

## Відзив

офіційного опонента на дисертаційну роботу Ю.В. Троценка «Розвиток методів аналітичної механіки в задачах про коливання багатокомпонентних механічних систем», що представлена на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.01 – теоретична механіка.

Дисертаційна робота Троценка Ю.В. є цілісною науково-дослідною роботою, присвяченою розробці аналітичних методів розрахунку коливань механічних систем, що включають в себе абсолютно тверді тіла, пружні та жорсткі резервуари, які частково заповнені ідеальною рідиною. Такого роду багатокомпонентні механічні системи є базовими моделями, що використовуються в авіабудуванні, ракетобудуванні та інших галузях промисловості.

Актуальність роботи обумовлена широким використанням в інженерній практиці конструкцій, які розглянуто в роботі. Слід зазначити, що незважаючи на існуючі методи дослідження гібридних механічних систем дуже важливим є розробка відносно простих і ефективних методів їх динамічного розрахунку. Наслідком широкого різноманіття поведінки багатокомпонентних об'єктів є те, що всі існуючі методи, так чи інакше, носять частковий характер і їх практичне використання можливе тільки для певного класу моделей при додатковому визначенні меж їх застосування. Між тим, успішне розв'язання задач моделювання при проектуванні систем та їх адекватному аналізі в багатьох галузях промисловості вимагають використання широкого спектру методів. Все це обумовлює актуальність як розробку нових, так і розвиток існуючих методів дослідження багатокомпонентних механічних систем.

Наукова новизна отриманих в дисертаційній роботі результатів полягає в наступному.

1. Виходячи з варіаційного принципу можливих переміщень побудована математична модель руху довільної оболонки обертання з приєднаним до одного з її торців абсолютно твердим тілом скінчених розмірів під дією зосереджених та розподілених навантажень загального вигляду. На цій основі сформульована спектральна задача про вільні неосесиметричні коливання розглядуваної механічної системи та запропоновано варіаційний метод побудови її наближених розв'язків. Цей метод має істотну перевагу над іншими існуючими методами, оскільки найбільш складні силові та моментні граничні умови є природними граничними умовами для відповідного квадратичного функціоналу. У зв'язку з цим шукані розв'язки для переміщень оболонки повинні бути підкорені лише кінематичним умовам спряження. Це приводить до того, що на відміну від традиційного

методу Рітца представлення для шуканих функцій не є незалежними, оскільки в них входять і параметри руху твердого тіла, які підлягають визначенню. Це в свою чергу викликає певні труднощі при побудові алгебраїчної системи відносно коефіцієнтів розкладів для переміщень оболонки та параметрів руху твердого тіла. Автором роботи запропоновано універсальний метод формування алгебраїчних рівнянь на основі варіації функціонала, який зручний для програмної реалізації алгоритмів розрахунків. Розроблені на цій основі розрахункові схеми дають можливість знаходити нижчі частоти та форми власних коливань розглядуваної механічної системи з високою точністю при відносно невеликій кількості наближень Рітца.

Розглянута також спрощена постановка задачі в припущенні, що для оболонки виконується гіпотеза плоских перерізів. Показано, що балкова теорія Тимошенка має істотно більшу область застосування по відношенню до теорії балок Ейлера – Бернуллі.

2. Запропоновано енергетичний метод для розв'язання спектральної задачі про коливання довільних оболонок обертання в умовах її сингулярного збурення. Використовуючи аналітичну теорію сингулярно збурених задач для незамкнених вздовж меридіана оболонок встановлюється формальна структура фундаментальних інтегралів вихідних рівнянь і характер їх виродження, коли параметр при старшій похідній наближається до нуля. Знайдена структура загального розв'язку фактично включає в себе всі послідовні наближення при асимптотичному інтегруванні вихідних рівнянь, які визначаються із розв'язків рекурентної послідовності граничних задач. Частина невідомих коефіцієнтів, що входять в загальний розв'язок знаходяться із виконання відповідних головних граничних умов задачі. Невизначені коефіцієнти, які при цьому лишаються, в подальшому знаходяться із умов стаціонарності відповідного квадратичного функціоналу.

У випадку куполоподібних оболонок їх полюс являється регулярною особливою точкою для системи диференціальних рівнянь вихідної задачі. У зв'язку з цим у роботі встановлюється асимптотична поведінка регулярних інтегралів в околі полюса оболонки, використовуючи при цьому теорію рівнянь з регулярною особливою точкою. Ця асимптотика має досить складний характер, який залежить від числа хвиль в круговому напрямку оболонки.

На основі проведених досліджень сформульовані основні принципи побудови базисних функцій для розв'язання розглядуваної задачі методом Рітца. Отриманий степеневий базис для апроксимації регулярної частини розв'язку замінюється поліномами Лежандра, абсолютні значення яких зі збільшенням порядку не зростають на відрізьку їх ортогональності. Це в значній мірі сприяє підвищенню стійкості обчислювального процесу.

Поведені в роботі обчислення показують, що запропонований метод має однакову швидкість збіжності як при малих, так і при середніх значеннях параметра при старшій похідній (метод являється рівномірно збіжним по

параметру). Окрім цього запропоновані системи базисних функцій забезпечують поточкову збіжність розв'язків і їх перших чотирьох похідних в усіх точках інтегрування вихідних рівнянь. Це дозволило автору провести перевірку задоволення побудованих розв'язків рівнянням, що розв'язуються. При цьому виявилось, що побудовані варіаційним методом узагальнені розв'язки задовольняють вихідним рівнянням з точністю  $10^{-9}$ .

Таким чином поєднання аналітичної теорії диференціальних рівнянь і варіаційного методу дозволило автору розробити досить ефективний метод розв'язання сингулярно збурених задач теорії оболонки.

3. Розвинуто застосування методу Рітца до побудови наближених розв'язків спектральних задач з використанням декомпозиції області визначення шуканих розв'язків.

Актуальність такого роду досліджень обумовлена тим, що при побудові розв'язків граничних задач відкривається можливість враховувати наявність розривів у граничних умовах, навантаженнях та коефіцієнтах вихідних рівнянь. Це дозволяє уникнути повільної збіжності послідовних наближень розв'язків задач.

Загальна ідеологія побудови розв'язку полягає в наступному. За допомогою принципу можливих переміщень будується еквівалентна варіаційна постановка вихідної задачі. Далі отриманий функціонал представляється у вигляді суми функціоналів, які визначені у введених до розгляду підобластях. З отриманого варіаційного рівняння виводяться граничні умови спряження розв'язків на суміжній границі введених підобластей. При цьому показується, що на класі допустимих функцій, які задовольняють кінематичним умовам спряження, силові граничні умови будуть природними граничними умовами для побудованого функціоналу. У зв'язку з цим виникає проблема побудови такого узагальненого функціоналу, для якого всі умови спряження були б природними умовами.

Теорія знаходження стаціонарних значень функціоналу при допоміжних обмеженнях на клас допустимих функцій відома вже давно (Курант Р., Гільберт Д.) Однак її застосування в поєднанні з методом Рітца не набуло належного розвитку.

Вводячи до розгляду множники Лагранжа, будується новий функціонал без обмежень на клас допустимих функцій. Після встановлення явних виразів для множників Лагранжа отримується узагальнений функціонал, який залежить тільки від розв'язків в підобластях. Побудований таким чином функціонал складає теоретичну основу для побудови наближених розв'язків задач з використанням методу спряження розв'язків.

Ефективність запропонованого методу проілюстрована при побудові розв'язків одномірної задачі на власні значення про коливання стержня з кусково-неперервними пружно-масовими характеристиками, а також спектральної задачі з параметром в граничній умові для рівнянь в частинних

похідних про вільні коливання ідеальної рідини в резервуарах складної геометрії.

4. Запропоновано ефективні аналітичні методи розрахунку вільних і вимушених поперечних коливань вертикально розміщеного стержня, який має на вільному торці резервуар з рідиною, а також стержня з приєднаним в деякому його перерізі резервуаром в формі тіла обертання, частково заповненого ідеальною рідиною.

Використовуючи основні положення лінійної теорії руху твердого тіла з рідиною, а також лінійної теорії пружних стержнів, побудовані загальні математичні моделі динаміки розглядуваних механічних систем під дією зосереджених та розподілених довільних навантажень.

Розв'язки задач про вільні коливання розглядуваних конструкцій базуються на основі варіаційних методів. В задачі про коливання стержня з підвісним резервуаром при побудові розв'язків використовується метод Рітца в поєднанні з методом декомпозиції області визначення шуканих функцій. Це обумовлено наявністю розривних граничних умов у розглядуваній задачі.

Отримані результати являються основою для розв'язання задач про вимушені коливання розглядуваних механічних систем під дією зовнішніх сил, а також при заданому гармонічному збуренні основи стержня. Отримані розрахункові дані порівнюються з існуючими в літературі точними та експериментальними даними.

5. Розроблено новий метод розв'язання задачі про коливання довільних пружних оболонок обертання, які частково заповнені ідеальною нестисливою рідиною.

Виходячи з лінійної теорії оболонок та теорії малих хвильових рухів ідеальної рідини наведена диференціальна постановка розглядуваної задачі. Визначення коливань даної механічної системи зводиться до розв'язання досить складної початково-граничної задачі, яка пов'язана з інтегруванням системи диференціальних рівнянь восьмого порядку зі змінними коефіцієнтами для переміщень оболонки та розв'язанням неоднорідної задачі Неймана для потенціалу зміщень рідини. Розв'язки цих задач взаємопов'язані через кінематичні умови на змоченій поверхні оболонки та через силову взаємодію рідини і оболонки.

Побудова розв'язків розглядуваної нестационарної задачі зведено до розв'язання системи звичайних диференціальних рівнянь з незалежною змінною по часу. При цьому використовуються власні функції спектральних задач про коливання рідини в абсолютно жорсткому резервуарі та про коливання оболонки з рідиною без врахування її хвильових рухів. Ефективні методи знаходження розв'язків першої задачі розроблені в роботах І.О. Луковського. В той же час друга спектральна задача має принципові труднощі при визначенні її власних функцій і значень.

Оскільки оболонка знаходиться під дією розривного динамічного навантаження зі сторони рідини, то для уникнення повільної збіжності рядів для переміщень оболонки застосовується метод декомпозиції їх області визначення. Для розщеплення гідродинамічної частини задачі від її пружної частини вводиться до розгляду обернений оператор, який нормальним прогином оболонки на її змоченій поверхні ставить у відповідність потенціал зміщень рідини в області його визначення.

Явний вираз такого оператора можна побудувати за допомогою відповідної функції Гріна для випадку канонічної області, що заповнена рідиною, або ж використанням власних функцій спектральної задачі з параметром в граничній умові на змоченій поверхні оболонки. Визначення скінченного числа власних функцій спектральної задачі являється досить складною самостійною задачею.

За допомогою введеного оберненого оператора вихідна задача зведена до інтегрування системи інтегро-диференціальних рівнянь відносно переміщень оболонки. Для знаходження розв'язків цієї задачі побудовано узагальнений функціонал, для якого всі вісім граничних умов спряження є природними граничними умовами. Це дозволило автору застосувати метод Рітца для знаходження його стаціонарних значень. При цьому побудова оберненого оператора для гідродинамічної частини задачі зведена до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь зі скінченим числом правих частин. Це дозволило істотно спростити алгоритм побудови наближеного розв'язку розглядуваної спектральної задачі.

На цій основі наведені розрахунки вільних поперечних коливань циліндричної оболонки з врахуванням хвильових рухів рідини та проведено порівняння отриманих розрахункових даних з існуючими точними розв'язками задачі.

Практичне значення отриманих в роботі наукових результатів визначається розробкою нових ефективних методів до розв'язання класів задач механіки, які можуть бути використані при проведенні проектно-конструкторських робіт по створенню нових транспортних засобів, які мають в собі великі маси рідини та приєднані тверді тіла.

Достовірність одержаних результатів забезпечується дослідженням практичної збіжності запропонованих алгоритмів розв'язання задач, перевіркою точності задоволення побудованих розв'язків вихідним рівнянням і граничним умовам, порівнянням отриманих розрахункових даних з існуючими теоретичними та експериментальними даними інших авторів.

Основні результати дисертаційної роботи повністю опубліковані у виданнях, що входять до переліку фахових видань ДАК МОН України. Автореферат роботи правильно відображає зміст дисертації.

Зауваження по дисертаційній роботі:

1. При побудові розв'язків задач про вільні коливання тонкостінних оболонок обертання автором успішно була врахована наявність у розв'язках примежових функцій, локалізованих в околі граничних точок задач. Для деяких типів оболонок у розв'язках присутні внутрішні точки повороту, при переході через які істотно міняється характер поведінки шуканих розв'язків. Виникає питання про вплив таких точок на збіжність методу Рітца.

2. При побудові координатних функцій для куполоподібних оболонок нехтувалось впливом примежових функцій на поведінку розв'язків в околі полюса оболонки. В роботі не розглянуто випадок, коли таким припущенням користуватись неможливо.

В цілому робота носить завершений характер. В ній запропоновані нові аналітичні методи дослідження коливань багатокomпонентних механічних систем, які можуть бути використані в інженерно-конструкторській практиці.

Вважаю, що дисертаційна робота «Розвиток методів аналітичної механіки в задачах про коливання багатокomпонентних механічних систем» відповідає вимогам «Порядку присудження наукових ступенів» відповідно до Постанови КМУ від 24.07.2013 р. № 567 (зі змінами) щодо докторських дисертацій, а її автор Юрій Володимирович Троценко, заслуговує присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.01 – теоретична механіка.

Офіційний опонент:

заступник директора з наукової роботи

Інститут прикладної математики і

механіки НАН України,

доктор фізико-математичних наук,

старший науковий співробітник



В.Ф. Щербак

Кадійшов

вченої ради  
секретар



серійний номер

26.06.02

15.06.2017р.

Артемченко Ж.Я.