

**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ**

ШИДЛІЧ Андрій Любомирович

УДК 517.5

**ЕКСТРЕМАЛЬНІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ НАБЛИЖЕНЬ У
ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ПРОСТОРАХ**

01.01.01 — математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ — 2017

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий консультант:

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
САВЧУК Віктор Васильович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник
відділу теорії функцій.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
ВАКАРЧУК Сергій Борисович,
Університет імені Альфреда Нобеля, м. Дніпро,
професор кафедри економіки та моделювання
бізнес-процесів;

доктор фізико-математичних наук, професор
ЗАДЕРЕЙ Петро Васильович,
Київський національний університет
технологій і дизайну, завідувач кафедри
вищої математики;

доктор фізико-математичних наук, професор
КОФАНОВ Володимир Олександрович,
Дніпропетровський національний університет
імені Олеся Гончара, професор кафедри
математичного аналізу і теорії функцій.

Захист відбудеться *«29» вересня 2017* р. о *15* годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий *«22» серпня 2017* р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради

Романюк А. С.

Загальна характеристика роботи

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню екстремальних задач теорії наближень у функціональних просторах, а саме: розв'язанню задачі про точні верхні межі на заданих функціональних класах величин найкращих наближень інтегралів за допомогою інтегралів скінченного рангу; задач про відшукування точних порядкових оцінок нелінійних апроксимативних характеристик класів функцій багатьох змінних у лінійних нормованих просторах; задачі про відшукування у просторах Орліча точних верхніх меж найкращих n -членних наближень множин образів лінійних операторів; отриманню конструктивних характеристик класів функцій однієї та багатьох змінних; інших супровідних задач.

Більшість із перелічених задач відносяться до нелінійної апроксимації функцій – одного з основних напрямів сучасної теорії наближень. Основоположними у цій тематиці вважаються дослідження С.Б. Стечкіна 60-х років минулого століття, які присвячені відшукуванню критерію абсолютної збіжності ортогональних рядів. С.Б. Стечкіну вдалося сформулювати такий критерій, запровадивши нову на той час апроксимативну характеристику, а саме величину найкращого квадратичного наближення елемента гільбертового простору за допомогою n -членних поліномів за даною системою. З тих пір величина найкращого n -членного наближення стала предметом досліджень провідних фахівців теорії наближень, зокрема, Е. С. Белінського, Р. ДеВора, Р. С. Ісмаїлова, Б. С. Кашина, В. Є. Майорова, А. С. Романюка, О. І. Степанця, В. М. Темлякова та багатьох інших. Їх дослідження сформувались в окремий напрямок теорії наближень, а результати, отримані у цьому напрямку, знаходять своє застосування у різноманітних галузях математики. Проте існує зовсім мало робіт, у яких знайдено явну формулу для обчислення величин найкращих n -членних наближень тих чи інших функціональних класів. Нам відомі лише роботи Е. Новака (1992), О. І. Степанця (2001, 2002), О. І. Степанця та В. І. Рукасова (2003), О. І. Радзівєвської та Г. В. Радзівєвського (2005), Г. Фанга та Л. Кіана (2006), Ф. Гао (2010) та В. С. Романюка (2010). Величини найкращих наближень інтегралів за допомогою інтегралів скінченного рангу, які є природними інтегральними аналогами найкращих n -членних наближень, розглядалися лише у роботі О. І. Степанця (2003). З огляду на незначну кількість робіт, результати даної дисертаційної роботи, які стосуються відшукування явних формул для обчислення найкращих наближень інтегралів за допомогою інтегралів скінченного ран-

гу на важливих функціональних класах, представляють безумовний науковий інтерес.

У теорії наближень загальноприйнято вважати науковий результат "завершеним" для даного методу апроксимації на заданому класі функцій, якщо доведено прямі та обернені теореми. У такому випадку також кажуть, що знайдено конструктивну характеристику заданого класу функцій у термінах даного методу наближення. Сучасна теорія наближень наповнена великою кількістю такого роду теорем для різних апроксимаційних методів на різноманітних функціональних класах. Згадаємо лише монографії П. Бутцера та Р. Неселя (1971), В. К. Дзядика (1977), Р. ДеВора та Г. Лоренца (1993), О. І. Степанця (2002), Е. С. Белінського та Р. М. Тригуба (2004), В. К. Дзядика та І. О. Шевчука (2008), М. П. Тімана (2009), в яких викладено основоположні результати з цієї тематики. Але більшість класичних лінійних методів, побудованих на основі рядів Фур'є, є насиченими, і тому для них не завжди можна отримати прямі та обернені теореми. Відшукування такого загального методу наближень, який можна адаптувати під гладкісні властивості функції як загодно великого порядку і який був би для заданого класу функцій найкращим у сенсі прямих та обернених теорем, також складає великий науковий інтерес.

Однією з центральних задач теорії тригонометричних рядів є описання того чи іншого класу 2π -періодичних функцій у термінах їх коефіцієнтів Фур'є. На даний час існує досить багато теорем про взаємозв'язок між властивостями функцій і швидкістю спадання до нуля послідовності їх коефіцієнтів Фур'є. Проте на деяких важливих функціональних класах таких тверджень не отримано дотепер. Добре відомо, що множина нескінченно диференційовних функцій складається лише з тих функцій, коефіцієнти Фур'є яких спадають до нуля швидше будь-якого від'ємного степеня. Це, зокрема, вказує на те, що класифікація таких функцій у степеневій шкалі є неефективною. Тому відшукування нових критеріїв нескінченної диференційовності функцій у термінах коефіцієнтів Фур'є видається важливою задачею.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано у відділі теорії функцій Інституту математики НАН України згідно з науково-дослідними темами "Апроксимативні та структурні характеристики функціональних множин", номер державної реєстрації 0111U002079; "Теорія наближень в лінійних просторах", номер державної реєстрації 0106U000406.

Мета і завдання дослідження. Основна мета дисертаційного дослідження – це розробка нових та вдосконалення існуючих методів знаходження точних значень та точних порядкових оцінок нелінійних апроксимативних характеристик важливих класів функцій у функціональних просторах.

Об'єктом дослідження є класи функцій однієї та багатьох змінних, лінійні методи підсумовування рядів Фур'є, множини образів деяких лінійних операторів, множини нескінченно диференційовних, аналітичних та цілих періодичних функцій, класи Жевре $\mathcal{J}_\alpha$.

Предметом дослідження є точні верхні межі на заданих класах функцій багатьох змінних величин найкращих наближень інтегралів за допомогою інтегралів скінченного рангу, нелінійні апроксимативні характеристики класів функцій багатьох змінних, найкраще наближення та найкраще n -членне наближення множин образів деяких лінійних операторів, оператори Тейлора-Абея-Пуассона, нерівності типу Чебишова, зв'язок множин нескінченно диференційовних, аналітичних та цілих 2π -періодичних функцій, класів Жевре $\mathcal{J}_\alpha$ з множинами (ψ, β) -диференційовних 2π -періодичних функцій.

Завдання дослідження:

1. Знайти явні формули для обчислення точних верхніх меж найкращих наближень інтегралів за допомогою інтегралів скінченного рангу на класах функцій, які зображуються у вигляді добутків деякої фіксованої невід'ємної функції та функцій з одиничної кулі $U_p(\mathbb{A})$ простору $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$ при всіх $p > 0$. Отримати точні порядкові оцінки цих величин при необмеженому зростанні їх рангу. Для даних класів функцій знайти точні значення та точні порядкові оцінки інтегральних аналогів величин найкращих наближень функцій поліномами заданого порядку та тригонометричного поперечника.

2. Встановити умови належності функцій з просторів $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$ просторам $L_s(\mathbb{A}, d\mu)$, $0 < p, s < \infty$.

3. Знайти явні формули для обчислення точних верхніх меж на згаданих вище класах функцій аналогів величин найкращих n -членних наближень у просторах Орліча $L_M(\mathbb{A}, d\mu)$.

4. Одержати точні порядкові оцінки низки важливих нелінійних апроксимативних характеристик класів функцій багатьох змінних $\mathcal{F}_{q,r}^\psi$ в інтегральній метриці та у просторах S^p .

5. Отримати прямі та обернені теореми наближення операторами Тейлора-Абея-Пуассона функцій з просторів L_p та S^p .

6. У просторах l_p зі змінним показником підсумовування та дискретних просторах Орліча l_M знайти точні значення відповідно ве-

личин найкращих наближень та найкращих n -членних наближень множин образів діагональних операторів.

7. У просторах $S_{\mathcal{C}}^p$ сформулювати означення насичення та встановити достатні умови насичення лінійних методів підсумовування рядів Фур'є, які задаються довільними послідовностями функцій, визначених на деякій множині комплексних чисел.

8. Отримати нові нерівності типу Чебишова.

9. У термінах узагальнених $\bar{\psi}$ -похідних описати множину $\mathcal{D}^\infty$ нескінченно диференційовних періодичних функцій. Отримати критерії належності 2π -періодичних дійснозначних на дійсній осі функцій множинам нескінченно диференційовних, аналітичних та цілих функцій.

10. Описати зв'язок між класами $(\psi, \bar{\beta})$ -диференційовних функцій і відомими класами Жевре $\mathcal{J}_\alpha$. Встановити критерій належності періодичних функцій класам $\mathcal{J}_\alpha$.

Методи дослідження. Використовується апарат математичного аналізу, теорії функцій багатьох змінних, теорії екстремальних задач, а також нові методи, які базуються на понятті перестановки функції та асимптотичних властивостях опуклих функцій.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати роботи, що виносяться на захист, є новими і полягають у такому.

1. Знайдено явні формули для обчислення точних верхніх меж величин $e_\sigma(f)$ найкращих наближень інтегралів за допомогою інтегралів скінченного рангу на класах функцій, які зображуються у вигляді добутків деякої фіксованої невід'ємної функції та функцій з одиничної кулі $U_p(\mathbb{A})$ простору $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$ при всіх $p > 0$. Отримано точні порядкові оцінки цих величин при необмеженому зростанні їх рангу. Для даних класів функцій знайдено точні значення та точні порядкові оцінки інтегральних аналогів величин найкращих наближень функцій поліномами заданого порядку та тригонометричного поперечника.

2. У термінах величин $e_\sigma(f)$ встановлено необхідні та достатні умови належності функцій з просторів $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$ просторам $L_s(\mathbb{A}, d\mu)$, $0 < p, s < \infty$. Отримані результати застосовано до знаходження апроксимативних характеристик просторів $S_{\mathcal{F}}^p$ та до наближень вимірних функцій, які задаються згортками із сумовними ядрами, цілими функціями експоненціального типу.

3. Знайдено явні формули для обчислення точних верхніх меж аналогів величин найкращих n -членних наближень у просторах Орліча $L_M(\mathbb{A}, d\mu)$ на згаданих вище класах функцій для всіх $p > 0$ та

функцій Орліча $M(t)$ таких, що функція $M(t^{1/p})$ також є функцією Орліча.

4. Знайдено точні порядкові оцінки низки важливих нелінійних апроксимативних характеристик (найкраще n -членне тригонометричне наближення, найкраще n -членне ортогональне тригонометричне наближення, наближення n -членними ґріді апроксимантами, базисний поперечник) класів функцій багатьох змінних $\mathcal{F}_{q,r}^\psi$ в інтегральній метриці та у просторах S^p .

5. Доведено прямі та обернені теореми наближення 2π -періодичних функцій операторами Тейлора–Абеля–Пуассона в інтегральній метриці і одержано конструктивну характеристику класів 2π -періодичних функцій, K -функціонали радіальних похідних яких не перевищують деякої мажоранти.

6. У просторах S^p функцій багатьох змінних встановлено прямі та обернені теореми наближення операторами Тейлора–Абеля–Пуассона $A_{\varrho,r}^\Delta$ та операторами $P_{\varrho,s}^\Delta$, що породжують відповідні лінійні методи підсумовування по трикутних областях кратних рядів Фур'є. У термінах похибок наближення цими операторами отримано конструктивну характеристику класів функцій, узагальнені похідні яких належать множинам $S^p H_\omega$.

7. У просторах l_p зі змінним показником підсумовування та дискретних просторах Орліча l_M знайдено точні значення відповідно величин найкращих наближень та найкращих n -членних наближень множин образів одиничних куль цих просторів під дією діагональних операторів.

8. У просторах S_φ^p означено поняття насичення лінійних методів підсумовування рядів Фур'є, які задаються довільними послідовностями функцій, визначених на деякій множині комплексних чисел. Показано інваріантність цього поняття відносно просторів S_φ^p та знайдено достатні умови насичення. Отримано точні порядкові оцінки важливих нелінійних апроксимативних характеристик цих просторів.

9. Отримано нові нерівності типу Чебишова.

10. Описано множину $\mathcal{D}^\infty$ нескінченно диференційовних періодичних функцій у термінах узагальнених $\bar{\psi}$ -похідних. Встановлено нові критерії належності 2π -періодичних дійснозначних на дійсній осі функцій множинам нескінченно диференційовних, аналітичних та цілих функцій.

11. Описано зв'язок між класами $(\psi, \bar{\beta})$ -диференційовних функцій і відомими класами Жевре $\mathcal{J}_\alpha$. У термінах таких похідних вста-

новлено критерій належності періодичних функцій класам $\mathcal{J}_\alpha$.

12. Знайдено точні порядкові оцінки деяких важливих величин, у термінах яких, зокрема, виражаються найкращі n -членні наближення деяких класів функцій багатьох та їх інтегральні аналоги.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Її результати мають практичне значення в теорії наближень у функціональних просторах, а також вони можуть бути використані у теоретичних дослідженнях з математичного аналізу, математичної фізики та обчислювальної математики.

Особистий внесок здобувача. Визначення головних напрямів досліджень належить О.І. Степанцю та В.В. Савчуку. Усі результати, що виносяться на захист, отримано здобувачем самостійно. У роботах, які опубліковані у співавторстві, внесок усіх авторів є рівноцінним.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи доповідалися на:

- Міжнародній науковій конференції “Математичний аналіз і диференціальні рівняння та їх застосування”, Ужгород, 18–23 вересня 2006 року;

- Міжнародній науковій конференції “Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування” з нагоди 70-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка, Мелітополь, 16–21 червня 2008 року;

- Міжнародній науковій конференції “Функціональні методи в теорії апроксимації та теорії операторів”, присвяченій пам’яті В. К. Дзядика (1919–1998), Волинь, 22–26 серпня 2009 року;

- Українському математичному конгресі-2009 (до 100-річчя від дня народження Миколи М. Боголюбова), Київ, Інститут математики НАН України, 27–29 серпня 2009 року;

- Міжнародній науковій конференції “Теорія наближень і її застосування”, присвяченій пам’яті М. П. Корнейчука (1920–2003), Дніпропетровськ, 14–17 червня 2010 року;

- Міжнародній науковій конференції “Теорія наближення функцій та її застосування”, присвяченій 70-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О.І. Степанця (1942–2007), Кам’янець-Подільський, 28 травня – 3 червня 2012 року;

- Міжнародній науковій конференції “Крайові задачі, теорія функцій та їх застосування”, з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка, Слов’янськ, 12–14 червня 2013 року;

- Міжнародній науковій конференції “Боголюбовські читання DIF-2013”, з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка, Севастополь, 23–30 червня 2013 року;
- Міжнародній науковій конференції “Complex analysis and related topics”, Львів, 23–28 вересня 2013 року;
- IV Міжнародній ганській конференції, Чернівці, 30 червня – 5 липня 2014 року;
- Mecklenburg Workshop “Approximation Methods and Function Spaces”, dedicated to the 60th birthday of Prof. W. Sickel, Hasenwinkel, Germany, March 16–20, 2015;
- Third Conference “Mathematics for Life Sciences”, Rivne, September 15–19, 2015;
- Міжнародній науковій конференції “Теорія наближень і її застосування”, з нагоди 75-річчя В. П. Моторного, Дніпропетровськ, 8–11 жовтня 2015 року;
- AMMODIT and final EUMLS Workshop “Mathematics for Life Sciences”, Hasenwinkel, Germany, March 07–11, 2016;
- Міжнародній науковій конференції “Complex analysis and related topics”, Львів, 30 травня–4 червня 2016 року;
- семінарах відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник семінару – чл.-кор. НАН України О. І. Степанець, проф. А. С. Романюк);
- засіданнях Вченої ради Інституту математики НАН України;
- семінарах “Сучасний аналіз” у Київському національному університеті імені Т. Г. Шевченка, 16 вересня 2013 року, 29 березня 2017 року (керівники семінару: проф. І. О. Шевчук, проф. О. О. Курченко, проф. В. М. Радченко);
- семінарі Інституту математики Університету м. Любек, Німеччина, 11 березня 2014 року (керівник семінару – проф. Ю. Престін);
- Львівському міському семінарі з теорії аналітичних функцій у Львівському національному університеті ім. І. Я. Франка, 8 грудня 2016 року (керівник семінару – професор О. Б. Скасків);
- Київському семінарі з функціонального аналізу в Інституті математики НАН України, 15 березня 2017 року (керівники семінару: академік НАН України Ю. М. Березанський, академік НАН України Ю. С. Самойленко, чл.-кор. НАН України А. Н. Кочубей);
- міжвузівському семінарі по теорії функцій у Дніпропетровському національному університеті ім. О. Гончара, 22 березня 2017 року (керівник семінару – чл.-кор. НАН України В. П. Моторний).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи викладено у 43 наукових публікаціях [1–43], із яких 22 статті [1–22] у наукових виданнях, внесених до переліку фахових видань із фізико-математичних наук, 13 із яких [1, 3, 4, 6, 7, 9, 10–13, 17, 20, 21] надруковано у виданнях, внесених до міжнародних наукометричних баз.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з переліку умовних позначень, вступу, шести розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить 204 найменування. Повний обсяг роботи становить 337 сторінок друкованого тексту.

Основний зміст дисертації

У **першому розділі** дано огляд літератури за її темою, сформульовано означення основних величин та наведено відомі результати, які, зокрема, стосуються відшукування точних верхніх меж найкращих n -членних наближень та їх аналогів у функціональних просторах.

У **розділі 2** розглядаються величини $e_\sigma(f)$ найкращих наближень інтегралів функцій з просторів $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$ за допомогою інтегралів скінченного рангу – інтегральні аналоги величин найкращих n -членних наближень, які були введені у 2003 році О. І. Степанцем при відшуванні апроксимативних характеристик просторів S_Φ^p .

Нехай $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}, d\mu)$, $d \geq 1$, – d -вимірний евклідів простір точок $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$, визначений на борелевій σ -алгебрі $\mathcal{B}$ зі скінченною σ -аддитивною неперервною мірою $d\mu$, $\mathbb{A}$ – μ -вимірна підмножина з $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}, d\mu)$, $\mu(\mathbb{A}) = \text{mes}_\mu \mathbb{A} = a$, $a \in (0, \infty]$; $Y = Y(\mathbb{A}, d\mu)$ – множина всіх заданих на $\mathbb{A}$ функцій $f = f(\mathbf{x})$, вимірних відносно міри $d\mu$.

При заданому $p \in (0, \infty)$ через $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$ позначимо підмножину функцій f із $Y(\mathbb{A}, d\mu)$, для яких є скінченною величина

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{A}, d\mu)} = \left(\int_{\mathbb{A}} |f(\mathbf{x})|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1)$$

Відомо, що функціонал $\|\cdot\|_{L_p(\mathbb{A}, d\mu)}$, визначений співвідношенням (1), при $p \geq 1$ задає норму, а при $p \in (0, 1)$ – квазінорму на $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$.

Нехай, далі, $f \in L_1(\mathbb{A}, d\mu)$, σ – деяке додатне число, і $\Gamma_\sigma = \Gamma_\sigma(\mathbb{A})$ – множина всіх μ -вимірних підмножин γ_σ з $\mathbb{A}$, $\text{mes}_\mu \gamma_\sigma = \sigma$.

Величини

$$e_\sigma(f) := \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \left| \int_{\mathbb{A}} f(\mathbf{x}) d\mu - \int_{\gamma_\sigma} f(\mathbf{x}) d\mu \right| \quad (2)$$

називають найкращими наближеннями інтегралу функції f по множині $\mathbb{A}$ за допомогою інтегралів скінченного рангу (порядку) σ .

У підрозділі 2.1 знайдено явні формули для обчислення точних верхніх меж цих величин на класах функцій, які зображуються у вигляді добутків деякої фіксованої невід'ємної функції та функцій з одиничної кулі $U_p(\mathbb{A})$ простору $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$ при довільних $p > 0$.

Нехай $U_p^+(\mathbb{A})$ – підмножина всіх невід'ємних функцій з $U_p(\mathbb{A})$ і $\varphi(\mathbf{x})$ – невід'ємна істотно обмежена на $\mathbb{A}$ функція, для якої у випадку, коли множина $\mathbb{A}$ необмежена, припускається, що

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \varphi(\mathbf{x}) = 0 \quad (3)$$

(в такому випадку пишемо $\varphi \in \Phi(\mathbb{A})$).

Розглянемо величини $e_\sigma(f)$ для функцій $f = \varphi \cdot y$, де $\varphi \in \Phi(\mathbb{A})$, а $y \in U_p^+(\mathbb{A})$. У цьому випадку вони мають вигляд

$$e_\sigma(f) = e_\sigma(\varphi y) = e_\sigma(\varphi y)_{L_1(\mathbb{A}, d\mu)} = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \|\varphi y - \chi_{\gamma_\sigma} \varphi y\|_{L_1(\mathbb{A}, d\mu)}, \quad (4)$$

де $\chi_{\gamma_\sigma} = \chi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{x})$ – характеристична функція множини γ_σ , яка набуває значення 1 при $\mathbf{x} \in \gamma_\sigma$ та значення 0 при $\mathbf{x} \notin \gamma_\sigma$.

Формули для обчислення точних верхніх меж величин $e_\sigma(\varphi y)$ вигляду (4) на класі функцій $y \in U_1^+(\mathbb{A})$ були отримані у 2003 році О.І. Степанцем. У підрозділі 2.1 роботи знайдено аналогічні формули на класах функцій $y \in U_p^+(\mathbb{A})$ при всіх значеннях $p \in (0, \infty)$ за умов, які гарантують скінченність норм у правій частині (4). Зокрема, у випадку, коли $p > 1$, такою достатньою умовою, внаслідок нерівності Гельдера, є умова на функцію φ :

$$\|\varphi\|_{L_{p'}(\mathbb{A}, d\mu)} < \infty, \quad 1/p + 1/p' = 1. \quad (5)$$

Теорема 2.1.2. *Нехай $p \in (1, \infty)$, $\sigma \in (0, a)$ і φ – довільна функція з множини $\Phi(\mathbb{A})$, яка задовольняє умову (5). Тоді існує найбільше на проміжку $(\sigma, a]$ число s^* таке, що при всіх $s \in (\sigma, s^*)$ виконується нерівність*

$$s - \sigma \leq \bar{\varphi}^p(s) \int_0^s \bar{\varphi}^{-p}(t) dt \quad (6)$$

і для якого справджується рівність

$$e_\sigma(\varphi, p) := \sup_{y \in U_p^+(\mathbb{A})} e_\sigma(\varphi y) =$$

$$= \left((s^* - \sigma)^{p'} \left(\int_0^{s^*} \bar{\varphi}^{-p}(t) dt \right)^{-\frac{p'}{p}} + \int_{s^*}^a \bar{\varphi}^{p'}(t) dt \right)^{\frac{1}{p'}}, \quad (7)$$

де $\bar{\varphi}(t)$ — спадна перестановка функції $\varphi(\mathbf{x})$. Точна верхня межа у співвідношенні (7) реалізується функцією y^* з $U_p^+(\mathbb{A})$, у якій якщо $s^* = a < \infty$, то $y^*(\mathbf{x}) = \varphi^{-1}(\mathbf{x}) \left(\int_{\mathbb{A}} \varphi^{-p}(\mathbf{t}) d\mu \right)^{-\frac{1}{p}}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{A}$, і якщо $s^* < a$, то $y^*(\mathbf{x}) = \varphi^{-1}(\mathbf{x}) (s^* - \sigma)^{\frac{p'}{p}} \left(G_\sigma \int_{\mathbb{E}} \varphi^{-p}(\mathbf{t}) d\mu \right)^{-\frac{p'}{p}}$ при $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$ і $y^*(\mathbf{x}) = \varphi^{\frac{p'}{p}}(\mathbf{x}) G_\sigma^{-\frac{p'}{p}}$ при $\mathbf{x} \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{E}$, де $\mathbb{E} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{A} : \varphi(\mathbf{x}) \geq \bar{\varphi}(s^* -)\}$, а величина $G_\sigma = G_\sigma(\varphi, p)$ дорівнює правій частині рівності (7).

Зазначимо, що умова (3) гарантує існування спадної перестановки $\bar{\varphi}(t)$ функції $\varphi(\mathbf{x})$.

У підрозділі 2.3 для даних класів функцій отримано точні значення та точні порядкові оцінки інтегральних аналогів величин найкращих наближень функцій поліномами заданого порядку та тригонометричного поперечника. А саме, розглядаються величини

$$E_{\gamma_\sigma}(\varphi, p) := \sup_{y \in U_p^+(\mathbb{A})} \|\varphi y - \chi_{\gamma_\sigma} \varphi y\|_{L_1(\mathbb{A}, d\mu)}, \quad (8)$$

де γ_σ — деяка фіксована множина з Γ_σ , а $\varphi \in \Phi(\mathbb{A})$, і величини

$$D_\sigma(\varphi, p) := \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} E_{\gamma_\sigma}(\varphi, p), \quad p \in (0, \infty). \quad (9)$$

Теорема 2.3.1. *Нехай функція $\varphi \in \Phi(\mathbb{A})$ задовольняє умову (5). Тоді для довільних $p \in (1, \infty)$, $\sigma > 0$ і $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$*

$$E_{\gamma_\sigma}(\varphi, p) = \|\varphi_{\gamma_\sigma}\|_{L_{p'}(\mathbb{A}, d\mu)} = \|\bar{\varphi}_{\gamma_\sigma}\|_{L_{p'}(0, a)}, \quad 1/p + 1/p' = 1, \quad (10)$$

де $\bar{\varphi}_{\gamma_\sigma}(t)$ — спадна перестановка функції $\varphi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{x}) := (1 - \chi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{x}))\varphi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{A}$, і

$$D_\sigma(\varphi, p) = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \|\bar{\varphi}_{\gamma_\sigma}\|_{L_{p'}(0, a)} = \|\bar{\varphi}\|_{L_{p'}(\sigma, a)}, \quad (11)$$

де $\bar{\varphi}(t)$ — спадна перестановка функції $\varphi(\mathbf{x})$. При цьому в Γ_σ є множина γ_σ^* , для якої

$$E_{\gamma_\sigma^*}(\varphi, p) = D_\sigma(\varphi, p) = \|\bar{\varphi}\|_{L_{p'}(\sigma, a)}.$$

Зокрема, у ролі γ_σ^* можна взяти будь-яку вимірну підмножину множини $\{\mathbf{x} \in \mathbb{A} : \varphi(\mathbf{x}) \geq \bar{\varphi}(\sigma+)\}$ μ -міри σ , що містить множину $\{\mathbf{x} \in \mathbb{A} : \varphi(\mathbf{x}) > \bar{\varphi}(\sigma+)\}$.

При $p = 1$ точні значення величин $e_\sigma(\varphi, p)$ та $D_\sigma(\varphi, p)$ отримано у 2003 році О. І. Степанцем.

У дисертаційній роботі отримано аналогічні твердження і у випадку, коли $p \in (0, 1]$, а також знайдено точні порядкові оцінки величин $e_\sigma(\varphi, p)$ та $D_\sigma(\varphi, p)$ при необмеженому зростанні їх рангу ($\text{mes}_\mu \mathbb{A} = \infty$).

Для формулювання одного з отриманих у цьому напрямку результатів введемо деякі позначення. Позначимо через $\mathfrak{M}$ множину всіх додатних опуклих спадних до нуля функцій неперервного аргументу $t \geq 1$ таких, що похідна $\psi'(t) := \psi'(t+)$ при $t = 1$ скінченна. Для $\psi \in \mathfrak{M}$ розглянемо функції

$$\eta(t) = \eta(\psi; t) := \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right), \quad \mu(t) = \mu(\psi; t) := \frac{t}{\eta(t) - t}, \quad t \geq 1;$$

і покладемо $\mathfrak{M}_C := \{\psi \in \mathfrak{M} : 0 < K_1 \leq \mu(\psi; t) \leq K_2 \ \forall t \geq 1\}$. Має місце твердження, яке є об'єднанням тверджень 2.2.3 та 2.3.1.

Твердження. Якщо $p \in (1, \infty)$ і функція $\varphi \in \Phi(\mathbb{A})$ при будь-якому $t \geq 0$ задовольняє рівність $\bar{\varphi}(t) = \psi(t+1)$, де функція $\psi \in \mathfrak{M}_C$ така, що $\|\psi\|_{L_{p^*, [1, \infty)}} < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$, і функція $1/\psi(t)$ опукла при всіх t , більших деякого числа $t_0 \geq 1$, то при $\sigma \rightarrow \infty$ справджується співвідношення

$$e_\sigma(\varphi, p) \asymp D_\sigma(\varphi, p) \asymp \bar{\varphi}(\sigma) \sigma^{1 - \frac{1}{p}}. \quad (12)$$

У співвідношенні (12) і далі під виразом " $a(\sigma) \asymp b(\sigma)$ при $\sigma \rightarrow \infty$ " слід розуміти, що існують такі сталі $0 < C_1 < C_2$, що при всіх σ , більших за деяке число σ_0 , виконуються нерівності $a(\sigma) \leq C_2 b(\sigma)$ (у цьому випадку пишемо " $a(\sigma) \ll b(\sigma)$ ") і $a(\sigma) \geq C_1 b(\sigma)$ (у такому випадку пишемо " $a(\sigma) \gg b(\sigma)$ ").

У підрозділі 2.4 розглядаються аналогі найкращих наближень інтегралів за допомогою інтегралів скінченного рангу в просторах Орліча $L_M(\mathbb{A}, d\mu)$.

Нехай $M(t)$, $t \geq 0$, — довільна функція Орліча, тобто неспадна опукла функція така, що $M(0) = 0$ і $M(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Позначимо через $L_M(\mathbb{A}, d\mu)$ множину всіх функцій $f \in Y(\mathbb{A}, d\mu)$, які для довільного числа $C > 0$ задовольняють умову $\int_{\mathbb{A}} M(C|f(\mathbf{x})|) d\mu < \infty$.

Лінійний простір $L_M(\mathbb{A}, d\mu)$ є банаховим з нормою Люксембурга

$$\|f\|_{L_M(\mathbb{A}, d\mu)} := \inf \left\{ \alpha > 0 : \int_{\mathbb{A}} M(|f(\mathbf{x})|/\alpha) d\mu \leq 1 \right\} \quad (13)$$

і називається простором Орліча.

Зауважимо, що у випадку, коли $M(t) = t^p$, $p \geq 1$, простори $L_M(\mathbb{A}, d\mu)$ збігаються з просторами $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$.

Для довільних $\varphi \in \Phi(\mathbb{A})$ та $y \in U_p^+(\mathbb{A})$ позначимо

$$e_\sigma(\varphi y)_{L_M(\mathbb{A}, d\mu)} = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \|\varphi y - \chi_{\gamma_\sigma} \varphi y\|_{L_M(\mathbb{A}, d\mu)} \quad (14)$$

і

$$e_\sigma(\varphi, p)_{L_M(\mathbb{A}, d\mu)} := \sup_{y \in U_p^+(\mathbb{A}) \cap L_M(\mathbb{A}, d\mu)} e_\sigma(\varphi y)_{L_M(\mathbb{A}, d\mu)}. \quad (15)$$

Теорема 2.4.1. *Нехай $p \in (0, \infty)$, $\varphi \in \Phi(\mathbb{A})$, а M — деяка функція Орліча така, що функція $M(t^{1/p})$ також є функцією Орліча. Тоді при будь-якому $\sigma \in (0, a)$ має місце рівність*

$$e_\sigma(\varphi, p)_{L_M(\mathbb{A}, d\mu)} = \sup_{s > n} \left(\int_0^s \bar{\varphi}^{-p}(t) dt \right)^{-\frac{1}{p}} / M^{-1}(1/(s - \sigma)), \quad (16)$$

де M^{-1} — обернена функція функції M , $\bar{\varphi}(t)$ — спадна перестановка функції $\varphi(\mathbf{x})$. При цьому точна верхня межа у правій частині (16) досягається при деякому скінченному значенні $s = s^*$. Точна верхня межа у співвідношенні (15) реалізується функцією $y^*(\mathbf{x}) = \frac{\chi_{\mathbb{E}}(\mathbf{x})}{\varphi(\mathbf{x})} \left(\int_{\mathbb{E}} \varphi^{-p}(\mathbf{t}) d\mu \right)^{-\frac{1}{p}}$, де $\mathbb{E}$ — довільна вимірна підмножина множини $\{\mathbf{x} \in \mathbb{A} : \varphi(\mathbf{x}) \geq \bar{\varphi}(s^* -)\}$ μ -міри s^* , що містить множини $\{\mathbf{x} \in \mathbb{A} : \varphi(\mathbf{x}) > \bar{\varphi}(s^* -)\}$, а $\chi_{\mathbb{E}}$ — характеристична функція множини $\mathbb{E}$.

У підрозділі 2.5 отримані результати застосовуються до знаходження апроксимативних характеристик просторів S_{Φ}^p та до наближень вимірних функцій, які задаються згортками із сумовними ядрами, цілими функціями експоненціального типу. Також у цьому підрозділі у термінах величин $e_\sigma(f)$ отримано необхідні та достатні умови належності функцій з просторів $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$ просторам $L_s(\mathbb{A}, d\mu)$, $0 < p, s < \infty$.

Розділ 3 присвячено дослідженню асимптотичної поведінки нелінійних апроксимативних характеристик класів функцій багатьох змінних $\mathcal{F}_{q,r}^\psi$ в інтегральній метриці та у просторах S^p .

Нехай $L_p := L_p(\mathbb{T}^d)$ ($1 \leq p \leq \infty$, $\mathbb{T}^d := [-\pi, \pi]^d$) – простір всіх вимірних за Лебегом на $\mathbb{R}^d$ функцій $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_d)$, 2π -періодичних по кожній змінній, зі скінченною нормою

$$\|f\|_{L_p} = \|f\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} := \begin{cases} \left((2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty, \\ \text{ess sup}_{\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d} |f(\mathbf{x})|, & p = \infty. \end{cases}$$

Покладемо $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := x_1 y_1 + \dots + x_d y_d$, $e_{\mathbf{k}} := e_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})}$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$, і для довільної функції $f \in L_1$ означимо її коефіцієнти Фур'є $\widehat{f}(\mathbf{k}) := (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x}) \bar{e}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$, де $\bar{z}$ – число, комплексно-спряжене з z .

Наслідуючи О. І. Степанця, при довільному $0 < p < \infty$ позначимо через $S^p := S^p(\mathbb{T}^d)$, простір всіх функцій $f \in L_1$, для яких

$$\|f\|_{S^p} = \|f\|_{S^p(\mathbb{T}^d)} := \|\{\widehat{f}(\mathbf{k})\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d}\|_{l_p(\mathbb{Z}^d)} = \left(\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} |\widehat{f}(\mathbf{k})|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Функції $f \in L_1$ та $g \in L_1$ вважаються еквівалентними у просторі S^p , коли $\|f - g\|_{S^p} = 0$.

Позначимо також через l_p^d , $0 < p \leq \infty$, простір всіх послідовностей $\mathbf{x} = \{x_k\}_{k=1}^d \in \mathbb{R}^d$ зі стандартною l_p -нормою (квазі-нормою)

$$|\mathbf{x}|_p := \|\mathbf{x}\|_{l_p^d} = \begin{cases} (\sum_{k=1}^d |x_k|^p)^{1/p}, & 0 < p < \infty, \\ \sup_{1 \leq k \leq d} |x_k|, & p = \infty. \end{cases}$$

Розглянемо такі функціональні класи

$$\mathcal{F}_{q,r}^\psi = \mathcal{F}_{q,r}^\psi(\mathbb{T}^d) := \left\{ f \in L_1(\mathbb{T}^d) : \|\{\widehat{f}(\mathbf{k})/\psi(|\mathbf{k}|_r)\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d}\|_{l_q(\mathbb{Z}^d)} \leq 1 \right\},$$

де $\psi = \psi(t)$, $t \geq 1$, – фіксована додатна спадна функція, $\psi(0) := \psi(1)$ і $0 < q, r \leq \infty$.

Зазначимо, що коли $\psi(t) = t^{-s}$, $s \in \mathbb{N}$ і $q = 1$, класи $\mathcal{F}_{q,\infty}^\psi$ є множинами функцій, у яких частинні похідні порядку s мають абсолютно збіжні ряди Фур'є. Апроксимативні характеристики таких класів для різних $r \in (0, \infty]$ і різних функцій ψ досліджувались у роботах Р. ДеВора та В. М. Темлякова, В. М. Темлякова, Р. С. Лі та Й. П. Лю, О. І. Степанця, В. С. Романюка та інших.

Для $f \in X$, де X – один із просторів L_p або S^p , розглянемо величини

$$\sigma_n(f)_X := \inf_{\gamma_n, c_{\mathbf{k}}} \|f - \sum_{\mathbf{k} \in \gamma_n} c_{\mathbf{k}} e_{\mathbf{k}}\|_X, \quad (17)$$

$$\sigma_n^\perp(f)_X := \inf_{\gamma_n} \|f(\cdot) - \sum_{\mathbf{k} \in \gamma_n} \widehat{f}(\mathbf{k}) e_{\mathbf{k}}\|_X \quad (18)$$

та

$$\|f - G_n(f)\|_X := \|f - \sum_{l=1}^n \widehat{f}(\mathbf{k}_l) e_{\mathbf{k}_l}\|_X. \quad (19)$$

У (19) для даної функції $f \in X$ через $\{\mathbf{k}_l\}_{l=1}^\infty = \{\mathbf{k}_l(f)\}_{l=1}^\infty$ позначається така перестановка векторів $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$, що

$$|\widehat{f}(\mathbf{k}_1)| \geq |\widehat{f}(\mathbf{k}_2)| \geq \dots \quad (20)$$

Якщо така перестановка не єдина, то через $\{\mathbf{k}_l\}_{l=1}^\infty$ позначають будь-яку з перестановок, яка задовольняє умову (20).

Величини (17) та (18) відповідно називають найкращим n -членним та найкращим n -членним ортогональним тригонометричним наближенням функції f у просторі X , а величину (19) — наближенням у просторі X функції f за допомогою ґріді апроксимант, побудованих за тригонометричною системою.

Якщо ж $\mathfrak{N} \subset X$, то покладаємо

$$\sigma_n(\mathfrak{N})_X := \sup_{f \in \mathfrak{N}} \sigma_n(f)_X \quad \text{та} \quad \sigma_n^\perp(\mathfrak{N})_X := \sup_{f \in \mathfrak{N}} \sigma_n^\perp(f)_X. \quad (21)$$

Величини (19), взагалі кажучи, залежать від вибору перестановки, яка задовольняє (20). Тому для однозначності покладаємо

$$G_n(\mathfrak{N})_X := \sup_{f \in \mathfrak{N}} \inf_{\{\mathbf{k}_l(f)\}_{l=1}^\infty} \|f(\cdot) - \sum_{l=1}^n \widehat{f}(\mathbf{k}_l(f)) e_{\mathbf{k}_l(f)}\|_X. \quad (22)$$

В (22) для довільної функції $f \in \mathfrak{N}$ розглядається інфімум по всіх перестановках, які задовольняють (20).

Як вже зазначалось, величина вигляду (17) введена у 1955 році С. Б. Стечкиним. Варто відзначити, що у 1906 році Е. Шмідт розглядав величину найкращого білінійного наближення, яка є близькою до величин $\sigma_n(f)_X$. Перші оцінки величин вигляду (17) для деяких індивідуальних функцій були отримані у роботах Р. С. Ісмагілова, В. Є. Майорова, Е. С. Белінського та ін. Дослідження величин (21) та (19) для різних функціональних класів проводились, зокрема, у роботах Е. С. Белінського, Р. ДеВора, Б. С. Кашина, А. С. Романюка, О. І. Степанця, В. М. Темлякова та багатьох інших авторів.

У дисертаційній роботі розглядаються величини (21) та (22) при $\mathfrak{N} = \mathcal{F}_{q,r}^\psi$ і встановлюється залежність швидкості прямування до нуля цих величин від вибору параметрів ψ , q та r , що визначають задані класи. Зокрема, у підрозділі 3.1 знайдено точні порядкові оцінки згаданих апроксимативних характеристик класів $\mathcal{F}_{q,r}^\psi$ у просторах S^p . Для формулювання одного з отриманих результатів позначимо через B множину всіх монотонно спадних до нуля при $t \rightarrow \infty$ функцій $\psi(t)$, $t \geq 1$, які задовольняють умову $\psi(t)/\psi(2t) \leq K$.

Твердження 3.1.1. *Нехай $d \geq 1$, $1 \leq r \leq \infty$, $0 < p, q < \infty$ і функція ψ^p належить множині B , а при $0 < p < q$, крім цього, при всіх t , більших ніж деяке число t_0 , є опуклою та задовольняє умову*

$$t|\psi'(t)|/\psi(t) \geq K_0 > \beta, \quad \psi'(t) := \psi'(t+), \quad (23)$$

де K_0 — додатна стала, $\beta = d(1/p - 1/q)$. Тоді

$$\sigma_n(\mathcal{F}_{q,r}^\psi)_{S^p} \asymp \psi(n^{\frac{1}{d}}) n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}. \quad (24)$$

Множині B , зокрема, належать функції вигляду $\psi(t) = \ln^\varepsilon(t+e)$, $\varepsilon < 0$ та $\psi(t) = t^{-\beta} \ln^\varepsilon(t+e)$, $\beta > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Проте у роботі також отримані аналогічні оцінки і у випадку, коли функція ψ спадає до нуля швидше за довільний степінь.

У підрозділі 3.2 отримано у низці важливих випадків точні порядкові оцінки згаданих вище апроксимативних характеристик класів $\mathcal{F}_{q,r}^\psi$ в інтегральній метриці.

Теорема 3.2.1. *Нехай $d \geq 1$, $1 \leq p < \infty$, $0 < q < \infty$, функція ψ належить B , а при $q > p/(p-1)$, крім цього, при всіх t , більших, ніж деяке число t_0 , є опуклою і задовольняє (23) з $\beta := d(1/2 - 1/q)$ при $1 < p \leq 2$ і $\beta := d(1 - 1/p - 1/q)$ при $2 \leq p < \infty$. Тоді*

$$\sigma_n^\perp(\mathcal{F}_{q,r}^\psi)_{L_p} \asymp G_n(\mathcal{F}_{q,r}^\psi)_{L_p} \asymp \begin{cases} \psi(n^{\frac{1}{d}}) n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}}, & 1 \leq p \leq 2, \\ \psi(n^{\frac{1}{d}}) n^{1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}}, & 2 \leq p < \infty, \end{cases} \quad (25)$$

при всіх $1 \leq p \leq 2$

$$\sigma_n(\mathcal{F}_{q,r}^\psi)_{L_p} \asymp \psi(n^{\frac{1}{d}}) n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}}, \quad (26)$$

а при всіх $2 < p < \infty$

$$\psi(n^{\frac{1}{d}}) n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} \ll \sigma_n(\mathcal{F}_{q,r}^\psi)_{L_p} \ll \psi(n^{\frac{1}{d}}) n^{1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

У випадку, коли $\psi(t) = t^{-s}$, $s \in \mathbb{N}$, та $r = \infty$, оцінку (26), а також оцінку (25) для величин $G_n(\mathcal{F}_{q,r}^\psi)_{L_p}$ отримано відповідно у роботах Р. ДеВора та В. М. Темлякова (1995) і В. М. Темлякова (1998).

При $0 < q \leq p/(p-1)$ умови теореми 3.2.1 задовольняють, наприклад, функції $\psi(t) = t^{-\beta} \ln^\varepsilon(t+e)$ для всіх $\beta > 0$ та $\varepsilon \in \mathbb{R}$ і функції $\psi(t) = \ln^\varepsilon(t+e)$ для всіх $\varepsilon < 0$. Якщо ж $1 < p/(p-1) < q$, то умови теореми 3.2.1, зокрема, задовольняють функції $\psi(t) = t^{-\beta} \ln^\varepsilon(t+e)$ при всіх $\varepsilon \in \mathbb{R}$ та $\beta > d(1/2 - 1/q)$, якщо $1 < p \leq 2$, і при всіх $\varepsilon \in \mathbb{R}$ та $\beta > d(1 - 1/p - 1/q)$, якщо $2 < p < \infty$.

У розділі 4 отримано прямі та обернені теореми наближення функцій однієї та багатьох змінних операторами Тейлора–Абеля–Пуассона. Нехай f — довільна функція з простору $L_p = L_p(\mathbb{T}^1)$, $1 \leq p \leq \infty$; $\widehat{f}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, — її коефіцієнти Фур'є. Для будь-яких $\varrho \in [0, 1)$ і $r \in \mathbb{N}$ покладемо

$$A_{\varrho,r}(f)(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda_{|k|,r}(\varrho) \widehat{f}(k) e^{ikx}, \quad (27)$$

де числа $\lambda_{k,r}(\varrho) \equiv 1$ при $k = 0, 1, \dots, r-1$ і

$$\lambda_{k,r}(\varrho) := \sum_{j=0}^{r-1} \binom{k}{j} (1-\varrho)^j \varrho^{k-j}, \quad k = r, r+1, \dots, \quad \varrho \in [0, 1). \quad (28)$$

Перетворення $A_{\varrho,r}$ можна розглядати як лінійний оператор простору L_1 у себе. Вперше вони вивчалися у роботі В. В. Савчука (2007), який у термінах цих операторів, зокрема, сформулював структурну характеристику класів Гарді–Ліпшиця H_p^r Ліра α функцій однієї змінної, голоморфних в одиничному крузі комплексної площини. Подібні перетворення також вивчалися у роботах Р. Лейса (1963), П. Л. Бутцера й Г. Суноучі (1964) та ін.

Якщо для функції $f \in L_1$ і деякого натурального n існує така функція $g \in L_1$, що $\widehat{g}(k) = 0$ при $|k| < n$ і $\widehat{g}(k) = \widehat{f}(k) |k|! / (|k| - n)!$ при $|k| \geq n$, $k \in \mathbb{Z}$, то кажуть, що у функції f існує радіальна похідна $g =: f^{[n]}$ порядку n .

У просторі L_p K -функціоналом функції f , породженим радіальною похідною порядку n , називають величину

$$K_n(\delta, f)_p := \inf \left\{ \|f - h\|_{L_p} + \delta^n \|h^{[n]}\|_{L_p} : h^{[n]} \in L_p \right\}, \quad \delta > 0.$$

Розглянемо функції $\omega(t)$, $t \in [0, 1]$, які задовольняють такі умови: **1)** $\omega(t)$ є неперервною на $[0, 1]$; **2)** $\omega(t) \uparrow$; **3)** $\omega(t) \neq 0$, $t \in (0, 1]$; **4)** $\omega(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$; а також відомі умови Зигмунда–Барі–Стечка: **(Z)** $\int_0^\delta \frac{\omega(t)}{t} dt = O(\omega(\delta))$ та **(Z_n)** $\int_\delta^1 \frac{\omega(t)}{t^{n+1}} dt = O(\omega(\delta)\delta^{-n})$, $\delta > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Наступні твердження є прямими та оберненими теоремами наближення 2π -періодичних функцій операторами $A_{\varrho, r}$ у термінах K -функціоналів функцій, породжених їх радіальними похідними.

Теорема 4.1.1. *Нехай $f \in L_p$, $1 \leq p \leq \infty$, $n, r \in \mathbb{N}$, $n \leq r$ і функція $\omega(t)$, $t \in [0, 1]$, задовольняє умови 1)–4) і (Z). Якщо*

$$K_n(\delta, f^{[r-n]})_p = O(\omega(\delta)), \quad \delta \rightarrow 0+, \quad (29)$$

то має місце співвідношення

$$\|f - A_{\varrho, r}(f)\|_{L_p} = O((1 - \varrho)^{r-n} \omega(1 - \varrho)), \quad \varrho \rightarrow 1-. \quad (30)$$

Теорема 4.1.2. *Нехай $f \in L_p$, $1 \leq p \leq \infty$, $n, r \in \mathbb{N}$, $n \leq r$ і функція $\omega(t)$, $t \in [0, 1]$, задовольняє умови 1)–4), (Z) та (Z_n). Якщо виконується співвідношення (30), то функція $f^{[r-n]} \in L_p$ і також виконується співвідношення (29).*

Покладемо $\omega(t) = t^\alpha$, $\alpha > 0$, і $n = 1$. Тоді множина всіх функцій $f \in L_p$, які задовольняють умову $K_1(\delta, f)_p = O(\delta^\alpha)$, $\delta \rightarrow 0+$, $\alpha \in (0, 1)$, збігається з класом Ліпшиця $\text{Lip}(\alpha, L_p)$ всіх функцій $f \in L_p$ для яких $\omega(f, \delta)_p := \sup_{|h| \leq \delta} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_p = O(\delta^\alpha)$, $\delta \rightarrow 0+$.

Наслідок 4.1.3. *Нехай $f \in L_p$, $1 \leq p \leq \infty$, $r \in \mathbb{N}$ і $0 < \alpha < 1$. Наступні співвідношення еквівалентні:*

- 1) $\|f - A_{\varrho, r}(f)\|_p = O((1 - \varrho)^{r-1+\alpha}), \quad \varrho \rightarrow 1-;$
- 2) $f^{[r-1]} \in \text{Lip}(\alpha, L_p)$.

У підрозділі 4.2 у просторах S^p функцій багатьох змінних встановлено прямі та обернені теореми наближення операторами Тейлора–Абеля–Пуассона $A_{\varrho, r}^\Delta$ та операторами $P_{\varrho, s}^\Delta$, що породжують відповідні лінійні методи підсумовування по трикутних областях кратних рядів Фур'є. У термінах похибок наближення цими операторами отримано конструктивну характеристику класів функцій, узагальнені похідні яких належать множинам $S^p H_\omega$.

У розділі 5 досліджуються задачі теорії наближень у лінійних дискретних просторах. Зокрема, у підрозділах 5.1 та 5.2 у дискретних просторах Орліча l_M та просторах l_p зі змінним показником підсумовування знайдено відповідно точні значення відповідно величин найкращих n -членних наближень та найкращих наближень множин образів діагональних операторів.

Нехай $M(t)$, $t \geq 0$, — довільна функція Орліча. Дискретним простором Орліча l_M , який визначається функцією $M(t)$, називають лінійний простір всіх послідовностей $x = \{x_k\}_{k=1}^\infty$, $x_k \in \mathbb{R}$, таких, що $\sum_{k=1}^\infty M(|x_k|) < \infty$. Наділений нормою Люксембурга $\|x\|_{l_M} := \inf \left\{ \alpha > 0 : \sum_{k=1}^\infty M(|x_k|/\alpha) \leq 1 \right\}$ цей простір є банаховим.

Нехай, далі, $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — довільна послідовність додатних чисел, які задовольняють умову

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0, \quad (31)$$

і нехай

$$T : x = \{x_k\}_{k=1}^\infty \rightarrow Tx = \{\lambda_k x_k\}_{k=1}^\infty \quad (32)$$

— діагональний оператор на просторі послідовностей дійсних чисел.

Наслідуючи С.Б. Стечкіна, для довільної послідовності $x \in l_M$ розглянемо величину $\sigma_n(x)_{l_M}$ її найкращого n -членного наближення

$$\sigma_n(x)_{l_M} := \inf_{a_i, \gamma_n} \|x - P_{\gamma_n}\|_{l_M} = \inf_{a_i, \gamma_n} \left\| x - \sum_{i \in \gamma_n} a_i e_i \right\|_{l_M},$$

де γ_n — довільні набори із n натуральних чисел, a_i — дійсні числа.

Наступне твердження дає точні значення величин

$$\sigma_n(T : l_q \rightarrow l_M) := \sup_{x \in B l_q} \sigma_n(Tx)_{l_M} \quad (33)$$

найкращих n -членних наближень у просторах l_M множини $T(B l_q)$ образів всіх елементів одиничної кулі $B l_q$ простору l_q під дією оператора T .

Теорема 5.1.1. *Нехай $0 < q < \infty$ — довільне додатне число і $M(t)$ — функція Орліча така, що функція $M(t^{1/q})$ також є функцією Орліча. Нехай також $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — довільна незростаюча послідовність додатних чисел, яка задовольняє умову (31). Тоді для довільного $n \in \mathbb{N}$ має місце рівність*

$$\sigma_n(T : l_q \rightarrow l_M) = \sup_{s > n} \left(\sum_{k=1}^s \lambda_k^{-q} \right)^{-\frac{1}{q}} / M^{-1} \left(1/(s-n) \right), \quad (34)$$

де M^{-1} — функція, обернена до функції M . Точна верхня межа у правій частині (34) досягається при деякому скінченному значенні $s = s^*$. Точна верхня межа у правій частині (33) реалізується послідовністю $x^* = \{x_k^*\}_{k=1}^\infty$, у якій $x_k^* = (\lambda_k^q \sum_{k=1}^{s^*} \lambda_k^{-q})^{-\frac{1}{q}}$ при $k = 1, 2, \dots, s^*$ і $x_k^* = 0$ при $k > s^*$.

Зазначимо, що за умов теореми величини $\sigma_n(T : l_q \rightarrow l_M)$ мають зміст. Зазначимо також, що у випадку, коли $M(t) = t^p$, $p > 0$, твердження теореми 5.1.1 отримано О.І. Степанцем (2001). У випадку скінченно мірних просторів l_p^d при всіх $0 < p, q \leq \infty$ точні значення величин $\sigma_n(T : l_q^d \rightarrow l_p^d)$ були знайдені Ф. Гао (2010).

Нехай тепер $\mathbf{p} = \{p_k\}_{k=1}^\infty$ — довільна послідовність додатних чисел, що задовольняють умову $1 \leq p_k \leq K$, $k = 1, 2, \dots$, де K — додатна стала. Через $l_{\mathbf{p}}$ позначимо простір всіх послідовностей $\mathbf{x} = \{x_k\}_{k=1}^\infty$ дійсних чисел зі скінченою нормою Люксембурга $\|\mathbf{x}\|_{l_{\mathbf{p}}} := \inf \left\{ \alpha > 0 : \sum_{k=1}^\infty |x_k|/\alpha^{p_k} \leq 1 \right\}$.

Нехай $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — послідовність додатних чисел, що задовольняють (31) і T — діагональний оператор, визначений в (32). Для довільного набору γ_n із n натуральних чисел розглянемо величину

$$E_{\gamma_n}(T : l_{\mathbf{q}} \rightarrow l_{\mathbf{p}}) := \sup_{x \in B l_{\mathbf{q}}} E_{\gamma_n}(Tx)_{l_{\mathbf{p}}} = \sup_{x \in B l_{\mathbf{q}}} \inf_{a_i} \|Tx - P_{\gamma_n}\|_{l_{\mathbf{p}}}$$

найкращого наближення у просторі $l_{\mathbf{p}}$ за допомогою всіх можливих n -членних поліномів $P_{\gamma_n} = \sum_{i \in \gamma_n} a_i e_i$, що відповідають набору γ_n множини $T(B l_{\mathbf{q}})$ образів елементів одиничної кулі простору $l_{\mathbf{q}}$, a_i — довільні дійсні числа.

Теорема 5.2.1. *Нехай $\mathbf{p} = \{p_k\}_{k=1}^\infty$ і $\mathbf{q} = \{q_k\}_{k=1}^\infty$ — довільні послідовності додатних чисел таких, що $1 \leq p_k \leq p^* < q^* < q_k \leq K$, $k \in \mathbb{N}$; $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — будь-яка послідовність додатних чисел, що задовольняють умову $\|\lambda\|_{l_{\frac{pq}{q-p}}} < \infty$. Якщо для набору γ_n із $n \in \mathbb{N}$ різних натуральних чисел $\max_{i \notin \gamma_n} \{(q_i - p_i)/q_i\} + \max_{i \in \gamma_n} \{p_i/q_i\} = 1$, то*

$$E_{\gamma_n}(T : l_{\mathbf{q}} \rightarrow l_{\mathbf{p}}) = \|\tilde{\lambda}\|_{l_{\frac{pq}{q-p}}}, \quad (35)$$

де $\tilde{\lambda} = \{\tilde{\lambda}_k\}_{k=1}^\infty$ така, що $\tilde{\lambda}_k = \lambda_k$ при $k \notin \gamma_n$ і $\tilde{\lambda}_k = 0$ при $k \in \gamma_n$.

Наслідок 5.2.1. *Нехай $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — незростаюча послідовність додатних чисел, що задовольняють умову $\|\lambda\|_{l_{\frac{pq}{q-p}}} < \infty$. Нехай, далі, $\mathbf{p} = \{p_k\}_{k=1}^\infty$ і $\mathbf{q} = \{q_k\}_{k=1}^\infty$ — довільні послідовності додатних чисел таких, що $1 \leq p_k \leq p^* < q^* < q_k \leq K$, $k \in \mathbb{N}$ і виконується рівність $\max_{i \in \mathbb{N}} \{(q_i - p_i)/q_i\} + \max_{i \in \mathbb{N}} \{p_i/q_i\} = 1$. Тоді для довільного $n \in \mathbb{N}$*

$$\mathcal{D}_n(T : l_{\mathbf{q}} \rightarrow l_{\mathbf{p}}) := \inf_{\gamma_n} E_{\gamma_n}(T : l_{\mathbf{q}} \rightarrow l_{\mathbf{p}}) = \|\lambda^*\|_{l_{\frac{pq}{q-p}}}, \quad (36)$$

де $\lambda^* = \{\lambda_k^*\}_{k=1}^\infty$ така, що $\lambda_k^* = 0$ при $k \leq n$ і $\lambda_k^* = \lambda_k$ при $k > n$.

Зазначимо, що умова $\|\lambda\|_{l_{\frac{pq}{q-p}}} < \infty$ забезпечує вкладення $T(Bl_q) \subset l_p$. Умова $\max_{i \in \mathbb{N}} \{(q_i - p_i)/q_i\} + \max_{i \in \mathbb{N}} \{p_i/q_i\} = 1$ виконується для послідовностей $\mathbf{p}$ і $\mathbf{q}$ таких, що $q_i = K_0 p_i$, де K_0 – додатна стала.

Для просторів l_p твердження, аналогічні теоремі 5.2.1 та наслідку 5.2.1, отримано О.І. Степанцем (2006).

У підрозділі 5.3 у просторах S_φ^p означено поняття насичення лінійних методів підсумовування рядів Фур'є, які задаються довільними послідовностями функцій, визначених на деякій множині комплексних чисел. Показано інваріантність цього поняття відносно просторів S_φ^p та знайдено достатні умови насичення. У підрозділі 5.4 також отримано точні порядкові оцінки нелінійних апроксимативних характеристик цих просторів.

В останніх підрозділах 5.6 та 5.7 розділу 5 отримано нові нерівності типу Чебишова. Ці результати не тільки мають допоміжне значення у роботі, але й не позбавлені самостійного інтересу. Одним із отриманих у цьому напрямку результатів є таке твердження.

Теорема 5.7.1. *Нехай $a = \{a_k\}_{k=1}^n$, $b = \{b_k\}_{k=1}^n$ та $p = \{p_k\}_{k=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$ – довільні послідовності невід'ємних чисел таких, що $p_k > 0$ і $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$. Тоді для будь-якої опуклої функції $M: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ такої, що $M(0) = 0$,*

$$\sum_{k=1}^n p_k b_k M(a_k) \leq \max_{s \in [1, n]} \left\{ M \left(\frac{\sum_{k=1}^n p_k a_k}{\sum_{k=1}^s p_k} \right) \sum_{k=1}^s p_k b_k \right\},$$

а для будь-якої вгнутої функції $M: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ такої, що $M(0) = 0$,

$$\sum_{k=1}^n p_k b_k M(a_k) \geq \min_{s \in [1, n]} \left\{ M \left(\frac{\sum_{k=1}^n p_k a_k}{\sum_{k=1}^s p_k} \right) \sum_{k=1}^s p_k b_k \right\}.$$

Отримані в роботі нерівності у певних частинних випадках збігаються з відомими нерівностями Чебишова для монотонних функцій, а знайдені умови для їх виконання є слабкішими, ніж класичні умови монотонності.

У розділі 6 вивчаються асимптотичні властивості опуклих функцій та їх застосування. Зокрема, у його підрозділах 6.6 та 6.7 знайдено точні порядкові оцінки деяких величин, у термінах яких, зокрема, виражаються найкращі n -членні наближення класів функцій багатьох та їх інтегральні аналоги.

У підрозділі 6.5 описується множина $\mathcal{D}^\infty$ нескінченно диференційовних періодичних функцій у термінах узагальнених $\bar{\psi}$ -похідних, які означаються парою $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ послідовностей ψ_1 та ψ_2 . У дисертаційній роботі, зокрема, показано, що кожна функція f з множини $\mathcal{D}^\infty$ має принаймні одну узагальнену $\bar{\psi}$ -похідну, параметри ψ_1 та ψ_2 якої спадають швидше за довільну степеневу функцію, і в той же час для довільної функції $f \in \mathcal{D}^\infty$, відмінної від тригонометричного полінома, знайдеться пара $\bar{\psi}$, параметри ψ_1 та ψ_2 якої мають таку ж швидкість спадання і для якої $\bar{\psi}$ -похідна не існує. Встановлено нові критерії належності 2π -періодичних дійснозначних на дійсній осі функцій множинам аналітичних та цілих функцій. Описано також зв'язок між класами $(\psi, \bar{\beta})$ -диференційовних функцій і відомими класами Жевре $\mathcal{J}_\alpha$. У термінах таких похідних встановлено критерій належності періодичних функцій класам $\mathcal{J}_\alpha$.

Висновки

Знайдено явні формули для обчислення точних верхніх меж величин $e_\sigma(f)$ найкращих наближень інтегралів за допомогою інтегралів скінченного рангу на класах функцій, які зображуються у вигляді добутків деякої фіксованої невід'ємної функції та функцій з одиничної кулі $U_p(\mathbb{A})$ простору $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$ при всіх $p > 0$. Отримано точні порядкові оцінки цих величин при необмеженому зростанні їх рангу. Для даних класів функцій знайдено точні значення та точні порядкові оцінки інтегральних аналогів величин найкращих наближень функцій поліномами заданого порядку та тригонометричного поперечника.

У термінах величин $e_\sigma(f)$ отримано необхідні та достатні умови належності функцій з просторів $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$ просторам $L_s(\mathbb{A}, d\mu)$, $0 < p, s < \infty$.

Отримані результати застосовано до знаходження апроксимативних характеристик просторів $S_{\mathbb{F}}^p$ та до наближень вимірних функцій, які задаються згортками із сумовними ядрами, цілими функціями експоненціального типу.

Знайдено явні формули для обчислення точних верхніх меж аналогів величин найкращих n -членних наближень у просторах Орліча $L_M(\mathbb{A}, d\mu)$ на згаданих вище класах функцій для всіх $p > 0$ та функцій Орліча $M(t)$ таких, що функція $M(t^{1/p})$ також є функцією Орліча.

Знайдено точні порядкові оцінки низки важливих нелінійних апроксимативних характеристик (таких, як найкраще n -членне три-

гонометричне наближення, найкраще n -членне ортогональне тригонометричне наближення, наближення n -членними гріди апроксимантами, базисний поперечник) класів функцій багатьох змінних $\mathcal{F}_{q,r}^\psi$ в інтегральній метриці та у просторах S^p .

Отримано прямі та обернені теореми наближення 2π -періодичних функцій операторами Тейлора–Абея–Пуассона в інтегральній метриці. У термінах наближень цими операторами одержано конструктивну характеристику класів 2π -періодичних функцій, K -функціонали радіальних похідних яких не перевищують деякої мажоранти.

У просторах S^p функцій багатьох змінних встановлено прямі та обернені теореми наближення операторами Тейлора–Абея–Пуассона $A_{\varrho,r}^\Delta$ та операторами $P_{\varrho,s}^\Delta$, що породжують відповідні лінійні методи підсумовування по трикутних областях кратних рядів Фур'є. У термінах похибок наближення цими операторами отримано конструктивну характеристику класів функцій, узагальнені похідні яких належать множинам $S^p H_\omega$.

У просторах l_p зі змінним показником підсумовування та дискретних просторах Орліча l_M знайдено точні значення відповідно величин найкращих наближень та найкращих n -членних наближень множин образів одиничних куль цих просторів під дією діагональних операторів.

У просторах S_φ^p означено поняття насичення лінійних методів підсумовування рядів Фур'є, які задаються довільними послідовностями функцій, визначених на деякій множині комплексних чисел. Показано інваріантність цього поняття відносно просторів S_φ^p та знайдено достатні умови насичення. Отримано точні порядкові оцінки важливих нелінійних апроксимативних характеристик цих просторів.

Отримано нові нерівності типу Чебишова.

Описано множину $\mathcal{D}^\infty$ нескінченно диференційовних періодичних функцій у термінах узагальнених $\bar{\psi}$ -похідних, які означаються парою $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ послідовностей ψ_1 та ψ_2 . Зокрема, показано, що кожна функція f з множини $\mathcal{D}^\infty$ має принаймні одну похідну, параметри ψ_1 та ψ_2 якої спадають швидше за довільну степеневу функцію, і в той же час для довільної функції $f \in \mathcal{D}^\infty$, відмінної від тригонометричного полінома, знайдеться пара $\bar{\psi}$, параметри ψ_1 та ψ_2 якої мають таку ж швидкість спадання і для якої $\bar{\psi}$ -похідна не існує. Встановлено нові критерії належності 2π -періодичних дійснозначних на дійсній осі функцій множинам аналітичних та цілих функцій.

Описано зв'язок між класами $(\psi, \bar{\beta})$ -диференційовних функцій і відомими класами Жевре $\mathcal{J}_\alpha$. У термінах таких похідних встановлено критерій належності періодичних функцій класам $\mathcal{J}_\alpha$.

Знайдено точні порядкові оцінки деяких важливих величин, в термінах яких, зокрема, виражаються найкращі n -членні наближення деяких класів функцій багатьох та їх інтегральні аналоги.

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. Степанець О.І. Про деякі властивості опуклих функцій / О.І. Степанець, А.Л. Шидліч // Укр. мат. журн. — 2007. — Т. 59, № 7. — С. 920–938.
2. Степанець О.І. Про один критерій для опуклих функцій / О.І. Степанець, А.Л. Шидліч // Доповіді НАН України. — 2007. — № 8. — С. 31–36.
3. Степанець О.І. Про деякі нові критерії нескінченної диференційовності періодичних функцій / О.І. Степанець, А.С. Сердюк, А.Л. Шидліч // Укр. мат. журн. — 2007. — Т. 59, №10. — С. 1399–1409.
4. Степанець А.И. О порядках наилучших приближений интегралов функций при помощи интегралов ранга σ / А.И. Степанець, А.Л. Шидлич // Нелін. колив. — 2007. — Т. 10, № 4. — С. 528–559.
5. Савчук В.В. Наближення функцій багатьох змінних лінійними методами в просторах S^p / В.В. Савчук, А.Л. Шидліч // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2007. — Т. 4, № 1. — С. 302–317.
6. Шидліч А.Л. Насичення лінійних методів підсумовування рядів Фур'є в просторах S_φ^p / А.Л. Шидліч // Укр. мат. журн. — 2008. — Т. 60, № 6. — С. 815–828.
7. Степанець А.И. Классификация бесконечно дифференцируемых периодических функций / А.И. Степанець, А.С. Сердюк, А.Л. Шидлич // Укр. мат. журн. — 2008. — Т. 60, №12. — С. 1686–1708.
8. Шидліч А.Л. Апроксимативні характеристики просторів S_Φ^p / А.Л. Шидліч // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Інституту математики НАН України. — 2008. — Т. 5, №1. — С. 404–430.
9. Степанець А.И. О связи классов $(\psi, \bar{\beta})$ -дифференцируемых функций с классами Жевре / А.И. Степанець, А.С. Сердюк, А.Л. Шидлич // Укр. мат. журн. — 2009. — Т. 61, №1. — С. 140–145.

10. Шидліч А. Л. Порядкові рівності для деяких функціоналів та їх застосування до оцінок найкращих n -членних наближень і поперечників / А. Л. Шидліч // Укр. мат. журн. — 2009. — Т. 61, № 10. — С. 1403–1423.

11. Stepanets A. I. Best approximations of integrals by integrals of finite rank / A. I. Stepanets, A. L. Shidlich // Journal of Approximation Theory. — 2010. — V. 162, № 2. — P. 323–348.

12. Степанец А. И. Экстремальные задачи для интегралов от неотрицательных функций / А. И. Степанец, А. Л. Шидлич // Изв. РАН. Сер. матем. — 2010. — Т. 74, № 3. — С. 169–224.

13. Shidlich A. L. On necessary and sufficient for validity of some Chebyshev-Type inequalities / A. L. Shidlich // Journal of Mathematical Inequalities. — 2011. — V. 5, № 1. — P. 71–85.

14. Шидліч А. Л. Порядкові оцінки найкращих n -членних ортогональних тригонометричних наближень класів функцій $\mathcal{F}_{q,\infty}^\psi$ в просторах $L_p(\mathbb{T}^d)$ / А. Л. Шидліч // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2011. — Т. 8, № 1. — С. 302–317.

15. Шидліч А. Л. Порядкові оцінки для деяких апроксимаційних характеристик / А. Л. Шидліч // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — Т. 10, № 1. — С. 304–337.

16. Шидліч А. Л. Деякі екстремальні задачі в просторах Орліча / А. Л. Шидліч, С. О. Чайченко // Матем. студії. — 2014. — Т. 42, № 1. — С. 21–32.

17. Savchuk V. V. Approximation of functions of several variables by linear methods in the space S^p / V. V. Savchuk, A. L. Shidlich // Acta Sci. Math. (Szeged). — 2014. — V. 80, № 3–4. — P. 477–489.

18. Шидліч А. Л. Апроксимаційні характеристики діагональних операторів в просторах l_p / А. Л. Шидліч, С. О. Чайченко // Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — Т. 11, № 2. — С. 399–412.

19. Шидліч А. Л. Порядкові оцінки функціоналів, в термінах яких виражаються найкращі n -членні наближення класів $\mathcal{F}_{q,r}^\psi$ / А. Л. Шидліч // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — Т. 11, № 3. — С. 287–314.

20. Shidlich A. L. On some inequalities of Chebyshev type. / A. L. Shidlich, S. O. Chaichenko // Math. Inequal. Appl. — 2015. — V. 18, № 4. — P. 1313–1320.

21. Shidlich A. L. Approximative properties of diagonal operators in Orlicz spaces / A. L. Shidlich, S. O. Chaichenko // Numer. Funct. Anal. Optim. — 2015. — V. 36, №10. — P. 1339–1352.

22. Prestin J. Approximation of 2π -periodic functions by Taylor–Abel–Poisson operators in the integral metric / J. Prestin, V. V. Savchuk, A. L. Shidlich // Доповіді НАН України. — 2017. — №1. — С. 17–20.

23. Шидлич А. Л. Об одной экстремальной задаче для интегралов / Шидлич А. Л. // Международная конференция “Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ”, посвященная столетию академика С. М. Никольского (Москва, Россия, 23–29 мая 2005 года): Тезисы докладов. — Москва: Матем. ин-т им. В. А. Стеклова РАН, 2005. — С. 245.

24. Степанець О. І. Про одну екстремальну задачу для інтегралів від невід’ємних функцій / О. І. Степанець, А. Л. Шидлич // Міжнародна наукова конференція “Математичний аналіз і диференціальні рівняння та їх застосування” (Ужгород, 18–23 вересня 2006 року): Тези доповідей. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2006. — С. 108.

25. Шидлич А. Л. Наилучшие приближения интегралов интегралами конечного ранга / А. И. Степанец, А. Л. Шидлич // Международная научная конференция “Современные проблемы математики, механики, информатики” (Тула, Россия, 19–23 ноября 2007 года): Тезисы докладов. — Тула: ТулГУ, 2007. — С. 85–86.

26. Stepanets A. I. On extremal problems for integral of nonnegative functions / A. I. Stepanets, A. L. Shidlich // International conference on the occasion of the 150th birthday of A. M. Lyapunov (Kharkiv, June 24–30, 2007): Abstracts. — Kharkiv, 2007. — P. 160–161.

27. Шидлич А. Л. Про порядки найкращих n -членних наближень в просторах S_φ^p / А. Л. Шидлич // Міжнародна наукова конференція “Боголюбовські читання-2008” з нагоди 70-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка (Мелітополь, 16–21 червня 2008 року): Тези доповідей. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2008. — С. 126.

28. Шидлич А. Л. Порядковые оценки наилучших n -членных приближений в пространствах S_φ^p / А. Л. Шидлич // Международная научная конференция “Современные проблемы математики, механики, информатики и их приложений”, посвященная 70-летию ректора МГУ академика В. А. Садовниченко (Москва, Россия, 30 марта–2 апреля 2009 года): Тезисы докладов. — Москва: МГУ, 2009. — С. 100.

29. Шидлич А. Л. Про один аналог нерівності Чебишева для монотонних функцій / А. Л. Шидлич // Міжнародна наукова конфе-

ренція “Функціональні методи в теорії наближень і теорії операторів ІІ”, присвячена пам’яті В. К. Дзядика (1919–1998) (Волинь, 22–26 серпня 2009 року): Тези доповідей. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2009. — С. 88.

30. Шидліч А. Л. Порядкові оцінки найкращих n -членних наближень класів функцій багатьох змінних в просторах S^p / А. Л. Шидліч // Міжнародна наукова конференція “Український математичний конгрес-2009” до 100-річчя від дня народження Миколи М. Боголюбова (Київ, 27–29 серпня 2009 року): Тези доповідей. — <http://www.imath.kiev.ua/~congress2009/Abstracts/Shidlich.pdf>

31. Шидліч А. Л. Об одном аналоге неравенства Чебышева для монотонных функций / А. Л. Шидлич // Міжнародна наукова конференція “Теорія наближень і її застосування”, присвячена пам’яті М. П. Корнейчука (1920-2003) (Дніпропетровськ, 14–17 червня 2010 року): Тези доповідей. — Дніпропетровськ, 2010. — С. 99.

32. Шидліч А. Л. Порядкові оцінки найкращих n -членних наближень класів функцій багатьох змінних в просторах S^p / А. Л. Шидліч // Міжнародна конференція з сучасного аналізу (Донецьк, 20-23 червня 2011 року): Тези доповідей. — Донецьк, 2011. — С. 117.

33. Шидліч А. Л. Порядкові оцінки наближень “гріди” апроксимантами класів функцій $\mathcal{F}_{q,\infty}^\psi$ в просторах $L_p(\mathbb{T}^d)$ / А. Л. Шидліч // Міжнародна конференція “Теорія наближення функцій та її застосування”, присвячена 70-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця (1942-2007) (Кам’янець-Подільський, 28 травня–3 червня 2012 року): Тези доповідей. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2012. — С. 110.

34. Шидліч А. Л. Порядкові оцінки найкращих n -членних ортогональних тригонометричних наближень деяких класів функцій багатьох змінних / А. Л. Шидліч // Міжнародна наукова конференція “Крайові задачі, теорія функцій та їх застосування” з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка (Слов’янськ, 12–14 червня 2013 року): Тези доповідей. — Слов’янськ, 2013. — С. 47.

35. Шидліч А. Л. Апроксимативні характеристики деяких класів функцій багатьох змінних / А. Л. Шидліч // Міжнародна наукова конференція “Боголюбовські читання DIF-2013” з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка (Севастополь, 23–30 червня 2013 року): Тези доповідей. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2013. — С. 283.

36. Шидліч А. Л. Апроксимативні характеристики деяких класів функцій багатьох змінних / А. Л. Шидліч // Міжнародна наукова

конференція “Complex analysis and related topics” (Львів, 23-28 вересня 2013 року): Тези доповідей. — Львів, 2013. — С. 110.

37. Савчук В. В. Наближення функцій багатьох змінних лінійними методами в просторах S^p / В. В. Савчук, А. Л. Шидліч // Міжнародна наукова конференція “Complex analysis and related topics” (Львів, 23-28 вересня 2013 року): Тези доповідей. — Львів, 2013. — С. 108–109.

38. Шидліч А. Л. Апроксимативні характеристики діагональних операторів в просторах Орліча / А. Л. Шидліч, С. О. Чайченко // IV Міжнародна ганська конференція (Чернівці, 30 червня–5 липня 2014 року): Тези доповідей. — Чернівці, 2014. — С. 216–217.

39. Shidlich A. L. Approximative characteristics of diagonal operators in Orlicz sequence spaces / A. L. Shidlich, S. O. Chaichenko // Mecklenburg Workshop “Approximation Methods and Function Spaces”, dedicated to the 60th birthday of Prof. W. Sickel (Hasenwinkel, March 16-20, 2015): Abstracts. — Hasenwinkel, 2015. — P. 17.

40. Shidlich A. L. Some extremal problems in Orlicz spaces / A. L. Shidlich, S. O. Chaichenko // Third Conference “Mathematics for Life Sciences” (Rivne, September 15–19, 2015): Abstracts. — Kyiv, 2015. — P. 40–41.

41. Шидліч А. Л. Нелінійні наближення класів $\mathcal{F}_{q,r}^\psi$ функцій багатьох змінних в інтегральних метриках / А. Л. Шидліч // Міжнародна математична конференція “Теорія наближень і її застосування”, з нагоди 75-річчя В. П. Моторного (Дніпропетровськ, 8–11 жовтня 2015 року): Тези доповідей. — Дніпропетровськ, 2015. — С. 93.

42. Shidlich A. L. Nonlinear approximation of the classes $\mathcal{F}_{q,r}^\psi$ of functions of several variables in L_p / A. L. Shidlich // AMMODIT and final EUMLS Workshop “Mathematics for Life Sciences” (Hasenwinkel, March 07-11, 2016): Abstracts. — Hasenwinkel, 2015. — P. 29–30.

43. Shidlich A. L. Direct and inverse approximation theorems of 2π -periodic functions by Taylor-Abel-Poisson means / A. L. Shidlich // Міжнародна математична конференція “Complex analysis and related topics” (Львів, 30 травня – 4 червня 2016 року): Тези доповідей. — Львів, 2016. — С. 84.

Анотації

Шидліч А. Л. Екстремальні задачі теорії наближень у функціональних просторах. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – "Математичний аналіз" (111 – Математика). – Інститут математики НАН України, Київ, 2017.

Роботу присвячено дослідженню екстремальних задач теорії наближень у функціональних просторах. У ній знайдено явні формули для обчислення точних верхніх меж величин $e_\sigma(f)$ найкращих наближень інтегралів за допомогою інтегралів скінченного рангу на класах функцій, які зображуються у вигляді добутків деякої фіксованої невід'ємної функції та функцій з одиничної кулі $U_p(\mathbb{A})$ простору $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$ при всіх $p > 0$. Отримано точні порядкові оцінки цих величин при необмеженому зростанні їх рангу. Для даних класів функцій знайдено точні значення та точні порядкові оцінки інтегральних аналогів величин найкращих наближень функцій поліномами заданого порядку та тригонометричного поперечника. Знайдено явні формули для обчислення точних верхніх меж аналогів величин найкращих n -членних наближень в просторах Орліча $L_M(\mathbb{A}, d\mu)$ на згаданих вище класах функцій.

У термінах величин $e_\sigma(f)$ отримано необхідні та достатні умови належності функцій з просторів $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$ просторам $L_s(\mathbb{A}, d\mu)$, $0 < p, s < \infty$. Отримані результати застосовано до знаходження апроксимативних характеристик просторів S_F^p та до наближень вимірних функцій, які задаються згортками із умовними ядрами, цілими функціями експоненціального типу.

Знайдено точні порядкові оцінки низки важливих нелінійних апроксимативних характеристик (таких, як найкраще n -членне тригонометричне наближення, найкраще n -членне ортогональне тригонометричне наближення, наближення n -членними гріди апроксимантами) класів функцій багатьох змінних $\mathcal{F}_{q,r}^\psi$ в інтегральній метриці та у просторах S^p .

Отримано прямі та обернені теореми наближення функцій однієї та багатьох змінних операторами Тейлора–Абеля–Пуассона.

У просторах l_p зі змінним показником підсумовування та дискретних просторах Орліча l_M знайдено точні значення відповідно величин найкращих наближень та найкращих n -членних наближень множин образів діагональних операторів.

У просторах S_φ^p означено поняття насичення лінійних методів підсумовування рядів Фур'є, які задаються довільними послідовностями функцій, визначених на деякій множині комплексних чисел. Показано інваріантність цього поняття відносно просторів S_φ^p та

знайдено достатні умови насичення. Отримано точні порядкові оцінки важливих нелінійних апроксимативних характеристик цих просторів.

Отримано нові нерівності типу Чебишова.

Описано множину $\mathcal{D}^\infty$ нескінченно диференційовних періодичних функцій у термінах узагальнених ψ -похідних. Встановлено нові критерії належності 2π -періодичних дійснозначних на дійсній осі функцій множинам аналітичних та цілих функцій. Описано зв'язок між класами (ψ, β) -диференційовних функцій і відомими класами Жевре $\mathcal{J}_\alpha$. У термінах таких похідних встановлено критерій належності періодичних функцій класам $\mathcal{J}_\alpha$.

Знайдено точні порядкові оцінки деяких важливих величин, у термінах яких, зокрема, виражаються найкращі n -членні наближення деяких класів функцій багатьох змінних та їх інтегральні аналоги.

Ключові слова: найкраще n -членне наближення; найкраще наближення інтеграла за допомогою інтегралів скінченного рангу; прямі та обернені теореми; оператори Тейлора–Абеля–Пуассона; нерівності Чебишова; множини нескінченно диференційовних, аналітичних та цілих періодичних функцій, класи Жевре.

Шидлич А. Л. Экстремальные задачи теории приближений в функциональных пространствах. – Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 – "математический анализ" (111 – Математика). – Институт математики НАН Украины, Киев, 2017.

Работа посвящена исследованию экстремальных задач теории приближения в функциональных пространствах. В ней найдены явные формулы для вычисления точных верхних граней величин $e_\sigma(f)$ наилучших приближений интегралов посредством интегралов конечного ранга на классах функций, представимых в виде произведений некоторой фиксированной неотрицательной функции и функций из единичного шара $U_p(\mathbb{A})$ пространства $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$ при всех $p > 0$. Получены точные порядковые оценки этих величин при неограниченном возрастании их ранга. Для данных классов функций найдены точные значения и точные порядковые оценки интегральных аналогов наилучших приближений функций полиномами заданного порядка и тригонометрического поперечника. Найдены явные формулы для вычисления точных верхних граней аналогов наилучших n -членных

приближений в пространствах Орлича $L_M(\mathbb{A}, d\mu)$ на указанных выше классах функций.

В терминах величин $e_\sigma(f)$ сформулирован критерий принадлежности функций из пространств $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$ пространствам $L_s(\mathbb{A}, d\mu)$, $0 < p, s < \infty$. Рассмотрены приложения полученных результатов к нахождению аппроксимативных характеристик пространств S_Φ^p и к приближению измеримых функций, задающихся свертками с суммируемыми ядрами, целыми функциями экспоненциального типа.

Найдены точные порядковые оценки ряда важных нелинейных аппроксимативных характеристик (таких, как наилучшее n -членное тригонометрическое приближение, наилучшее n -членное ортогональное тригонометрическое приближение, приближение n -членными гриди аппроксимантами) классов функций многих переменных $\mathcal{F}_{q,r}^\psi$ в интегральной метрике и в пространствах S^p .

Получены прямые и обратные теоремы приближения функций одной и многих переменных операторами Тейлора–Абея–Пуассона.

В пространствах l_p с переменным показателем суммирования и в дискретных пространствах Орлича l_M найдены точные значения соответственно наилучших приближений и наилучших n -членных приближений множеств образов диагональных операторов.

В пространствах S_φ^p определено понятие насыщения линейных методов суммирования рядов Фурье, которые задаются последовательностями функций, определенных на некотором множестве комплексных чисел. Показана инвариантность этого понятия относительно пространств S_φ^p и найдены достаточные условия насыщения. Получены точные порядковые оценки нелинейных аппроксимативных характеристик этих пространств.

Получены новые неравенства типа Чебышева.

Описано множество бесконечно дифференцируемых 2π -периодических функций в терминах обобщенных ψ -производных. Установлены новые критерии принадлежности 2π -периодических действительнозначных на вещественной оси функций множествам аналитических на оси и целых функций. Описана связь между классами (ψ, β) -дифференцируемых функций и классами Жевре $\mathcal{J}_\alpha$. В терминах таких производных установлен критерий принадлежности периодических функций классам $\mathcal{J}_\alpha$.

Найдены точные порядковые оценки некоторых важных величин, в терминах которых, в частности, выражаются наилучшие n -членные приближения классов функций многих переменных и их интегральные аналоги.

Ключевые слова: наилучшее n -членное приближение; наилучшее приближение интеграла посредством интегралов конечно-го ранга; прямые и обратные теоремы; операторы Тейлора–Абеля–Пуассона; неравенства Чебышева; множества бесконечно дифференцируемых, аналитических и целых периодических функций, классы Жевре.

Shidlich A. L. Extremal Problems of Approximation Theory in Functional Spaces. — The Manuscript.

Thesis for a Doctor Degree in Physical and Mathematical Sciences by Speciality 01.01.01. — Mathematical Analysis (111 — Mathematics). — Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2017.

The thesis is devoted to the investigation of the extremal problems of approximation theory in functional spaces.

In the thesis there are found explicit formulas for calculating the least upper bounds of the quantities $e_\sigma(f)$ of best approximations of integrals by integrals of finite rank on the classes of functions representable as products of a fixed non-negative function and functions in the unit ball $U_p(\mathbb{A})$ of $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$. We obtain the exact order estimates of these quantities in an unlimited increase of their rank. For these functional classes, there are found the exact values and the exact order estimates of the integral analogues of the best approximations of functions by polynomials of given order and trigonometric widths. We also find explicit formulas for calculating the least upper bounds of analogues of the best n -term approximations in the Orlicz spaces $L_M(\mathbb{A}, d\mu)$ on the above classes of functions.

The numbers $e_\sigma(f)$ are used to obtain necessary and sufficient conditions for an arbitrary function in $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$ to lie in $L_s(\mathbb{A}, d\mu)$, $0 < p, s < \infty$. We consider the applications of the obtained results for finding of the approximative characteristics of the spaces S_{Φ}^p , as well as for the approximation of measurable functions (given by convolutions with summable kernels) by entire functions of exponential type.

In the thesis there are found the exact order estimates of important nonlinear approximative characteristics (such as the best n -term trigonometric approximation, the best n -term orthogonal trigonometric approximation, approximation by n -term greedy polynomials) of classes of functions of several variables $\mathcal{F}_{q,r}^\psi$ in the integral metric and in the spaces S^p .

We obtain the direct and inverse approximation theorems of functions of one and several variables by Taylor–Abel–Poisson operators.

There are calculated the exact values of the best approximations and the best n -term approximations of the sets of the images of the diagonal operators in the sequences Orlicz spaces $l_{\mathbf{p}}$ and l_M correspondingly.

In the spaces S_{φ}^p we give the definition of the saturation property of the linear methods of summation of Fourier series, specified by arbitrary sequences of functions defined in sets of complex numbers. We show that the saturation of a linear method and the saturation order are independent of the spaces S_{φ}^p . Sufficient conditions for the saturation of the indicated methods in these spaces are established. We also find the exact order estimates for nonlinear approximation characteristics of these spaces.

New Chebyshev type inequalities are proved.

We describe the set of infinitely differentiable 2π -periodic functions in terms of generalized $\bar{\psi}$ -derivatives. In the thesis there are established new criteria for 2π -periodic functions real-valued on the real axis to belong to the set of functions analytic on the axis and to the set of entire functions.

We also describe the relationship between the classes of $(\psi, \bar{\beta})$ -differentiable functions and the well-known Gevrey classes $\mathcal{J}_{\alpha}$. In particular, we establish necessary and sufficient conditions for periodic functions to belong to the Gevrey classes $\mathcal{J}_{\alpha}$ formulated in terms of their $(\psi, \bar{\beta})$ -derivatives.

Key words: best n -term approximation; best approximation of integral by integrals of finite rank; Taylor–Abel–Poisson operators; Chebyshev inequality; sets of infinitely differentiable, analytic and entire periodic functions, Gevrey classes.

Підп. до друку 07. 06. 2017. Формат 60×84/16. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 2,3. Ум. друк. арк. 2,1. Тираж 120 пр. Зам. 40.

Інститут математики НАН України
01004 Київ-4, вул. Терещенківська, 3