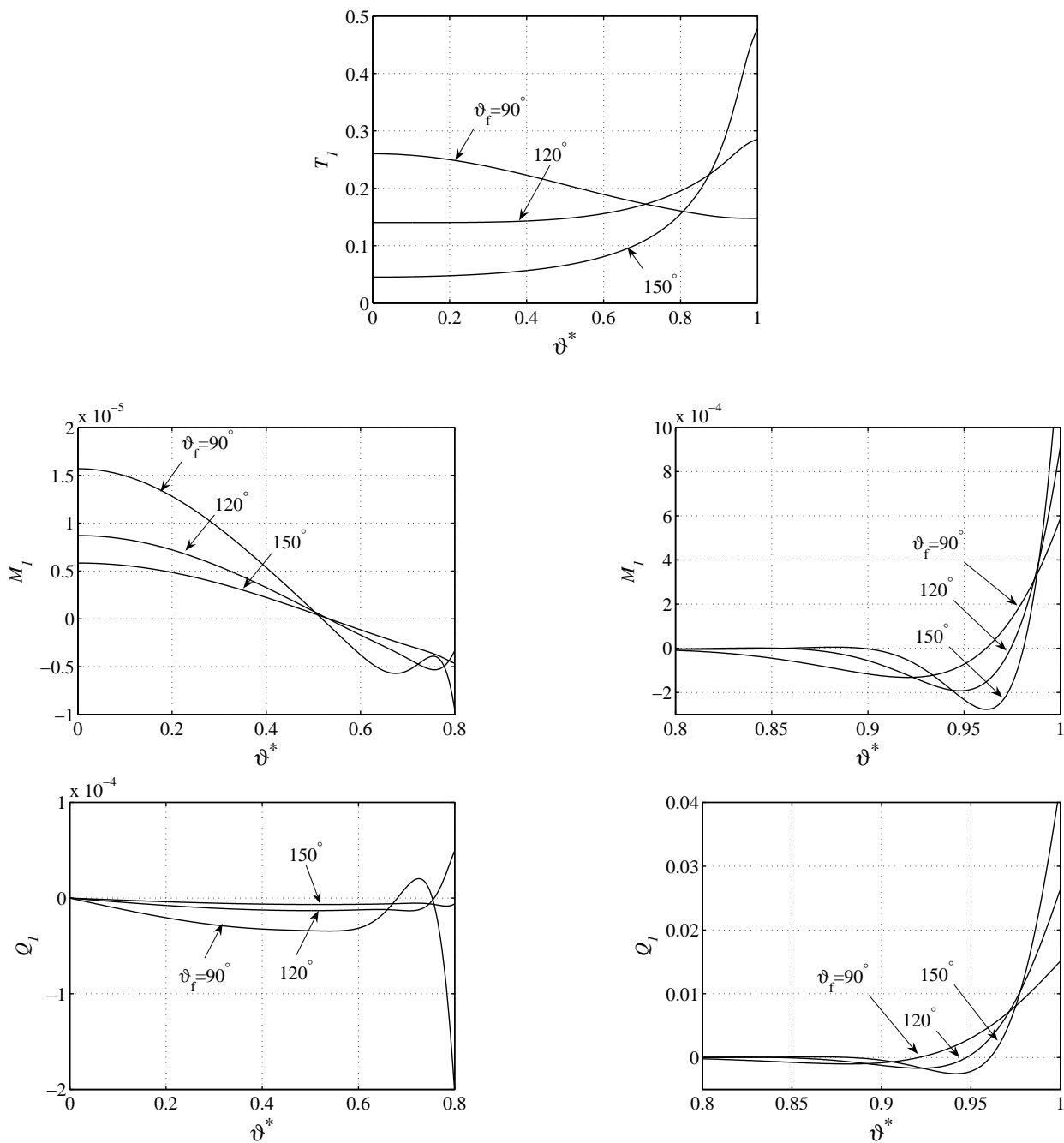


Рис. 3.5. Розподіл зусиль T_1 , моментів M_1 і перерізуючих сил Q_1 по меридіану оболонки для різних значень кута ϑ_f при $\delta = 150$.

сті від значення аргументу $\vartheta^* = \vartheta/\vartheta_f$ при різних значеннях кута ϑ_f закріпленої паралелі оболонки і при $\delta = 150$. З наведених графіків випливає, що всі розглядувані величини приймають максимальні значення в околі закріпленого контуру оболонки (за винятком зусилля T_1 при $\vartheta_f = 90^\circ$). При цьому в зазначеному околі по мірі зростання кута ϑ_f зростають і значення цих величин.

Слід зазначити, що при розрахунку замкнутих в полюсі оболонки обертанню безпосереднє застосування методу ортогональної прогонки або інших наближених методів розв'язання даної спектральної задачі є неможливим, оскільки в цьому випадку система вихідних диференціальних рівнянь має регулярну особливу точку. Тому в ряді робіт [67], [140], приймається додаткове припущення, що наявність малого отвору в полюсі оболонки не робить істотного впливу на характер власних коливань замкнутих в полюсі оболонки. При цьому на паралелі, що відповідає цьому отвору ($\vartheta = \vartheta_0$), ставляться граничні умови вільного краю:

$$(T_1)_{\vartheta=\vartheta_0} = (M_1)_{\vartheta=\vartheta_0} = (Q_1)_{\vartheta=\vartheta_0} = 0. \quad (3.53)$$

Виходячи з встановленої вище поведінки розв'язків $u(\vartheta)$ і $w(\vartheta)$ в околі полюса оболонки, можна показати, що при $\vartheta \rightarrow 0$ перерізуюча сила Q_1 наближається до нуля, тоді як зусилля T_1 і момент M_1 наближаються до своїх граничних значень. Розрахунки показують рис. 3.5, що функція $M_1(\vartheta)$ в околі полюса оболонки приймає малі значення. Таким чином, для вихідної оболонки при малих значеннях кута ϑ перша умова (3.53) не виконується, а друга і третя умови виконуються наближено. Проте, порівняння частот коливань сферичної оболонки, які отримані в даній роботі і в роботі [67], підтверджує правомірність застосування в даному випадку розрахункової схеми, заснованої на заміні вихідної оболонки оболонкою з малим вільним отвором в околі полюса. Можливо невідповідність умов (3.53) дійсній поведінці силових факторів оболонки при $\vartheta \rightarrow 0$ може позначитися при визначенні форм коливань оболонки і особливо їх похідних в околі її полюса. Загалом же при розрахунку інтегральних характеристик при коливаннях оболонки, згадана вище наближена розрахункова схема куполоподібних оболонки є виправданою.

Таким чином розроблений алгоритм розв'язання задачі про осесиметричні коливання куполоподібних оболонки обертанню на основі варіаційного методу має однакову швидкість збіжності як при малих, так і при середніх значе-

ннях відносної товщини оболонки. В області тих значень товщини оболонки, коли можливе застосування регулярного базису з використанням поліномів Лежандра, розширення класу допустимих функцій функціями типу примежового шару призводить до зниження порядку розв'язуваних алгебраїчних систем.

Запропоновані системи координатних функцій в методі Рітца забезпечують рівномірну збіжність розв'язків і їх перших похідних у всіх точках області інтегрування рівнянь, що описують власні осесиметричні коливання куполоподібних оболонок обертання.

РОЗДІЛ 4

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДА РІТЦА В ПОЄДНАННІ З МЕТОДОМ ДЕКОМПОЗИЦІЇ ОБЛАСТІ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ КОЛИВАНЬ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

Даний розділ присвячений застосуванню метода Рітца до побудови наближених розв'язків спектральних задач з умовами спряження. Знаходження розв'язків цих задач базується на формулюванні узагальненого функціоналу, для якого умови спряження на суміжній границі штучно введених підобластей відносяться до числа його природних граничних умов. Це дозволяє незалежно вибрати базисні функції для метода Рітца в цих підобластях.

Ефективність запропонованого метода продемонстровано при побудові розв'язків одновірної задачі на власні значення про коливання стержня з кусково-неперервними пружно-масовими характеристиками, а також спектральної задачі з параметром в граничній умові для рівнянь в частинних похідних про вільні коливання ідеальної рідини в резервуарах складної геометрії. Розробка методів побудови розв'язків цих задач має самостійне практичне значення.

4.1 Вільні коливання складеного стержня

4.1.1 Постановка задачі

Розглянемо стержень довжини l , який складається зі спряжених стержнів з різними пружно-масовими характеристиками. Вважається, що складений стержень має одну вісь симетрії. Введемо декартову систему координат $Oxyz$, вісь Oz якої сумісна з віссю симетрії стержня. Початок системи координат O зв'яжемо з нижнім краєм стержня. Без обмеження загалу будемо розглядати стержень, який складається з двох спряжених стержнів з різними фізичними та геометричними характеристиками. Покладемо, що спряження

відбувається при $z = \zeta$.

Нижче розглядаються поперечні коливання конструкції на основі лінійної теорії згину стержнів без врахування поперечних зсувів і інерції повороту перерізів. Відповідно до цього згинні вільні коливання розглядуваного стержня будуть описуватися диференціальним рівнянням [25], [91]:

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(EJ \frac{d^2 w}{dz^2} \right) - \omega^2 \rho S w = 0, \quad z \in G, \quad (4.1)$$

де

$$EJ = \begin{cases} E^{(1)} J^{(1)}, & z \in [0, \zeta], \\ E^{(2)} J^{(2)}, & z \in [\zeta, l], \end{cases} \quad \rho S = \begin{cases} \rho^{(1)} S^{(1)}, & z \in [0, \zeta], \\ \rho^{(2)} S^{(2)}, & z \in [\zeta, l], \end{cases}$$

$$w = \begin{cases} w^{(1)}, & z \in [0, \zeta], \\ w^{(2)}, & z \in [\zeta, l], \end{cases} \quad G = G^{(1)} \cup G^{(2)}, \quad G^{(1)} = (0, \zeta), \quad G^{(2)} = (\zeta, l),$$

$J(z)$ і $S(z)$ — момент інерції і площа поперечного перерізу з абсцисою z ; $E(z)$ і $\rho(z)$ — модуль пружності при згині і густина матеріалу стержня; ω — частота вільних коливань; $w(z)$ — поперечне переміщення точок нейтральної лінії стержня.

Будемо вважати, що згинні жорсткості $E^{(i)} J^{(i)}$ і погонні маси $\rho^{(i)} S^{(i)}$ ділянок стержня є неперервно-диференційованими функціями в областях $G^{(i)}$ ($i = 1, 2$).

Припустимо для визначеності, що один кінець стержня закріплений, а інший — вільний. Тоді на кінцях відрізка $[0, l]$ повинні виконуватися граничні умови

$$w(0) = \left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=0} = 0, \quad (4.2)$$

$$Q^{(2)}|_{z=l} = 0; \quad M^{(2)}|_{z=l} = 0. \quad (4.3)$$

Тут і далі $Q^{(i)}$ і $M^{(i)}$ — поперечна сила і згинний момент стержня в перерізі z відповідно:

$$Q^{(i)} = \frac{d}{dz} \left(E^{(i)} J^{(i)} \frac{d^2 w^{(i)}}{dz^2} \right); \quad M^{(i)} = E^{(i)} J^{(i)} \frac{d^2 w^{(i)}}{dz^2}. \quad (4.4)$$

Крім граничних умов (4.2) і (4.3) в точці $z = \zeta$ повинні виконуватися кінематичні та силові граничні умови спряження:

$$[w^{(2)} - w^{(1)}]_{z=\zeta} = 0, \quad \left[\frac{dw^{(2)}}{dz} - \frac{dw^{(1)}}{dz} \right]_{z=\zeta} = 0, \quad (4.5)$$

$$[Q^{(2)} - Q^{(1)}]_{z=\zeta} = 0, \quad [M^{(2)} - M^{(1)}]_{z=\zeta} = 0. \quad (4.6)$$

Розбиття вихідного стержня на підобласті і формулювання умов спряження пов'язано не з фізичною постановкою задачі, а з наближеним методом її розв'язання. В результаті умови спряження розв'язків для підобластей фігурують нарівні з рівняннями і граничними умовами вихідної задачі.

Похідні другого і більш високого порядку від розв'язків сформульованої однорідної крайової задачі (4.1) - (4.6) допускають розриви першого роду в точці $z = \zeta$.

4.1.2 Побудова розв'язку

Розглянемо функціонал

$$F_1(w) = \sum_{k=1}^2 \int_{G^{(k)}} \left[E^{(k)} J^{(k)} \left(\frac{d^2 w^{(k)}}{dz^2} \right)^2 - \omega^2 \rho^{(k)} S^{(k)} (w^{(k)})^2 \right] dG^{(k)}. \quad (4.7)$$

Розглянемо задачу про стаціонарні значення функціоналу (4.7), не накладаючи ніяких граничних умов на функцію $w(z)$, крім умов (4.2). Виконуючи інтегрування по частинах, вираз для першої варіації функціоналу можна представити в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta F_1(w) = & \sum_{k=1}^2 \int_{G^{(k)}} L(w^{(k)}) \delta w^{(k)} dz + \left[M^{(2)} \frac{d \delta w^{(2)}}{dz} - Q^{(2)} \delta w^{(2)} \right]_{z=l} + \\ & + \left[M^{(1)} \frac{d \delta w^{(1)}}{dz} - Q^{(1)} \delta w^{(1)} - M^{(2)} \frac{d \delta w^{(2)}}{dz} + Q^{(2)} \delta w^{(2)} \right]_{z=\zeta} = 0, \end{aligned} \quad (4.8)$$

де

$$L(w^{(k)}) = \frac{d^2}{dz^2} \left(E^{(k)} J^{(k)} \frac{d^2 w^{(k)}}{dz^2} \right) - \omega^2 \rho^{(k)} S^{(k)} w^{(k)}.$$

З довільності варіацій $\delta w^{(k)}$ в областях $G^{(k)}$ і варіацій на вільному кінці стержня з варіаційного рівняння (4.8) випливає, що

$$L(w^{(k)}) = 0 \text{ при } z \in G^{(k)}, \quad Q^{(2)}|_{z=l} = 0, \quad M^{(2)}|_{z=l} = 0.$$

Якщо покласти, що на класі допустимих функцій виконуються кінематичні умови спряження (4.5), то з (4.8) випливає, що силові умови спряження (4.6) будуть природними граничними умовами для функціоналу $F_1(w)$.

Отже, при використанні методу Рітца для розв'язання варіаційного рівняння (4.8) апроксимації для переміщень $w^{(1)}$ і $w^{(2)}$ повинні вибиратися таким чином, щоб забезпечити неперервність переміщень і їх перших похідних в суміжній точці $z = \zeta$ подобластей $G^{(1)}$ і $G^{(2)}$ і виконання граничних умов жорсткого кріплення стержня при $z = 0$. В цьому випадку інші граничні умови задачі для розглядуваного функціоналу будуть природними граничними умовами. Якщо виконання граничних умов (4.2) не викликає особливих труднощів, то виконання умов спряження (4.5) призводить до досить складного алгоритму розв'язання розглядуваної задачі, заснованого на методі Рітца, наприклад [95]. У зв'язку з цим виникає проблема побудови такого функціоналу $F(w)$, для якого всі умови спряження між стержнями були б природними граничними умовами.

Якщо розглядати умови (4.5) як додаткові обмеження на задачу знаходження стаціонарних значень функціоналу $F_1(w)$, то можна скористатися підходом Лагранжа для побудови нового функціоналу $F_2(w)$. Відповідно до цього підходу введемо в розгляд новий функціонал $F_2(w, \alpha_1, \alpha_2)$, який буде с'я за правилом

$$\begin{aligned} F_2(w, \alpha_1, \alpha_2) = \\ = F_1(w) + \alpha_1(w^{(2)} - w^{(1)})_{z=\zeta} + \alpha_2 \left(\frac{dw^{(2)}}{dz} - \frac{dw^{(1)}}{dz} \right)_{z=\zeta}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

де α_1 і α_2 — так звані множники Лагранжа, що підлягають визначенню в подальшому.

Отже, для знаходження розв'язку даної задачі потрібно знайти стаціонарні значення функціонала (4.9) відносно варіацій по w , α_1 і α_2 на класі функцій, що задовольняють лише головним граничним умовам (4.2).

Щоб уникнути штучного підвищення числа невідомих задачі за рахунок множників Лагранжа виразимо α_1 і α_2 через самі розв'язки $w^{(k)}$ і їх похідні. Це дозволить спростити алгоритм знаходження наближеного розв'язку задачі за допомогою методу Рітца.

Обчислимо першу варіацію функціонала (4.9) з урахуванням виразу для варіації функціонала $F_1(w)$. При цьому будемо мати

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta F_2(w, \alpha_1, \alpha_2) = & \sum_{k=1}^2 \int_{G^{(k)}} L(w^{(k)}) \delta w^{(k)} dG^{(k)} + \\ & + \left[M^{(2)} \frac{d\delta w^{(2)}}{dz} - Q^{(2)} \delta w^{(2)} \right]_{z=l} + \left\{ \left[\frac{\alpha_1}{2} + Q^{(2)} \right] \delta w^{(2)} - \right. \\ & - \left[\frac{\alpha_1}{2} + Q^{(1)} \right] \delta w^{(1)} + \left[\frac{\alpha_2}{2} - M^{(2)} \right] \frac{d\delta w^{(2)}}{dz} - \left[\frac{\alpha_2}{2} - M^{(1)} \right] \frac{d\delta w^{(1)}}{dz} + \\ & \left. + \frac{\delta \alpha_1}{2} [w^{(2)} - w^{(1)}] + \frac{\delta \alpha_2}{2} \left[\frac{dw^{(2)}}{dz} - \frac{dw^{(1)}}{dz} \right] \right\}_{z=\zeta}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Якщо F_2 приймає стаціонарне значення, тобто $\delta F_2 = 0$ для довільних варіацій δw , $\delta \alpha_1$, $\delta \alpha_2$, то з (4.10) випливає, що розв'язки w і значення множників Лагранжа, повинні задовольняти рівнянням (4.1), (4.3), (4.5), і рівнянням

$$\frac{\alpha_1}{2} = -Q^{(1)}|_{z=\zeta}; \quad \frac{\alpha_1}{2} = -Q^{(2)}|_{z=\zeta}; \quad \frac{\alpha_2}{2} = M^{(2)}|_{z=\zeta}; \quad \frac{\alpha_2}{2} = M^{(1)}|_{z=\zeta}. \quad (4.11)$$

Звідси випливають рівності правих частин в формулах (4.11), які є силовими умовами спряження (4.6). Складаючи вирази (4.11) для α_1 і α_2 одержуємо такі значення:

$$\alpha_1 = -(Q^{(1)} + Q^{(2)})|_{z=\zeta}; \quad \alpha_2 = (M^{(1)} + M^{(2)})|_{z=\zeta}. \quad (4.12)$$

Отримані співвідношення (4.12) дозволяють сформулювати узагальнений функціонал $F(w)$, замінивши в функціоналі (4.9) значення α_1 і α_2 тотожно

рівними їм величинами. Таким чином, можна шукати стаціонарні значення не функціоналу $F_1(w)$, а функціоналу

$$F(w) = F_1(w) - [(Q^{(1)} + Q^{(2)})(w^{(2)} - w^{(1)})]_{z=\zeta} + \\ + \left[(M^{(1)} + M^{(2)}) \left(\frac{dw^{(2)}}{dz} - \frac{dw^{(1)}}{dz} \right) \right]_{z=\zeta}. \quad (4.13)$$

Застосовуючи стандартні прийоми варіаційного числення, переконуємося, що рівняннями Ейлера для функціонала (4.13) будуть рівняння (4.1). Крайові умови (4.3), (4.5), (4.6) тепер є природними крайовими умовами для нього, так як вони автоматично виконуються для функції w , що доставляє функціоналу $F(w)$ стаціонарне значення. В цьому випадку множина допустимих функцій є більш широкою (по відношенню до функціоналу $F_1(w)$), так як потрібно, щоб будь-яка функція, що належить цій множині, задовольняла лише головним граничним умовами (4.2). Це дуже важливий момент в застосуванні варіаційного методу до розв'язання розглядуваної задачі, який дозволяє фактично виключити з розгляду досить складні граничні умови.

Отримані результати дозволяють перейти тепер до побудови наближеного розв'язку розглядуваної спектральної задачі на основі методу Рітца. У зв'язку з цим представимо шукані функції $w^{(k)}(z)$ у вигляді наступних розкладів в підобластях $G^{(k)}$ ($k = 1, 2$):

$$w^{(1)}(z) = \sum_{j=1}^N a_j V_j^{(1)}(z), \quad w^{(2)}(z) = \sum_{j=1}^N b_j V_j^{(2)}(z), \quad (4.14)$$

де

$$V_j^{(1)}(z) = z^2 P_j \left(\frac{2z}{\zeta} - 1 \right), \quad V_j^{(2)}(z) = P_j \left(\frac{2z}{l - \zeta} - \frac{l + \zeta}{l - \zeta} \right).$$

Тут P_j — зміщені на одиницю за індексом j многочлени Лежандра з аргументами, перетвореними на інтервали $[0, \zeta]$ і $[\zeta, l]$ відповідно. Система координатних функцій $\{V_j^{(1)}(z)\}$ підпорядкована головним граничним умовам задачі (4.2).

Вибрані системи базисних функцій є лінійно-незалежними і повними системами функцій в областях $G^{(k)}$. Такі координатні функції забезпечують

високу стійкість обчислювального процесу при великому числі членів N в розкладах (4.14).

Надалі будемо користуватися безрозмірними величинами (позначені рискою зверху), які пов'язані з відповідними розмірними величинами наступним чином:

$$\bar{m}^{(i)} = \frac{\rho^{(i)} S^{(i)}}{\rho^{(0)} S^{(0)}}, \quad \bar{E}^{(i)} \bar{J}^{(i)} = \frac{E^{(i)} J^{(i)}}{E^{(0)} J^{(0)}}, \quad w = R_0 \bar{w}; \quad \bar{\omega}^2 = \frac{R_0^4 \rho^{(0)} F^{(0)}}{E^{(0)} J^{(0)}} \omega^2, \quad (4.15)$$

де R_0 — характерний лінійний розмір стержня, $\rho^{(0)} S^{(0)}$ і $E^{(0)} J^{(0)}$ — погонні маса і згинна жорсткість стержня в характерному його перерізі.

Далі, для спрощення форми запису, риску над безрозмірними величинами будемо опускати.

Підставимо розклади (4.14) в функціонал (4.13). Тоді функціонал $F(w)$ буде залежати від $2N$ змінних $a_1, a_2, \dots, a_N, b_1, b_2, \dots, b_N$. Задача про стаціонарність функціоналу (4.13) еквівалентна системі лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\frac{\partial F}{\partial a_i} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial b_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Ця система рівнянь може бути записана у вигляді

$$(A - \omega^2 B) \vec{X} = 0, \quad (4.16)$$

де вектор-стовпець \vec{X} має вигляд $\vec{X} = \{a_1, a_2, \dots, a_N, b_1, b_2, \dots, b_N\}$.

Для формування елементів α_{ij} і β_{ij} відповідно симетричних матриць A і B випишемо варіацію функціонала $F(w)$ в безрозмірних величинах. Зауважимо, що симетричність матриці A випливає з симетричності оператора вихідної задачі. При цьому $\delta F(w)$ можна представити в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta F(w) = & \sum_{k=1}^2 \int_{G^{(k)}} \left[E^{(k)} J^{(k)} \frac{d^2 w^{(k)}}{dz^2} \frac{d^2 \delta w^{(k)}}{dz^2} - \omega^2 m^{(k)} w^{(k)} \delta w^{(k)} \right] dG^{(k)} + \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \delta \alpha_1 (w^{(2)} - w^{(1)}) + \delta \alpha_2 \left(\frac{dw^{(2)}}{dz} - \frac{dw^{(1)}}{dz} \right) + \alpha_1 \delta w^{(2)} - \alpha_1 \delta w^{(1)} + \right. \end{aligned}$$

$$+\alpha_2 \left. \frac{d\delta w^{(2)}}{dz} - \alpha_2 \frac{d\delta w^{(1)}}{dz} \right\}_{z=\zeta}. \quad (4.17)$$

Для спрощення запису формул введемо додаткові позначення:

$$Q_i^{(k)} = \frac{d}{dz} \left(E^{(k)} J^{(k)} \frac{d^2 V_i^{(k)}}{dz^2} \right); \quad M_i^{(k)} = E^{(k)} J^{(k)} \frac{d^2 V_i^{(k)}}{dz^2}, \quad (4.18)$$

$$(k = 1, 2, ; i = 1, 2, \dots, N).$$

Обчислимо $\frac{\partial F}{\partial a_i}$. Для цього випадку у формулі (4.17) покладаємо

$$\delta w^{(1)} = V_i^{(1)}, \quad \delta w^{(2)} = 0, \quad \delta \alpha_1 = -Q_i^{(1)}, \quad \delta \alpha_2 = M_i^{(1)}.$$

При цьому будемо мати

$$\alpha_{ij} = \int_0^\zeta E^{(1)} J^{(1)} \frac{d^2 V_i^{(1)}}{dz^2} \frac{d^2 V_j^{(1)}}{dz^2} dz +$$

$$+\frac{1}{2} \left[Q_i^{(1)} V_j^{(1)} + Q_j^{(1)} V_i^{(1)} - M_i^{(1)} \frac{dV_i^{(1)}}{dz} - M_j^{(1)} \frac{dV_j^{(1)}}{dz} \right]_{z=\zeta},$$

$$\alpha_{i,j+N} = \frac{1}{2} \left[Q_j^{(2)} V_i^{(1)} - Q_i^{(1)} V_j^{(2)} + M_i^{(1)} \frac{dV_j^{(2)}}{dz} - M_j^{(2)} \frac{dV_j^{(1)}}{dz} \right]_{z=\zeta},$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, N). \quad (4.19)$$

Обчислимо $\frac{\partial F}{\partial b_i}$. В цьому випадку в формулі (4.17) покладаємо

$$\delta w^{(1)} = 0, \quad \delta w^{(2)} = V_i^{(2)}, \quad \delta \alpha_1 = -Q_i^{(2)}, \quad \delta \alpha_2 = M_i^{(2)}.$$

При цьому для елементів $\alpha_{i+N,j+N}$ отримаємо вираз

$$\alpha_{i+N,j+N} = \int_\zeta^l E^{(2)} J^{(2)} \frac{d^2 V_j^{(2)}}{dz^2} \frac{d^2 V_i^{(2)}}{dz^2} dz +$$

$$+\frac{1}{2} \left[M_i^{(2)} \frac{dV_j^{(2)}}{dz} + M_j^{(2)} \frac{dV_i^{(2)}}{dz} - Q_i^{(2)} V_j^{(2)} - Q_j^{(2)} V_i^{(2)} \right]_{z=\zeta}, \quad (4.20)$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, N).$$

Елементи $\alpha_{i+N,j}$ симетричні елементам $\alpha_{i,j+N}$.

У свою чергу ненульові елементи матриці B обчислюються за формулами

$$\beta_{ij} = \int_0^{\zeta} m_1 V_i^{(1)} V_j^{(1)} dz, \quad \beta_{i+m_0, j+m_0} = \int_{\zeta}^l m_2 V_i^{(2)} V_j^{(2)} dz. \quad (4.21)$$

Таким чином, вихідна задача зведена до узагальненої алгебраїчної задачі на власні значення (4.16). Елементи матриць A і B досить просто і з високою степінню точності обчислюються за допомогою квадратурної формули Гаусса. Для розв'язання алгебраїчної задачі (4.16) є достатня кількість стандартних програм для сучасних ПК.

4.1.3 Деякі чисельні результати і аналіз ефективності запропонованого алгоритму

Наведемо приклад розрахунку частот, форм коливань, перерізуючих сил і моментів для складеного стержня за запропонованим вище алгоритмом. Розглянемо стержень, який складається з двох ділянок циліндричної форми з кусково-постійними пружно-масовими характеристиками. Для такого складеного стержня можна отримати точний розв'язок розглядуваної спектральної задачі. Діаметри складових стержня позначимо через d_1 і d_2 . Покладемо також, що

$$E^{(1)} = E^{(2)}, \quad \rho^{(1)} = \rho^{(2)}, \quad E^{(0)} J^{(0)} = E^{(1)} J^{(1)}, \quad \rho^{(0)} S^{(0)} = \rho^{(1)} S^{(1)}.$$

За характерний лінійний розмір вибираємо радіус першого стержня. Тоді безрозмірні величини в формулах (4.15) приймуть наступні значення:

$$m_1 = 1, \quad m_2 = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2, \quad E^{(1)} J^{(1)} = 1, \quad E^{(2)} J^{(2)} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4. \quad (4.22)$$

При проведенні розрахунків будемо вважати, що $l = 20$ і $\zeta = 10$.

У таблиці 4.1 наведені результати обчислень перших п'яти нижчих частот поперечних коливань розглядуваного стержня в залежності від числа членів

Таблиця 4.1

Залежність перших п'яти частот власних коливань складеної балки від числа членів N в розкладі (4.14) при різних значеннях відношення d_2/d_1 .

N	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$d_2/d_1 = 1.0$					
5	0.0087901	0.0551941	0.1549078	0.3155029	0.5921559
6	0.0087900	0.0550870	0.1544961	0.3059954	0.5060671
7	0.0087900	0.0550862	0.1542435	0.3023844	0.5038674
8	0.0087900	0.0550862	0.1542432	0.3022674	0.4996959
9	0.0087900	0.0550862	0.1542430	0.3022549	0.4996735
10	0.0087900	0.0550862	0.1542430	0.3022548	0.4996491
11	0.0087900	0.0550862	0.1542430	0.3022548	0.4996489
*	0.0087900	0.0550862	0.1542430	0.3022548	0.4996488
$d_2/d_1 = 2.0$					
5	0.0045992	0.0499424	0.2230907	0.4350730	0.7040081
6	0.0045992	0.0499030	0.2225490	0.4244556	0.6706942
7	0.0045992	0.0499030	0.2224979	0.4198270	0.6628935
8	0.0045992	0.0499030	0.2224977	0.4198146	0.6624623
9	0.0045992	0.0499030	0.2224977	0.4198105	0.6624366
10	0.0045992	0.0499030	0.2224977	0.4198105	0.6624354
11	0.0045992	0.0499030	0.2224977	0.4198105	0.6624354
*	0.0045992	0.0499030	0.2224977	0.4198105	0.6624354
$d_2/d_1 = 3.0$					
5	0.0030829	0.0382659	0.2317938	0.5907269	0.7887204
6	0.0030829	0.0382503	0.2314184	0.5682713	0.7384920
7	0.0030829	0.0382503	0.2314111	0.5651969	0.7196961
8	0.0030829	0.0382503	0.2314111	0.5650976	0.7194735
9	0.0030829	0.0382503	0.2314111	0.5650956	0.7194500
10	0.0030829	0.0382503	0.2314111	0.5650954	0.7194490
11	0.0030829	0.0382503	0.2314111	0.5650954	0.7194490
*	0.0030829	0.0382503	0.2314111	0.5650954	0.7194490

N в розкладах (4.14) при різних значеннях відношення діаметрів $\frac{d_2}{d_1}$. Значення частот, які позначені в таблиці зірочкою, відповідають точному розв'язку даної задачі, отриманого за алгоритмом роботи [54]. Результати наведеної таблиці свідчать про те, що при заданих параметрах стержня, для обчислення перших п'яти частот і форм коливань з точністю до семи значущих цифр досить утримати в розкладах (4.14) до 11 членів. збільшення довжини стержня супроводжується збільшенням кількості членів у розкладах для шуканих функцій в підобластях $G^{(i)}$. При зменшенні довжини стержня збіжність згаданих рядів покращується. При цьому витрати машинного часу на ПК середнього класу для розрахунку п'яти форм і частот коливань складають менше однієї секунди. Все це свідчить про певну ефективність запропонованого алгоритму розв'язання даної задачі.

У таблицях 4.2 і 4.3 наведені граничні значення першої і п'ятої форм коливань і їх першої похідної, моменту і перерізуючої сили при підході з різних сторін до суміжної точки $z = \zeta$ підобластей $G^{(1)}$ і $G^{(2)}$ при різній кількості наближень N в розкладах (4.14). Тут символи $\zeta - 0$ і $\zeta + 0$ означають, що всі величини, які йдуть за ними обчислені як граничні значення відповідно зліва і праворуч від точки $z = \zeta$. Зірочкою позначені розрахункові величини, отримані на основі точного розв'язання розглядуваної спектральної задачі. При обчисленні форм коливань було прийняте нормування $w(l) = 1.0$.

Дані таблиці свідчать про те, що наближення Рітца збігаються досить швидко і мають граничні величини, які співпадають з точним розв'язком задачі. Крім того, ці результати показують точність задоволення кінематичних і силових умов спряження ділянок стержня по мірі збільшення числа наближень в методі Рітца.

Відповідно до загальної теорії варіаційних методів [71] впливає, що послідовні наближення для w_N і w'_N збігаються до своїх точних значень рівномірно, а похідні від форм коливань вище другого порядку збігаються лише в середньому. Результати обчислень за запропонованим вище алгоритмом по-

Таблиця 4.2

Значення функцій $w_1(\zeta \pm 0)$, $w'_1(\zeta \pm 0)$, $M_1(\zeta \pm 0)$ і $Q_1(\zeta \pm 0)$ в залежності від числа членів N в розкладі (4.14) при різних значеннях відношення d_2/d_1 .

N	$w_1(\zeta \pm 0)$	$w'_1(\zeta \pm 0)$	$M_1(\zeta \pm 0)$	$Q_1(\zeta \pm 0)$
$d_2/d_1 = 1.0$				
5	0.3394959E+00	0.5811823E-01	0.2983103E-02	-0.4784634E-03
	0.3395525E+00	0.5818732E-01	0.2985662E-02	-0.5438817E-03
7	0.3395231E+00	0.5815275E-01	0.2984410E-02	-0.5112992E-03
	0.3395231E+00	0.5815270E-01	0.2984432E-02	-0.5110301E-03
9	0.3395231E+00	0.5815272E-01	0.2984421E-02	-0.5111641E-03
	0.3395231E+00	0.5815272E-01	0.2984421E-02	-0.5111652E-03
11	0.3395231E+00	0.5815272E-01	0.2984421E-02	-0.5111647E-03
	0.3395231E+00	0.5815272E-01	0.2984421E-02	-0.5111647E-03
*	0.3395231E+00	0.5815272E-01	0.2984421E-02	-0.5111647E-03
$d_2/d_1 = 3.0$				
5	0.3659575E+00	0.6329483E-01	0.3384255E-02	-0.5659157E-03
	0.3659643E+00	0.6329366E-01	0.3360817E-02	-0.6022989E-03
7	0.3659609E+00	0.6329424E-01	0.3372537E-02	-0.5841078E-03
	0.3659609E+00	0.6329424E-01	0.3372538E-02	-0.5841063E-03
9	0.3659609E+00	0.6329424E-01	0.3372537E-02	-0.5841071E-03
	0.3659609E+00	0.6329424E-01	0.3372537E-02	-0.5841071E-03
11	0.3659609E+00	0.6329424E-01	0.3372537E-02	-0.5841071E-03
	0.3659609E+00	0.6329424E-01	0.3372537E-02	-0.5841070E-03
*	0.3659609E+00	0.6329424E-01	0.3372537E-02	-0.5841071E-03

казують, що варіаційний метод має збіжність розв'язків і перших трьох їх похідних в рівномірній метриці як на границях областей $G^{(1)}$ і $G^{(2)}$, так і всередині їх. Це дозволяє розраховувати моменти і перерізуючі сили в будь-якому перерізі складеного стержня.

Поведінка п'ятої форми коливань складеного стержня і її перших трьох похідних при $d_2/d_1 = 3$ показано на рис. 4.1. Тут $z = z/l$. З рисунків видно,

Таблиця 4.3

Значення функцій $w_5(\zeta \pm 0)$, $w_5'(\zeta \pm 0)$, $M_5(\zeta \pm 0)$ і $Q_5(\zeta \pm 0)$ в залежності від числа членів N в розкладі (4.14) при $d_2/d_1 = 3$.

N	$w_5(\zeta \pm 0)$	$w_5'(\zeta \pm 0)$	$M_5(\zeta \pm 0)$	$Q_5(\zeta \pm 0)$
5	0.1910717E+01	-0.6741793E+00	-0.3938804E+01	-0.40655E+01
	0.9860990E+00	-0.4919829E+00	0.6326108E+00	0.42152E+01
7	0.1055531E+01	-0.4291291E+00	-0.1809747E+01	-0.10133E+00
	0.1054878E+01	-0.4247421E+00	-0.2012769E+01	-0.12391E+01
9	0.1054638E+01	-0.4268204E+00	-0.1911010E+01	-0.73063E+00
	0.1054715E+01	-0.4270997E+00	-0.1898053E+01	-0.60000E+00
11	0.1054677E+01	-0.4269671E+00	-0.1904200E+01	-0.66032E+00
	0.1054674E+01	-0.4269543E+00	-0.1904811E+01	-0.67027E+00
13	0.1054675E+01	-0.4269606E+00	-0.1904515E+01	-0.66551E+00
	0.1054675E+01	-0.4269608E+00	-0.1904495E+01	-0.66507E+00
15	0.1054675E+01	-0.4269607E+00	-0.1904505E+01	-0.66528E+00
	0.1054675E+01	-0.4269607E+00	-0.1904505E+01	-0.66530E+00
*	0.1054675E+01	-0.4269607E+00	-0.1904505E+01	-0.66529E+00

що шукані розв'язки не володіють достатньою гладкістю. Як і слід було очікувати, похідні від розв'язку другого і більш високого порядку в точці $z = \zeta$ терплять розрив першого роду. При цьому, необхідна степінь гладкості розглядуваних розв'язків не приймається заздалегідь, а забезпечується самим варіаційним рівнянням.

Таким чином, побудова наближеного розв'язку розглядуваної спектральної задачі з використанням методу декомпозиції області визначення шуканого розв'язку і методу Рітца для функціоналу, для якого умови спряження в суміжній точці введених підобластей є природними граничними умовами, дозволяє отримати досить ефективний алгоритм розрахунку власних коливань складених стержнів з кусково-неперервними пружно-масовими характеристиками.

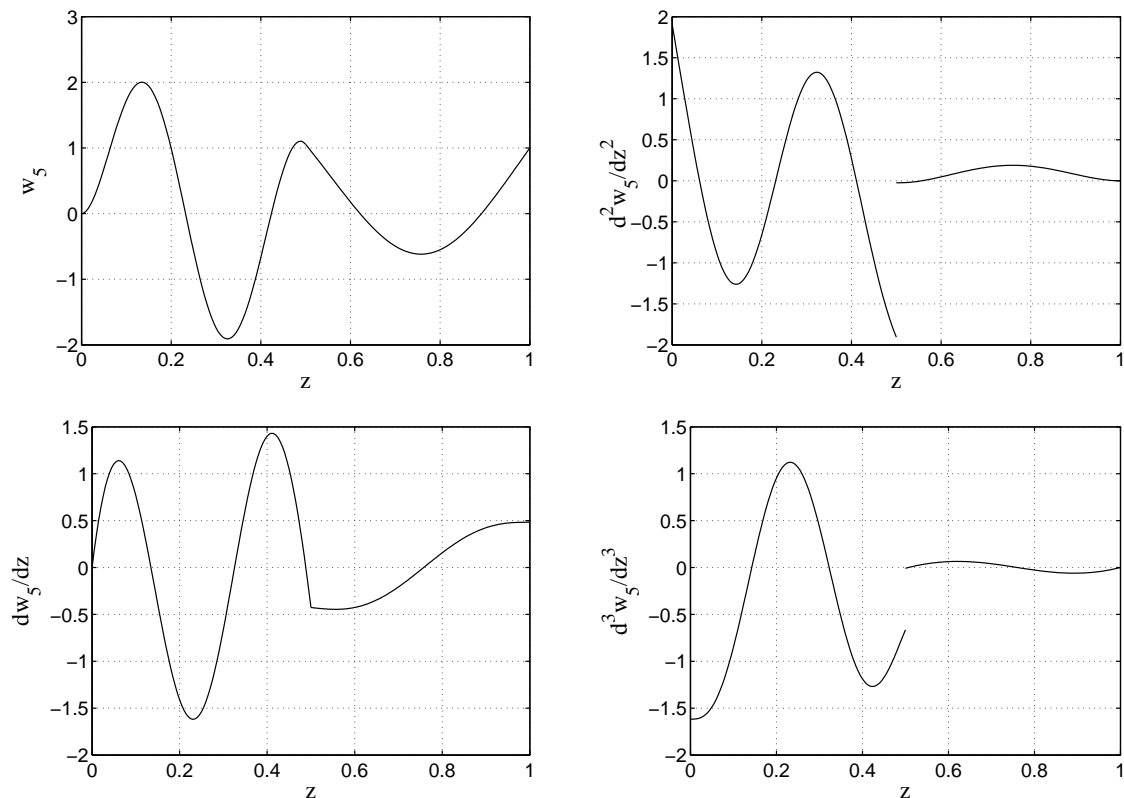


Рис. 4.1. Поведінка п'ятої форми коливань і її перших трьох похідних при $d_2/d_1 = 3$.

4.2 Власні коливання рідини в резервуарах складної геометрії

4.2.1 Постановка задачі

Задача про лінійні власні коливання ідеальної і нестисливої рідини в нерухомому резервуарі відносно потенціалу зміщень $\Phi(x, y, z)$ має вигляд [119]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} &= 0, \quad (x, y, z) \in Q, \\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} - \kappa \Phi \right) \Big|_{\Sigma} &= 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \Big|_S = 0, \quad \int_{\Sigma} \Phi dS = 0, \end{aligned} \quad (4.23)$$

де Σ — незбурена вільна поверхня рідини, S — змочувана поверхня резервуара, Q — область, обмежена поверхнею $\Sigma \cup S$, $\vec{\nu}$ — орт зовнішньої нормалі до поверхонь Σ і S , κ — частотний параметр, який підлягає визначенню.

Нехай резервуар має форму тіла обертання. Вісь Oz декартової системи координат $Oxyz$ сумістимо з віссю симетрії ємності і направимо її в бік вільної

поверхні Σ . Введемо циліндричну систему координат $Ox\eta$

$$x = r \cos \eta, \quad y = r \sin \eta, \quad z = z. \quad (4.24)$$

Надалі будемо розглядати антисиметричні коливання рідини в площині Oyz . З урахуванням осьової симетрії резервуара представимо функцію $\Phi(x, y, z)$ в наступному вигляді:

$$\Phi(x, y, z) = \psi(r, z) \sin \eta. \quad (4.25)$$

Тоді для складової потенціалу зміщень $\psi(r, z)$ отримаємо наступну спектральну задачу в області G меридіонального перерізу посудини:

$$\begin{aligned} M(\psi) = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{1}{r} \psi = 0, \quad (z, r) \in G, \\ \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - \varkappa \psi \right) \Big|_{L_0} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \Big|_L = 0, \quad \psi(0, z) = 0. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Тут L_0 і L — лінії перетину меридіонального перерізу посудини з поверхнями Σ і S відповідно.

Однорідна крайова задача (4.26) з параметром \varkappa в граничній умові еквівалентна варіаційній задачі для функціоналу [119]:

$$I = \int_G r \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r} \psi^2 \right] dG - \varkappa \int_{L_0} r \psi^2 ds \quad (4.27)$$

на класі функцій, інтегрованих разом з квадратом і їх першими похідними, і підкорених останній граничній умові з (4.26). Стаціонарні значення функціоналу (4.27) досягаються на власних значеннях і функціях задачі (4.26).

На основі варіаційного формулювання задачі (4.26) і методу Трефтца раніше було розв'язано широкий клас задач по визначенню частот і форм власних коливань рідини в осесиметричних резервуарах [68], [119]. Однак, для видовжених уздовж осі Oz ємностей, у яких радіус вільної поверхні рідини набагато менше поздовжнього розміру посудини, збіжність методу Трефтца

істотно сповільнюється, що призводить до необхідності проведення великого числа обчислень. Для розглядуваного класу резервуарів розв'язок задачі (4.26) може бути ефективно побудовано, якщо виходити при цьому з позицій задач спряження.

Розіб'ємо область G лінією γ на дві підобласті $G^{(1)}$ і $G^{(2)}$. При цьому, область $G^{(1)}$ буде обмежена віссю Oz , лініями L_0 , $L^{(1)}$ і γ , а область $G^{(2)}$ відповідно віссю Oz і лініями $L^{(2)}$ і γ . Тут $L^{(1)}$ і $L^{(2)}$ — лінії перетину меридіонального перерізу резервуара зі змочуваними границями областей $G^{(1)}$ і $G^{(2)}$ відповідно. Позначимо розв'язки вихідної задачі (4.26) в підобластях $G^{(1)}$ і $G^{(2)}$ через $\psi^{(1)}$ і $\psi^{(2)}$. Надалі верхній індекс у всіх функціях, що зустрічаються буде означати номер області, в якій ці функції визначені. При цьому, для функцій $\psi^{(1)}$ і $\psi^{(2)}$, а також їх похідних на суміжній лінії γ підобластей $G^{(1)}$ і $G^{(2)}$ повинні виконуватися умови спряження

$$(\psi^{(1)} = \psi^{(2)})|_{\gamma}, \quad \left(\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} = - \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} \right) \Big|_{\gamma}, \quad (4.28)$$

де $\vec{\nu}^{(1)}$ і $\vec{\nu}^{(2)}$ — орти зовнішніх нормалей до областей $G^{(1)}$ і $G^{(2)}$ відповідно. Умови (4.28) фігурують нарівні з граничними умовами вихідної задачі.

4.2.2 Варіаційний метод розв'язання задачі

Для побудови наближеного розв'язку сформульованої задачі спряження будемо використовувати варіаційний метод, який для одновимірної задачі застосовувався вище в розділі 4.1. Замінивши в функціоналі (4.27) інтеграл по області G сумою інтегралів по областям $G^{(1)}$ і $G^{(2)}$, представимо його в наступному вигляді:

$$I = \sum_{i=1}^2 \int_{G^{(i)}} F(\psi^{(i)}) dG^{(i)} - \varkappa \int_{L_0} r(\psi^{(1)})^2 ds, \quad (4.29)$$

де

$$F(\psi^{(i)}) = r \left[\left(\frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial r} \right)^2 \right] + \frac{1}{r} (\psi^{(i)})^2.$$

Обчислимо першу варіацію функціонала (4.29), не накладаючи жодних обмежень на варійовані функції, крім умови на осі Oz .

Нехай ми маємо дві довільні функції $\psi(r, z)$ і $\varphi(r, z)$, які разом з їх першими похідними є неперервними функціями в деякій області G аж до її границі Γ . Введемо в розгляд наступний інтеграл:

$$K(\psi, \varphi) = \int_G r \left[\frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] dG.$$

Перетворимо його за допомогою формули Гріна:

$$\begin{aligned} K(\psi, \varphi) &= \int_G \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \varphi \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial z} \varphi \right) \right] dG - \\ &- \int_G \left[r \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + r \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] \varphi dG = \\ &= - \int_G \left[M(\psi) + \frac{1}{r} \psi \right] \varphi dG + \int_{\Gamma} r \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \varphi ds. \end{aligned} \quad (4.30)$$

З урахуванням формули (4.30) і прийнятих позначень першу варіацію від функціоналу (4.29) можна представити у вигляді:

$$\begin{aligned} \delta I &= 2 \sum_{k=1}^2 \left[\int_{L^{(k)}} \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial \nu^{(k)}} \delta \psi^{(k)} r ds + \int_{\gamma^{(k)}} \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial \nu^{(k)}} \delta \psi^{(k)} r ds - \right. \\ &- \left. \int_{G^{(k)}} M(\psi^{(k)}) \delta \psi^{(k)} dG^{(k)} \right] + 2 \int_{L_0} \left[\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} - \kappa \psi^{(1)} \right] r \delta \psi^{(1)} ds. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Відзначимо, що інтегрування уздовж лінії γ , в силу прийнятого розбиття області G виконується двічі в протилежних напрямках. Тому тут через $\gamma^{(k)}$ позначені контури інтегрування по лінії γ з боку областей $G^{(k)}$ відповідно.

Прирівнюючи (4.31) до нуля, отримаємо варіаційне рівняння для визначення функцій $\psi^{(k)}(r, z)$ і параметра κ . З цього рівняння в силу довільного варіювання функцій $\psi^{(k)}$ в областях $G^{(k)}$ і на границях L_0 і $L^{(k)}$, ($k = 1, 2$) випливає, що в межах кожної з введених підобластей повинні виконуватися вихідні рівняння і відповідні граничні умови на контурах L_0 і $L^{(k)}$.

Далі, якщо припустити, що клас допустимих функцій підкорений умові

$$(\psi^{(1)} - \psi^{(2)})|_{\gamma} = 0, \quad (4.32)$$

то друга умова спряження (4.28) буде природною граничною умовою для функціонала I .

Отже, при використанні методу Рітца для розв'язання варіаційного рівняння $\delta I = 0$ апроксимації для функцій $\psi^{(k)}$ повинні вибиратися таким чином, щоб вони забезпечували виконання умови (4.32) на контурі γ . У цьому випадку інші граничні умови задачі для розглядуваного функціоналу будуть природними граничними умовами. Побудова координатних функцій, що задовольняють граничній умові (4.32), викликає певні труднощі. В зв'язку з цим виникає проблема побудови такого функціоналу F_1 , для якого всі умови спряження (4.28) були б природними граничними умовами.

Якщо розглядати умову (4.32) як додаткове обмеження на задачу знаходження стаціонарного значення функціоналу $I(\psi)$, то можна скористатися методом Лагранжа [61] для побудови такого функціоналу. Відповідно до цього введемо в розгляд новий функціонал $F_1(\psi, \alpha)$, який має вигляд:

$$F_1(\psi, \alpha) = I(\psi) + \int_{\gamma} \alpha(\psi^{(1)} - \psi^{(2)}) r ds, \quad (4.33)$$

де $\alpha(s)$ — невідома функція, задана на контурі γ і підлягає визначенню в подальшому. Ця функція називається множником Лагранжа.

Стаціонарне значення функціоналу (4.33) потрібно розшукувати при вільному варіюванні функцій $\psi^{(k)}$ і α . Отже, введення множника Лагранжа призводить до збільшення числа невідомих функцій даної задачі. Щоб уникнути штучного підвищення числа невідомих функцій вихідної задачі знайдемо явний вираз для множника Лагранжа. Тоді, на відміну від роботи [56], де шукані функції і множник Лагранжа знаходились методом Рітца, після заміни функції $\alpha(s)$ в функціоналі (4.33) на тотожно рівний їй вираз, можна отримати узагальнений функціонал відносно функцій $\psi^{(k)}$. Це дозволить істотно

спростити алгоритм знаходження наближеного розв'язку варіаційної задачі за допомогою методу Рітца.

Обчислимо першу варіацію функціонала (4.33) і прирівняємо її до нуля. З урахуванням виразу (4.31) будемо мати:

$$\begin{aligned} \delta F_1 = & \sum_{k=1}^2 \left[\int_{L^{(k)}} \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial \nu^{(k)}} \delta \psi^{(k)} r ds - \int_{G^{(k)}} M(\psi^{(k)}) \delta \psi^{(k)} dG^{(k)} \right] + \\ & + \int_{L_0} \left(\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} - \kappa \psi^{(1)} \right) \delta \psi^{(1)} r ds + \int_{\gamma} \left(\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} + \frac{\alpha}{2} \right) \delta \psi^{(1)} r ds + \\ & + \int_{\gamma} \left(\frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} - \frac{\alpha}{2} \right) \delta \psi^{(2)} r ds + \frac{1}{2} \int_{\gamma} \delta \alpha (\psi^{(1)} - \psi^{(2)}) r ds = 0. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Тут було враховано, що при зміні напрямку шляху інтегрування на протилежний, криволінійний інтеграл першого роду не змінюється.

З вільного варіювання функцій $\psi^{(k)}$ на границі γ з варіаційного рівняння (4.34) випливають такі співвідношення:

$$\frac{\alpha}{2} = - \left. \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} \right|_{\gamma}; \quad \frac{\alpha}{2} = \left. \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} \right|_{\gamma}. \quad (4.35)$$

Складаючи ці дві рівності, отримаємо наступний вираз для множника Лагранжа:

$$\alpha = \left(\frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} - \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} \right) \Big|_{\gamma}. \quad (4.36)$$

З урахуванням цього співвідношення, узагальнений функціонал $F(\psi^{(1)}, \psi^{(2)})$ матиме вигляд

$$F(\psi^{(1)}, \psi^{(2)}) = I(\psi^{(1)}, \psi^{(2)}) + \int_{\gamma} (\psi^{(1)} - \psi^{(2)}) \left(\frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} - \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} \right) r ds. \quad (4.37)$$

Проводячи всі міркування в зворотному порядку, переконуємося, що рівняннями Ейлера для функціонала (4.37) будуть рівняння (4.26). При цьому крайові умови задачі і умови спряження (4.28) для нього є природними граничними умовами, так як вони автоматично виконуються для функцій $\psi^{(k)}$, що

доставляють функціоналу F стаціонарне значення. Це є важливим чинником при розв'язанні задач спряження варіаційним методом.

Отримані результати дозволяють тепер перейти до побудови наближеного розв'язку вихідної задачі на основі методу Рітца. У зв'язку з цим представимо шукані функції у вигляді наступних відрізків узагальнених рядів:

$$\psi^{(1)}(r, z) = \sum_{j=1}^{m_0} a_j W_j^{(1)}; \quad \psi^{(2)}(r, z) = \sum_{j=1}^{n_0} b_j W_j^{(2)}, \quad (4.38)$$

де a_j, b_j — довільні постійні, $\{W_j^{(1)}\}_{j=1}^{\infty}$ і $\{W_j^{(2)}\}_{j=1}^{\infty}$ — системи базисних функцій для областей $G^{(1)}$ і $G^{(2)}$, які задовольняють умові $M(W_j^{(k)}) = 0$, ($k = 1, 2$).

Вимога того, що системи базисних функцій задовольняють вихідному рівнянню, дозволяє позбавитися від обчислення подвійних інтегралів по області $G^{(k)}$ при знаходженні коефіцієнтів алгебраїчної системи рівнянь відносно постійних a_j і b_j .

Коефіцієнти розкладів (4.38) визначаються з умов стаціонарності функціоналу (4.37):

$$\frac{\partial F}{\partial a_i} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial b_i} = 0. \quad (4.39)$$

В результаті, розв'язання вихідної задачі зводиться до розв'язання узагальненої алгебраїчної проблеми власних значень

$$\begin{aligned} (A - \varkappa B)\vec{X} &= 0, \\ \vec{X}^T &= \{a_1, a_2, \dots, a_{m_0}, b_1, b_2, \dots, b_{n_0}\}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Формування елементів α_{ij} і β_{ij} матриць A і B будемо здійснювати на основі варіаційного рівняння $\delta F = 0$ з використанням виразу (4.31). При обчисленні $\partial F / \partial a_i$ в варіації для функціонала F покладемо $\delta\psi^{(1)} = W_i^{(1)}$, $\delta\psi^{(2)} = 0$. При знаходженні $\partial F / \partial b_i$ — покладемо $\delta\psi^{(1)} = 0$, $\delta\psi^{(2)} = W_i^{(2)}$. В результаті будемо мати наступні вирази для елементів α_{ij} і ненульових

елементів β_{ij} :

$$\begin{aligned}
\alpha_{i,j} &= 2 \int_{\Gamma^{(1)}} W_i^{(1)} \frac{\partial W_j^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} r ds - \int_{\gamma} \left(W_i^{(1)} \frac{\partial W_j^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} + W_j^{(1)} \frac{\partial W_i^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} \right) r ds, \\
&(i, j = 1, 2, \dots, m_0), \\
\alpha_{i,j+m_0} &= \int_{\gamma} \left(W_i^{(1)} \frac{\partial W_j^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} + W_j^{(2)} \frac{\partial W_i^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} \right) r ds, \\
&(i = 1, 2, \dots, m_0, j = 1, 2, \dots, n_0), \\
\alpha_{i+m_0,j} &= \int_{\gamma} \left(W_i^{(2)} \frac{\partial W_j^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} + W_j^{(1)} \frac{\partial W_i^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} \right) r ds, \\
&(i, j = 1, 2, \dots, n_0), \\
\alpha_{i+m_0,j+m_0} &= 2 \int_{\Gamma^{(2)}} W_i^{(2)} \frac{\partial W_j^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} r ds - \\
&- \int_{\gamma} \left(W_i^{(2)} \frac{\partial W_j^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} + W_j^{(2)} \frac{\partial W_i^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} \right) r ds, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n_0), \\
\beta_{i,j} &= 2 \int_{L_0} W_i^{(1)} W_j^{(1)} r ds, \quad (i, j = 1, 2, \dots, m_0).
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Нагадаємо, що $\Gamma^{(k)}$, $(k = 1, 2)$ — границі областей $G^{(k)}$ ($\Gamma^{(1)} = L^{(1)} \cup L_0 \cup \gamma$; $\Gamma^{(2)} = L^{(2)} \cup \gamma$). Симетричність матриці A випливає з симетричності оператора вихідної задачі. Елементи матриць A і B з високою степінню точності можуть бути обчислені за допомогою квадратурних формул Гауса.

Розрахунок власних коливань рідини у конкретному резервуарі за запропонованою вище схемою, свідчить про те, що даний алгоритм забезпечує поточкову збіжність для розв'язків і їх нормальних похідних на суміжній границі областей $G^{(1)}$ і $G^{(2)}$.

4.2.3 Побудова розв'язків задачі для випадку, коли одна з підобластей є канонічною

Запропонований вище підхід побудови розв'язків розглядуваної спектральної задачі можна суттєво спростити, якщо границі однієї з підобластей співпадають з координатними лініями будь-якої систем координат. В цьому випадку за допомогою методу Фур'є можна побудувати координатні функції, які задовольняють вихідному рівнянню і граничним умовам на частині границі цієї області.

Як приклад розглянемо складену посудину, яка має форму прямого кругового циліндра одиничного радіуса з довільним осесиметричним днищем. Меридіональний переріз такої посудини представлено на рис. 4.2.

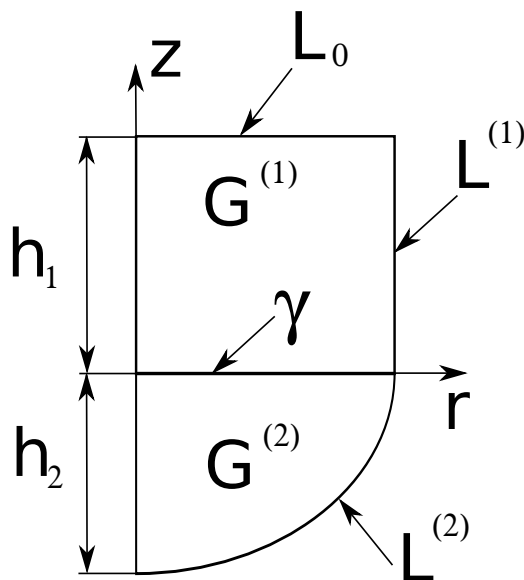


Рис. 4.2. Меридіональний переріз посудини

Розіб'ємо область G прямою лінією γ , яка перпендикулярна осі Oz на дві підобласті $G^{(1)}$ і $G^{(2)}$. У цьому випадку область $G^{(1)}$ матиме форму прямокутника одиничної ширини і висоти h_1 .

Функції $\psi^{(1)}(z, r)$ і $\psi^{(2)}(z, r)$, визначені відповідно в однозв'язних областях G_1 і G_2 , в загальному випадку можна представити в наступному вигляді

$$\psi^{(1)} = \sum_{j=1}^{m_0} a_j V_j(z, r), \quad \psi^{(2)} = \sum_{j=1}^{m_0} b_j V_j(z, r). \quad (4.42)$$

Тут $\{V_j(z, r)\}_{j=1}^{\infty}$ – системи базисних функцій, що задовольняють вихідному рівнянню (4.26), умовам повноти і лінійної незалежності [119]. В полярній

системі координат R і ϑ розв'язки цього рівняння можна представити у вигляді:

$$V_j(z, r) = \frac{2(j-1)!}{(j+1)!} R^j P_j^{(1)}(\cos \vartheta), \quad j \geq 1, \quad R = \sqrt{z^2 + r^2}, \quad (4.43)$$

де $P_j^{(1)}(\cos \theta)$ – приєднані функції Лежандра першого роду. Вирази (4.43) мають поліноміальну структуру відносно змінних z і r , причому кожний такий поліном містить лише члени порядку j .

Вирази для коефіцієнтів матриці A в деяких випадках можуть бути істотно спрощені за рахунок раціонального вибору систем базисних функцій для апроксимації розв'язків $\psi^{(1)}$ і $\psi^{(2)}$ в областях $G^{(1)}$ і $G^{(2)}$ відповідно.

Застосовуючи метод розділення змінних, координатні функції для підобласті $G^{(1)}$ доцільно вибрати у вигляді:

$$W_i^{(1)} = \{ \zeta_i \cosh[\zeta_i(z - h_1)] + \varkappa \sinh[\zeta_i(z - h_1)] \} J_1(\zeta_i r), \quad (4.44)$$

де $J_1(x)$ – функція Бесселя першого роду і першого порядку; ζ_i – i -й корінь рівняння $J_1'(x) = 0$.

Представлена система координатних функцій $\{W_i^{(1)}\}_{i=1}^{\infty}$ заздалегідь задовольняє вихідному рівнянню в області $G^{(1)}$ і граничним умовам для функції $\psi^{(1)}$ на контурах L_0 і L_1 . Крім того, ці функції ортогональні одна до одної з вагою r .

Для підобласті $G^{(2)}$ в якості координатних функцій виберемо власні функції наступної однорідної граничної задачі з параметром в граничній умові:

$$\begin{aligned} M(W_i^{(2)}) &= 0, \\ \left. \frac{\partial W_i^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} \right|_{L^{(2)}} &= 0, \quad \left(\frac{\partial W_i^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} - \omega_i W_i^{(2)} \right) \Big|_{\gamma} = 0, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.45)$$

Гранична задача (4.45) визначає вільні коливання рідини в посудині, що має форму днища розглядуваного резервуара. Всі власні значення ω_i задачі (4.45) дійсні, додатні і мають єдину граничну точку, розташовану на нескінченності. У свою чергу, сукупність власних функцій має властивість повноти

на лінії γ і задовольняє умовам ортогональності [119]:

$$\int_{\gamma} W_n^{(2)} W_m^{(2)} r ds = 0, \quad \int_{\gamma} \frac{\partial W_n^{(2)}}{\partial z} \frac{\partial W_m^{(2)}}{\partial z} r ds = 0, \quad (n \neq m). \quad (4.46)$$

Наближений розв'язок задачі (4.45) можна представити у вигляді

$$W_i^{(2)} = \sum_{k=1}^{K_0} X_k^{(i)} V_k(z, r), \quad (4.47)$$

де $X_k^{(i)}$ — невизначені постійні, а $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$ — система лінійно незалежних частинних розв'язків вихідного рівняння в сферичній системі координат (4.43).

В змінних r і z ці функції мають вигляд [119]:

$$V_1 = r, \quad V_2 = zr, \quad V_3 = z^2 r - \frac{1}{4} r^3. \quad (4.48)$$

Подальше обчислення функцій V_k і їх перших частинних похідних основане на використанні наступних рекурентних формул [119]:

$$V_{k+1} = \frac{[(2k+1)zV_k - (k-1)(z^2 + r^2)V_{k-1}]}{k+2},$$

$$\frac{\partial V_k}{\partial z} = (k-1)V_{k-1}, \quad r \frac{\partial V_k}{\partial r} = kV_k - (k-1)zV_{k-1}.$$

Постійні $X_k^{(i)}$ знаходяться з умов стаціонарності функціоналу (4.27). В результаті визначення векторів $\vec{X}^{(i)} = \{X_1^{(i)}, X_2^{(i)}, \dots, X_{K_0}^{(i)}\}$ зводиться до розв'язання однорідної алгебраїчної системи

$$(\tilde{A} - \omega_i \tilde{B}) \vec{X}^{(i)} = 0, \quad (4.49)$$

де елементи a_{ij} і b_{ij} матриць \tilde{A} і \tilde{B} обчислюються за формулами

$$\alpha_{i,j} = \int_{L^{(2)} \cup \gamma} V_i \frac{\partial V_j}{\partial \nu^{(2)}} r ds, \quad b_{i,j} = \int_{\gamma} V_i V_j r ds.$$

Система базисних функцій $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$ в більшості випадків забезпечує знаходження з досить високою точністю тільки перші три-чотири власні функції і власні значення задачі (4.45). Визначення довільного скінченного числа

функцій $W_i^{(2)}(z, r)$ можна досягти за рахунок розширення класу допустимих функцій такими функціями, які враховували б властивість локалізації вищих власних функцій в околі границі γ області $G^{(2)}$ і їх велику змінність при віддаленні від цієї границі усередину області $G^{(2)}$. В зв'язку з цим, слідуючи роботі [98], отримаємо нову систему базисних функцій $\{\tilde{V}_k\}_{k=1}^{\infty}$, яка має наступну структуру:

$$\begin{aligned} \{\tilde{V}_k\}_{k=1}^{N_0} &= \{V_1, V_2, \dots, V_{K_0}, V_{K_0+1}, V_{K_0+2}, \dots, V_{K_0+i}\}, \\ N_0 &= K_0 + p - p_0 + 1, \end{aligned} \quad (4.50)$$

де перші K_0 координатних функцій обчислювалися за формулами (4.48), тоді як наступні базисні функції мають вигляд

$$\begin{aligned} \{V_{K_0+i}\}_{i=1}^{p-p_0+1} &= \frac{\cosh[\zeta_{q_i}(z + h_2)]}{\zeta_{q_i} J_1(\zeta_{q_i}) \sinh(\zeta_{q_i} h_2)} J_1(\zeta_{q_i} r), \\ q_i &= p_0 + i - 1, \quad (i = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Тут: p — кількість обчислюваних власних функцій задачі (4.45); h_2 — висота днища посудини; p_0 — параметр, який характеризує кількість обчислюваних власних функцій по координатним функціям $\{V_k\}_{k=1}^{K_0}$. Так, якщо за цим базисом з достатньою степінню точності знаходяться перші m власних функцій задачі (4.45), то в формулах (4.50) слід покласти $p_0 = m + 1$. Таким чином, при $p = 10$ і $p_0 = 5$ до системи координатних функцій $\{V_k\}_{k=1}^{K_0}$ слід додати шість базисних функцій $\{V_{K_0+i}\}_{i=1}^6$.

Припускаючи, що функції $W_i^{(2)}$ знайдені, перейдемо до побудови розв'язків даної задачі, представивши функції $\psi^{(1)}(z, r)$ і $\psi^{(2)}(z, r)$ в наступному вигляді:

$$\psi^{(1)}(z, r) = \sum_{j=1}^{m_0} a_j W_j^{(1)}, \quad \psi^{(2)}(z, r) = \sum_{j=1}^{m_0} b_j W_j^{(2)}. \quad (4.51)$$

При вибраних координатних функціях алгебраїчна система (4.40) розпадається на дві системи відносно вектор-стовпців $\vec{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_{m_0}\}$ і

$\vec{b} = \{b_1, b_2, \dots, b_{m_0}\}$:

$$C\vec{a} = 0, \quad C^T\vec{b} = 0. \quad (4.52)$$

При цьому коефіцієнти $c_{i,j}$ несиметричної матриці C мають вигляд:

$$c_{i,j} = \int_{\gamma} \left(W_j^{(1)} \frac{\partial W_i^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} + W_i^{(2)} \frac{\partial W_j^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} \right) r ds, \quad (i, j = 1, 2, \dots, m_0).$$

З урахуванням виразу (4.44) елементи $c_{i,j}$ можна представити таким чином:

$$c_{i,j} = (\zeta_j \cosh \zeta_j h_1 - \varkappa \sinh \zeta_j h_1) \omega_i d_{i,j} - (\varkappa \zeta_j \cosh \zeta_j h_1 - \zeta_j^2 \sinh \zeta_j h_1) d_{i,j},$$

$$d_{i,j} = \int_0^1 (W_i^{(2)} J_1(\zeta_j r))_{z=0} r dr.$$

З умови існування нетривіальних розв'язків рівнянь (4.52) отримуємо характеристичне рівняння для визначення параметра \varkappa

$$\det C = 0. \quad (4.53)$$

Компоненти векторів \vec{a} і \vec{b} визначаються з рівнянь (4.52) з точністю до довільних постійних множників. З огляду на це зв'язок між коефіцієнтами a_i і b_i буде здійснюватися за такими формулами:

$$b_i = \frac{\sum_{j=1}^{m_0} a_j (\zeta_j \cosh \zeta_j h_1 - \varkappa \sinh \zeta_j h_1) d_{i,j}}{\sum_{j=1}^{K_0} \sum_{k=1}^{K_0} X_k^{(i)} X_j^{(i)} \beta_{k,j}}, \quad (i = 1, 2, \dots, m_0)$$

Таким чином, розв'язання вихідної задачі в даному випадку звелось до розв'язання однорідної алгебраїчної системи $C\vec{a} = 0$ порядку m_0 .

4.2.4 Деякі результати розрахунків та їх аналіз

Наведемо деякі результати розрахунків частот і форм власних коливань рідини по запропонованому алгоритму для випадку, коли днищем посудини є

півсфера одиничного радіуса. Нехай ϑ — кут між віссю Oz і радіус-вектором контуру кола; h_c — відстань від центру сфери до вільної поверхні рідини; r_0 — радіус вільної поверхні рідини. Тоді, вибираючи початок системи $Oxyz$ на вільній поверхні рідини, елементи $\alpha_{i,j}$ і $\beta_{i,j}$ матриць \tilde{A} і \tilde{B} алгебраїчної системи (4.49) можна представити у вигляді:

$$\alpha_{i,j} = \int_0^{r_0} \left[\frac{\partial V_i}{\partial z} V_j \right]_{z=0} r dr + \int_{\vartheta_0}^{\pi} \left[r V_j \left(\frac{\partial V_i}{\partial z} \cos \vartheta + \frac{\partial V_i}{\partial r} \sin \vartheta \right) \right]_{z=\cos \vartheta - h_c,} d\vartheta, \quad r=\sin \vartheta$$

$$\beta_{i,j} = \int_0^{r_0} \left[V_i V_j \right]_{z=0} r dr, \quad \vartheta_0 = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{h_c}{r_0}, \quad r_0 = \sqrt{1 - h_c^2}.$$
(4.54)

У таблиці 4.4 наведена збіжність перших п'яти власних значень \varkappa_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) в залежності від числа членів в розкладі (4.51).

Таблиця 4.4

Збіжність частот \varkappa_i в залежності від порядку m_0 алгебраїчної системи (4.52) при

$$h_1 = 0.5 \text{ і } K_0 = 24.$$

m_0	\varkappa_1	\varkappa_2	\varkappa_3	\varkappa_4	\varkappa_5
1	1.7935458	—	—	—	—
2	1.7936587	5.3311629	—	—	—
3	1.7936712	5.3311647	8.5363099	—	—
4	1.7936740	5.3311651	8.5363099	11.706005	—
5	1.7936749	5.3311652	8.5363099	11.706005	14.863589
6	1.7936753	5.3311653	8.5363099	11.706005	14.863589
7	1.7936755	5.3311653	8.5363099	11.706005	14.863589
8	1.7936756	5.3311653	8.5363099	11.706005	14.863589
9	1.7936757	5.3311653	8.5363099	11.706005	14.863589
10	1.7936757	5.3311653	8.5363099	11.706005	14.863589

Таблиця 4.5

Виконання умов спряження на границі γ для першої форми коливань при $h_1 = 0.5$, $K_0 = 24$ в залежності від порядку m_0 алгебраїчної системи (4.52).

r	ψ_1	ψ_2	$\frac{\partial\psi_1}{\partial z}$	$\frac{\partial\psi_2}{\partial z}$
$m_0 = 10$				
0.20	0.13981	0.13979	0.22952	0.22950
0.40	0.26635	0.26634	0.43425	0.43424
0.60	0.36772	0.36772	0.59060	0.59059
0.80	0.43450	0.43451	0.67903	0.67904
1.00	0.45940	0.45958	0.68411	0.68433
$m_0 = 15$				
0.20	0.13981	0.13980	0.22969	0.22968
0.40	0.26634	0.26634	0.43456	0.43456
0.60	0.36772	0.36772	0.59065	0.59065
0.80	0.43451	0.43451	0.67895	0.67895
1.00	0.45944	0.45953	0.68225	0.68234

Дані таблиці 4.4 свідчать про те, що для визначення перших п'яти власних частот коливань рідини з високою степінню точності в розкладах для функцій $\psi^{(1)}$ і $\psi^{(2)}$ необхідно утримувати по п'ять членів. Зміна висоти рідини в циліндричній частині посудини несуттєво впливає на швидкість збіжності послідовних наближень задачі.

Слід зазначити, що елементи $c_{i,j}$ при ($i \neq j$) матриці C алгебраїчної системи (4.52) по абсолютній величині на два порядки менші від діагональних членів $c_{i,i}$. В зв'язку з цим якщо при розв'язанні трансцендентного рівняння (4.40) знехтувати недіагональними членами матриці C , то для i -ої форми коливань рідини можна встановити наближену формулу для частотного параметра \varkappa_i :

$$\varkappa_i = \frac{\zeta_i(\omega_i + \zeta_i \tanh \zeta_i h_1)}{\zeta_i + \omega_i \tanh \zeta_i h_1}. \quad (4.55)$$

Ця формула співпадає з відповідною формулою монографії [119], яка була там отримана при використанні наближених умов спряження на суміжній лінії подобластей $G^{(1)}$ і $G^{(2)}$. Відповідні значення параметрів \varkappa_i , обчислені за формулою (4.55), співпадають в даному випадку з даними таблиці 4.4 аж до чотирьох-п'яти значущих цифр.

У таблиці 4.5 для $h_1 = 0.5$, $K_0 = 24$ наведені значення функцій $\psi^{(1)}(z, r)$ і $\psi^{(2)}(z, r)$, а також їх похідних в напрямку осі Oz , які обчислені на лінії спряження γ при різних значеннях координати r і порядку m_0 алгебраїчної системи (4.52).

Результати розрахунків показують, що запропонований метод розв'язання вихідної задачі забезпечує (на відміну від роботи [119]) поточкову збіжність для розв'язків і їх похідних в напрямку осі Oz на суміжній границі подобластей $G^{(1)}$ і $G^{(2)}$.

Таким чином, запропонований в даній роботі узагальнений функціонал для розв'язання задачі спряження забезпечує виконання з високою степінню точності умов спряження в кожній точці прямої γ . Отримані результати можуть бути використані при дослідженні нелінійних коливань рідини в складених резервуарах [145].

Наприкінці наведемо розв'язання вихідної задачі з позицій запропонованого варіаційного методу для випадку, коли посудина має форму прямого кругового циліндра одиничного радіусу. Для цієї посудини, однорідна крайова задача (4.26) має точний розв'язок, який можна представити в такій формі:

$$\psi_i(z, r) = c_i \cosh[\zeta_i(z + h_2)] J_1(\zeta_i r), \quad \varkappa_i = \zeta_i \tanh[\zeta_i(h_1 + h_2)], \quad (4.56)$$

де c_i — довільні постійні, h_2 — висота прямокутної області $G^{(2)}$.

Систему базисних функцій $W_i^{(1)}(z, r)$ для області $G^{(1)}$ виберемо в формі (4.44), тоді як для області $G^{(2)}$ виберемо базисні функції $W_i^{(2)}(z, r)$ в насту-

пному вигляді:

$$W_i^{(2)} = \frac{\zeta_i}{\cosh[\zeta_i(h_1 + h_2)]} \cosh[\zeta_i(z + h_2)] J_1(\zeta_i r) \quad (4.57)$$

Кожна з цих функцій задовольняє вихідному рівнянню і граничній умові

$$\left. \frac{\partial W_i^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} \right|_{L^{(2)}} = 0.$$

В силу ортогональності базисних функцій $W_i^{(1)}$ і $W_i^{(2)}$ і їх похідних в напрямку осі Oz на лінії γ , алгебраїчна система (4.52) в даному випадку зведеться до алгебраїчної системи відносно коефіцієнтів a_i з діагональною матрицею коефіцієнтів. З розв'язання цієї алгебраїчної системи власні функції і власні значення спектральної задачі (4.26) набудуть вигляду:

$$\begin{aligned} \psi_i^{(1)} &= a_i \{ \zeta_i \cosh[\zeta_i(z - h_1)] + \varkappa_i \sinh[\zeta_i(z - h_1)] \} J_1(\zeta_i r), \\ \psi_i^{(2)} &= a_i \frac{\zeta_i}{\cosh[\zeta_i(h_1 + h_2)]} \cosh[\zeta_i(z + h_2)] J_1(\zeta_i r), \\ \varkappa_i &= \zeta_i \tanh[\zeta_i(h_1 + h_2)], \quad (i = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (4.58)$$

Порівнюючи вирази (4.58) і (4.56) приходимо до висновку, що в даному випадку узагальнене варіаційне формулювання задачі спряження призводить до розв'язку, який співпадає з точним розв'язком вихідної задачі.

Таким чином з позицій методу декомпозиції запропоновано наближений метод розв'язання двовимірної спектральної задачі про вільні коливання ідеальної рідини в ємностях складної геометрії.

Метод базується на формулюванні узагальненого функціонала, для якого умови спряження на суміжній границі штучно введених підобластей відносяться до числа його природних граничних умов. Це дозволяє незалежно вибирати системи базисних функцій в цих областях, що в багатьох випадках спрощує отримання наближеного розв'язку у вихідній області.

На конкретному прикладі показана ефективність запропонованого підходу розв'язання даної задачі шляхом порівняння отриманих результатів з

існуючими наближеними і точними розв'язками вихідної задачі. Чисельна реалізація запропонованого алгоритму вказує на той факт, що в рамках цього підходу послідовні наближення методу Трефтца мають збіжність в рівномірній метриці на суміжній лінії штучно введених подобластей як для самих розв'язків, так і для перших похідних по поздовжній координаті.

РОЗДІЛ 5

КОЛИВАННЯ ТОНКОСТІННИХ КОНСТРУКЦІЙ, ЩО МІСТЯТЬ РЕЗЕРВУАРИ, ЧАСТКОВО ЗАПОВНЕНІ РІДИНОЮ

В даному розділі наведені дослідження поперечних коливань вертикально розміщеного пружного стержня, який несе на вільному кінці резервуар з рідиною, а також тонкостінного стержня з приєднаним до нього в деякому перерізі резервуара в формі тіла обертання, який частково заповнений рідиною.

Використовуючи основні положення лінійної теорії руху твердих тіл з порожнинами, частково заповненими рідиною та лінійної теорії пружних стержнів побудовані загальні математичні моделі динаміки розглядуваних механічних систем в припущенні, що до них прикладені зовнішні зосереджені та розподілені навантаження. Отримані граничні задачі для рівнянь в частинних похідних далі зводяться до системи звичайних диференціальних рівнянь з незалежною змінною по часу застосовуючи метод Бубнова-Гальоркіна. Ці системи рівнянь набувають найбільш простого вигляду якщо в якості базисних функцій при апроксимації шуканих розв'язків взяти власні форми коливань стержнів з приєднаними до них резервуарів з рідиною.

Наближені розв'язки задач про власні коливання системи «стержень-резервуар-рідина» пропонується будувати на основі варіаційних методів. При цьому в задачі про власні коливання стержня з підвісним резервуаром у зв'язку з наявністю розривних граничних умов для побудови розв'язків використовується метод Рітца в поєднанні з методом декомпозиції області визначення шуканих розв'язків, який наведено в розділі 4. Запропонований метод розв'язання спектральних задач може бути застосований для стержнів осесиметричної форми зі змінними пружно-масовими характеристиками.

На основі отриманих результатів розв'язані конкретні задачі про вимушені коливання розглядуваних механічних систем, що знаходяться під дією

довільних сил та моментів, а також при заданому гармонічному збуренні стержнів.

Для резервуара, що має форму кругового циліндра, проаналізована ефективність запропонованих алгоритмів побудови розв'язків розглядуваних задач та наведені деякі результати розрахунків частот та форм вільних та вимушених коливань.

5.1 Поперечні коливання пружного стержня, що несе на вільному кінці резервуар з рідиною

5.1.1 Визначення силової дії рідини на резервуар при заданому його русі

Нехай маємо абсолютно жорсткий резервуар, поки довільної конфігурації, який частково заповнений ідеальною і нестисливою рідиною. Передбачається, що резервуар здійснює заданий рух в просторі і потрібно визначити рух рідини і які виникають при цьому сили і моменти, діючі з боку рідини на резервуар. При розгляді цієї задачі будемо користуватися основними положеннями теорії руху тіл, що містять рідину, викладеними в роботах [68, 70, 73, 78].

Рух твердого тіла і рідини будемо розглядати в полі сил тяжіння з вектором прискорення \vec{g} . Введемо нерухому прямокутну систему координат $O^*x^*y^*z^*$, вісь O^*z^* якої паралельна вектору \vec{g} і має протилежний йому напрям. Зв'язану з тілом систему координат $Oxyz$ розташуємо так, щоб вона в початковий момент часу t збігалася з системою координат $O^*x^*y^*z^*$. Орти осей Ox , Oy і Oz будемо позначати через \vec{i}_1 , \vec{i}_2 і \vec{i}_3 . Відповідні орти нерухомої системи координат $O^*x^*y^*z^*$ будемо позначати зірочками. При розгляданні руху даної механічної системи будемо припускати, що переміщення, швидкості і прискорення частинок рідини і стінок резервуара настільки малі, що добутками, квадратами і більш високими їх степенями можна знехтувати в порівнянні зі значеннями будь-якої з цих величин. Введена гіпотеза малості

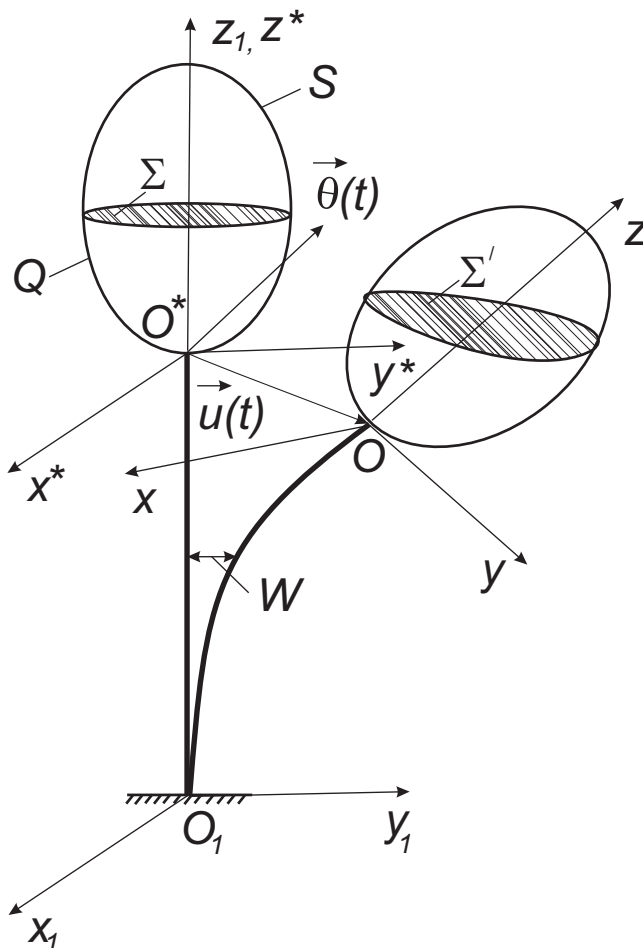


Рис. 5.1. Загальний вигляд ррозглядуваної системи.

параметрів руху системи дозволяє істотно спростити постановку даної задачі, зберігши при цьому її практичне значення.

При обговорених умовах, якщо початковий рух рідини є безвихровим, в силу теореми Лагранжа, властивість потенціальності руху буде зберігатися увесь час руху.

Припустимо тепер, що резервуар здійснює відносно системи координат $O^*x^*y^*z^*$ деякий заданий рух. Цей рух резервуара можна характеризувати вектором малого зміщення $\vec{u}(t)$ точки O відносно точки O^* і вектором малого повороту $\vec{\theta}(t)$ рухомої системи координат $Oxyz$ відносно $O^*x^*y^*z^*$ рис. 5.1.

Для описання руху рідини в резервуарі скористаємося потенціалом зміщень $\chi(x, y, z, t)$, який пов'язаний з потенціалом швидкостей $\chi'(x, y, z, t)$ спів-

відношенням

$$\chi' = \frac{\partial \chi}{\partial t}. \quad (5.1)$$

У випадку малих рухів рідини для потенціалу зміщень частинок рідини справедливі ті ж співвідношення, що і для потенціалу швидкостей:

$$\Delta \chi = 0, \quad \vec{w} = \nabla \chi, \quad (5.2)$$

де \vec{w} – вектор зміщень частинок рідини; Δ и ∇ оператори Лапласа і Гамільтона відповідно.

Вектор зміщення \vec{w} грає тут ту ж роль, що і вектор швидкості частинки рідини при описанні картини руху рідини за допомогою потенціалу швидкостей.

Сформулюємо тепер граничні умови, яким повинна задовольняти гармонічна функція χ . Позначимо через Q фіксовану область, яка обмежена змочуваною поверхнею порожнини S і вільною поверхнею рідини Σ в її незбуреному стані. В силу прийнятих припущень про малість рухів частинок рідини і стінок резервуара, граничні умови можна віднести до поверхонь Σ і S . На змочуваній поверхні резервуара нормальна складова зміщення рідини дорівнює відповідній складовій зміщення стінки резервуара. На вільній поверхні рідини нормальна складова її зміщення ще залежить і від зсуву $\xi(x, y, t)$ вільної поверхні рідини в напрямку осі Oz за рахунок її хвильових рухів.

З огляду на сказане, кінематичним граничним умовам для потенціалу зміщення рідини $\chi(x, y, z, t)$ можна придати наступну форму:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \chi}{\partial \nu} \right|_S &= \vec{u} \cdot \vec{\nu} + (\vec{\theta} \times \vec{r}) \cdot \vec{\nu} = \vec{u} \cdot \vec{\nu} + \vec{\theta} \cdot (\vec{r} \times \vec{\nu}), \\ \left. \frac{\partial \chi}{\partial \nu} \right|_\Sigma &= \vec{u} \cdot \vec{\nu} + \vec{\theta} \cdot (\vec{r} \times \vec{\nu}) + \xi(x, y, t), \end{aligned} \quad (5.3)$$

де $\vec{\nu}$ – орт зовнішньої нормалі до поверхні S або Σ ; \vec{r} – радіус-вектор будь-якої точки поверхні S або Σ відносно точки O .

Динамічна гранична умова на вільній поверхні рідини встановлюється в припущенні, що тиск на вільній поверхні дорівнює постійній величині p_0 .

Тиск в довільній точці рідини $p(x, y, z, t)$ можна визначити з лінеаризованого інтеграла Лагранжа-Коші [57]:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + U + \frac{p}{\rho} = f(t). \quad (5.4)$$

Тут ρ — масова густина рідини; $F(t)$ — довільна функція часу; U — потенціал сил тяжіння, який можна представити у вигляді

$$U = -\vec{g} \cdot \vec{r}^*, \quad \vec{r}^* = \vec{u} + \vec{r}, \quad (5.5)$$

де \vec{r}^* — радіус-вектор точки рідини відносно початку O^* абсолютної системи координат; \vec{r} — радіус вектор цієї ж точки відносно точки O .

Таким чином, динамічну граничну умову на вільній поверхні рідини можна записати у такому вигляді:

$$\left[\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \vec{g} \cdot \vec{r} + g\xi(x, y, t) \right]_{\Sigma} = f(t) - \frac{p_0}{\rho} + \vec{g} \cdot \vec{u}, \quad (5.6)$$

де g — модуль вектора \vec{g} .

При виведенні умови (5.6) було враховано, що радіус-вектор точки збуреної вільної поверхні Σ' виражається через радіус-вектор відповідної точки незбуреної поверхні Σ за формулою

$$\vec{r}(x, y, z, t)|_{\Sigma'} = \vec{r}(x, y, z)|_{\Sigma} + \xi(x, y, t)\vec{i}_z. \quad (5.7)$$

Зауважимо, що права частина рівняння (5.6) не залежить від координат на вільній поверхні і залежить від часу t .

Кінематичні граничні умови (5.3) дозволяють представити потенціал зміщень рідини в наступному вигляді:

$$\chi(x, y, z, t) = \vec{u} \cdot \vec{\Phi} + \vec{\theta} \cdot \vec{\Psi} + \varphi. \quad (5.8)$$

Тут $\vec{\Phi}(x, y, z)$, $\vec{\Psi}(x, y, z)$ і $\varphi(x, y, z, t)$ гармонічні функції, що задовольняють граничним умовам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \nu} \Big|_{\Sigma \cup S} &= \vec{\nu}; & \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial \nu} \Big|_{\Sigma \cup S} &= \vec{r} \times \vec{\nu}; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \Big|_S &= 0; & \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \Big|_{\Sigma} &= \xi(x, y, t). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Розв'язки для функцій Φ_1 , Φ_2 і Φ_3 можна виписати в явному вигляді

$$\Phi_1 = x; \quad \Phi_2 = y; \quad \Phi_3 = z. \quad (5.10)$$

На функції $\Psi_i(x, y, z)$, ($i = 1, 2, 3$) і $\varphi(x, y, z, t)$ повинні бути накладені додаткові обмеження

$$\int_{\Sigma \cup S} \frac{\partial \Psi_i}{\partial \nu} dS = 0, \quad \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dS = 0 \quad (5.11)$$

що випливають з умов розв'язності крайових задач Неймана для рівняння Лапласа. У справедливості виконання першої умови можна переконатися, скориставшись формулами Гауса - Остроградського.

Гармонічні векторні функції $\vec{\Phi}$ і $\vec{\Psi}$ пов'язані з описанням поведінки рідини при поступальних і обертальних відносно точки O рухах резервуара для випадків, коли вільна поверхня рідини залишається незбуреною.

Функцію $\varphi(x, y, z, t)$, що характеризує хвильові рухи рідини, представимо у вигляді наступного розкладу:

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(t) \varphi_n(x, y, z) \quad (5.12)$$

Тут $\varphi_n(x, y, z)$ – власні функції спектральної задачі з параметром κ_n в граничній умові:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_n = 0, \quad (x, y, z) \in Q, \quad \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} \Big|_S = 0, \\ \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} - \kappa_n \varphi_n \right) \Big|_{\Sigma} = 0, \quad \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} dS = 0. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Крайова задача (5.13) описує вільні коливання рідини в нерухомій посудині. При цьому квадрат частоти σ_n^2 n -ої форми власних коливань рідини пов'язаний з частотним параметром κ_n співвідношенням

$$\sigma_n^2 = g \kappa_n. \quad (5.14)$$

Відомо, що сукупність власних функцій φ_n володіє властивістю повноти

в області Σ і задовольняє наступним співвідношенням ортогональності [119]:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \varphi_n dS &= 0; & \int_{\Sigma} \varphi_n \varphi_m dS &= 0; \\ \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} \frac{\partial \varphi_m}{\partial \nu} dS &= 0, & (m \neq n). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Таким чином, остаточний вираз для потенціалу зміщень рідини можна представити у вигляді

$$\chi = \vec{u} \cdot \vec{r}(x, y, z) + \vec{\theta} \cdot \vec{\Psi}(x, y, z) + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i(t) \varphi_i(x, y, z). \quad (5.16)$$

Для потенціалу $\chi(x, y, z, t)$ залишилася невиконаною динамічна умова на вільній поверхні рідини. Для цього підставимо вираз (5.16) в граничну умову (5.6) і потім помножимо його на $\rho \partial \varphi_n / \partial \nu$ і проінтегруємо результат по незбуреній поверхні Σ . Тоді з урахуванням умов ортогональності (5.15) отримаємо наступну систему диференціальних рівнянь відносно узагальнених координат $\beta_n(t)$:

$$\mu_n(\ddot{\beta}_n + \sigma_n^2 \beta_n) + \ddot{\vec{u}} \cdot \vec{\lambda}_n + \ddot{\vec{\theta}} \cdot \vec{\lambda}_{0n} - \vec{g} \cdot \vec{\lambda}_n = 0, \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (5.17)$$

де коефіцієнти цих рівнянь визначаються за формулами

$$\begin{aligned} \mu_n &= \rho \int_{\Sigma} \varphi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} dS, & \vec{\lambda}_n &= \rho \int_{\Sigma} \vec{r} \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} dS, \\ \vec{\lambda}_{0n} &= \rho \int_{\Sigma} \vec{\Psi} \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} dS. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Слід зауважити, що третій компонент вектора $\vec{\lambda}_n$ дорівнює нулю.

Знаходження цих коефіцієнтів, які в подальшому будемо називати гідродинамічними коефіцієнтами, пов'язане з розв'язанням неоднорідної крайової задачі для потенціалу Стокса - Жуковського $\vec{\Omega}$ і однорідної спектральної задачі (5.13) з параметром в граничній умові.

Інтегрування рівнянь (5.17) з урахуванням задання форми вільної поверхні і розподілу поля швидкостей на ній в початковий момент часу дозволяє

визначити рух рідини в резервуарі при заданих його поступальних і кутових прискореннях.

Отримані результати дозволяють перейти до обчислення сил і моментів, що діють на резервуар з боку рідини при заданому його русі. Ці сили можна розділити на дві групи. До першої групи віднесемо сили $\vec{P}^{(s)}$ і моменти $\vec{M}_0^{(s)}$ відносно точки O , які обумовлені масовими силами і не пов'язані з прискореннями, що виникають при русі системи координат $Oxyz$ відносно $O^*x^*y^*z^*$. Сили $\vec{P}^{(d)}$ і моменти $\vec{M}_0^{(d)}$ відносно точки O , які діють на резервуар з боку рідини за рахунок її рухливості в ємності, віднесемо до другої групи.

Вектори статичних сил і моментів $\vec{P}^{(s)}$ і $\vec{M}_0^{(s)}$ можна визначити за формулами

$$\vec{P}^{(s)} = m_w \vec{g}, \quad \vec{M}_0^{(s)} = \vec{L} \times \vec{g}, \quad \vec{L} = \rho \int_{Q'} \vec{r} dQ', \quad (5.19)$$

де m_w - маса рідини; Q' - область зайнята рідиною в її збуреному стані.

Для обчислення вектора \vec{L} область Q' можна представити у вигляді суми області Q , займаної рідиною в її незбуреному стані і області збуреного шару рідини Q^* . Елементарний об'єм області Q^* можна обчислити як об'єм циліндра з площею основи $d\Sigma$ і висотою $\xi(x, y, t)$. При цьому будемо мати

$$dQ^* = \xi(x, y, t) d\Sigma = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i(t) \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} d\Sigma.$$

З урахуванням цього виразу, з точністю до величин першого порядку малості, вектор \vec{L} можна представити в наступному вигляді:

$$\vec{L} = \rho \int_Q \vec{r} dQ + \rho \int_{Q^*} \vec{r} dQ^* = m_w \vec{r}_{c_w} + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i(t) \vec{\lambda}_i, \quad (5.20)$$

де $\vec{r}_{c_w} = \frac{\rho}{m_w} \int_Q \vec{r} dQ$ - радіус-вектор відносно точки O центру мас затверділої рідини.

Таким чином вектор $\vec{M}_0^{(s)}$ визначатиметься за формулою

$$\vec{M}_0^{(s)} = m_w(\vec{r}_{c_w} \times \vec{g}) + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i(t)(\vec{\lambda}_i \times \vec{g}). \quad (5.21)$$

Перейдемо до визначення векторів $\vec{P}^{(d)}$ і $\vec{M}_0^{(d)}$. Ці динамічні складові вектора сил і моментів, що діють на резервуар з боку рідини, можна визначити на основі теорем про зміну кількості руху рідини в області Q . Головний вектор $\vec{P}^{(d)}$ і головний момент $\vec{M}_0^{(d)}$ з точністю до членів першого порядку малості мають вигляд [57]:

$$\vec{P}^{(d)} = -\frac{\partial \vec{K}}{\partial t}, \quad \vec{M}_0^{(d)} = -\frac{\partial \vec{G}_0}{\partial t}. \quad (5.22)$$

Вхідні в ці вирази вектори кількості руху \vec{K} і кінетичного моменту \vec{G}_0 відносно точки O обчислюються за формулами

$$\begin{aligned} \vec{K} &= \rho \int_Q \vec{V} dQ = \rho \int_Q \frac{\partial}{\partial t} \nabla \chi dQ, \\ \vec{G}_0 &= \rho \int_Q (\vec{r} \times \vec{V}) dQ = \rho \int_Q (\vec{r} \times \nabla) \frac{\partial \chi}{\partial t} dQ, \end{aligned} \quad (5.23)$$

де \vec{V} – вектор швидкості частинок рідини.

Підставляючи в вирази (5.23) потенціал зміщень (5.16), отримаємо

$$\frac{\partial \vec{K}}{\partial t} = \rho \int_Q \nabla(\ddot{u} \cdot \vec{r} + \ddot{\theta} \cdot \vec{\Psi} + \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\beta}_i \varphi_i) dQ, \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{G}_0}{\partial t} &= \rho \int_Q [\vec{r} \times \nabla(\ddot{u} \cdot \vec{r}) + \vec{r} \times \nabla(\ddot{\theta} \cdot \vec{\Psi}) + \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\beta}_i \cdot (\vec{r} \times \nabla \varphi_i)] dQ. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Перетворимо вирази (5.24) і (5.25) до більш зручної форми, використовуючи гармонічність функцій \vec{r} , $\vec{\Psi}$ і φ , загальну формулу Гауса - Остроградського

$$\int_Q \Lambda(\nabla) dQ = \int_{S \cup \Sigma} \Lambda(\vec{\nu}) dS$$

і формулу Гріна

$$\int_Q (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dQ = \int_{S \cup \Sigma} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial \nu} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right) dS,$$

де Δ – лінійний оператор; φ і ψ – неперервні разом з частинними похідними до другого порядку скалярні функції.

Обчислимо спочатку складові виразу (5.24):

$$\begin{aligned} \rho \int_Q \nabla(\ddot{u} \cdot \vec{r}) dQ &= \ddot{u} \rho \int_Q dQ = m_w \ddot{u}; \\ \rho \int_Q \nabla(\ddot{\theta} \cdot \vec{\Psi}) dQ &= \rho \int_{S \cup \Sigma} (\ddot{\theta} \cdot \vec{\Psi}) \vec{\nu} dS = \rho \int_{S \cup \Sigma} (\ddot{\theta} \cdot \vec{\Psi}) \frac{\partial \vec{r}}{\partial \nu} dS = \rho \int_{S \cup \Sigma} \left(\ddot{\theta} \cdot \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial \nu} \right) \vec{r} dS = \\ &= \rho \int_{S \cup \Sigma} [\ddot{\theta} \cdot (\vec{r} \times \vec{\nu})] \vec{r} dQ = \rho \int_Q (\ddot{\theta} \times \vec{r}) dQ = m_w (\ddot{\theta} \times \vec{r}_{c_w}); \\ \rho \int_Q \nabla \varphi_i dQ &= \rho \int_{S \cup \Sigma} \varphi_i \vec{\nu} dS = \rho \int_{S \cup \Sigma} \varphi_i \frac{\partial \vec{r}}{\partial \nu} dS = \rho \int_{S \cup \Sigma} \vec{r} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \nu} dS = \rho \int_{\Sigma} \vec{r} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} d\Sigma = \vec{\lambda}_i. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Збираючи отримані результати, головний вектор гідродинамічних сил, що діють на резервуар, матиме такий вигляд:

$$\vec{P}^{(d)} = -m_w \ddot{u} - m_w (\ddot{\theta} \times \vec{r}_{c_w}) - \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \vec{\lambda}_i. \quad (5.27)$$

Тепер перейдемо до обчислення складових виразу (5.25):

$$\begin{aligned} \rho \int_Q [\vec{r} \times \nabla(\ddot{u} \cdot \vec{r})] dQ &= \rho \int_Q (\vec{r} \times \ddot{u}) dQ = m_w (\vec{r}_{c_w} \times \ddot{u}); \\ \rho \int_Q [\vec{r} \times \nabla(\ddot{\theta} \cdot \vec{\Psi})] dQ &= \rho \int_{S \cup \Sigma} (\vec{r} \times \vec{\nu}) (\ddot{\theta} \cdot \vec{\Psi}) dS = \\ &= \rho \int_{S \cup \Sigma} (\ddot{\theta} \cdot \vec{\Psi}) \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial \nu} dS = \rho \sum_{i=1}^3 \ddot{\theta}_i \sum_{j=1}^3 \vec{i}_j \int_{S \cup \Sigma} \frac{\partial \Psi_j}{\partial \nu} \Psi_i dS = I^{(w)} \cdot \ddot{\theta}; \\ \rho \int_Q (\vec{r} \times \nabla \varphi_i) dQ &= \rho \int_{S \cup \Sigma} (\vec{r} \times \vec{\nu}) \varphi_i dS = \rho \int_{S \cup \Sigma} \varphi_i \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial \nu} dS = \rho \int_{\Sigma} \vec{\Psi} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \nu} dS = \vec{\lambda}_{0i}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

де $I^{(w)}$ – тензор інерції рідини з компонентами

$$I_{ij}^{(w)} = \int_{S \cup \Sigma} \frac{\partial \Psi_j}{\partial \nu} \Psi_i dS. \quad (5.29)$$

Важливо відзначити симетрію тензора $I^{(w)}$, що витікає з формули Гріна для гармонічних функцій.

З огляду на формули (5.21), (5.22), (5.25) і (5.28), головний момент $\vec{M}_0^{(w)}$ відносно точки O сил тисків, що діють з боку рідини на резервуар, набуде такого вигляду:

$$\begin{aligned} \vec{M}_0^{(w)} &= \vec{M}_0^{(d)} + \vec{M}_0^{(s)} = -m_w(\vec{r}_{c_w} \times \ddot{\vec{u}}) - I^{(w)} \cdot \ddot{\vec{\theta}} - \\ &- \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\beta}_i \vec{\lambda}_{0i} + m_w(\vec{r}_{c_w} \times \vec{g}) + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i (\vec{\lambda}_i \times \vec{g}). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Таким чином, вектора $\vec{P}^{(d)}$ і \vec{M}_0 , що характеризують вплив рідини на рухомий резервуар, виражаються через гідродинамічні коефіцієнти (5.14), (5.18) і (5.29), параметри руху резервуара і узагальнені координати $\beta_i(t)$, що характеризують хвильові рухи рідини.

Для випадку, коли резервуар має осесиметричну форму, обмежимося розглядом поперечного руху резервуара в площині $O^*x^*y^*z^*$. Цей напрямок вибрано для визначеності, оскільки для даного резервуара всі поперечні напрямки рівноцінні. В цьому випадку вектора \vec{u} , $\vec{\theta}$ і \vec{g} матимуть вигляд

$$\begin{aligned} \vec{u} &= u_2 \vec{i}_2; \quad \vec{\theta} = \vartheta_1 \vec{i}_1; \\ \vec{g} &= -g \vec{i}_3^* = -g \vartheta_1 \vec{i}_2 - g \vec{i}_3. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Випишемо проєкції векторів $\vec{P}^{(w)} = \vec{P}^{(s)} + \vec{P}^{(d)}$ і $\vec{M}_0^{(w)}$ на осі O^*y^* і Ox відповідно. Опустивши несуттєві тепер індекси при компонентах векторів, отримаємо такі вирази для згаданих проєкцій $\vec{P}_{O^*y^*}^{(w)}$ і $\vec{M}_{0x}^{(w)}$:

$$\begin{aligned} \vec{P}_{O^*y^*}^{(w)} &= -m_w \ddot{u} + m_w z_{c_w} \ddot{\vartheta} - \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\beta}_i \lambda_i, \\ \vec{M}_{0x}^{(w)} &= m_w z_{c_w} \ddot{u} - I^{(w)} \ddot{\vartheta} - \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\beta}_i \lambda_{0i} + m_w z_{c_w} g \vartheta - \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i g \lambda_i. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Тут гідродинамічні коефіцієнти набувають вигляду

$$\lambda_i = \rho \int_{\Sigma} y \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} dS, \quad \lambda_{0i} = \rho \int_{\Sigma} \Psi \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} dS, \quad I^{(w)} = \rho \int_{S \cup \Sigma} \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} dS, \quad (5.33)$$

де потенціал Стокса - Жуковського Ψ визначається з розв'язання наступної неоднорідною крайової задачі Неймана:

$$\begin{aligned} \Delta \Psi &= 0, \quad (x, y, z) \in Q, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} \Big|_{S \cup \Sigma} &= y \cos(\nu, z) - z \cos(\nu, y), \end{aligned} \quad (5.34)$$

а функції φ_i є власними функціями спектральної задачі (5.13), які мають властивість симетричності відносно площини Oyz і несиметричності відносно площини Oxz .

Зауважимо, що останні два доданки у виразі для $\vec{M}_{0x}^{(w)}$ представляють собою моменти рідини, які обумовлені масовими силами за рахунок повороту резервуара на малий кут ϑ і за рахунок деформації вільної поверхні рідини.

5.1.2 Математична модель поперечних рухів резервуара з рідиною, закріпленого на пружній опорі

Розглянемо частково заповнений рідиною резервуар в формі тіла обертання, який жорстко прикріплений до верхнього краю вертикально розташованої пружної опори, яка має осьову симетрію. При цьому передбачається, що осі симетрії резервуара і опори збігаються, а нижній край опори жорстко закріплений. Перейдемо тепер до виведення рівнянь поперечних коливань розглядуваної механічної системи під впливом зовнішніх розподілених і зосереджених навантажень, прикладених до резервуару і пружної опори.

У більшості практично важливих випадків пружна опора являє собою тонкостінну оболонку обертання, яка підкріплена рівномірно розташованими на її внутрішній поверхні стрінгерами і шпангоутами. Рівняння коливань такої оболонки можуть бути істотно спрощені для випадку, коли поздовжні і поперечні ребра розташовані досить часто. Тоді, в результаті усереднення

жорсткісних і масових характеристик підкріплена оболонка замінюється деякою конструктивно ортотропною оболонкою, жорсткісні і масові характеристики якої будуть залежати від властивостей елементів підкріплюючого набору. З іншого боку, якщо довжина такої оболонки значно більше характерного лінійного розміру її поперечного перерізу, то можна припустити, що поперечні перерізи оболонки при її згинних коливаннях залишаються плоскими і перпендикулярними до деформованої осі. В цьому випадку вихідну оболонку можна ототожнити з тонкостінним пружним стержнем зі змінними по довжині площею поперечного перерізу F , екваторіальним моментом інерції J , модулем пружності при розтягуванні E і масової густини матеріалу ρ_1 .

Межі застосування такої спрощеної постановки задачі на прикладі вільних коливань ізотропної циліндричної оболонки були встановлені в роботі [121]. Це ж питання в рамках різних теорій стержнів обговорювалося вище в розділі 2, де розглядалися власні коливання циліндричної оболонки з приєднаним до одного з її торців абсолютно жорстким тілом скінченних розмірів.

Для описання коливань стержня введемо в розгляд ще одну систему координат $O_1x_1y_1z_1$ з початком, пов'язаним із закріпленням краєм стержня. Вісь O_1z_1 сумістимо з віссю симетрії системи, а осі Ox_1 і Oy_1 розташуємо паралельно осям O^*x^* і O^*y^* відповідно.

Припустимо, що до резервуару прикладена сумарна сила $P_{O^*y^*}$, діюча в напрямку осі O^*y^* і сумарний момент M_{Ox} системи зовнішніх сил відносно осі Ox . Будемо також вважати, що на стержень діє змінне поперечне навантаження $q(z_1, t)$ в напрямку осі O_1y_1 . Крім цього, стержень піддається дії стискаючої осьової сили, обумовленої вагою резервуара з рідиною і власною вагою стержня. Складемо рівняння зв'язаних коливань в поперечній площині $O_1y_1z_1$ стержня і прикріпленого до нього резервуара з рідиною.

Рівняння руху рідини в резервуарі при його поступальних і кутових переміщеннях були отримані в попередньому розділі. Перейдемо тепер до виведення рівнянь руху стержня в площині $O_1y_1z_1$, включивши в зовнішнє на-

вантаження на нього сили і моменти, що діють з боку резервуара з рідиною. При виведенні цих рівнянь будемо користуватися варіаційним принципом можливих переміщень, який в поєднанні з принципом Д'Аламбера може бути використаний і в динамічних задачах.

Позначимо через $w(z_1, t)$ прогин нейтральної лінії стержня в перерізі z_1 в напрямку осі O_1y_1 під впливом прикладених сил, а через l — довжину стержня. В даному випадку руху системи компоненти векторів $\vec{u}(t)$ і $\vec{\vartheta}(t)$, що характеризують рух резервуара, будуть мати такий вигляд:

$$\vec{u}(t) = \{0, u, 0\}, \quad \vec{\vartheta}(t) = \{\vartheta, 0, 0\}. \quad (5.35)$$

Переміщення резервуара в напрямку осі Oy і кут його повороту відносно осі Ox можна виразити через функцію $w(z_1, t)$ і її похідну в перерізі $z_1 = l$:

$$u = w(l, t), \quad \vartheta = -\left. \frac{\partial w}{\partial z_1} \right|_{z_1=l}. \quad (5.36)$$

Якщо вихідна форма стержня є рівноважною, то згідно принципу можливих переміщень має виконуватися рівність

$$\delta W = \sum_{i=1}^5 \delta A_i, \quad (5.37)$$

де $\delta W = \int_0^l EJ \frac{\partial^2 w}{\partial z_1^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial z_1^2} dz_1$ — варіація потенціальної енергії деформації згину стержня; $\sum_{i=1}^5 \delta A_i$ — сума робіт зовнішніх сил на можливих переміщеннях δw стержня.

Робота δA_1 сил інерції і масових сил, що діють на корпус резервуара на можливих його переміщеннях може бути обчислена в такий спосіб:

$$\delta A_1 = - \int_{Q_0} \rho_0 \ddot{\vec{u}}^* \cdot \delta \vec{u}^* dQ + \int_{Q_0} \rho_0 (\vec{r} \times \vec{g}) dQ, \quad (5.38)$$

де двокрапка означає дворазове диференціювання за часом t ; ρ_0 — масова густина матеріалу, з якого виготовлений резервуар; Q_0 — об'єм резервуара; $\vec{u}^* = \vec{u} + (\vec{\vartheta} \times \vec{r})$.

Після обчислення об'ємних інтегралів в (5.38), з урахуванням формул (5.31) і (5.35), вираз для δA_1 набуде вигляду

$$\delta A_1 = -I^{(0)}\ddot{\vartheta}\delta\vartheta + m_0 z_{c_0}(\ddot{\vartheta}\delta u + \ddot{u}\delta\vartheta) - m_0\ddot{u}\delta u + g m_0 z_{c_0}\vartheta\delta\vartheta. \quad (5.39)$$

Тут $I^{(0)} = \rho \int_{Q_0} (y^2 + z^2) dQ$ — момент інерції корпусу резервуара відносно осі Ox ; M_0 і z_{c_0} — маса резервуара і координата його центра ваги на осі Oz .

Робота δA_2 сил інерції стержня і розподіленого навантаження $q(z_1, t)$ на його можливому переміщенні δw може бути представлена виразом

$$\delta A_2 = - \int_0^l \rho_1 F \ddot{w} \delta w dz_1 + \int_0^l q(z_1, t) \delta w dz_1, \quad (5.40)$$

де ρ_1 — масова густина матеріалу стержня.

Варіація роботи δA_3 стискаючої сили $N(z_1)$ може бути обчислена за формулою

$$\delta A_3 = \int_0^l N(z) \frac{\partial w}{\partial z_1} \frac{\partial \delta w_1}{\partial z_1} dz_1. \quad (5.41)$$

Тут сила $N(z)$, що не міняє свого напрямку і своєї величини в процесі коливання системи, має такий вигляд:

$$N(z_1) = mg + \rho_1 F g (l - z_1), \quad (5.42)$$

де $m = m_0 + m_w$ — маса резервуара з рідиною.

Варіація роботи δA_4 сумарних зовнішніх сил $P_{O^*y^*}$ і моментів M_{Ox} відносно осі Ox , прикладених до резервуару, визначається виразом

$$\delta A_4 = P_{O^*y^*} \delta u + M_{Ox} \delta \vartheta. \quad (5.43)$$

С урахуванням формул (5.32) варіація роботи δA_5 сил, діючих на резервуар з боку рідин, буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} \delta A_5 = & (-m_w \ddot{u} + m_w z_{c_w} \ddot{\vartheta} - \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\beta}_i \lambda_i) \delta u + (m_w z_{c_w} \ddot{u} - I^{(w)} \ddot{\vartheta} - \\ & - \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\beta}_i \lambda_{0i} + g m_w z_{c_w} \vartheta - g \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \lambda_i) \delta \vartheta. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Збираючи отримані результати разом, варіаційне рівняння (5.37) з урахуванням кінематичних співвідношень (5.36) можна представити в наступній формі:

$$\begin{aligned}
& \int_0^l \left[EJ \frac{\partial^2 w}{\partial z_1^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial z_1^2} - N(z) \frac{\partial w}{\partial z_1} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} + \rho_1 F \ddot{w} \delta w - q(z_1, t) \delta w \right] dz_1 + \\
& + \left[I \frac{\partial \ddot{w}}{\partial z_1} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} + m \ddot{w} \delta w + m z_c \left(\ddot{w} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} + \frac{\partial \ddot{w}}{\partial z_1} \delta w \right) + \right. \\
& + \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\beta}_i \left(\lambda_i \delta w - \lambda_{0i} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} \right) - g m z_c \frac{\partial w}{\partial z_1} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} - g \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \lambda_i \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} - \\
& \left. - P_{O^*y^*} \delta w + M_{Ox} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} \right]_{z_1=l} = 0.
\end{aligned} \tag{5.45}$$

Тут $I = I^{(0)} + I^{(w)}$ – момент інерції відносно осі Ox резервуара і рухомої рідини; $M = m_0 + m_w$ – загальна маса резервуара і рідини; z_c – координата центру мас системи «резервуар - рідина» на осі Oz , що обчислюється за формулою

$$z_c = \frac{m_0 z_{c_0} + m_w z_{c_w}}{m_0 + m_w}. \tag{5.46}$$

Перетворимо інтеграли, що входять в рівняння (5.45) і містять похідні від варіації прогину стержня. За допомогою інтегрування за частинами отримаємо

$$\begin{aligned}
& \int_0^l EJ \frac{\partial^2 w}{\partial z_1^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial z_1^2} = \left[EJ \frac{\partial^2 w}{\partial z_1^2} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} - \frac{\partial}{\partial z_1} \left(EJ \frac{\partial^2 w}{\partial z_1^2} \right) \delta w \right]_0^l + \\
& + \int_0^l \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \left(EJ \frac{\partial^2 w}{\partial z_1^2} \right) \delta w dz_1, \\
& - \int_0^l N(z) \frac{\partial w}{\partial z_1} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} dz_1 = - \left[N(z_1) \frac{\partial w}{\partial z_1} \delta w \right]_0^l + \int_0^l \frac{\partial}{\partial z_1} \left(N(z_1) \frac{\partial w}{\partial z_1} \right) \delta w dz_1,
\end{aligned} \tag{5.47}$$

де в силу умов закріплення нижнього краю стержня δw і $\frac{\partial \delta w}{\partial z_1}$ при $z_1 = 0$ дорівнюють нулю.

Підставляючи вирази (5.47) в варіаційне рівняння (5.45) і з огляду на довільність варіації δw в області інтегрування, а також довільність варіацій

δw і $\frac{\partial \delta w}{\partial z_1}$ при $z_1 = l$, отримуємо наступну крайову задачу відносно прогину стержня $w(z, t)$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \left(EJ \frac{\partial^2 w}{\partial z_1^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z_1} \left(N(z_1) \frac{\partial w}{\partial z_1} \right) + \rho_1 F \ddot{w} = q(z_1, t), \quad z_1 \in (0, l), \\ & \left[\frac{\partial}{\partial z_1} \left(EJ \frac{\partial^2 w}{\partial z_1^2} \right) + N(z_1) \frac{\partial w}{\partial z_1} \right]_{z_1=l} = \left(m \ddot{w} + m z_c \frac{\partial \ddot{w}}{\partial z_1} \right)_{z_1=l} + \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\beta}_i \lambda_i - P_{O^*y^*}, \\ & \left(EJ \frac{\partial^2 w}{\partial z_1^2} \right)_{z_1=l} = \left(g m z_c \frac{\partial w}{\partial z_1} - m z_c \ddot{w} - I \frac{\partial \ddot{w}}{\partial z_1} \right)_{z_1=l} + \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\beta}_i \lambda_{0i} + g \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \lambda_i - M_{Ox}, \quad w(0, t) = \left. \frac{\partial w(z_1, t)}{\partial z_1} \right|_{z=0} = 0. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Рівняння (5.48) відносно функції $w(z_1, t)$, є відомим рівнянням згинних коливань стисненого осью силою $N(z_1)$ стержня до якого прикладене розподілене навантаження $Q(z_1, t)$. Оскільки поперечна сила і згинальний момент стержня в деякому його перерізі визначаються за формулами

$$Q = - \left[\frac{\partial}{\partial z_1} \left(EJ \frac{\partial^2 w}{\partial z_1^2} \right) + N(z_1) \frac{\partial w}{\partial z_1} \right],$$

$$M = - EJ \frac{\partial^2 w}{\partial z_1^2},$$

то перша і друга гранична умова в (5.48) являють собою відповідно умови рівноваги сил і моментів, що діють в перерізі стержня при $z = l$.

У ці граничні умови входять заздалегідь невідомі узагальнені координати $\beta_i(t)$, що характеризують хвильові рухи рідини в рухомому резервуарі. Тому до рівнянь (5.48) необхідно ще додати рівняння (5.17) з урахуванням кінематичних співвідношень (5.36):

$$\mu_n (\ddot{\beta}_n + \sigma_n^2 \beta_n) + \lambda_n \ddot{w}(l, t) - \lambda_{0n} \frac{\partial \ddot{w}(l, t)}{\partial z_1} - g \lambda_n \frac{\partial w(l, t)}{\partial z_1} = 0, \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (5.49)$$

Рівняння (5.48) і (5.49) разом з початковими умовами, накладеними на вільну поверхню рідини і на стержень, повністю визначають взаємопов'язані коливання механічної системи «стержень - резервуар - рідина» під дією прикладених до неї зовнішніх сил і моментів.

Слід зауважити, що рівняння (5.49) можна отримати також з варіаційного рівняння (5.37), додавши до нього в праву частину роботу сил тиску на вільній поверхні рідини на її можливих переміщеннях.

Для того, щоб в подальшому спростити розрахунки при дослідженні руху розглядуваної механічної системи, доцільно в варіаційному рівнянні (5.45), рівняннях (5.48) і (5.49) перейти до безрозмірних величин. Використовуючи теорію розмірностей і вибираючи для системи характерний лінійний розмір R_0 , можна записати такі формули переходу від розмірних до безрозмірних величин, які позначені рискою зверху:

$$\begin{aligned} \varphi_n &= R_0 \bar{\varphi}_n, \quad \Psi = R_0^2 \bar{\Psi}, \quad t^2 = \frac{R_0}{g} \bar{t}^2, \quad \sigma_n^2 = \frac{g}{R_0} \bar{\sigma}_n^2, \quad \mu_n = \rho R_0^3 \bar{\mu}_n, \quad I = \rho R_0^5 \bar{I}, \\ \bar{I} &= \frac{\rho_0}{\rho} I^{(0)} + I^{(w)}, \quad w = R_0 \bar{w}, \quad \beta_n = R_0 \bar{\beta}_n, \quad EJ = E_0 J_0 \bar{E} \bar{J}, \quad N = \frac{E_0 J_0}{R_0^2} \bar{N}, \\ \lambda_n &= \rho R_0^3 \bar{\lambda}_n, \quad \bar{N} = D(\bar{m} + \frac{\rho_1}{\rho}(\bar{l} - \bar{z}_1)), \quad D = \frac{\rho R_0^5 g}{E_0 J_0}, \quad m = \rho R_0^3 \bar{m}, \quad M_{Ox} = \frac{E_0 J_0}{R_0} \bar{M}_{Ox}, \\ \bar{m} &= \left(\frac{\rho_0}{\rho} \bar{m}_0 + \bar{m}_w \right), \quad F = R_0^2 \bar{F}, \quad q = \frac{E_0 J_0}{R_0^3} \bar{q}, \quad P_{O^*y^*} = \frac{E_0 J_0}{R_0^2} \bar{P}_{O^*y^*}. \end{aligned} \quad (5.50)$$

де $E_0 J_0$ – згинна жорсткість стержня в його характерному перерізі.

З урахуванням цих формул варіаційне рівняння (5.45) можна представити у безрозмірному вигляді (риски над безрозмірними величинами для спрощення запису в подальшому опускаємо):

$$\begin{aligned} & \int_0^l \left[EJ \frac{\partial^2 w}{\partial z_1^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial z_1^2} - N(z_1) \frac{\partial w}{\partial z_1} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} + \frac{\rho_1}{\rho} DF \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w - q(z_1, t) \delta w \right] dz_1 + \\ & + \left\{ D \left[I \frac{\partial^3 w}{\partial z_1 \partial t^2} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} + m z_c \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} + \frac{\partial^3 w}{\partial z_1 \partial t^2} \delta w \right) + \right. \right. \\ & + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d^2 \beta_i}{dt^2} \left(\lambda_i \delta w - \lambda_{0i} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} \right) - m z_c \frac{\partial w}{\partial z_1} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} - \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \lambda_i \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} \left. \right] - \\ & \left. - P_{O^*y^*} \delta w + M_{Ox} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} \right\}_{z_1=l} = 0. \end{aligned} \quad (5.51)$$

У свою чергу безрозмірне рівняння (5.49) набуде наступного вигляду:

$$\mu_n \left(\frac{\partial^2 \beta_n}{dt^2} + \sigma_n^2 \beta_n \right) + \left(\lambda_n \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \lambda_{0n} \frac{\partial^3 w}{\partial z_1 \partial t^2} - \lambda_n \frac{\partial w}{\partial z_1} \right)_{z_1=l} = 0. \quad (5.52)$$

Надалі варіаційне рівняння (5.51) буде використано для побудови наближених розв'язків задач динаміки розглядуваної системи.

У рівняння (5.51) і (5.52) входять гідродинамічні коефіцієнти σ_n^2 , λ_n , λ_{0n} і $I^{(w)}$, знаходження яких пов'язане з розв'язками однорідної спектральної задачі з параметром в граничній умові (5.13) і неоднорідної крайової задачі Неймана (5.34) для потенціалу Стокса - Жуковського Ψ . Тому перед подальшим дослідженням динаміки даної системи необхідно визначити зазначені гідродинамічні коефіцієнти.

Крайові задачі (5.13) і (5.34) для резервуарів, що володіють осьовою симетрією зручно розв'язувати в циліндричній системі координат

$$x = r \cos \eta, \quad y = r \sin \eta, \quad z = z, \quad (5.53)$$

де r і η – полярні координати проекції довільної точки на площину Oxy .

Представляючи функцію $\varphi(x, y, z)$ крайової задачі (5.13) у вигляді

$$\varphi(x, y, z) = f(\eta)\psi(r, z) \quad (5.54)$$

отримуємо наступні рівняння відносно функцій $\psi(r, z)$ і $f(\eta)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{m^2}{r^2} \psi &= 0, \quad (r, z) \in G, \\ \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - \kappa \psi \right)_{L_0} &= 0, \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right)_{L_1} = 0, \\ \frac{d^2 f}{d\eta^2} + m^2 f &= 0, \end{aligned} \quad (5.55)$$

де L_0 і L_1 – лінії перетину меридіонального перерізу з вільною поверхнею Σ і змочуваною поверхнею S відповідно; G – область, обмежена лініями L_0 , L_1 і віссю Oz .

Рівняння відносно функції $f(\eta)$ розв'язується в тригонометричних функціях. Умова періодичності функції $\varphi(r, z, \eta)$ по змінній η з періодом 2π призводить до цілочисельних значень параметра m . Надалі займемося вивченням неосесиметричних коливань рідини в площині Oyz , для яких головний вектор гідродинамічних сил, прикладених до рухомого резервуару, відмінний від нуля, тобто коефіцієнти λ_n і λ_{0n} не обертаються тотожно в нуль. Коливання такого класу відповідають значенням $m = 1$. Таким чином, при русі резервуару в площині Oyz , функцію $\varphi(r, z, \eta)$ будемо представляти у вигляді

$$\varphi(r, z, \eta) = \psi(r, z) \sin \eta. \quad (5.56)$$

В силу осьової симетрії резервуару, функцію $\Psi(r, z, \eta)$ крайової задачі (5.34) можна шукати в формі

$$\Psi(r, z, \eta) = F(r, z) \sin \eta. \quad (5.57)$$

Тоді для функції $F(r, z)$ матимемо двовимірну неоднорідну крайову задачу Неймана в області меридіонального перерізу резервуару

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} F &= 0, \quad (r, z) \in G, \\ \left(\frac{\partial F}{\partial \nu} \right)_{L_0 \cup L_1} &= r \cos(\nu, z) - z \cos(\nu, r). \end{aligned} \quad (5.58)$$

До граничних умов задач (5.57) і (5.58) слід ще додати умову обмеженості відповідних функцій на осі Oz .

Розробці методів розв'язання розглядуваних крайових задач для різних форм резервуарів в тому числі і резервуарів, що містять конструктивні пристрої у вигляді ребер-перегородок, присвячені монографії [68], [97], [119].

Нижче будемо розглядати резервуар в формі прямого кругового циліндра з плоским днищем. В якості характерного лінійного розміру системи виберемо радіус циліндра, а початок циліндричної системи координат помістимо в площині днища. У цьому випадку, розв'язок крайової задачі (5.55) можна отримати методом розділення змінних. При цьому, безрозмірні функції $\varphi_n(r, z, \eta)$

будуть мати наступний вигляд:

$$\varphi_n(r, z, \eta) = \frac{\cosh(K_n z)}{K_n \sinh(K_n h)} \frac{J_1(K_n r)}{J_1(K_n)} \sin \eta \quad (5.59)$$

де $J_1(x)$ – функції Бесселя першого роду і першого порядку; K_n – n -й корінь рівняння $J_1'(K_n) = 0$; h – глибина рідини в резервуарі.

Власні значення κ_n задачі (5.55) визначаються за формулою

$$\kappa_n = \sigma_n^2 = K_n \tanh(K_n h). \quad (5.60)$$

Розв'язки (5.59) нормовані таким чином, що

$$\left. \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} \right|_{z=h, r=1, \eta=\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Прийняте нормування дозволяє розглядати узагальнені координати $\beta_n(t)$ в розкладах (5.12) як зміщення точки незбуреної вільної поверхні рідини з координатами $r = 1$, $\eta = \pi/2$ в напрямку осі Oz при n -й формі власних коливань рідини.

При знаходженні функції $F(r, z)$, що задовольняє крайовій задачі (5.58) виділяється її частина $-ry$, а частина, що залишилася у вигляді розкладу в узагальнений ряд Фур'є - Бесселя. В результаті функція $\Psi(r, z, \eta)$ може бути представлена в наступній формі:

$$\Psi(r, z, \eta) = -zr \sin \eta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(K_n^2 - 1)} Z_n(z) \frac{J_1(K_n r)}{J_1(K_n)} \sin \eta, \quad (5.61)$$

де

$$Z_n(z) = \frac{\sinh\left[K_n\left(z - \frac{h}{2}\right)\right]}{K_n \cosh\left(K_n \frac{h}{2}\right)}.$$

Отримані розв'язки задач (5.13) і (5.34) дозволяють визначити безрозмірні гідродинамічні коефіцієнти для резервуара в формі кругового циліндра:

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 &= K_n \tanh(K_n h), \quad \lambda_n = \frac{\pi}{K_n^2}, \quad \mu_n = \frac{\pi(K_n^2 - 1)}{2K_n^3 \tanh(K_n h)}, \\ \lambda_{0n} &= \frac{\pi}{K_n^2} \left[h - \frac{2}{K_n} \tanh\left(\frac{K_n h}{2}\right) \right], \\ I^{(w)} &= \pi \left[\frac{1}{3} h^3 - \frac{3}{4} h + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{K_n^3 (K_n^2 - 1)} \tanh\left(\frac{K_n h}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Для резервуара, що має форму довільного тіла обертання, визначення гідродинамічних коефіцієнтів пов'язане із застосуванням наближених методів для розв'язання відповідних крайових задач.

5.1.3 Постановка і розв'язання задачі про власні коливання системи «стержень – резервуар – рідина»

Розглянемо розв'язок спектральної задачі, яка описує власні взаємопов'язані коливання стержня і прикріпленого до нього резервуара, який частково заповнений рідиною. Математичне формулювання цієї задачі можна отримати з рівнянь (5.48) і (5.49), в яких необхідно покласти

$$\begin{aligned} q(z_1, t) &= P_{O^*y^*} = M_{Ox} = 0, \\ w(z_1, t) &= \exp^{i\omega t} \eta(z_1), \quad \beta_n(t) = \exp^{i\omega t} b_n. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Після переходу до безрозмірних величин за формулами (5.50), отримаємо таку задачу відносно функції $\eta(z_1)$ і чисел b_n :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz_1^2} \left(EJ \frac{d^2 \eta}{dz_1^2} \right) + \frac{d}{dz_1} \left(N \frac{d\eta}{dz_1} \right) - \omega^2 \frac{\rho_1}{\rho} DF \eta &= 0, \quad z_1 \in (0, l), \\ \left(EJ \frac{d^2 \eta}{dz_1^2} \right)_{z_1=l} &= \omega^2 D \left[\left(m z_c \eta + I \frac{d\eta}{dz_1} \right)_{z_1=l} - \sum_{i=1}^{\infty} b_i \lambda_{0i} \right] + D m z_c \frac{d\eta}{dz_1} \Big|_{z_1=l} + \\ + D \sum_{i=1}^{\infty} b_i \lambda_i, \quad \left[\frac{d}{dz_1} \left(EJ \frac{d^2 \eta}{dz_1^2} \right) + N \frac{d\eta}{dz_1} \right]_{z_1=l} &= \\ = -\omega^2 D \left[m \left(\eta + z_c \frac{d\eta}{dz_1} \right)_{z_1=l} + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \lambda_i \right], \quad \eta(0) = \frac{d\eta}{dz_1} \Big|_{z_1=0} &= 0, \end{aligned} \quad (5.64)$$

$$\mu_i (\sigma_i^2 - \omega^2) b_i + \left[\omega^2 \left(\lambda_{0i} \frac{d\eta}{dz_1} - \lambda_i \eta \right) - \lambda_i \frac{d\eta}{dz_1} \right]_{z_1=l} = 0, \quad (5.65)$$

$$(i = 1, 2, \dots)$$

Крайова задача (5.64) разом з рівняннями (5.65), які пов'язують узагальнені координати b_i зі значеннями прогину стержня і його похідної в перерізі $z_1 = l$, утворюють однорідну спектральну задачу, власні числа якої ω_j^2 є квадратами частот власних коливань розглядуваної системи, а власні функції

$\eta_j(z_1)$ — формами вільних коливань стержня. Відповідно до розкладу (5.12) числа $b_i^{(j)}$ характеризують хвильові рухи рідини в резервуарі для j -ої форми власних коливань системи.

Точний розв'язок задачі (5.64), (5.65) можна побудувати для випадків, коли рівняння в (5.64) має постійні коефіцієнти, що звужує клас даних конструкцій. Крім того, такий розв'язок має досить громіздкий вигляд, що ускладнює його застосування при конкретних розрахунках. Далі побудуємо наближений розв'язок задачі (5.64), (5.65), використовуючи при цьому еквівалентне варіаційне формулювання задачі (5.64). Після підстановки формул (5.63) в співвідношення (5.51), варіаційне рівняння для задачі (5.64) набуде вигляду:

$$\begin{aligned} & \int_0^l \left[EJ \frac{d^2 \eta}{dz_1^2} \frac{d^2 \delta \eta}{dz_1^2} - N(z_1) \frac{d\eta}{dz_1} \frac{d\delta \eta}{dz_1} \right] dz_1 - m z_c D \left(\frac{d\eta}{dz_1} \frac{d\delta \eta}{dz_1} \right) \Big|_{z_1=l} - \\ & - \omega^2 D \int_0^l \frac{\rho_1}{\rho} F \eta \delta \eta dz_1 - \omega^2 D \left[I \frac{d\eta}{dz_1} \frac{d\delta \eta}{dz_1} + m z_c \left(\eta \frac{d\delta \eta}{dz_1} + \frac{d\eta}{dz_1} \delta \eta \right) + \right. \\ & \left. + m \eta \delta \eta + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \left(\lambda_i \delta \eta - \lambda_{0i} \frac{d\delta \eta}{dz_1} \right) \right] \Big|_{z_1=l} - D \sum_{i=1}^{\infty} b_i \lambda_i \frac{d\delta \eta}{dz_1} \Big|_{z_1=l} = 0. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Розв'язок задачі (5.66) будемо розшукувати на класі функцій, які підпорядковані лише кінематичним граничним умовам при $z_1 = 0$, оскільки силові граничні умови в (5.64) є природними граничними умовами для відповідного квадратичного функціоналу. Ця обставина істотно спрощує побудову систем базисних функцій при розв'язанні вихідного варіаційного рівняння методом Рітца.

Представимо функцію $\eta(z_1)$ в вигляді наступного відрізка узагальненого ряду:

$$\eta(z_1) = \sum_{q=1}^{m_0} a_j W_j(z_1). \quad (5.67)$$

Тут a_j — що підлягають визначенню в подальшому постійні, $W_j(z_1)$ — координатні функції, які мають вигляд

$$W_j(z_1) = z_1^2 P_j \left(\frac{2z_1}{l} - 1 \right), \quad (5.68)$$

де $P_j(x)$ – зміщені на одиницю за індексом j многочлени Лежандра.

Спочатку координатні функції будувалися на основі поліноміального представлення розв'язку, підпорядкувавши його граничним умовам задачі при $z_1 = 0$. Заміна в виразі (5.68) отриманих таким чином степеневих функцій поліномами Лежандра, які є їх лінійною комбінацією, обумовлена тим, що на відміну від степеневого базису, запропоновані координатні функції дозволяють утримувати в розкладі (5.67) досить велику кількість членів, при якій не порушується стійкість обчислювального процесу. Це дозволяє проводити в подальшому необхідні обчислення з високою точністю.

Підставимо розклади (5.67) в рівняння (5.65) і (5.66), попередньо помноживши рівняння (5.65) для симетрії на коефіцієнт D , і покладемо в рівнянні (5.65) $\delta\eta(z_1) = W_i(z_1)$. Обмежуючись скінченним числом постійних b_i ($i = 1, 2, \dots, n_0$), отримуємо при цьому однорідну алгебраїчну систему

$$(A - \omega^2 B)\vec{X} = 0, \quad (5.69)$$

де вектор-стовпець \vec{X} має координати $\{a_1, a_2, \dots, a_{m_0}, b_1, b_2, \dots, b_{n_0}\}$.

Елементи симетричних матриць A і B відповідно α_{ij} і β_{ij} , які розташовані на їх головній діагоналі і вище неї визначаються за такими формулами:

$$\alpha_{i,j} = \int_0^l \left(EJ \frac{d^2 W_j}{dz_1^2} \frac{d^2 W_i}{dz_1^2} - N(z_1) \frac{dW_j}{dz_1} \frac{dW_i}{dz_1} \right) dz_1 - m z_c D \left(\frac{dW_j}{dz_1} \frac{dW_i}{dz_1} \right)_{z_1=l},$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, m_0);$$

$$\alpha_{i,j+m_0} = -D \lambda_j \left(\frac{dW_i}{dz_1} \right)_{z_1=l}, \quad (i = 1, 2, \dots, m_0, j = 1, 2, \dots, n_0);$$

$$\alpha_{i+m_0,j+m_0} = D \mu_i \sigma_i^2 \delta_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n_0);$$

$$\beta_{i,j} = D \int_0^l \left[\frac{\rho_1}{\rho} F W_j W_i dz_1 + I \frac{dW_j}{dz_1} \frac{dW_i}{dz_1} + m z_c \left(W_j \frac{dW_i}{dz_1} + \frac{dW_j}{dz_1} W_i \right) + m W_i W_j \right]_{z_1=l}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, m_0);$$

$$\beta_{i,j+m_0} = D \left(\lambda_j W_i - \lambda_{0j} \frac{dW_i}{dz_1} \right)_{z_1=l}, \quad (i = 1, 2, \dots, m_0, j = 1, 2, \dots, n_0);$$

$$\beta_{i+m_0, j+m_0} = D\mu_i \delta_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n_0),$$

де δ_{ij} – символ Кронекера.

Таким чином, визначення частот і форм власних коливань системи «стержень – резервуар – рідина» звелось до розв’язання узагальненої алгебраїчної задачі на власні значення (5.69). Запропонований підхід розв’язання даної спектральної задачі може бути застосований для стержнів осесиметричної форми зі змінними пружно-масовими характеристиками.

5.1.4 Вимушені коливання стержня, закріпленого на пружній опорі

Як уже зазначалося в розділі 5.1.2 для побудови наближених розв’язків задачі про вимушені коливання розглядуваної системи, що знаходиться під дією прикладених до неї зовнішніх сил і моментів скористаємося варіаційним рівнянням (5.51).

При розрахунку вимушених коливань розглядуваної механічної системи під впливом прикладених до неї зосереджених і розподілених навантажень граничну задачу для рівняння в частинних похідних (5.48) доцільно звести до системи звичайних диференціальних рівнянь з незалежною змінною за часом t , застосовуючи для цього метод Бубнова - Гальоркіна. Приведення задачі (5.48) до системи диференціальних рівнянь не є однозначною задачею і в істотній мірі залежить від вибору узагальнених координат, що характеризують в сукупності збурений рух конструкції. З практичної точки зору слід прагнути до такої системи диференціальних рівнянь, яка мала б найбільш простий вигляд і невелику розмірність. З цієї точки зору в розглядуваній задачі в якості координатних функцій при апроксимації шуканих розв’язків найдоцільніше вибрати власні функції спектральної задачі, яка описує вільні коливання стержня з приєднаним до нього резервуаром з рідиною.

Встановимо спочатку умови ортогональності власних функцій спектральної граничної задачі (5.64), (5.65). З цією метою підставимо в рівняння (5.64)

$\eta = \eta_i(z)$, $\omega = \omega_i$, помножимо це рівняння на $\eta_j(z)$ і проінтегруємо отримане співвідношення в межах від 0 до l . Після інтегрування по частинах з використанням граничних умов (5.64) отримуємо наступне рівняння:

$$\int_0^l \left[\frac{d^2 \eta_i}{dz_1^2} \frac{d^2 \eta_j}{dz_1^2} - N \frac{d\eta_i}{dz_1} \frac{d\eta_j}{dz_1} - \omega_i^2 \frac{\rho_1}{\rho} DF \eta_i \eta_j \right] dz_1 - D \left\{ \omega_i^2 \left[m \eta_i \eta_j + \right. \right. \\ \left. \left. + m z_c \left(\frac{d\eta_i}{dz_1} \eta_j + \frac{d\eta_j}{dz_1} \eta_i \right) + I \frac{d\eta_i}{dz_1} \frac{d\eta_j}{dz_1} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(i)} \left(\lambda_n \eta_j - \lambda_{0n} \frac{d\eta_j}{dz_1} \right) \right] + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(i)} \lambda_n \frac{d\eta_j}{dz_1} + m z_c \frac{d\eta_i}{dz_1} \frac{d\eta_j}{dz_1} \right\}_{z_1=l} = 0. \quad (5.70)$$

Поміняємо місцями в цьому рівнянні індекси i і j і віднімемо одержане рівняння з рівняння (5.70). При цьому отримаємо

$$\left(\omega_j^2 - \omega_i^2 \right) \left\{ \int_0^l \frac{\rho_1}{\rho} F \eta_i \eta_j dz_1 + \left[m \eta_i \eta_j + m z_c \left(\frac{d\eta_i}{dz_1} \eta_j + \frac{d\eta_j}{dz_1} \eta_i \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + I \frac{d\eta_i}{dz_1} \frac{d\eta_j}{dz_1} \right]_{z_1=l} \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(j)} \left[\omega_j^2 \left(\lambda_n \eta_i - \lambda_{0n} \frac{d\eta_i}{dz_1} \right) + \lambda_n \frac{d\eta_i}{dz_1} \right]_{z_1=l} - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(i)} \left[\omega_i^2 \left(\lambda_n \eta_j - \lambda_{0n} \frac{d\eta_j}{dz_1} \right) + \lambda_n \frac{d\eta_j}{dz_1} \right]_{z_1=l} = 0. \quad (5.71)$$

Для подальшого перетворення рівняння (5.71) скористаємося зв'язком між $b_n^{(i)}$ і η_i , отриманого з рівняння (5.65):

$$b_n^{(i)} (\mu_n \sigma_n^2 - \mu_n \omega_i^2) = \left[\omega_i^2 \left(\lambda_n \eta_i - \lambda_{0n} \frac{d\eta_i}{dz_1} \right) + \lambda_n \frac{d\eta_i}{dz_1} \right]_{z_1=l}. \quad (5.72)$$

З урахуванням того, що $\omega_j \neq \omega_i$, отримуємо першу умову ортогональності

$$\int_0^l \frac{\rho_1}{\rho} F \eta_i \eta_j dz_1 + \left[m \eta_i \eta_j + m z_c \left(\frac{d\eta_i}{dz_1} \eta_j + \frac{d\eta_j}{dz_1} \eta_i \right) + I \frac{d\eta_i}{dz_1} \frac{d\eta_j}{dz_1} \right]_{z_1=l} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left[b_n^{(i)} b_n^{(j)} \mu_n + b_n^{(j)} \left(\lambda_n \eta_i - \lambda_{0n} \frac{d\eta_i}{dz_1} \right) + b_n^{(i)} \left(\lambda_n \eta_j - \lambda_{0n} \frac{d\eta_j}{dz_1} \right) \right]_{z_1=l} = 0. \quad (5.73)$$

Помноживши рівняння (5.64) при $\eta = \eta_i(z)$, $\omega = \omega_i$ на $\omega_j^2 \eta_j$ і проробляючи вище описану процедуру, після ряду перетворень, отримуємо другу умову

ортогональності для власних функцій спектральної задачі (5.64), (5.65):

$$\int_0^l \left[EJ \frac{d^2 \eta_i}{dz_1^2} \frac{d^2 \eta_j}{dz_1^2} - N \frac{d\eta_i}{dz_1} \frac{d\eta_j}{dz_1} \right] dz_1 - z_c m D \left(\frac{d\eta_i}{dz_1} \frac{d\eta_j}{dz_1} \right)_{z_1=l} + D \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(i)} b_n^{(j)} \mu_n \sigma_n^2 - D \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(b_n^{(j)} \frac{d\eta_i}{dz_1} + b_n^{(i)} \frac{d\eta_j}{dz_1} \right)_{z_1=l} = 0. \quad (5.74)$$

Припустимо, що власні функції $\eta_i(z)$, власні числа ω_i^2 і відповідні їм значення $b_n^{(i)}$ спектральної задачі (5.64), (5.65) відомі. Нехай до розглядуваної механічної системи прикладені описані вище зовнішні навантаження. Виникаючи при цьому поперечні переміщення стержня в площині $O_1 y_1 z_1$ і відповідні йому узагальнені координати $\beta_n(t)$, що характеризують хвильові рухи рідини в резервуарі, представимо у вигляді наступних розкладів:

$$w(z_1, t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \eta_i(z_1), \quad \beta_n(t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) b_n^{(i)}, \quad (5.75)$$

де $q_i(t)$ – узагальнені координати системи, що характеризують її вимушені коливання.

Для отримання диференціальних рівнянь відносно функцій $q_i(t)$ скористаємося варіаційним рівнянням (5.51), рівнянням (5.52) і встановленими умовами ортогональності (5.73) і (5.74).

Підставляючи розклади (5.75) в систему безрозмірних диференціальних рівнянь (5.52), яка виведена з динамічної умови на вільній поверхні рідини, отримаємо наступні рівняння:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \ddot{q}_i \left(\mu_n b_n^{(i)} + \lambda_n \eta_i - \lambda_{0n} \frac{d\eta_i}{dz_1} \right)_{z_1=l} = \sum_{i=1}^{\infty} q_i \left(\lambda_n \frac{d\eta_i}{dz_1} - \mu_n \sigma_n^2 b_n^{(i)} \right)_{z_1=l}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.76)$$

Решту співвідношень отримаємо з варіаційного рівняння (5.51), підставивши в нього розклади (5.75) і поклавши в ньому $\delta w = \eta_j(z_1)$.

При цьому будемо мати

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\infty} q_i \int_0^l \left(EJ \frac{d^2 \eta_i}{dz_1^2} \frac{d^2 \eta_j}{dz_1^2} - N \frac{d\eta_i}{dz_1} \frac{d\eta_j}{dz_1} \right) dz_1 + \Phi(t) - \\ & - \sum_{i=1}^{\infty} q_i D \left(m z_c \frac{d\eta_i}{dz_1} \frac{d\eta_j}{dz_1} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(j)} \lambda_n \frac{d\eta_j}{dz_1} \right)_{z_1=l} = Q_j(t), \\ & j = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (5.77)$$

де

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{q}_i D \int_0^l \frac{\rho_1}{\rho} F \eta_i \eta_j dz_1 + \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{q}_i D \left[m \eta_i \eta_j + m z_c \left(\eta_i \frac{d\eta_j}{dz_1} + \eta_j \frac{d\eta_i}{dz_1} \right) + \right. \\ & \left. + I \frac{d\eta_i}{dz_1} \frac{d\eta_j}{dz_1} + \sum_{i=1}^{\infty} b_n^{(i)} \left(\lambda_n \eta_j - \lambda_{0n} \frac{d\eta_j}{dz_1} \right) \right]_{z_1=l}, \\ Q_j(t) &= \int_0^l q(z_1, t) \eta_j dz_1 + \left(P_{O^*y^*} \eta_j - M_{Ox} \frac{d\eta_j}{dz_1} \right)_{z_1=l}. \end{aligned}$$

Перетворимо вираз, що стоїть в лівій частині рівнянь (5.77). Якщо скористатися другою умовою ортогональності (5.74), формулою (5.70) при $i = j$, співвідношенням (5.65) для власних форм коливань системи, то для першої суми в рівнянні (5.77) можна встановити такий вираз

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\infty} q_i \int_0^l \left(EJ \frac{d^2 \eta_i}{dz_1^2} \frac{d^2 \eta_j}{dz_1^2} - N \frac{d\eta_i}{dz_1} \frac{d\eta_j}{dz_1} \right) dz_1 = q_j \omega_j^2 a_j + \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} q_i D \left\{ m z_c \frac{d\eta_i}{dz_1} \frac{d\eta_j}{dz_1} - \sum_{i=1}^{\infty} \left[b_n^{(i)} b_n^{(j)} \mu_n \sigma_n^2 - \lambda_n \left(b_n^{(j)} \frac{d\eta_i}{dz_1} + b_n^{(i)} \frac{d\eta_j}{dz_1} \right) \right] \right\}_{z_1=l} \end{aligned} \quad (5.78)$$

Тут

$$\begin{aligned} a_j &= D \left\{ \int_0^l \frac{\rho_1}{\rho} F \eta_j^2 dz_1 + \left[m \eta_j^2 + 2 m z_c \eta_j \frac{d\eta_j}{dz_1} + I \left(\frac{d\eta_j}{dz_1} \right)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{i=1}^{\infty} (b_n^{(i)})^2 \mu_n + 2 b_n^{(j)} \left(\lambda_n \eta_j - \lambda_{0n} \frac{d\eta_j}{dz_1} \right) \right] \right\}_{z_1=l}. \end{aligned}$$

З урахуванням першої умови ортогональності (5.73), функція $\Phi(t)$ може бути представлена у вигляді

$$\Phi(t) = \ddot{q}_j a_j - \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{q}_i D \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \left[b_n^{(i)} b_n^{(j)} \mu_n + b_n^{(j)} \left(\lambda_n \eta_i - \lambda_{0n} \frac{d\eta_i}{dz_1} \right) \right]_{z_1=l} \right\}. \quad (5.79)$$

Підставимо вирази (5.78) і (5.79) в рівняння (5.77). При цьому будемо мати

$$a_j (\ddot{q}_j + \omega_j^2 q_j) + \sum_{i=1}^{\infty} q_i D \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left(\lambda_n b_n^{(j)} \frac{d\eta_i}{dz_1} - b_n^{(i)} b_n^{(j)} \mu_n \sigma_n^2 \right) \right]_{z_1=l} - \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{q}_i D \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \left[b_n^{(j)} \left(\lambda_n \eta_i - \lambda_{0n} \frac{d\eta_i}{dz_1} \right) + b_n^{(i)} b_n^{(j)} \mu_n \right] \right\}_{z_1=l} = Q_j(t). \quad (5.80)$$

Скориставшись співвідношеннями (5.76), рівняння (5.80) приводимо до виду

$$a_j (\ddot{q}_j + \omega_j^2 q_j) = Q_j(t), \quad j = 1, 2, \dots \quad (5.81)$$

Таким чином, розв'язання задачі про вимушені коливання розглядуваної механічної системи під дією прикладених до неї зовнішніх навантажень звелось до інтегрування нескінченної системи не пов'язаних між собою диференціальних рівнянь (5.81) при заданні положення і швидкості системи в початковий момент часу. Перед розв'язанням цієї задачі необхідно попередньо визначити частоти і форми власних коливань даної конструкції, що дозволить обчислити коефіцієнти і праві частини рівнянь (5.81).

На практиці зустрічаються такі випадки, коли коливання розглядуваної механічної системи викликаються деяким заданим кінематичним збуренням основи пружної опори. Нехай основу стержня жорстко закріплено на деякій рухомій платформі, яка здійснює задане гармонічне коливання в площині $O_1 y_1 z_1$ за законом

$$w(0, t) = H \sin pt, \quad H \ll 1. \quad (5.82)$$

Потрібно визначити рухи рідини в резервуарі і стержня, викликані переміщеннями його основи.

Розглянемо усталені вимушені коливання механічної системи. Переміщення стержня $w(z_1, t)$ в площині $O_1y_1z_1$ і узагальнені координати $\beta_n(t)$, що характеризують хвильові рухи рідини в рухомому резервуарі можна представити у вигляді:

$$w(z_1, t) = \eta(z_1) \sin pt, \quad \beta_n(t) = b_n \sin pt. \quad (5.83)$$

Математичне формулювання задачі для визначення функції $\eta(z_1)$ і чисел b_n можна отримати з рівнянь (5.48) і (5.49). При цьому воно матиме форму рівнянь (5.64) і (5.65), в яких ω^2 слід замінити на p^2 . Крім цього, граничні умови жорсткого кріплення торця стержня слід замінити на граничні умови:

$$\eta(0) = H, \quad \left. \frac{d\eta}{dz_1} \right|_{z_1=0} = 0. \quad (5.84)$$

Для побудови наближеного розв'язку отриманої неоднорідної задачі використаємо її варіаційне формулювання. Варіаційне рівняння відносно функції $\eta(z_1)$ матиме вигляд:

$$\begin{aligned} & \int_0^l \left[EJ \frac{d^2\eta}{dz_1^2} \frac{d^2\delta\eta}{dz_1^2} - N(z_1) \frac{d\eta}{dz_1} \frac{d\delta\eta}{dz_1} \right] dz_1 - mz_c D \left(\frac{d\eta}{dz_1} \frac{d\delta\eta}{dz_1} \right)_{z_1=l} - \\ & - p^2 D \int_0^l \frac{\rho_1}{\rho} F \eta \delta\eta dz_1 - p^2 D \left[I \frac{d\eta}{dz_1} \frac{d\delta\eta}{dz_1} + mz_c \left(\eta \frac{d\delta\eta}{dz_1} + \frac{d\eta}{dz_1} \delta\eta \right) + \right. \\ & \left. + m\eta\delta\eta + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \left(\lambda_i \delta\eta - \lambda_{0i} \frac{d\delta\eta}{dz_1} \right) \right]_{z_1=l} - D \sum_{i=1}^{\infty} b_i \lambda_i \left. \frac{d\delta\eta}{dz_1} \right|_{z_1=l} = 0. \quad (5.85) \end{aligned}$$

Розв'язок варіаційного рівняння (5.85) слід розшукувати на класі функцій, які підпорядковані лише головним граничним умовам (5.84). У зв'язку з цим представимо шукану функцію $\eta(z_1)$ в наступному вигляді:

$$\eta(z_1) = H + \sum_{j=1}^{m_0} a_j W_j(z_1). \quad (5.86)$$

Тут a_j – постійні, що підлягають визначенню в подальшому, W_j – координатні функції, які визначені формулами (5.68).

Підставимо розклад (5.86) в варіаційне рівняння (5.85), поклавши $\delta\eta(z_1) = W_i(z_1)$, і в динамічну умову на вільній поверхні рідини. При цьому, отримаємо наступну неоднорідну систему алгебраїчних рівнянь виду

$$(A - p^2 B)\vec{X} = \vec{\Gamma}, \quad (5.87)$$

де вектор-стовпець \vec{X} має координати

$$\{a_1, a_2, \dots, a_{m_0}, b_1, b_2, \dots, b_{n_0}\}.$$

Матриці A і B будуть такими ж як матриці A і B в задачі про власні коливання системи, а елементи γ_i вектора правої частини $\vec{\Gamma}$ визначатимуться за такими формулами:

$$\begin{aligned} \gamma_i &= p^2 DH \left[\int_0^l \frac{\rho_1}{\rho} F W_i dz + m z_c \frac{dW_i}{dz_1} \Big|_{z_1=l} + m W_i \Big|_{z_1=l} \right], \\ (i &= 1, 2, \dots, m_0); \\ \gamma_{i+m_0} &= p^2 DH \lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, n_0. \end{aligned} \quad (5.88)$$

Таким чином, задача про визначення амплітуд усталених вимушених гармонічних коливань розглядуваної системи при кінематичному збуренні основи стержня звелася до розв'язання неоднорідної алгебраїчної системи (5.87).

Аналогічним чином може бути розв'язана задача про вимушені коливання системи, які викликані гармонічним обертанням нижнього торця стержня.

5.2 Коливання стержня з підвісним резервуаром, частково заповненим рідиною

5.2.1 Основні припущення і постановка задачі

Розглядається осесиметрична конструкція, що складається з вертикально розташованої тонкостінної оболонки обертання, до однієї з паралелей якої за допомогою жорсткого шпангоута прикріплений осесиметричний резервуар,

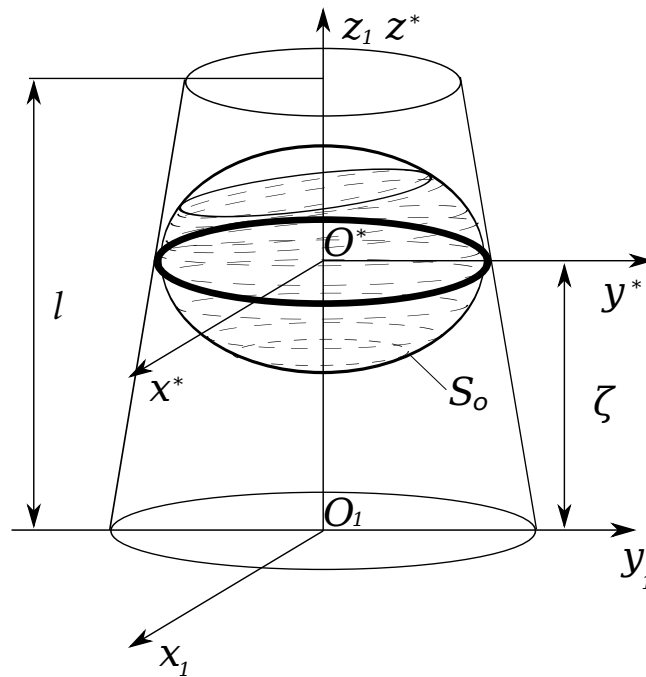


Рис. 5.2. Загальний вигляд розглядуваної механічної системи

частково заповнений ідеальною і нестисливою рідиною рис. 5.2. Вважається, що стінки резервуара є абсолютно жорсткими. Типовими конструкціями такого роду є корпус рідинної ракети або фюзеляж літака, а також деякі промислові резервуари [69]. Динаміку таких споруд будемо розглядати в рамках лінійної теорії пружності і гідродинаміки. В силу цього припущення і осьової симетрії конструкції можна розглядати незалежно поперечні, поздовжні і крутильні коливання такої механічної системи.

При певних геометричних параметрах даної споруди тонкостінну оболонку в певному сенсі можна ототожнити з пружним стержнем [69]. Можливість такої заміни циліндричної оболонки на еквівалентний пружний стержень обговорювалася вище.

В якості розрахункової схеми нижче використовується пружний стержень з підвішеним в деякому його перерізі жорстким резервуаром з рідиною. Далі розглядаються поперечні коливання конструкції на основі рівнянь згину стержнів без урахування поперечних зсувів і інерції повороту перерізів.

Для визначеності будемо вважати, що нижній край стержня жорстко за-

кріплений, а верхній - вільний. Рух резервуара і рідини в ньому будемо розглядати в полі сил ваги з вектором прискорення $\vec{g}(g = |\vec{g}|)$. Введемо нерухому прямокутну систему координат $O^*x^*y^*z^*$, вісь O^*z^* якої збігається з віссю симетрії конструкції, паралельна вектору \vec{g} і має протилежний йому напрямок. Початок O^* цієї системи координат помістимо в площині кріплення резервуара до стержня. Зв'язану з резервуаром систему координат $Oxyz$ розташуємо так, щоб в початковий момент часу t вона збігалася з системою координат $O^*x^*y^*z^*$. Для описання коливань стержня введемо в розгляд ще одну систему координат $O_1x_1y_1z_1$ з початком, зв'язаним із закріпленим краєм стержня. Вісь O_1z_1 сумістимо з віссю симетрії системи, а осі O_1x_1 і O_1y_1 розташовані паралельно до осей O^*x^* і O^*y^* відповідно.

Припустимо, що до резервуару прикладена зовнішня сумарна сила $P_{O^*y^*}$, діюча в напрямку осі O^*y^* і сумарний момент M_{Ox} відносно осі Ox , системи зовнішніх сил. Будемо також вважати, що на стержень діє розподілене поперечне навантаження $q(z_1, t)$ в напрямку осі O_1y_1 . Крім цього, стержень піддається дії стискаючої сили, обумовленої вагою резервуара з рідиною і своєю власною вагою. Складемо рівняння зв'язаних коливань стержня і прикріпленого до нього резервуара з рідиною в перерізі стержня $z_1 = \zeta$.

Позначимо через $w(z_1, t)$ прогин нейтральної лінії стержня в напрямку осі O_1y_1 під впливом прикладених до нього зовнішніх сил, а через l – довжину стержня. При виведенні рівнянь руху стержня в площині $O_1y_1z_1$ будемо користуватися принципом можливих переміщень, який в поєднанні з принципом Д'Аламбера може бути використаний і в динамічних задачах.

Надалі будемо розглядати стержень зі змінними (в загальному випадку) його площею поперечного перерізу S , екваторіальним моментом інерції J і модулем пружності при згині E . Густина матеріалу стержня ρ_1 також може бути змінною по його довжині.

Розіб'ємо область $G = [0, l]$ зміни координати z_1 на дві підобласті $G^{(1)} = [0, \zeta]$ і $G^{(2)} = [\zeta, l]$, і позначимо прогини стержня в цих підобластях через

$w^{(1)}(z_1, t)$ і $w^{(2)}(z_1, t)$ відповідно. Надалі верхній індекс при всіх функціях, які можна зустріти буде позначати область в якій ці функції визначені.

Для забезпечення гладкого спряження переміщень стержня в суміжній точці $z = \zeta$ підобластей $G^{(1)}$ і $G^{(2)}$ повинні виконуватися кінематичні граничні умови

$$\left[w^{(1)} = w^{(2)} = w \right]_{z_1=\zeta}; \quad \left[\frac{dw^{(1)}}{dz_1} = \frac{dw^{(2)}}{dz_1} = \frac{dw}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta} \quad (5.89)$$

Введемо наступні позначення для перерізуючих сил і згинних моментів стержня в перерізі z_1 :

$$Q^{(i)} = \frac{d}{dz_1} \left(E^{(i)} J^{(i)} \frac{d^2 w^{(i)}}{dz_1^2} \right); \quad M^{(i)} = E^{(i)} J^{(i)} \frac{d^2 w^{(i)}}{dz_1^2}, \quad (i = 1, 2). \quad (5.90)$$

На краях стержня, в силу прийнятих умов їх кріплення, повинні виконуватися граничні умови

$$w_1|_{z_1=0} = 0, \quad \left. \frac{dw_1}{dz_1} \right|_{z_1=0} = 0, \quad (5.91)$$

$$Q^{(2)}|_{z_1=l} = 0, \quad M^{(2)}|_{z_1=l} = 0. \quad (5.92)$$

Якщо вихідна форма стержня є рівноважною, то згідно з принципом можливих переміщень має виконуватися рівність

$$\delta W = \delta A, \quad (5.93)$$

де

$$\delta W = \sum_{i=1}^2 \int_{G^{(i)}} E^{(i)} J^{(i)} \frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial z_1^2} \frac{\partial^2 \delta w^{(i)}}{\partial z_1^2} dz_1 -$$

варіація потенціальної енергії деформації згину стержня, δA – робота всіх зовнішніх сил, прикладених до стержня і резервуару на їх можливих переміщеннях.

Як і раніше для випадку резервуара, закріпленого на пружній опорі, випишемо проекції головного вектора сил і моментів на осі O^*y^* і Ox відповідно, які діють з боку рідини на резервуар при його збуреному русі. Якщо стержень

здійснює поперечні коливання в площині $O_1y_1z_1$, то резервуар буде здійснювати поступальні переміщення u в напрямку осі O_1y_1 і кутові повороти ϑ відносно осі Ox . При цьому будемо мати

$$u = w(\zeta, t), \quad \vartheta = -\frac{\partial w}{\partial z_1} \Big|_{z_1=\zeta}. \quad (5.94)$$

Відповідно до цього, потенціал зміщень рідини в зв'язаній з резервуаром системі координат $Oxyz$ представимо в наступному вигляді

$$\chi(x, y, z, t) = w(\zeta, t) - \frac{\partial w}{\partial z_1} \Big|_{z_1=\zeta} \cdot \Psi(x, y, z) + \sum_{n=1}^{n_0} \beta_n(t) \varphi_n(x, y, z). \quad (5.95)$$

Тут потенціал Стокса - Жуковського Ψ визначається з розв'язання неоднорідної крайової задачі Неймана виду

$$\begin{aligned} \Delta \Psi(x, y, z) &= 0, \quad (x, y, z) \in Q, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} \Big|_{\Sigma \cup S_0} &= y \cos(\nu, z) - z \cos(\nu, y), \end{aligned} \quad (5.96)$$

де Q – фіксована область, яка обмежена змочуваною поверхнею резервуара S_0 і вільною поверхнею рідини Σ в її незбуреному стані; $\vec{\nu}$ – орт зовнішньої нормалі до поверхні S_0 або Σ ; Δ – оператор Лапласа.

У представленні (5.95) узагальнені координати $\beta_n(t)$ характеризують хвильові рухи рідини в резервуарі, а функції φ_n – власні функції спектральної задачі з параметром κ_n в граничній умові:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_n(x, y, z) &= 0, \quad (x, y, z) \in Q, \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} \Big|_{S_0} &= 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} - \kappa_n \varphi_n \right) \Big|_{\Sigma} = 0, \quad \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} dS = 0. \end{aligned} \quad (5.97)$$

Крайова задача (5.97) описує вільні коливання рідини в нерухомому резервуарі. При цьому, квадрат частоти σ_n^2 – n -ої форми власних коливань рідини зв'язаний з частотним параметром κ_n співвідношенням

$$\sigma_n^2 = g \kappa_n. \quad (5.98)$$

Гідродинамічні складові $P_{O^*y^*}$ і M_{Ox} головних векторів сил і моментів, діючих на резервуар з боку рідини, при його збуреному русі, можна визначити на основі теорем про зміну кількості руху і моменту кількості руху рідини в області Q . Після ряду перетворень матимемо:

$$\begin{aligned} P_{O^*y^*} &= -m_w \left(\ddot{w} + z_{c_w} \frac{\partial \ddot{w}}{\partial z_1} \right)_{z_1=\zeta} - \sum_{n=1}^{n_0} \ddot{\beta}_n \lambda_n, \\ M_{Ox} &= \left(m_w z_{c_w} \ddot{w} + I^{(w)} \frac{\partial \ddot{w}}{\partial z_1} - g m_w z_{c_w} \frac{\partial w}{\partial z_1} \right)_{z_1=\zeta} - \sum_{n=1}^{n_0} (\ddot{\beta}_n \lambda_{0n} + g \beta_n \lambda_n), \end{aligned} \quad (5.99)$$

де z_{c_w} , m_w – координата центру мас відносно точки O на осі Oz і маса за-тверділої рідини.

Гідродинамічні коефіцієнти в формулах (5.99) мають вигляд

$$\lambda_n = \rho \int_{\Sigma} y \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} dS, \quad \lambda_{0n} = \rho \int_{\Sigma} \Psi \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} dS, \quad I^{(w)} = \rho \int_{\Sigma \cup S_0} \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} dS.$$

Тут ρ – густина рідини.

Обчислимо роботу інерційних, масових, зовнішніх і гідродинамічних сил, що діють на корпус резервуара на його можливих переміщеннях, а також роботу сил інерції, розподіленого навантаження $Q^{(i)}(z_1, t)$ і стискаючої сили $N^{(i)}(z_1)$ ($i = 1, 2$) на можливих переміщеннях стержня з урахуванням граничних умов (5.89). Тоді варіаційне рівняння (5.93) набуде вигляду

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^2 \int_{G^{(i)}} \left[E^{(i)} J^{(i)} \frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial z_1^2} \frac{\partial^2 \delta w^{(i)}}{\partial z_1^2} - N^{(i)}(z_1) \frac{\partial w^{(i)}}{\partial z_1} \frac{\partial \delta w^{(i)}}{\partial z_1} + \right. \\ &+ \rho_1^{(i)} S^{(i)} \ddot{w}^{(i)} \delta w^{(i)} - q^{(i)}(z_1, t) \delta w^{(i)} \left. \right] dz_1 + \left[I \frac{\partial \ddot{w}}{\partial z_1} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} + \right. \\ &+ m \ddot{w} \delta w + m z_c \left(\ddot{w} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} + \frac{\partial \ddot{w}}{\partial z_1} \delta w \right) + \sum_{n=1}^{n_0} \ddot{\beta}_n \left(\lambda_n \delta w - \lambda_{0n} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} \right) - \\ &\left. - g m z_c \frac{\partial w}{\partial z_1} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} - g \sum_{n=1}^{n_0} \beta_n \lambda_n \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} - P_{O^*y^*} \delta w + M_{Ox} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} \right]_{z_1=\zeta} = 0. \end{aligned} \quad (5.100)$$

Тут $I = I^{(0)} + I^{(w)}$ – момент інерції корпусу резервуара і рухомої рідини відносно осі Ox ; $M = m^{(0)} + m_w$ – загальна маса резервуара і рідини; $z_c =$

$\frac{m^{(0)}z_{c_0} + m_w z_{c_w}}{m^{(0)} + m_w}$ – координата центру мас на осі Oz системи «резервуар - рідина».

За допомогою інтегрування за частинами перетворимо інтеграли, що входять в рівняння (5.100) і містять похідні від варіації прогину стержня. При цьому варіаційне рівняння (5.100) набуде вигляду:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^2 \int_{G^{(i)}} [\mathfrak{S}^{(i)}(w^{(i)}) - q^{(i)}(z_1, t)] \delta w^{(i)} dz_1 + \\
& + \left[M^{(2)} \frac{\partial \delta w^{(2)}}{\partial z_1} - Q_*^{(2)} \delta w^{(2)} \right]_{z_1=l} + \\
& + \left[(M^{(1)} - M^{(2)}) \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} + (Q_*^{(2)} - Q_*^{(1)}) \delta w + \right. \\
& + \left(m\ddot{w} + mz_c \frac{\partial \ddot{w}}{\partial z_1} + \sum_{n=1}^{n_0} \ddot{\beta}_n \lambda_n - P_{O^*y^*} \right) \delta w + \\
& + \left(I \frac{\partial \ddot{w}}{\partial z_1} + mz_c \ddot{w} - \sum_{n=1}^{n_0} \ddot{\beta}_n \lambda_{0n} - gmz_c \frac{\partial w}{\partial z_1} - \right. \\
& \left. - g \sum_{n=1}^{n_0} \beta_n \lambda_n + M_{Ox} \right) \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} \Big]_{z_1=\zeta} = 0, \tag{5.101}
\end{aligned}$$

де

$$\mathfrak{S}^{(i)}(w^{(i)}) = \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \left(E^{(i)} J^{(i)} \frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial z_1^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z_1} \left(N^{(i)} \frac{\partial w^{(i)}}{\partial z_1} \right) + \rho_1^{(i)} S^{(i)} \frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial t^2},$$

$$Q_*^{(i)} = Q^{(i)} + N^{(i)} \frac{\partial w^{(i)}}{\partial z_1}.$$

Враховуючи довільність варіацій $\delta w^{(i)}$ в областях $G^{(i)}$, а також довільність варіацій δw і $\frac{\partial \delta w}{\partial z_1}$ при $z_1 = l$ і $z_1 = \zeta$, отримуємо наступну крайову задачу відносно прогину стержня

$$\mathfrak{S}^{(i)}(w^{(i)}) = q^{(i)}(z_1, t) \quad \text{при} \quad z_1 \in G^{(i)},$$

$$M^{(2)}|_{z_1=l} = 0, \quad Q^{(2)}|_{z_1=l} = 0,$$

$$[Q_*^{(2)} - Q_*^{(1)}]_{z_1=\zeta} = - \left[m\ddot{w} + mz_c \frac{\partial \ddot{w}}{\partial z_1} + \sum_{n=1}^{n_0} \ddot{\beta}_n \lambda_n - P_{O^*y^*} \right]_{z_1=\zeta},$$

$$\begin{aligned}
[M^{(1)} - M^{(2)}]_{z_1=\zeta} &= - \left[I \frac{\partial \ddot{w}}{\partial z_1} + m z_c \ddot{w} - \sum_{n=1}^{n_0} \ddot{\beta}_n \lambda_{0n} - g m z_c \frac{\partial w}{\partial z_1} - \right. \\
&\quad \left. - g \sum_{n=1}^{n_0} \beta_n \lambda_n + M_{Ox} \right]_{z_1=\zeta}, \quad [w^{(1)} = w^{(2)} = w]_{z_1=\zeta}, \\
\left[\frac{\partial w^{(1)}}{\partial z_1} = \frac{\partial w^{(2)}}{\partial z_1} = \frac{\partial w}{\partial z_1} \right]_{z_1=\zeta}, \quad w^{(1)}|_{z_1=0} = \frac{\partial w^{(1)}}{\partial z_1} \Big|_{z_1=0} = 0. \quad (5.102)
\end{aligned}$$

Рівняння (5.102) в областях $G^{(i)}$ відносно функцій $w^{(i)}(z_1, t)$ є відомими рівняннями згинальних коливань стисненого осью силою $N^{(i)}(z_1)$ стержня, до якого прикладене розподілене навантаження $q^{(i)}(z_1, t)$.

Система рівнянь (5.102) не є замкнутою, оскільки вона включає в себе заздалегідь невідомі узагальнені координати $\beta_n(t)$. Для потенціалу зміщень рідини $\chi(x, y, z, t)$ залишилася невиконаною динамічна гранична умова на вільній поверхні рідини. Підставимо вираз (5.95) в цю граничну умову. Тоді, після застосування до отриманого рівняння процедури Бубнова - Гальоркіна, отримаємо наступну систему диференціальних рівнянь, що зв'язує узагальнені координати $\beta_n(t)$ з прогином стержня і його кутом повороту в перерізі $z_1 = \zeta$:

$$\begin{aligned}
\mu_n(\ddot{\beta}_n + \sigma_n^2 \beta_n) + \left[\lambda_n \ddot{w} - \lambda_{0n} \frac{\partial \ddot{w}}{\partial z_1} - g \lambda_n \frac{\partial w}{\partial z_1} \right]_{z_1=\zeta} &= 0, \\
(n = 1, 2, \dots, n_0), \quad (5.103)
\end{aligned}$$

де

$$\mu_n = \rho \int_{\Sigma} \varphi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} dS.$$

Рівняння (5.102) і (5.103) разом з додатково заданими початковими умовами, що полягають в розподілі переміщень і швидкостей рідини на її вільній поверхні і по довжині стержня при $t = 0$, повністю визначають взаємозв'язані коливання системи «стержень - резервуар - рідина» під дією прикладених до неї зовнішніх сил.

Введемо наступні безрозмірні величини, які позначені рискою зверху:

$$\begin{aligned}
\varphi_n &= R_0 \bar{\varphi}_n, \quad \Psi = R_0^2 \bar{\Psi}, \quad t^2 = \frac{R_0}{g} \bar{t}^2, \quad \lambda_n = \rho R_0^3 \bar{\lambda}_n, \quad \lambda_{0n} = \rho R_0^4 \bar{\lambda}_{0n}, \\
\sigma_n^2 &= \frac{g}{R_0} \bar{\sigma}_n^2, \quad \mu_n = \rho R_0^3 \bar{\mu}_n, \quad I = \rho R_0^5 \bar{I}, \quad w = R_0 \bar{w}, \quad \beta_n = R_0 \bar{\beta}_n, \\
E^{(i)} J^{(i)} &= E_0 J_0 \bar{E}^{(i)} \bar{J}^{(i)}, \quad \bar{D} = \frac{\rho R_0^5 g}{E_0 J_0}, \quad m = \rho R_0^3 \bar{m}, \quad N = \frac{E_0 J_0}{R_0^2} \bar{N}, \\
q &= \frac{E_0 J_0}{R_0^3} \bar{q}, \quad P_{O^*y^*} = \frac{E_0 J_0}{R_0^2} \bar{P}_{O^*y^*}, \quad M_{Ox} = \frac{E_0 J_0}{R_0} \bar{M}_{Ox},
\end{aligned} \tag{5.104}$$

де $E_0 J_0$ - згинна жорсткість стержня в його характерному перерізі, R_0 - характерний лінійний розмір розглядуваної механічної системи.

Тоді безрозмірне варіаційне рівняння (5.100) і система рівнянь (5.103) набудуть вигляду (риски над безрозмірними величинами надалі опускаються):

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^2 \int_{G^{(i)}} \left[E^{(i)} J^{(i)} \frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial z_1^2} \frac{\partial^2 \delta w^{(i)}}{\partial z_1^2} - N^{(i)} \frac{\partial w^{(i)}}{\partial z_1} \frac{\partial \delta w^{(i)}}{\partial z_1} + \right. \\
&+ \left. \frac{\rho_1^{(i)}}{\rho} D S^{(i)} \frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial t^2} \delta w^{(i)} - q^{(i)} \delta w^{(i)} \right] dz_1 + \\
&+ \left\{ D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial z_1 \partial t^2} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} + m z_c \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} + \frac{\partial^3 w}{\partial z_1 \partial t^2} \delta w \right) + \right. \right. \\
&+ m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w + \sum_{n=1}^{n_0} \frac{\partial^2 \beta_n}{\partial t^2} \left(\lambda_n \delta w - \lambda_{0n} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} \right) - m z_c \frac{\partial w}{\partial z_1} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} - \\
&\left. \left. - \sum_{n=1}^{n_0} \beta_n \lambda_n \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} \right] - P_{O^*y^*} \delta w + M_{Ox} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} \right\}_{z_1=\zeta} = 0; \tag{5.105}
\end{aligned}$$

$$\mu_n \left(\frac{\partial^2 \beta_n}{\partial t^2} + \sigma_n^2 \beta_n \right) + \left(\lambda_n \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \lambda_{0n} \frac{\partial^3 w}{\partial z_1 \partial t^2} - \lambda_n \frac{\partial w}{\partial z_1} \right)_{z_1=\zeta} = 0. \tag{5.106}$$

Коефіцієнти цих рівнянь визначаються за допомогою квадратур, якщо відомо розв'язок однорідної спектральної задачі з параметром в граничній умові (5.97) і неоднорідної крайової задачі Неймана (5.96) для потенціалу Стокса - Жуковського Ψ .

5.2.2 Варіаційний метод розв'язання задачі про власні коливання системи

Отримані рівняння дозволяють сформулювати математичну постановку задачі, яка описує вільні коливання розглядуваної механічної системи з частотою ω . Для цього покладемо:

$$\begin{aligned} q^{(k)}(z_1, t) &= P_{O^*y^*} = M_{Ox} = 0; \\ w^{(k)}(z_1, t) &= \exp^{i\omega t} \eta^{(k)}(z_1); \quad \beta_n(t) = \exp^{i\omega t} c_n, \quad (i = \sqrt{-1}). \end{aligned} \quad (5.107)$$

Після переходу до безрозмірних величин, отримаємо наступну крайову задачу відносно функцій $\eta^{(i)}(z_1)$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_1^{(i)}(\eta^{(i)}) &= \frac{d^2}{dz_1^2} \left(E^{(i)} J^{(i)} \frac{d^2 \eta^{(i)}}{dz_1^2} \right) + \frac{d}{dz_1} \left(N^{(i)} \frac{d\eta^{(i)}}{dz_1} \right) - \\ &- \omega^2 \frac{\rho_1^{(i)}}{\rho} D S^{(i)} \eta^{(i)} = 0, \quad z_1 \in G^{(i)}, \quad M^{(2)}|_{z_1=l} = Q_*^{(2)}|_{z_1=l} = 0, \\ [Q_*^{(2)} - Q_*^{(1)}]_{z_1=\zeta} &= \omega^2 D \left[m\eta + mz_c \frac{d\eta}{dz_1} + \sum_{n=1}^{n_0} c_n \lambda_n \right]_{z_1=\zeta}, \\ [M^{(1)} - M^{(2)}]_{z_1=\zeta} &= \omega^2 D \left[I \frac{d\eta}{dz_1} + mz_c \eta - \sum_{n=1}^{n_0} c_n \lambda_{0n} \right]_{z_1=\zeta} + \\ &+ Dmz_c \frac{d\eta}{dz_1} \Big|_{z_1=\zeta} + D \sum_{n=1}^{n_0} c_n \lambda_n, \quad [\eta^{(1)} = \eta^{(2)} = \eta]_{z_1=\zeta}, \\ \left[\frac{d\eta^{(1)}}{dz_1} = \frac{d\eta^{(2)}}{dz_1} = \frac{d\eta}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta}, & \quad \eta^{(1)}|_{z_1=0} = \frac{d\eta^{(1)}}{dz_1} \Big|_{z_1=0} = 0. \end{aligned} \quad (5.108)$$

Еквівалентне варіаційне формулювання задачі (5.108) можна отримати з варіаційного рівняння (5.100). Після відділення координати часу і переходу до безрозмірних величин, варіаційне рівняння для задачі (5.108) можна представити в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \delta F_1 &= \sum_{i=1}^2 \int_{G^{(i)}} \left[E^{(i)} J^{(i)} \frac{d^2 \eta^{(i)}}{dz_1^2} \frac{d^2 \delta \eta^{(i)}}{dz_1^2} - N^{(i)} \frac{d\eta^{(i)}}{dz_1} \frac{d\delta \eta^{(i)}}{dz_1} - \right. \\ &\left. - \omega^2 \frac{\rho_1^{(i)}}{\rho} D S^{(i)} \eta^{(i)} \delta \eta^{(i)} \right] dz_1 + p(\eta) \delta \eta + q(\eta) \frac{d\delta \eta}{dz_1} = 0. \end{aligned} \quad (5.109)$$

Тут

$$p(\eta) = -\omega^2 D \left[m\eta + mz_c \frac{d\eta}{dz_1} + \sum_{n=1}^{n_0} c_n \lambda_n \right]_{z_1=\zeta},$$

$$q(\eta) = \left[-\omega^2 D \left(I \frac{d\eta}{dz_1} + mz_c \eta - \sum_{n=1}^{n_0} c_n \lambda_{0n} \right) - D \left(mz_c \frac{d\eta}{dz_1} + \sum_{n=1}^{n_0} c_n \lambda_n \right) \right]_{z_1=\zeta}. \quad (5.110)$$

Варіаційне рівняння (5.109) має розв'язуватися на класі функцій, що задовольняють граничним умовам

$$\eta^{(1)} \Big|_{z_1=0} = \frac{d\eta^{(1)}}{dz_1} \Big|_{z_1=0} = 0, \quad (5.111)$$

$$[\eta^{(1)} = \eta^{(2)} = \eta]_{z_1=\zeta}, \quad \left[\frac{d\eta^{(1)}}{dz_1} = \frac{d\eta^{(2)}}{dz_1} = \frac{d\eta}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta}. \quad (5.112)$$

Решта граничних умов в формулах (5.108) є природними умовами для функціоналу F_1 .

До рівнянь (5.108) і (5.109) слід додати ще рівняння, що випливають з динамічної граничної умови на вільній поверхні рідини (5.103):

$$\mu_n (\sigma_n^2 - \omega^2) c_n + \left[\omega^2 \left(\lambda_{0n} \frac{d\eta}{dz_1} - \lambda_n \eta \right) - \lambda_n \frac{d\eta}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta} = 0, \quad (5.113)$$

$(n = 1, 2, \dots, n_0).$

Таким чином, визначення частот і форм власних коливань пружної конструкції, що несе резервуар з рідиною, зведено до розв'язання спектральної задачі (5.108), (5.113), де частотний параметр ω входить як в рівняння, так і в граничні умови. Для випадку, коли масові та жорсткісні характеристики стержня є кусково постійними функціями, для розв'язання такої спектральної задачі широке застосування отримав чисельний метод початкових параметрів [69], [86]. Відповідно до цього методу розв'язок рівняння (5.109) для кожної з ділянок з постійними пружно-масовими характеристиками представляються у вигляді функцій Крилова. При використанні цього методу послідовно виражають постійні розв'язку для кожної ділянки через постійні розв'язку для попередньої ділянки. При цьому вдається побудувати матрицю переходу, яка пов'язує вектор розв'язків, що відповідає перерізу стержня $z_1 = l$, з вектором розв'язків, що відповідає перерізу $z_1 = 0$. Рівняння для частот отримують при задоволенні крайових умов на останній ділянці. Оскільки

це рівняння являє собою досить складне трансцендентне рівняння відносно параметра ω , то знаходження його розв'язку можливо тільки при використанні чисельних методів типу методу послідовних наближень.

Для побудови наближеного розв'язку сформульованої спектральної задачі (5.108), (5.113) нижче будемо використовувати її еквівалентне варіаційне формулювання. З алгебраїчних рівнянь (5.113) можна знайти явні вирази для коефіцієнтів c_n , що залежать від прогину стержня і його кута повороту в перерізі $z_1 = \zeta$. Після підстановки цих виразів в варіаційне рівняння (5.109) параметр ω буде нелінійно входити в це рівняння, що в подальшому ускладнює алгоритм знаходження власних частот системи. Тому рівняння (5.113) будемо розглядати як додаткові співвідношення для знаходження зов'язку варіаційного рівняння (5.109).

Отже розв'язання задачі про власні коливання розглядуваної механічної системи зведено до розв'язання варіаційного рівняння (5.109) на класі функцій, що задовольняють головним граничним умовами (5.111) і (5.112). У цьому випадку інші граничні умови для варіаційної задачі (5.109) будуть природними граничними умовами. При використанні методу Рітца основні труднощі цієї задачі пов'язані з таким вибором апроксимуючих виразів для переміщень стержня, які забезпечували б неперервність не тільки самих переміщень $\eta^{(i)}$, але і їх перших похідних. Ця вимога призводить до досить складного в реалізації методу Рітца наприклад [95]. У зв'язку з цим виникає проблема про побудову такого варіаційного рівняння, для якого умови спряження (5.112) були б природними умовами.

Якщо розглядати граничні умови (5.112) як додаткові обмеження на клас допустимих функцій для варіаційної задачі (5.109), то можна скористатися підходом Лагранжа для побудови нового функціоналу F , для якого умови (5.112) будуть природними граничними умовами. У зв'язку з цим представимо варіаційне рівняння для функціоналу F в наступному вигляді:

$$\begin{aligned}
\delta F(\eta^{(i)}, \alpha_1, \alpha_2) = & \sum_{i=1}^2 \int_{G^{(i)}} \left[E^{(i)} J^{(i)} \frac{d^2 \eta^{(i)}}{dz_1^2} \frac{d^2 \delta \eta^{(i)}}{dz_1^2} - N^{(i)} \frac{d\eta^{(i)}}{dz_1} \frac{d\delta \eta^{(i)}}{dz_1} - \right. \\
& \left. - \omega^2 \frac{\rho_1^{(i)}}{\rho} D S^{(i)} \eta^{(i)} \delta \eta^{(i)} \right] dz_1 + \frac{1}{2} \left[p(\eta^{(1)}) \delta \eta^{(1)} + p(\eta^{(2)}) \delta \eta^{(2)} \right]_{z_1=\zeta} + \\
& + \frac{1}{2} \left[q(\eta^{(1)}) \frac{d\delta \eta^{(1)}}{dz_1} + q(\eta^{(2)}) \frac{d\delta \eta^{(2)}}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta} + \\
& + \delta \left[\alpha_1 (\eta^{(2)} - \eta^{(1)}) + \alpha_2 \left(\frac{d\eta^{(2)}}{dz_1} - \frac{d\eta^{(1)}}{dz_1} \right) \right]_{z_1=\zeta} = 0.
\end{aligned} \tag{5.114}$$

Тут α_1 і α_2 так звані множники Лагранжа, що підлягають визначенню в подальшому. Якщо виконані кінематичні умови спряження (5.112), то варіаційне рівняння (5.114) переходить до відповідного йому рівняння (5.109).

Знаходження розв'язку варіаційної задачі (5.109) відносно функцій $\eta^{(i)}$, α_1 і α_2 повинно здійснюватися на класі функцій, що задовольняють лише головним граничним умовам (5.111).

Покажемо, що множники α_1 і α_2 можна виразити через розв'язки $\eta^{(i)}$, ($i = 1, 2$) і їх похідні в точці $z_1 = \zeta$. Це дає можливість отримати узагальнене варіаційне рівняння, коли α_1 і α_2 в рівнянні (5.114) замінюються тотожно рівними їм виразами, що дозволить істотно спростити алгоритм розв'язання вихідної спектральної задачі.

Застосовуючи процедуру інтегрування за частинами, вираз для δF можна представити в наступному вигляді:

$$\begin{aligned}
\delta F = & \sum_{i=1}^2 \int_{G^{(i)}} \mathfrak{S}_1^{(i)}(\eta^{(i)}) \delta \eta^{(i)} dz_1 + \delta \alpha_1 [\eta^{(2)} - \eta^{(1)}]_{z_1=\zeta} + \\
& + \delta \alpha_2 \left[\frac{d\eta^{(2)}}{dz_1} - \frac{d\eta^{(1)}}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta} + \left\{ \left[M^{(2)}(\eta^{(2)}) \frac{d\delta \eta^{(2)}}{dz_1} - Q_*^{(2)}(\eta^{(2)}) \delta \eta^{(2)} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{1}{2} p(\eta^{(1)}) - Q_*^{(1)}(\eta^{(1)}) - \alpha_1 \right) \delta \eta^{(1)} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{1}{2} p(\eta^{(2)}) + Q_*^{(2)}(\eta^{(2)}) + \alpha_1 \right) \delta \eta^{(2)} + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{1}{2}q(\eta^{(1)}) + M^{(1)}(\eta^{(1)}) - \alpha_2 \right) \frac{d\delta\eta^{(1)}}{dz_1} + \\
& + \left. \left(\frac{1}{2}q(\eta^{(2)}) - M^{(2)}(\eta^{(2)}) + \alpha_2 \right) \frac{d\delta\eta^{(2)}}{dz_1} \right\}_{z_1=\zeta} = 0. \quad (5.115)
\end{aligned}$$

Варіаційне рівняння (5.115) має виконуватися для будь-яких варіацій $\delta\eta^{(i)}$, $\delta\alpha_1$ і $\delta\alpha_2$. Звідси випливає, що рівняннями Ейлера і природними граничними умовами для функціоналу F є рівняння і граничні умови спектральної задачі (5.108). Крім того, з рівняння (5.115) випливають співвідношення:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \left[\frac{1}{2}p(\eta^{(1)}) - Q_*^{(1)}(\eta^{(1)}) \right]_{z_1=\zeta}; \quad \alpha_1 = - \left[\frac{1}{2}p(\eta^{(2)}) + Q_*^{(2)}(\eta^{(2)}) \right]_{z_1=\zeta}; \\
\alpha_2 &= \left[\frac{1}{2}q(\eta^{(1)}) + M^{(1)}(\eta^{(1)}) \right]_{z_1=\zeta}; \quad \alpha_2 = - \left[\frac{1}{2}q(\eta^{(2)}) - M^{(2)}(\eta^{(2)}) \right]_{z_1=\zeta};
\end{aligned} \quad (5.116)$$

Співвідношення (5.116) дозволяють визначити відповідні вирази для множників Лагранжа:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{1}{2} \left[\frac{p(\eta^{(1)}) - p(\eta^{(2)})}{2} - Q_*^{(2)}(\eta^{(2)}) - Q_*^{(1)}(\eta^{(1)}) \right]_{z_1=\zeta}, \\
\alpha_2 &= \frac{1}{2} \left[\frac{q(\eta^{(1)}) - q(\eta^{(2)})}{2} + M^{(2)}(\eta^{(2)}) + M^{(1)}(\eta^{(1)}) \right]_{z_1=\zeta}.
\end{aligned} \quad (5.117)$$

Після підстановки виразів (5.117) в варіаційне рівняння (5.115) ми уникнемо штучного підвищення числа невідомих задачі за рахунок введених множників Лагранжа.

Отримані результати дозволяють перейти тепер до побудови наближеного розв'язку розглядуваної спектральної задачі використовуючи при цьому метод Рітца. У зв'язку з цим, представимо шукані функції $\eta^{(i)}(z_1)$ у вигляді наступних відрізків узагальнених рядів:

$$\eta^{(1)} = \sum_{j=1}^{m_0} a_j V_j^{(1)}(z_1), \quad \eta^{(2)} = \sum_{j=1}^{m_0} b_j V_j^{(2)}(z_1), \quad (5.118)$$

де

$$V_j^{(1)}(z_1) = z_1^2 P_j \left(\frac{2z}{\zeta} - 1 \right), \quad V_j^{(2)}(z_1) = P_j \left(\frac{2z}{l-\zeta} - \frac{l+\zeta}{l-\zeta} \right).$$

Тут P_j – зміщені на одиницю за індексом j многочлени Лежандра з аргументами, перетвореними на інтервали $[0, \zeta]$ і $[\zeta, l]$.

Система базисних функцій $\{V_j^{(1)}(z_1)\}$ підпорядкована кінематичним граничним умовам задачі (5.111).

Підставимо розклади (5.118) в варіаційне рівняння (5.114). Тоді функціонал $F(\eta)$ залежатиме від $2m_0 + n_0$ змінних $a_1, a_2, \dots, a_{m_0}, b_1, b_2, \dots, b_{m_0}, c_1, c_2, \dots, c_{n_0}$. З умов (5.113) і (5.114) можна отримати систему алгебраїчних рівнянь такого виду

$$(A - \omega^2 B)\vec{X} = 0, \quad (5.119)$$

де вектор стовпець \vec{X} має компоненти $a_1, a_2, \dots, a_{m_0}, b_1, b_2, \dots, b_{m_0}, c_1, c_2, \dots, c_{n_0}$.

При цьому елементи α_{ij} матриці A визначаються за такими формулами:

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \int_0^\zeta \left[E^{(1)} J^{(1)} \frac{d^2 V_j^{(1)}}{dz_1^2} \frac{d^2 V_i^{(1)}}{dz_1^2} - N^{(1)} \frac{dV_i^{(1)}}{dz_1} \frac{dV_j^{(1)}}{dz_1} \right] dz_1 + \\ &+ \frac{1}{2} \left[Q_i^{(1)} V_j^{(1)} + Q_j^{(1)} V_i^{(1)} - M_i^{(1)} \frac{dV_j^{(1)}}{dz_1} - M_j^{(1)} \frac{dV_i^{(1)}}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta}, \\ &\quad (i, j = 1, 2, \dots, m_0), \\ \alpha_{i,j+m_0} &= \frac{1}{2} \left[Q_j^{(2)} V_i^{(1)} - Q_i^{(1)} V_j^{(2)} - Dmz_c \frac{dV_i^{(1)}}{dz_1} \frac{dV_j^{(2)}}{dz_1} + \right. \\ &\quad \left. + M_i^{(1)} \frac{dV_j^{(2)}}{dz_1} - M_j^{(2)} \frac{dV_i^{(1)}}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, m_0), \\ \alpha_{i,j+2m_0} &= -\frac{1}{2} D \lambda_j \frac{dV_i^{(1)}}{dz_1} \Big|_{z_1=\zeta}, \quad (i = 1, 2, \dots, m_0, j = 1, 2, \dots, n_0), \\ \alpha_{i+m_0,j} &= \frac{1}{2} \left[Q_i^{(2)} V_j^{(1)} - Q_j^{(1)} V_i^{(2)} - Dmz_c \frac{dV_i^{(2)}}{dz_1} \frac{dV_j^{(1)}}{dz_1} + \right. \\ &\quad \left. + M_j^{(1)} \frac{dV_i^{(2)}}{dz_1} - M_i^{(2)} \frac{dV_j^{(1)}}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, m_0), \\ \alpha_{i+m_0,j+m_0} &= \int_\zeta^l E^{(2)} J^{(2)} \frac{d^2 V_j^{(2)}}{dz_1^2} \frac{d^2 V_i^{(2)}}{dz_1^2} - N^{(2)} \frac{dV_i^{(2)}}{dz_1} \frac{dV_j^{(2)}}{dz_1} \Big] dz_1 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \left[M_i^{(2)} \frac{dV_j^{(2)}}{dz_1} + M_j^{(2)} \frac{dV_i^{(2)}}{dz_1} - Q_i^{(2)} V_j^{(2)} - Q_j^{(2)} V_i^{(2)} \right]_{z_1=\zeta}, \\
& \qquad \qquad \qquad (i, j = 1, 2, \dots, m_0), \\
\alpha_{i+m_0, j+2m_0} &= -\frac{1}{2} D \lambda_j \frac{dV_i^{(2)}}{dz_1} \Big|_{z_1=\zeta}, \quad (i = 1, 2, \dots, m_0, j = 1, 2, \dots, n_0), \\
\alpha_{i+2m_0, j} &= -\frac{1}{2} D \lambda_i \frac{dV_j^{(1)}}{dz_1} \Big|_{z_1=\zeta}, \quad (i = 1, 2, \dots, n_0, j = 1, 2, \dots, m_0), \\
\alpha_{i+2m_0, j+m_0} &= -\frac{1}{2} D \lambda_i \frac{dV_j^{(2)}}{dz_1} \Big|_{z_1=\zeta}, \\
& \qquad \qquad \qquad (i = 1, 2, \dots, n_0, j = 1, 2, \dots, m_0), \\
\alpha_{i+2m_0, j+2m_0} &= \delta_{ij} D \mu_i \sigma_i^2, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n_0). \quad (5.120)
\end{aligned}$$

У свою чергу ненульові елементи β_{ij} матриці B обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned}
\beta_{i,j} &= D \int_0^\zeta \frac{\rho_1^{(1)}}{\rho} S^{(1)} V_i^{(1)} V_j^{(1)} dz + \\
& + \frac{1}{4} \left[P_j^{(1)} V_i^{(1)} - P_i^{(1)} V_j^{(1)} + R_j^{(1)} \frac{dV_i^{(1)}}{dz_1} - R_i^{(1)} \frac{dV_j^{(1)}}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta}, \\
& \qquad \qquad \qquad (i, j = 1, 2, \dots, m_0), \\
\beta_{i,j+m_0} &= \frac{1}{4} \left[P_i^{(1)} V_j^{(2)} + P_j^{(2)} V_i^{(1)} + R_i^{(1)} \frac{dV_j^{(2)}}{dz_1} + R_j^{(2)} \frac{dV_i^{(1)}}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta}, \\
& \qquad \qquad \qquad (i, j = 1, 2, \dots, m_0), \\
\beta_{i,j+2m_0} &= \frac{1}{2} D \left[\lambda_j V_i^{(1)} - \lambda_{0j} \frac{dV_i^{(1)}}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta}, \\
& \qquad \qquad \qquad (i = 1, 2, \dots, m_0, j = 1, 2, \dots, n_0), \\
\beta_{i+m_0, j} &= \frac{1}{4} \left[P_i^{(2)} V_j^{(1)} + P_j^{(1)} V_i^{(2)} + R_i^{(2)} \frac{dV_j^{(1)}}{dz_1} + R_j^{(1)} \frac{dV_i^{(2)}}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta}, \\
& \qquad \qquad \qquad (i, j = 1, 2, \dots, m_0), \\
\beta_{i+m_0, j+m_0} &= D \int_\zeta^l \frac{\rho_1^{(2)}}{\rho} S^{(2)} V_i^{(2)} V_j^{(2)} dz + \\
& + \frac{1}{4} \left[P_j^{(2)} V_i^{(2)} - P_i^{(2)} V_j^{(2)} + R_j^{(2)} \frac{dV_i^{(2)}}{dz_1} - R_i^{(2)} \frac{dV_j^{(2)}}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (i, j = 1, 2, \dots, m_0), \\
\beta_{i+m_0, j+2m_0} &= \frac{1}{2} D \left[\lambda_j V_i^{(2)} - \lambda_{0j} \frac{dV_i^{(2)}}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta}, \\
& (i = 1, 2, \dots, m_0, j = 1, 2, \dots, n_0), \\
\beta_{i+2m_0, j} &= \frac{1}{2} D \left[\lambda_i V_j^{(1)} - \lambda_{0i} \frac{dV_j^{(1)}}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta}, \\
& (i = 1, 2, \dots, n_0, j = 1, 2, \dots, m_0), \\
\beta_{i+2m_0, j+m_0} &= \frac{1}{2} D \left[\lambda_i V_j^{(2)} - \lambda_{0i} \frac{dV_j^{(2)}}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta}, \\
& (i = 1, 2, \dots, n_0, j = 1, 2, \dots, m_0), \\
\beta_{i+2m_0, j+2m_0} &= \delta_{ij} D \mu_i, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n_0). \tag{5.121}
\end{aligned}$$

У формулах (5.120) і (5.121) δ_{ij} - символ Кронекера, а решта позначень мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
Q_i^{(k)} &= Q_*^{(k)}(V_i^{(k)}), \quad M_i^{(k)} = M^{(k)}(V_i^{(k)}), \\
P_i^{(k)} &= Dm \left(V_i^{(k)} + z_c \frac{dV_i^{(k)}}{dz_1} \right), \quad R_i^{(k)} = D \left(mz_c V_i^{(k)} + I \frac{dV_i^{(k)}}{dz_1} \right), \\
& (k = 1, 2, i = 1, 2, \dots, m_0).
\end{aligned}$$

Перші $2m_0$ рівнянь алгебраїчної системи (5.119) були отримані з варіаційного рівняння (5.114), а останні n_0 рівнянь - з рівнянь (5.113) попередньо помноживши їх на коефіцієнт D і поклавши в них $\eta = (\eta^{(1)} + \eta^{(2)})/2$ при $z_1 = \zeta$. З наведених виразів для α_{ij} і β_{ij} можна легко побачити, що матриці A і B є симетричними.

Таким чином, визначення частот і форм власних коливань розглядуваної механічної системи звелось до розв'язання узагальненої алгебраїчної задачі (5.119).

5.2.3 Вимушені коливання стержня з підвісним резервуаром при дії на нього навантаження довільного виду

Нагадаємо, що вище були отримані рівняння (5.102) і (5.103), які разом з додатково заданими початковими умовами, що полягають в розподілі пере-

міщень і швидкостей рідини на її вільній поверхні і по довжині стержня при $t = 0$, повністю визначають взаємопов'язані коливання системи «стержень – резервуар – рідина» під дією прикладених до неї зовнішніх сил.

Для ефективного розрахунку коливань розглядуваної механічної системи під дією прикладених до неї зосереджених і розподілених навантажень, граничну задачу для рівнянь в частинних похідних (5.102) і (5.103) доцільно привести до системи звичайних диференціальних рівнянь, незалежною змінною в яких є час t .

Приведення рівнянь (5.102) і (5.103), з урахуванням відповідних граничних умов, до нескінченної системи звичайних диференціальних рівнянь можна здійснити за допомогою методу Бубнова - Гальоркіна. Для реалізації цього методу необхідно мати у своєму розпорядженні системою лінійно-незалежних функцій, що задовольняє граничним умовам задачі і умові повноти. Ця процедура не є однозначною і в істотній мірі залежить від вибору узагальнених координат, що характеризують в сукупності збурений рух конструкції. У роботах [69] і [86] в якості базисних функцій для прогинів стержня вибиралися власні функції спектральної задачі, яка описує вільні коливання стержня з рухомим резервуаром з затверділою рідиною. У свою чергу, для опису хвильових рухів рідини в рухомому резервуарі були використані власні функції спектральної задачі про вільні коливання рідини в нерухомому резервуарі. В результаті, вихідна задача була зведена до системи взаємозв'язаних звичайних диференціальних рівнянь відносно узагальнених координат, що характеризують збурений рух стержня і хвильові рухи рідини в рухомому резервуарі.

З практичної точки зору необхідно прагнути до такої системи звичайних диференціальних рівнянь, яка мала б найбільш простий вигляд і невелику розмірність. Як буде показано нижче, цим вимогам відповідає система, де для апроксимації шуканих розв'язків в якості базисних функцій обрані власні функції спектральної задачі, яка описує вільні взаємозв'язані коливання

стержня і рідини в прикріпленому до нього резервуарі.

Встановимо умови ортогональності власних функцій однорідної крайової задачі (5.108). Для цього підставимо в ці рівняння $\eta = \eta_i(z_1)$, $\omega = \omega_i$ і помножимо їх на $\eta_j(z_1)$, де i і j приймають довільні, нерівні між собою, цілочисельні значення, і проінтегруємо отриманий результат від нуля до l . Після застосування процедури інтегрування по частинам з урахуванням граничних умов (5.108) отримуємо:

$$\begin{aligned} & \int_0^l \left[EJ \frac{d^2 \eta_i}{dz_1^2} \frac{d^2 \eta_j}{dz_1^2} - N \frac{d\eta_i}{dz_1} \frac{d\eta_j}{dz_1} - \omega_i^2 \frac{\rho_1}{\rho} DS \eta_i \eta_j \right] dz_1 - \\ & - D \left\{ \omega_i^2 \left[m \eta_i \eta_j + m z_c \left(\frac{d\eta_i}{dz_1} \eta_j + \frac{d\eta_j}{dz_1} \eta_i \right) + I \frac{d\eta_i}{dz_1} \frac{d\eta_j}{dz_1} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(i)} \left(\lambda_n \eta_j - \lambda_{0n} \frac{d\eta_j}{dz_1} \right) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(i)} \lambda_n \frac{d\eta_j}{dz_1} + m z_c \frac{d\eta_i}{dz_1} \frac{d\eta_j}{dz_1} \right\}_{z_1=\zeta} = 0. \end{aligned} \quad (5.122)$$

Поміняємо місцями в цьому рівнянні індекси i і j потім віднімемо одержане рівняння з рівняння (5.122). При цьому будемо мати

$$\begin{aligned} & (\omega_j^2 - \omega_i^2) \left\{ \int_0^l \frac{\rho_1}{\rho} S \eta_i \eta_j dz_1 + \left[m \eta_i \eta_j + \right. \right. \\ & \left. \left. + m z_c \left(\frac{d\eta_i}{dz_1} \eta_j + \frac{d\eta_j}{dz_1} \eta_i \right) + I \frac{d\eta_i}{dz_1} \frac{d\eta_j}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta} \right\} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(j)} \left[\omega_j^2 \left(\lambda_n \eta_i - \lambda_{0n} \frac{d\eta_i}{dz_1} \right) + \lambda_n \frac{d\eta_i}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta} - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(i)} \left[\omega_i^2 \left(\lambda_n \eta_j - \lambda_{0n} \frac{d\eta_j}{dz_1} \right) + \lambda_n \frac{d\eta_j}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta} = 0. \end{aligned} \quad (5.123)$$

Для подальшого перетворення рівняння (5.123) скористаємося зв'язком між $c_n^{(i)}$ і η_i отриманим з рівняння (5.113):

$$\begin{aligned} \mu_n (\sigma_n^2 - \omega_i^2) c_n^{(i)} &= - \left[\omega_i^2 \left(\lambda_{0n} \frac{d\eta_i}{dz_1} - \lambda_n \eta_i \right) - \lambda_n \frac{d\eta_i}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta}. \\ & (n = 1, 2, \dots, n_0). \end{aligned} \quad (5.124)$$

Беручи до уваги рівняння (5.124), після нескладних перетворень можна

показати, що

$$\begin{aligned} & \left[\omega_j^2 \left(\lambda_n \eta_i - \lambda_{0n} \frac{d\eta_i}{dz_1} \right) + \lambda_n \frac{d\eta_i}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta} = \\ & = (\omega_j^2 - \omega_i^2) \left(\lambda_n \eta_i - \lambda_{0n} \frac{d\eta_i}{dz_1} \right)_{z_1=\zeta} + c_n^{(i)} (\mu_n \sigma_n^2 - \mu_n \omega_i^2). \end{aligned} \quad (5.125)$$

Помінявши в цьому рівнянні місцями індекси i і j , отримаємо ще одне співвідношення, яке необхідно для подальших перетворень виразу (5.123). З урахуванням цих співвідношень і того, що $\omega_j \neq \omega_i$ при $i \neq j$ з рівняння (5.123) отримуємо першу умову ортогональності для власних функцій задачі (5.108), (5.113):

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^2 \int_{G^{(k)}} \frac{\rho_1^{(k)}}{\rho} S^{(k)} \eta_i^{(k)} \eta_j^{(k)} dz_1 + \left[m \eta_i \eta_j + m z_c \left(\frac{d\eta_j}{dz_1} \eta_i + \frac{d\eta_i}{dz_1} \eta_j \right) + I \frac{d\eta_i}{dz_1} \frac{d\eta_j}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n^{(i)} c_n^{(j)} \mu_n + c_n^{(j)} \left(\lambda_n \eta_i - \lambda_{0n} \frac{d\eta_i}{dz_1} \right) + c_n^{(i)} \left(\lambda_n \eta_j - \lambda_{0n} \frac{d\eta_j}{dz_1} \right) \right]_{z_1=\zeta} = 0. \end{aligned} \quad (5.126)$$

Другу умову ортогональності отримаємо з рівняння (5.108) при $\eta = \eta_i$, $\omega = \omega_i$. Помножимо отримане рівняння на $\omega_j^2 \eta_j$ і інтегруємо його в межах від нуля до l з використанням формули інтегрування по частинам та граничних умов крайової задачі (5.108). При цьому отримуємо

$$\begin{aligned} & \omega_j^2 \sum_{k=1}^2 \int_{G^{(k)}} \left[E^{(k)} J^{(k)} \frac{d^2 \eta_i^{(k)}}{dz_1^2} \frac{d^2 \eta_j^{(k)}}{dz_1^2} - \right. \\ & \left. - N^{(k)} \frac{d\eta_i^{(k)}}{dz_1} \frac{d\eta_j^{(k)}}{dz_1} - \omega_i^2 \omega_j^2 D \frac{\rho_1^{(k)}}{\rho} S^{(k)} \eta_i^{(k)} \eta_j^{(k)} \right] dz_1 - \\ & - \omega_j^2 D \left\{ \omega_i^2 \left[m \eta_i \eta_j + m z_c \left(\frac{d\eta_i}{dz_1} \eta_j + \frac{d\eta_j}{dz_1} \eta_i \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + I \frac{d\eta_i}{dz_1} \frac{d\eta_j}{dz_1} \right] + \omega_i^2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(i)} \left[\lambda_n \eta_j - \lambda_{0n} \frac{d\eta_j}{dz_1} \right] + \right. \\ & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(i)} \lambda_n \frac{d\eta_j}{dz_1} + z_c m \frac{d\eta_i}{dz_1} \frac{d\eta_j}{dz_1} \right\}_{z_1=\zeta} = 0. \end{aligned} \quad (5.127)$$

Поміняємо місцями в цьому рівнянні індекси i і j потім віднімемо одержане рівняння з рівняння (5.127). При цьому будемо мати

$$\begin{aligned}
& (\omega_j^2 - \omega_i^2) \sum_{k=1}^2 \int_{G^{(k)}} \left[E^{(k)} J^{(k)} \frac{d^2 \eta_i^{(k)}}{dz_1^2} \frac{d^2 \eta_j^{(k)}}{dz_1^2} - N^{(k)} \frac{d\eta_i^{(k)}}{dz_1} \frac{d\eta_j^{(k)}}{dz_1} \right] dz_1 - \\
& - D \left\{ z_c m \frac{d\eta_i}{dz_1} \frac{d\eta_j}{dz_1} (\omega_j^2 - \omega_i^2) + \omega_i^2 \omega_j^2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(i)} \left(\lambda_n \eta_j - \lambda_{0n} \frac{d\eta_j}{dz_1} \right) + \omega_j^2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(i)} \lambda_n \frac{d\eta_j}{dz_1} - \right. \\
& \left. - \omega_i^2 \omega_j^2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(j)} \left(\lambda_n \eta_i - \lambda_{0n} \frac{d\eta_i}{dz_1} \right) - \omega_i^2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(j)} \lambda_n \frac{d\eta_i}{dz_1} \right\}_{z_1=\zeta} = 0.
\end{aligned} \tag{5.128}$$

Перетворимо рівняння (5.128) з урахуванням співвідношень (5.124). Тоді беручи до уваги, що $\omega_j \neq \omega_i$ при $i \neq j$, другу умову ортогональності можна представити в наступному вигляді:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^2 \int_{G^{(k)}} \left[E^{(k)} J^{(k)} \frac{d^2 \eta_i^{(k)}}{dz_1^2} \frac{d^2 \eta_j^{(k)}}{dz_1^2} - N^{(k)} \frac{d\eta_i^{(k)}}{dz_1} \frac{d\eta_j^{(k)}}{dz_1} \right] dz_1 - \\
& - D \left\{ z_c m \frac{d\eta_i}{dz_1} \frac{d\eta_j}{dz_1} - \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(i)} c_n^{(j)} \mu_n \sigma_n^2 + \right. \\
& \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(c_n^{(j)} \frac{d\eta_i}{dz_1} + c_n^{(i)} \frac{d\eta_j}{dz_1} \right) \right\}_{z_1=\zeta} = 0, \quad (i \neq j).
\end{aligned} \tag{5.129}$$

Нехай до розглядуваної механічної системи прикладені описані вище зовнішні навантаження. Виникаючі при цьому поперечні переміщення стержня $w(z_1, t)$ в площині $O_1 y_1 z_1$ і відповідні їм узагальнені координати $\beta_n(t)$, що характеризують хвильові рухи рідини в рухомому резервуарі представимо у вигляді наступних розкладів:

$$w(z_1, t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \eta_i(z_1), \quad \beta_n(t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) c_n^{(i)}, \tag{5.130}$$

де $q_i(t)$ – узагальнені координати системи, що характеризують її вимушені коливання.

Підставимо розклади (5.130) в систему диференціальних рівнянь (5.113). В результаті отримаємо наступні рівняння:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[\ddot{q}_i \left(\mu_n c_n^{(i)} + \lambda_n \eta_i - \lambda_{0n} \frac{d\eta_i}{dz_1} \right) - q_i \left(\lambda_n \frac{d\eta_i}{dz_1} - \mu_n \sigma_n^2 c_n^{(i)} \right) \right]_{z_1=\zeta} = 0. \quad (5.131)$$

Решту диференціальних рівнянь отримаємо з безрозмірного варіаційного рівняння (5.105) підставивши в нього розклади (5.130) і поклавши $\delta w = \eta_j(z_1)$. З урахуванням першої умови ортогональності (5.126) отримані рівняння можна перетворити до наступного вигляду:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\infty} q_i \psi_{ij} + \ddot{q}_j a_j - \sum_{i=1}^{\infty} D \ddot{q}_i \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n^{(i)} c_n^{(j)} \mu_n + \right. \\ & \quad \left. + c_n^{(j)} \left(\lambda_n \eta_i - \lambda_{0n} \frac{d\eta_i}{dz_1} \right) \right]_{z_1=\zeta} - \\ & - D \sum_{i=1}^{\infty} q_i \left[\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(i)} \lambda_n \frac{d\eta_j}{dz_1} + m z_c \frac{d\eta_i}{dz_1} \frac{d\eta_j}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta} = Q_j(t), \quad (5.132) \\ & \quad (j = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \psi_{i,j} &= \sum_{k=1}^2 \int_{G^{(k)}} \left(E^{(k)} J^{(k)} \frac{d^2 \eta_i^{(k)}}{dz_1^2} \frac{d^2 \eta_j^{(k)}}{dz_1^2} - N^{(k)} \frac{d\eta_i^{(k)}}{dz_1} \frac{d\eta_j^{(k)}}{dz_1} \right) dz_1, \\ a_j &= D \left\{ \sum_{k=1}^2 \int_{G^{(k)}} \frac{\rho_1^{(k)}}{\rho} (\eta_j^{(k)})^2 S^{(k)} dz_1 + \left[m \eta_j^2 + 2m z_c \eta_j \frac{d\eta_j}{dz_1} + I \left(\frac{d\eta_j}{dz_1} \right)^2 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left((c_n^{(j)})^2 \mu_n + 2c_n^{(j)} \left(\lambda_n \eta_j - \lambda_{0n} \frac{d\eta_j}{dz_1} \right) \right) \right]_{z_1=\zeta} \right\}, \\ Q_j(t) &= \sum_{k=1}^2 \int_{G^{(k)}} q^{(k)} \eta_j^{(k)} dz_1 + \left[P_{O^*y^*} \eta_j - M_{Ox} \frac{d\eta_j}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta}. \end{aligned}$$

Якщо скористаємося другою умовою ортогональності (5.2.3), формулою (5.122) при $i = j$, співвідношенням (5.123) для власних форм коливань системи, то для першої суми в лівій частині рівнянь (5.132) після ряду перетворень

можна встановити наступне вираз:

$$\sum_{i=1}^{\infty} q_i \psi_{ij} = q_j a_j \omega_j^2 + \sum_{i=1}^{\infty} D q_i \left[z_c m \frac{d\eta_i}{dz_1} \frac{d\eta_j}{dz_1} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n^{(i)} c_n^{(j)} \mu_n \sigma_n^2 - \lambda_n c_n^{(j)} \frac{d\eta_i}{dz_1} - \lambda_n c_n^{(i)} \frac{d\eta_j}{dz_1} \right) \right]_{z_1=\zeta} \quad (5.133)$$

З урахуванням цього співвідношення рівняння (5.132) набудуть вигляду:

$$a_j (\ddot{q}_j + \omega_j^2 q_j) + \sum_{i=1}^{\infty} q_i D \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n c_n^{(j)} \frac{d\eta_i}{dz_1} - c_n^{(i)} c_n^{(j)} \mu_n \sigma_n^2 \right) \right]_{z_1=\zeta} - \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{q}_i D \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n^{(i)} c_n^{(j)} \mu_n + c_n^{(j)} \left(\lambda_n \eta_i - \lambda_{0n} \frac{d\eta_i}{dz_1} \right) \right) \right]_{z_1=\zeta} = Q_j(t). \quad (5.134)$$

Скориставшись рівняннями (5.131), рівняння (5.134) приймають наступну форму:

$$a_j (\ddot{q}_j + \omega_j^2 q_j) = Q_j(t), \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (5.135)$$

Таким чином, отримані рівняння руху розглядуваної механічної системи під впливом прикладених до неї зосереджених і розподілених навантажень з використанням розкладу по власним функціям спектральної задачі, яка описує спільні вільні коливання стержня і рідини в підвішеному до нього резервуарі, дозволило звести вихідну задачу (5.108), (5.113) до інтегрування нескінченної системи не зв'язаних між собою диференціальних рівнянь найбільш простого виду (5.135). Коефіцієнти цієї системи рівнянь виражаються через частоти і форми власних коливань даної конструкції, а також через гідродинамічні коефіцієнти μ_n , σ_n^2 , $I^{(w)}$, λ_n і λ_{0n} . Отже перед розв'язанням задачі про збурений рух конструкції необхідно попередньо розв'язати спектральну задачу про власні коливання системи і визначити вищевказані гідродинамічні коефіцієнти.

5.2.4 Вимушені коливання стержня з підвісним резервуаром при гармонічному збуренні його основи

Вище передбачалося, що вимушені коливання розглядуваної механічної системи були викликані прикладеними до неї заданими силами і моментами, що змінюються в часі. На практиці також зустрічаються випадки, коли коливання виникають внаслідок заданого руху деяких точок осі або обертання певних поперечних перерізів стержня. Розглянемо випадок, коли основа стержня, жорстко закріплена на деякій рухомій опорі, яка в свою чергу здійснює задані гармонічні коливання в площині $O_1y_1z_1$ по наступному закону

$$w(0, t) = H \sin pt, \quad H \ll 1. \quad (5.136)$$

Потрібно визначити рух стержня і рідини в резервуарі, викликані горизонтальними переміщеннями основи стержня з амплітудою H і частотою p . Доцільність представлення руху основи стержня у вигляді гармонічних коливань (5.136) впливає з того, що всякий рух основи може бути представлено у вигляді суперпозиції гармонічних коливань, оскільки будь-яка неперервна функція $w(0, t)$ на кінцевому інтервалі часу може бути замінена відповідним рядом Фур'є.

Далі будемо розглядати усталені вимушені коливання механічної системи під дією кінематичного збурення (5.136), масових і відновлюючих сил. В цьому випадку переміщення стержня $w(z_1, t)$ в площині $O_1y_1z_1$ і узагальнені координати $\beta_n(t)$, що характеризують хвильові рухи рідини в рухомому резервуарі, можна представити в наступному вигляді:

$$w(z_1, t) = \eta(z_1) \sin pt, \quad \beta_n(t) = c_n \sin pt. \quad (5.137)$$

Математичне формулювання задачі для визначення функції $\eta(z_1)$ і чисел c_n можна отримати з рівнянь (5.102) і (5.103). При цьому її можна представити у вигляді (5.108) і (5.113), де ω^2 слід замінити на p^2 . Крім цього граничні умови жорсткого кріплення торця стержня в (5.108) слід замінити на умови:

$$\eta(0) = H, \quad \left. \frac{d\eta}{dz_1} \right|_{z_1=0} = 0.$$

Для побудови наближеного аналітичного розв'язку сформульованої не-однорідної крайової задачі використовуємо її варіаційне формулювання і метод Рітца.

Розв'язок варіаційного рівняння

$$\begin{aligned} \delta F(\eta^{(i)}, \alpha_1, \alpha_2) = & \sum_{i=1}^2 \int_{G^{(i)}} \left[E^{(i)} J^{(i)} \frac{d^2 \eta^{(i)}}{dz_1^2} \frac{d^2 \delta \eta^{(i)}}{dz_1^2} - \right. \\ & \left. - N^{(i)} \frac{d\eta^{(i)}}{dz_1} \frac{d\delta \eta^{(i)}}{dz_1} - \omega^2 \frac{\rho_1^{(i)}}{\rho} DS^{(i)} \eta^{(i)} \delta \eta^{(i)} \right] dz_1 + \\ & + \frac{1}{2} \left[p(\eta^{(1)}) \delta \eta^{(1)} + p(\eta^{(2)}) \delta \eta^{(2)} \right]_{z_1=\zeta} + \\ & + \frac{1}{2} \left[q(\eta^{(1)}) \frac{d\delta \eta^{(1)}}{dz_1} + q(\eta^{(2)}) \frac{d\delta \eta^{(2)}}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta} + \\ & + \delta \left[\alpha_1 (\eta^{(2)} - \eta^{(1)}) + \alpha_2 \left(\frac{d\eta^{(2)}}{dz_1} - \frac{d\eta^{(1)}}{dz_1} \right) \right]_{z_1=\zeta} = 0, \end{aligned} \quad (5.138)$$

після підстановки в нього явних виразів для множників Лагранжа α_1, α_2 і заміни ω^2 на p^2 слід розшукувати на класі функцій, підкорених лише головним граничним умовами задачі:

$$\eta^{(1)}(0) = H, \quad \left. \frac{d\eta^{(1)}}{dz_1} \right|_{z_1=0} = 0.$$

У зв'язку з цим представимо шукані функції $\eta^{(1)}(z_1)$ і $\eta^{(2)}(z_1)$ в наступному вигляді:

$$\eta^{(1)}(z_1) = H + \sum_{j=1}^{m_0} a_j V_j^{(1)}(z_1), \quad \eta^{(2)}(z_1) = \sum_{j=1}^{m_0} b_j V_j^{(2)}(z_1), \quad (5.139)$$

де a_j і b_j – постійні, що підлягають визначенню;

$$V_j^{(1)}(z_1) = z_1^2 P_j \left(\frac{2z}{\zeta} - 1 \right), \quad V_j^{(2)}(z_1) = P_j \left(\frac{2z}{l - \zeta} - \frac{l + \zeta}{l - \zeta} \right).$$

Тут P_j – зміщені на одиницю за індексом j многочлени Лежандра з аргументами, перетвореними на інтервали $[0, \zeta]$ і $[\zeta, l]$ відповідно.

Перші $2m_0$ рівнянь відносно постійних $\{a_j\}_{j=1}^{m_0}$, $\{b_j\}_{j=1}^{m_0}$ і $\{c_j\}_{j=1}^{n_0}$ отримаємо з варіаційного рівняння (5.138) після підстановки в нього виразів (5.139).

Останні n_0 рівнянь отримаємо з рівнянь (5.113) попередньо помноживши їх на D , для симетрії загальної системи рівнянь, і поклавши в них

$$\left[\eta = \frac{\eta^{(1)} + \eta^{(2)}}{2} \right]_{z_1=\zeta} \quad (5.140)$$

з урахуванням виразів (5.139) при $z_1 = \zeta$.

При цьому отримаємо наступну неоднорідну систему алгебраїчних рівнянь:

$$(A - p^2 B)\vec{X} = \vec{\Gamma}, \quad (5.141)$$

де вектор стовпець \vec{X} має компоненти $a_1, a_2, \dots, a_{m_0}, b_1, b_2, \dots, b_{m_0}, c_1, c_2, \dots, c_{n_0}$.

Елементи матриць A і B визначаються за формулами аналогічними наведеним вище для задачі про коливання резервуара, закріпленого на пружній опорі. Коефіцієнти γ_i вектора-стовпця $\vec{\Gamma}$ правої частини рівнянь (5.141) будуть визначатися за формулами:

$$\begin{aligned} \gamma_i &= p^2 HD \int_{G^{(1)}} \frac{\rho^{(1)}}{\rho} S^{(1)} V_i^{(1)} dz_1 - \frac{H}{2} Q_i^{(1)} \Big|_{z_1=\zeta}, \\ \gamma_{i+m_0} &= \left\{ \frac{p^2 HD m}{2} \left(V_i^{(2)} + z_c \frac{dV_i^{(2)}}{dz_1} \right) - \frac{H}{2} Q_i^{(2)} \right\} \Big|_{z_1=\zeta}, \\ &\quad (i = 1, 2 \dots, m_0), \\ \gamma_{i+2m_0} &= p^2 HD \lambda_i, \quad (i = 1, 2 \dots, n_0), \end{aligned} \quad (5.142)$$

де

$$Q_i^{(k)} = Q_*^{(k)}(V_i^{(k)}), \quad (k = 1, 2).$$

Таким чином, задача про визначення вимушених коливань розглядуваної механічної системи при заданому горизонтальному гармонічному збуренні основи стержня звелася до розв'язання неоднорідної алгебраїчної системи (5.141). Симетрія матриць A і B є математичним виразом консервативності механічної системи.

Аналогічним чином може бути розв'язана задача для випадку, коли установлені вимушені коливання системи викликаються заданим гармонічним обертанням певних поперечних перерізів стержня.

5.3 Деякі результати розрахунків і їх аналіз

5.3.1 Власні коливання резервуара з рідиною, закріпленого на пружній опорі

Нехай тонкостінний стержень, до верхнього торця якого прикріплений циліндричний резервуар, є однорідним і має циліндричну форму. Введемо наступні позначення: r_0 , δ – радіус і товщина стержня відповідно; $a = r_0/R_0$ – радіус стержня віднесений до радіусу резервуара; $l_1 = l/r_0$, $\delta_1 = \delta/r_0$ – довжина і товщина стержня, віднесені до його радіусу.

Виберемо в якості характерного лінійного розміру розглядуваної механічної системи радіус резервуара R_0 . Безрозмірні площа поперечного перерізу, його екваторіальний момент інерції і коефіцієнт D (формули (2.17)) можна представити в наступному вигляді:

$$F = 2\pi a^2 \delta_1; \quad J = \pi a^4 \delta_1;$$

$$D = D_1 \frac{1}{\pi a^4 \delta_1}; \quad D_1 = \frac{\rho g R_0}{E_0}.$$

Наведемо деякі результати розрахунків власних коливань розглядуваної механічної системи, що ілюструють ефективність запропонованого методу розв'язання спектральної задачі і вплив коливань рідини в резервуарі на частоти і форми коливань системи в цілому.

При розрахунках масою резервуара нехтували $m_0 = 0$ і були використані наступні безрозмірні величини:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = 7.8; \quad D_1 = 0.476 \cdot 10^{-7}; \quad a = 0.5; \quad \delta_1 = 0.01.$$

Глибина рідини в резервуарі h і довжина стержня l варіювалися.

Таблиця 5.1

Значення частот ω_i зв'язаних коливань системи «стержень – резервуар – рідина» при $h = 1$, $l_1 = 20$ в залежності від числа членів n_0 і m_0 в розкладах (5.12) і (5.67) відповідно.

m_0	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_{n_0+1}	ω_{n_0+2}	ω_{n_0+3}
$n_0 = 1$							
6	1.3086905				6.8813575	84.14739	296.54805
7	1.3086905				6.8813575	84.14727	296.49416
8	1.3086905				6.8813575	84.14727	296.46383
9	1.3086905				6.8813575	84.14727	296.46365
10	1.3086905				6.8813575	84.14727	296.46360
$n_0 = 2$							
6	1.3086864	2.3069021			6.9330457	84.67431	300.29854
7	1.3086864	2.3069021			6.9330457	84.67418	300.24745
8	1.3086864	2.3069021			6.9330457	84.67418	300.21354
9	1.3086873	2.3069021			6.9330457	84.67418	300.21336
10	1.3086864	2.3069021			6.9330457	84.67418	300.21330
$n_0 = 3$							
6	1.3086859	2.3069007	2.9207033		6.9458870	84.83303	301.32484
7	1.3086863	2.3069007	2.9207032		6.9458870	84.83290	301.27459
8	1.3086864	2.3069007	2.9207032		6.9458870	84.83290	301.23966
9	1.3086864	2.3069006	2.9207032		6.9458870	84.83290	301.23949
10	1.3086864	2.3069006	2.9207032		6.9458870	84.83290	301.23949
$n_0 = 4$							
6	1.3086858	2.3069005	2.9207026	3.4207563	6.9511584	84.90045	301.74666
7	1.3086858	2.3069005	2.9207026	3.4207563	6.9511584	84.90032	301.69676
8	1.3086858	2.3069005	2.9207026	3.4207563	6.9511584	84.90032	301.66141
9	1.3086858	2.3069005	2.9207025	3.4207563	6.9511584	84.90032	301.66123
10	1.3086858	2.3069005	2.9207026	3.4207563	6.9511584	84.90032	301.66117

У таблицях 5.1 і 5.2 представлені залежності частот ω_i зв'язаних коливань рідини і пружного стержня при $h = 1$ і $l_1 = 20$ в залежності від числа

Таблиця 5.2

Значення частот ω_{n_0+1} зв'язаних коливань системи «стержень – резервуар – рідина» при $h = 1, l_1 = 20, m_0 = 10$ в залежності від числа членів n_0 в розкладах (5.67).

n_0	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
ω_{n_0+1}	6.954	6.955	6.956	6.957	6.959	6.960	6.960	6.960	6.960	6.961	6.962
ω_{n_0+2}	84.93	84.96	84.97	84.98	84.98	84.99	84.99	84.99	84.99	85.00	85.00
ω_{n_0+3}	301.9	302.0	302.1	302.1	302.1	302.2	302.2	302.2	302.2	302.2	302.2

членів m_0 і n_0 в розкладах (5.12) і (5.67). Дані цих таблиць свідчать про те, що частотний спектр складається з двох типів частот. До першого типу відносяться частоти, які обумовлені в основному коливаннями рідини на вільній поверхні. Ці частоти будемо називати частотами «переважно хвильових коливань». До другого типу частот будемо відносити частоти, які обумовлені в основному пружними і інерційними властивостями стержня і прикріпленого на його торці маси рідини скінченних розмірів. На значення цих частот в меншій мірі позначаються коливання вільної поверхні рідини. В даному прикладі при $n_0 \leq 15$ частоти другого типу починаються з ω_{n_0+1} . Зі збільшенням n_0 частоти першого і другого типу зміщуються. Результати таблиць і подальші розрахунки також показують, що для отримання молодших частот ω_k першого типу з точністю до п'яти значущих цифр необхідно покласти $n_0 = k + 1$ при числі членів $m_0 = 10$ в розкладі (5.67). Для отримання трьох частот другого типу з такою ж точністю необхідно утримувати до 30 членів в розкладі (5.12) при $m_0 = 10$ в розкладі (5.67). Збільшення довжини стержня не призводить до погіршення встановленої швидкості збіжності розв'язків.

Поведінка перших трьох нижчих частот ω_i зв'язаних коливань системи в залежності від довжини стержня l і глибини рідини в резервуарі h віднесених до R_0 показано на рис. 5.3.

На рис. 5.4 представлені нижчі форми зв'язаних коливань стержня η_i і

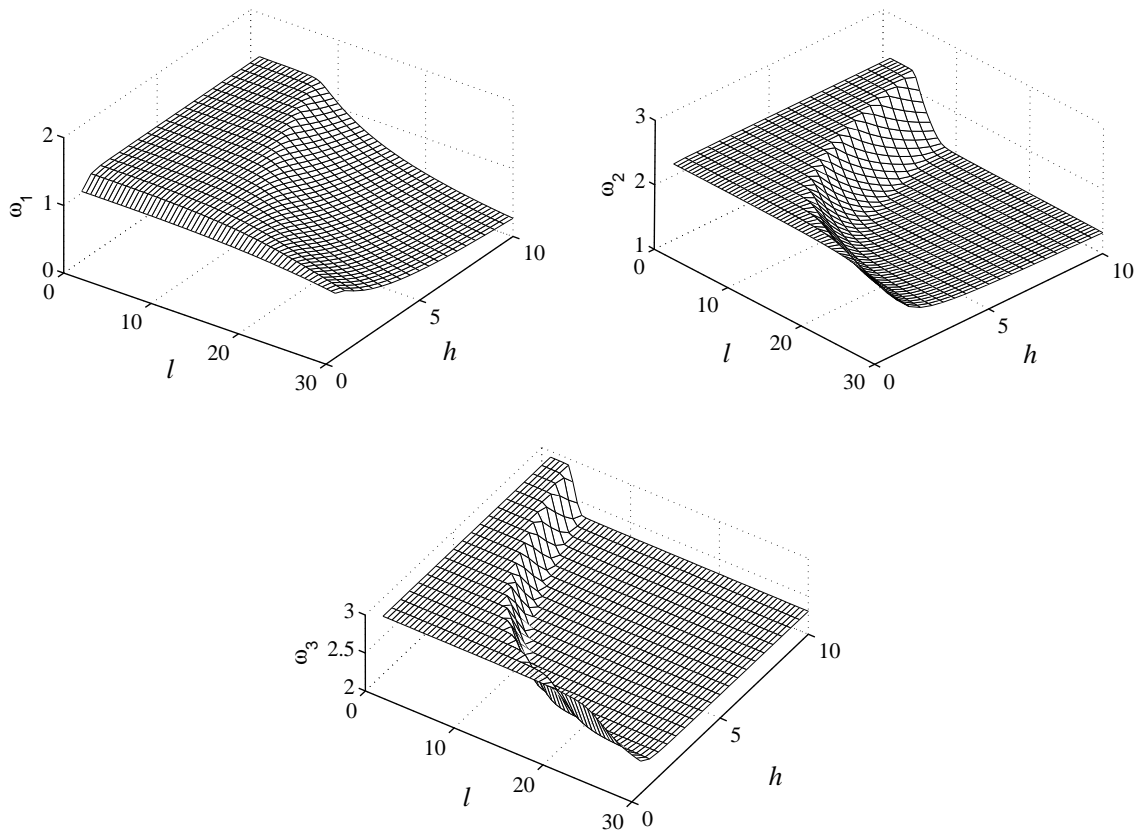


Рис. 5.3. Поведінка частот ω_i зв'язаних коливань системи «стержень – резервуар – рідина» в залежності від довжини стержня l і глибини заповнення резервуара рідиною h .

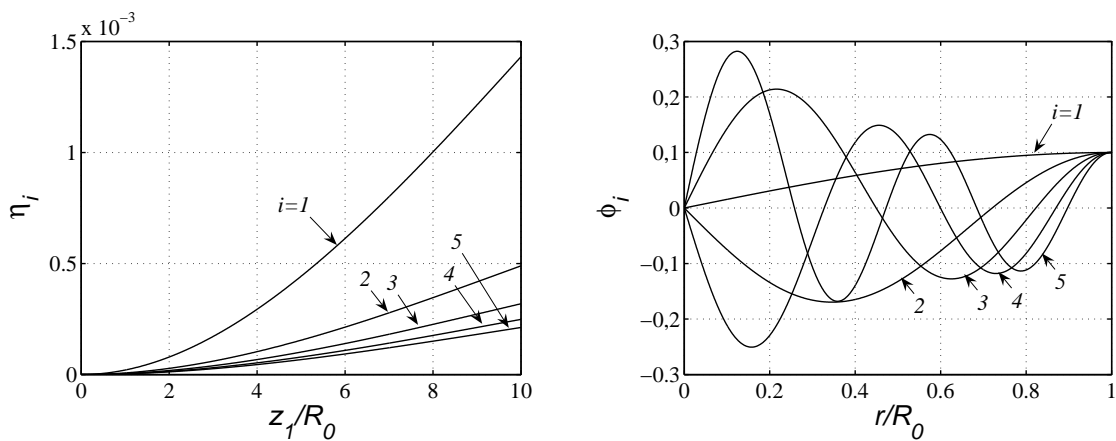


Рис. 5.4. Нижчі форми зв'язаних коливань стержня η_i і рідини φ_i ($i = 1 \dots 5$), отримані при $h = 1$ і $l_1 = 20$.

рідина φ_i ($i = 1 \dots 5$), отримані при $h = 1$ і $l_1 = 20$. Ці рисунки показують, що першим п'яти формам коливань вільної поверхні, які відповідають «переважно хвильовим коливанням рідини», відповідають коливання стержня по

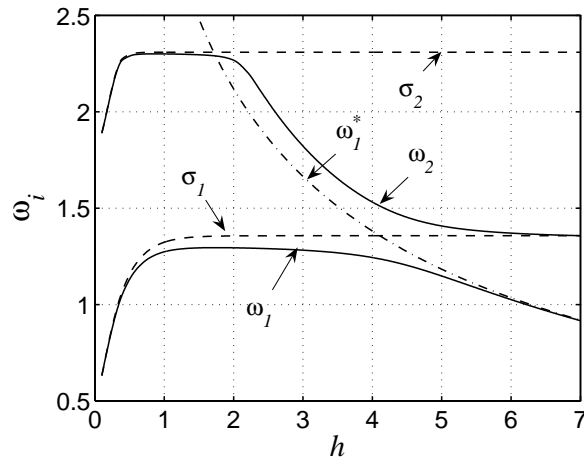


Рис. 5.5. Залежність зв'язаних і парціальних двох нижчих частот системи «стержень – резервуар – рідина» від відносної глибини рідини в резервуарі.

його першій формі з різними амплітудними значеннями. Вищі форми коливань стержня проявляються на другому типі частотного спектра системи.

Розглянемо далі два спектра частот $\{\sigma_i\}$ і $\{\omega_i^*\}$. Перший спектр співпадає з власними частотами системи при абсолютно жорсткій опорі. Другий спектр частот - це частоти коливань пружного стержня з приєднаним до нього резервуаром кінцевих розмірів із закритою жорсткою кришкою вільної поверхні рідини. Такі частоти можна отримати з алгебраїчної системи (5.69), поклавши в ній $n_0 = 0$. В цьому випадку вихідна система з $n = n_0 + m_0$ степенями свободи, після накладення на неї n_0 зв'язків переходить в систему з m_0 степенями свободи. Введення частот $\{\sigma_i\}$ і $\{\omega_i^*\}$ відповідає розділенню вихідної механічної системи на дві підсистеми, так звані парціальні системи.

Поняття про парціальні системи дозволяє сформулювати деякі загальні висновки про вплив параметрів системи на її власні частоти. Один з висновків, наприклад, можна виразити у вигляді нерівностей

$$\omega_i \leq \omega_i^* \leq \omega_{i+n_0}, \quad (i = 1, 2 \dots m_0).$$

Згідно з цими нерівностями парціальні частоти завжди лежать в інтервалі, що обмежений частотами зв'язаної системи.

Більш детальну інформацію про поведінку зв'язаних і парціальних частот

в залежності від безрозмірної глибини рідини в резервуарі дає графік, наведений на рис. 5.5. Результати розрахунків отримані для стержня, відносна довжина якого дорівнює $l_1 = 30$. Суцільні лінії на рисунку відповідають двом нижчим частотам зв'язаних коливань системи (ω_1 і ω_2). Штрихові лінії відповідають парціальним частотам σ_1 і σ_2 . Штрих-пунктирною лінією позначена залежність парціальної частоти ω_1^* від параметра h .

Таблиця 5.3

Значення зв'язаних і парціальних частот системи «стержень - резервуар - рідина» при деяких безрозмірних глибинах рідини в резервуарі.

h	ω_1	ω_2	σ_1	σ_2	ω_1^*	ω_2^*
0.2	0.8007	2.0454	0.8056	2.0498	5.8171	43.908
0.6	1.1831	2.2972	1.2153	2.3051	3.8676	39.627
1.0	1.2735	2.2999	1.3232	2.3089	3.0533	37.927
1.4	1.2926	2.2969	1.3491	2.3090	2.5742	36.750
1.8	1.2950	2.2867	1.3551	2.3090	2.2477	35.573
2.2	1.2929	2.2046	1.3565	2.3090	2.0060	34.165
2.6	1.2886	1.9985	1.3568	2.3090	1.8173	32.457
3.0	1.2820	1.8219	1.3569	2.3090	1.6645	30.489
3.4	1.2716	1.6826	1.3569	2.3090	1.5374	28.368
3.8	1.2552	1.5748	1.3569	2.3090	1.4295	26.224
4.2	1.2298	1.4951	1.3569	2.3090	1.3364	24.161
4.6	1.1934	1.4411	1.3569	2.3090	1.2551	22.249
5.0	1.1481	1.4076	1.3569	2.3090	1.1833	20.517

Чисельні значення введених вище частот для деяких значень параметра h наведені в таблиці 5.3.

З рис. 5.5 і таблиці 5.3 видно, відсутність зв'язаності між парціальними системами досягається в даному прикладі при $h < 1$. При цьому нижчі частоти зв'язаних коливань системи близькі до частот σ_1 і σ_2 першої парціальної системи. При $h \rightarrow 0$ ω_1^* наближається до частоти коливань стержня з одним

закріпленим і іншим вільним торцем. Слабка зв'язаність між парціальними частотами спостерігається при $h > 5$. Для цього випадку перша частота системи ω_1 близька до першої частоти ω_1^* другої парціальної системи. Поблизу збігу парціальних частот зв'язані частоти помітно відрізняються від парціальних.

Проведений аналіз отриманих розв'язків свідчить про ефективність запропонованого алгоритму розв'язання даної задачі. Слід підкреслити, що запропонована математична модель має сенс тільки для нижчих форм поперечних коливань, оскільки при підвищенні частоти власних коливань системи втрачають силу припущення, що використовуються при описанні коливань стержня.

Результати розрахунків показують, що ефект хвильових рухів рідини в резервуарі при його поперечних коливаннях може бути досить істотним і нехтування ним в загальному випадку є неприпустимим.

5.3.2 Вимушені коливання резервуара з рідиною, закріпленого на пружній опорі

Нижче представлені деякі результати розрахунку вимушених коливань системи «стержень - резервуар - рідина» для випадку кінематичного збурення основи стержня.

Нехай тонкостінний стержень, до верхнього торця якого прикріплений циліндричний резервуар, є однорідним і має циліндричну форму. Введемо наступні позначення:

r_0, δ – радіус і товщина стержня відповідно;

$a = r_0/R_0$ – радіус стержня віднесений до радіусу резервуара;

$l_1 = l/r_0, \delta_1 = \delta/r_0$ – довжина і товщина стержня, віднесені до його радіусу;

$H_1 = H/R_0$ – амплітуда збурення, віднесена до радіусу резервуара.

Виберемо в якості характерного лінійного розміру розглядуваної механі-

чної системи радіус резервуара R_0 . Безрозмірні площа поперечного перерізу, його екваторіальний момент інерції і коефіцієнт D можна представити в наступному вигляді:

$$F = 2\pi a^2 \delta_1; \quad J = \pi a^4 \delta_1; \quad D = D_1 \frac{1}{\pi a^4 \delta_1}; \quad D_1 = \frac{\rho g R_0}{E_0}.$$

При розрахунках масою резервуара будемо нехтувати і були використані наступні безрозмірні величини:

$$\frac{\rho_1}{\rho} = 7.8; \quad D_1 = 0.476 \cdot 10^{-7}; \quad a = 0.5; \quad \delta_1 = 0.01.$$

Глибина рідини в резервуарі h , довжина стержня l і частота збурення p варіювалися.

Таблиця 5.4

Значення амплітуд коливань рідини ξ ($r/R_0 = 0.5$) і стержня $\eta(z_1 = l_1)$ при $l_1 = 20$, $p = 0.5$ і різних значеннях глибини заповнення рідини h в залежності від числа координат m_0 і n_0 вектора \vec{X} .

	$h = 0.1$ $\omega_1 = 0.5785$		$h = 0.3$ $\omega_1 = 0.9582$		$h = 0.5$ $\omega_1 = 1.1483$	
n_0	η	ξ	η	ξ	η	ξ
$m_0 = 2$						
2	0.01004	0.00562	0.01004	0.00180	0.01005	0.00159
4	0.01004	0.00562	0.01004	0.00180	0.01005	0.00159
6	0.01004	0.00562	0.01004	0.00180	0.01005	0.00159
$m_0 = 4$						
2	0.01004	0.00562	0.01004	0.00180	0.01005	0.00159
4	0.01004	0.00562	0.01004	0.00180	0.01005	0.00159
6	0.01004	0.00562	0.01004	0.00180	0.01005	0.00159

В таблиці 5.4 наведені значення амплітуд коливань рідини ξ ($r/R_0 = 0.5$) і стержня $\eta(z_1 = l_1)$ при $l_1 = 20$, $p = 0.5$ і різних значеннях глибини заповнення рідини h в залежності від числа координат m_0 і n_0 вектора \vec{X} . Результати

таблиці, а також додаткові розрахунки показують, що для отримання значень амплітуд стержня і рідини з точністю до п'яти значущих цифр досить утримувати всього два члена m_0 і n_0 . Зміна глибини заповнення резервуара рідиною практично не впливає на процес збіжності. Збільшення довжини стержня також не призводить до погіршення встановленої швидкості збіжності розв'язків.

Таблиця 5.5

Значення амплітуд коливань рідини ξ ($r/R_0 = 0.5$) і стержня $\eta(z_1 = l_1)$ при $l_1 = 20$, $p = 1.14$ (поблизу першої резонансної частоти $\omega_1 = 1.1483$), $h = 0.5$, $m_0 = 2$ в залежності від числа координат n_0 вектора \vec{X} .

n_0	η	ξ
2	0.01869	0.53970
4	0.01869	0.53978
6	0.01869	0.53971
8	0.01869	0.53976

У таблиці 5.5 представлені значення амплітуд коливань рідини ξ ($r/R_0 = 0.5$) і стержня $\eta(z_1 = l_1)$, отримані при тих же параметрах, що і для таблиці 5.4, але при частоті збурення $p = 1.14$ (поблизу першої резонансної частоти $\omega_1 = 1.1483$), $h = 0.5$, $m_0 = 2$ в залежності від числа координат n_0 вектора \vec{X} . Як видно з представлених даних, при наближенні частоти збурення до резонансної частоти системи, збіжність для амплітуди рідини дещо погіршується. У той же час, для амплітуди стержня швидкість збіжності залишається колишньою.

На рис. 5.6 представлені амплітудно-частотні характеристики стержня і рідини, отримані при $l_1 = 20$ і $h = 0.5$. Як видно з рисунка, при наближенні частоти збурення до власних частот системи, спостерігається явище резонансу. Неважко помітити, що в представленому діапазоні частоти збурення, стержень виявляється менш схильний до резонансу ніж рідина. Його

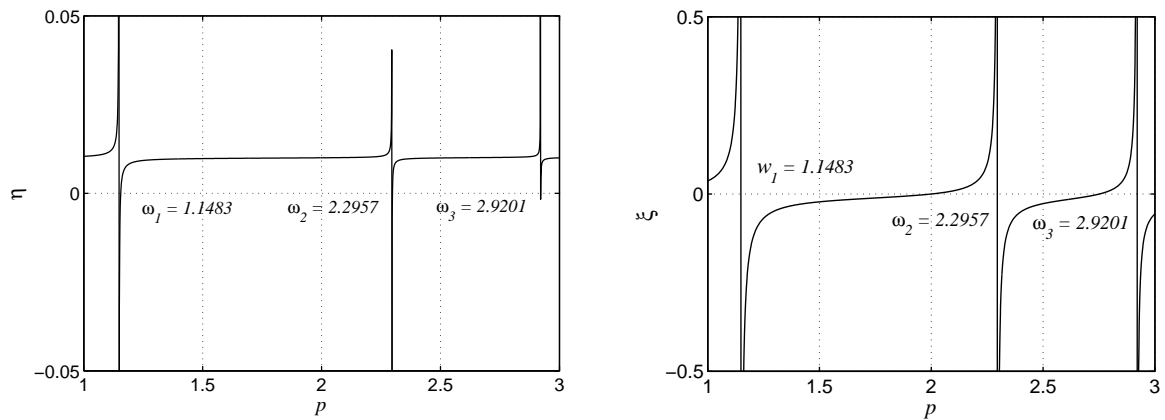


Рис. 5.6. Залежності амплітуд коливань стержня $\eta(z_1 = l_1)$ і рідини $\xi(r/R_0 = 1)$ від частоти збурення p , отримані при $l_1 = 20$ і $h = 0.5$

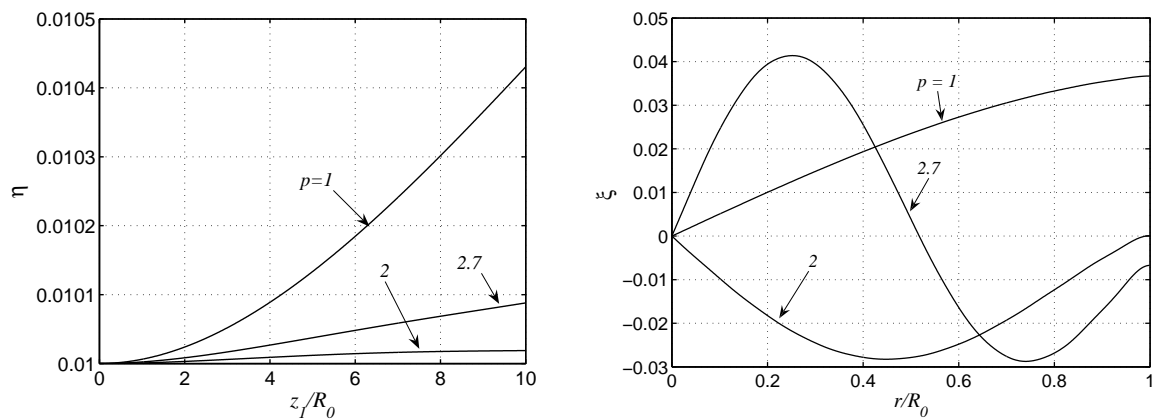


Рис. 5.7. Форми коливань стержня η і рідини ξ при різних значеннях частоти збурення p , отримані при $l_1 = 20$ і $h = 0.5$.

переміщення значно менше, ніж амплітуда коливань рідини. Це пояснюється тим, що на формування нижчих частот системи основний вплив має рідина і, взаємодія зі стержнем на цих частотах незначна. Стержень здійснює рухи, близькі до першої форми його коливань при наближенні частоти збурення до власної частоти системи. А при видаленні від резонансних частот, його максимальне переміщення становить близько амплітуди збурення. Тобто, практично, стержень рухається, як тверде тіло.

У свою чергу, рідина, при наближенні частоти збурення до власної частоти системи набуває форму, близьку до відповідної формі власних коливань

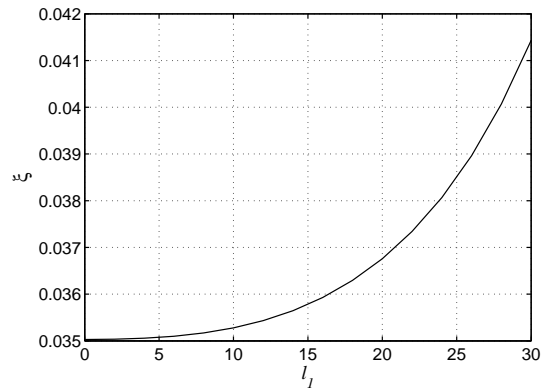


Рис. 5.8. Залежність амплітуди коливань рідини $\xi(z_1/R_0 = 1)$ від довжини стержня l_1 , при $p = 1$ і $h = 0.5$.

рідини. На рис. 5.7 представлені форми коливань стержня η і рідини ξ при різних значеннях частоти збурення p , отримані при $l_1 = 20$ і $h = 0.5$. Частота збурення тут вибиралася близькою до відповідних перших трьох власних частот даної системи. З вказаного рисунка видно, що при досить малих відхиленнях стержня від положення рівноваги виникають досить великі амплітуди коливань поверхні рідини.

І нарешті на рис. 5.8 представлена залежність амплітуди коливань рідини $\xi(z_1/R_0 = 1)$ від довжини стержня l_1 , при $p = 1$ і $h = 0.5$. Як і слід було очікувати, при збільшенні довжини стержня, амплітуда коливань рідини зростає.

Проведений аналіз отриманих розв'язків свідчить про ефективність запропонованого алгоритму розв'язання даної задачі.

Представлені результати розрахунку для випадку кінематичного збурення основи стержня показують, що малі відхилення стержня від положення рівноваги можуть викликати чималі амплітуди коливань рідини в резервуарі.

5.3.3 Власні коливання тонкостінного стержня з підвісним резервуаром, частково заповненим рідиною

Нехай тонкостінний стержень є однорідним і має циліндричну форму. Для визначеності, а також для можливості порівняння отриманих результатів з

уже існуючими в літературі, будемо вважати, що резервуар являє собою прямий круговий циліндр, який прикріплений до стержня за допомогою абсолютно жорсткого шпангоута біля основи резервуара і заповнений рідиною на висоту h . У цьому випадку, для визначення гідродинамічних коефіцієнтів $\lambda_i, \lambda_{0i}, \mu_i, \sigma_i$ і $I^{(w)}$, що входять в систему алгебраїчних рівнянь (5.69) можна скористатися формулами, наведеними вище.

Введемо наступні позначення:

r_0, δ – радіус і товщина стержня відповідно;

$a = r_0/R_0$ – радіус стержня віднесений до радіусу резервуара;

$l_1 = l/r_0, \delta_1 = \delta/r_0$ – довжина і товщина стержня, віднесені до його радіусу.

$\zeta_1 = \zeta/r_0$ – точка кріплення резервуара до стержня.

Виберемо в якості характерного лінійного розміру розглядуваної механічної системи радіус резервуара R_0 . Безрозмірні площа поперечного перерізу, його екваторіальний момент інерції і коефіцієнт D можна представити в наступному вигляді:

$$S = 2\pi a^2 \delta_1; \quad J = \pi a^4 \delta_1;$$

$$D = D_1 \frac{1}{\pi a^4 \delta_1}; \quad D_1 = \frac{\rho g R_0}{E_0}.$$

Наведемо деякі результати розрахунків власних коливань розглядуваної механічної системи, що ілюструють ефективність запропонованого методу розв'язання спектральної задачі і вплив коливань рідини в резервуарі на частоти і форми коливань системи в цілому.

При розрахунках масою резервуара будемо нехтувати і були використані наступні безрозмірні величини:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = 7.8; \quad D_1 = 0.476 \cdot 10^{-7};$$

$$a = 1.25; \quad \delta_1 = 0.001; \quad h = 1.0.$$

У таблицях 5.6 і 5.7 представлені значення частот ω_i зв'язаних коливань

Таблиця 5.6

Значення частот ω_i зв'язаних коливань розглядуваної системи при $l_1 = 28$ і $\zeta_1 = 14$ в залежності від числа членів m_0 і n_0 в розкладах (5.118) і (5.95) відповідно.

m_0	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_{n_0+1}	ω_{n_0+2}	ω_{n_0+3}
$n_0 = 1$							
4	1.30227				3.58888	18.6539	75.6249
6	1.30227				3.58700	18.6321	73.3952
8	1.30227				3.58700	18.6320	73.2925
10	1.30227				3.58700	18.6320	73.2925
12	1.30227				3.58700	18.6320	73.2925
$n_0 = 2$							
4	1.30226	2.30465			3.60426	18.7504	75.6459
6	1.30226	2.30465			3.60235	18.7286	73.4908
8	1.30226	2.30465			3.60235	18.7286	73.3882
10	1.30226	2.30465			3.60235	18.7286	73.3882
12	1.30226	2.30465			3.60235	18.7286	73.3882
$n_0 = 3$							
4	1.30226	2.30465	2.91837		3.61036	18.7743	75.6544
6	1.30226	2.30465	2.91836		3.60845	18.7525	73.5192
8	1.30226	2.30465	2.91836		3.60845	18.7525	73.4167
10	1.30226	2.30464	2.91836		3.60844	18.7525	73.4166
12	1.30226	2.30464	2.91836		3.60844	18.7525	73.4166
$n_0 = 4$							
4	1.30226	2.30466	2.91836	3.41495	3.61793	18.7837	75.6583
6	1.30226	2.30464	2.91835	3.41490	3.61606	18.7619	73.5312
8	1.30226	2.30464	2.91835	3.41490	3.61606	18.7618	73.4287
10	1.30226	2.30464	2.91835	3.41490	3.61606	18.7618	73.4286
12	1.30226	2.30464	2.91835	3.41490	3.61606	18.7618	73.4286

рідини і пружного стержня при $l_1 = 28$ і $\zeta_1 = 14$ в залежності від числа членів m_0 і n_0 в розкладах (5.118) і (5.95) відповідно.

Далі введемо в розгляд два типи частот: $\{\sigma_i\}$ і $\{\omega_i^*\}$. Перший з них співпа-

Таблиця 5.7

Значення частот ω_i зв'язаних коливань розглядуваної системи при $l_1 = 28$, $M_0 = 10$ і $zeta_1 = 14$ в залежності від числа членів n_0 в розкладах (5.95).

n_0	5	6	7	8	9	10	11	12
ω_5	3.61337	3.61282	3.61262	3.61253	3.61248	3.61245	3.61245	3.61243
ω_{n_0+2}	18.7665	18.7691	18.7708	18.7718	18.7726	18.7732	18.7736	18.7739
ω_{n_0+3}	73.4348	73.4383	73.4406	73.4421	73.4431	73.4439	73.4445	73.4449

дає з частотами коливань рідини в нерухомому резервуарі, а другий представляє частоти коливань пружного стержня з підвішеним до нього резервуаром, вільна поверхня рідини в якому закрита жорсткою кришкою. Такі частоти можна отримати з алгебраїчної системи рівнянь (5.119), поклавши в ній $n_0 = 0$. В цьому випадку вихідна алгебраїчна система порядку $2m_0 + n_0$ переходить в систему порядку $2m_0$. Введення частот $\{\sigma_i\}$ і $\{\omega_i^*\}$ відповідає розбиттю вихідної механічної системи на дві підсистеми, які називаються парціальними системами. Поведінка перших трьох парціальних частот в залежності від безрозмірної глибини рідини в резервуарі наведено в таблиці 5.8.

Зіставлення даних таблиць 5.6 і 5.8 при $h = 1$ свідчить про те, що для прийнятих в рамках вихідних даних перші три частоти системи близькі до парціальних частот $\{\sigma_i\}$, тоді як ω_{n_0+i} близькі до парціальних частот $\{\omega_i^*\}$, ($i = 1, 2, 3$). Надалі будемо розрізняти два типи частот системи «стержень - рідина». перший тип частот, це частоти обумовлені в основному коливаннями рідини в резервуарі. В цьому випадку будемо говорити про частоти «переважно хвильових коливань». До другого типу відносяться частоти, які обумовлені в основному пружними і інерційними властивостями стержня з підвішеною до нього в певному перетині масою рідини. На значення цих частот в меншій мірі позначаються коливання вільної поверхні рідини. Надалі ці частоти будемо називати частотами «переважно пружних коливань» си-

Таблиця 5.8

Залежність парціальних частот від безрозмірної глибини рідини в резервуарі.

h	σ_1	σ_2	σ_3	ω_1^*	ω_2^*	ω_3^*
.20	.806	2.050	2.827	3.942	21.791	72.829
.40	1.074	2.277	2.919	3.747	19.537	72.656
.60	1.215	2.305	2.922	3.570	18.156	72.523
.80	1.287	2.309	2.922	3.409	17.233	72.425
1.00	1.323	2.309	2.922	3.263	16.583	72.344
1.20	1.341	2.309	2.922	3.129	16.107	72.249
1.40	1.349	2.309	2.922	3.006	15.751	72.106
1.60	1.353	2.309	2.922	2.892	15.479	71.878
1.80	1.355	2.309	2.922	2.787	15.268	71.531
2.00	1.356	2.309	2.922	2.690	15.104	71.037
2.20	1.356	2.309	2.922	2.599	14.976	70.370
2.40	1.357	2.309	2.922	2.514	14.876	69.511
2.60	1.357	2.309	2.922	2.435	14.797	68.445
2.80	1.357	2.309	2.922	2.361	14.736	67.167
3.00	1.357	2.309	2.922	2.290	14.689	65.678

стеми.

В даному прикладі при $n_0 \leq 5$ частоти другого типу починаються з ω_{n_0+1} . Зі збільшенням числа n_0 частоти першого і другого типу зміщуються. Результати таблиць і подальші розрахунки також показують, що для отримання молодших частот ω_i першого типу з точністю до шести значущих цифр необхідно покласти $n_0 = i + 1$ при числі членів $m_0 = 10$ в розкладі (5.118). Для отримання трьох частот ω_i другого типу з такою ж точністю необхідно покласти $n_0 = i + 15$ і $m_0 = 10$.

Відповідно отриманому потенціалу зміщень амплітудні значення для i -ої форми коливань вільної поверхні рідини мають вигляд

Таблиця 5.9

Значення функцій $\eta_{5\mp}(\zeta_1)$, $\eta'_{5\mp}(\zeta_1)$, а також лівих та правих частин граничних умов (5.108) при $l_1 = 28$, $\zeta_1 = 14$.

$\eta_{5-}(\zeta_1)$	-.369381062E+00
$\eta_{5+}(\zeta_1)$	-.369381062E+00
$\eta'_{5-}(\zeta_1)$	-.352173074E-01
$\eta'_{5+}(\zeta_1)$	-.352173074E-01
$[Q_*^{(2)} - Q_*^{(1)}]_{z_1=\zeta_1}$	-.487448281E-04
R_Q	-.487448349E-04
$[M^{(1)} - M^{(2)}]_{z_1=\zeta_1}$	-.589616197E-04
R_M	-.589616147E-04

$$\xi_i = \sum_{n=1}^{n_0} c_n^{(i)} \frac{J_1(K_n r)}{J_1(K_n)} \sin \eta,$$

де $J_1(x)$ – функція Бесселя першого роду і першого порядку; K_n – n -й корінь рівняння $J_1'(x) = 0$. Надалі вектора $\vec{X}^{(i)}$ алгебраїчної системи (5.119) нормувалися таким чином, щоб відхилення рідини ξ_i в напрямку осі Oz в площині Oyz на стінці резервуара дорівнювали одиниці.

Результати обчислень форм власних коливань розглядуваної механічної системи показують, що запропонований алгоритм розв'язання вихідної задачі забезпечує поточкову збіжність для розв'язків і їх перших трьох похідних для прогинів стержня як всередині областей $G^{(1)}$ і $G^{(2)}$, так і на їх границі. Це дозволяє розраховувати моменти і перерізуючі сили в будь-якому перерізі стержня.

У таблиці 5.9 представлені результати перевірки виконання граничних умов (5.108) в точці $z_1 = \zeta_1$ кріплення резервуара до стержня, отримані в результаті підстановки побудованих наближених розв'язків для п'ятої форми коливань в зазначені граничні умови. Тут через R_Q і R_M позначені вирази для правих частин відповідних силових граничних умов, що входять в (5.108).

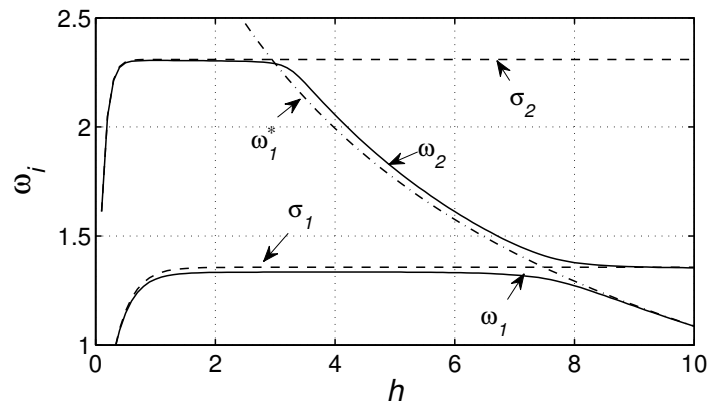


Рис. 5.9. Залежність зв'язаних і парціальних частот системи від глибини h заповнення резервуара рідиною.

Символами \mp позначені відповідні граничні величини, обчислені при підході до точки $z_1 = \zeta_1$ зліва і праворуч від неї.

З наведеної таблиці випливає, що запропонований узагальнений функціонал забезпечує виконання з високою точністю кінематичних і силових граничних умов спряження в точці $z_1 = \zeta_1$. Отримані вище результати свідчать про достатню ефективність розробленого способу розв'язання даної спектральної задачі.

На рис. 5.9 показана залежність зв'язаних і парціальних частот від відносної глибини h заповнення рідиною резервуара. Результати розрахунків отримані при $l_1 = 28$ і $\zeta_1 = 14$. Суцільні лінії на рисунку відповідають двом нижчим частотам ω_1 і ω_2 зв'язаних коливань стержня і рідини; штрихові – парціальним частотам σ_1 і σ_2 і штрих-пунктирна – парціальній частоті ω_1^* . Числові значення цих частот наведені в таблиці 5.8. Поблизу співпадіння парціальних частот, частоти ω_1 і ω_2 найбільш значимо відрізняються від парціальних. Якщо парціальні частоти рознесені, то в деякому наближенні кожна підсистема коливається сама по собі. Якщо частоти парціальних систем збігаються, то силовий вплив рідини, що коливається на стержень настає в моменти часу, сприятливі для передачі енергії від рідини до стержня. У цьому випадку спостерігається сильна взаємодія парціальних систем. Ці

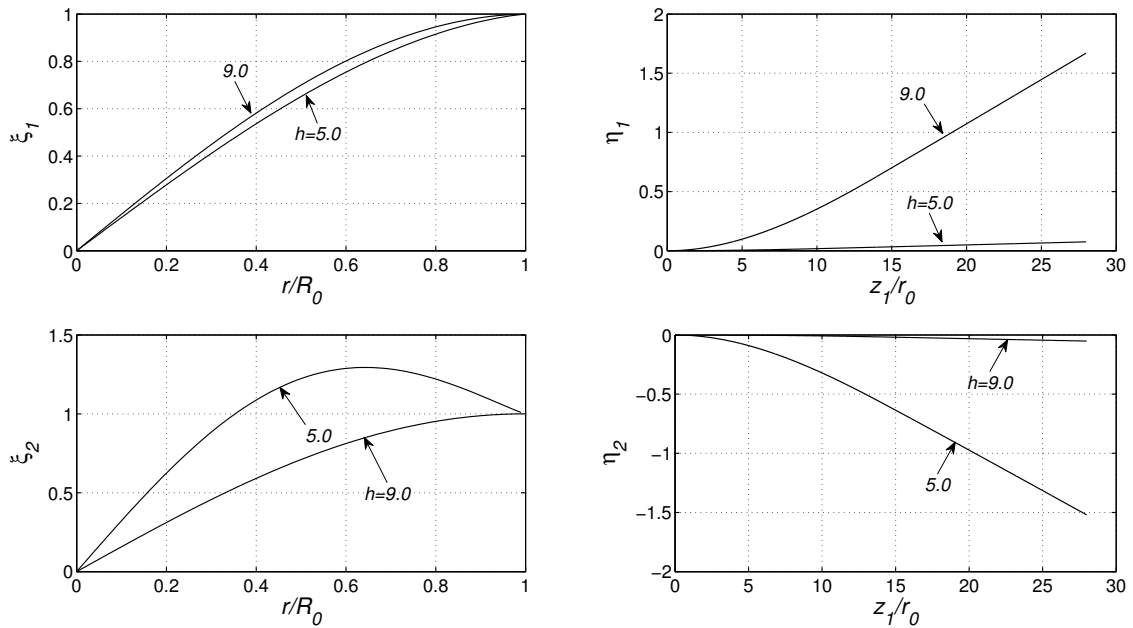


Рис. 5.10. Форми коливань стержня і рідини при різних глибинах h заповнення резервуара рідиною.

висновки повністю узгоджуються із загальною теорією коливань механічних систем [66].

На рис. 5.10 представлені форми коливань рідини і стержня для перших двох нижчих частот коливань розглядуваної механічної системи при деяких значеннях глибини h заповнення резервуара рідиною, при $l_1 = 28$ і $\zeta_1 = 14$. Із цих рисунків випливає, що коли система здійснює коливання з частотою ω_1 , то рідина і пружний стержень рухаються в одній фазі. Якщо система робить коливання з частотою ω_2 , то рідина і стержень рухаються зі зсувом фаз на 180° .

Відзначимо, що за запропонованим алгоритмом можна також розраховувати і конструкцію, коли резервуар з рідиною жорстко прикріплений до верхнього торця стержня. З метою здійснення незалежного контролю проведених обчислень, порівнювалися розрахункові дані для обох випадків. При цьому було отримано їх повне співпадіння.

Проведені обчислення показали на достатню ефективність запропонованого алгоритму розв'язання вихідної задачі і, що хвильові рухи рідини в ре-

зервуарі можуть істотно впливати на коливання стержня.

5.3.4 Вимушені коливання системи «стержень - резервуар - рідина» (порівняння з експериментом)

В роботі [132] наведені експериментальні дані дослідження вимушених коливань стержня, до верхнього торця якого прикріплений резервуар з рідиною, при гармонічному збуренні основи стержня. В якості резервуара був обраний круговий циліндр з співосною центральною вставкою малого радіуса r_0 . Відмітимо, що гідродинамічні коефіцієнти λ_i , λ_{0i} , μ_i , σ_i і $I^{(w)}$ для такого резервуара при $r_0/R_0 \leq 0.1$ (R_0 – радіус циліндра) відрізняються від гідродинамічних коефіцієнтів для першої форми вільних коливань рідини в круговому циліндрі на 1 – 4 процента. Тому в розрахунках за запропонованим алгоритмом будемо користатися значеннями λ_i , λ_{0i} , μ_i , σ_i і $I^{(w)}$ для резервуара в формі кругового циліндра без центральної вставки.

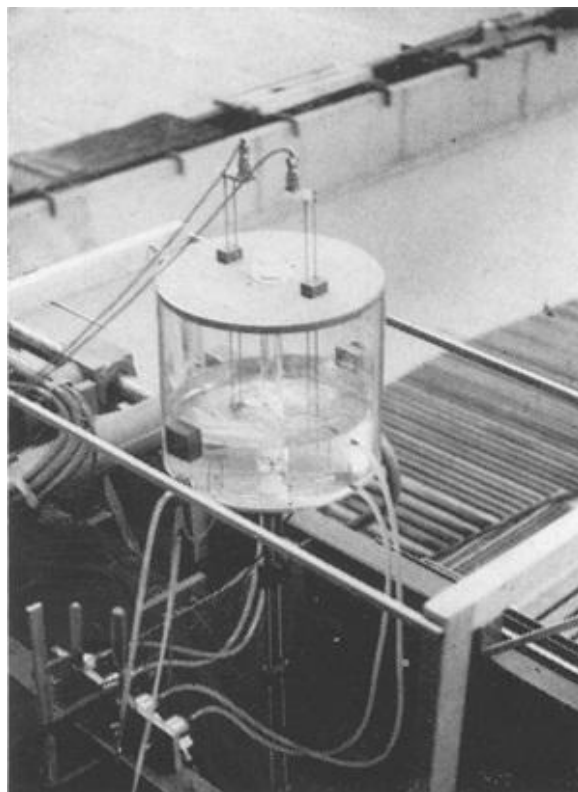


Рис. 5.11. Вид експериментальної установки [132].

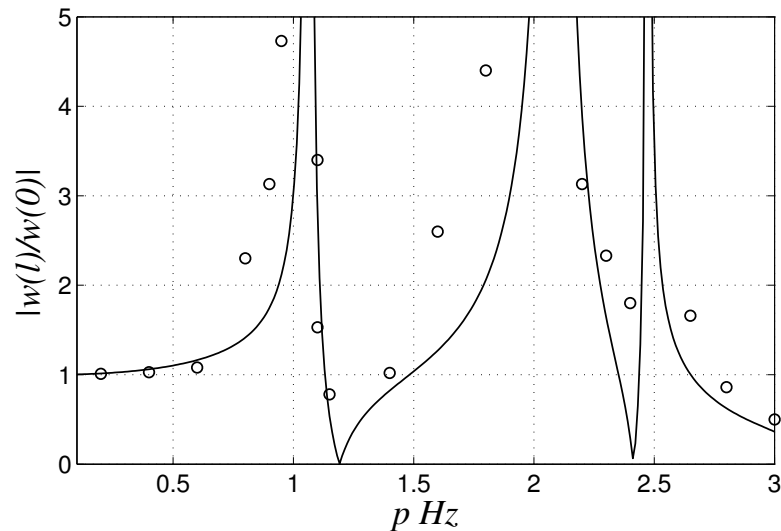


Рис. 5.12. Залежність відносної амплітуди коливань стержня від частоти збурення його основи (о - експеримент, — - теорія).

Геометричні і фізичні параметри механічної системи для якої проведено експеримент мають наступні значення: радіус бака $R_0 = 0.225$ м; відстань до центра мас бака $z_{c_0} = 0.19$ м; маса бака $m_0 = 19$ кг; момент інерції бака $I^{(0)} = 0.5$ кгм²; площа поперечного перерізу балки $F = 3.14 \cdot 10^{-4}$ м²; довжина балки $L = 1.2$ м; коефіцієнт жорсткості балки $C_1 = 1/E_0 I_0 = 3.3 \cdot 10^{-41}$ /Нм²; глибина заповнення рідиною бака $\frac{h}{R_0} = 0.5$ густина матеріалу бака (оргскло) $\rho_0 = 1190$ кг/м³; густина матеріалу балки (сталь) $\rho_1 = 7800$ кг/м³; густина рідини $\rho = 1000$ кг/м³.

На рис.5.11 показано вид експериментальної установки, яка була використана в роботі [132].

На рис. 5.12) наведена залежність відносної амплітуди $|w(l)/w(0)|$ коливань стержня від частоти збурення p його основи в області перших трьох резонансних частот розглядуваної механічної системи. Кругечками позначені експериментальні дані роботи [132].

Наведений рисунок свідчить про задовільний збіг експериментальних і теоретичних даних в області невеликих амплітуд зв'язаних коливань стержня і рідини в резервуарі.

РОЗДІЛ 6

НЕОСЕСИМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ, ЧАСТКОВО ЗАПОВНЕНИХ РІДИНОЮ

В даному розділі запропоновано алгоритм розрахунку частот та форм власних коливань довільних оболонок обертання, частково заповнених ідеальною рідиною з врахуванням хвильових рухів на її вільній поверхні. Розв'язок вихідної задачі гідропружності базується на застосуванні методу декомпозиції області інтегрування рівнянь теорії оболонок в поєднанні з варіаційним методом та наближеній побудові оберненого оператора для гідродинамічної частини задачі. Наведено порівняння отриманих чисельних результатів з існуючими точними розв'язками розглядуваної задачі для оболонки в формі кругового циліндра.

6.1 Постановка задачі

Розглянемо тонкостінну пружну оболонку обертання, яка на глибину H заповнена ідеальною і нестисливою рідиною. Надалі передбачається, що поле масових сил, що діють на оболонку і рідину, є потенціальним і прискорення поля масових сил \vec{g} паралельно осі симетрії оболонки. Будемо вважати, що зміщення, швидкості і прискорення оболонки і частинок рідини малі в тому сенсі, що їх добутками і квадратами можна знехтувати в порівнянні з самими величинами. Оболонка є ізотропною і володіє всіма властивостями, що забезпечують можливість застосування моментної теорії тонкостінних оболонок В.З. Власова [23]. Початковими переміщеннями серединної поверхні оболонки, обумовленими гідростатичним тиском рідини, а також дисипацією енергії при коливаннях оболонки нехтуємо.

Введені припущення дозволяють максимально спростити постановку задачі, зберігши при цьому її практичне значення. Такого роду припущення характерні для більшості теоретичних робіт по динаміці пружних оболонок з рідиною [32, 69, 126].

У оболонок обертання лініями головних кривизн є її меридіани і паралелі. В якості ортогональних координат для довільної точки серединної поверхні оболонки виберемо довжину дуги меридіана s , що відраховується від деякої початкової паралелі ($s_1 \leq s \leq s_2$) або від полюса оболонки ($s_1 = 0$), і кут β , який визначає положення точки на відповідній паралелі. Проекції переміщення точок серединної поверхні оболонки на додатні напрямки її твірної, паралелі і зовнішньої нормалі позначимо відповідно через u , v і w . Позначимо через ν , E і h коефіцієнт Пуассона, модуль пружності матеріалу оболонки і її товщину відповідно. Якщо в рівняння рівноваги елемента оболонки, що знаходиться під впливом поверхневого навантаження $\vec{Q} = \{Q_1, Q_2, Q_3\}$, підставити сили і моменти, виражені через переміщення оболонки і помножити отримані рівняння на коефіцієнт $(1 - \nu^2)/(Eh)$, то отримаємо таку систему рівнянь в частинних похідних відносно компонентів переміщення u , v і w :

$$\begin{aligned} L_{11}(u) + L_{12}(v) + L_{13}(w) &= \frac{1 - \nu^2}{Eh} Q_1, \\ L_{21}(u) + L_{22}(v) + L_{23}(w) &= \frac{1 - \nu^2}{Eh} Q_2, \\ L_{31}(u) + L_{32}(v) + L_{33}(w) &= \frac{1 - \nu^2}{Eh} Q_3, \end{aligned} \quad (6.1)$$

де $L_{i,j}$ ($i, j = \overline{1,3}$) – відомі лінійні оператори теорії оболонок [23]. Компоненти поверхневого навантаження Q_1 , Q_2 і Q_3 в напрямку додатного відліку координат s , β і зовнішньої нормалі до поверхні оболонки відповідно до принципу Д'Аламбера можна представити в наступному вигляді:

$$Q_1 = -\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \tilde{X}_1; \quad Q_2 = -\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \tilde{X}_2; \quad Q_3 = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \Delta P + \tilde{X}_3. \quad (6.2)$$

Тут ρ – густина матеріалу оболонки; ΔP – динамічний тиск на оболонку

з боку рідини; \tilde{X}_i – компоненти вектора поверхневого навантаження інших зовнішніх сил. До рівнянь (6.1) необхідно додати граничні умови кріплення торців оболонки при $s = s_1$ і $s = s_2$.

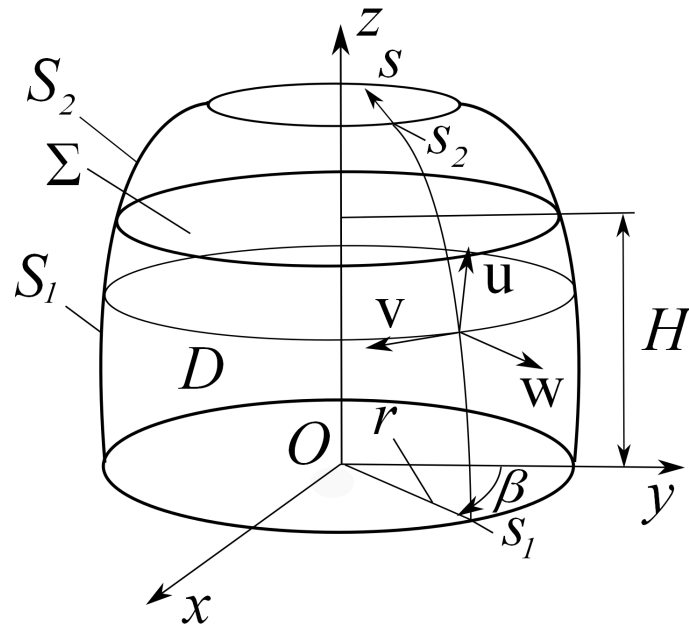


Рис. 6.1. Оболонка обертання, частково заповнена рідиною.

Введемо декартову систему координат $Oxyz$ і відповідну циліндричну систему координат $Ozr\beta$, вісь Oz якої співпадає з віссю симетрії оболонки.

Для описання руху рідини в оболонці введемо в розгляд потенціал зміщень $\chi(z, r, \beta, t)$. Позначимо через S – серединну поверхню оболонки; S_1 – поверхню, змочену рідиною; S_2 – не змочена частина поверхні оболонки; Σ – незбурену вільну поверхню рідини і D – область, зайняту рідиною рис. 6.1.

З прийнятих вище припущень випливає можливість віднесення граничних умов для потенціалу зміщень χ до нерухокої серединної поверхні оболонки S_1 , а умови на збуреній вільній поверхні рідини – до її незбуреної вільної поверхні Σ .

Потенціал зміщень частинок рідини при заданому русі оболонки в її нормальному напрямку $w(s, \beta, t) = w(p, t)$ визначається з розв'язання наступної

крайової задачі [32, 126]

$$\begin{aligned} \Delta\chi &= 0, \quad (z, r, \beta) \in D, \\ \frac{\partial\chi}{\partial n}\Big|_{S_1} &= w(p, t), \\ \left(\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\chi}{\partial z} + f(t)\right)\Big|_{\Sigma} &= 0, \end{aligned} \quad (6.3)$$

де Δ – оператор Лапласа; g – модуль вектора \vec{g} ; n – зовнішня нормаль до поверхні S_1 і $f(t)$ – довільна функція від часу.

Динамічна умова на поверхні Σ представляє собою умову постійності тиску рідини на її вільній поверхні.

На підставі лінеаризованого інтеграла Лагранжа - Коші динамічний тиск з боку рідини на оболонку буде визначатися за формулою [126]:

$$\Delta P = -\rho_0 \left(\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} - \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} d\Sigma \right). \quad (6.4)$$

При написанні формули (6.4) нехтувалось несуттєвим гідростатичним тиском, обумовленим деформацією серединної поверхні оболонки і вільної поверхні рідини.

Зауважимо, що потенціал зміщень χ повинен ще задовольняти наступному співвідношенню:

$$\int_{S_1+\Sigma} \frac{\partial\chi}{\partial n} dS = 0, \quad (6.5)$$

що витікає з рівняння нерозривності і закону збереження маси нестисливої рідини.

Таким чином, рівняння (6.1), (6.3) разом з співвідношеннями (6.2), (6.4), (6.5) і відповідними початковими умовами для оболонки і для хвильових рухів рідини [69] однозначно визначають взаємозв'язані коливання пружної оболонки і ідеальної рідини, що в ній знаходиться.

Надалі зручно перейти до безрозмірних величин. Позначимо через R_0 будь-який характерний розмір оболонки. Введемо в розгляд наступні безрозмірні параметри і величини (позначені рискою зверху):

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\rho g R_0 (1 - \nu^2)}{E}; & c^2 &= \frac{h^2}{12 R_0^2}; & a &= \frac{\rho_0 R_0}{\rho h}; & K &= \frac{\rho R_0^2 (1 - \nu^2)}{E}; \\ t^2 &= K \bar{t}^2; & \{u, v, w\} &= R_0 \{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}; & \chi &= R_0^2 \bar{\chi}; \\ \{T_i, S\} &= \frac{Eh}{(1 - \nu^2)} \{\bar{T}_i, \bar{S}\}; & \{M_i, H\} &= \frac{Eh R_0}{(1 - \nu^2)} \{\bar{M}_i, \bar{H}\}; & i &= \overline{1, 2}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Крім того, віднесемо до R_0 також параметри Ламе, кривизни і координати точок серединної поверхні оболонки. Надалі риску над безрозмірними величинами будемо опускаати. У формулах (6.6) T_i і M_i – погонні сили і згинальні моменти; S і H – зсувна сила і крутильний момент, віднесені до одиниці довжини нормального перерізу серединної поверхні оболонки.

Безрозмірні рівняння збуреного руху оболонки зручно представити в наступній векторно-матричній формі:

$$L\vec{U} + \vec{f} = \vec{X}. \quad (6.7)$$

Тут L – матричний оператор, породжений диференціальними рівняннями (6.1) і визначений на множині функцій \vec{U} , які задовольняють граничним умовам закріплення країв оболонки. Трикомпонентні вектори \vec{f} , \vec{X} і \vec{U} мають вигляд

$$\vec{f} = \left\{ \ddot{u}, \ddot{v}, \ddot{w} + a\delta(p) \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} d\Sigma \right) \right\};$$

$$\vec{X} = \{X_1, X_2, X_3\}; \quad X_i = \frac{1 - \nu^2}{Eh} \tilde{X}_i, \quad i = \overline{1, 3};$$

$$\vec{U} = \{u, v, w\}, \quad \delta(p) = \begin{cases} 1 & \text{при } p \in S_1, \\ 0 & \text{при } p \notin S_1. \end{cases}$$

У свою чергу потенціал зміщень частинок рідини визначається з розв'язання наступної крайової задачі

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} &= 0, \quad (x, y, z) \in D, \\ \frac{\partial \chi}{\partial n} \Big|_{S_1} &= w(p, t), \quad \left(\frac{\partial \chi}{\partial z} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + \widehat{f(t)} \right) \Big|_{\Sigma} = 0. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Характерною особливістю сформульованих крайових задач для переміщень оболонки і для потенціалу зміщень рідини є необхідність сумісного інтегрування рівнянь для вектор-функції \vec{U} , визначеної в точках серединної поверхні оболонки і рівнянь для функції $\chi(x, y, z, t)$, заданої в тривимірній області D . Функція $\chi(x, y, z, t)$ залежить від нормального прогину оболонки $w(p, t)$, оскільки він входить в граничну умову на частині границі S_1 області D . У свою чергу функція $w(p, t)$ залежить від функції $\chi(x, y, z, t)$, яка входить в вектор \vec{f} в рівнянні (6.7). У зв'язку з цим безпосереднє розв'язання крайової задачі (6.7), (6.8) в загальному випадку представляє собою досить складну задачу. Тому в подальшому для її розв'язання будемо застосовувати наближені методи, що дозволяють звести розв'язання вихідної задачі для рівнянь в частинних похідних до розв'язання системи звичайних диференціальних рівнянь, незалежною змінною в яких є час.

6.2 Зведення рівнянь збуреного руху оболонки з рідиною до системи звичайних диференціальних рівнянь

Аналогічно, як і в динаміці твердого тіла з рідким заповненням [68, 78], представимо потенціал зміщень рідини у вигляді суми двох гармонічних функцій

$$\chi = \Phi(x, y, z, t) + \Psi(x, y, z, t), \quad (6.9)$$

де Φ — потенціал зміщень частинок рідини, обумовлений деформацією оболонки, за умови, що вільна поверхня являє собою площину, паралельну поверхні Σ (іншими словами відсутні хвильові рухи); Ψ — потенціал хвильових рухів рідини.

Функцію Φ визначимо як розв'язок наступної крайової задачі:

$$\Delta\Phi = 0, \quad (x, y, z) \in D; \quad \left. \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right|_{S_1} = w(p, t); \quad \left. \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right|_{\Sigma} = c(t), \quad (6.10)$$

де $c(t)$ — довільна функція часу t , p — координати будь-якої точки серединної поверхні оболонки.

Функцію $c(t)$ виберемо таким чином, щоб виконувалася умова розв'язності задачі Неймана для рівняння Лапласа (6.10), яка є умовою рівності потоку рідини через замкнуту поверхню $\Sigma + S_1$:

$$\int_{\Sigma+S_1} \frac{\partial\Phi}{\partial n} dS = 0.$$

Звідки випливає, що

$$c(t) = -\frac{1}{\Sigma} \int_{S_1} w(p, t) dS. \quad (6.11)$$

Тут Σ — площа незбуреної вільної поверхні рідини.

Приведення рівнянь (6.7) і (6.8) з урахуванням відповідних граничних умов до нескінченної системи звичайних диференціальних рівнянь можна здійснити методом Бубнова - Гальоркіна. Для реалізації цього методу необхідно мати у своєму розпорядженні деяку систему лінійно незалежних функцій, що задовольняють граничним умовам задачі і умовам повноти.

Введемо в розгляд спектральну задачу з параметром в граничній умові

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_k(x, y, z) &= 0, \quad (x, y, z) \in D, \\ \left. \frac{\partial\varphi_k}{\partial n} \right|_{S_1} &= 0, \quad \left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial n} - \kappa_k\varphi_k \right) \Big|_{\Sigma} = 0, \end{aligned} \quad (6.12)$$

Відповідно до рівнянь (6.8), крайова задача (6.12) описує власні коливання рідини в нерухомій посудині. При цьому квадрат частоти σ_k^2 k -ої форми

власних коливань рідини зв'язаний з частотним параметром \varkappa_k співвідношенням

$$\sigma_k^2 = \eta \varkappa_k. \quad (6.13)$$

Всі власні значення спектральної задачі (6.12) дійсні, додатні і мають єдину граничну точку розташовану на нескінченності. У свою чергу, сукупність власних функцій володіє властивістю повноти на поверхні Σ і задовольняє наступним умовам ортогональності [119]:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} d\Sigma = \int_{\Sigma} \varphi_k d\Sigma = 0; \quad \int_{\Sigma} \varphi_k \varphi_l d\Sigma = 0; \\ \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} \frac{\partial \varphi_l}{\partial n} d\Sigma = 0, \quad (k \neq l). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Складову Ψ потенціалу зміщень рідини (6.9) представимо у вигляді розкладу в узагальнений ряд Фур'є по функціям φ_k :

$$\Psi(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} r_k(t) \varphi_k(x, y, z). \quad (6.15)$$

Коефіцієнти Фур'є $r_k(t)$ мають сенс узагальнених координат, що характеризують хвильові рухи рідини в оболонці.

Узагальнені координати рідини $r_k(t)$ будемо визначати з динамічної умови для потенціалу зміщень рідини χ (6.8) на її вільній поверхні. Для цього підставимо в граничну умову на Σ (6.8) вирази (6.9) і (6.15). Отримане співвідношення помножимо на $a \partial \varphi_l / \partial n$ і проінтегруємо його по області Σ . З урахуванням умов ортогональності (6.14) і того, що функція $\Phi(x, y, z, t)$ є розв'язком крайової задачі (6.10), отримаємо наступне рівняння відносно $r_k(t)$

$$a \mu_k (\ddot{r}_k + \sigma_k^2 r_k) = -a \int_{\Sigma} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} d\Sigma, \quad k = \overline{1, 2, \dots}, \quad (6.16)$$

де

$$\mu_k = \int_{\Sigma} \varphi_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} d\Sigma.$$

Далі виберемо базис для апроксимації переміщень оболонки і складової потенціалу зміщень рідини Φ . Сформулюємо допоміжну спектральну задачу, що описує вільні коливання оболонки з рідиною за умови, що вільна поверхня рідини являє собою площину, перпендикулярну поздовжній осі оболонки. Цю задачу можна сформулювати виходячи з рівнянь (6.7). Для цього в них слід покласти $X_i \equiv 0$, для потенціалу зміщень рідини (6.7) покласти $\Psi \equiv 0$ і відокремити часову координату за формулами

$$[u, v, w] = \exp^{i\Omega t}[u, v, w]; \quad \Phi = \exp^{i\Omega t} \Phi \quad c(t) = \exp^{i\Omega t} C.$$

Будемо вважати, що вектор-функція $\vec{U} = \{u, v, w\}$ належить дійсному простору H вектор-функцій, що задовольняють граничним умовам кріплення країв оболонки. Тоді з урахуванням введених позначень сформульована спектральна задача матиме такий вигляд:

$$L\vec{U} - \Omega^2 M\vec{U} = 0 \quad M\vec{U} = \left\{ u, v, w + a\delta(p) \left(\Phi - \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \Phi d\Sigma \right) \right\}, \quad (6.17)$$

$$\Delta\Phi = 0, \quad (x, y, z) \in D, \quad \left. \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right|_{S_1} = w, \quad \left. \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right|_{\Sigma} = C. \quad (6.18)$$

Визначимо скалярний добуток векторів в H формулою

$$(U_1, U_2) = \int_S (u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2) dS.$$

Розглянемо властивості операторів L і M . Оператор L є симетричним. Це означає, що для будь-яких трикомпонентних вектор-функцій $\vec{U}^{(1)}$ і $\vec{U}^{(2)}$, що належать простору H , справедлива тотожність $(L\vec{U}^{(1)}, \vec{U}^{(2)}) = (L\vec{U}^{(2)}, \vec{U}^{(1)})$. Цю тотожність можна перевірити безпосередньо, використовуючи формули інтегрування по частинам для поверхневих інтегралів. Це можна зробити значно простіше якщо скористатися формулою [30]

$$\begin{aligned}
(L\vec{U}^{(1)}, \vec{U}^{(2)}) &= \int_S \left\{ \varepsilon_1^{(1)} \varepsilon_1^{(2)} + \varepsilon_2^{(1)} \varepsilon_2^{(2)} + \nu \left(\varepsilon_2^{(1)} \varepsilon_1^{(2)} + \varepsilon_2^{(2)} \varepsilon_1^{(1)} \right) + \right. \\
&+ \frac{(1-\nu)}{2} \omega^{(1)} \omega^{(2)} + c^2 \left[\varkappa_1^{(1)} \varkappa_1^{(2)} + \varkappa_2^{(1)} \varkappa_2^{(2)} + \right. \\
&\left. \left. + \nu \left(\varkappa_2^{(1)} \varkappa_1^{(2)} + \varkappa_1^{(1)} \varkappa_2^{(2)} \right) + 2(1-\nu) \tau^{(1)} \tau^{(2)} \right] \right\} dS,
\end{aligned} \tag{6.19}$$

де верхні індекси в круглих дужках означають, що в відповідні формули для деформацій оболонки внесені компоненти вектор-функцій $\vec{U}^{(1)}$ і $\vec{U}^{(2)}$. З цієї формули випливає симетрія оператора L . Якщо покласти $\vec{U}^{(1)} = \vec{U}^{(2)} = \vec{U}$, то отримаємо

$$\begin{aligned}
(L\vec{U}, \vec{U}) &= \int_S \left\{ \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\nu \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \frac{(1-\nu)}{2} \omega^2 + \right. \\
&\left. + c^2 \left[\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 + 2\nu \varkappa_1 \varkappa_2 + 2(1-\nu) \tau^2 \right] \right\} dS.
\end{aligned} \tag{6.20}$$

Права частина в співвідношенні (6.20) дорівнює подвоєній потенціальній енергії деформації оболонки [79] отже оператор L додатній. Можна довести і більш сильне твердження [30], що оператор L є і додатно визначеним тобто $(L\vec{U}, \vec{U}) \geq \gamma(\vec{U}, \vec{U})$, $\gamma > 0$. Надалі будемо припускати параметри оболонки такими, що найменше власне значення оператора L $\lambda_{\min}(L) > 0$. У цьому випадку найбільше можливе значення параметра γ і є $\lambda_{\min}(L)$. Таким чином наше припущення рівносильно вимозі додатної визначеності оператора L .

Для оператора M матимемо

$$\begin{aligned}
(M\vec{U}_1, \vec{U}_2) &= \int_S \left[u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2 + \right. \\
&\left. + a\delta(p) \left(\Phi_1 - \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \Phi_1 d\Sigma \right) w_2 \right] dS.
\end{aligned} \tag{6.21}$$

Розглянемо вираз

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \left(\Phi_1 - \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \Phi_1 d\Sigma \right) w_2 dS &= \int_{S_1} \left(\Phi_1 - \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \Phi_1 d\Sigma \right) \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} dS = \\ &= \int_{\Sigma+S_1} \left(\Phi_1 - \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \Phi_1 d\Sigma \right) \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} dS = \int_{S_1} \left(\Phi_2 - \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \Phi_2 d\Sigma \right) w_1 dS. \end{aligned}$$

Тут була використана формула Гріна для гармонічних функцій, перетворюючої інтеграл по поверхні $\Sigma + S_1$ в об'ємний інтеграл, а також співвідношення

$$\int_{\Sigma} \left(\Phi_1 - \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \Phi_1 d\Sigma \right) \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} d\Sigma = 0,$$

яке випливає з граничних умов для функції Φ_2 на поверхні Σ .

З формул (6.21) випливає, що оператор M симетричний і додатний [8]. На підставі загальних теорем теорії спектральних задач [71] з урахуванням встановлених властивостей операторів L і M можна сформулювати ряд тверджень для власних значень і власних функцій задачі (6.17), (6.18). Розглядувана задача має дискретний спектр $0 < \Omega_1^2 \leq \Omega_2^2 \leq \dots \leq \Omega_n^2 \dots$, причому $\Omega_n^2 \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Сукупність відповідних власних функцій \vec{U}_i повна в просторі вектор-функцій з H і задовольняє таким умовам ортогональності:

$$(L\vec{U}_i, \vec{U}_j) = (M\vec{U}_i, \vec{U}_j) = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j. \quad (6.22)$$

Внаслідок цього довільна квадратично сумована на поверхні S вектор-функція може бути розкладена в ряд по системі власних функцій \vec{U}_i , який буде сходитися покомпонентно в середньо квадратичному сенсі. Таким чином власні функції спектральної задачі (6.17), (6.18) можуть бути використані для зведення рівнянь в частинних похідних (6.7), (6.8) до системи звичайних диференціальних рівнянь.

Представимо переміщення серединної поверхні оболонки і потенціал зміщень рідини Φ у вигляді наступних розкладів

$$\vec{U}(p, t) = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(t) \vec{U}_j(p); \quad \Phi = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(t) \Phi_j(x, y, z), \quad (6.23)$$

де Φ_j — гармонічні функції, що задовольняють граничним умовам

$$\left. \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} \right|_{S_1} = w_j(p); \quad \left. \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} \right|_{\Sigma} = -\frac{1}{\Sigma} \int_{S_1} w_j(p) dS.$$

Слід зазначити, що при такому представленні розв'язків задачі (6.7) виконуються всі граничні умови для переміщень оболонки, в тому числі і кінематична гранична умова $\partial \Phi / \partial n|_{S_1} = w$.

Підставимо розклади (6.23) в рівняння (6.7) і (6.16). Отримане рівняння (6.7) помножимо скалярно на \vec{U}_i і проінтегруємо отриманий результат по всій поверхні оболонки S . Тоді з урахуванням умов ортогональності (6.22) і співвідношення $(L\vec{U}_i, \vec{U}_i) = \Omega_i^2 M(\vec{U}_i, \vec{U}_i)$ отримаємо наступну систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} a_i (\ddot{s}_i + \Omega_i^2 s_i) + a \sum_{k=1}^{\infty} \ddot{r}_k \lambda_{ik} &= \tilde{Q}_i, \\ a \mu_k (\ddot{r}_k + \sigma_k^2 r_k) + a \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{s}_i \gamma_{ki} &= 0, \quad (i, k = \overline{1, 2, \dots}). \end{aligned} \quad (6.24)$$

Тут

$$\begin{aligned} a_i &= \int_S (u_i^2 + v_i^2 + w_i^2) dS + a \int_{S_1} \left(\Phi_i - \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \Phi_i dS \right) w_i dS, \\ \lambda_{ik} &= \int_{S_1} \varphi_k w_i dS, \quad \gamma_{ki} = \int_{\Sigma} \Phi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} dS, \quad \tilde{Q}_i = \int_S (\vec{X}, \vec{U}_i) dS. \end{aligned}$$

Покажемо симетрію коефіцієнтів λ_{ik} і γ_{ki} :

$$\gamma_{ki} = \int_{\Sigma} \Phi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} dS = \int_{\Sigma+S_1} \Phi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} dS = \int_{S_1} \varphi_k \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} dS = \int_{S_1} \varphi_k w_i dS = \lambda_{ik}.$$

При цьому була використана формула Гріна для гармонічних функцій φ і ψ

$$\int_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS = \int_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS,$$

де S замкнена поверхня, що обмежує область D .

Система рівнянь (6.24) для описання збуреного руху пружної оболонки, частково заповненої рідиною, може бути зведена до аналогічних рівнянь, які отримані в роботах [69] і [126] на основі використання принципу можливих переміщень.

Рівняння (6.24) можуть бути використані для наближеного визначення вільних коливань рідини в пружному резервуарі. Для цього слід покласти

$$s_i = \exp^{i\omega t} S_i, \quad r_k = \exp^{i\omega t} R_k, \quad \tilde{Q}_i \equiv 0. \quad (6.25)$$

З урахуванням цього і обмежуючись скінченним числом узагальнених координат для визначення амплітуд S_i , R_k і частот коливань ω отримуємо наступну однорідну скінченну систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} (G - \lambda^2 F) \vec{y} &= 0, \quad \vec{y} = \{S_1, S_2, \dots, S_{s_0}; R_1, R_2, \dots, R_{r_0}\}, \\ \lambda^2 &= \frac{(1 - \nu^2)\rho R_0^2 \omega^2}{E}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Тут елементи g_{ij} і f_{ij} верхньої частини відносно головної діагоналі симетричних матриць G і F відповідно мають вигляд:

$$\begin{aligned} g_{i,j} &= \delta_{ij} a_i \Omega_i^2, \quad f_{ij} = \delta_{ij} a_i, \quad (i, j = \overline{1, s_0}), \\ g_{i,j+s_0} &= 0, \quad f_{i,j+s_0} = a \lambda_{ij}, \quad (i = \overline{1, s_0}, j = \overline{1, r_0}), \\ g_{i+s_0,j+s_0} &= \delta_{ij} a \mu_i \sigma_i^2, \quad f_{i+s_0,j+s_0} = \delta_{ij} a \mu_i, \quad (i, j = \overline{1, r_0}), \end{aligned}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Визначення коефіцієнтів рівнянь (6.24) пов'язане з обчисленням квадратур від розв'язків спектральних задач (6.12) і (6.17), (6.18).

6.3 Застосування варіаційних методів для побудови розв'язків додатково введених спектральних задач

Для оболонки обертання компоненти переміщень точок серединної поверхні оболонки u , v , w і потенціал зміщень частинок рідини Φ з урахуванням умов їх періодичності по куту β можна представити у вигляді:

$$\begin{aligned} u(s, \beta) &= u(s) \cos n\beta, & v(s, \beta) &= v(s) \sin n\beta, \\ w(s, \beta) &= w(s) \cos n\beta, & \Phi(z, r, \beta) &= \Phi(z, r) \cos n\beta, \end{aligned} \quad (6.27)$$

де n – число хвиль пружної поверхні оболонки і рідини в окружному напрямку, що розглядається в подальшому в якості параметра.

Зауважимо, що інтеграли

$$\int_{S_1} w ds, \quad \int_{\Sigma} w d\Sigma, \quad \int_{\Sigma} \Phi d\Sigma,$$

зустрічаються в наведених вище формулах не рівні нулю тільки для випадку осесиметричних коливань при $n = 0$. Для інших цілочисельних значень параметра n ці інтеграли дорівнюють нулю.

Надалі обмежимося розглядом неосесиметричних коливань оболонки з рідиною при $n > 0$.

Після відділення кутової координати β для складової потенціалу зміщень рідини $\Phi(z, r)$ матимемо наступну крайову задачу Неймана:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) - \frac{n^2}{r^2} \Phi &= 0, & (z, r) &\in Q, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{L_0} &= 0; & \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{L_1} &= w, \end{aligned} \quad (6.28)$$

де Q , L_0 і L_1 – меридіональний переріз області D , поверхонь Σ і S_1 відповідно.

Введемо в розгляд оператор G [73], який значенням функції $w(s)$, заданої на контурі L_1 ставить у відповідність функцію Φ , визначену в області Q і є розв'язком крайової задачі (6.28). Цю відповідність запишемо у вигляді:

$$\Phi = Gw. \quad (6.29)$$

Тут G – інтегральний оператор, ядром якого є функція Гріна другої крайової задачі (6.28). Якщо область має канонічну форму, то цю функцію можна побудувати в явному вигляді.

Будемо вважати, що вектор-функція $\vec{U} = \{u(s), v(s), w(s)\}$ належить до класу H функцій, визначених в точках меридіонального перерізу оболонки і які відповідають умовам кріплення її торців. Тоді вихідну спектральну задачу (6.17), (6.18) можна представити в наступному операторному вигляді:

$$\mathfrak{S}(\vec{U}) = L\vec{U} - \Omega^2 M\vec{U} = 0; \quad M = \text{diag}\{1, 1, 1 + \delta(p)aG\}, \quad (6.30)$$

де L — матричний оператор, породжений диференціальними рівняннями (6.1) після відділення в них кутової координати і переходу до безрозмірних величин.

Розв'язки системи інтегро - диференціальних рівнянь (6.30), що має восьмий порядок повинні бути підпорядковані відповідним однорідним граничним умовам. Граничні умови накладаються або на переміщення оболонки, або на відповідні їм сили. Так для абсолютно жорсткого кріплення краю оболонки при $s = s_1$ ці умови набудуть вигляд:

$$\left[u = v = w = \frac{dw}{ds} = 0 \right]_{s=s_1}. \quad (6.31)$$

Для вільного краю оболонки при $s = s_2$ мають місце такі силові граничні умови

$$\left[T_1 = S = \tilde{Q}_1 = M_1 = 0 \right]_{s=s_2}. \quad (6.32)$$

Тут T_1 , S , \tilde{Q}_1 и M_1 безрозмірні погонні зусилля, узагальнена перерізуюча сила і момент, які виражаються через переміщення оболонки за формулами:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{du}{ds} + \frac{w}{R_1} + \nu \left(\frac{n}{r}v + \frac{r'}{r}u + \frac{w}{R_2} \right); \\ S &= \frac{1 - \nu}{2} \left(\frac{n}{r}u + \frac{dv}{ds} - \frac{r'}{r}v \right); \\ \tilde{Q}_1 &= -c^2 \left\{ \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{ds} \left(r \frac{dw}{ds} \right) - \frac{n^2}{r^2} w \right] - \frac{(1 - \nu)n^2}{r^2} \left(\frac{dw}{ds} - \frac{r'}{r} w \right) \right\}; \\ M_1 &= c^2 \left[-\frac{d^2 w}{ds^2} + \nu \left(\frac{n^2}{r^2} w - \frac{r'}{r} \frac{dw}{ds} \right) \right]. \end{aligned}$$

В інших випадках кріплення краю оболонки використовуються комбінації граничних умов (6.31) і (6.32). Для оболонок у формі купола при побудові розв'язків слід враховувати асимптотичну поведінку шуканих функцій при $s \rightarrow 0$.

Оскільки на оболонку діє розривне динамічне навантаження, то для ефективно побудови наближеного розв'язку системи (6.30) доцільно розбити область зміни параметра s на дві підобласті. Нехай $s = \zeta$ відповідає рівню рідини, на який заповнена оболонка. Розіб'ємо область $[s_1, s_2]$ точкою $s = \zeta$ на дві підобласті $G^{(1)} = [s_1, \zeta]$ і $G^{(2)} = [\zeta, s_2]$. Область $G^{(1)}$ відповідає змоченій частині оболонки, а область $G^{(2)}$ — не змоченій частині, яка залишилася. Позначимо розв'язки вихідної задачі в підобластях $G^{(1)}$ і $G^{(2)}$ відповідно через $\vec{U}^{(1)}$ і $\vec{U}^{(2)}$. Надалі верхній індекс у всіх функціях, що зустрічаються буде позначати область, в якій ці функції визначені. Для визначеності, будемо вважати, що нижній торець оболонки жорстко закріплений, а верхній — вільний. Крім граничних умов (6.31), (6.32) в перерізі $s = \zeta$ повинні виконуватися певні граничні умови спряження розв'язків $\vec{U}^{(1)}(s)$ і $\vec{U}^{(2)}(s)$.

Еквівалентну варіаційну постановку вихідної спектральної задачі можна отримати виходячи з принципу можливих переміщень, згідно з яким $\delta\Pi = \delta A$, де $\delta\Pi$ — варіація потенціальної енергії деформації оболонки [79]. Роботу зовнішніх сил δA на можливих переміщеннях оболонки можна представити в наступному вигляді:

$$\delta A = \int_{s_1}^{s_2} \vec{Q}, \delta \vec{U} r ds = \Omega^2 \int_{s_1}^{s_2} [u \delta u + v \delta v + (w + \delta(p) a G(w)) \delta w] r ds. \quad (6.33)$$

В результаті вихідна спектральна задача зводиться до відшукування стаціонарних значень для функціоналу $I(\vec{U})$

$$I(\vec{U}) = \int_{s_1}^{s_2} F(\vec{U}) r ds.$$

Представимо цей функціонал в наступному вигляді:

$$I = \int_{G^{(1)}} F(\vec{U}^{(1)}) dG^{(1)} + \int_{G^{(2)}} F(\vec{U}^{(2)}) dG^{(2)}. \quad (6.34)$$

Будемо припускати, що в кожній з підобластей, відповідно до теорії тонких ізотропних оболонок, поля зміщень, деформацій і напружень володіють властивостями неперервності і диференційованості. Обчислимо першу варіацію від функціоналу (6.34), без внесення жодних обмежень на варійовані функції, крім граничних умов (6.31). Тоді з урахуванням інтегрування по частинам та прийнятих позначень цю варіацію можна представити у вигляді:

$$\begin{aligned} \delta I = & \sum_{k=1}^2 \int_{G^{(k)}} \mathfrak{S}(\vec{U}^{(k)}) dG^{(k)} + \\ & + \left(T_1^{(1)} \delta u^{(1)} + S^{(1)} \delta v^{(1)} + \tilde{Q}_1^{(1)} \delta w^{(1)} - M_1^{(1)} \frac{d\delta w^{(1)}}{ds} \right)_{s=\zeta} - \\ & - \left(T_1^{(2)} \delta u^{(2)} + S^{(2)} \delta v^{(2)} + \tilde{Q}_1^{(2)} \delta w^{(2)} - M_1^{(2)} \frac{d\delta w^{(2)}}{ds} \right)_{s=\zeta} + \\ & + \left(T_1^{(2)} \delta u^{(2)} + S^{(2)} \delta v^{(2)} + \tilde{Q}_1^{(2)} \delta w^{(2)} - M_1^{(2)} \frac{d\delta w^{(2)}}{ds} \right)_{s=s_2}. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Прирівнюючи δI до нуля, отримаємо варіаційне рівняння для знаходження функцій $\vec{U}^{(k)}(s)$. З цього рівняння в силу довільності варіювання функцій в областях $G^{(k)}$ і на границі при $s = s_2$ випливає, що в межах кожної з введених підобластей повинні виконуватися вихідні рівняння і граничні умови вільного краю оболонки при $s = s_2$. Далі, якщо припустити, що клас допустимих функцій при $s = \zeta$ підпорядкований умовам

$$u^{(1)} = u^{(2)}; \quad v^{(1)} = v^{(2)}; \quad w^{(1)} = w^{(2)}; \quad \frac{dw^{(1)}}{ds} = \frac{dw^{(2)}}{ds}, \quad (6.36)$$

то із (6.35) випливають такі силові граничні умови при $s = \zeta$:

$$T_1^{(1)} = T_1^{(2)}; \quad S^{(1)} = S^{(2)}; \quad M_1^{(1)} = M_1^{(2)}; \quad \tilde{Q}_1^{(1)} = \tilde{Q}_1^{(2)}. \quad (6.37)$$

При цьому слід зауважити, що умови (6.37) є природними граничними умовами для функціоналу (6.34).

Отже, при використанні методу Рітца для розв'язання варіаційного рівняння $\delta I = 0$ апроксимації для функцій $u^{(k)}$, $v^{(k)}$ і $w^{(k)}$ повинні вибиратися таким чином, щоб вони забезпечували виконання умов (6.36). У цьому випадку, інші граничні умови задачі, крім умов (6.31) будуть природними граничними умовами для функціоналу (6.34). Побудова розв'язків, які заздалегідь задовольняють умовам (6.36), являє собою в загальному випадку досить складну самостійну задачу. У зв'язку з цим виникає питання про перетворення функціоналу (6.34) в такий функціонал, для якого умови спряження (6.36) були б природними умовами.

Теорія перетворення варіаційних задач створена вже давно [61], але в літературі відомі лише деякі приклади застосування її до конкретних задач.

Граничні умови (6.36) при $s = \zeta$ можна розглядати як додаткові обмеження на задачу знаходження стаціонарного значення функціоналу $I(\vec{U})$. Одним із способів врахування обмежень у формі рівностей є метод невизначених множників Лагранжа [61]. Відповідно до цього методу введемо в розгляд новий функціонал Π_1 , який має вигляд

$$\begin{aligned} \Pi_1(\vec{U}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = I(\vec{U}) + & \left[\alpha_1(u^{(1)} - u^{(2)}) + \alpha_2(v^{(1)} - v^{(2)}) + \right. \\ & \left. + \alpha_3(w^{(1)} - w^{(2)}) + \alpha_4 \left(\frac{dw^{(1)}}{ds} - \frac{dw^{(2)}}{ds} \right) \right]_{s=\zeta}, \end{aligned} \quad (6.38)$$

де α_i ($i = \overline{1, 4}$) — множники Лагранжа, що підлягають визначенню в подальшому. Вихідна варіаційна задача при цьому переходить в наступну:

$$\delta \Pi_1(\vec{U}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 0. \quad (6.39)$$

Перетворення функціоналу I в функціонал Π_1 досягається ціною штучного збільшення кількості невідомих. Потрібно шукати стаціонарне значення функціоналу Π_1 не тільки по u , v і w , але і по α_1 , α_2 , α_3 і α_4 . Цю задачу можна істотно спростити, якщо попередньо знайти явні вирази для множників

Лагранжа через самі розв'язки \vec{U} і їх похідні. З цією метою обчислимо першу варіацію функціонала Π_1 при вільному варіюванні функцій $\vec{U}^{(i)}$ ($i = 1, 2$) і постійних α_i ($i = \overline{1, 4}$).

З варіаційного рівняння (6.39) випишемо тільки позаінтегральні члени при $s = \zeta$. При цьому будемо мати

$$\begin{aligned} & \left[\delta\alpha_1(u^{(1)} - u^{(2)}) + \delta\alpha_2(v^{(1)} - v^{(2)}) + \delta\alpha_3(w^{(1)} - w^{(2)}) + \right. \\ & + \delta\alpha_4 \left(\frac{dw^{(1)}}{ds} - \frac{dw^{(2)}}{ds} \right) + (T_1^{(1)} + \alpha_1)\delta u^{(1)} - (T_1^{(2)} + \alpha_1)\delta u^{(2)} + \\ & + (S^{(1)} + \alpha_2)\delta v^{(1)} - (S^{(2)} + \alpha_2)\delta v^{(2)} + (\tilde{Q}_1^{(1)} + \alpha_3)\delta w^{(1)} + \\ & \left. + (\tilde{Q}_1^{(2)} + \alpha_3)\delta w^{(2)} + (\alpha_4 - M_1^{(1)})\frac{d\delta w^{(1)}}{ds} + (M_1^{(2)} - \alpha_4)\frac{d\delta w^{(2)}}{ds} \right]_{s=\zeta}. \end{aligned}$$

Якщо функціонал (6.38) приймає стаціонарне значення для довільних варіацій $\delta\vec{U}^{(i)}$, $\frac{d\delta w^{(i)}}{ds}$ ($i = 1, 2$) і $\delta\alpha_i$ ($i = \overline{1, 4}$), то з цього виразу випливає, що в точці $s = \zeta$ будуть виконуватися кінематичні умови спряження (6.36), а також співвідношення

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -T_1^{(1)}; & \alpha_1 &= -T_1^{(2)}; & \alpha_2 &= -S^{(1)}; & \alpha_2 &= -S^{(2)}; \\ \alpha_3 &= -\tilde{Q}_1^{(1)}; & \alpha_3 &= -\tilde{Q}_1^{(2)}; & \alpha_4 &= M_1^{(1)}; & \alpha_4 &= M_1^{(2)}. \end{aligned}$$

З цих формул можна встановити такі вирази для множників Лагранжа:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{1}{2} \left(T_1^{(1)} + T_1^{(2)} \right) \Big|_{s=\zeta}; & \alpha_2 &= -\frac{1}{2} \left(S^{(1)} + S^{(2)} \right) \Big|_{s=\zeta}; \\ \alpha_3 &= -\frac{1}{2} \left(\tilde{Q}_1^{(1)} + \tilde{Q}_1^{(2)} \right) \Big|_{s=\zeta}; & \alpha_4 &= \frac{1}{2} \left(M_1^{(1)} + M_1^{(2)} \right) \Big|_{s=\zeta}. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Виключаючи α_i ($i = \overline{1, 4}$) з функціоналу (6.38) за допомогою встановлених для них виразів (6.40), отримаємо узагальнений функціонал Π_2 , що залежить тільки від $\vec{U}(s)$. Крайові умови (6.32), (6.36) і (6.37) будуть автоматично виконуватися для функцій, що доставляють функціоналу $\Pi_2(\vec{U})$ стаціонарне значення.

Отриманий функціонал є теоретичною основою для побудови прямих методів розв'язання даної задачі. На основі методу Рітца ці розв'язки будуть мати аналітичну форму.

Представимо функції $u^{(k)}(s)$, $v^{(k)}(s)$ і $w^{(k)}(s)$ ($k = 1, 2$) у вигляді наступних відрізків узагальнених рядів:

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= \sum_{j=1}^N x_j U_j^{(1)}(s); & v^{(1)} &= \sum_{j=1}^N x_{j+N} V_j^{(1)}(s); \\ w^{(1)} &= \sum_{j=1}^N x_{j+2N} W_j^{(1)}(s); & u^{(2)} &= \sum_{j=1}^N x_{j+3N} U_j^{(2)}(s); \\ v^{(2)} &= \sum_{j=1}^N x_{j+4N} V_j^{(2)}(s); & w^{(2)} &= \sum_{j=1}^N x_{j+5N} W_j^{(2)}(s). \end{aligned} \quad (6.41)$$

Тут x_j ($j = \overline{1, 6N}$) — довільні постійні, що підлягають визначенню в подальшому; $U_j^{(k)}(s)$, $V_j^{(k)}(s)$ і $W_j^{(k)}(s)$ — системи координатних функцій, які визначені відповідно в підобластях $G^{(k)}$ ($k = 1, 2$).

Координатні функції виберемо у вигляді

$$\begin{aligned} U_j^{(1)} &= V_j^{(1)} = (s - s_1) P_j(x); & W_j^{(1)} &= (s - s_1)^2 P_j(x); & x &= \frac{2(s - \zeta)}{\zeta - s_1} + 1; \\ U_j^{(2)} &= V_j^{(2)} = W_j^{(2)} = P_j(y); & y &= \frac{2s}{s_2 - \zeta} - \frac{s_2 + \zeta}{s_2 - \zeta}, \end{aligned}$$

де $P_j(z)$ — зміщені на одиницю за індексом j многочлени Лежандра з аргументами, які перетворюють інтервали $[s_1, \zeta]$ і $[\zeta, s_2]$ на інтервал $[-1, 1]$.

Введені системи базисних функцій є лінійно незалежними і повними функціями у відповідних підобластях. Системи координатних функцій з верхнім індексом рівним одиниці підпорядковані граничним умовам (6.31).

Підставимо розклади (6.41) в функціонал $\Pi_2(\vec{U})$. З необхідних умов стаціонарності узагальненого функціонала отримаємо однорідну систему алгебраїчних рівнянь

$$(A - \Omega^2 B) \vec{X} = 0, \quad (6.42)$$

де $\vec{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_{6N}\}$.

Представимо матрицю A в вигляді суми двох матриць $A = A^{(1)} + A^{(2)}$, де елементи матриці $A^{(1)}$ утворені з необхідних умов екстремуму функціоналу $I(\vec{u})$ (6.34), а елементи матриці $A^{(2)}$ обумовлені наявністю в узагальненому функціонал добавки з встановленими множниками Лагранжа.

Ненульові елементи верхньої частини відносно головної діагоналі симетричної матриці $A^{(1)}$ матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} \alpha_{ij}^{(1)} &= \int_{s_1}^{\zeta} \Psi_{11}(U_j^{(1)}, U_i^{(1)}) r ds, & \alpha_{i+N, j+N}^{(1)} &= \int_{s_1}^{\zeta} \Psi_{22}(V_j^{(1)}, V_i^{(1)}) r ds, \\ \alpha_{i+2N, j+2N}^{(1)} &= \int_{s_1}^{\zeta} \Psi_{33}(W_j^{(1)}, W_i^{(1)}) r ds, & (i = 1, 2, \dots, N, j = i); \\ \alpha_{i, j+N}^{(1)} &= \int_{s_1}^{\zeta} \Psi_{12}(V_j^{(1)}, U_i^{(1)}) r ds, & \alpha_{i, j+2N}^{(1)} &= \int_{s_1}^{\zeta} \Psi_{13}(W_j^{(1)}, U_i^{(1)}) r ds, \\ \alpha_{i+N, j+2N}^{(1)} &= \int_{s_1}^{\zeta} \Psi_{23}(W_j^{(1)}, V_i^{(1)}) r ds, & (i, j = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (6.43)$$

Введені тут оператори $\Psi_{ij}(p, q)$ визначаються за формулами наведеними в розділі 2.2.

Формули для коефіцієнтів $\alpha_{i+3N, j+3N}^{(1)}$, $\alpha_{i+3N, j+4N}^{(1)}$, $\alpha_{i+3N, j+5N}^{(1)}$, $\alpha_{i+4N, j+4N}^{(1)}$, $\alpha_{i+4N, j+5N}^{(1)}$, $\alpha_{i+5N, j+5N}^{(1)}$ можна отримати з формул (6.43) після відповідної заміни в них функцій $U_k^{(1)}$, $V_k^{(1)}$, $W_k^{(1)}$ на функції $U_k^{(2)}$, $V_k^{(2)}$, $W_k^{(2)}$ і заміни границь інтегрування від ζ до s_2 . Решта коефіцієнтів дорівнюють нулю.

Елементи $\alpha_{ij}^{(2)}$ верхньої частини відносно головної діагоналі симетричної матриці $A^{(2)}$ можна представити в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \alpha_{ij}^{(2)} &= -\frac{1}{2} \left[T(U_i^{(1)}, 0, 0) U_j^{(1)} + T(U_j^{(1)}, 0, 0) U_i^{(1)} \right]_{s=\zeta}, \\ \alpha_{i+N, j+N}^{(2)} &= -\frac{1}{2} \left[S(0, V_i^{(1)}) V_j^{(1)} + S(0, V_j^{(1)}) V_i^{(1)} \right]_{s=\zeta}, & \alpha_{i+N, j+2N}^{(2)} &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{i+2N,j+2N}^{(2)} &= -\frac{1}{2} \left[Q(W_i^{(1)})W_j^{(1)} + Q(W_j^{(1)})W_i^{(1)} - M(W_i^{(1)})\frac{dW_j^{(1)}}{ds} - \right. \\
&\quad \left. - M(W_j^{(1)})\frac{dW_i^{(1)}}{ds} \right]_{s=\zeta}, \quad (i = 1, 2, \dots, N, j = I); \\
\alpha_{i,j+N}^{(2)} &= -\frac{1}{2} \left[T(0, V_j^{(1)}, 0)U_i^{(1)} + S(U_i^{(1)}, 0)V_j^{(1)} \right]_{s=\zeta}, \\
\alpha_{i,j+2N}^{(2)} &= -\frac{1}{2} \left[T(0, 0, W_j^{(1)})U_i^{(1)} \right]_{s=\zeta}, \\
\alpha_{i,j+3N}^{(2)} &= \frac{1}{2} \left[T(U_i^{(1)}, 0, 0)U_j^{(2)} - T(U_j^{(2)}, 0, 0)U_i^{(1)} \right]_{s=\zeta}, \\
\alpha_{i,j+4N}^{(2)} &= \frac{1}{2} \left[S(U_i^{(1)}, 0)V_j^{(2)} - T(0, V_j^{(2)}, 0)U_i^{(1)} \right]_{s=\zeta}, \\
\alpha_{i,j+5N}^{(2)} &= -\frac{1}{2} \left[T(0, 0, W_j^{(2)})U_i^{(1)} \right]_{s=\zeta}, \tag{6.44} \\
\alpha_{i+N,j+3N}^{(2)} &= -\frac{1}{2} \left[S(U_j^{(2)}, 0)V_i^{(1)} - T(0, V_i^{(1)}, 0)U_j^{(2)} \right]_{s=\zeta}, \\
\alpha_{i+N,j+4N}^{(2)} &= -\frac{1}{2} \left[S(0, V_j^{(2)})V_i^{(1)} - S(0, V_i^{(1)})V_j^{(2)} \right]_{s=\zeta}, \quad \alpha_{i+N,j+5N} = 0, \\
\alpha_{i+2N,j+3N}^{(2)} &= \frac{1}{2} \left[T(0, 0, W_i^{(1)})U_j^{(2)} \right]_{s=\zeta}, \quad \alpha_{i+2N,j+4N} = 0, \\
\alpha_{i+2N,j+5N}^{(2)} &= -\frac{1}{2} \left[Q(W_j^{(2)})W_i^{(1)} - Q(W_i^{(1)})W_j^{(2)} + M(W_i^{(1)})\frac{dW_j^{(2)}}{ds} - \right. \\
&\quad \left. - M(W_j^{(2)})\frac{dW_i^{(1)}}{ds} \right]_{s=\zeta}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, N).
\end{aligned}$$

Решта коефіцієнтів матриці $A^{(2)}$ обчислюються за формулами

$$\begin{aligned}
\alpha_{i+3N,j+3N}^{(2)} &= -\alpha_{ij}^{(2)}, \quad \alpha_{i+4N,j+4N}^{(2)} = -\alpha_{i+N,j+N}^{(2)}, \\
\alpha_{i+5N,j+5N} &= -\alpha_{i+2N,j+2N}, \quad (i = 1, 2, \dots, N, j = I); \\
\alpha_{i+3N,j+4N}^{(2)} &= -\alpha_{i,j+N}, \quad \alpha_{i+3N,j+5N}^{(2)} = -\alpha_{i,j+2N}, \tag{6.45} \\
\alpha_{i+4N,j+5N} &= 0, \quad (i, j = 1, 2, \dots, N),
\end{aligned}$$

де в правих частинах виразів (6.45) верхні індекси при функціях слід замінити на 2.

Введені в виразах (6.44) і (6.45) функції T , S , M і Q мають вигляд

$$\begin{aligned} T(p, q, t) &= \frac{dp}{ds} + \nu \frac{r'}{r} p + \nu \frac{n}{r} q + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2} \right) t, \quad Q(t) = \tilde{Q}_1(t), \\ S(p, q) &= -\frac{\nu_1 n}{r} p + \nu_1 \left(\frac{dq}{ds} - \frac{r'}{r} q \right), \quad \nu_1 = \frac{1 - \nu}{2}, \\ M(t) &= c^2 \left[-\frac{d^2 t}{ds^2} + \nu \left(\frac{n^2}{r^2} t - \frac{r'}{r} \frac{dt}{ds} \right) \right], \end{aligned} \quad (6.46)$$

при цьому, якщо у функціях T і S один з аргументів покладається рівним нулю, то мається на увазі, що і відповідні похідні тотожно дорівнюють нулю.

Коефіцієнти b_{ij} симетричної матриці B обчислюються за такими формулами:

$$\begin{aligned} b_{i,j} &= \int_{s_1}^{\zeta} U_i^{(1)} U_j^{(1)} r ds; \quad b_{i+N,j+N} = \int_{s_1}^{\zeta} V_i^{(1)} V_j^{(1)} r ds; \\ b_{i+2N,j+2N} &= \int_{s_1}^{\zeta} \left(W_i^{(1)} + a G W_i^{(1)} \Big|_{L_1} \right) W_j^{(1)} r ds; \\ b_{i+3N,j+3N} &= \int_{\zeta}^{s_2} U_i^{(2)} U_j^{(2)} r ds; \quad b_{i+4N,j+4N} = \int_{\zeta}^{s_2} V_i^{(2)} V_j^{(2)} r ds; \\ b_{i+4N,j+4N} &= \int_{\zeta}^{s_2} W_i^{(2)} W_j^{(2)} r ds; \quad (i, j = \overline{1, N}). \end{aligned} \quad (6.47)$$

Решта коефіцієнтів матриці B дорівнюють нулю.

При обчисленні елементів матриці $b_{i+2N,j+2N}$ ($i, j = \overline{1, N}$) необхідно знати функції $F_k(z, r)$ на контурі L_1 , які є розв'язками наступних задач Неймана:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_k}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F_k}{\partial r} \right) - \frac{n^2}{r^2} F_k &= 0, \quad (z, r) \in Q, \\ \frac{\partial F_k}{\partial z} \Big|_{L_0} &= 0; \quad \left(\frac{\partial F_k}{\partial n} \right) \Big|_{L_1} = W_k^{(1)}, \quad (k = \overline{1, N}). \end{aligned} \quad (6.48)$$

На відміну від задачі (6.28) гранична умова на контурі L_1 містить вже відомі функції $W_k^{(1)}$, які обрані в якості координатних функцій для апроксимації нормального прогину оболонки $w^{(1)}(s)$ в області $G^{(1)}$.

Розв'язки крайових задач (6.48) для довільної оболонки обертання можуть бути знайдені наближено за допомогою методу Грєфтца, якщо їх попередньо звести до еквівалентних варіаційних задач для функціоналів:

$$I_k = \int_Q \left[r \left(\frac{\partial F_k}{\partial z} \right)^2 + r \left(\frac{\partial F_k}{\partial r} \right)^2 + \frac{n^2}{r} (F_k)^2 \right] dz dr - \\ - 2 \int_{L_1} r F_k W_k^{(1)} ds, \quad (k = \overline{1, N}). \quad (6.49)$$

В якості координатних функцій виберемо систему частинних розв'язків рівняння (6.48), які лінійно незалежні і повні на будь-якому замкнутому контурі Q [119]. В цьому випадку розв'язки задач (6.48) представимо у вигляді розкладів:

$$F_k(z, r) = \sum_{j=1}^q d_j^{(k)} \Psi_j(z, r). \quad (6.50)$$

Тут d_{ij} — довільні постійні,

$$\Psi_j = \frac{2^n n! (j-n)!}{(j+n)!} R^j P_j^{(n)}(\cos \theta),$$

де $R = \sqrt{z^2 + r^2}$, $\cos \theta = z/R$, $P_j^{(n)}$ — приєднані функції Лежандра першого роду.

Координатні функції $\Psi_j(z, r)$ і їх похідні зручно обчислювати за наступними рекурентними співвідношеннями:

$$\Psi_{j+1} = \frac{1}{j+2n} \{ [2(j+n)-1]z\Psi_j - (j-1)(z^2+r^2)\Psi_{j-1} \}; \\ \frac{\partial \Psi_{j+1}}{\partial z} = j\Psi_j, \quad \frac{\partial \Psi_{j+1}}{\partial r} = \frac{(j+n)\Psi_{j+1} - jz\Psi_j}{r}.$$

Наведені співвідношення дозволяють побудувати системи частинних розв'язків вихідних рівнянь і їх похідних для будь-якого значення параметра n і індексу j якщо при цьому покласти:

$$\Psi_1 = r^n, \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} = nr^{(n-1)}.$$

Постійні $d_j^{(k)}$ в розкладах (6.50) знайдемо з умов, що функції $F_k(z, r)$ повинні доставляти мінімуми квадратичним функціоналам (6.49). Ці умови призводять до наступних систем лінійних неоднорідних рівнянь відносно компонент вектор-стовпців $\vec{d}^{(k)} = \{d_1^{(k)}, d_2^{(k)}, \dots, d_q^{(k)}\}$:

$$D\vec{d}^{(k)} = \vec{\gamma}^{(k)}, \quad (k = \overline{1, N}), \quad (6.51)$$

де коефіцієнти d_{ij} симетричної матриці D і елементи $\gamma_i^{(k)}$ вектор-стовпців $\vec{\gamma}^{(k)}$ визначаються за формулами

$$d_{i,j} = \int_{L_0+L_1} r \Psi_i \frac{\partial \Psi_j}{\partial n} ds; \quad \gamma_i^{(k)} = \int_{L_1} r W_k^{(1)} \Psi_i ds, \quad (i, j = \overline{1, q}).$$

При виведенні цих виразів було враховано, що координатні функції $\Psi_i(z, r)$ задовольняють вихідному рівнянню (6.48). Це дозволило звести подвійні інтеграли по області Q до одновимірних інтегралів по її границі, що істотно спростило алгоритм розв'язання крайових задач (6.48).

Таким чином, розв'язання спектральної задачі (6.17), (6.18) зведено до розв'язання однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (6.42). З умови існування нетривіальних розв'язків цієї системи знаходимо частоти Ω_i ($i = 1, 2, \dots$) коливань розглядуваної механічної системи. Потім з рівнянь (6.42) знаходяться вектора $\vec{X}^{(i)} = \{x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_{6N}^{(i)}\}$, відповідні кожній знайденій частоті Ω_i . Знання векторів $\vec{X}^{(i)}$ дозволяє визначити форми коливань оболонки за формулами (6.41). У свою чергу потенціал зміщень рідини, відповідний i -му тону коливань системи, визначається наступним чином:

$$\Phi_i(z, r) = \sum_{j=1}^N x_{j+2N}^{(i)} F_j(z, r).$$

Для врахування хвильових рухів рідини в оболонці необхідно мати розв'язки спектральної задачі (6.12) з параметром в граничній умові. Власні функції і власні значення цієї задачі для довільної оболонки обертання можуть бути знайдені наближено методом Трефтца якщо крайову задачу

(6.12), після відокремлення кутової координати, попередньо звести до варіаційної задачі. Функціонал, що відповідає цій крайовій задачі, має вигляд:

$$I(\varphi) = \int_Q \left[r \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 + r \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \frac{n^2}{r} \varphi^2 \right] dz dr - \varkappa \int_{L_0} r \varphi^2 ds. \quad (6.52)$$

Функцію $\varphi(z, r)$ представимо у вигляді розкладу

$$\varphi(z, r) = \sum_{k=1}^q a_k \Psi_k(z, r), \quad (6.53)$$

де a_k — довільні постійні, $\Psi_k(z, r)$ — раніше введена система частинних розв'язків рівняння для функції φ .

З умов стаціонарності функціоналу (6.52) для визначення коефіцієнтів a_k і параметрів \varkappa отримаємо однорідну систему алгебраїчних рівнянь:

$$(D - \varkappa B_1) \vec{a} = 0, \quad \vec{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_q\},$$

де коефіцієнти матриці D співпадають з коефіцієнтами відповідної матриці системи рівнянь (6.51), елементи $\beta_{ij}^{(1)}$ матриці B_1 обчислюються за формулами

$$\beta_{ij}^{(1)} = \int_{L_0} r \Psi_i \Psi_j ds.$$

Знайдені розв'язки для функцій $\vec{U}_i(s)$, $\Phi_i(z, r)$ і φ_i дозволяють визначити коефіцієнти рівнянь (6.24) збуреного руху довільної оболонки обертання, частково заповненої рідиною.

6.4 Результати розрахунку коливань циліндричної оболонки, частково заповненої рідиною

Наведемо результати розрахунків конкретної оболонки обертання за запропонованим вище алгоритмом. У літературі відомі точні розв'язки розгля-

дуваної спектральної задачі для оболонки у формі прямого кругового циліндра [59], отримані на основі використання технічної теорії оболонок В.З. Владова. Чисельні результати цієї роботи можуть служити основою для оцінки точності різних наближених методів розв'язання даної задачі. У зв'язку з цим нижче будемо розглядати оболонку обертання в формі кругового циліндра одиничного радіуса і довжиною l . Будемо вважати, що при $s_1 = 0$ торець оболонки жорстко закріплений, а при $s_2 = l$ — вільний.

6.4.1 Аналіз розв'язання задачі спряження на основі методу Рітца

Спочатку оцінимо ефективність варіаційного методу розв'язання задачі, який базується на декомпозиції області інтегрування вихідних рівнянь.

Покладемо $\nu = 0.3$, $l = 4$, $\zeta = 2$, $a = 0$, $h = 0.01$.

Таблиця 6.1

Збіжність перших чотирьох власних значень λ_i ($n = 1$) в залежності від числа наближень N в розкладах (6.41).

N	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
4	.10859	.35024	.63185	.73055
6	.10809	.34972	.62820	.72974
8	.10795	.34965	.62802	.72971
10	.10790	.34964	.62798	.72971
12	.10789	.34964	.62798	.72970
14	.10789	.34964	.62798	.72970
(*)	.10789	.34964	.62798	.72970

У таблиці 6.1 наведена збіжність перших чотирьох власних значень λ_i при числі хвиль в круговому напрямку $n = 1$ в залежності від числа наближень N в розкладах (6.41). В останньому рядку таблиці, позначеного зірочкою, наведені розрахункові величини, отримані на основі точного розв'язання даної

Таблиця 6.2

Значення нормального прогину $w(\pm)$ для першої форми коливань оболонки і його перших трьох похідних при різній кількості наближень N в розкладах (6.41).

N	$w(\pm)$	$w'(\pm)$	$w''(\pm)$	$w'''(\pm)$
10	.47179	.28728	-1.0113	18.080
	.46409	.25086	.95644	20.146
14	.46880	.27533	.06156	-2.1897
	.46885	.27441	-.01540	2.0808
18	.46882	.27503	.02374	-.16744
	.46882	.27502	.02139	.05579
22	.46882	.27502	.02245	-.03317
	.46882	.27502	.02268	-.07860
26	.46882	.27502	.02256	-.05672
	.46882	.27502	.02256	-.05506
30	.46882	.27502	.02256	-.05587
	.46882	.27502	.02256	-.05590

задачі [123]. Значення нормального прогину $w(\pm)$ за першою формою коливань оболонки і їх перших трьох похідних, при різній кількості наближень N в розкладах (6.41) представлені в таблиці 6.2. Тут $w(+)$ = $w^{(2)}(\zeta)$ (верхні рядки) і $w(-)$ = $w^{(1)}(\zeta)$ (нижні рядки). Аналогічні позначення мають місце і для похідних. Вектор \vec{X} алгебраїчної системи (6.42) нормувався таким чином, щоб $w(l) = 1$.

Наведені обчислення показують, що даний метод розв'язання вихідної задачі забезпечує поточкову збіжність для розв'язків і їх перших трьох похідних як всередині областей $G^{(1)}$ і $G^{(2)}$, так і на їх границях. Крім того, результати таблиці 6.2 свідчать про точність виконання кінематичних і силових умов спряження при використанні узагальненого функціонала для розв'язання даної задачі.

6.4.2 Коливання оболонки без врахування хвильових рухів рідини

Розглянемо спочатку задачу в припущенні, що при збуреному русі рідини її вільна поверхня залишається плоскою і перпендикулярною до осі оболонки. Розв'язок цієї задачі можна отримати, поклавши в представленні (6.9) $\Psi \equiv 0$. У відповідності з роботою [59] виберемо наступні безрозмірні параметри оболонки:

$$\frac{l}{R_0} = 6.06; \quad \nu = 0.29; \quad \frac{R_0}{h} = 150; \quad a = 19.2; \quad \eta = 0.126 \cdot 10^{-7}.$$

Значення параметрів n і $\varepsilon = H/l$ варіювались.

Таблиця 6.3

Значення частот λ_i коливань оболонки при $N = 14$, $n = 2$, $\varepsilon = 0.5$, в залежності від числа наближень q в розкладах (6.50).

q	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
4	.01710	.05195	.12240	.21516	.28348
6	.01710	.05187	.12044	.20200	.26386
8	.01710	.05187	.12044	.20105	.25673
10	.01710	.05187	.12044	.20103	.25593

У таблиці 6.3 наведені розрахункові дані перших п'яти власних значень λ_i при $n = 2$, $\varepsilon = 0.5$, в залежності від числа наближень q в розкладах (6.50) і при $N = 14$ в розкладах (6.41). У таблиці 6.4 наведені значення перших п'яти власних значень λ_i при $n = 2$, $\varepsilon = 0.5$, в залежності від числа наближень N в розкладах (6.41) і при $q = 10$ в розкладах (6.50).

Дані таблиць 6.3 і 6.4 свідчать про досить гарну збіжність розкладів Трефца (6.50) при розв'язанні N неоднорідних допоміжних крайових задач Неймана в області зайнятою рідиною, а також розкладів Рітца (6.41) для знаходження переміщень оболонки, що знаходиться під дією розривного динамічного навантаження з боку рідини.

Таблиця 6.4

Значення частот λ_i коливань оболонки при $q = 10$, $n = 2$, $\varepsilon = 0.5$, в залежності від числа наближень N в розкладах (6.4).

N	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
4	.01731	.05274	.12531	.23262	.28929
6	.01719	.05215	.12142	.20313	.25816
8	.01714	.05196	.12074	.20177	.25682
10	.01712	.05190	.12050	.20124	.25629
12	.01710	.05186	.12036	.20070	.25577
14	.01710	.05187	.12043	.20103	.25593
16	.01710	.05187	.12041	.20092	.25586
18	.01710	.05187	.12041	.20092	.25586

Таблиця 6.5

Значення нижчої власної частоти коливань оболонки отримані на основі запропонованого алгоритму (верхній рядок) і їх точні значення [59] (нижній рядок).

ε	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
0.125	.02084	.01907	.03047	.04738
	.02085	.01907	.03047	.04738
0.25	.02062	.01894	.03022	.04322
	.02072	.01899	.03032	.04506
0.50	.01710	.01607	.02198	.02818
	.01796	.01663	.02280	.02880
0.75	.01114	.01102	.01666	.02412
	.01199	.01154	.01702	.02431

Порівняння наближених значень першої частоти коливань оболонки, отриманих в даній роботі (верхні рядки) з відповідними точними значеннями роботи [59] (нижні рядки) представлено в таблиці 6.5.

Дані таблиці 6.5 свідчать про те, що при прийнятих параметрах розгляду-

ваної механічної системи максимальна розбіжність наближених і точних значень λ_1 не перевищує 7%. Наведені тут результати не виключають існування таких параметрів системи при яких точні і наближені значення частот будуть більш відчутної відмінності. Ця відмінність буде позначатися при збільшенні параметрів l/R_0 і R_0/h . Це пояснюється зближенням парціальних частот, обумовлених пружними коливаннями оболонки з рідиною при закріпленій її вільній поверхні і хвильовими коливаннями рідини в абсолютно жорсткому резервуарі. Отже запропоноване наближене розв'язання даної задачі можна використовувати для практичних розрахунків нижньої межі мінімальних частот пружних коливань оболонок обертання, частково заповнених рідиною.

6.4.3 Власні коливання оболонки з рідиною з урахуванням хвильових рухів рідини

Наведемо деякі результати розрахунків за запропонованим вище алгоритмом коливань оболонки з урахуванням хвильових рухів рідини. При цьому параметри розглядуваної механічної системи будуть співпадати з параметрами з попереднього прикладу.

В даному випадку розв'язок спектральної задачі (6.12) можна отримати методом розділення змінних. При цьому власні функції $\varphi_k(z, r, \beta)$ матимуть такий вигляд:

$$\varphi_k(z, r, \beta) = \frac{\cosh(\xi_k z)}{\xi_k \sinh(\xi_k H)} \cdot \frac{J_n(\xi_k r)}{J_n(\xi_k)} \cos n\beta,$$

де $J_n(x)$ — функції Бесселя першого роду і n -го порядку; ξ_k — k -ий корінь рівняння $J'_n(\xi) = 0$.

Власні значення \varkappa_k задачі (6.12) і безрозмірні коефіцієнти μ_k рівнянь (6.16) визначаються за формулами

$$\varkappa_k = \xi_k \tanh(\xi_k H); \quad \mu_k = \frac{\pi(\xi_k^2 - n^2)}{2\xi_k^3 \tanh(\xi_k H)}.$$

Для визначення вільних коливань розглядуваної механічної системи після

знаходження коефіцієнтів рівнянь (6.24) $a_i, \lambda_{ik}, \Omega_i^2, \mu_k, \sigma_k^2$ необхідно розв'язати однорідну алгебраїчну систему рівнянь (6.26).

У таблиці 6.6 наведені нижчі частоти λ зв'язаних коливань рідини і пружної оболонки при числі хвиль в круговому напрямку $n = 2$ і відносній глибині рідини в оболонці $\varepsilon = 0.25$ в залежності від кількості членів r_0 і s_0 в розкладах (6.15) і (6.23) для апроксимації хвильових рухів рідини і переміщень оболонки відповідно.

З таблиці безпосередньо випливає, що спектр частот коливань розглядуваної механічної системи має дві гілки. Перша гілка $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r_0}$ пов'язана переважно з хвильовими рухами вільної поверхні рідини, а друга гілка спектра $\lambda_{r_0+1}, \lambda_{r_0+2}, \dots, \lambda_{r_0+s_0}$ переважно пов'язана з деформаціями серединної поверхні оболонки, яка визначається її пружними і інерційними властивостями. Для розглянутих параметрів оболонки нижчі частоти переважно хвильових рухів рідини з точністю до шести значущих цифр збігаються з частотами вільних коливань рідини в абсолютно жорсткому циліндрі. Отже в цьому випадку пружність оболонки практично не впливає на коливання рідини. У свою чергу хвильові рухи рідини можуть істотно впливати на частоти другої гілки зв'язаних коливань рідини і оболонки.

Для переважно пружних частот коливань максимальне переміщення серединної поверхні оболонки завжди більше максимального зміщення вільної поверхні рідини.

Запропонований алгоритм розв'язання задачі має досить швидку збіжність. Це пояснюється вдалим вибором парціальних систем, що враховують основні властивості шуканих розв'язків.

При отриманні наведених вище результатів в рядах (6.41) і (6.50) утримувалося відповідно така кількість членів N і q , при яких в знайдених значеннях частот λ було б не менше шести вірних значущих цифр. Ці умови виконуються при $N = 14$ і $q = 10$.

Порівняння отриманих розрахункових даних з точними табличними ре-

Таблиця 6.6

Значення частот λ_i зв'язаних коливань розглядуваної системи при $N = 14$, $q = 10$, $n = 2$,
 $\varepsilon = 0.25$.

s_0	λ_1	λ_2	λ_{r_0}	λ_{r_0+1}	λ_{r_0+2}	λ_{r_0+3}
$r_0 = 0$						
1				.02062		
2				02062	.07459	
3				02062	.07459	.14864
4				02062	.07459	.14864
5				02062	.07459	.14864
$r_0 = 1$						
1	.00020			.02071		
2	.00020			.02071	.08171	
3	.00020			.02071	.08160	.15176
4	.00020			.02071	.08152	.15157
5	.00020			.02071	.08152	.15156
$r_0 = 2$						
1	.00020	.00029		.02072		
2	.00020	.00029		.02072	.08231	
3	.00020	.00029		.02072	.08219	.15193
4	.00020	.00029		.02072	.08209	.15170
5	.00020	.00029		.02072	.08208	.15169
$r_0 = 3$						
1	.00020	.00029	.00035	.02072		
2	.00020	.00029	.00035	.02072	.08250	
3	.00020	.00029	.00035	.02072	.08237	.15197
4	.00020	.00029	.00035	.02072	.08226	.15173
5	.00020	.00029	.00035	.02072	.08226	.15172

зультатами, наведеними в роботі [59], показує на повне їх співпадіння.

Характер зміни переважно пружних нижчих частот λ_{r_0+1} в залежності від числа хвиль n в круговому напрямку і параметра заповнення оболонки

рідиною ε ($0 \leq \varepsilon \leq 1$) показаний на рис.6.2.

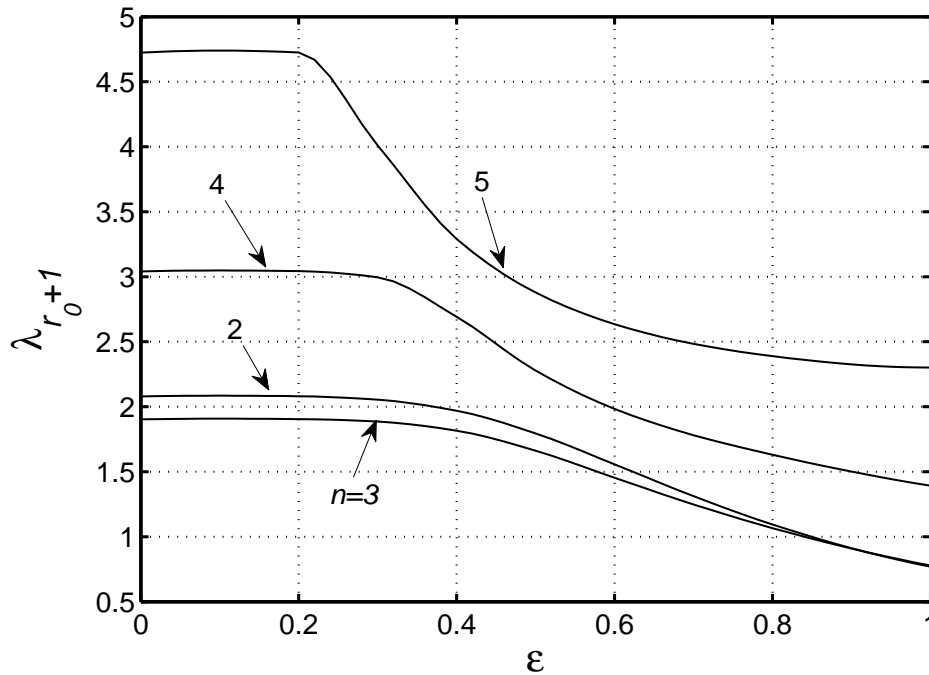


Рис. 6.2. Характер зміни переважно пружних нижчих частот λ_{r_0+1} в залежності від числа хвиль n в круговому напрямку і параметра заповнення оболонки рідиною ε

З наведених залежностей випливає, що для розглянутих параметрів оболонки найбільший вплив має зміна глибини рідини в діапазоні $0.125 \leq \varepsilon \leq 0.9$. Для $\varepsilon < 0.125$ частоти близькі до частот оболонки без рідини, а при $\varepsilon > 0.9$ — до частот оболонки, повністю заповненої рідиною.

Таким чином запропонований алгоритм розрахунку власних коливань довільних оболонок обертання, частково заповнених рідиною, з урахуванням хвильових рухів на вільній поверхні. Оскільки оболонка знаходиться під дією розривного динамічного навантаження, то при побудові наближеного розв'язку задачі гідропружності область інтегрування рівнянь для оболонки розбивається на дві підобласті. Перша підобласть відповідає змоченій частині оболонки, а друга — не змоченій.

Розв'язок сформульованої задачі базується на побудові узагальненого

функціонала, для якого умови спряження на суміжній границі введених підобластей є природними граничними умовами. На основі методу Рітца і наближеній побудові оберненого оператора для гідродинамічної частини задачі, розв'язок задачі гідропружності зведено до розв'язання однорідної алгебраїчної системи рівнянь. Такий підхід дозволяє розділити труднощі побудови розв'язків, які виникають при спільному інтегруванні рівнянь в частинних похідних для потенціалу зміщень рідини і системи звичайних диференціальних рівнянь, що описують коливання довільної оболонки обертання.

На прикладі задачі про власні неосесиметричні коливання кругової циліндричної оболонки, частково заповненої ідеальною рідиною, показана досить висока точність і ефективність запропонованого алгоритму розв'язання даної задачі гідропружності.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

- Побудована математична модель руху довільної оболонки обертання з приєднаним на одному з її торців твердим тілом під дією зосереджених та розподілених навантажень довільного вигляду. Запропоновано наближений метод розрахунку вільних неосесиметричних коливань розглядуваної механічної системи.

- Проведено детальний аналіз частот і форм згинних коливань системи «тіло – оболонка» в спрощеній постановці задачі в припущенні, що для оболонки виконується гіпотеза плоских перерізів з врахуванням деформацій зсуву та інерції повороту поперечного перерізу (балка Тимошенка). Показано, що теорія балок Тимошенка має істотно більшу область застосувань по відношенню до балки Ейлера – Бернуллі, крім того вона дає можливість визначення вищих форм коливань.

- Розроблено варіаційний метод розв'язування спектральної задачі про коливання довільних тонкостінних оболонок обертання. Використовуючи елементи аналітичної теорії диференціальних рівнянь з малим параметром при старшій похідній і рівнянь з регулярною особливою точкою встановлена формальна структура загального розв'язку вихідної системи рівнянь. На цій основі побудовані системи базисних функцій в методі Рітца, які враховують наявність в розв'язках примежових функцій та асимптотичну поведінку регулярних розв'язків в околі полюса куполоподібних оболонок.

- На основі проведених чисельних розрахунків показано, що запропонований алгоритм розв'язування задачі про вільні коливання оболонок обертання відноситься до числа рівномірних алгоритмів за параметром. Розрахунки, проведені для циліндричної, зрізаної конічної та сферичної оболонок, показали, що алгоритм забезпечує поточкову збіжність розв'язків і їх перших похідних в усій області інтегрування рівнянь. Це дозволяє проводити обчи-

слення сил та моментів, що дає можливість використовувати цей алгоритм для аналізу динамічної міцності оболонок.

- Запропоновано алгоритм застосування метода Рітца до побудови наближених розв'язків спектральних задач, поставлених з позицій спряження розв'язків. Розроблений алгоритм забезпечує ефективне обчислення нижчої частини спектра задач на власні значення і збіжність в рівномірній метриці самих розв'язків і їх похідних, що входять до складу умов спряження.

- Побудована загальна математична модель динаміки пружних стержнів, що несуть резервуари, частково заповнені рідиною. Розглядувана модель має зміст лише для нижчих форм поперечних коливань, оскільки при збільшенні частоти власних коливань системи втрачають силу припущення, які використовуються при описанні коливань стержня.

- Розроблені варіаційні методи розв'язування спектральних задач, що описують вільні коливання стержня з приєднаним до його верхнього торця резервуаром, а також стержня з підвішеним в деякому його перерізі резервуаром, частково заповненим рідиною. Розрахунки показують ефективність запропонованих алгоритмів і що хвильові рухи рідини можуть бути досить суттєвими.

- Розроблено метод розв'язування задачі про коливання довільних оболонок обертання, які частково заповнені ідеальною нестисливою рідиною. Розв'язок задачі гідропружності базується на застосуванні метода декомпозиції області інтегрування рівнянь теорії оболонок і на побудові оберненого оператора для гідродинамічної частини задачі. Побудовано узагальнений функціонал відносно переміщень оболонки для якого умови спряження розв'язків в підобластях відносяться до числа природних граничних умов.

- На основі запропонованого алгоритму наведені результати розрахунків неосесиметричних коливань циліндричної оболонки, частково заповненої рідиною. При цьому проілюстрована ефективність розв'язування задачі спряження на основі варіаційного методу; збіжність наближених розв'язків в за-

лежності від числа власних функцій, як для переміщень оболонки, так і для потенціалу зміщень рідини. Відмічається повне співпадіння отриманих розрахункових даних з існуючими в літературі точними розв'язками розглядуваної задачі.

- Наведено порівняння частот вільних коливань оболонки з урахуванням хвильових рухів рідини та частот в припущенні, що при збуреному русі рідини її вільна поверхня залишається плоскою і паралельною до осі оболонки. Встановлено, що розв'язки в спрощеній постановці задачі можуть бути використані для практичних розрахунків нижньої границі мінімальних частот пружних коливань оболонок обертання з рідиною.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Абовский Н.П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек / Н.П. Абовский, Н.П. Андреев, А.П. Деруга. — Москва: Наука. — 1978. — 288 с.
2. Алгоритмы и программы решения задач механики твердого деформируемого тела / Под ред. Я.М. Григоренко. — Киев: Наукова думка. — 1976. — 512 с.
3. Александрович Л.И. Собственные колебания упругого осесимметричного сосуда произвольного контура / Л.И. Александрович, Р.Е. Лампер // Тр. 6-й Всес. конф. по теории оболочек и пластин, Баку. — 1966. — Москва: Наука. — 1967. — С. 27– 29.
4. Алумяэ Н.А. О фундаментальной системе интегралов уравнения малых осесимметричных установившихся колебаний упругой конической оболочки вращения / Н.А. Алумяэ // Изв АН Эст.ССР, Сер. техн. и физ.-мат. наук. — 1960. — **10**, № 1. — С. 3 – 15.
5. Амиро И.Я. Динамика ребристых оболочек / И.Я. Амиро, В.А. Заруцкий, В.Г. Паламарчук - Киев: Наукова думка, 1983. — 204 с.
6. Арутюнян Н.Х. Кручение упругих тел / Н.Х. Арутюнян, Б.Л. Абрамян. — Москва: Физматгиз. — 1963. — 686 с.
7. Асланян А.Г. Распределение собственных частот тонких упругих оболочек / А.Г. Асланян, В.Б. Лидский. — Москва: Наука. — 1974. — 156 с.
8. Бабский В.Г. Гидромеханика невесомости / В.Г. Бабский, Н.Д. Копачевский, А.Д. Мышкис, Л.А. Слобожанин, А.Д. Тюпцов. — Москва: Наука, ГРФ-МЛ. — 1976. — 504 с.

9. Балакирев Ю.Г. Осесимметричные колебания цилиндрической оболочки с полусферическим днищем / Ю.Г. Балакирев, В.П. Шмаков // Колебания упругих конструкций с жидкостью. — Новосибирск: Изд. НЭТИ, 1984. — С. 28 – 32.
10. Балакирев Ю.Г. Осесимметричные колебания пологой сферической оболочки с жидкостью / Ю.Г. Балакирев // Инж. журнал: Механика твердого тела. — 1967. — № 5. — С. 116 – 123.
11. Барняк М.Я. Модифікація варіаційного методу в задачі про власні коливання ідеальної рідини в посудині / М.Я. Барняк // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2005. — 2, № 1. — С. 46 – 63.
12. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций / В.Л. Бидерман. — Москва: Машиностроение. — 1977. — 488 с.
13. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем / В.В. Болотин. — Москва: Гостехиздат. — 1956. — 600 с.
14. Бреславский В.Е. Продольные колебания цилиндрической оболочки, скрепленной с упруго-вязким наполнителем и сосредоточенными массами / В.Е. Бреславский // Пробл. машиностр. - 1981. — № 14. — С. 27–32.
15. Бреславский В.Е. Исследование колебаний тонких оболочек, скрепленных с наполнителем / В.Е. Бреславский // Труды VIII Всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластин. Ленинград, 21 – 28 мая, 1973 г. — Москва: Наука, 1973. — С. 271 – 276.
16. Брусиловский А.Д. К определению собственных частот и форм колебаний оболочек вращения / А.Д. Брусиловский, Л.М. Мельникова // Строительная механика и расчет сооружений — 1971. — № 6. — С. 34–37.

17. Брусиловский А.Д. Метод расчета собственных и вынужденных колебаний упругих оболочек вращения, заполненных идеальной несжимаемой жидкостью / А.Д. Брусиловский, В.П. Шмаков, В.А. Яблоков // Изв. АН СССР: Механика твердого тела. — 1973. — № 3. — С. 99 – 110.
18. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений / В. Вазов. — Москва: Мир, 1968. — 464 с.
19. Валишвили Н.В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ / Н.В. Валишвили. — Москва: Машиностроение, 1976. — 278 с.
20. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу. — Москва: Мир. — 1987. — 542 с.
21. Вибрации в технике. Справочник в 6 т. Под ред. В.В. Болотина - Москва: Машиностроение. — 1978. — 1. — 352 с.
22. Вишик М.И. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром / М.И. Вишик, Л.А. Люстерник // Успехи матем. наук. — 1957. — 12, вып. 5(77). — С. 3 – 122.
23. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике / В.З. Власов. — Москва, Ленинград: Гостехиздат. — 1949. — 784 с.
24. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки / А.С. Вольмир. — Москва: Гостехиздат. — 1956. — 416 с.
25. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем / А.С. Вольмир. — Москва: ГИФМЛ. — 1963. — 879 с.
26. Выломов В.Н., Малинин А.А. Анализ точности аппроксимации балочной моделью в задачах динамики тонкостенных конструкций / В.Н. Выло-

- мов, А.А. Малинин // Прикладные пробл. прочности и пластичности. — Москва: 1976. — № 5. — С. 42–47.
27. Галлагер Р. Метод конечных элементов / Р. Галлагер. — Москва: Мир. — 1984. — 428 с.
28. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных дифференциальных уравнений / С.К. Годунов // Успехи математических наук. — 1961. — **16**, вып. 3(99). — С. 171 – 174.
29. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. / А.Л. Гольденвейзер. — Москва: Наука. — 1976. — 512 с.
30. Гольденвейзер А.Л. Свободные колебания тонких упругих оболочек / В.Б.Лидский, П.Е.Товстик. — М.: Наука, 1979. — 384 с.
31. Гонткевич В.С. Собственные колебания пластинок и оболочек / В.С. Гонткевич. — Киев: Наук. думка. — 1964. — 288 с.
32. Горшков А.Г. Аэроупругость конструкций / А.Г. Горшков, В.И. Морозов, А.Т. Пономарев, Ф.Н. Шклярчук. — Москва: физико-математическая литература. — 2000. — 592 с.
33. Григоренко Я.М. Про один підхід до розв'язання задачі теорії оболонок методом скінченних елементів / Я.М. Григоренко, С.С. Кокошин // Доповіді АН УРСР, серія А. — 1980. — № 3. — С. 46 – 51.
34. Григоренко Я.М. Методы расчета оболочек. Т4. Теория оболочек переменной жесткости / Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко . — Киев: Наукова думка. — 1981. — 554 с.
35. Григоренко Я.М. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций / Я.М. Григоренко, Е.И. Беспалова, А.Б. Китайгородский, А.И. Шинкарь. — Киев: Наукова думка. — 1986. — 122 с.

36. Григорьев В.Г. Применение метода конечных элементов к расчету колебаний упругих оболочечных конструкций, содержащих жидкость / В.Г. Григорьев // Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью. (труды III семинара). — Томск, Томский ун-т. — 1978. — С. 55 – 60.
37. Григорьева Г.Н. Влияние инерции вращения и сдвига на собственную частоту изгибных колебаний стержня / Г.Н. Григорьева, Ф.М. Лурье // Строительная механика и расчет сооружений. — 1983. — № 2. — С. 51–54.
38. Гринченко В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко. — Киев: Наукова думка. — 1989. — 284 с.
39. Гузь А.Н. Гидроупругость систем оболочек / А.Н. Гузь, В.Д. Кубенко, А.Э. Бабаев. — Киев: Вища школа, — 1984. — 208 с.
40. Гуляев В.И. Неклассическая теория оболочек и ее приложения к решению инженерных задач / В.И. Гуляев, В.А. Баженов, П.П. Пискунов. — Львов: Вища школа. — 1978. — 191 с.
41. Дулан Э. Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем / Э. Дулан, Дж. Миллер, У. Шилдерс. — М.: Мир. — 1983. — 200 с.
42. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в технике / О.К. Зенкевич. — Пер. с англ. — Москва: Мир. — 1975. — 541 с.
43. Каиров А.С. Влияние подкреплений и геометрических характеристик на свободные колебания оболочек вращения с сосредоточенными массами / А.С. Каиров // Судостроение. — 1986. — вып. 35. — С. 16 – 22.
44. Каиров А.С. Свободные колебания конических оболочек слабопеременной толщины с кольцевым подкреплением / А.С. Каиров // Теорет. и прикл. механика. — 1989. — вып. 20. — С. 88 – 93.

45. Каиров А.С. Влияние формы меридиана и присоединенных тел на собственные колебания оболочек вращения / А.С. Каиров // Теорет. и прикл. механика. — 1999. — вып. 29. — С. 117 – 122.
46. Кантор Б.Я. Нелинейные задачи теории неоднородных пологих оболочек / Б.Я. Кантор . — Киев: Наукова думка. — 1971. — 136 с.
47. Канторович Л.В. Приближенные методы высшего анализа / Л.В. Канторович , В.И. Крылов. — М.-Л.: Физматгиз. — 1962. — 708 с.
48. Кармишин А.В. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций / А.В. Кармишин, В.А. Лясковец, В.И. Мяченков, А.Н. Фролов. — Москва: Машиностроение. — 1975. — 376 с.
49. Кильчевский Н.А. Основы аналитической механики оболочек / Н.А. Кильчевский. — Киев: Наукова думка. — 1963. — 353 с.
50. Китайгородский А.Б. Об определении собственных частот колебаний оболочек вращения / А.Б. Китайгородский // Прикл. механика. — **16**, № 11. — 1980. — С. 101–103.
51. Кладинога В.С. Собственные колебания полого деформированной мембраны с жесткой вставкой / В.С. Кладинога // Проблемы динамики и устойчивости многомерных систем. — Киев: Ин-т математики АН Украины. — 1991. — С. 18 – 29.
52. Кладинога В.С. Об уравнениях возмущенного состояния предварительно деформированной гибкой оболочки с присоединенным твердым телом / В.С. Кладинога, В.А. Троценко // Докл. АН Украины. — 1992. — № 5. — С. 61 – 65.
53. Кобычкин В.С. Осесимметричные колебания полусферической оболочки, частично заполненной жидкостью / В.С. Кобычкин, В.П. Шма-

- ков, В. А. Яблоков // Инж. журнал: Механика твердого тела. — 1968. — № 5. — С. 46 – 54.
54. Колесников Л.С. Динамика ракет / Л.С. Колесников . — Москва: Машиностроение. — 1980. — 376 с.
55. Коллатц Л. Задачи на собственные значения / Л. Коллатц . — Москва: Наука, 1968. — 504 с.
56. Комаренко О.Н. Варіаційний метод розв'язування задач трансмісії з головною умовою спряження / О.Н. Комаренко, В.А. Троценко // Укр. мат. журн. — 1999. — **51**, № 2. — С. 762–775.
57. Кочин Н.Е. Теоретическая гидромеханика / Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе. — Москва: Гостехиздат. — **I**. — 1948. — 535 с.
58. Крылов А.Н. Вибрация судов / А.Н. Крылов. — Л.: ОНТИ, 1936. — 442 с.
59. Кулешов В.Б. Неосесимметричные колебания цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью / В.Б. Кулешов, Ю.Ю. Швейко // Изв. АН СССР, Механика твердого тела. — 1971. — №. 3 — С. 126 –136.
60. Кулешов В.Б. Неосесимметричные колебания круглых и кольцевых пластин, взаимодействующих с жидкостью / В.Б. Кулешов, Ю.Ю. Швейко // Исследования по теории сооружений. — 1972. — №. 19 — С. 28 – 40.
61. Курант Р. Методы математической физики / Р. Курант, Д. Гильберт . — Москва: Гостехиздат. — 1951. — **1**. — 467 с.
62. Ланцош К. Вариационные принципы механики / К. Ланцош. — Москва: Мир. — 1965. — 408 с.
63. Лиходед А.И. Колебания подкрепленных оболочек вращения с сосредоточенными массами и осцилляторами / А.И. Лиходед, А.А. Малинин // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1971, № 1. — С. 42 – 47.

64. Лурье А.И. Статика тонкостенных упругих оболочек / А.И. Лурье. — М.-Л.: Гостехиздат, — 1947. — 252 с.
65. Малинин А.А. Собственные колебания оболочек вращения переменной толщины с присоединенными массами / А.А. Малинин // Прикл. механика. — 1973. — 9, № 3. — С. 56 – 60.
66. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний / Л.И. Мандельштам. — Москва: Наука. — 1972. — 470 с.
67. Медведев В.И. О собственных колебаниях сферических оболочек / В.И. Медведев, Л.М. Соков // Прикладные проблемы прочности и пластичности. — 1975. — вып. 2. — С. 36 – 43.
68. Микишев Г.Н. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью / Г.Н. Микишев, Б.И. Рабинович. — Москва: Машиностроение. — 1968. — 532 с.
69. Микишев Г.Н. Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость / Г.Н. Микишев, Б.И. Рабинович. — Москва: Машиностроение. — 1971. — 563 с.
70. Микишев Г.Н. Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов / Г.Н. Микишев. — Москва: Машиностроение. — 1978. — 148 с.
71. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике / С.Г. Михлин. — Москва: Гостехиздат. — 1957. — 476 с.
72. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов / С.Г. Михлин. — Москва: Наука. — 1966. — 432 с.
73. Моисеев Н.Н. Динамика тел с полостями, содержащими жидкость / Н.Н. Моисеев, В.В. Румянцев. — Москва: Наука. — 1965. — 439 с.

74. Мокеев В.В. Исследование динамики конструкций с жидкостью и газом с помощью метода конечных элементов / В.В. Мокеев // Изв. РАН: Механика твердого тела. — 1998. — № 6. — С. 166 – 174.
75. Муштари Х.М. Нелинейная теория упругих оболочек / Х.М. Муштари, К.З. Галимов. — Казань: Татиздат, — 1951. — 481 с.
76. Мяченков В.И. Расчет составных оболочечных конструкций на ЭВМ / В.И. Мяченков, И.В. Григорьев. — М.: Машиностроение. — 1981. — 214 с.
77. Мяченков С.Г. Методы и алгоритмы расчета пространственных конструкций на ЭВМ ЕС / С.Г. Мяченков, В.П. Мальцев. — Москва: Машиностроение, — 1978. — 288 с.
78. Нариманов Г.С. О движении твердого тела, полость которого частично заполнена жидкостью / Г.С. Нариманов // Прикладная математика и механика. — 1956. — **20**, N 1. — С. 21 – 38.
79. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек / В.В. Новожилов. — Ленинград: Судостроение, 1962. — 431 с.
80. Паймушин В.Н. Нелинейные задачи сопряжения составных пространственных тел, тонких оболочек и вариационные методы их решения / В.Н. Паймушин // Прикладная механика и математика. — т. 49, вып. 2 — 1985. — С. 340 – 344.
81. Паламарчук В.Г. Свободные колебания системы, состоящей из ребристой цилиндрической оболочки и абсолютно твердого тела / В.Г. Паламарчук // Прикл. механика. — 1978. — 14, № 4. — С. 56 – 62.
82. Паламарчук В.Г. К вопросу о свободных колебаниях ребристой цилиндрической оболочки с абсолютно твердым телом / В.Г. Паламарчук // Прикл. механика. — 1979. — 15, № 9. — С. 37 – 41.

83. Прагер В. Вариационные принципы линейной статической теории упругости при разрывных смещениях, деформациях и напряжениях / В. Прагер . — В кн.: Механика, Москва. — 1969. — **5**. — С. 139 – 144.
84. Пшеничников Г.И. Малые свободные колебания упругих оболочек вращения / Г.И. Пшеничников // Инженерный журнал. — 1965. — **5**, вып. 4. — С. 685 – 690.
85. Пшеничников Г.И. Свободные осесимметричные колебания оболочки вращения / Г.И. Пшеничников // Инженерный журнал. Механика твердого тела. — 1967. — № 4. — С. 124 – 135.
86. Рабинович Б.И. К теории колебаний конструкций, несущих упругие резервуары с жидкостью / Б.И. Рабинович, В.П. Шмаков, В.С. Кобычкин // Исследования по теории сооружений. — 1970. — С. 68 – 84.
87. Рапопорт И.М. К Колебания упругой оболочки частично заполненной жидкостью / И.М. Рапопорт. — Москва: Машиностроение. — 1967. — 360 с.
88. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике / К. Ректорис . — Москва: Мир. — 1985. — 590 с.
89. Розин Л.А. Вариационные постановки задач для упругих систем / Л.А. Розин. — Ленинград: Изд. Ленинградского ун-та. — 1978. — 223 с.
90. Сергиенко И.В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий, В.С. Дейнека. — Киев: Наук. думка. — 1991. — 432 с.
91. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко. — Москва: Наука.— 1967. — 444 с.

92. Товстик П.Е. Низкочастотные колебания выпуклой оболочки вращения / П.Е. Товстик // Изв. АН СССР, Механика твердого тела. — 1975. — № 6. — С. 110 – 116.
93. Троценко В.А. О колебаниях жидкости в сосудах, свободная поверхность которой закрыта мембранной оболочкой из гиперупругого материала / В.А. Троценко // Изв. АН СССР: Механика твердого тела. — 1980. — № 6. — С. 166 – 177.
94. Троценко В.А. Неосесимметричные колебания предварительно напряженной оболочки вращения с присоединенным жестким диском / В.А. Троценко, В.С. Кладинога // Прикл. механика — 1994. — **30**, № 7 — С. 17 – 24.
95. Троценко В.А. Об одном подходе к решению осесимметричных задач статики мягких нелинейно-упругих оболочек вращения вариационным методом / В.А. Троценко // Моделирование динамических процессов взаимодействия в системах тел с жидкостью. — Киев: Институт математики АН УССР. — 1990 — С. 43 – 51.
96. Троценко В.А. Применение вариационного метода для решения нелинейной сингулярно возмущенной краевой задачи статики высокоэластичных мембран / В.А. Троценко // Изв. РАН, Механика твердого тела. — 1996. — № 4. — С. 168 – 180.
97. Троценко В.А. Колебания жидкости в подвижных полостях с перегородками / В.А. Троценко. — Киев: Ин-т математики НАН Украины. — 2006. — 320 с.
98. Троценко В.А. Колебания жидкости в осесимметричном резервуаре с мембраной на свободной поверхности / В.А. Троценко, Р.И. Богун //

- Збірник праць Інституту математики НАН України, 2008, **5**, № 2. — С. 304 – 333.
99. Троценко Ю.В. О применении модели балки Тимошенко в задаче о собственных неосесимметричных колебаниях цилиндрической оболочки с присоединенным твердым телом / Ю.В. Троценко // Акустичний вісник. — 2003. — **6**, № 4. — С. 54 – 64.
100. Троценко Ю.В. Применение метода Ритца в задаче о собственных колебаниях усеченной конической оболочки / Ю.В. Троценко // Збірник праць ін-ту математики НАН України «Динаміка та стійкість багатовимірних систем». — 2005. — **2**, № 1, С. 364 – 380.
101. Троценко В.А. Решение задачи о собственных колебаниях незамкнутой оболочки вращения в условиях ее сингулярного возмущения / В.А. Троценко, Ю.В. Троценко // Нелелінійні коливання. — 2005. — **8**, № 3. — С. 415 – 432.
102. Троценко Ю.В. Свободные колебания оболочки вращения с присоединенным на торце абсолютно твердым телом / Ю.В. Троценко // Збірник праць Ін-ту математики НАН України «Комплексний аналіз і течії з вільними границями». — 2006. — **3**, № 4. — С. 474 – 495.
103. Троценко Ю.В. Структура интегралов уравнений колебаний оболочек вращения в форме купола / Ю.В. Троценко // Збірник праць Ін-ту математики НАН України «Аналітична механіка та її застосування». — 2008. — **5**, № 2, С. 334 – 348.
104. Троценко В.А. Равномерно сходящийся метод Ритца в задаче об осесимметричных колебаниях оболочки вращения в форме купола / В.А.Троценко, Ю.В.Троценко // Акустичний вісник. — 2008, **11**, № 2, С. 45 – 57.

105. Троценко В.А. Поперечные колебания упругого стержня, несущего на свободном конце резервуар с жидкостью / В.А. Троценко, Ю.В. Троценко // Акустичний вісник. — 2010, **13**, № 3, С. 51 – 67.
106. Троценко В.А. Применение метода Ритца к расчету свободных поперечных колебаний составного стержня / В.А. Троценко, Ю.В. Троценко // Збірник праць Ін-ту математики НАН України «Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем». — 2011. — **8**, № 2. — С. 244 – 257.
107. Троценко Ю.В. Колебания упругих конструкций, содержащих подвесные резервуары с жидкостью / Ю.В. Троценко // Збірник праць Ін-ту математики НАН України «Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем». — 2011. — **8**, № 2. — С. 258 – 275.
108. Троценко Ю.В. Свободные колебания тонкостенного стержня с подвесным резервуаром, частично заполненным жидкостью / Ю.В. Троценко // Акустичний вісник. — 2012. — **15**, № 3. — С. 53 – 66.
109. Троценко Ю.В. К вариационному методу решения задачи сопряжения о свободных колебаниях цилиндрической оболочки / Ю.В. Троценко // Збірник праць Ін-ту математики НАН України «Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем». — 2013. — **10**, № 2. — С. 209 – 221.
110. Троценко Ю.В. О колебаниях стержня с подвесным резервуаром при гармоническом возбуждении основания стержня / Ю.В. Троценко // Збірник праць Ін-ту математики НАН України «Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем». — 2013. — **10**, № 2. — С. 201 – 208.
111. Троценко Ю.В. Вынужденные колебания стержня с подвесным резервуаром, частично заполненным жидкостью / Ю.В. Троценко // Доповіді НАН України. — 2014. — № 4. — С. 56 – 63.

112. Троценко Ю.В. Об определении собственных колебаний тонкостенных незамкнутых в меридиональном направлении оболочек вращения / Ю.В. Троценко // Збірник праць Ін-ту математики НАН України «Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем». — 2014. — **11**, № 4. — С. 330 – 354.
113. Троценко Ю.В. Применение метода Ритца к расчету колебаний упругих оболочек вращения, частично заполненных жидкостью / Ю.В. Троценко // Збірник праць Ін-ту математики НАН України «Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики». — 2015. — **12**, № 4. — С. 203 – 234.
114. Троценко Ю.В. Колебания упругих оболочек вращения, частично заполненных идеальной жидкостью / Ю.В. Троценко // Нелінійні коливання. — 2017. — **20**, № 1, С. 127 – 144.
115. Троценко Ю.В. Применение вариационных методов к решению некоторых задач теории колебаний оболочек в условиях их сингулярного возмущения / Ю.В. Троценко // Thesis of International Conference, «Dynamic System Modelling and Stability Investigation» (22 – 25 may 2007, Kyiv), p. 334.
116. Троценко Ю.В. Равномерно сходящийся метод Ритца в задачах о свободных колебаниях оболочек вращения / Ю.В. Троценко // Український математичний конгрес — 2009 (до 100 – річчя від дня народження М.М. Боголюбова); Київ, 27–29 серпня 2009 р. / Інститут математики НАН України: Тез. доповідей. – Київ, 2009. – <http://www.imath.kiev.ua/congress2009/>.
117. Троценко Ю.В. Вариационный метод расчета свободных колебаний тонких упругих оболочек / Ю.В. Троценко // Тези міжнародної математичної конференції «Боголюбівські читання DIF-2013. Диференціальні

- рівняння, теорія функцій та їх застосування» (23 – 30 червня 2013, Севастополь), с. 307.
118. Троценко Ю.В. Особенности применения метода Ритца к решению задачи о собственных колебаниях тонкостенных куполообразных оболочек вращения / Ю.В. Троценко // XII International Conference «Dynamical system modelling and stability investigation» (27 – 29 May, 2015, Kiev, Ukraine), с. 126.
119. Фещенко С.Ф. Методы определения присоединенных масс жидкости в подвижных полостях / С.Ф. Фещенко, И.А. Луковский, Б.И. Рабинович, Л.В. Докучаев. — Киев: Наук. думка. — 1969. — 250 с.
120. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение / А.П. Филиппов. — 1970. — 736 с.
121. Форсберг К. Осесимметричные и балочного типа колебания тонкой цилиндрической оболочки / К. Форсберг // Ракетная техника и космонавтика. — 1969. — 7, № 2. — С. 37–45.
122. Черных К.Ф. Линейная теория оболочек / К.Ф. Черных. — Л.: Изд-во Ленингр. университета, — 1962. — ч.І, — 374 с., 1964. — ч.ІІ. — 396 с.
123. Швейко Ю.Ю. О влиянии граничных условий на спектр собственных частот цилиндрических оболочек / Ю.Ю. Швейко, Ю.В. Гаврилов, А.Д. Брусиловский // Докл. науч.-техн. конф. по итогам науч.-исслед. работ за 1964 – 1965 гг. Секция энергомашиностроение. — М.: МЭИ, 1965. — С. 131 – 148.
124. Шмаков В.П. Об уравнениях осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки с жидким заполнением / В.П. Шмаков // Изв. АН СССР: Механика и машиностроение. — 1964. — № 1. — С. 170 – 173.

125. Шмаков В.П. Об одном приеме, упрощающем применение метода Бубнова – Галеркина к решению краевых задач / В.П. Шмаков // Инж. журнал: Механика твердого тела. — 1967. — № 5. — С. 129 – 136.
126. Шмаков В.П. Избранные труды по гидроупругости и динамике упругих конструкций / В.П. Шмаков. — Москва: Изд-во МГТУ им Баумана, 2011. — 287 с.
127. Aalami B. Flexural Vibrations and Timoshenko's Beam Theory / B. Aalami, B. Atzori // AIAA J. — 1974. — **12**, № 5. — P. 679 – 685.
128. Alphose Z. Liquid-containment shells of revolution: A review of recent studies on strength, stability and dynamics / Z. Alphose // Thin-Walled Structures. — 2015. — **87** — P. 102 – 114.
129. Chilton L.K. The hp mortar domain decomposition method for problems in fluid mechanics / L.K. Chilton, P. Seshaiyer // Int. j. Numer. Methods Fluids. — 2002. — **40** (12). — P. 1561 – 1570.
130. Collino F. Domain decomposition method for Harmonic wave propagation: a general presentation / F. Collino, S. Ghanemi, P. Joly // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. — 2000. — 184 P. 171 – 211.
131. Cowper G.R. The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theorie / G.R. Cowper // Appl. Mech. J. — 1966. — **33**, № 2. — P. 335 – 340.
132. Dieterman H.A. An analytically derived lumped-impedance model for the dynamic behaviour of a watertower / H.A. Dieterman // Ingenieur-Archiv, — 1986. — **56**, — P. 265 – 280.
133. Dryja M. Towards a unified theory of domain decomposition algorithms for elliptic problems / M. Dryja, O.B. Widlund // Proceedings of the Third

- International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential, held in Houston. Texas, 20–22 March 1989, SIAM, 1990.
134. Dutta S. Soilstructure interaction in dynamic behaviour of elevated tanks with alternate frame staging configurations / S. Dutta, A. Mandal, S.C. Dutta // Journal of Sound and Vibration. — 2004. — **277**. — P. 825 – 853.
135. Farhat C. Vistas in domain decomposition and parallel processing in computational mechanics / C. Farhat, P. Le Tallec // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. — 2000. — **184**. — P. 2 – 4.
136. Forsberg K. Influence of boundary conditions on the modal characteristics on thin cylindrical shells / K. Forsberg // AIAA Journal. — 1964. — **2**, N 12. — P. 55 – 76.
137. Gavriilyuk I. Axisymmetric oscillations of a cupola-shaped shell / I. Gavriilyuk, M. Hermann, V. Trotsenko, Yu. Trotsenko, A. Timokha // Journal of Engineering Mathematics. — 2010. — **68**. — P. 165 – 178.
138. Gavriilyuk I. Studying the coupled eigenoscillations of an axisymmetric tower-elevated tank system by the multimodal method / I. Gavriilyuk, M. Hermann, Yu. Trotsenko, A. Timokha // Journal of Fluids and Structures. — 2013. — **42**. — P. 152 – 165.
139. Gavriilyuk I. Eigenoscillations of a thin-walled azimuthally closed, axially open shell of revolution / I. Gavriilyuk, M. Hermann, V. Trotsenko, Yu. Trotsenko, A. Timokha // Journal of Engineering Mathematics. — 2014. — **85**. — P. 83 – 97.
140. Kang J.H. Three-Dimensional Vibration Analysis of Thick, Complete Conical Shells / J.H. Kang, A.W. Leissa // Transaction of the ASME. — 2004. — **71**. — P. 502 – 507.

141. Lai C.H. Eleventh International Conference on Domain Decomposition Methods, in: Proceedings of the 11-th International Conference on Domain Decomposition Methods in Greenwich / C.H. Lai , P.E. Bjorstad, M. Cross, O. Widlund // England, 20 – 24 July 1998.
142. Laura P.A.A. Vibrations of a Timoshenko beam clamped at one end and carrying a finite mass at the other / P.A.A. Laura, R.E. Rossi // Appl. Acoust. — 1990.— **30**, № 4 P. 293 – 301.
143. Lions P.L. in: R. Glowinski, G.H. Golub, G.A. Meurant, J. Periaux (Eds.), On the Schwarz Alternating Method I / P.L. Lions // SIAM, Philadelphia, PA. — 1988. — P. 1 – 42.
144. Lions P.L. in: T. Chan, R. Glowinski, J. Periaux, O. Widlund (Eds.), On the Schwarz Alternating Method II / P.L. Lions // SIAM, Philadelphia, PA. — 1989. — P. 47 – 70.
145. Lukovsky I. Asymptotic nonlinear multimodal modeling of liquid sloshing in an upright circular cylindrical tank. Part 1: Modal equations / I. Lukovsky , D. Ovchynnykov , A. Timokha // Nonlinear oscillations, 2012, **14**, № 4. — P. 512 – 525.
146. Magoules F. Lagrangian formulation of domein decomposition methods. A unified theory / F. Magoules, F.X. Roux // Applied Mathematical Modeling. — 2006. — 30. — P. 593 – 615.
147. Murty A.V.K. Vibrations of shot Beams / A.V.K. Murty // AIAA J. — 1969. — № 1. — P. 34 – 38.
148. Olson L.G. A study of displacement based fluid finite elements for calculating frequencies of fluid and fluid – structure systems / L.G. Olson, K.J. Bathe // Nuclear Engineering a Design. — 1983. — **76**. — P. 137 – 151.

149. Hu W. Experimental and analytical study of joined shells / W. Hu, J.P. Raney // AIAA Journal. — 1967. — **5**. — N 5.
150. Sweedan A.M.I. Equivalent mechanical model for seismic forces in combined tanks subjected to vertical earthquake excitation / A.M.I. Sweedan // Thin-Walled Structures. — 2009. — **47**. — P. 942 – 952.
151. Le Tallec P. in: Tinsley (Ed.), Domain Decomposition Methods in Computational Mechanics. — vol. 1(2), North-Holland, Oden. — 1994. — P. 121 – 220.
152. Trotsenko Yu.V., Frequencies and modes of vibration of a cylindrical shell with attached rigid body / Yu.V. Trotsenko, // Journal of Sound and Vibration. — 2006. — **292**, — P. 535 – 551.
153. Trotsenko Yu.V. Determination of the frequencies and modes of natural oscillations of liquids in composed vessels / Yu.V. Trotsenko // Journal of Mathematical Sciences. — 2016. — **215**, — No. 3. — P. 395 – 407.
154. Trotsenko V.A. Nonaxisymmetric vibrations of a shell of revolution partially filled with liquid / V.A. Trotsenko, Yu.V. Trotsenko, // Journal of Mathematical Sciences. — 2017. — **220**, — No. 3. — P. 341 – 358.
155. Trotsenko Yu.V. On the construction of coordinate functions for the Ritz method in the numerical analysis of nonaxially symmetric eigenoscillations of a dome-shaped shell of revolution / Yu.V. Trotsenko, // Journal of Mathematical Sciences. — 2017. — **220**, — No. 4. — P. 514 – 532.
156. Wen-Hwa Chu Supplement to breathing vibrations of a partially filled cylindrical tank – linear theory / Wen-Hwa Chu, R. Conzales // Transactions of the ASME, series E, J. of Appl. Mech. — 1964. — **31**. — № 4. — P. 722 – 723.

157. White M.W.D. Vibrations modes and frequencies of a Timoshenko beam with attached rigid bodies / M.W.D. White, G.R.Heppler // Trans. ASME. j. Appl. Mech. — 1995. — **62**, № 1. — P. 193 – 199.
158. Zarghamee M.S. A numerical method for analysis of free vibration of spherical shell / M.S. Zarghamee, H.R. Robinson // AIAA J. — 1967. — **5**, № 7. — P. 1256 – 1261.