НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ШИДЛІЧ АНДРІЙ ЛЮБОМИРОВИЧ

УДК 517.5

ДИСЕРТАЦІЯ

ЕКСТРЕМАЛЬНІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ НАБЛИЖЕНЬ У ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ПРОСТОРАХ

Спеціальність 01.01.01 – математичний аналіз

111 – Математика

Подається на здобуття наукового ступеня доктора
фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело _______ А. Л. Шидліч

Науковий консультант
САВЧУК Віктор Васильович,
доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник

Київ — 2017

АНОТАЦІЯ

Шидліч А.Л. Екстремальні задачі теорії наближень у функціональних просторах. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – "Математичний аналіз" (111 – Математика). – Інститут математики НАН України, Київ, 2017.

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню екстремальних задач теорії наближень у функціональних просторах, а саме: розв'язанню задачі про точні верхні межі на заданих функціональних класах величин найкращих наближень інтегралів за допомогою інтегралів скінченного рангу; задач про відшукання точних порядкових оцінок нелінійних апроксимативних характеристик класів функцій багатьох змінних у лінійних нормованих просторах; задачі про знаходження в просторах Орліча точних верхніх меж найкращих n-членних наближень множин образів лінійних операторів; отриманню конструктивних характеристик класів функцій однієї та багатьох змінних; інших супровідних задач.

Більшість із перелічених задач відносяться до нелінійної апроксимації функцій — одного з основних підрозділів сучасної теорії наближень. Основоположними в цій тематиці вважаються дослідження С. Б. Стєчкіна 60-х років минулого століття, які присвячені відшуканню критерію абсолютної збіжності ортогональних рядів. С. Б. Стєчкіну вдалося сформулювати такий критерій, запровадивши нову на той час апроксимативну характеристику, а саме величину найкращого квадратичного наближення елемента гільбертового простору за допомогою n-членних поліномів за даною системою. З тих пір величина найкращого n-членного наближення стала предметом досліджень провідних фахівців теорії наближень, зокрема, Е. С. Белінського, Р. ДеВора, Р. С. Ісмагілова, Б. С. Кашина, В. Є. Майорова, А. С. Романюка, О. І. Степанця, В. М. Темлякова та багатьох інших.

В розділі 2, першому із основних розділів дисертаційної роботи, розглядаються величини $e_\sigma(f)$ найкращих наближень інтегралів функцій з просторів $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$ за допомогою інтегралів скінченного рангу σ, які є інтегральними аналогами величин найкращих n-членних наближень. Знайдено явні формули для обчислення точних верхніх меж цих вели-

чин на класах функцій, які зображуються у вигляді добутків деякої фіксованої невід'ємної функції та функцій з одиничної кулі $U_p(\mathbb{A})$ простору $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$ при всіх $p > 0$. Отримані твердження є поширенням на випадок довільних $p > 0$ відповідного результату О. І. Степанця [147], який одержав аналогічну формулу при $p = 1$. Також знайдено точні порядкові оцінки цих величин при необмеженому зростанні їх рангу.

В підрозділі 2.3 для даних класів функцій отримано точні значення та точні порядкові оцінки інтегральних аналогів величин найкращих наближень функцій поліномами заданого порядку та тригонометричного поперечника.

В підрозділі 2.4 розглядаються аналоги найкращих наближень інтегралів за допомогою інтегралів скінченного рангу в просторах Орліча $L_M(\mathbb{A}, d\mu)$ і знайдено явні формули для обчислення точних верхніх меж цих аналогів на згаданих вище класах функцій для всіх $p > 0$ та функцій Орліча $M(t)$ таких, що функція $M(t^{1/p})$ теж є функцією Орліча.

В підрозділі 2.5 отримані результати застосовуються до знаходження апроксимативних характеристик просторів S^p_Φ та до наближень вимірних функцій, які задаються згортками із сумовними ядрами, цілими функціями експоненціального типу. Також в цьому підрозділі в термінах величин $e_\sigma(f)$ отримано необхідні та достатні умови належності функцій з просторів $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$ просторам $L_s(\mathbb{A}, d\mu)$, $0 < p, s < \infty$.

Розділ 3 присвячено дослідженню асимптотичної поведінки нелінійних апроксимативних характеристик (таких, як найкраще n-членне тригонометричне наближення, найкраще n-членне ортогональне тригонометричне наближення, наближення n-членними гріді апроксимантами, базисний поперечник) класів функцій багатьох змінних $\mathcal{F}^{\psi}_{q,r}$ в інтегральній метриці та у просторах S^p. В ньому встановлюється залежність швидкості прямування до нуля таких величин від вибору параметрів ψ, q та r, що визначають задані класи. Зокрема, в підрозділі 3.1 знайдено точні порядкові оцінки згаданих апроксимативних характеристик класів $\mathcal{F}^{\psi}_{q,r}$ в просторах S^p. При цьому такі оцінки були отримані як у випадку, коли функція ψ прямує до нуля не швидше деякої степеневої функції, так і коли вона спадає швидше довільного степеня. У підрозділі 3.2 отримано у низці важливих випадків точні порядкові оцінки згаданих вище апроксимативних характеристик класів $\mathcal{F}^{\psi}_{q,r}$ в інтегральній метриці. Зокрема, в цьому підрозділі отримано точні порядкові оцінки найкращих n-членних тригонометричних наближень та наближень n-членними гріді апроксимантами класів $\mathcal{F}^{\psi}_{q,r}$ в інтегральній метриці, у випадку, коли функція ψ прямує до нуля не швидше деякої степеневої функції. Ці доповнюють відомі результати робіт Р. ДеВора та В. М. Темлякова [40] і В. М. Темлякова [166], де аналогічні співвідношення були знайдені у випадку степеневих функцій ψ.

У розділі 4 отримано прямі та обернені теореми наближення функцій однієї та багатьох змінних операторами Тейлора–Абеля–Пуассона. Такі теореми належать до центральних теорем теорії апроксимації. Якщо для даного методу наближення на заданому функціональному класі доведено прямі та обернені теореми, то також кажуть, що знайдено конструктивну характеристику цього класу в термінах даного апроксимаційного методу. Сучасна теорія наближень наповнена великою кількістю такого роду тверджень для різних методів наближення на різноманітних функціональних класах. Основоположні результати в цьому напрямку викладено в монографіях [173, 67 21, 47, 39, 144, 176, 48] та ін. Проте більшість класичних лінійних методів, побудованих на основі рядів Фур'є, є насиченими, і тому для них не завжди можна отримати прямі та обернені теореми. У зв'язку з цим природним є питання про відшукання лінійного методу наближення, який можна адаптувати під гладкісні властивості функції як завгодно великого порядку, і який був би для заданого класу функцій класу найкращим в сенсі прямих та обернених теорем. В роботі [55] для класів згорток з ядрами, що породжуються моментними послідовностями, було запропоновано загальний спосіб побудови операторів, які враховують властивості таких ядер, а отже, і властивості функцій з відповідних класів. Одним із прикладів цих операторів є згадані вище оператори Тейлора–Абеля–Пуассона. Вперше вони вивчалися в [120], де в термінах цих операторів автор сформулював структурну характеристику класів Гарді–Ліпшиця $H^r_p \operatorname{Lip} \alpha$ функцій однієї змінної, голоморфних в одиничному крузі комплексної площини.

В підрозділі 4.1 продовжуються дослідження апроксимативних характеристик операторів Тейлора-Абеля-Пуассона. Зокрема, встановлено зв'язок даних операторів та інших відомих перетворень з робіт Р. Лейса [69] і П. Л. Бутцера та Г. Суноучі [20], а також доведено прямі та обернені теореми наближення 2π-періодичних функцій операторами Тейлора-Абеля-Пуассона в термінах K–функціоналів функцій, породжених їх радіальними похідними. В термінах наближень даними операторами одержано конструктивну характеристику класів 2π-періодичних функцій, K-функціонали радіальних похідних яких не перевищують деякої мажоранти.

В підрозділі 4.2 у просторах S^p функцій багатьох змінних встановлено прямі та обернені теореми наближення операторами Тейлора–Абеля–Пуассона $A^{\triangle}_{\varrho,r}$ та операторами $P^{\triangle}_{\varrho,s}$, що породжують відповідні лінійні методи підсумовування по трикутних областях кратних рядів Фур'є. В термінах похибок наближення цими операторами отримано конструктивну характеристику класів функцій, узагальнені похідні яких належать множинам S^pH_ω.

В розділі 5 досліджуються задачі теорії наближень в лінійних дискретних просторах. Зокрема, в підрозділах 5.2 та 5.1 у просторах $l_{\mathbf{p}}$ зі змінним показником підсумовування та дискретних просторах Орліча l_M знайдено відповідно точні значення відповідно величин найкращих наближень та найкращих n-членних наближень множин образів одиничних куль просторів під дією діагональних операторів. Отримані результати поширюють на згадані простори відповідні результати робіт [142], [144 (гл.XI)], [148] та [31] для просторів l_p.

В підрозділі 5.3 у просторах S^p_φ означено поняття насичення лінійних методів підсумовування рядів Фур'є, які задаються довільними послідовностями функцій, визначених на деякій множині комплексних чисел. Показано інваріантність цього поняття відносно просторів S^p_φ та знайдено достатні умови насичення. В підрозділі 5.4 також отримано точні порядкові оцінки нелінійних апроксимативних характеристик цих просторів.

В останніх підрозділах 5.6 та 5.7 розділу 5 отримано нові критерії виконання нерівностей типу Чебишова. Дані результати, зокрема, використовуються при доведенні лем 2.1.1, 2.4.1 та теореми 5.1.1. Отримані в роботі нерівності у певних частинних випадках збігаються з відомими нерівностями Чебишова для монотонних функцій, а знайдені умови для їх виконання є слабкішими, ніж класичні умови монотонності.

В розділі 6 вивчаються асимптотичні властивості опуклих функцій та їх застосування. Зокрема, в його підрозділах 6.6 та 6.7 знайдено точні порядкові оцінки деяких важливих величин, в термінах яких, зокрема, виражаються найкращі n-членні наближення класів функцій багатьох та їх інтегральні аналоги. Отримані результати застосовуються в підрозділах 2.2 та 3.1 роботи при дослідженні асимптотичної поведінки згаданих величин.

В підрозділі 6.5 описується множина $\mathcal{D}^\infty$ нескінченно диференційовних періодичних функцій в термінах узагальнених $\bar{\psi}$-похідних, які означаються парою $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ послідовностей ψ_1 та ψ_2. Описання того чи іншого класу 2π-періодичних функцій в термінах їх коефіцієнтів Фур'є — одна з центральних задач теорії тригонометричних рядів. На даний час існує досить багато теорем про взаємозв'язок між властивостями функцій і швидкістю спадання до нуля послідовності їх коефіцієнтів Фур'є. Проте на деяких важливих функціональних класах таких тверджень не отримано до тепер. Добре відомо, що множина нескінченно диференційовних функцій складається лише з тих функцій, коефіцієнти Фур'є яких спадають до нуля швидше будь-якого від'ємного степеня. Це, зокрема, вказує на те, що класифікація таких функцій в степеневій шкалі є неефективною. В дисертаційній роботі, зокрема, показано, що кожна функція f з множини $\mathcal{D}^\infty$ має принаймні одну узагальнену $\bar{\psi}$-похідну, параметри ψ_1 та ψ_2 якої спадають швидше довільної степеневої функції, і в той же час для довільної функції $f \in \mathcal{D}^\infty$, відмінної від тригонометричного полінома, знайдеться пара $\bar{\psi}$, параметри ψ_1 та ψ_2 якої мають таку ж швидкість спадання, і для якої $\bar{\psi}$-похідна не існує. Встановлено нові критерії належності 2π-періодичних дійснозначних на дійсній осі функцій множинам аналітичних та цілих функцій. Описано також зв'язок між класами $(\psi, \bar{\beta})$-диференційовних функцій і відомими класами Жевре $\mathcal{J}_\alpha$. В термінах таких похідних встановлено критерій належності періодичних функцій класам $\mathcal{J}_\alpha$.

Ключові слова: найкраще n-членне наближення; найкраще наближення інтеграла функції за допомогою інтегралів скінченного рангу; прямі та обернені теореми; оператори Тейлора–Абеля–Пуассона; нерівності Чебишова; множини нескінченно диференційовних, аналітичних та цілих періодичних функцій, класи Жевре.

Shidlich A.L. Extremal Problems of Approximation Theory in Functional Spaces. — The Manuscript.

Thesis for a Doctor Degree in Physical and Mathematical Sciences on Speciality 01.01.01. — Mathematical Analysis (111 — Mathematics). — Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2017.

The thesis is devoted to the investigation of the extremal problems of approximation theory in functional spaces, namely to the solution of the problem of finding of the exact upper bounds on the given functional classes of the quantities of the best approximations of integrals by integrals of finite rank, to the problems of finding of the exact order estimates of the nonlinear approximative characteristics of the classes of the functions of several variables in the normed linear spaces, to the problem of finding in the Orlicz spaces the exact upper bounds of the best n-term approximations of the sets of images of the linear operators; to obtaining the constructive characteristics of the classes of functions of one and several variables; to other related tasks.

Most of these problems are related to the nonlinear approximation of functions which is one of the main directions of the modern approximation theory. S. Stechkin's researches of the 1960s of finding a criterion for absolute convergence of orthogonal series are considered basic on this topic. Stechkin formulated such a criterion and introduced at that time a new approximative characteristic, namely the value of the best quadratic approximation of the element of Hilbert space by n-term polynomials according to the given system. Since that time, the quantity of the best n-term approximation is a a subject of research of the leading experts in the approximation theory such as E. Bellinsky, R. DeVore, R. Ismagilov, B. Kashin, V. Maiorov, A. Romanyuk, A. Stepanets, V. Temlyakov and many others.

In Section 2, the first of the main sections of the thesis, we consider the quantities $e_\sigma(f)$ of the best approximations of integrals of the functions from the spaces $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$ by integrals of the finite rank σ which are the integral analogues of the quantities of the best n-term approximations. In the thesis there are found the explicit formulas for calculating the least upper bounds of the quantities $e_\sigma(f)$ of the best approximations of integrals by integrals of the finite rank on the classes of functions representable as products of a fixed non-negative function and functions in the unit ball $U_p(\mathbb{A})$ of $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$ for all $p > 0$. The obtained assertions are spreading in the case of the arbitrary $p > 0$ of the corresponding result of A. Stepanets [147], who obtained a similar formula for $p = 1$. We also obtain the exact order estimates of these quantities in an unlimited increase of their rank.

In subsection 2.3, for these functional classes there are found the exact values and the exact order estimates of the integral analogues of the best approximations of functions by polynomials of the given order and trigonometric widths.

In subsection 2.4, we consider the analogues of the best approximations of integrals by integrals of finite rank in the Orlicz spaces. For the above functional classes, we find the explicit formulas for calculating the least upper bounds of these quantities for all $p > 0$ and all Orlicz functions $M(t)$ such that the function $M(t^{1/p})$ is also an Orlicz function.

In subsection 2.5, we consider the applications of the obtained results for finding of the approximative characteristics of the spaces S^p_Φ, as well as for the approximation of measurable functions (given by convolutions with summable kernels) by entire functions of exponential type. Also we use the quantities $e_\sigma(f)$ to obtain necessary and sufficient conditions for an arbitrary function in $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$ to lie in $L_s(\mathbb{A}, d\mu)$, $0 < p, s < \infty$.

Section 3 is devoted to the study of the asymptotic behaviour of the nonlinear approximative characteristics (such as the best n-term trigonometric approximation, the best n-term orthogonal trigonometric approximation, the approximation by n-term greedy polynomials, the basis width) of the classes $\mathcal{F}^\psi_{q,r}$ of functions of several variables in the integral metric and in the spaces S^p. Here, we establish the dependence of the choice of the parameters r, ψ and q on the rate of convergence to zero of these quantities. In particular, in section 3.1 there are found the exact order estimates of the approximative characteristics of the classes $\mathcal{F}^\psi_{q,r}$ in the spaces S^p. These estimates are obtained in the case when the function ψ tends to zero no faster than a certain power function and when it decreases faster, than an arbitrary power function. In subsection 3.2, we obtain in several important cases, the exact order estimates of the above mentioned approximative characteristics of the classes

$\mathcal{F}^{\psi}_{q,r}$ in the integral metric. In particular, in this subsection, we have obtained exact the order estimates of the best n-term trigonometric approximations and approximations by n-term greedy polynomials of the classes $\mathcal{F}^{\psi}_{q,r}$ in the integral metric, in the case when the function ψ tends to zero no faster than a certain power function. These assertions complement the known results of the papers of R. DeVore and V. Temlyakov [40] and V. Temlyakov [166], where similar relations were found in the case of the power functions ψ.

In section 4, we prove the direct and inverse theorems of approximation on functions of one and several variables by Taylor–Abel–Poisson operators. These theorems are the Central theorems of approximation. If for the method of approximation in the given functional class, the direct and inverse theorems are proved, then it is also said that in terms of the method of approximation, the constructive characterization of the class is found. In the modern approximation theory, there is a large number of such assertions for the various methods of approximation and various functional classes. Fundamental results in this direction are contained in the monographs [173, 21, 47, 39, 144, 176, 48] and etc. However, most classical linear methods based on the Fourier series, are saturated and therefore, it is not always possible to obtain the direct and inverse theorems for them. In connection with this, there is a natural question of finding a linear approximation method, which can be adapted to the smoothness properties (of the arbitrarily large order) of functions and at the same time, for the given functional class, is the best in the sense of the direct and inverse theorems. In [55], for the classes of convolutions, whose kernels were generated by some moment sequences, the authors proposed the general method of construction of operators that take into account properties of such kernels and hence, the smoothness of functions from the corresponding classes. One example of such operators are the above mentioned Taylor–Abel–Poisson operators. First, they were studied in [120], where in the terms of these operators, the author gave the structural characteristic of Hardy-Lipschitz classes $H^r_p \operatorname{Lip} \alpha$ of functions of one variable, holomorphic on the unit circle of the complex plane.

In subsection 4.1, the study of the approximative properties of the Taylor-Abel-Poisson operators is continued. In particular, we show the relations between them and other known transformations from R. Leis [69] and P. Butzer and G. Sunouchi [20], and also prove the direct and inverse theorems of approximation of 2π-periodic functions by the Taylor-Abel-Poisson operators in the terms of K-functionals of functions, generated by their radial derivatives. In terms of approximation by these operators, there is obtained the constructive characteristics of classes of 2π-periodic functions such that K-functionals of their radial derivatives do not exceed a certain majorant.

In subsection 4.2, in the spaces S^p of functions of several variables we prove the direct and inverse theorems of approximation by the Taylor–Abel–Poisson operators $A^{\triangle}_{\varrho,r}$ and by the operators $P^{\triangle}_{\varrho,s}$, which generate the corresponding linear methods of summation of the multiple Fourier series on the triangle regions. In terms of approximation estimates of these operators we give the constructive characterization of the classes of functions, whose generalized derivatives belong to the classes S^pH_ω.

In section 5, we investigate the problems of approximation theory in linear discrete spaces. In particular, in subsections 5.2 and 5.1, there are calculated the exact values of the best approximations and the best n-term approximations of the sets of the images of the diagonal operators in the discrete Orlicz spaces $l_{\mathbf{p}}$ and l_M correspondingly. In these assertions, we distribute (to the mentioned spaces) the corresponding results of the papers [142], [144 (Chapter XI)], [148] and [31] for the spaces l_p.

In subsection 5.3, in the spaces S^p_φ we give the definition of the saturation property of the linear methods of summation of Fourier series, specified by arbitrary sequences of functions defined in the sets of complex numbers. We show that the saturation of a linear method and the saturation order are independent of the spaces S^p_φ. Sufficient conditions for the saturation of the indicated methods in these spaces are established. In subsection 5.4, we also find the exact order estimates for the nonlinear approximation characteristics of these spaces.

In the last subsections 5.6 and 5.7 of section 5, there are proved the necessary and sufficient conditions for validity the inequalities of Chebyshev type. These results are used in the proof of Lemma 2.1.1, 2.4.1 and Theorem 5.1.1. In certain special cases, the obtained inequalities coincide with the well-known Chebyshev inequalities for monotonic functions, and the obtained conditions for their validity are weaker than the classical monotonicity conditions.

In section 6, we study the asymptotic properties of convex functions and their applications. In particular, in its subsections 6.6 and 6.7 there are found the exact order estimates of some important quantities, in terms of which, in particular, are expressed the best n-term approximation of class of several functions and their integral analogs. These results are applied in subsections 2.2 and 3.1 to the study of the asymptotic behaviour of the mentioned quantities.

In subsection 6.5, the set $\mathcal{D}^\infty$ of infinitely differentiable periodic functions is described in terms of generalized $\bar{\psi}$-derivatives defined by a pair $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ of sequences ψ_1 and ψ_2. The description of a class of 2π-periodic functions in terms of Fourier coefficients is one of the Central problems in the theory of trigonometric series. Currently, there are a lot of theorems on the relationship between properties of functions and the rate of decrease to zero of the sequence of their Fourier coefficients. However, for some important functional classes, such assertions are not obtained. It is well known that the set of infinitely differentiable functions consists of functions, whose the Fourier coefficients decrease to zero faster than any power function of negative degree. This, in particular, shows that the classification of such functions in the power scale is inefficient. In the thesis, we establish that every function $f \in \mathcal{D}^\infty$ has at least one $\bar{\psi}$-derivative whose parameters ψ_1 and ψ_2 decrease faster than any power function. At the same time, for an arbitrary function $f \in \mathcal{D}^\infty$ different from a trigonometric polynomial, there exists a pair $\bar{\psi}$ whose parameters ψ_1 and ψ_2 have the same rate of decrease and for which the $\bar{\psi}$-derivative no longer exists. We also obtain new criteria for 2π-periodic functions real-valued on the real axis to belong to the set of functions analytic on the axis and to the set of entire functions. We also describe the relationship between the classes of $(\psi, \bar{\beta})$- differentiable functions and the well-known Gevrey classes $\mathcal{J}_\alpha$. In particular, in terms of such derivatives we establish new criteria for periodic functions to belong to the Gevrey classes $\mathcal{J}_\alpha$.

Key words: best n-term approximation; best approximation of integral by integrals of finite rank; Taylor–Abel–Poisson operators; Chebyshev inequality; sets of infinitely differentiable, analytic and entire periodic functions, Gevrey classes.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

1. Степанець О. І. Про деякі властивості опуклих функцій / О. І. Степанець, А. Л. Шидліч // Укр. мат. журн. – 2007. – Т. 59, № 7. – С. 920–938.

2. Степанець О. І. Про один критерій для опуклих функцій / О. І. Степанець, А. Л. Шидліч // Доповіді НАН України. — 2007, № 8. — С. 31–36.

3. Степанець О. І. Про деякі нові критерії нескінченної диференційовності періодичних функцій / О. І. Степанець, А. С. Сердюк, А. Л. Шидліч // Укр. мат. журн. — 2007. — Т. 59, №10. — С. 1399–1409.

4. Степанец А. И. О порядках наилучших приближений интегралов функций при помощи интегралов ранга σ / А. И. Степанец, А. Л. Шидлич // Нелін. колив. — 2007. — Т. 10, № 4. — С. 528–559.

5. Савчук В. В. Наближення функцій багатьох змінних лінійними методами в просторах S^p / В. В. Савчук, А. Л. Шидліч // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2007. — Т 4, № 1. — С. 302–317.

6. Шидліч А. Л. Насичення лінійних методів підсумовування рядів Фур'є в просторах S^p_φ / А. Л. Шидліч // Укр. мат. журн. — 2008. — Т. 60, № 6. — С. 815–828.

7. Степанец А. И. Классификация бесконечно дифференцируемых периодических функций / А. И. Степанец, А. С. Сердюк, А. Л. Шидлич // Укр. мат. журн. — 2008. — Т. 60, №12. — С. 1686–1708.

8. Шидліч А. Л. Апроксимативні характеристики просторів S^p_Φ / А. Л. Шидліч // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Інституту математики НАН України.– 2008.– Т. 5, №1.– С.404-430.

9. Степанец А. И. О связи классов $(\psi, \bar{\beta})$-диффе-ренцируемых функций с классами Жевре / А. И. Степанец, А. С. Сердюк, А. Л. Шидлич // Укр. мат. журн. — 2009. — Т. 61, №1. — С. 140–145.

10. Шидліч А. Л. Порядкові рівності для деяких функціоналів та їх застосування до оцінок найкращих n-членних наближень і поперечників / А. Л. Шидліч // Укр. мат. журн. — 2009. — Т. 61, № 10. — С. 1403–1423.

11. Stepanets A. I. Best approximations of integrals by integrals of finite rank / A. I. Stepanets, A. L. Shidlich // Journal of Approximation Theory. — 2010. — V. 162, № 2. — P. 323–348.

12. Степанец А. И. Экстремальные задачи для интегралов от неотрицательных функций / А. И. Степанец, А. Л. Шидлич // Изв. РАН. Сер. матем. — 2010. — Т. 74, № 3. — С.169—224.

13. Shidlich A. L. On necessary and sufficient for validity of some Chebyshev-Type inequalities / A. L. Shidlich // Journal of Mathematical Inequalities. — 2011. — V. 5, № 1. — P. 71–85.

14. Шидліч А. Л. Порядкові оцінки найкращих n-членних ортогональних триго-

нометричних наближень класів функцій $\mathcal{F}^{\psi}_{q,\infty}$ в просторах $L_p(\mathbb{T}^d)$ / А. Л. Шидліч // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2011. — Т. 8, № 1. — С. 302–317.

15. Шидліч А. Л. Порядкові оцінки для деяких апроксимаційних характеристик / А. Л. Шидліч // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — Т 10, № 1. — С. 304–337.

16. Шидліч А. Л. Деякі екстремальні задачі в просторах Орліча / А. Л. Шидліч, С. О. Чайченко // Матем. студії. — 2014. — Т. 42, № 1. — С. 21–32.

17. Savchuk V. V. Approximation of functions of several variables by linear methods in the space S^p / V. V. Savchuk, A. L. Shidlich // Acta Sci. Math. (Szeged). — 2014. — V. 80, № 3–4. — P. 477-–489.

18. Шидліч А. Л. Апроксимаційні характеристики діагональних операторів в просторах $l_{\mathbf{p}}$ / А. Л. Шидліч, С. О. Чайченко // Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — Т. 11, № 2. — С. 399–412.

19. Шидліч А. Л. Порядкові оцінки функціоналів, в термінах яких виражаються найкращі n-членні наближення класів $\mathcal{F}^{\psi}_{q,r}$ / А. Л. Шидліч // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — Т. 11, № 3. — С. 287–314.

20. Shidlich A. L. On some inequalities of Chebyshev type. / A. L. Shidlich, S. O. Chaichenko // Math. Inequal. Appl. – 2015.– V. 18, № 4.– P. 1313–1320.

21. Shidlich A. L. Approximative properties of diagonal operators in Orlicz spaces / A. L. Shidlich, S. O. Chaichenko // Numer. Funct. Anal. Optim. — 2015. — V. 36, №10. — P. 1339–1352.

22. Prestin J. Approximation of 2π-periodic functions by Taylor–Abel–Poisson operators in the integral metric / J. Prestin, V. V. Savchuk, A. L. Shidlich // Доповіді НАН України. – 2017. — №1. — С. 17–20.

23. Шидлич А. Л. Об одной экстремальной задаче для интегралов / А. Л. Шидлич // Международная конференция "Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ", посвященная столетию академика С. М. Никольского (Москва, 23-29 мая 2005 г.): Тезисы докладов.– М.: Матем. ин-т им. В. А. Стеклова РАН, 2005.– С. 245.

24. Степанець О. І. Про одну екстремальну задачу для інтегралів від невід'ємних функцій / О. І. Степанець, А. Л. Шидліч // Міжнародна наукова конференція "Математичний аналіз і диференціальні рівняння та їх застосування" (Ужгород, 18–23 вересня 2006 року): Тези доповідей. – Київ: Ін-т математики НАНУ, 2006. – С. 108.

25. Шидлич А. Л. Наилучшие приближения интегралов интегралами конечного ранга / А. И. Степанец, А. Л. Шидлич // Международная научная конференция "Современные проблемы математики, механики, информатики" (Тула, Россия, 19–23 ноября 2007 г.): Тезисы докладов. – Тула: ТулГУ. 2007. – С. 85–86.

26. Stepanets A. I. On extremal problems for integral of nonnegative functions / A. I. Stepanets, A. L. Shidlich // International conference on the occasion of the 150th birthday of A. M. Lyapunov (Kharkiv, June 24-30, 2007): Abstracts. – Kharkiv, 2007. – P. 160–161.

27. Шидліч А. Л. Про порядки найкращих n-членних наближень в просторах S^p_φ / А. Л. Шидліч // Міжнародна наукова конференція "Боголюбовські читання-2008" з нагоди 70-річчя з дня народження академіка А.М. Самойленка (Мелітополь, 16–21 червня 2008 р.): Тези доповідей. – Київ: Ін-т математики НАНУ, 2008. – С. 126.

28. Шидлич А. Л. Порядковые оценки наилучших n-членных приближений в пространствах S^p_φ / А. Л. Шидлич // Международная научная конференция "Современные проблемы математики, механики, информатики и их приложений", посвященная 70-летию ректора МГУ академика В. А. Садовничего (Москва, Россия, 30 марта–2 апреля 2009 г.): Тезисы докладов. – Москва: МГУ, 2009. – С. 100.

29. Шидліч А. Л. Про один аналог нерівності Чебишева для монотонних функцій / А. Л. Шидліч // Міжнародна наукова конференція "Функціональні методи в теорії наближень і теорії операторів III", присвячена пам'яті В. К. Дзядика (1919–1998) (Волинь, 22–26 серпня 2009 р.): Тези доповідей. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2009. – С. 88.

30. Шидліч А. Л. Порядкові оцінки найкращих n-членних наближень класів функцій багатьох змінних в просторах S^p / А. Л. Шидліч // Міжнародна наукова конференція "Український математичний конгрес-2009" до 100-річчя від дня народження М. М. Боголюбова (м. Київ, Україна, 27–29 серпня 2009 р): Тези доповідей. – http://www.imath.kiev.ua/~congress2009/Abstracts/Shidlich.pdf

31. Шидлич А. Л. Об одном аналоге неравенства Чебышева для монотонных функций / А. Л. Шидлич // Міжнародна наукова конференція "Approximation Theory and Applications", присвячена пам'яті М. П. Корнєйчука (1920-2003) (Дніпропетровськ, 14–17 червня 2010 року): Тези доповідей. – Дніпропетровськ, 2010. – С. 99.

32. Шидліч А. Л. Порядкові оцінки найкращих n-членних наближень класів функцій багатьох змінних в просторах S^p / А. Л. Шидліч // Міжнародна конференція з сучасного аналізу (Донецьк, 20-23 червня 2011 р.): Тези доповідей. – Донецьк, 2011. – С. 117.

33. Шидліч А. Л. Порядкові оцінки наближень "гріді" апроксимантами класів функцій $\mathcal{F}^\psi_{q,\infty}$ в просторах $L_p(\mathbb{T}^d)$ / А. Л. Шидліч // Міжнародна конференція "Теорія наближення функцій та її застосування", присвячена 70-річчю з дня народження члена-кореспондента НАНУ, професора О. І. Степанця (1942-2007) (Кам'янець-Подільський, 28 травня–3 червня 2012 р.): Тези доповідей. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2012. – С. 110.

34. Шидліч А. Л. Порядкові оцінки найкращих n-членних ортогональних тригонометричних наближень деяких класів функцій багатьох змінних / А. Л. Шидліч // Міжнародна наукова конференція "Крайові задачі, теорія функцій та їх застосува-

ння” з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка (Слов'янськ, 12–14 червня 2013 р.): Тези доповідей. – Слов'янськ, 2013. – С. 47.

35. Шидліч А. Л. Апроксимативні характеристики деяких класів функцій багатьох змінних / А. Л. Шидліч // Міжнародна наукова конференція “Боголюбовські читання DIF-2013” з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка (Севастополь 23–30 червня 2013 р.): Тези доповідей. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2013. – С. 283.

36. Шидліч А. Л. Апроксимативні характеристики деяких класів функцій багатьох змінних / А. Л. Шидліч // Міжнародна наукова конференція “Complex analysis and related topics” (Львів, 23-28 вересня 2013 р.): Тези доповідей. – Львів, 2013. – С. 110.

37. Савчук В. В. Наближення функцій багатьох змінних лінійними методами в S^p / В. В. Савчук, А. Л. Шидліч // Міжнародна наукова конференція “Complex analysis and related topics” (Львів, 23-28 вересня 2013 р.): Тези доповідей.– Львів, 2013. – С. 108–109.

38. Шидліч А. Л. Апроксимативні характеристики діагональних операторів в просторах Орліча / А. Л. Шидліч, С. О. Чайченко // IV Міжнародна ганська конференція (Чернівці, 30 червня–5 липня 2014 р.): Тези доповідей. – Чернівці, 2014. – С. 216-217.

39. Shidlich A. L. Approximative characteristics of diagonal operators in Orlicz sequence spaces / A. L. Shidlich, S. O. Chaichenko // Mecklenburg Workshop “Approximation Methods and Function Spaces”, dedicated to the 60th birthday of Prof. W. Sickel (Hasenwinkel, March 16-20, 2015): Abstracts. – Hasenwinkel, 2015. – P. 17.

40. Shidlich A. L. Some extremal problems in Orlicz spaces / A. L. Shidlich, S. O. Chaichenko // Third Conference “Mathematics for Life Sciences” (Rivne, 15-19 вересня 2015 р.): Abstracts. – Rivne, 2015. – С. 40-41.

41. Шидліч А. Л. Нелінійні наближенні класів $\mathcal{F}^{\psi}_{q,r}$ функцій багатьох змінних в інтегральних метриках / А. Л. Шидліч // Міжнародна математична конференція “Теорія наближень і її застосування” з нагоди 75-річчя В. П. Моторного (Дніпропетровськ, 8–11 жовтня 2015 р.): Тези доповідей. – Дніпропетровськ, 2015. – С. 93.

42. Shidlich A. L. Nonlinear approximation of the classes $\mathcal{F}^{\psi}_{q,r}$ of functions of several variables in L_p / A. L. Shidlich // AMMODIT and final EUMLS Workshop “Mathematics for Life Sciences”(Hasenwinkel, March 07-11, 2016): Abstracts. – Hasenwinkel, 2015. – P. 29-30.

43. Shidlich A. L. Direct and inverse approximation theorems of 2π-periodic functions by Taylor-Abel-Poisson means / A. L. Shidlich // Міжнародна математична конференція “Complex analysis and related topics” (Львів, 30 травня – 4 червня 2016 р.): Тези доповідей. – Львів, 2016. – С. 84.

Зміст

Перелік умовних позначень

Числові множини

Простори

Апроксимаційні агрегати

Функції та функціонали

Апроксимативні характеристики

Множини і класи функцій

Вступ

Актуальність теми. Дисертаційну роботу присвячено дослідженню екстремальних задач теорії наближень у функціональних просторах, а саме: розв'язанню задачі про точні верхні межі на заданих функціональних класах величин найкращих наближень інтегралів за допомогою інтегралів скінченного рангу; задач про відшукання точних порядкових оцінок нелінійних апроксимативних характеристик класів функцій багатьох змінних у лінійних нормованих просторах; задачі про відшукання у просторах Орліча точних верхніх меж найкращих n-членних наближень множин образів лінійних операторів; отриманню конструктивних характеристик класів функцій однієї та багатьох змінних; інших супровідних задач.

Більшість із перелічених задач відносяться до нелінійної апроксимації функцій — одного з основних підрозділів сучасної теорії наближень. Основоположними в цій тематиці вважаються дослідження С. Б. Стєчкіна 60-х років минулого століття, які присвячені відшуканню критерію абсолютної збіжності ортогональних рядів. С. Б. Стєчкіну вдалося сформулювати такий критерій, запровадивши нову на той час апроксимативну характеристику, а саме величину найкращого квадратичного наближення елемента гільбертового простору за допомогою n-членних поліномів за даною системою. З тих пір величина найкращого n-членного наближення стала предметом досліджень провідних фахівців теорії наближень, зокрема, Е. С. Белінського, Р. ДеВора, Р. С. Ісмагілова, Б. С. Кашина, В. Є. Майорова, А. С. Романюка, О. І. Степанця, В. М. Темлякова та багатьох інших. Їх дослідження сформувались в окремий напрямок теорії наближень, а результати, отримані в цьому напрямку, знаходять своє застосування в різноманітних галузях математики. Проте існує зовсім мало робіт, у яких знайдено явну формулу для обчислення величин найкращих n-членних наближень тих чи інших функціональних класів. Нам відомі лише роботи Е. Новака [98], О. І. Степанця [141, 142, 144 (гл. XI)], О. І. Степанця та В. І. Рукасова [146], О. І. Радзієвської та Г. В. Радзієвського [106], Г. Фанга та Л. Кіана [180], Ф. Гао [31], та В. С. Романюка [116]. Величини найкращих наближень інтегралів за допомогою інтегралів скінченного рангу, які є природними інтегральними аналогами найкращих n-членних наближень, розглядались лише в роботі О. І. Степанця [147].

З огляду на таку малу кількість робіт, результати даної дисертаційної роботи, які стосуються відшуканню явних формул для обчислення найкращих наближень інтегралів за допомогою інтегралів скінченного рангу на важливих функціональних класах, представляють безумовний науковий інтерес.

В теорії наближень загально прийнято вважати науковий результат "завершеним" для даного методу апроксимації на заданому класі функцій, якщо доведено прямі та обернені теореми. В такому випадку також кажуть, що знайдено конструктивну характеристику заданого класу функцій в термінах даного методу наближення. Сучасна теорія наближень наповнена великою кількістю такого роду теорем для різних апроксимаційних методів на різноманітних функціональних класах. Фундаментальні результати в цьому напрямку викладено в монографіях О. П. Тімана [173], М. П. Корнєйчука [67], П. Бутцера та Р. Несселя [21], В. К. Дзядика [47], Р. ДеВора та Г. Лоренца [39], О. І. Степанця [144], Е. С. Белінського та Р. М. Тригуба [176], В. К. Дзядика та І. О. Шевчука [48] та ін. Але більшість класичних лінійних методів, побудованих на основі рядів Фур'є, є насиченими, і тому для них не завжди можна отримати прямі та обернені теореми. Відшукання такого загального методу наближень, який можна адаптувати під гладкісні властивості функції як завгодно великого порядку, і який був би для заданого класу функцій класу найкращим в сенсі прямих та обернених теорем також складає великий науковий інтерес.

Однією з центральних задач теорії тригонометричних рядів є описання того чи іншого класу 2π-періодичних функцій в термінах їх коефіцієнтів Фур'є. На даний час існує досить багато теорем про взаємозв'язок між властивостями функцій і швидкістю спадання до нуля послідовності їх коефіцієнтів Фур'є. Проте на деяких важливих функціональних класах таких тверджень не отримано до тепер. Добре відомо, що множина нескінченно диференційовних функцій складається лише з тих функцій, коефіцієнти Фур'є яких спадають до нуля швидше будь-якого від'ємного степеня. Це, зокрема, вказує на те, що класифікація таких функцій в степеневій шкалі є неефективною. Тому відшукання нових критеріїв нескінченої диференційовності функцій в термінах коефіцієнтів Фур'є видається важливою задачею.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано у відділі теорії функцій Інституту математики НАН України згідно з науково-дослідними темами "Апроксимативні та структурні характеристики функціональних множин", номер державної реєстрації 0111U002079; "Теорія наближень в лінійних просторах", номер державної реєстрації 0106U000406.

Мета і завдання дослідження. Основна мета дисертаційного дослідження – це розробка нових та вдосконалення існуючих методів знаходження точних значень та точних порядкових оцінок нелінійних апроксимативних характеристик важливих функціональних класів у лінійних нормованих просторах.

Об'єктом дослідження є класи функцій однієї та багатьох змінних, лінійні методи підсумовування рядів Фур'є, множини образів деяких лінійних операторів, множини нескінченно диференційовних, аналітичних та цілих періодичних функцій, класи Жевре $\mathcal{J}_\alpha$.

Предметом дослідження є точні верхні межі на заданих класах функцій багатьох змінних величин найкращих наближень інтегралів за допомогою інтегралів скінченного рангу, нелінійні апроксимативні характеристики класів функцій багатьох змінних, найкраще наближення та найкраще n-членне наближення множин образів деяких лінійних операторів, оператори Тейлора-Абеля-Пуассона, нерівності типу Чебишова, зв'язок множин нескінченно диференційовних, аналітичних та цілих 2π-періодичних функцій, класів Жевре $\mathcal{J}_\alpha$ з множинами $(\psi, \bar{\beta})$-диференційовних 2π-періодичних функцій.

Завдання дослідження:

1. Знайти явні формули для обчислення точних верхніх меж найкращих наближень інтегралів за допомогою інтегралів скінченного рангу на класах функцій, які зображуються у вигляді добутків деякої фіксованої невід'ємної функції та функцій з одиничної кулі $U_p(\mathbb{A})$ простору $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$ при всіх $p > 0$. Отримати точні порядкові оцінки цих величин при необмеженому зростанні їх рангу. Для даних класів функцій знайти точні значення та точні порядкові оцінки інтегральних аналогів величин найкращих наближень функцій поліномами заданого порядку та тригонометричного поперечника. Знайти явні формули для обчислення точних верхніх меж на згаданих вище класах функцій аналогів величин найкращих наближень інтегралів за допомогою інтегралів скінченного рангу в просторах Орліча $L_M(\mathbb{A}, d\mu)$.

2. Встановити умови належності функцій з просторів $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$ просторам $L_s(\mathbb{A}, d\mu)$, $0 < p, s < \infty$.

3. Одержати точні порядкові оцінки низки важливих нелінійних апроксимативних характеристик класів функцій багатьох змінних $\mathcal{F}^{\psi}_{q,r}$ в інтегральній метриці та у просторах S^p.

4. Отримати прямі та обернені теореми наближення операторами Тейлора-Абеля-Пуассона функцій з просторів L_p та S^p.

5. В просторах $l_{\mathbf{p}}$ зі змінним показником підсумовування та дискретних просторах Орліча l_M знайти точні значення відповідно величин найкращих наближень та найкращих n-членних наближень множин образів одиничних куль цих просторів під дією діагональних операторів.

6. В просторах S^p_φ сформулювати означення насичення та встановити достатні умови насичення лінійних методів підсумовування рядів Фур'є, які задаються довільними послідовностями функцій, визначених на деякій множині комплексних чисел.

7. Отримати нові нерівності типу Чебишова.

8. В термінах узагальнених $\bar{\psi}$-похідних описати множину $\mathcal{D}^\infty$ нескінченно диференційовних періодичних функцій. Отримати критерії належності 2π-періодичних дійснозначних на дійсній осі функцій множинам нескінченно диференційовних, аналітичних та цілих функцій.

9. Описати зв'язок між класами $(\psi, \bar{\beta})$-диференційовних функцій і відомими класами Жевре $\mathcal{J}_\alpha$. В термінах таких похідних встановити критерій належності періодичних функцій класам $\mathcal{J}_\alpha$.

Методи дослідження. Використовується апарат математичного аналізу, теорії функцій багатьох змінних, теорії екстремальних задач, а також нові методи, які використовують поняття перестановки функції та асимптотичні властивості опуклих функцій.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати роботи, що виносяться на захист, є новими і полягають у такому.

1. Знайдено явні формули для обчислення точних верхніх меж величин $e_\sigma(f)$ найкращих наближень інтегралів за допомогою інтегралів скінченного рангу на класах функцій, які зображуються у вигляді добутків деякої фіксованої невід'ємної функції та функцій з одиничної кулі $U_p(\mathbb{A})$ простору $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$ при всіх $p > 0$. Отримано точні порядкові оцінки цих величин при необмеженому зростанні їх рангу. Для даних класів функцій знайдено точні значення та точні порядкові оцінки інтегральних аналогів величин найкращих наближень функцій поліномами заданого порядку та тригонометричного поперечника.

2. В термінах величин $e_\sigma(f)$ встановлено необхідні та достатні умови належності функцій з просторів $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$ просторам $L_s(\mathbb{A}, d\mu)$, $0 < p, s < \infty$. Отримані результати застосовано до знаходження апроксимативних характеристик просторів S^p_Φ та до наближень вимірних функцій, які задаються згортками із сумовними ядрами, цілими функціями експоненціального типу.

3. Знайдено явні формули для обчислення точних верхніх меж аналогів величин найкращих n-членних наближень в просторах Орліча $L_M(\mathbb{A}, d\mu)$ на згаданих вище класах функцій для всіх $p > 0$ та функцій Орліча $M(t)$ таких, що функція $M(t^{1/p})$ теж є функцією Орліча.

4. Знайдено точні порядкові оцінки низки важливих нелінійних апроксимативних характеристик (найкраще n-членне тригонометричне наближення, найкраще n-

членне ортогональне тригонометричне наближення, наближення n-членними гріді апроксимантами, базисний поперечник) класів функцій багатьох змінних $\mathcal{F}^{\psi}_{q,r}$ в інтегральній метриці та у просторах S^p.

5. Доведено прямі та обернені теореми наближення 2π-періодичних функцій операторами Тейлора–Абеля–Пуассона в інтегральній метриці і одержано конструктивну характеристику класів 2π-періодичних функцій, K-функціонали радіальних похідних яких не перевищують деякої мажоранти.

6. У просторах S^p функцій багатьох змінних встановлено прямі та обернені теореми наближення операторами Тейлора–Абеля–Пуассона $A^{\triangle}_{\varrho,r}$ та операторами $P^{\triangle}_{\varrho,s}$, що породжують відповідні лінійні методи підсумовування по трикутних областях кратних рядів Фур'є. В термінах похибок наближення цими операторами отримано конструктивну характеристику класів функцій, узагальнені похідні яких належать множинам S^pH_ω.

7. В просторах $l_{\mathbf{p}}$ зі змінним показником підсумовування та дискретних просторах Орліча l_M знайдено точні значення відповідно величин найкращих наближень та найкращих n-членних наближень множин образів одиничних куль цих просторів під дією діагональних операторів.

8. В просторах S^p_φ означено поняття насичення лінійних методів підсумовування рядів Фур'є, які задаються довільними послідовностями функцій, визначених на деякій множині комплексних чисел. Показано інваріантність цього поняття відносно просторів S^p_φ та знайдено достатні умови насичення. Отримано точні порядкові оцінки важливих нелінійних апроксимативних характеристик цих просторів.

9. Отримано нові нерівності типу Чебишова.

10. Описано множину $\mathcal{D}^\infty$ нескінченно диференційовних періодичних функцій в термінах узагальнених $\bar{\psi}$-похідних. Встановлено нові критерії належності 2π-періодичних дійснозначних на дійсній осі функцій множинам нескінченно диференційовних, аналітичних та цілих функцій.

11. Описано зв'язок між класами $(\psi, \bar{\beta})$-диференційовних функцій і відомими класами Жевре $\mathcal{J}_\alpha$. В термінах таких похідних встановлено критерій належності періодичних функцій класам $\mathcal{J}_\alpha$.

12. Знайдено точні порядкові оцінки деяких важливих величин, в термінах яких, зокрема, виражаються найкращі n-членні наближення деяких класів функцій багатьох та їх інтегральні аналоги.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Її результати мають практичне значення в теорії наближень у функціональних просторах, а також вони можуть бути використані в теоретичних дослідженнях з математичного аналізу, математичної фізики та обчислювальної математики.

Особистий внесок здобувача. Визначення головних напрямів досліджень належить О. І. Степанцю та В. В. Савчуку. Всі результати отримано здобувачем самостійно, а у роботах, які опубліковані у співавторстві, внесок усіх авторів є рівноцінним.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи доповідалися на:

— Міжнародній науковій конференції "Математичний аналіз і диференціальні рівняння та їх застосування", Ужгород, 18–23 вересня 2006 року;

— Міжнародній науковій конференції "Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 70-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка, Мелітополь, 16–21 червня 2008 року;

— Міжнародній науковій конференції "Функціональні методи в теорії апроксимації та теорії операторів", присвяченій пам'яті В. К. Дзядика (1919–1998), Волинь, 22–26 серпня 2009 року;

— Українському математичному конгресі – 2009 (до 100-річчя від дня народження Миколи М. Боголюбова), Київ, 27–29 серпня 2009 року;

— Міжнародній науковій конференції "Теорія наближень і її застосування", присвяченій пам'яті М. П. Корнєйчука (1920–2003), Дніпропетровськ, 14–17 червня 2010 року;

— Міжнародній науковій конференції "Теорія наближення функцій та її застосування", присвяченій 70-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, профессора О. І. Степанця (1942-2007), Кам'янець-Подільський, 28 травня – 3 червня 2012 року;

— Міжнародній науковій конференції "Крайові задачі, теорія функцій та їх застосування", з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка, Слов'янськ, 12–14 червня 2013 року;

— Міжнародній науковій конференції "Боголюбовські читання DIF-2013", з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А.М. Самойленка, Севастополь, 23–30 червня 2013 року;

— Міжнародній науковій конференції "Complex analysis and related topics", Львів, 23–28 вересня 2013 року;

— IV Міжнародній ганській конференції, Чернівці, 30 червня – 5 липня 2014 року;

— Mecklenburg Workshop "Approximation Methods and Function Spaces", dedicated to the 60th birthday of Prof. W. Sickel, Hasenwinkel, Germany, March 16–20, 2015;

— Third Conference "Mathematics for Life Sciences", Rivne, September 15–19, 2015;

— Міжнародній науковій конференції “Теорія наближень і її застосування”, з нагоди 75-річчя В. П. Моторного, Дніпропетровськ, 8–11 жовтня 2015 року;

— AMMODIT and final EUMLS Workshop “Mathematics for Life Sciences”, Hasenwinkel, Germany, March 07–11, 2016;

— Міжнародній науковій конференції “Complex analysis and related topics”, Львів, 30 травня–4 червня 2016 року;

— семінарах відділу теорії функцій Інституту математики НАН України, (керівник семінару – чл.-кор. НАН України $\boxed{\text{О. І. Степанець}}$, проф. А. С. Романюк);

— засіданнях Вченої ради Інституту математики НАН України;

— семінарах “Сучасний аналіз” в Київському національному університеті імені Т. Г. Шевченка, 16 вересня 2013 року, 29 березня 2017 року, (керівники семінару: проф. І. О. Шевчук, проф. О. О. Курченко, проф. В. М. Радченко);

— семінарі Інституту математики Університету м. Любек, Німеччина, 11 березня 2014 року (керівник семінару – проф. Ю. Престін);

— Львівському міському семінарі з теорії аналітичних функцій у Львівському національному університеті ім. І. Я. Франка, 8 грудня 2016 року, (керівник семінару – професор О. Б. Скасків);

— Київському семінарі з функціонального аналізу в Інституті математики НАН України, 15 березня 2017 року (керівники семінару: академік НАН України Ю. М. Березанський, академік НАН України Ю. С. Самойленко, чл.-кор. НАН України А. Н. Кочубей);

— міжвузівському семінарі по теорії функцій у Дніпропетровському національному університеті ім. О. Гончара, 22 березня 2017 року, (керівник семінару – чл.-кор. НАН України В. П. Моторний).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у роботах [105, 121, 123; 149–151; 155–159; 193–203], у наукових виданнях, внесених до переліку фахових видань із фізико-математичних наук, з них 15 — у співавторстві і 7 — самостійно, 13 робіт [123, 149–151, 155, 157–159, 193, 195, 196, 202, 203] надруковано у виданнях, внесених до міжнародних наукометричних баз.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з переліку умовних позначень, вступу, шести розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить 204 найменування. Повний обсяг роботи становить 337 сторінок друкованого тексту.

Висловлюю щиру подяку науковому консультанту Віктору Васильовичу САВЧУКУ, моєму першому Вчителю Олександру Івановичу СТЕПАНЦЮ та співавторам опублікованих статей.

Розділ 1

Огляд літератури

Всі твердження, які увійшли в дану роботу і не належать автору, наведено із зазначенням авторства і відповідним посиланням на джерело.

1.1 Критерій абсолютної збіжності ортогональних рядів

Нехай $C = C[-\pi, \pi]$ — простір неперервних на всій осі 2π-періодичних функцій $f(t)$ з нормою

$$\|f\|_C = \max_{t\in[-\pi,\pi]} |f(t)|,$$

функція $f \in C$ і

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1.1}$$

— її ряд Фур'є, тобто, для довільного $k = 0, 1, \ldots$

$$a_k = a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\, dt, \quad b_k = b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\, dt. \tag{1.2}$$

На початку минулого століття С. Н. Бернштейн (див. [13, 14, 15]) досліджував задачу про відшукання умов на функцію f для того, щоб ряд (1.1) збігався абсолютно і становив наступне твердження 1.1.1.

Нехай $E_n(f)_C$, $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$, — найкраще наближення функції f в просторі C тригонометричними поліномами порядку $n-1$:

$$E_n(f)_C = \inf_{t_{n-1}} \|f - t_{n-1}\|_C. \tag{1.3}$$

Твердження 1.1.1 *(С. Н. Бернштейн [15]). Якщо збігається ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\, E_n(f)_C, \tag{1.4}$$

то ряд Фур'є (1.1) збігається абсолютно.

При цьому С. Н. Бернштейн [15] також показав, що має місце і обернене твердження: *якщо монотонно спадна до нуля послідовність E'_n, $n = 1, 2, \ldots$, така, що ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\, E'_n$$

розбігається, то можна побудувати функцію f, для якої $E_n(f)_C < E'_n$ і при цьому її ряд (1.1) не збігається абсолютно.

Позначивши для довільної функції $f \in C$ через

$$\omega(f, \delta)_C := \sup_{|h| \le \delta} \|f(\cdot) - f(\cdot + h)\|_C,$$

її модуль неперервності, на основі відомої теореми Джексона (див., наприклад, [47, гл. IV]) з твердження 1.1.1 випливає такий наслідок.

Наслідок 1.1.1 *(С. Н. Бернштейн [15]). Якщо збігається ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\, \omega\big(f, \frac{1}{n}\big)_C, \tag{1.5}$$

то ряд Фур'є (1.1) збігається абсолютно.

Дані дослідження С. Н. Бернштейна були суттєво розвинено в роботах С.Б. Стєчкіна [131–135], який зокрема, в роботі [131] показав, що умова (1.5) є не тільки достатньою, але й необхідною для збіжності ряду (1.4).

Твердження 1.1.2 *(С. Б. Стєчкін [131]). Для того, щоб ряд (1.4) збігався, необхідно і достатньо, щоб збігався ряд (1.5).*

В цій же роботі С. Б. Стєчкін переніс результат твердження 1.1.1 на ряди Фур'є, побудовані за довільною ортогональною системою з простору $L_2[a, b]$ сумовних в квадраті на проміжку $[a, b]$ функцій, а в роботі [134] встановив критерій абсолютної збіжності ортогональних рядів в довільному гільбертовому просторі. Для формулювання цього критерія введемо деякі позначення.

Нехай $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормований базис гільбертового простору H, $f \in H$, і

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k) \varphi_k \tag{1.6}$$

— розклад елемента f в ортогональний ряд за системою φ.

Ставиться задача про знаходження необхідних та достатніх умов для того, щоб для даного елемента $f \in H$ збігався ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|. \tag{1.7}$$

Для розв'язку цієї задачі С. Б. Стєчкін [134] ввів величину

$$e_n(f, \varphi)_H = \inf_{P_{\gamma_n}} \|f - P_{\gamma_n}\|_H = \inf_{\gamma_n,\, d_k} \|f - \sum_{k \in \gamma_n} d_k \varphi_k\|_H, \tag{1.8}$$

де $P_{\gamma_n} = \sum\limits_{k \in \gamma_n} d_k \varphi_k$ — довільні n-членні ($n = 1, 2, \ldots$) поліноми за системою φ, γ_n — набори з n різних натуральних чисел, а d_k — будь-які комплексні числа.

Величину $e_n(f, \varphi)_H$ С. Б. Стєчкін назвав *найкращим квадратичним наближенням елемента f за допомогою n-членних поліномів за системою φ* і сформулював в термінах цих величин наступний критерій збіжності рядів вигляду (1.7).

Твердження 1.1.3 *(С. Б. Стєчкін [134]). Для того, щоб збігався ряд (1.7), необхідно та достатньо, щоб збігався ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} e_{n-1}(f, \varphi)_H. \tag{1.9}$$

Пізніше величини вигляду (1.8) почали активно досліджуватися математиками з точки зору апроксимації функцій. Результати, отримані для цих величин та їх різних аналогів та модифікацій, знайшли своє прикладне застосування в математичній статистиці, теорії сигналів тощо. З часом дані дослідження сформувались в окремий напрямок теорії наближень. За цією тематикою вже написано сотні робіт та десятки монографій. Власне, дослідженню величин вигляду (1.8), а також їх різних аналогів та модифікацій присвячено розділи 2 та 3 даної дисертаційної роботи.

Повертаючись до питань, пов'язаних з абсолютною збіжністю ортогональних рядів, зазначимо, що наведені вище дослідження знайшли своє продовження, зокрема, в роботах [41, 38]. З цих результатів відмітимо окремо твердження, отримане в [41].

Твердження 1.1.4 *(Р. ДеВор, В. М. Темляков [41]). Для того, щоб збігався ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^s, \qquad 0 < s < 2, \tag{1.10}$$

необхідно та достатньо, щоб збігався ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s/2}\, e_{n-1}^s(f,\varphi)_H. \tag{1.11}$$

Зазначимо, що у дисертаційній роботі питання абсолютної збіжності рядів та інтегралів розглядаються в підрозділах 5.5 та 2.5.1.

1.2 Найкращі n-членні тригонометричні наближення

1.2.1. Нехай d — фіксоване натуральне число, $\mathbb{R}^d$ та $\mathbb{Z}^d$ — множини усіх впорядкованих наборів $\mathbf{k} := (k_1, \ldots, k_d)$ відповідно із d дійсних та цілих чисел і $\mathbb{T}^d := [-\pi, \pi]^d$.

Нехай, далі, $L_p := L_p(\mathbb{T}^d)$, $1 \le p \le \infty$, — простір всіх вимірних за Лебегом на $\mathbb{R}^d$ функцій $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_d)$, 2π-періодичних по кожній змінній, зі скінченною нормою

$$\|f\|_{L_p} = \|f\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} := \begin{cases} \left((2\pi)^{-d} \displaystyle\int_{\mathbb{T}^d} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \le p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{x}\in\mathbb{T}^d} |f(\mathbf{x})|, & p = \infty. \end{cases} \tag{1.12}$$

Позначимо через $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := x_1 y_1 + \ldots + x_d y_d$ евклідів скалярний добуток елементів $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$, покладемо $e_{\mathbf{k}} := e_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$, і для довільної функції $f \in L_1$ означимо її коефіцієнти Фур'є виразом

$$\widehat{f}(\mathbf{k}) := (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x}) \overline{e}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d,$$

де $\overline{z}$ — число, комплексно-спряжене з z.

Наслідуючи О. І. Степанця (див., наприклад, [144 (гл. XI)]), позначимо через $S^p := S^p(\mathbb{T}^d)$, $0 < p < \infty$, простір всіх функцій $f \in L_1$, для яких

$$\|f\|_{S^p} = \|f\|_{S^p(\mathbb{T}^d)} := \|\{\widehat{f}(\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}\|_{l_p(\mathbb{Z}^d)} = \Big(\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{f}(\mathbf{k})|^p\Big)^{\frac{1}{p}} < \infty. \tag{1.13}$$

Функції $f \in L_1$ та $g \in L_1$ вважаються еквівалентними в просторі S^p, коли $\|f-g\|_{S^p}=0$.

Позначимо також через Σ_n множину всіх тригонометричних поліномів вигляду $T = \sum_{\mathbf{k}\in\gamma_n} c_{\mathbf{k}} e_{\mathbf{k}}$, де γ_n — довільні набори n різних векторів з множини $\mathbb{Z}^d$, $c_{\mathbf{k}}$ — будь-які комплексні числа.

Для $f \in X$, де X — один із просторів L_p, $1 \le p \le \infty$, або S^p, $0 < p < \infty$, розглянемо величину

$$\sigma_n(f)_X := \inf_{T \in \Sigma_n} \|f - T\|_X = \inf_{\gamma_n, c_{\mathbf{k}}} \|f - \sum_{\mathbf{k} \in \gamma_n} c_{\mathbf{k}} e_{\mathbf{k}}\|_X. \qquad (1.14)$$

Якщо ж $\mathfrak{N} \subset X$, то покладаємо

$$\sigma_n(\mathfrak{N})_X := \sup_{f \in \mathfrak{N}} \sigma_n(f)_X. \qquad (1.15)$$

Величини $\sigma_n(f)_X$ та $\sigma_n(\mathfrak{N})_X$ називаються найкращим n-членним тригонометричним наближенням відповідно функції f та класу $\mathfrak{N}$ в просторі X.

Як вже зазначалось, величина вигляду (1.14) введена С. Б. Стєчкіним [134]. Варто відзначити, що раніше Е. Шмідт [204] розглядав величину найкращого білінійного наближення, яка є близькою до величин $\sigma_n(f)_X$. Перші оцінки величин вигляду (1.14) для деяких індивідуальних функцій були отримані в роботах Р. С. Ісмагілова [60], В. Є. Майорова [77, 78], Е. С. Белінського [7] та ін. Дослідження величин $\sigma_n(\mathfrak{N})_X$ для різних функціональних класів проводились, зокрема, в роботах В. М. Темлякова [164, 165, 166], Е. С. Белінського [8, 9], Б. С. Кашина [62, 64], Б. С. Кашина та В. М. Темлякова [63], А. С. Романюка [107–109, 112], Р. ДеВора та В. М. Темлякова [40], О. І. Степанця [141, 142, 148] та багатьох інших авторів.

Для практичних застосувань крім безпосередніх оцінок величин (1.14) та (1.15) також важливо для конкретної функції чи класу конструктивно описати вигляд поліномів $\sum_{\mathbf{k} \in \gamma_n} c_{\mathbf{k}} e_{\mathbf{k}}$ (тобто, задати спосіб вибору множин γ_n та коефіцієнтів $c_{\mathbf{k}}$), для яких ці оцінки реалізуються. Тому поряд з величинами вигляду (1.14) для $f \in X$ розглядають також величини

$$\sigma_n^{\perp}(f)_X := \inf_{\gamma_n} \|f(\cdot) - \sum_{\mathbf{k} \in \gamma_n} \widehat{f}(\mathbf{k}) e_{\mathbf{k}}\|_X \qquad (1.16)$$

та

$$\|f - G_n(f)\|_X := \|f - \sum_{l=1}^{n} \widehat{f}(\mathbf{k}_l) e_{\mathbf{k}_l}\|_X. \qquad (1.17)$$

В (1.17) для даної функції $f \in X$ через $\{\mathbf{k}_l\}_{l=1}^{\infty} = \{\mathbf{k}_l(f)\}_{l=1}^{\infty}$ позначається така перестановка векторів $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$, що

$$|\widehat{f}(\mathbf{k}_1)| \ge |\widehat{f}(\mathbf{k}_2)| \ge \ldots . \qquad (1.18)$$

Якщо така перестановка не єдина, то через $\{\mathbf{k}_l\}_{l=1}^{\infty}$ позначають будь-яку з перестановок, яка задовольняє умову (1.18).

Величину (1.16) називають найкращим n-членним ортогональним тригонометричним наближенням функції f в просторі X, а величину (1.17) — наближенням в просторі X функції f за допомогою гріді (*англ.* "greedy" — жадібний) апроксимант, побудованих за тригонометричною системою.

Якщо $\mathfrak{N}$ — деяка підмножина з простору X, то покладають

$$\sigma_n^{\perp}(\mathfrak{N})_X := \sup_{f\in\mathfrak{N}} \sigma_n^{\perp}(f)_X. \tag{1.19}$$

Величини (1.17), взагалі кажучи, залежать від вибору перестановки, яка задовольняє співвідношення (1.18). Тому для однозначності покладаємо

$$G_n(\mathfrak{N})_X := \sup_{f\in\mathfrak{N}} \inf_{\{\mathbf{k}_l(f)\}_{l=1}^{\infty}} \|f(\cdot) - \sum_{l=1}^{n} \widehat{f}(\mathbf{k}_l(f)) e_{\mathbf{k}_l(f)}\|_X. \tag{1.20}$$

В (1.20) для довільної функції $f \in \mathfrak{N}$ розглядається інфімум по всіх перестановках, які задовольняють (1.18), але слід зазначити, що всі наведені нами результати справджуються і для довільної іншої перестановки, яка задовольняє співвідношення (1.18).

Величина вигляду (1.16), мабуть, вперше була розглянута Е. С. Белінським [10]. Пізніше найкращі n-членні ортогональні тригонометричні наближення різних функціональних класів вивчалися в роботах А. С. Романюка [110, 111, 113], С. А. Стасюка [128] та ін. Дослідженню величин вигляду (1.17) присв'ячено дуже велику кількість робіт. З основними результатами, пов'язаними з нелінійною апроксимацією функцій та її застосуваннями, можна ознайомитись в оглядових статтях Р. ДеВора [42], Дін Зунга, В. М. Темлякова та Т. Ульріха [51], Р. ДеВора та А. Кохена [44], П.-А. Ніцше [97], а також книгах В. М. Темлякова [165, 167, 168, 169], Е. С. Белінського та Р. М. Тригуба [176], Р. ДеВора та А. Куноз [43], А. С. Романюка [114] та ін.

Поряд з величинами (1.14), (1.16) та (1.17) для функцій $f \in X$ природно також розглянути величини

$$E_{\gamma_n}(f)_X := \inf_{c_{\mathbf{k}}} \|f(\cdot) - \sum_{\mathbf{k}\in\gamma_n} c_{\mathbf{k}} e_{\mathbf{k}}\|_X, \tag{1.21}$$

та

$$\mathscr{E}_{\gamma_n}(f)_X := \|f(\cdot) - \sum_{\mathbf{k}\in\gamma_n} \widehat{f}(\mathbf{k}) e_{\mathbf{k}}\|_X, \tag{1.22}$$

де, як і раніше, X — один із просторів L_p або S^p, γ_n — довільний набір із n різних векторів з множини $\mathbb{Z}^d$, $c_{\mathbf{k}}$ — будь-які комплексні числа, а також величини

$$\mathscr{D}_n(\mathfrak{N})_X := \inf_{\gamma_n} E_{\gamma_n}(\mathfrak{N})_X = \inf_{\gamma_n} \sup_{f\in\mathfrak{N}} E_{\gamma_n}(f)_X, \tag{1.23}$$

де $\mathfrak{N} \subset X$ та

$$\mathscr{D}_n^{\perp}(\mathfrak{N})_X := \inf_{\gamma_n} \mathscr{E}_{\gamma_n}(\mathfrak{N})_X = \inf_{\gamma_n} \sup_{f \in \mathfrak{N}} \mathscr{E}_{\gamma_n}(f)_X. \tag{1.24}$$

Величину $E_{\gamma_n}(f)_X$ називають найкращим наближенням в просторі X функції f тригонометричними поліномами, гармоніки яких належать множині γ_n, а величину $\mathscr{E}_{\gamma_n}(f)_X$ — наближенням в просторі X функції f сумами Фур'є, гармоніки яких належать множині γ_n. Величини $\mathscr{D}_n(\mathfrak{N})_X$ та $\mathscr{D}_n^{\perp}(\mathfrak{N})_X$ називають відповідно тригонометричним поперечником та ортопроекційним тригонометричним поперечником порядку n множини $\mathfrak{N}$ в просторі X.

З означень розглянутих величин випливає, що для довільного набору $\gamma_n \subset \mathbb{Z}^d$ мають місце співвідношення

$$\sigma_n(\mathfrak{N})_X \le \mathscr{D}_n(\mathfrak{N})_X \le E_{\gamma_n}(\mathfrak{N})_X \tag{1.25}$$

та

$$\sigma_n(\mathfrak{N})_X \le \sigma_n^{\perp}(\mathfrak{N})_X \le \mathscr{D}_n^{\perp}(\mathfrak{N})_X \le \mathscr{E}_{\gamma_n}(\mathfrak{N})_X, \tag{1.26}$$

для довільної функції $f \in L_p$ — співвідношення

$$\sigma_n(f)_{L_p} \le \sigma_n^{\perp}(f)_{L_p} \le \|f - G_n(f)\|_{L_p}. \tag{1.27}$$

а для довільної функції $f \in S^p$, внаслідок (1.13) — співвідношення

$$\sigma_n(f)_{S^p} = \sigma_n^{\perp}(f)_{S^p} = \|f - G_n(f)\|_{S^p}. \tag{1.28}$$

1.2.2. Класи $\mathcal{F}_{q,r}^{\psi}$ та їх апроксимативні характеристики. Позначимо через l_p^d, $0 < p \le \infty$, простір всіх послідовностей $\mathbf{x} = \{x_k\}_{k=1}^d \in \mathbb{R}^d$ зі стандартною l_p-нормою (квазі-нормою)

$$|\mathbf{x}|_p := \|\mathbf{x}\|_{l_p^d} = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^d |x_k|^p \right)^{1/p}, & 0 < p < \infty, \\ \sup_{1 \le k \le d} |x_k|, & p = \infty. \end{cases}$$

Розглянемо наступні функціональні класи

$$\mathcal{F}_{q,r}^{\psi} = \mathcal{F}_{q,r}^{\psi}(\mathbb{T}^d) := \left\{ f \in L_1(\mathbb{T}^d) \ : \ \|\{\widehat{f}(\mathbf{k})/\psi(|\mathbf{k}|_r)\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d}\|_{l_q(\mathbb{Z}^d)} \le 1 \right\}, \tag{1.29}$$

де $\psi = \psi(t)$, $t \ge 1$, — фіксована додатна спадна функція, $\psi(0) := \psi(1)$ і $0 < q, r \le \infty$.

Зазначимо, що коли $\psi(t) = t^{-s}$, $s \in \mathbb{N}$ і $q = 1$, класи $\mathcal{F}_{q,\infty}^{\psi} =: \mathcal{F}_{q,\infty}^{s}$ є множинами функцій, у яких частинні похідні порядку s мають абсолютно збіжні ряди Фур'є.

Якщо ж $q = 2$, то класи $\mathcal{F}^s_{2,\infty}$ еквівалентні одиничним кулям відомих класів Соболєва W^s_2. Апроксимативні характеристики класів $\mathcal{F}^\psi_{q,r}$ для різних $r \in (0, \infty]$ і різних функцій ψ досліджувались в роботах [40, 166, 72, 141, 142, 144 (гл. XI)] та інших.

Наведемо деякі результати, які безпосередньо стосуються наших досліджень.

Для довільного дійсного числа a позначимо $(a)_+ := \max\{0, a\}$.

Твердження 1.2.1 *(Р. ДеВор, В. М. Темляков [40]). Нехай $1 \le p \le \infty$, $0 < q \le \infty$, $r = \infty$, $\psi(t) = t^{-s}$, $s > 0$. Тоді для всіх $s > d(1 - \frac{1}{q})_+$ має місце оцінка*

$$\sigma_n(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{L_p} = \sigma_n(\mathcal{F}^s_{q,\infty})_{L_p} \asymp n^{-\frac{s}{d} - \frac{1}{q} + \frac{1}{2}}. \tag{1.30}$$

Тут і далі для додатних послідовностей $a(n)$ та $b(n)$ вираз "$a(n) \asymp b(n)$" означає, що існують такі сталі $K_1, K_2 > 0$, що при всіх $n \in \mathbb{N}$ виконуються нерівності $a(n) \le K_2 b(n)$ (в цьому випадку пишемо "$a(n) \ll b(n)$") і $a(n) \ge K_1 b(n)$ (в такому випадку пишемо "$a(n) \gg b(n)$").

Твердження 1.2.2 *(В. М. Темляков [166]). Нехай $1 \le p \le \infty$, $0 < q \le \infty$, $r = \infty$, $\psi(t) = t^{-s}$, $s > 0$. Тоді для всіх $s > d(1 - \frac{1}{q})_+$ має місце оцінка*

$$G_n(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{L_p} = G_n(\mathcal{F}^s_{q,\infty})_{L_p} \asymp \begin{cases} n^{-\frac{s}{d} - \frac{1}{q} + \frac{1}{2}}, & 1 \le p < 2, \\ n^{-\frac{s}{d} + 1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}}, & 2 \le p < \infty. \end{cases} \tag{1.31}$$

Твердження 1.2.3 *(В.С. Романюк [115]). Нехай $2 \le p \le \infty$, $0 < q \le \infty$, $r = 1$, $\psi(t) = R^{-t}$, $R > 1$. Тоді має місце оцінка*

$$\sigma^\perp_n(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{L_p} \asymp R^{-n^{\frac{1}{d}}} n^{\frac{d-1}{d}(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q})}. \tag{1.32}$$

Окремо слід також відмітити результати О. І. Степанця, який отримав точні значення важливих апроксимативних характеристик класів $\mathcal{F}^\psi_{q,r}$ у просторах $S^p(\mathbb{T}^d)$, і саме ці результати суттєво використовуються в підрозділі 3.1.1.

Твердження 1.2.4 *(О. І. Степанець [148, 144 (гл. XI)]). Нехай $0 < q \le p < \infty$, $\psi = \psi(t)$, $t \ge 0$, — довільна додатна функція, яка задовольняє умову*

$$\lim_{t \to \infty} \psi(t) = 0. \tag{1.33}$$

Тоді для довільного натурального n виконуються рівності

$$\mathscr{D}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p} = \mathscr{D}^{\perp}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p} = \bar{\psi}(n+1); \tag{1.34}$$

та

$$\sigma^p_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p} = \sup_{l>n}(l-n)\Big(\sum_{j=1}^{l}\bar{\psi}^{-q}(j)\Big)^{-\frac{p}{q}}, \tag{1.35}$$

в яких $\bar{\psi} = \bar{\psi}(j)$, $j = 1,2,\ldots,$ — незростаюча перестановка системи чисел $\psi(|\mathbf{k}|_r)$, $\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d$. При цьому точна верхняя межа в правій частині (1.35) *досягається при деякому скінченному значенні $l = l_n$.*

Твердження 1.2.5 *(О. І. Степанець [148, 144 (гл. XI)]). Нехай $0 < p < q < \infty$, $\psi = \psi(t)$, $t \geq 0$, — довільна додатна функція, яка задовольняє умову*

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}\psi^{\frac{pq}{q-p}}(|\mathbf{k}|_r) < \infty, \tag{1.36}$$

Тоді для довільного натурального n виконуються рівності

$$\mathscr{D}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)} = \mathscr{D}^{\perp}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)} = \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty}\bar{\psi}^{\frac{pq}{q-p}}(k)\Big)^{\frac{q-p}{pq}}, \tag{1.37}$$

та

$$\sigma_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p} = \bigg((l_n-n)^{\frac{q}{q-p}}\Big(\sum_{k=1}^{l_n}\bar{\psi}^{-q}(k)\Big)^{\frac{p}{q-p}} + \sum_{k=l_n+1}^{\infty}\bar{\psi}^{\frac{pq}{q-p}}(k)\bigg)^{\frac{q-p}{pq}}, \tag{1.38}$$

де $\bar{\psi} = \bar{\psi}(j)$, $j = 1,2,\ldots,$ — незростаюча перестановка системи чисел $\psi(|\mathbf{k}|_r)$, $\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d$, а число l_n в (1.38) вибране з умови

$$\bar{\psi}^{-q}(l_n) \leq \frac{1}{l_n-n}\sum_{k=1}^{l_n}\bar{\psi}^{-q}(k) < \bar{\psi}^{-q}(l_n+1).$$

Таке число l_n існує та єдине при кожному $n\in\mathbb{N}$.

1.3 Найкращі наближення інтегралів за допомогою інтегралів скінченного рангу

1.3.1. В даному підрозділі розглядаються інтегральні аналоги величин $e_n(f,\varphi)_H$ — величини $e_\sigma(f)$, які були введені у 2003 році О. І. Степанцем [147] при відшуканні апроксимативних характеристик просторів S^p_Φ.

Нехай $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}, d\mu)$, $d \geq 1$, — d-вимірний евклідів простір точок $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$, визначений на борелевій σ-алгебрі $\mathcal{B}$, зі скінченною σ-адитивною неперервною мірою $d\mu$, $\mathbb{A}$ — μ-вимірна підмножина з $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}, d\mu)$, μ-міра якої дорівнює a, де a — скінчене число, або ж $a = \infty$:

$$\mu(\mathbb{A}) = \mathrm{mes}_\mu \mathbb{A} = a, \quad a \in (0, \infty];$$

$Y = Y(\mathbb{A}, d\mu)$ — множина всіх заданих на $\mathbb{A}$ функцій $f = f(\mathbf{x})$, вимірних відносно міри $d\mu$.

При заданому $p \in (0, \infty]$ через $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$ позначимо підмножину функцій y із $Y(\mathbb{A}, d\mu)$, для яких є скінченною величина

$$\|y\|_{L_p(\mathbb{A}, d\mu)} = \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{A}} | \, y(\mathbf{x})|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, & p \in (0, \infty), \\ \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{x} \in \mathbb{A}} | \, y(\mathbf{x})|, & p = \infty. \end{cases} \tag{1.39}$$

Відомо, что функціонал $\|\cdot\|_{L_p(\mathbb{A}, d\mu)}$, визначений співвідношенням (1.39), при $p \geq 1$ задає норму, а при $p \in (0, 1)$ — квазінорму на $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$.

Нехай, далі, $f \in L_1(\mathbb{A}, d\mu)$, σ — деяке додатне число, і $\Gamma_\sigma = \Gamma_\sigma(\mathbb{A})$ — множина всіх μ-вимірних підмножин γ_σ з $\mathbb{A}$, μ-міра яких дорівнює σ.

Розглянемо величини

$$e_\sigma(f) := \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \Big| \int\limits_{\mathbb{A}} f(\mathbf{x}) d\mu - \int\limits_{\gamma_\sigma} f(\mathbf{x}) d\mu \Big|. \tag{1.40}$$

Як вже зазначалось, ці величини вперше були розглянуті О. І. Степанцем в роботі [147]. Ідея їх введення бере свій початок від згаданої вище роботи С. Б. Стєчкіна [134]. Зв'язок величин $e_\sigma(f)$ та величин $e_n(f, \varphi)_H$, які означаються співвідношенням (1.8), легко бачити з таких міркувань.

Згідно з рівністю Парсеваля для будь-якого елемента $f \in H$ маємо

$$\|f - P_{\gamma_n}\|_H^2 = \sum_{k \bar{\in} \gamma_n} |f_k|^2 + \sum_{k \in \gamma_n} |f_k - d_k|^2 \geq \sum_{k \bar{\in} \gamma_n} |f_k|^2.$$

Звідси випливає, що

$$e_n^2(f, \varphi)_H = \inf_{\gamma_n} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2 - \sum_{k \in \gamma_n} |f_k|^2 \Big). \tag{1.41}$$

Порівнюючи рівності (1.41) і (1.40), робимо висновок, що величини $e_\sigma(f)$ можна розглядати як інтегральні аналоги величин $e_n(f, \varphi)_H$ і називати *найкращими наближеннями інтегралу функції f по множині $\mathbb{A}$ за допомогою інтегралів скінченного рангу (порядку) σ.*

1.3.2. Означення та деякі властивості перестановок функцій. При формулюванні та доведенні отриманих результатів нами суттєво використовується поняття спадної перестановки функції. Це поняття мабуть вперше з'явилось в роботах Гарді та Літтлвуда (див. [183 (гл. X)]) і згодом успішно використовувалось багатьма авторами. Наведемо необхідні означення, дотримуючись тексту з книги М.П. Корнєйчука [67 (гл. VI)] (див. також [147]). В ній розглядалися перестановки функцій однієї змінної, але основні означення придатні і в загальному випадку.

Нехай на μ-вимірній множині $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, $\mu(\mathbb{A}) = a$, де a — скінченне або нескінченне, задано невід'ємну і μ-вимірну функцію $\varphi(\mathbf{x})$. Для всіх $y \geq 0$ означимо функцію $m_\varphi(y)$:

$$m_\varphi(y) := \mu(\mathbb{E}_y), \quad \mathbb{E}_y = \{\mathbf{x} : \ \mathbf{x} \in \mathbb{A}, \ \varphi(\mathbf{x}) \geq y\}, \quad y \geq 0, \tag{1.42}$$

як міру множини $\mathbb{E}_y$ точок $\mathbf{x} \in \mathbb{A}$, для яких $\varphi(\mathbf{x}) \geq y$.

Функція $t = m_\varphi(y)$, яку називають функцією розподілу для $\varphi(\mathbf{x})$, не зростає при всіх $y \geq 0$, при цьому $m_\varphi(0) = a$. Якщо $m_\varphi(y)$ неперервна і строго спадає, то на проміжку $t \in (0, a)$ існує строго спадна обернена до неї функція $y = \bar{\varphi}(t)$, яку і називають спадною перестановкою функції $\varphi(\mathbf{x})$. В загальному випадку, в залежності від функції φ, $m_\varphi(y)$ може мати проміжки сталості, а також розриви першого роду в скінченній або ж зчисленній множині точок. Щоб однозначно визначити обернену до неї функцію, виправимо графік функції $m_\varphi(y)$ наступним чином. В кожній точці розриву y_j функції $m_\varphi(y)$ доповнимо її графік відрізком $y = y_j$, $m_\varphi(y_j-) \leq t \leq m_\varphi(y_j+)$, а на кожному проміжку $[\alpha, \beta]$, де $m_\varphi(y)$ стала, залишимо в її графіку тільки одну точку з координатами, наприклад, $y = (\alpha+\beta)/2$, $t = m_\varphi((\alpha+\beta)/2)$. В такому випадку кожному $t \in (0, a)$ буде відповідати єдина точка з координатами $(t, m_\varphi^{-1}(t))$. Це відображення і означає функцію $y = \bar{\varphi}(t)$ — перестановку функції $\varphi(\mathbf{x})$ в розглянутому випадку.

При будь-якому $y \geq 0$ міра Лебега множини точок $t \in (0, a)$, на якій $\bar{\varphi}(t) \geq y$, дорівнює $\mu(\mathbb{E}_y) = m_\varphi(y)$. Звідси, зокрема, випливає справедливість рівності

$$\int\limits_0^a F(\bar{\varphi}(t))dt = \int\limits_{\mathbb{A}} F(\varphi(\mathbf{x}))d\mu \tag{1.43}$$

для довільної функції F, для якої ці інтеграли існують (див. [183 (гл. X)]).

1.3.3. Властивості величин $e_\sigma(f)$. Наведемо низку загальних фактів, які прояснюють деякі властивості величин $e_\sigma(f)$ і будуть використовуватися надалі.

Якщо $f(\mathbf{x}) \geq 0$ для всіх $\mathbf{x} \in \mathbb{A}$, то величини $e_\sigma(f)$ зображуються у вигляді

$$e_\sigma(f) = \int\limits_{\mathbb{A}} f(\mathbf{x})d\mu - \sup_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \int\limits_{\gamma_\sigma} f(\mathbf{x})d\mu.$$

При цьому величину

$$\mathcal{J}_\sigma(f) := \sup_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \int\limits_{\gamma_\sigma} f(\mathbf{x})d\mu \tag{1.44}$$

називають *головним значенням рангу σ інтегралу $\int_{\mathbb{A}} f(\mathbf{x})d\mu$.*

Твердження 1.3.1 *(О. І. Степанець [147]). Для кожної невід'ємної функції $f \in L_1(\mathbb{A}, d\mu)$ точна верхняя межа в (1.44) реалізується на деякій множині $\gamma_\sigma^* \in \Gamma_\sigma$:*

$$\mathcal{J}_\sigma(f) = \sup_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \int\limits_{\gamma_\sigma} f(\mathbf{x})d\mu = \int\limits_{\gamma_\sigma^*} f(\mathbf{x})d\mu = \int\limits_0^\sigma \bar{f}(t)dt, \tag{1.45}$$

де $\bar{f}(t)$ — спадна перестановка функції f.

Твердження 1.3.2 *(О. І. Степанець [147]). Для кожної невід'ємної функції $f \in L_1(\mathbb{A}, d\mu)$*

$$e_\sigma(f) = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \Big(\int\limits_{\mathbb{A}} f(\mathbf{x})d\mu - \int\limits_{\gamma_\sigma} f(\mathbf{x})d\mu \Big) = \int\limits_\sigma^a \bar{f}(t)dt. \tag{1.46}$$

При цьому точна нижня межа в (1.46) реалізується на множині $\gamma_\sigma^* \in \Gamma_\sigma$, визначеній в співвідношенні (1.45).

Сформулюємо ще одну властивість величин $e_\sigma(f)$, отриману в роботі [158] (див. також [159]), яка суттєво використовується при доведення теорем 2.1.1 та 2.1.2.

Твердження 1.3.3 . *Нехай $f(\mathbf{x})$ — довільна невід'ємна сумовна на множині $\mathbb{A}$ функція, і $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ — послідовність таких невід'ємних функцій, що для будь-яких $n \in \mathbb{N}$ майже скрізь на $\mathbb{A}$ виконується нерівність*

$$f_n(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \tag{1.47}$$

і при цьому

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{A}} f_n(\mathbf{x})d\mu = \int_{\mathbb{A}} f(\mathbf{x})d\mu. \tag{1.48}$$

Тоді величина

$$e_\sigma(f_n) = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \int\limits_{\mathbb{A} \setminus \gamma_\sigma} f_n(\mathbf{x})d\mu = \int\limits_{\mathbb{A}} f_n(\mathbf{x})d\mu - \sup_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \int\limits_{\gamma_\sigma} f_n(\mathbf{x})d\mu$$

збігається до величини $e_\sigma(f)$ при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} e_\sigma(f_n) = e_\sigma(f).$$

Дійсно, для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ маємо

$$|e_\sigma(f) - e_\sigma(f_n)| = \Big| \int\limits_{\mathbb{A}} f(\mathbf{x})d\mu - \sup_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma} \int\limits_{\gamma_\sigma} f(\mathbf{x})d\mu - \Big(\int\limits_{\mathbb{A}} f_n(\mathbf{x})d\mu - \sup_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma} \int\limits_{\gamma_\sigma} f_n(\mathbf{x})d\mu \Big) \Big| =$$

$$= \Big| \int\limits_{\mathbb{A}} (f(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x}))d\mu - \Big(\sup_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma} \int\limits_{\gamma_\sigma} f(\mathbf{x})d\mu - \sup_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma} \int\limits_{\gamma_\sigma} f_n(\mathbf{x})d\mu \Big) \Big|. \tag{1.49}$$

Внаслідок (1.47) для будь-якого $\sigma < a$ маємо

$$0 \le \sup_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma} \int\limits_{\gamma_\sigma} f(\mathbf{x})d\mu - \sup_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma} \int\limits_{\gamma_\sigma} f_n(\mathbf{x})d\mu \le \sup_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma} \int\limits_{\gamma_\sigma} (f(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x}))d\mu \le \int\limits_{\mathbb{A}} (f(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x}))d\mu.$$

Звідси на підставі (1.48) та (1.49) отримуємо необхідне співвідношення:

$$|e_\sigma(f) - e_\sigma(f_n)| \le \int\limits_{\mathbb{A}} (f(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x}))d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Наслідок 1.3.1 . *Якщо функції f і f_n, $n \in \mathbb{N}$, задовольняють умови твердження умови твердження 1.3.3, а величина $e_\sigma(f_n)$ при всіх $n \in \mathbb{N}$ не перевищує деяку сталу C, то величина $e_\sigma(f)$ також не буде перевищувати цю сталу:*

$$e_\sigma(f) \le C.$$

Зазначимо також, що коли $f(\mathbf{x}) \ge 0$ при всіх $\mathbf{x} \in \mathbb{A}$ величини $e_\sigma(f)$ можна визначити також співвідношенням

$$e_\sigma(f) = e_\sigma(f)_{L_1(\mathbb{A},d\mu)} := \inf_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma} \|f - \chi_{\gamma_\sigma} f\|_{L_1(\mathbb{A},d\mu)}, \tag{1.50}$$

де $\chi_{\gamma_\sigma} = \chi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{x})$ — характеристична функція множини γ_σ, яка набуває значення 1 при $\mathbf{x} \in \gamma_\sigma$ та значення 0 при $\mathbf{x} \notin \gamma_\sigma$.

1.3.4. Найкращі наближення інтегралів за допомогою інтегралів скінченного рангу на деяких класах функцій. Нехай $U_p(\mathbb{A}) = U_p(\mathbb{A}, d\mu)$ — одинична куля простору $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$:

$$U_p(\mathbb{A}) = U_p(\mathbb{A}, d\mu) = \{y \in Y(\mathbb{A}, d\mu) :\ \|y\|_{L_p(\mathbb{A},d\mu)} \le 1\},$$

$U_p^+(\mathbb{A}) = U_p^+(\mathbb{A}, d\mu)$ — підмножина всіх невід'ємних функцій з $U_p(\mathbb{A})$ і $\varphi(\mathbf{x})$ — невід'ємна істотно обмежена на $\mathbb{A}$ функція, для якої у випадку, коли множина $\mathbb{A}$ необмежена, припускається, що

$$\lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} \varphi(\mathbf{x}) = 0 \tag{1.51}$$

(в такому випадку пишемо $\varphi \in \Phi(\mathbb{A})$).

Будемо розглядати величини $e_\sigma(f)$, які означаються рівністю (1.40), для функцій $f = \varphi \cdot y$, де $\varphi \in \Phi(\mathbb{A})$, а y — деяка невід'ємна функція. Внаслідок (1.50) в цьому випадку вони будуть мати вигляд

$$e_\sigma(f) = e_\sigma(\varphi\, y) = e_\sigma(\varphi\, y)_{L_1(\mathbb{A},d\mu)} = \inf_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma} \|\varphi\, y - \chi_{\gamma_\sigma}\varphi\, y\|_{L_1(\mathbb{A},d\mu)}. \tag{1.52}$$

Для довільної фіксованої функції $\varphi \in \Phi(\mathbb{A})$ позначимо

$$e_\sigma(\varphi, 1) := e_\sigma(\varphi, 1)_{L_1(\mathbb{A},d\mu)} = \sup_{y\in U_1^+(\mathbb{A})} e_\sigma(\varphi\, y) = \sup_{y\in U_1^+(\mathbb{A})} e_\sigma(\varphi\, y)_{L_1(\mathbb{A},d\mu)}. \tag{1.53}$$

Твердження 1.3.4 *(О. І. Степанець [147]). Нехай $\varphi \in \Phi(\mathbb{A})$. Тоді при кожному $\sigma \in (0, a)$ справджується рівність*

$$e_\sigma(\varphi, 1) = \sup_{s\in(0,a]} (s-\sigma)\Big(\int\limits_0^s \frac{dt}{\bar\varphi(t)}\Big)^{-1}, \tag{1.54}$$

в якій $\bar\varphi(t)$ — спадна перестановка функції $\varphi(\mathbf{x})$. При цьому точна верхняя межа в правій частині (1.54) досягається при деякому скінченному значенні $s = s^*$.

Зазначимо, що умова (1.51) гарантує той факт, що для функції $\varphi(\mathbf{x})$ її функція розподілу $m_\varphi(y)$, яка означається співвідношенням (1.42), набуває тільки скінченні значення з проміжку $[0, a]$. Тому згідно з означенням спадної перестановки функції величина $\bar\varphi(t)$ визначена при будь-якому $t > 0$.

1.4 Наближення інтегралів інтегралами по заданих множинах

Для даних функції $f \in L_1(\mathbb{A}, d\mu)$ і додатного числа σ поряд з величинами $e_\sigma(f)$, які означаються співвідношенням (1.40), природно розглянути величини

$$E_{\gamma_\sigma}(f) := \Big|\int\limits_{\mathbb{A}\setminus\gamma_\sigma} f(\mathbf{x})d\mu\Big|, \tag{1.55}$$

де γ_σ — довільна фіксована множина з Γ_σ.

Величини $E_{\gamma_\sigma}(f)$ (як і величини $e_\sigma(f)$) розглядаємо у випадку, коли має місце зображення $f = \varphi \cdot y$, де $\varphi \in \Phi(\mathbb{A})$, а $y \in U_1^+(\mathbb{A})$. В такому випадку

$$E_{\gamma_\sigma}(f) = E_{\gamma_\sigma}(\varphi\, y) = E_{\gamma_\sigma}(\varphi\, y)_{L_1(\mathbb{A},d\mu)} = \|f - \chi_{\gamma_\sigma} f\|_{L_1(\mathbb{A},d\mu)}, \tag{1.56}$$

де, як і раніше, χ_{γ_σ} — характеристична функція множини γ_σ.

Позначимо

$$E_{\gamma_\sigma}(\varphi, 1) := E_{\gamma_\sigma}(\varphi, 1)_{L_1(\mathbb{A},d\mu)} = \sup_{y \in U_1^+(\mathbb{A})} E_{\gamma_\sigma}(\varphi\, y) = \sup_{y \in U_1^+(\mathbb{A})} E_{\gamma_\sigma}(\varphi\, y)_{L_1(\mathbb{A},d\mu)} \tag{1.57}$$

та

$$D_\sigma(\varphi, 1) := D_\sigma(\varphi, 1)_{L_1(\mathbb{A},d\mu)} = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} E_{\gamma_\sigma}(\varphi, 1) = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} E_{\gamma_\sigma}(\varphi, 1)_{L_1(\mathbb{A},d\mu)}. \tag{1.58}$$

Зауважимо, що у випадку наближення періодичних функцій тригонометричними поліномами величинам $E_{\gamma_\sigma}(f)$ можна поставити у відповідність найкраще наближення функції f поліномами порядку σ в даному просторі, величині $E_{\gamma_\sigma}(\varphi, 1)_{L_1(\mathbb{A},d\mu)}$ — точну верхню межу таких наближень по заданій множині функцій, а величина $D_\sigma(\varphi, 1)_{L_1(\mathbb{A},d\mu)}$ нагадує тригонометричний поперечник порядку σ заданої множини функцій у даному просторі.

Твердження 1.4.1 *(О. І. Степанець [147]). Нехай $\varphi \in \Phi(\mathbb{A})$. Тоді для довільних $\sigma > 0$ та $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$ має місце рівність*

$$E_{\gamma_\sigma}(\varphi, 1) = \bar{\varphi}_{\gamma_\sigma}(0+),$$

в якій $\bar{\varphi}_{\gamma_\sigma}$ — спадна перестановка функції

$$\varphi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{x}) := (1 - \chi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{x}))\varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{A}, \tag{1.59}$$

і

$$D_\sigma(\varphi, 1) = \bar{\varphi}(\sigma+),$$

де $\bar{\varphi}$ — спадна перестановка функції $\varphi(\mathbf{x})$. При цьому в Γ_σ є множина γ_σ^*, для якої

$$E_{\gamma_\sigma^*}(\varphi, 1) = D_\sigma(\varphi, 1) = \bar{\varphi}(\sigma+).$$

Зокрема, в ролі γ_σ^* можна взяти будь-яку вимірну підмножину множини $\{\mathbf{x} \in \mathbb{A} :\ \varphi(\mathbf{x}) \geq \bar{\varphi}(\sigma+)\}$ μ-міри σ, що містить множину $\{\mathbf{x} \in \mathbb{A} :\ \varphi(\mathbf{x}) > \bar{\varphi}(\sigma+)\}$.

1.5 Апроксимативні характеристики просторів S^p_Φ

Простори S^p_Φ виникли в роботах О. І. Степанця (див., наприклад, [141, 144 (гл. XI), 147, 148]) в результаті пошуку ним нових підходів до задач теорії наближення функцій багатьох змінних. З часом цей матеріал сформувався в окрему тематику, по якій на даний час написано декілька десятків робіт. Підхід, який був при цьому запропонований О. І. Степанцем, дозволяє поширювати ідеї та методи теорії наближень на абстрактні лінійні простори, що в свою чергу дає можливість дивитися на функції із загальних позицій аналізу та приводить до досить змістовних результатів.

1.5.1. Означення просторів S^p_Φ. Простори S^p_Φ було введено в роботі [147]. При їх означенні та надалі в підрозділі будемо здебільшого використовувати позначення та означення, запропоновані в [147].

Нехай $\mathscr{X}$ і $\mathscr{Y}$ — деякі лінійні простори векторів x та y відповідно. Припустимо, що на $\mathscr{X}$ задано лінійний оператор Φ, який діє в $\mathscr{Y}$, а на деякій підмножині $\mathscr{Y}' \subset \mathscr{Y}$ визначено функціонал f. Нехай, далі, $E(\Phi)$ – множина значень оператора Φ, і $\mathscr{X}'$ – прообраз множини $\mathscr{Y}' \subset E(\Phi)$ при відображенні Φ. В такому випадку на $\mathscr{X}'$ можна визначити функціонал f' рівністю

$$f'(x) = f(\Phi(x)), \qquad x \in \mathscr{X}'. \tag{1.60}$$

Якщо в ролі f вибрати функціонал, що задає на $\mathscr{Y}'$ норму (або квазінорму), то рівність (1.60) буде визначати аналогічну величину на $\mathscr{X}'$. Саме такі міркування лежать в основі подальших побудов.

Нехай, як і у підрозділі 1.3, $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}, d\mu)$, $d \geq 1$, — d-вимірний евклідів простір точок $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$, визначений на борелевій σ-алгебрі $\mathcal{B}$, зі скінченною σ-адитивною неперервною мірою $d\mu$, $\mathbb{A}$ — μ-вимірна підмножина з $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}, d\mu)$, μ-міра якої дорівнює $a \in (0, \infty]$; $Y = Y(\mathbb{A}, d\mu)$ — множина всіх заданих на $\mathbb{A}$ функцій $y = y(\mathbf{x})$, вимірних відносно міри $d\mu$; $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$, $p \in (0, \infty]$, — підмножина всіх функцій $y \in Y(\mathbb{A}, d\mu)$, для яких є скінченною величина (1.39).

Нехай тепер $\mathscr{X}$ — деякий лінійний простір векторів x, і Φ — лінійний оператор, який діє з $\mathscr{X}$ в $Y := Y(\mathbb{A}, d\mu)$:

$$\Phi : \mathscr{X} \to Y(\mathbb{A}, d\mu), \quad \Phi(x) =: \widehat{x}, \quad x \in \mathscr{X}, \quad \widehat{x} \in Y(\mathbb{A}, d\mu).$$

Покладають

$$S^p_\Phi = S^p_\Phi(\mathscr{X}; Y) = \left\{ x \in \mathscr{X} : \|\widehat{x}\|_{L_p(\mathbb{A}, d\mu)} < \infty \right\}, \quad p \in (0, \infty]. \tag{1.61}$$

Таким чином, множина S_Φ^p — множина всіх векторів $x \in \mathscr{X}$, які є прообразами функцій з множини $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$ при відображенні Φ.

Елементи $x_1, x_2 \in S_\Phi^p$ вважають тотожними, якщо за мірою $d\mu$ майже скрізь $\widehat{x}_1(\mathbf{t}) = \widehat{x}_2(\mathbf{t})$.

Для елементів $x_1, x_2 \in S_\Phi^p$, $p \in (0, \infty]$, визначають Φ-відстань між ними за допомогою рівності

$$\rho_\Phi(x_1; x_2)_{p,\Phi} = \|\Phi(x_1 - x_2)\|_{L_p(\mathbb{A}, d\mu)}.$$

Нульовим елементом множини S_Φ^p називається елемент θ, для якого майже скрізь на $\mathbb{A}$ має місце рівність $\widehat{\theta}\,(\mathbf{t}) = 0$.

Відстань $\rho_\Phi(\theta; x)_{p,\Phi}$, $x \in S_\Phi^p$, називаєтся Φ–нормою елемента і позначається через $\|x\|_{p,\Phi}$. Таким чином, за означенням

$$\|x\|_{p,\Phi} = \rho_\Phi(\theta; x)_{p,\Phi} = \|\widehat{x}\|_{L_p(\mathbb{A}, d\mu)}. \tag{1.62}$$

Відомо, що при всіх $p \in (0, \infty]$ S_Φ^p — лінійний простір. При $p \geq 1$ функціонал $\|\cdot\|_{p,\Phi}$, який визначається співвідношенням (1.62), задовольняє всі аксіоми норми, а при $p \in (0,1)$ — аксіоми квазінорми. Тому S_Φ^p при $p \geq 1$ — лінійний нормований простір, а при $p \in (0,1)$ — простір із квазінормою.

Розглянемо декілька прикладів найпростіших реалізацій розглядуваних побудов. Всі вони взяті з роботи [147]. При цьому будемо казати, що деякий простір $\mathfrak{N}$ є частковим випадком простору S_Φ^p, якщо його можна отримати шляхом відповідного вибору простору $\mathscr{X}$, міри $d\mu$ і оператора Φ.

1. Простір S_φ^p. Нехай $\mathscr{X}$ — деякий лінійний комплексний простір і $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ – фіксована зчисленна система в ньому. Припустимо, що для довільної пари $x, y \in \mathscr{X}$, в якій хоча б один з векторів належить до φ, визначено деяке число — "скалярний добуток" (x, y) так, що виконуються умови:

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$, де $\overline{z}$ — число, комплексно спряжене з z;

2) $(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda(x_1, y) + \mu(x_2, y)$, λ, μ — довільні числа;

3) $(\varphi_k, \varphi_l) = \begin{cases} 0, & k \neq l; \\ 1, & k = l. \end{cases}$

Кожному елементу $x \in \mathscr{X}$ ставлять у відповідність систему чисел $\widehat{x}_\varphi(k)$ за допомогою рівностей

$$\widehat{x}(k) = \widehat{x}_\varphi(k) = (x, \varphi_k), \quad k = 1, 2, \ldots \quad (k \in \mathbb{N}),$$

і при фіксованому $p \in (0, \infty)$ покладають

$$S_\varphi^p = S_\varphi^p(\mathscr{X}) = \Big\{ x \in \mathscr{X} : \sum_{k=1}^{\infty} \big|\widehat{f}_\varphi(k)\big|^p < \infty \Big\}. \tag{1.63}$$

Елементи $x, y \in S_\varphi^p$ вважаються тотожними, якщо при всіх $k \in \mathbb{N}$ $\widehat{x}_\varphi(k) = \widehat{y}_\varphi(k)$.

Для векторів $x, y \in \mathscr{X}$ φ-відстань між ними означається рівністю

$$\rho_\varphi(x, y)_{p,\varphi} = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{x}_\varphi(k) - \widehat{y}_\varphi(k)|^p \Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.64}$$

Нульовим елементом простору S_φ^p називається вектор θ, для якого $\widehat{\theta}_\varphi(k) = 0$ при всіх $k \in \mathbb{N}$. Відстань $\rho_\varphi(\theta, x)_{p,\varphi}$, $x \in S_\varphi^p$, називається φ-нормою елемента x і позначається через $\|x\|_{p,\varphi}$. Таким чином,

$$\|x\|_{p,\varphi} = \rho_\varphi(\theta, x)_{p,\varphi} = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{x}_\varphi(k)|^p \Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.65}$$

Простори S_φ^p є частковим випадком просторів S_Φ^p. Дійсно, якщо в даному просторі $\mathscr{X}$ означити оператор Φ, який кожному $x \in \mathscr{X}$ ставить у відповідність послідовність $y = \{\widehat{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$; за множину $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}, d\mu)$ взяти простір $\mathbb{R}^1$ з мірою $d\mu$, носієм якої є множина $\mathbb{Z}^1$ цілочислових точок k, в яких $\mu(k) \equiv 1$; і покласти $\mathbb{A} = \big\{ k \in \mathbb{Z}^1, \quad k > 1 \big\}$, то в такому випадку $Y(\mathbb{A}, d\mu)$ — множина всіх послідовностей y, і функціонал (1.39) має вигляд

$$\|y\|_{L_p(\mathbb{A}, d\mu)} = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p \Big)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in (0, \infty)$$

$1'$. **Простори $S_\varphi^{p,\mu}$.** Ці простори вводяться так само, як і простори S_φ^p, тільки при цьому функціонали

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty} |\cdot|^p \Big)^{\frac{1}{p}}$$

в рівностях, які відповідають рівностям (1.63)–(1.65), замінюються на функціонали

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty} |\cdot|^p \mu_k^p \Big)^{\frac{1}{p}},$$

де $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ — задана система невід'ємних чисел, $\mu_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$. При цьому якщо $\mu_k \equiv 1$, то $S_\varphi^{p,\mu} = S_\varphi^p$.

Зрозуміло, що і ці простори є частковим випадком просторів S_Φ^p. Множиною $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}, d\mu)$ тут, як і для простору S_φ^p, є простір $\mathbb{R}^1$ з мірою $d\mu$, зосередженою на множині $\mathbb{Z}^1$ цілочислових точок k, в яких $\mu(k) = \mu_k$ і $\mathbb{A} = \{k \in \mathbb{Z}^1,\ k > 1\}$.

2. Простір $S^p = S^p_{\mathcal{F}}$. Покажемо, що простір S^p, означений в підрозділі 1.2, теж є частковим випадком просторів S^p_Φ. Візьмемо за $\mathscr{X}$ розглянутий вище простір $L_1(\mathbb{T}^d)$, за оператор Φ — оператор $\mathcal{F}$, який кожній функції $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$ ставить у відповідність послідовність її коефіцієнтів Фур'є:

$$\Phi(f) = \mathcal{F}(f) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x})\overline{e}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \widehat{f}(\mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d.$$

Цей оператор відображає простір $L_1(\mathbb{T}^d)$ у множину Y функцій $y(\mathbf{t})$, заданих на цілочисловій решітці $\mathbb{Z}^d$. Нехай $d\mu$ — міра в просторі $\mathbb{R}^d$, носієм якої є множина $\mathbb{Z}^d$, де вона дорівнює одиниці. В цьому випадку функціонал (1.39) має вигляд

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^d, d\mu)} = \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f(\mathbf{x})|^p d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} = \Big(\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{f}(\mathbf{k})|^p \Big)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in (0, \infty),$$

і відповідний простір S^p_Φ (який позначають S^p) визначається співвідношенням

$$S^p = S^p_{\mathcal{F}}\big(L_1(\mathbb{T}^d), Y\big) = \Big\{ f \in L_1(\mathbb{T}^d) : \quad \Big(\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^m} |\widehat{f}(\mathbf{k})|^p \Big)^{\frac{1}{p}} < \infty \Big\}.$$

Зазначимо, що простори S^p збігаються з розглянутими вище просторами $S^p_\varphi(\mathscr{X})$, якщо за $\mathscr{X}$ взяти простір $L_1(\mathbb{T}^d)$, за φ — систему функцій $\{\tau_s(\mathbf{x})\}_{s=1}^\infty$,

$$\tau_s(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} e_{\mathbf{k}_s}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{k}_s \in \mathbb{Z}^d, \quad s \in \mathbb{N},$$

утворену шляхом довільної фіксованої нумерації членів системи $(2\pi)^{-\frac{d}{2}} e_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$, і для кожного $s \in \mathbb{N}$ покласти

$$\widehat{f}_\tau(s) := (f, \tau_s) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x})\overline{\tau}_s(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x})\overline{e}_{\mathbf{k}_s}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \widehat{f}(\mathbf{k}_s), \quad \mathbf{k}_s \in \mathbb{Z}^d.$$

3. Розглянемо ще частковий випадок просторів S^p_Φ, які породжуються тотожним оператором, тобто коли $\Phi \equiv I$. Зрозуміло, що тоді повинно бути $\mathscr{X} = Y(\mathbb{A}, d\mu)$, $\widehat{x} = x$, і згідно з (1.61)

$$S^p_I = \{x \in \mathscr{X} : \|x\|_{L_p(\mathbb{A}, d\mu)} < \infty\} = L_p(\mathbb{A}, d\mu), \quad p \in (0, \infty].$$

1.5.2. Мультиплікатори. Наближаючі агрегати і об'єкти наближень. В ролі наближаючих агрегатів для елементів $x \in S^p_\Phi$ використовуються елементи з S^p_Φ, у яких образи мають носії γ_σ заданої міри σ. Відзначимо, що саме цей принцип закладено в класичному випадку при побудові, наприклад, тригонометричних поліномів для наближення даної періодичної функції, якщо під оператором Φ розуміти відображення функцій у множину їх коефіцієнтів Фур'є. В загальному випадку тут виникають проблеми, які викликані тим, що простори S^p_Φ можуть бути не повними. У зв'язку з цим вводять наступні позначення [147].

Нехай $\omega = \omega(\mathbf{t})$ — деяка функція з $Y(\mathbb{A}, d\mu)$. Тоді через M^ω_Φ позначають оператор, який діє з $\mathscr{X}$ в $\mathscr{X}$, і який даному $x \in \mathscr{X}$ ставить у відповідність елемент $x_\omega \in \mathscr{X}$ такий, що якщо $\Phi(x) = \widehat{x}$, то майже скрізь $\widehat{x}_\omega(\mathbf{t}) = \Phi(x_\omega) = \omega(\mathbf{t})\widehat{x}(\mathbf{t})$. Оператор M^ω_Φ називають мультиплікатором оператора Φ, який породжується функцією ω; через $\Omega_\Phi(\mathscr{X}) = \Omega_\Phi(\mathscr{X}, \mathscr{X})$ позначають підмножину функцій ω з $Y(\mathbb{A}, d\mu)$, для яких мультиплікатори M^ω_Φ існують.

Якщо $\mathfrak{N}$ і $\mathfrak{N}'$ — деякі підмножини з $\mathscr{X}$, $\omega \in \Omega_\Phi(\mathscr{X})$ і оператор M^ω_Φ відображає $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{N}'$, то кажуть, що M^ω_Φ має тип $(\mathfrak{N}, \mathfrak{N}')$. Зокрема, якщо M^ω_Φ відображає S^p_Φ в S^p_Φ, то оператор M^ω_Φ має тип (S^p_Φ, S^p_Φ) або, коротше, тип (p,p). Множину функцій ω, які породжують оператори типу (p,p), позначають через Ω^p_Φ.

Отже, якщо $\omega \in \Omega^p_\Phi$ і оператор M^ω_Φ діє з S^p_Φ, то він також діє і в S^p_Φ; при цьому кожному $x \in S^p_\Phi$ відповідає елемент $x_\omega = M^\omega_\Phi(x)$, для якого майже скрізь на $\mathbb{A}$ виконується рівність

$$\widehat{x}_\omega(\mathbf{t}) = \Phi(x_\omega) = \omega(\mathbf{t})\widehat{x}(\mathbf{t}), \quad \widehat{x}_\omega \in L_p(\mathbb{A}, d\mu). \tag{1.66}$$

Нехай при заданому $\sigma > 0$ γ_σ — μ-вимірна множина в $\mathbb{A}$, $\mathrm{mes}_\mu \gamma_\sigma = \sigma$, $\sigma \le a$, і $\lambda = \lambda(\mathbf{t})$ — вимірна функція з носієм γ_σ. Припустимо, що при даному $p \in (0, \infty)$ $\lambda \in \Omega^p_\Phi$ і $U_{\gamma_\sigma}(x;\lambda) := x_\lambda = M^\lambda_\Phi(x)$. Згідно з (1.66)

$$\widehat{U}_{\gamma_\sigma}(x;\lambda) = \Phi(U_{\gamma_\sigma}(x;\lambda)) = \begin{cases} \lambda(\mathbf{t})\widehat{x}(\mathbf{t}), & \mathbf{t} \in \gamma_\sigma; \\ 0, & \mathbf{t} \bar{\in} \gamma_\sigma, \end{cases} \quad x \in S^p_\Phi. \tag{1.67}$$

Саме елементи $U_{\gamma_\sigma}(x;\lambda)$ і розглядаються як наближаючі агрегати для $x \in S^p_\Phi$. Якщо при цьому $\lambda(\mathbf{t}) \equiv 1$ на γ_σ, тобто якщо $\lambda(\mathbf{t})$ співпадає з характеристичною функцією $\chi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{t})$ множини γ_σ, то покладають $U_{\gamma_\sigma}(x;\chi_{\gamma_\sigma}) =: U_{\gamma_\sigma}(x)$.

Нехай $\Gamma_\sigma = \Gamma_\sigma(\mathbb{A})$ — множина всіх вимірних підмножин з $\mathbb{A}$, міри яких дорівнюють σ. Кажуть, що при даному $p > 0$ оператор Φ задовольняє умову (A_p), якщо функції $\chi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{t})$ для всіх множин $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$ належать до Ω^p_Φ при довільних $\sigma \in [0, a)$. Таким чином, якщо Φ задовольняє умову (A_p), то всі елементи $U_{\gamma_\sigma}(x)$ визначені для довільних $x \in S^p_\Phi$ і належать до S^p_Φ. Елемент $U_{\gamma_\sigma}(x)$ називається звуженням елемента x рангу σ, елемент $U_{\gamma_\sigma}(x;\lambda)$ — λ-звуженням елемента x рангу σ.

Нехай p — довільне додатне число і $x \in S^p_\Phi$. Тоді внаслідок (1.62) і (1.67) маємо

$$\|x - U_{\gamma_\sigma}(x;\lambda)\|^p_{p,\Phi} = \|\,\widehat{x}(\mathbf{t}) - \widehat{U}_{\gamma_\sigma}(x;\lambda;\mathbf{t})\|^p_{L_p(\mathbb{A},d\mu)} =$$

$$= \int\limits_{\gamma_\sigma} |1-\lambda(\mathbf{t})|^p |\,\widehat{x}(\mathbf{t})|^p \, d\mu + \int\limits_{\mathbb{A}\setminus\gamma_\sigma} |\widehat{x}(\mathbf{t})|^p d\mu.$$

Звідси випливає таке твердження.

Твердження 1.5.1 *(О. І. Степанець [147]). Нехай $p \in (0,\infty)$, $x \in S^p_\Phi = S^p_\Phi(\mathscr{X};\mathscr{Y})$, $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$ і оператор Φ задовольняє умову (A_p). Тоді*

$$\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(x)_{p,\Phi} := \inf_{\lambda\in\Omega^p_\Phi} \|\, x - U_{\gamma_\sigma}(x;\lambda)\|_{p,\Phi} \;=\; \|\, x - U_{\gamma_\sigma}(x)\|_{p,\Phi}.$$

При цьому виконується рівність

$$\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(x)_{p,\Phi} \;=\; \|\, x\|^p_{p,\Phi} - \int\limits_{\gamma_\sigma} |\widehat{x}(\mathbf{t})|^p d\mu. \tag{1.68}$$

Таким чином, якщо $\chi_{\gamma_\sigma} \in \Omega^p_\Phi$, то серед усіх елементів $U_{\gamma_\sigma}(x;\lambda)$, які породжуються мультиплікаторами M^λ_Φ і задовольняють умову (1.67), найменше відхиляється від елемента x за Φ-нормою в просторі S^p_Φ елемент $U_{\gamma_\sigma}(x)$. Тобто, серед всіх λ-звужень x даного рангу σ найближчим до x є звуження при $\lambda(\mathbf{t}) \equiv 1$. Зрозуміло, що ця властивість є аналогом мінімальної властивості сум Фур'є в просторах L_2.

Нехай $\Gamma = \{\gamma_\sigma\}_{\sigma>0}$ — сім'я вимірних підмножин з $\mathbb{A}$, $\mathrm{mes}_\mu\gamma_\sigma = \sigma$, які вичерпують при $\sigma \to \infty$ всю множину $\mathbb{A}$, тобто такі, які мають ту властивість, що довільна точка $\mathbf{t} \in \mathbb{A}$ міститься у всіх множинах γ_σ при всіх достатньо великих значеннях σ і для довільного $x \in S^p_\Phi$

$$\lim_{\sigma\to\infty} \int\limits_{\gamma_\sigma\in\Gamma} |\,\widehat{x}(\mathbf{t})|^p \, d\mu \;=\; \int\limits_{\mathbb{A}} |\,\widehat{x}(\mathbf{t})|^p \, d\mu. \tag{1.69}$$

Об'єднуючи співвідношення (1.68) і (1.69), бачимо, що для будь-якого $x \in S^p_\Phi$

$$\lim_{\substack{\sigma\to\infty \\ \gamma_\sigma\in\Gamma}} \mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(x)_{p,\Phi} \;=\; 0. \tag{1.70}$$

Об'єктом наближення є класи Ψ-інтегралів всіх елементів, що належать одиничній кулі U^p_Φ простору S^p_Φ. Поняття Ψ-інтегралу вводиться таким чином [147]. Нехай $\Psi = \Psi(\mathbf{t})$ — довільна функція з $\Omega_\Phi(\mathscr{X})$, і M^Ψ_Φ — мультиплікатор оператора Φ, який породжується цією функцією. В такому випадку образ x_Ψ елемента x при відображенні M^Ψ_Φ називають Ψ-інтегралом елемента x і записують $M^\Psi_\Phi(x) = x_\Psi = \mathcal{J}^\Psi x$; при цьому x іноді зручно називати Ψ-похідною для x_Ψ і записувати $x = D^\Psi x_\Psi$.

Отже, якщо x_Ψ є Ψ-інтегралом для x, то майже скрізь

$$\widehat{x}_\Psi = \Phi(\mathcal{J}^\Psi x) = \Psi(\mathbf{t})\widehat{x}(\mathbf{t}). \tag{1.71}$$

Якщо $\mathfrak{N}$ — деяка підмножина з $\mathscr{X}$, то через $\Psi\,\mathfrak{N}$ позначається множина Ψ-інтегралів всіх тих $x \in \mathfrak{N}$, для яких вони існують. Зокрема, якщо U_Φ^p — одинична куля в деякому просторі S_Φ^p,

$$U_\Phi^p = \{x : x \in S_\Phi^p, \|\,x\|_{p,\Phi} \ \le 1\},$$

то ΨU_Φ^p — множина Ψ-інтегралів всіх $x \in U_\Phi^p$, для яких ці інтеграли існують.

Співставляючи співвідношення (1.71) і (1.66), бачимо, що в ролі функцій Ψ, для яких означення Ψ-інтеграла коректне, можна брати довільну функцію з $\Omega_\Phi(S_\Phi^p)$. В такому випадку виконується включення $\Psi S_\Phi^p \subset S_\Phi^p$.

Множини ΨU_Φ^p є тими об'єктами, для яких будемо розглядати традиційні задачі теорії наближень.

1.5.3. Апроксимативні характеристики. Одними із основних апроксимативних характеристик просторів S_Φ^p є величини $\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(x)_p$, $\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi U_\Phi^q)_p$ і $D_\sigma(\Psi U_\Phi^q)_p$, які визначаються в такий спосіб. Для кожної множини $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$ покладають

$$\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(x)_{p,\Phi} \ = \inf_{\lambda\in\Omega_\Phi^p} \|\,x - U_{\gamma_\sigma}(x;\lambda)\|_{p,\Phi} \quad x \in S_\Phi^p, \tag{1.72}$$

$$\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi U_\Phi^q)_{p,\Phi} = \sup_{x\in\Psi U_\Phi^q} \mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(x)_{p,\Phi}, \quad 0 < p,\, q < \infty \tag{1.73}$$

і

$$\mathscr{D}_\sigma(\Psi U_\Phi^q)_{p,\Phi} = \inf_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma} \mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi U_\Phi^q)_{p,\Phi}, \quad 0 < p,\, q < \infty. \tag{1.74}$$

У випадку наближення періодичних функцій тригонометричними поліномами величині $\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(x)_{p,\Phi}$ відповідає найкраще наближення функції x за допомогою поліномів степеня σ; величині $\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi U_\Phi^q)_{p,\Phi}$ — точна верхня межа на заданій множині функцій таких найкращих наближень. Величина $\mathscr{D}_\sigma(\Psi U_\Phi^q)_{p,\Phi}$ нагадує тригонометричний поперечник порядку σ множини ΨU_Φ^q.

Розглядаються також наступні характеристики, яким у періодичному випадку відповідають величини, пов'язані з найкращим σ-членним наближенням:

$$e_\sigma(x)_{p,\Phi} = \inf_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma} \mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(x)_{p,\Phi} = \inf_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma} \inf_{\lambda\in\Omega_\Phi^p} \|\,x - U_{\gamma_\sigma}(x;\lambda)\|_{p,\Phi},\ x \in S_\Phi^p \tag{1.75}$$

і

$$e_\sigma(\Psi U_\Phi^q)_{p,\Phi} = \sup_{x\in\Psi U_\Phi^q} e_\sigma(x)_{p,\Phi}, \quad 0 < p,\, q < \infty. \tag{1.76}$$

Далі, в наших розглядах обмежуємось випадком, коли відповідні характеристичні функції $\chi_{\gamma_\sigma}(\cdot)$ належать до Ω^p_Φ, тобто, коли оператор Φ задовольняє умову (A_p). Тоді згідно з твердженням 1.5.1 найбільший інтерес викликають величини (1.72)–(1.76), коли $\lambda(\mathbf{t}) = \chi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{t})$. У зв'язку з цим покладають

$$\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(x)_{p,\Phi} = \| x - U_{\gamma_\sigma}(x)\|_{p,\Phi}, \quad x \in S^p_\Phi, \tag{1.77}$$

$$\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi U^q_\Phi)_{p,\Phi} = \sup_{x\in\Psi U^q_\Phi} \mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(x)_{p,\Phi} \tag{1.78}$$

і

$$\mathscr{D}_\sigma(\Psi U^q_\Phi)_{p,\Phi} = \inf_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma} \mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi U^q_\Phi)_p. \tag{1.79}$$

Аналогічно,

$$e_\sigma(x)_{p,\Phi} = \inf_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma} \| x - U_{\gamma_\sigma}(x)\|_{p,\Phi} \tag{1.80}$$

і

$$e_\sigma(\Psi U^q_\Phi)_{p,\Phi} = \sup_{x\in\Psi U^q_\Phi} e_\sigma(x)_{p,\Phi} \ . \tag{1.81}$$

При $p = q$ точні значення величин $\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi U^q_\Phi)_{p,\Phi}$, $\mathscr{D}_\sigma(\Psi U^q_\Phi)_{p,\Phi}$ та $e_\sigma(\Psi U^q_\Phi)_{p,\Phi}$ були отримані О. І. Степанцем в роботі [147]. А саме, мають місце такі твердження 1.5.2 та 1.5.3, в яких припускаємо, що $\mathscr{X}$ — довільний лінійний простір, $\mathbb{A}$ — будь-яка μ-вимірна підмножина з $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}, d\mu)$, $\mathrm{mes}_\mu\mathbb{A} = a \in (0,\infty]$, і $\Phi : \mathscr{X} \to Y(\mathbb{A}, d\mu)$ — будь-який оператор, який задовольняє умову (A_p).

Твердження 1.5.2 *(О. І. Степанець [147]). Нехай $\Psi = \Psi(\mathbf{t})$ — довільна функція з множини $Y(\mathbb{A}, d\mu)$, істотно обмежена на $\mathbb{A}$:*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{t}\in\mathbb{A}} |\Psi(\mathbf{t})| < \infty, \tag{1.82}$$

для якої у випадку, коли множина $\mathbb{A}$ необмежена,

$$\lim_{|\mathbf{t}|\to\infty} \Psi(\mathbf{t}) = 0 \tag{1.83}$$

Тоді для довільних $p \in (0,\infty)$, $\sigma \in (0,a)$ і будь-якої множини $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$ справджуються оцінки

$$\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi U^p_\Phi)_{p,\Phi} \le \bar{\Psi}_{\gamma_\sigma}(0+), \tag{1.84}$$

де $\bar{\Psi}_{\gamma_\sigma}(v)$ — спадна перестановка функції

$$\Psi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{t}) = (1 - \chi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{t}))|\Psi(\mathbf{t})| \tag{1.85}$$

і

$$\mathscr{D}_\sigma(\Psi U^p_\Phi)_{p,\Phi} \le \bar{\Psi}(\sigma+0), \tag{1.86}$$

де $\bar{\Psi}(v)$ *— спадна перестановка функції* $|\Psi(\mathbf{t})|$.

Якщо, крім того, функції $\chi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{t})$ *при всіх* $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$, $\sigma \in (0,a)$, *належать множині* $E(\Phi)$ *значень оператора* Φ, *а їх прообрази* U_{γ_σ} *мають* Ψ*-інтеграли, то співвідношення (1.84) і (1.86) є рівностями. При цьому в* Γ_σ *існує множина* γ^*_σ, *для якої виконуються рівності*

$$\mathscr{E}_{\gamma^*_\sigma}(\Psi U^p_\Phi)_{p,\Phi} = \mathscr{D}_\sigma(\Psi U^p_\Phi)_{p,\Phi} = \bar{\Psi}(\sigma+0).$$

Зокрема, в ролі γ^*_σ *можна взяти будь-яку вимірну підмножину множини* $\{\mathbf{t} \in \mathbb{A} : |\Psi(\mathbf{t})| \ge \bar{\Psi}(\sigma+0)\}$, $\mathrm{mes}_\mu \gamma^*_\sigma = \sigma$, *яка містить множину* $\{\mathbf{t} \in \mathbb{A} : |\Psi(\mathbf{t})| > \bar{\Psi}(\sigma+0)\}$.

Твердження 1.5.3 *(О. І. Степанець [147]). Нехай* $\Psi = \Psi(\mathbf{t})$ *— довільна функція з* $Y(\mathbb{A}, d\mu)$, *суттєво обмежена на* $\mathbb{A}$, *для якої у випадку, коли множина* $\mathbb{A}$ *необмежена, виконується умова (1.83). Тоді для довільних* $p \in (0,\infty)$ *та* $\sigma \in (0,a)$ *має місце співвідношення*

$$e^p_\sigma(\Psi U^p_\Phi)_{p,\Phi} \le \sup_{\sigma<l\le a} (l-\sigma)\biggl(\int_0^l \frac{dt}{\bar{\Psi}^p(t)}\biggr)^{-1}, \tag{1.87}$$

в якому $\bar{\Psi}(v)$ *— спадна перестановка функції* $|\Psi(\mathbf{t})|$. *Точна верхня межа в (1.87) досягається при деякому скінченному значенні* $l = l^*$.

Якщо ж, крім того, множина $E(\Phi)$ *значень оператора* Φ *збігається з усім простором* $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$, *то співвідношення (1.87) є рівністю.*

Зазначимо, що умови (1.82) і (1.83) гарантують той факт, що для функції $|\Psi(\mathbf{t})|$ її функція розподілу $m_{|\Psi|}(y)$,

$$m_{|\Psi|}(y) = \mathrm{mes}_\mu \mathbb{E}_y, \quad \mathbb{E}_y = \{\mathbf{t} \in \mathbb{A} : |\Psi(\mathbf{t})| \ge y\}, \quad y \ge 0,$$

набуває при довільному $y > 0$ лише скінченні значення з проміжку $[0,a]$. Тому згідно з означенням спадної перестановки (див. підрозділ 1.3.2) функції $\bar{\Psi}_{\gamma_\sigma}(t)$ і $\bar{\Psi}(t)$ завжди визначені.

1.5.4. Наближення цілими функціями експоненціального типу. Розглянемо окремо приклад реалізації наведених вище побудов, в якому простори S^p_Φ не є сепарабельними [147]. Нехай $L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p < \infty$, — простір всіх вимірних за Лебегом на $\mathbb{R}^d$, $d \ge 1$, функцій $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_d)$ таких, що

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} = \biggl(\int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x}\biggr)^{1/p} < \infty. \tag{1.88}$$

Візьмемо за $\mathscr{X}$ та $\mathscr{Y}$ простір $L_2(\mathbb{R}^d)$ і задамо оператор Φ перетворенням Фур'є:

$$\Phi(f) = \widehat{f}(\mathbf{t}) = \mathcal{F}(f;\mathbf{t}) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x})\, e^{-i\mathbf{t}\mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad f \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

Відомо (див., наприклад, [129 (гл. I)]), що оператор $\mathcal{F}$ є унітарним на $L_2(\mathbb{R}^d)$. Отже, Φ-норма $\|f\|_{2,\Phi}$ елемента f збігається з його нормою в просторі $L_2(\mathbb{R}^d)$:

$$\|f\|_{2,\Phi} = \|\widehat{f}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \Big)^{1/2} = \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \tag{1.89}$$

і в цьому випадку простір $S^2_\Phi(L_2(\mathbb{R}^d),\ \mathbb{R}^d, dx)$ за формулою (1.61) має вигляд $S^2_\Phi = \{f:\ f \in L_2(\mathbb{R}^d)\}$, тобто $S^2_\Phi = \mathscr{X} = L_2(\mathbb{R}^d) = \mathscr{Y}$.

Множина $\Omega_2 = \Omega_2(L_2(\mathbb{R}^d))$ є множиною всіх вимірних на $\mathbb{R}^d$ функцій ω, для яких добуток $\omega(\mathbf{t})\widehat{f}(\mathbf{t})$ належить простору $L_2(\mathbb{R}^d)$ для будь-якої $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$.

Зрозуміло, що множина Ω_2 містить всі функції, істотно обмежені на $\mathbb{R}^d$. Зокрема, до Ω_2 належать істотно обмежені функції $\lambda_\sigma = \lambda_\sigma(\mathbf{x})$, носіями яких є обмежені множини γ_σ лебегової міри $\sigma > 0$ ($\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$) і отже, оператор Φ задовольняє умову (A_2). Тому для таких функцій λ і будь-якої функції $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$ можна вказати функцію $U_{\gamma_\sigma}(f;\lambda)$, для якої

$$\widehat{U}_{\gamma_\sigma}(f;\lambda;\mathbf{x}) = \mathcal{F}(U_{\gamma_\sigma}(f;\lambda));\mathbf{x}) = \begin{cases} \lambda(\mathbf{x})\widehat{f}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \gamma_\sigma; \\ 0, & \mathbf{x} \in \overline{\gamma_\sigma}. \end{cases} \tag{1.90}$$

Саме функції $U_{\gamma_\sigma}(f;\lambda)$ розглядаються в ролі агрегатів наближення для функцій із просторів $L_2(\mathbb{R}^d)$. Якщо при цьому $\lambda(\mathbf{x}) \equiv 1$ на γ_σ, тобто, якщо $\lambda(\mathbf{x})$ збігається з характеристичною функцією $\chi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{x})$ множини γ_σ, то покладають $U_{\gamma_\sigma}(f;\chi_{\gamma_\sigma}) = U_{\gamma_\sigma}(f)$.

Функції $U_{\gamma_\sigma}(f;\lambda)$ мають вигляд

$$U_{\gamma_\sigma}(f;\lambda;\mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \lambda_\sigma(\mathbf{t})\widehat{f}(\mathbf{t}) e^{i\mathbf{t}\mathbf{x}} d\mathbf{t} = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{z})\check{\lambda}_\sigma(\mathbf{x}-\mathbf{z}) d\mathbf{z}, \tag{1.91}$$

де

$$\check{\lambda}_\sigma(\mathbf{v}) = \mathcal{F}^{-1}(\lambda_\sigma;\mathbf{v}) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \lambda_\sigma(\mathbf{t}) e^{i\mathbf{v}\mathbf{t}} d\mathbf{t}$$

(див., наприклад, [4 (гл. III, п.61)]). Також відомо, що в такому випадку функції $U_{\gamma_\sigma}(f;\lambda;\mathbf{x})$ є цілими функціями експоненціального типу (див., наприклад, [4 (гл. V)].

Поняття ψ-інтегралу вводиться наступним чином [147]. Нехай $\psi = \psi(\mathbf{x})$ — деяка функція із множини Ω_2 і $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Тоді ψ-інтегралом f називається функція

$f_\psi = \mathcal{J} f$ із $L_2(\mathbb{R}^d)$, для якої

$$\widehat{f_\psi}(\mathbf{x}) = \mathcal{F}(f_\psi; \mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x})\widehat{f}(\mathbf{x}). \tag{1.92}$$

Зазначимо, що коли $\psi \in L_2(\mathbb{R}^d)$, то f_ψ можна зобразити у вигляді

$$f_\psi(\mathbf{x}) = \mathcal{J}^\psi f(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{z})\check{\psi}(\mathbf{x}-\mathbf{z})d\mathbf{z}, \quad \check{\psi}(\mathbf{v}) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \psi(\mathbf{t}) e^{i\mathbf{v}\mathbf{t}} d\mathbf{t}.$$

Множину ψ-інтегралів всіх функцій з одиничної кулі $U_2(\mathbb{R}^d) = \{\varphi : \|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le 1\}$ простору $L_2(\mathbb{R}^d)$ позначимо через ψU_2.

В прийнятих позначеннях має місце таке твердження.

Твердження 1.5.2$'$ *(О. І. Степанець [147]). Нехай $\psi(\mathbf{x})$ — будь-яка невід'ємна істотно обмежена на $\mathbb{R}^d$ функція, для якої*

$$\lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} |\psi(\mathbf{x})| = 0. \tag{1.93}$$

Тоді для довільної множини $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$ справджується співвідношення

$$\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(\psi U_2)_2 := \sup_{f\in\psi U_2} \|f - U_{\gamma_\sigma}(f)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \bar{\psi}_{\gamma_\sigma}(0+), \tag{1.94}$$

де $\bar{\psi}_{\gamma_\sigma}(v)$ — спадна перестановка функції

$$\psi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{x}) := (1 - \chi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{x}))\psi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \tag{1.95}$$

і

$$\mathscr{D}_\sigma(\psi U_2)_2 := \inf_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma} \mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(\psi U_2)_2 = \bar{\psi}(\sigma+), \tag{1.96}$$

де $\bar{\psi}$ — спадна перестановка функції $|\psi(\mathbf{t})|$. При цьому в Γ_σ існує множина γ^*_σ, для якої виконуються рівності

$$\mathscr{E}_{\gamma^*_\sigma}(\psi U_2)_2 = \mathscr{D}_\sigma(\psi U_2)_2 = \bar{\psi}(\sigma+).$$

Зокрема, в ролі γ^*_σ можна взяти будь-яку вимірну підмножину множини $\{\mathbf{t} \in \mathbb{A} : |\psi(\mathbf{t})| \ge \bar{\psi}(\sigma+)\}$, $\mathrm{mes}_\mu \gamma^*_\sigma = \sigma$, яка містить множину $\{\mathbf{t} \in \mathbb{A} :\ |\psi(\mathbf{t})| > \bar{\psi}(\sigma+0)\}$.

Твердження 1.5.3$'$ *(О. І. Степанець [147]). Нехай $\psi(\mathbf{x})$ — будь-яка невід'ємна істотно обмежена на $\mathbb{R}^d$ функція, яка задовольняє умову (1.93). Тоді при кожному $\sigma > 0$ справджується рівність*

$$e^2_\sigma(\psi U_2)_2 := \sup_{f\in\psi U_2} \inf_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma} \mathscr{E}^2_{\gamma_\sigma}(f)_2 = \sup_{s>\sigma}(s-\sigma)\Big(\int\limits_0^s \bar{\psi}^{\,-2}(t)\,dt\Big)^{-1}, \tag{1.97}$$

де $\bar{\psi}(t)$ — спадна перестановка функції $\psi(\mathbf{x})$. При цьому точна верхня межа в правій частині (2.127) досягається при деякому скінченному значенні $s = s^*$.

1.6 Простори послідовностей

Нехай l_p, $0 < p \le \infty$, простір всіх послідовностей $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ дійсних чисел зі стандартною нормою (квазі-нормою)

$$\|x\|_{l_p} = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\Big)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty, \tag{1.98}$$

і

$$\|x\|_{l_\infty} = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|. \tag{1.99}$$

Простори l_p відіграють важливу роль в математиці та теорії функцій зокрема. Їх властивості вивчалися і продовжують вивчатися багатьма вченими. Однак з часом виникла потреба узагальнення цих просторів. Ці узагальнення проводилися в різних напрямках. Приклади таких просторів, деякі їх властивості та апроксимативні характеристики розглядаються в даному підрозділі.

1.6.1. Простори зі змінним показником підсумовування. Нехай $\mathbf{p} = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна послідовність додатних чисел, що задовольняють умову

$$1 \le p_k \le K, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{1.100}$$

де K — деяка додатна стала. Через $l_{\mathbf{p}}$ позначимо простір всіх послідовностей $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ дійсних чисел зі скінченою нормою Люксембурга

$$\|x\|_{l_{\mathbf{p}}} := \inf\Big\{\alpha > 0: \ \sum_{k=1}^{\infty} \Big|\frac{x_k}{\alpha}\Big|^{p_k} \le 1\Big\}. \tag{1.101}$$

Зазначимо, що у випадку, коли послідовність $\mathbf{p}$ є сталою: $p_k = p$, $0 < p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, простори $l_{\mathbf{p}}$ співпадають зі звичайними просторами l_p. Якщо ж $\mathbf{p} = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна послідовність чисел, що задовольняють умову (1.100), то як зазначено в [54, лема 2.6], має місце рівність

$$l_{\mathbf{p}} = \Big\{x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \ : \quad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{p_k} < \infty\Big\}, \tag{1.102}$$

Простори $l_{\mathbf{p}}$ вперше з'явилися в літературі ще в 1931 в статті В. Орліча [99]. В цій роботі автор отримав таке твердження:

Твердження 1.6.1 *(В. Орліч [99]). Нехай* $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ *та* $\mathbf{p} = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— послідовності дійсних чисел таких, що* $p_k > 1$, $k \in \mathbb{N}$, *і*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{p_k} < \infty.$$

Тоді для збіжності ряду $\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ *необхідно і достатньо, що для деякого числа* λ, $0 < \lambda < 1$, *збігався ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda y_k|^{p'_k}, \qquad \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p'_k} = 1.$$

Даний результат є нерівністю типу Гельдера в просторі $l_{\mathbf{p}}$. В цій же роботі В. Орліч також розглянув функціональні простори Лебега $L^{p(x)}$ зі змінним показником сумовності на дійсній прямій, і одержав аналогічну нерівність типу Гельдера у цих просторах.

Зазначена робота В. Орліча поклала початок цілій теорії так званих просторів зі змінним показником. Дана теорія почала розроблятися багатьма математиками в різних напрямах. Отримані результати знайшли своє застосування теорії пружності, механіці, теорії диференціальних операторів, варіаційному численні (див., наприклад, [118, 49, 50, 124]).

Простори $l_{\mathbf{p}}$ досліджувались в роботах [54, 93, 94, 95]. Зокрема, в роботі [93] були знайдені критерії еквівалентності норм в просторах $l_{\mathbf{p}}$ і $l_{\mathbf{q}}$ та умови обмеженості операторів зсуву. В роботі [95] отримано умови вкладення для просторів l_p, а в роботі [94] вивчено властивості максимального оператора та оператора усереднення в цих просторах.

1.6.2. Дискретні простори Орліча. Нехай $M(t)$, $t \geq 0$, — довільна функція Орліча, тобто, неспадна опукла функція така, що $M(0) = 0$ і $M(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Дискретним простором Орліча l_M [101], який визначається функцією $M(t)$, називають лінійний простір всіх послідовностей $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ дійсних чисел таких, що $\sum_k M(|x_k|) < \infty$. Наділений нормою

$$\|x\|_{l_M} := \inf\left\{\alpha > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} M(|x_k|/\alpha) \leq 1\right\} \tag{1.103}$$

цей простір є банаховим.

Кажуть, що функція Орліча $M(t)$ задовольняє Δ_2-умову, якщо при всіх $t \geq 0$ виконується нерівність $M(2t) \leq KM(t)$, де $K > 0$ — деяка стала.

Зазначимо, що у випадку, коли $M(t) = t^p$, $p \geq 1$, простори l_M збігаються зі звичайними просторами l_p. Якщо ж функція $M(t)$ задовольняє Δ_2-умову, то виконується рівність (див, наприклад, [74 (гл. IV)]):

$$l_M = \Big\{ x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \ : \ \sum_{k=1}^{\infty} M(|x_k|/\alpha) < \infty \quad \forall \alpha > 0 \Big\}, \tag{1.104}$$

а система векторів $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ (де $e_i = \{e_{ik}\}_{k=1}^{\infty}$, $e_{ik} = 0$ при $k \neq i$ і $e_{ii} = 1$) є базисом в цьому просторі.

В 1932 році В. Орліч [100] розглянув простори L_M вимірних на дійсній осі функцій f таких, що $\int M(|f(t)|)\,dt < \infty$ і встановив низку властивостей таких просторів за умови, що функція M задовольняє Δ_2-умову. Пізніше були введені простори Орліча функцій означених на множинах нескінченної міри, а також на множинах з ненеперервною мірою (див., наприклад, монографії [57 (гл. IV), 76 (гл. II)]). В частковому випадку, коли область визначення міри складається з послідовності точок, кожна з яких має одиничну міру, простори L_M є дискретними просторами Орліча l_M. Простори l_M були введені В. Орлічем в роботі [101] і вивчалися в роботах багатьох авторів (див., наприклад, [35, 36, 37, 73, 74, 53, 1]).

1.6.3. Апроксимативні характеристики просторів S^p_φ. В цьому підрозділі наведено огляд деяких результатів для просторів S^p_φ, означених в прикладі 1 підрозділу 1.5. Об'єктами наближень в цих просторах є класи ψ-інтегралів всіх елементів, які належать одиничним кулям U^p_φ цих просторів. Поняття ψ-інтеграла в S^p_φ вводиться таким чином [144 (гл. IX)].

Нехай $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна послідовність комплексних чисел і f — деякий елемент простору S^p_φ, формальний ряд Фур'є за системою φ якого має вигляд

$$S[f]_\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_\varphi(k)\varphi_k. \tag{1.105}$$

Якщо в просторі $\mathscr{X}$ існує елемент F, для якого

$$S[F]_\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \widehat{f}_\varphi(k)\varphi_k,$$

тобто, коли $\widehat{F}_\varphi(k) = \psi_k \widehat{f}_\varphi(k),\ k \in \mathbb{N}$, то елемент F називають ψ-інтегралом елемента f і записують $F = \mathcal{J}^\psi f$. Якщо $\mathfrak{N}$ — деяка підмножина з $\mathscr{X}$, то множину ψ-інтегралів всіх елементів з $\mathfrak{N}$ позначають через $\psi\mathfrak{N}$. Зокрема, ψS^p_φ — множина ψ-інтегралів всіх елементів, що належать до S^p_φ.

Нехай U^p_φ — одинична куля в просторі S^p_φ:

$$U^p_\varphi := \{f \in S^p_\varphi : \quad \|f\|_{p,\varphi} \leq 1\}.$$

Тоді ψU^p_φ — множина ψ-інтегралів всіх елементів з U^p_φ. Слід зазначити, що коли простір S^p_φ є повним, і при цьому виконується умова

$$\psi_k \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{1.106}$$

то

$$\psi U^p_\varphi = \Big\{ f \in S^p_\varphi : \quad \sum_{k=1}^{\infty} \Big| \frac{\widehat{f}_\varphi(k)}{\psi_k} \Big|^p \leq 1 \Big\},$$

тобто, множина ψU^p_φ є p-еліпсоїдом в просторі S^p_φ, півосі якого дорівнюють $|\psi_k|$.

Нехай, далі, $n \in \mathbb{N}$, γ_n — довільний набір із n натуральних чисел і

$$P_{\gamma_n} = \sum_{k \in \gamma_n} \alpha_k \varphi_k,$$

де α_k —деякі комплексні числа.

Розглянемо наступні величини

$$\sigma_n(f)_{p,\varphi} := \inf_{\alpha_k, \gamma_n} \|f - P_{\gamma_n}\|_{p,\varphi}, \quad f \in S^p_\varphi,$$

$$\sigma_n(\mathfrak{N})_{p,\varphi} := \sup_{f \in \mathfrak{N}} \sigma_n(f)_{p,\varphi}, \quad \mathfrak{N} \subset S^p_\varphi,$$

та

$$\mathscr{D}_n(\mathfrak{N})_{p,\varphi} := \inf_{\gamma_n} \sup_{f \in \mathfrak{N}} \inf_{\alpha_k} \|f - P_{\gamma_n}\|_{p,\varphi}.$$

Величини $\sigma_n(f)_{p,\varphi}$ та $\sigma_n(\mathfrak{N})_{p,\varphi}$ називаються найкращим n-членним наближенням в просторі S^p_φ, відповідно, елемента $f \in S^p_\varphi$ та множини $\mathfrak{N} \subset S^p_\varphi$. Величину $\mathscr{D}_n(\mathfrak{N})_{p,\varphi}$ називають базисним поперечником множини $\mathfrak{N}$ в просторі S^p_φ.

У випадку, коли $\mathfrak{N} = \psi U^q_\varphi$, точні значення величин $e_n(\mathfrak{N})_{p,\varphi}$ та $\mathscr{D}_n(\mathfrak{N})_{p,\varphi}$ при всіх $0{<}p,\ q{<}\infty$ були знайдені О. І. Степанцем в роботах [141, 142, 148, 144 (гл.XI)]. Ці значення дають наступні твердження.

Твердження 1.6.2 *(О. І. Степанець [144 (гл.XI)]). Нехай $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ — фіксована послідовність комплексних чисел, яка задовольняє умови (1.106) та*

$$\lim_{k \to \infty} \psi_k = 0, \tag{1.107}$$

p і q — довільні числа такі, що $0 < q \le p < \infty$. Тоді при будь-якому $n \in \mathbb{N}$ справджуються рівності

$$\mathscr{D}_n(\psi U^q_\varphi)_{p,\varphi} = \bar{\psi}_{n+1} \tag{1.108}$$

та

$$\sigma^p_n(\psi\, U^q_\varphi)_{p,\varphi} = \sup_{l>n}(l-n)\Big(\sum_{k=1}^{l}\bar{\psi}_k^{-q}\Big)^{-\frac{p}{q}} = (l^*-n)\Big(\sum_{k=1}^{l^*}\bar{\psi}_k^{-q}\Big)^{-\frac{p}{q}}, \tag{1.109}$$

де $\bar{\psi} = \{\bar{\psi}_k\}_{k=1}^\infty$ — спадна перестановка послідовності $\{|\psi_k|\}_{k=1}^\infty$, а l^* — деяке натуральне число.

Твердження 1.6.3 *(О. І. Степанець [144 (гл.XI)]). Нехай числа p і q такі, що $0 < p < q < \infty$, $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ — фіксована послідовність комплексних чисел, для якої*

$$\|\psi\|_{l_{\frac{pq}{q-p}}} = \Big(\sum_{k=1}^\infty |\psi_k|^{\frac{pq}{q-p}}\Big)^{\frac{q-p}{pq}} < \infty. \tag{1.110}$$

і виконується умова (1.106) Тоді при кожному $n \in \mathbb{N}$ справджуються рівності

$$\mathscr{D}_n(\psi\, U^q_\varphi)_{p,\varphi} = \Big(\sum_{k=n+1}^\infty \bar{\psi}_k^{\frac{pq}{q-p}}\Big)^{\frac{q-p}{pq}} \tag{1.111}$$

та

$$\sigma_n(\psi\, U^q_\varphi)_{p,\varphi} = \Big[(l^*-n)^{\frac{q}{q-p}}\Big(\sum_{k=1}^{l^*}\bar{\psi}_k^{-q}\Big)^{\frac{p}{q-p}} + \sum_{k=l^*+1}^\infty \bar{\psi}_k^{\frac{pq}{q-p}}\Big]^{\frac{q-p}{pq}}, \tag{1.112}$$

де $\bar{\psi} = \{\bar{\psi}_k\}_{k=1}^\infty$ — спадна перестановка послідовності $\{|\psi_k|\}_{k=1}^\infty$, а число l^* вибране з умови

$$\bar{\psi}_{l^*}^{-q} \le \frac{1}{l^*-n}\sum_{k=1}^{l^*}\bar{\psi}_k^{-q} < \bar{\psi}_{l^*+1}^{-q}. \tag{1.113}$$

Таке число l^* завжди існує і єдине.

Зауважимо, що умови (1.107) та (1.110) забезпечують у відповідних випадках вкладення $\psi U^q_\varphi \subset S^p_\varphi$. При цьому у випадку, коли $0 < p < q$, умова (1.110) є не тільки достатньою для такого вкладення, але й необхідною.

Як вже зазначалося, розглянуті в підрозділі 1.2 простори $S^p = S^p(\mathbb{T}^d)$ є частинним випадком просторів S^p_φ. При цьому класи $\mathcal{F}^\psi_{q,r}$ можна розглядати як множини ψ-інтегралів функцій з одиничних куль просторів S^q, які визначаються деякими східчастими послідовностями ψ. Тому твердження 1.2.4 та 1.2.5 про точні значення величин $\sigma_n(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{S^p}$ та $\mathscr{D}_n(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{S^p}$, випливають з наведених у даному підрозділі тверджень для просторів S^p_φ.

1.6.4. Апроксимативні характеристики діагональних операторів в просторах l_p. Виберемо в ролі $\mathscr{X}$ множину всіх послідовностей $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ дійсних чисел, для яких операції додавання та множення на скаляр означаються стандартним способом, в ролі системи φ — систему векторів $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ (де $e_k = \{e_{ki}\}_{i=1}^{\infty}$, $e_{ki} = 0$ при $k \neq i$ і $e_{kk} = 1$) і побудуємо при довільному $p \in (0, \infty)$ за схемою, викладеною в прикладі 1 підрозділу 1.5, простори $S^p_\varphi = S^p_e$. Кожному елементу $x \in \mathscr{X}$ ставиться у відповідність система чисел $\widehat{x}(k) = (x, e_k) = x_k$, $k = 1, 2, \ldots$, і при фіксованому $p \in (0, \infty)$ означаються простори S^p_e:

$$S^p_e = S^p_e(\mathscr{X}) = \Big\{ x \in \mathscr{X} : \sum_{k=1}^{\infty} |\, x_k|^p < \infty \Big\}.$$

При цьому φ-норма елемента $x \in S^p_e$ має вигляд

$$\|x\|_{p,\,e} = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Бачимо, що S^p_e збігаються з означеними вище просторами l_p, $0 < p < \infty$.

Для зручності сформулюємо аналоги тверджень 1.6.2 та 1.6.3 у просторах l_p.

Нехай p та q — довільні додатні числа, $0 < p,\ q < \infty$, l_p та l_q простори послідовностей зі скінченими нормами (квазі-нормами), які означаються згідно з (1.98). Через $B\, l_q$ позначимо одиничну кулю простору l_q.

Нехай, далі, $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна послідовність додатних чисел, які задовольняють умову

$$\lim_{k \to \infty} \lambda_k = 0, \tag{1.114}$$

і нехай

$$T : x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \to Tx = \{\lambda_k x_k\}_{k=1}^{\infty} \tag{1.115}$$

— діагональний оператор, визначений на просторі l_p.

Зазначимо, що коли $0 < q \le p$ і послідовність λ задовольняє умову (1.114), то для довільної послідовності $x \in B\, l_q$ образ Tx міститься в просторі l_p. Якщо ж $0 < p < q$, то включення $Tx \in l_p$ внаслідок нерівності Гельдера гарантує умова

$$\|\lambda\|_{l_{\frac{pq}{q-p}}} = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{\frac{pq}{q-p}} \Big)^{\frac{q-p}{pq}} < \infty. \tag{1.116}$$

Нехай, далі, $n \in \mathbb{N}$ і $P_{\gamma_n} = \sum_{k \in \gamma_n} \alpha_k e_k$ — довільні n-членні поліноми за системою $(e_k)_{k=1}^{\infty}$, α_k —довільні комплексні числа.

Розглянемо величини

$$\mathscr{D}_n(T : l_q \to l_p) := \inf_{\gamma_n} \sup_{x\in Bl_q} \inf_{\alpha_k} \|Tx - P_{\gamma_n}\|_{l_p}. \tag{1.117}$$

і

$$\sigma_n(T : l_q \to l_p) := \sup_{x\in Bl_q} \sigma_n(Tx)_{l_p} = \sup_{x\in Bl_q} \inf_{a_i,\gamma_n} \|Tx - P_{\gamma_n}\|_{l_p} \tag{1.118}$$

за умов, що гарантують належність образів Tx елементів $x \in B\,l_q$ просторам l_p.

В прийнятих позначеннях мають місце такі твердження:

Твердження 1.6.2$'$ *(О.І. Степанець [144 (гл.XI)]). Нехай $0 < q \le p < \infty$, $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна послідовність додатних чисел, які задовольняють умову (1.114). Тоді при будь-якому $n \in \mathbb{N}$ справджуються рівності*

$$\mathscr{D}_n(T : l_q \to l_p) = \bar{\lambda}_{n+1} \tag{1.119}$$

та

$$\sigma_n^p(T : l_q \to l_p) = \sup_{l>n}(l-n)\Big(\sum_{k=1}^{l} \bar{\lambda}_k^{-q}\Big)^{-\frac{p}{q}} = (l^*-n)\Big(\sum_{k=1}^{l^*} \bar{\lambda}_k^{-q}\Big)^{-\frac{p}{q}}, \tag{1.120}$$

де $\bar{\lambda} = \{\bar{\lambda}_k\}_{k=1}^{\infty}$ — спадна перестановка послідовності $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, а l^* — деяке натуральне число.

Твердження 1.6.3$'$ *(О.І. Степанець [144 (гл.XI)]). Нехай $0 < p < q < \infty$, $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна послідовність додатних чисел, які задовольняють умову (1.116). Тоді при кожному $n \in \mathbb{N}$ справджуються рівності*

$$\mathscr{D}_n(T : l_q \to l_p) = \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} \bar{\lambda}_k^{\frac{pq}{q-p}}\Big)^{\frac{q-p}{pq}} \tag{1.121}$$

та

$$\sigma_n(T : l_q \to l_p) = \Big[(l^*-n)^{\frac{q}{q-p}}\big(\sum_{k=1}^{l^*} \bar{\lambda}_k^{-q}\big)^{\frac{p}{q-p}} + \sum_{k=l^*+1}^{\infty} \bar{\lambda}_k^{\frac{pq}{q-p}}\Big]^{\frac{q-p}{pq}}, \tag{1.122}$$

де $\bar{\lambda} = \{\bar{\lambda}_k\}_{k=1}^{\infty}$ — спадна перестановка послідовності $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, а число l^* вибране з умови

$$\bar{\lambda}_{l^*}^{-q} \le \frac{1}{l^*-n} \sum_{k=1}^{l^*} \bar{\lambda}_k^{-q} < \bar{\lambda}_{l^*+1}^{-q}. \tag{1.123}$$

Таке число l^* завжди існує і єдине.

Зазначимо, що у просторах l_p^d скінченних послідовностей точні значення величин $\sigma_n(T : l_q^d \to l_p^d)$ при всіх $0 < p,\ q \le \infty$ отримані в роботі [31].

Сформулюємо також твердження, яке дає точні значення поперечників за Колмогоровим $d_n(T : l_p \to l_p)$ множин образів послідовностей з одиничної кулі $B\,l_p$ під дією діагональних операторів в просторах l_p.

Нехай X та Y — лінійні нормовані простори, $B\,X$ — замкнена одинична куля простору X і $T : X \to Y$ — обмежений лінійний оператор. Величину

$$d_n(T : X \to Y) := d_n(T(B\,X); Y) = \inf_{F_n \in \mathcal{F}_n} \sup_{x \in B\,X} \inf_{u \in F_n} \|Tx - u\|_Y, \qquad (1.124)$$

де $\mathcal{F}_n$ — множина всіх підпросторів простору Y розмірності не вище $n \in \mathbb{N}$, називають поперечником за Колмогоровим множини $T(B\,X)$ в просторі Y.

Конструкції апроксимативних агрегатів, які використовуються для формулювання цього результату, визначаються характеристичними послідовностями $\varepsilon(\lambda)$, $g_n(\lambda)$ та $\delta(\lambda)$, означення яких наведено нижче [144 (гл. XI)].

Нехай $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна послідовність додатних чисел, що задовольняють умову (1.114). Позначимо через $\varepsilon(\lambda) = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ послідовність всіх значень величин λ_k, впорядковану за спаданням, через $g(\lambda) = g_1, g_2, \ldots$ — систему множин $g_n = g_n(\lambda) = \{k \in \mathbb{N} : \ \lambda_k \geq \varepsilon_n\}$, а через $\delta(\lambda) = \delta_1, \delta_2, \ldots$ – послідовність чисел $\delta_n = |g_n|$, де $|g_n|$ – кількість чисел $k \in \mathbb{N}$, які містяться в множині g_n.

Враховуючи умову (1.114), послідовності $\varepsilon(\lambda)$ та $g(\lambda)$ можна означити наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \sup_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k, \quad g_1 = \{k \in \mathbb{N} \ : \ \ \lambda_k = \varepsilon_1\}, \\ \varepsilon_n &= \sup_{k \bar{\in} g_{n-1}} \lambda_k, \quad g_n = g_{n-1} \cup \{k \in \mathbb{N} \ : \ \ \lambda_k = \varepsilon_n\}. \end{aligned} \qquad (1.125)$$

За такого означення кожне число $n^* \in \mathbb{N}$ належить усім множинам $g_n(\lambda)$ з достатньо великими номерами n і $\lim_{k \to \infty} \delta_k = \infty$. Через $g_0 = g_0(\lambda)$ позначають порожню множину і вважають, що $\delta_0 = 0$.

Твердження 1.6.4 *(О. І. Степанець [144 (гл.XI)]). Нехай $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна послідовність додатних чисел, що задовольняють умову (1.114). Тоді для довільного $n \in \mathbb{N}$ та будь-якого $p > 0$ мають місце рівності*

$$d_{\delta_{n-1}}(T : l_p \to l_p) = d_{\delta_{n-1}+1}(T : l_p \to l_p) = \ldots = d_{\delta_n - 1}(T : l_p \to l_p) = \varepsilon_n, \qquad (1.126)$$

в яких δ_s і ε_s, $s = 1, 2, \ldots,$ — елементи характеристичних послідовностей $\delta(\lambda)$ та $\varepsilon(\lambda)$ послідовності λ, а $\delta_0 = 0$.

Зазначимо, що коли $\bar{\lambda} = \{\bar{\lambda}_k\}_{k=1}^{\infty}$ — незростаюча перестановка чисел λ_k, $k = 1, 2, \ldots$, то справджується рівність

$$\bar{\lambda}_k = \varepsilon_n \quad \forall k \in (\delta_{n-1}, \delta_n], \quad n = 1, 2, \ldots$$

Зазначимо також, що для просторів l_p^d твердження, аналогічне до твердження 1.6.4, випливає з теореми 2.1 монографії [102 (гл. VI)].

1.7 Класи $\bar{\psi}$-диференційовних 2π-періодичних функцій

Нехай $L = L_1(\mathbb{T}^1) = L_1[-\pi, \pi]$ — простір інтегровних 2π-періодичних функцій, $f \in L$ і

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f; x) \tag{1.127}$$

— ряд Фур'є функції f. Нехай, далі, $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ — пара довільних числових послідовностей таких, що $\psi^2(k) = \psi_1^2(k) + \psi_2^2(k) \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$. Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{\psi_1(k)}{\psi^2(k)} A_k(f; x) - \frac{\psi_2(k)}{\psi^2(k)} \tilde{A}_k(f; x)\Big), \tag{1.128}$$

де $\tilde{A}_k(f; x) = a_k \sin kx - b_k \cos kx$, є рядом Фур'є деякої функції $\varphi \in L$, то φ називають *$\bar{\psi}$-похідною функції* f і записують $\varphi(\cdot) = D^{\bar{\psi}}(f; \cdot) = f^{\bar{\psi}}(\cdot)$. Підмножину всіх функцій $f \in L$, у яких існують $\bar{\psi}$-похідні, позначають через $L^{\bar{\psi}}$. При цьому якщо функція $f \in L^{\bar{\psi}}$, а $f^{\bar{\psi}} \in \mathfrak{N}$, то пишуть $f \in L^{\bar{\psi}}\mathfrak{N}$. Також покладають $C^{\bar{\psi}} = L^{\bar{\psi}} \cap C$, де $C = C[-\pi, \pi]$ — простір всіх неперервних 2π-періодичних функцій.

Зазначимо, що у випадку, коли

$$\psi_1(k) = k^{-r} \cos \frac{r\pi}{2}, \quad \psi_2(k) = k^{-r} \sin \frac{r\pi}{2}, \quad r > 0,$$

$\bar{\psi}$-похідна збігається з дробовою похідною в сенсі Вейля, яка, в свою чергу, при натуральних значеннях r є звичайною похідною порядку r.

Поряд з множиною $L^{\bar{\psi}}$ будемо також використовувати множини $L_{\bar{\beta}}^{\psi}$, які означаються наступним чином. Нехай $f \in L$ і ряд (1.127) — її ряд Фур'є. Нехай, далі, $\psi = \psi(k)$ і $\bar{\beta} = \beta_k$ — довільні фіксовані послідовності дійсних чисел. Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)}(a_k \cos(kx + \beta_k \frac{\pi}{2}) + b_k \sin(kx + \beta_k \frac{\pi}{2})) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \beta_k \frac{\pi}{2}}{\psi(k)} A_k(f; x) - \frac{\sin \beta_k \frac{\pi}{2}}{\psi(k)} \tilde{A}_k(f; x)$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції $f_{\bar{\beta}}^{\psi}(\cdot)$, то її називають $(\psi, \bar{\beta})$-похідною функції $f(\cdot)$. Множина всіх функцій із L, які мають $(\psi, \bar{\beta})$-похідні, позначається через $L_{\bar{\beta}}^{\psi}$. Аналогічно, якщо $f \in L_{\bar{\beta}}^{\psi}$, а $f_{\bar{\beta}}^{\psi} \in \mathfrak{N}$, то пишуть $f \in L_{\bar{\beta}}^{\psi}\mathfrak{N}$.

Якщо виконується тотожність $\beta_k \equiv \beta$, то $(\psi, \bar{\beta})$-похідна позначається через $f^{\psi}_{\beta}(\cdot)$ і називається (ψ, β)-похідною, а множина $L^{\psi}_{\bar{\beta}}$ при цьому позначається через L^{ψ}_{β}. Крім того, покладають $C^{\psi}_{\bar{\beta}} = C \cap L^{\psi}_{\bar{\beta}}$ і $C^{\psi}_{\beta} = C \cap L^{\psi}_{\beta}$. Множину $C^{\psi}_{\bar{\beta}}$ при $\psi(k) = q^{k^r}$, де $q \in (0,1)$ і $r > 0$, для зручності позначимо через $C^{q,r}_{\bar{\beta}}$, а при $\psi(k) = q^k$ — через $C^{q}_{\bar{\beta}}$. Якщо $f \in C^{q}_{\bar{\beta}}$, то її $(\psi, \bar{\beta})$-похідну при $\psi(k) = q^k$ будемо позначати через $f^{q}_{\bar{\beta}}$.

Зрозуміло, що кожна $(\psi, \bar{\beta})$-похідна функції $f \in L$ є і $\bar{\psi}$-похідною, якщо компоненти $\psi_1(k)$ і $\psi_2(k)$ підібрані згідно з рівностями

$$\psi_1(k) = \psi(k) \cos \beta_k \frac{\pi}{2}, \quad \psi_2(k) = \psi(k) \sin \beta_k \frac{\pi}{2}, \tag{1.129}$$

і будь-яка $\bar{\psi}$-похідна є $(\psi, \bar{\beta})$-похідною, якщо параметри $\psi(k)$ і β_k визначити формулами

$$\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}, \tag{1.130}$$

$$\cos \beta_k \frac{\pi}{2} = \frac{\psi_1(k)}{\psi(k)}, \quad \sin \beta_k \frac{\pi}{2} = \frac{\psi_2(k)}{\psi(k)}. \tag{1.131}$$

В обох випадках виконується рівність $L^{\bar{\psi}} = L^{\psi}_{\bar{\beta}}$.

Узагальнені $\bar{\psi}$-похідні ($(\psi, \bar{\beta})$-похідні) були введені О. І. Степанцем в 80-х роках минулого століття (див., наприклад [136, 137, 138, 139]). За допомогою цих похідних вдається ранжувати весь спектр інтегровних 2π-періодичних функцій, починаючи з функцій, ряди Фур'є яких можуть навіть розбігатися, і закінчуючи нескінченно диференційовними, аналітичними і цілими функціями. При цьому виявилось, що без суттєвих втрат загальності послідовності ψ_1 і ψ_2 можна вибирати тільки з множини $\mathfrak{M}$ всіх додатних опуклих спадних до нуля послідовностей,

$$\mathfrak{M} = \{\lambda(k) \ : \ \lambda(k) > 0, \lambda(k) - 2\lambda(k+1) + \lambda(k+2) \geq 0, \ \forall k \in \mathbb{N}, \ \lim_{k \to \infty} \lambda(k) = 0\},$$

оскільки, як показано в [137] (див. також [143] (гл.III)), має місце твердження:

Твердження 1.7.1 *(О. І. Степанець [137]). Кожна функція $f \in C$ (або ж $f \in L$) має хоча б одну $\bar{\psi}$-похідну $f^{\bar{\psi}}(\cdot)$, яка міститься в C (або ж в L), причому пару $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ можна вибирати так, щоб $\psi_1, \ \psi_2 \in \mathfrak{M}$. Таким чином, виконуються рівності*

$$\bigcup_{\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}} L^{\bar{\psi}} = L, \qquad \bigcup_{\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}} C^{\bar{\psi}} = C. \tag{1.132}$$

Якщо $\mathscr{T}$ — множина всіх тригонометричних поліномів і $f \in \mathscr{T}$, то зрозуміло, що яка б не була пара $\bar{\psi}$, функція f має $\bar{\psi}$-похідну. Звідси, зокрема, випливає, що множина $L^{\bar\psi}$ не може бути порожньою. Зрозуміло також, що $\bigcap\limits_{\bar\psi} L^{\bar\psi} = \mathscr{T}$, якщо $\bar\psi$ пробігає всю множину пар, для яких $\psi^2(k) \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$. Більше того, виконується рівність (див., наприклад, [143, твердження 3.11.9])

$$\bigcap_{\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}} L^{\bar\psi} = \mathscr{T}. \tag{1.133}$$

В дисертаційній роботі питання, пов'язані з даної класифікацією О. І. Степанця 2π-періодичних функцій, і зокрема, із її застосуванням до класифікації нескінченно диференційовних 2π-періодичних функцій, розглядаються в підрозділі 6.5.

1.8 Лінійні методи наближення, що породжуються моментними послідовностями

Добре відомо, що довільну функцію f з простору $L_p{=}L_p(\mathbb{T}^1) = L_p[-\pi,\pi]$, $1 \le p \le \infty$, ($f \not\equiv \mathrm{const}$) з рядом Фур'є вигляду (1.127) можна наблизити в цьому просторі її середніми Абеля–Пуассона

$$f(\varrho, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \varrho^k (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad \varrho \in (0,1),$$

з точністю, не кращою за $1-\varrho$. Це пов'язано з так званою властивістю насичення цього методу, з якої зокрема випливає, що для будь-якої $f \in L_p$ виконання співвідношення $\|f - f(\varrho, \cdot)\|_{L_p} = o(1-\varrho)$, $\varrho \to 1-$, можливе лише в тривіальному випадку, коли $f \equiv \mathrm{const}$. Тому жодними додатковими обмеженнями на гладкість функції порядку наближення, кращого за $1-\varrho$, досягнути не можна. У зв'язку з цим природнім є питання про відшукання лінійного оператору, подібного за своїми властивостями до оператора Пуассона, який при цьому враховував також гладкісні властивості функцій і був в певному сенсі для заданого функціонального класу найкращим. В роботі [55] для класів згорток з ядрами, які породжуються моментними послідовностями, було запропоновано загальний спосіб побудови таких операторів, які враховують властивості цих ядер (а отже, і властивості функцій з відповідних класів).

1.8.1. Точні значення точних верхніх межнаближень лінійними методами, що породжуються моментними послідовностями, на деяких функціональних класах. В цьому підрозділі наведемо деякі апроксимативні характеристики згаданих вище операторів роботи [55] та конкретні лінійні методи, які будуються на основі моментних послідовностей.

Нехай $\Lambda = \{\lambda_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ — послідовність функцій, неперервних на відрізку $[0,1]$. Припустимо, що для даної функції $f \in L_1$ і всіх $\varrho \in [0,1]$ тригонометричний ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(\varrho)(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

є рядом Фур'є сумовної функції, яку позначимо через $U_{\varrho,\Lambda}(f)$.

Враховуючи позначення підрозділу 1.7, покладемо

$$L^{\psi}_{\beta,\infty} := L^{\psi}_{\beta} B(L_\infty) = \Big\{ f \in L^{\psi}_{\beta} \ : \ \|f^{\psi}_{\beta}\|_{L_\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in[-\pi,\pi]} |f^{\psi}_{\beta}(x)| \le 1 \Big\}, \tag{1.134}$$

де $B(L_\infty)$ — одинична куля простору L_∞ і $\beta \in \mathbb{R}$.

Твердження 1.8.1 *(В. П. Заставний, В. В. Савчук [55]). Нехай β — фіксоване ціле число, $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — послідовність додатних чисел, які задовольняють умови $\lim\limits_{k\to\infty} \psi_k = 0$ і*

$$\psi_k = \int_0^1 t^{k-1} d\lambda(t), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1.135}$$

де $\lambda(\cdot)$ — неспадна функція обмеженої варіації на $[0,1]$, $\lambda(0) := \lambda(0+) = 0$, а $\Lambda = \{\lambda_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ — послідовність функцій вигляду

$$\lambda_k(\varrho) = \frac{1}{\psi_k} \int_0^{\varrho} t^{k-1} d\lambda(t), \quad k = 1, 2, \ldots, \ \varrho \in [0,1].$$

Тоді якщо β — парне число, то для довільного $\varrho \in [0,1)$

$$\mathscr{E}(L^{\psi}_{\beta,\infty}; \Lambda; \varrho)_C := \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,\infty}} \|f - U_{\varrho,\Lambda}(f)\|_C = \frac{4}{\pi} \int_{\varrho}^1 \frac{\operatorname{arctg} t}{t} \, d\lambda(t); \tag{1.136}$$

якщо ж β — непарне число і $\int_0^1 \frac{1}{t} \ln \frac{1+t}{1-t} d\lambda(t) < \infty$, то для довільного $\varrho \in [0,1)$

$$\mathscr{E}(L^{\psi}_{\beta,\infty}; \Lambda; \varrho)_C = \frac{2}{\pi} \int_{\varrho}^1 \frac{1}{t} \ln \frac{1+t}{1-t} d\lambda(t). \tag{1.137}$$

Розглянемо також аналогічні результати для голоморфних функцій (див. [122]).

Нехай $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — одиничний круг в комплексній площині $\mathbb{C}$, $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ – одиничне коло, σ – нормована міра Лебега на $\mathbb{T}$, $L_p(\mathbb{T})$, $1 \le p \le \infty$, — простір сумовних на $\mathbb{T}$ відносно σ функцій f з нормою

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{T})} := \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{T}} |f|^p d\sigma \right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{z \in \mathbb{T}} |f(z)|, & p = \infty, \end{cases}$$

Через $\mathscr{H}_+$ позначимо множину всіх функцій, голоморфних в крузі $\mathbb{D}$, а через H_p — простір Гарді всіх функцій $f \in \mathscr{H}_+$ з нормою

$$\|f\|_{H_p} := \begin{cases} \sup\limits_{0<\varrho<1} \left(\int_{\mathbb{T}} |f(\varrho z)|^p d\sigma(z) \right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|, & p = \infty, \end{cases}$$

де σ — нормована міра Лебега на колі $\mathbb{T}$.

Для довільної функції $f \in \mathscr{H}_+$, розклад в ряд Тейлора якої має вигляд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_k z^k, \ \ z \in \mathbb{D},$$

позначимо

$$U_{\varrho,\Lambda}(f)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k(\varrho) \widehat{f}_k z^k, \quad \varrho \in [0,1], \ \ z \in \mathbb{D},$$

припустивши при цьому, що функції $\lambda_k(\cdot)$ є такими, що ряд в правій частині має радіус збіжності не менше одиниці.

Нехай, далі, $r \in \mathbb{N}$ і $\psi = \{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$ — послідовність комплексних чисел відмінних від нуля. Якщо для даної функції $f \in \mathscr{H}_+$ степеневий ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\widehat{f}_{k+r}}{\psi_k} z^k$$

збігається в крузі $\mathbb{D}$, то його суму називають ψ–похідною порядку r функції f і позначають $f^{\psi,r}$. Зазначимо, що дане поняття ψ–похідної порядку m можна розглядати і як похідну Гельфонда–Леонтьєва [70, с. 60] і як $\bar{\psi}$-похідну в розумінні Степанця.

Для функціонального класу

$$H_p^{\psi,r} := \left\{ f \in \mathscr{H}_+ : \|f^{\psi,r}\|_{H_p} \le 1 \right\}$$

розглянемо величини

$$\mathscr{E}(H_p^{\psi,r}, \Lambda, \varrho)_{H_p} := \sup_{f \in H_p^{\psi,r}} \|f - U_{\varrho,\Lambda}(f)\|_{H_p}, \quad \varrho \in [0,1),$$

де $\Lambda = \{\lambda_k(\cdot)\}$ — послідовність функцій вигляду

$$\lambda_k(\varrho) = \begin{cases} 1, & k = 0,1,\ldots,r-1, \\ \dfrac{1}{\psi_{k-r}} \displaystyle\int_0^{\varrho} t^{k-r} d\lambda(t), & k = r, r+1, \ldots, \end{cases} \qquad \varrho \in [0,1]. \tag{1.138}$$

Твердження 1.8.2 *(В. В. Савчук [122]). Нехай* $1 \le p \le \infty$, $r \in \mathbb{N}$,

$$\psi_k = \int_0^1 t^k d\lambda(t), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{1.139}$$

де функція λ *задовольняє умови твердження 1.8.1, і* $\Lambda = \{\lambda_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ *— послідовність функцій вигляду (1.138). Тоді має місце співвідношення*

$$\mathscr{E}(H_p^{\psi,r}, \Lambda, \varrho)_{H_p} = \int_\varrho^1 d\lambda(t) = (1 - \lambda_r(\varrho))\psi_0 \quad \forall\ \varrho \in [0, 1). \tag{1.140}$$

Розглянемо також приклади деяких послідовностей $\Lambda = \{\lambda_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ та $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$, які задовольняють умови наведених вище тверджень.

Нехай $r \in \mathbb{N}$, W^r — клас 2π–періодичних функцій, у яких існують r похідних, серед яких похідні до $r{-}1$–го порядку включно є абсолютно неперервними, а $\|f^{(r)}\|_{L_\infty} \le 1$ і $\overline{W}^r$ — клас функцій, спряжених до функцій класу W^r.

Виберемо функцію λ так, щоб

$$d\lambda(t) = \frac{1}{(r-1)!}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{r-1} dt.$$

Тоді в твердженні 1.8.1 при будь-якому $k = 1, 2, \ldots$

$$\psi_k = \frac{1}{(r-1)!}\int_0^1 t^{k-1}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{r-1} dt = \frac{1}{k^r},$$

і

$$\lambda_k(\varrho) = \frac{k^r}{(r-1)!}\int_0^\varrho t^{k-1}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{r-1} dt = \varrho^k \sum_{j=0}^{r-1}\frac{1}{j!}\left(k\ln\frac{1}{\varrho}\right)^j. \tag{1.141}$$

При цьому $L_{r,\infty}^{\psi} = W^r$, $L_{r-1,\infty}^{\psi} = \overline{W}^r$.

Наслідок 1.8.1 *(В. В. Савчук [122]). Нехай* $r \in \mathbb{N}$ *і* $\Lambda = \{\lambda_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ *— послідовність функцій вигляду (1.141). Тоді для будь-якого* $\varrho \in [0, 1)$

$$\mathscr{E}(W^r, \Lambda, \varrho)_C = \frac{1}{(r-1)!}\begin{cases} \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\int_\varrho^1 \frac{\operatorname{arctg} t}{t}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{r-1} dt, & r \in 2\mathbb{N}, \\ \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_\varrho^1 \frac{1}{t}\ln\frac{1+t}{1-t}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{r-1} dt, & r+1 \in 2\mathbb{N}, \end{cases} \tag{1.142}$$

і

$$\mathscr{E}(\overline{W}^r, \Lambda, \varrho)_C = \frac{1}{(r-1)!}\begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_\varrho^1 \frac{1}{t}\ln\frac{1+t}{1-t}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{r-1} dt, & r \in 2\mathbb{N}, \\ \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\int_\varrho^1 \frac{\operatorname{arctg} t}{t}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{r-1} dt, & r+1 \in 2\mathbb{N}. \end{cases} \tag{1.143}$$

Зокрема, при $\varrho \to 1-$ справджуються асимптотичні рівності

$$\mathscr{E}(W^r, \Lambda, \varrho)_C = \frac{1}{r!} \begin{cases} (1-\varrho)^r + O(1)(1-\varrho)^{r+1}, & r \in 2\mathbb{N}, \\ \\ \dfrac{2}{\pi}(1-\varrho)^r \ln \dfrac{1}{1-\varrho} + O(1)(1-\varrho)^r, & r+1 \in 2\mathbb{N}, \end{cases} \tag{1.144}$$

і

$$\mathscr{E}(\overline{W}^r, \Lambda, \varrho)_C = \frac{1}{r!} \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}(1-\varrho)^r \ln \dfrac{1}{1-\varrho} + O(1)(1-\varrho)^r, & r \in 2\mathbb{N}, \\ \\ (1-\varrho)^r + O(1)(1-\varrho)^{r+1}, & r+1 \in 2\mathbb{N}. \end{cases} \tag{1.145}$$

Зазначимо, що низку апроксимативних властивостей методу наближення, породженого послідовністю функцій вигляду (1.141) встановлено в роботі [59, с. 286–295]. В ній даний метод названо узагальненими середніми Абеля–Пуассона. Співвідношення (1.142)—(1.145) для довільного натурального r виписані, мабуть, вперше в [122].

Якщо наслідку 1.8.1 $r = 1$, то $\lambda_k(\varrho) = \varrho^k, k = 1, 2, \ldots$, а функції $U_{\varrho,\Lambda}(f)(x)$ є середніми Абеля–Пуассона $f(\varrho, x)$ функції f. Для цих середніх асимптотична рівність (1.144) вперше отримана в роботі [92], формула (1.142) — в [171], а формули (1.143) і (1.145) — в роботі [91].

Зафіксуємо тепер число $r \in \mathbb{N}$ і виберемо функцію λ так, щоб

$$d\lambda(t) = \frac{1}{(r-1)!}(1-t)^{r-1}dt.$$

Тоді послідовність $\psi = \{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$ матиме вигляд

$$\psi_k = \frac{1}{(r-1)!}\int_0^1 t^k(1-t)^{r-1}dt = \frac{k!}{(k+r)!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

а

$$\lambda_k(\varrho) = \lambda_{k,r}(\varrho) = \begin{cases} 1, & k = 0, 1, \ldots, r-1, \\ \dfrac{k!}{(r-1)!(k-r)!}\displaystyle\int_0^{\varrho} t^{k-r}(1-t)^{r-1}dt, & k = r, r+1, \ldots, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 1, & k = 0, 1, \ldots, r-1, \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{r-1}\binom{k}{j}(1-\varrho)^j\varrho^{k-j}, & k = r, r+1, \ldots, \end{cases} \quad \varrho \in [0, 1]. \tag{1.146}$$

При цьому

$$H_p^{\psi,r} = H_p^r := \left\{ f \in \mathscr{H}_+ : \|f^{(r)}\|_{H_p} \le 1 \right\}.$$

Наслідок 1.8.2 *(В. В. Савчук [122]). Нехай* $1 \le p \le \infty$, $r \in \mathbb{N}$ *і* $\Lambda = \{\lambda_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ *— послідовність функцій вигляду (1.146). Тоді має місце рівність*

$$\mathscr{E}(H_p^r, \Lambda, \varrho)_{H_p} = \frac{1}{r!}(1-\varrho)^r \quad \forall\ \varrho \in [0,1).$$

1.8.2. Наближення сумами Тейлора–Абеля–Пуассона. У цьому підрозділі наведено низку відомих результатів, які стосуються наближень голоморфних функцій методом, що породжується послідовністю $\lambda_{k,r}(\varrho)$, $k = 0, 1, \ldots$, вигляду (1.146), а також показано зв'язок цього методу з деякими іншими відомими операторами.

Нехай функція $f \in L_1[-\pi,\pi]$, $\widehat{f}(k)$ — її коефіцієнти Фур'є, $k \in \mathbb{Z}$, і $f(\varrho, x)$ — інтеграл Пуассона (оператор Пуассона) функції f, тобто

$$f(\varrho, x) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)P(\varrho, x-t)dt,$$

де $P(\varrho,t) = \frac{1-\varrho^2}{|1-\varrho e^{it}|^2}$ — ядро Пуассона.

Скрізь далі вважаємо, що $0 \le \varrho < 1$.

Р. Лейс [69] розглянув перетворення

$$L_{\varrho,r}(f)(x) := \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\partial^k f(x)}{\partial n^k} \cdot \frac{(1-\varrho)^k}{k!}, \quad r \in \mathbb{N},$$

де

$$\frac{\partial f(x)}{\partial n} = -\frac{\partial f(\varrho, x)}{\partial \varrho}\bigg|_{\varrho=1}$$

— похідна по нормалі функції f, і показав, що якщо справджується співвідношення

$$\|f(\varrho,\cdot) - L_{\varrho,r}(f)(\cdot)\|_{L_p} = O\Big(\frac{(1-\varrho)^r}{r!}\Big), \quad \varrho \to 1-,$$

то $\partial^r f/\partial n^r \in L_p$ при $1 < p < \infty$.

Згодом П. Л. Бутцер і Г. Суноучі [20] розглянули перетворення

$$B_{\varrho,r}(f)(x) := \sum_{k=0}^{r-1}(-1)^{\frac{k+1}{2}} f^{\{k\}}(x)\frac{(-\ln\varrho)^k}{k!},$$

де

$$f^{\{k\}}(x) = \begin{cases} f^{(k)}, & k \in 2\mathbb{Z}_+, \\ \widetilde{f}^{(k)}, & k+1 \in 2\mathbb{Z}_+. \end{cases}$$

Ними доведено таке твердження.

Твердження 1.8.3 *(П. Л. Бутцер, Г. Суноучі [20]). Нехай* $f \in L_p$, $1 \le p < \infty$. *Тоді:*

$i)$ *якщо похідні* $f^{\{j\}}$, $j = 0, 1, \ldots, r-1$, *є абсолютно неперервними і* $f^{\{r\}} \in L_p$ *при* $1 \le p < \infty$, *то*

$$\|f(\varrho, \cdot) - B_{\varrho,r}(f)(\cdot)\|_{L_p} = O\left(\frac{(-\ln \varrho)^r}{r!}\right), \quad \varrho \to 1- \; ; \tag{1.147}$$

$ii)$ *якщо похідні* $f^{\{j\}}$, $j = 0, 1, \ldots, r-2$, $r \ge 2$, *є абсолютно неперервними,* $f^{\{r-1\}} \in L_p$, $1 < p < \infty$, *і має місце (1.147), то* $\widetilde{f}^{\{r-1\}} \in L_p$.

Дані результати являють собою апроксимаційні теореми наближення образами операторів $L_{\varrho,r}$ і $B_{\varrho,r}$ на просторі L_p. Зокрема, результат Р. Лейса і твердження $ii)$ — це обернені теореми, а твердження $i)$ – це пряма теорема.

Прямі та обернені теореми встановлюють зв'язок між гладкісними властивостями функцій та порядками їх найкращих наближень або ж порядками їх наближень різними операторами і є центральними теоремами теорії наближень. Дослідження таких беруть свій початок від робіт Д. Джексона [45] та С. Н. Бернштейна [12]. В подальшому ця тематика розвивалась в роботах Ш. Валле Пуссена [30], А. Зигмунда [56], С. Б. Стєчкіна [130], О. П. Тімана [172, 173 (гл. V,VI)], М. П. Тімана [174], Р. М. Тригуба [175], М. П. Корнєйчука [68], М. І. Черниха [187–189], М. Д. Стерлина [160], В. К. Дзядика [46, 47 (гл. IV, V)], А. О. Лигуна [71], Л. В. Тайкова [162, 163], В. І. Горбачук та М. Л. Горбачука [33], О. І. Степанця та А. С. Сердюка [145], С. Б. Вакарчука [22–29], М. Л. Горбачука, Я. І. Грушки, С. М. Торби [34] та ін. Згадаємо також деякі монографії [173, 21, 47, 39, 176, 48], які містять фундаментальні результати за цією тематикою.

Наведені вище результати спираються на дослідження, проведені П. Л. Бутцером і Х. Г. Тілманом [18] та П. Л. Бутцером [19] про прямі та оберненні теореми наближення напівгруп обмежених лінійних однопараметричних перетворень $\{T(t)\}$ банахового простору X в самого себе за допомогою "многочленів Тейлора" $\sum_{k=0}^{r-1}(t^k/k!)A^k f$, де Af — деякий оператор напівгрупи $\{T(t)\}$.

Перетворення $A_{\varrho,r}$, які породжується послідовністю $\lambda_{k,r}(\varrho)$, $k = 0, 1, \ldots$, вигляду (1.146) подібні до тих, що розглянули Р. Лейс і П. Л. Бутцер та Г. Суноучі, оскільки будуються за принципом "многочленів Тейлора". Зв'язок усіх цих перетворень можна побачити із леми 4.1.1 підрозділу 4.1 та наведеної нижче леми 1.8.1 для голоморфних функцій.

Нехай $f \in \mathscr{H}_+$, $r \in \mathbb{N}$, $\varrho \in [0, 1)$, $\Lambda = \{\lambda_{k,r}(\varrho)\}_{k=1}^{\infty}$ — послідовність чисел вигляду

(1.146) і

$$U_{\varrho,\Lambda}(f)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{k,r}(\varrho)\widehat{f}_k z^k =: A_{\varrho,r}(f)(z),\ z \in \mathbb{D}.$$

Лема 1.8.1 *(В. В. Савчук [120]). Нехай $r \in \mathbb{N}$, $0 \le \varrho < 1$ і функція $f \in \mathscr{H}_+$. Тоді*

$$A_{\varrho,r}(f)(z) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{f^{(k)}(\varrho z)}{k!}(1-\varrho)^k z^k, \quad \forall\ z \in \mathbb{D}. \tag{1.148}$$

Розглянемо метод $A_{\varrho,r}(f)$ як лінійний оператор, визначений на $\mathscr{H}_+$. Значення цього оператора на функції f називають середніми Тейлора–Абеля–Пуассона функції f. Вибір такої назви пояснюється тим, що з одного боку оператор $A_{\varrho,r}$ будується як многочлен Тейлора степеня $r-1$ функції f в точці ϱz, а з іншого боку, як лінійна комбінація середніх Абеля–Пуассона функції f та її похідних до $r-1$-го порядку включно. Зокрема, при $\varrho = 0$ оператор $A_{0,r}$ ставить у відповідність функції $f \in \mathscr{H}_+$ частинну суму порядку $r-1$ її ряду Тейлора, а при $r = 1$ – звичайні середні Абеля–Пуассона ряду Тейлора.

Відомо, що коли функція f належить H_p, $1 \le p < \infty$, то на колі $\mathbb{T}$ існують її кутові граничні значення (за якими залишаємо позначення f), що належать простору $L_p = L_p(\mathbb{T})$, причому

$$\|f\|_{H_p} = \|f\|_{L_p} = \Big(\int_{\mathbb{T}} |f|^p d\sigma\Big)^{1/p}.$$

Зважаючи на це, домовимося під $\|f\|_{H_p}$ розуміти норму функції $f \in H_p$, а під $\|f\|_{L_p}$ — норму її граничних значень в L_p.

Розглянемо функціональний клас

$$H_p \operatorname{Lip}\alpha := \Big\{f \in H_p : \sup_{0<h\le t} \left\|f(e^{ih}\cdot) - f(\cdot)\right\|_{L_p} = O(t^\alpha), t \to 0\Big\},\ 1 \le p < \infty.$$

При $p = \infty$ під $H_p^r \operatorname{Lip}\alpha$ розуміємо клас голоморфних в $\mathbb{D}$ і неперервних в $\overline{\mathbb{D}}$ функцій f, для яких $\max_{z\in\mathbb{T}} |f^{(r)}(e^{ih}z) - f^{(r)}(z)| = O(h^\alpha)$.

Згідно з теоремою Гарді–Літтлвуда [182, теорема 48] (див., також [52. с. 78]), клас $H_p^r \operatorname{Lip} 1$, $1 \le p < \infty$, збігається з множиною функцій $f \in \mathscr{H}_+$, для яких $f^{(r+1)} \in H_p$, тобто $H_p^r \operatorname{Lip} 1 = \cup_{K>0} K H_p^{r+1}$.

В наступному твердженні дається конструктивна характеристика класів $H_p^r \operatorname{Lip}\alpha$ в термінах операторів $A_{\varrho,r}$.

Твердження 1.8.4 *(В. В. Савчук [120]). Нехай $r \in \mathbb{Z}_+$, $1 \le p \le \infty$ і $0 < \alpha \le 1$. Голоморфна в $\mathbb{D}$ функція f належить класові $H_p^r \operatorname{Lip} \alpha$ тоді і тільки тоді, коли*

$$\|f - A_{\varrho,r+1}(f)\|_{H_p} = O\left((1-\varrho)^{r+\alpha}\right), \quad \varrho \to 1- . \tag{1.149}$$

У випадку, коли $r = 0$ дане твердження набуває вигляду

$$f \in H_p \operatorname{Lip} \alpha \Longleftrightarrow \|f(\cdot) - f(\varrho\, \cdot)\|_{H_p} = O\left((1-\varrho)^{\alpha}\right), \quad \varrho \to 1- . \tag{1.150}$$

Вперше рівносильність (1.150) доведено при $p = \infty$ в [182]. У випадку $p \ge 1$ детальну історію цього твердження та бібліографію можна знайти в [21, §2.5].

Твердження 1.8.5 *(В. В. Савчук [120]). Нехай $r \in \mathbb{Z}_+$, $1 \le p \le \infty$ і $0 < \alpha \le 1$. Якщо голоморфна в крузі $\mathbb{D}$ функція f належить класові $H_p^r \operatorname{Lip} \alpha$, то для кожного $l = 0, 1, \ldots, r$,*

$$\left\| f^{(l)} - (A_{\varrho,r+1}(f))^{(l)} \right\|_{H_p} = O\left((1-\varrho)^{r+\alpha-l}\right), \quad \varrho \to 1- .$$

Твердження 1.8.5 показує, що оператори $A_{\varrho,r}$ володіють також властивістю одночасного наближення функцій з $H_p^r \operatorname{Lip} \alpha$.

На завершення цього підрозділу наведемо твердження, яке дає розв'язок задачі про насичення лінійного методу підсумовування рядів Тейлора (більш детально про поняття насичення лінійних методів див. підрозділ 5.3.2), породженого оператором $A_{\varrho,r}$.

Твердження 1.8.6 *(В. В. Савчук [120]). Нехай $1 \le p \le \infty$ і $r \in \mathbb{N}$. Оператор $A_{\varrho,r}$ породжує лінійний метод підсумовування рядів Тейлора, який є насиченим в H_p з порядком насичення $(1-\varrho)^r$ та класом насичення $H_p^{r-1} \operatorname{Lip} 1$.*

При цьому, як показано в [120], для методу $A_{\varrho,r}$ виконання співвідношення

$$\|f - A_{\varrho,r}(f)\|_{H_p} = o\left((1-\varrho)^r\right), \ \varrho \to 1-$$

можливе лише, коли f належить множині алгебраїчних многочленів степеня не вище $r-1$. Зазначимо, що ця множина є множиною інваріантних елементів даного методу, для яких $A_{\varrho,r}(f) = f$.

Розділ 2

Найкращі наближення інтегралів за допомогою інтегралів скінченного рангу

2.1 Точні значення найкращих наближень інтегралів за допомогою інтегралів скінченного рангу на деяких класах функцій

2.1.1. Як зазначено вище, точні значення точних верхніх меж величин $e_\sigma(\varphi\, y)$ вигляду (1.52) на класі функцій $y \in U_1^+(\mathbb{A})$ були отримані О. І. Степанцем в роботі [147]. В даному підрозділі розглядаються дані величини для функцій $y \in U_p^+(\mathbb{A})$ при всіх довільних значеннях $p \in (0, \infty)$ за умов, які гарантують скінченність норм в правій частині (1.52).

У випадку, коли $p > 1$, такою достатньою умовою, внаслідок нерівності Гельдера, є умова на функцію φ:

$$\|\varphi\|_{L_{p'}(\mathbb{A},d\mu)} < \infty, \quad 1/p + 1/p' = 1. \tag{2.1}$$

При $p \in (0, 1)$, на відміну від випадку $p \geq 1$, одними умовами на функцію φ скінченність норм в (1.52) можна досягнути лише в тривіальному випадку. В зв'язку з цим покладаємо

$$\mathcal{U}_p(\mathbb{A}) = \mathcal{U}_p(\mathbb{A}, d\mu) = \begin{cases} U_p^+(\mathbb{A}) \cap L_1(\mathbb{A}, d\mu), & p \in (0, 1), \\ U_p^+(\mathbb{A}), & p \in [1, \infty), \end{cases} \tag{2.2}$$

і розглядаємо величини $e_\sigma(\varphi\, y)$ тільки при $y \in \mathcal{U}_p(\mathbb{A})$. Позначаємо

$$e_\sigma(\varphi, p) := e_\sigma(\varphi, p)_{L_1(\mathbb{A},d\mu)} := \sup_{y \in \mathcal{U}_p(\mathbb{A})} e_\sigma(\varphi\, y) = \sup_{y \in \mathcal{U}_p(\mathbb{A})} e_\sigma(\varphi\, y)_{L_1(\mathbb{A},d\mu)}, \ p \in (0, \infty). \tag{2.3}$$

Основними результатами даного підрозділу є такі твердження.

Теорема 2.1.1 . *Нехай $\varphi \in \Phi(\mathbb{A})$. Тоді при будь-яких $p \in (0,1]$ і $\sigma \in (0,a)$ справджується рівність*

$$e_\sigma(\varphi,p) = \sup_{s\in(0,a]} (s-\sigma)\Big(\int_0^s \frac{dt}{\bar\varphi^{\,p}(t)}\Big)^{-\frac{1}{p}}, \tag{2.4}$$

в якій $\bar\varphi(t)$ — спадна перестановка функції $\varphi(\mathbf{x})$. При цьому точна верхня межа в правій частині (2.4) досягається при деякому скінченному значенні $s = s^*$. Точна верхня межа в співвідношенні (2.3) реалізується функцією $y^* = y^*(\mathbf{x},\varphi,\sigma,p)$ з $\mathcal{U}_p(\mathbb{A})$, яка задається рівністю

$$y^*(\mathbf{x}) = \frac{\chi_{\mathbb{E}}(\mathbf{x})}{\varphi(\mathbf{x})}\Big(\int_{\mathbb{E}} \varphi^{-p}(\mathbf{t})d\mu\Big)^{-\frac{1}{p}}, \tag{2.5}$$

де $\mathbb{E}$ — довільна вимірна підмножина множини $\{\mathbf{x}\in\mathbb{A}:\ \varphi(\mathbf{x}) \ge \bar\varphi(s^*-)\}$ μ-міри s^*, що містить множину $\{\mathbf{x}\in\mathbb{A}:\ \varphi(\mathbf{x}) > \bar\varphi(s^*-)\}$, а $\chi_{\mathbb{E}}$ — характеристична функція множини $\mathbb{E}$.

Теорема 2.1.2 . *Нехай $e_\sigma(\varphi,p)$ — величина, означена рівністю (2.3), $p \in (1,\infty)$, $\sigma \in (0,a)$ і φ — довільна функція з множини $\Phi(\mathbb{A})$, яка задовольняє умову (2.1). Тоді існує найбільше на проміжку $(\sigma,a]$ число s^*, таке, що при всіх $s \in (\sigma,s^*)$ виконується нерівність*

$$s-\sigma \le \bar\varphi^{\,p}(s)\int_0^s \bar\varphi^{\,-p}(t)\,dt \tag{2.6}$$

і для якого справджується рівність

$$e_\sigma(\varphi,p) = \Big((s^*-\sigma)^{p'}\Big(\int_0^{s^*} \bar\varphi^{\,-p}(t)\,dt\Big)^{-\frac{p'}{p}} + \int_{s^*}^{a} \bar\varphi^{\,p'}(t)\,dt\Big)^{\frac{1}{p'}}, \tag{2.7}$$

де $\bar\varphi(t)$ — спадна перестановка функції $\varphi(\mathbf{x})$. Точна верхня межа в співвідношенні (2.3) реалізується функцією $y^* = y^*(\mathbf{x},\varphi,\sigma,p)$ з $\mathcal{U}_p(\mathbb{A})$, у якої при $s^* = a < \infty$

$$y^*(\mathbf{x}) = \varphi^{-1}(\mathbf{x})\Big(\int_{\mathbb{A}} \varphi^{-p}(\mathbf{t})d\mu\Big)^{-\frac{1}{p}}, \quad \mathbf{x}\in\mathbb{A}, \tag{2.8}$$

і при $s^* < a$

$$y^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} \varphi^{-1}(\mathbf{x})(s^*-\sigma)^{\frac{p'}{p}}\Big(G_\sigma \int\limits_{\mathbb{E}} \varphi^{-p}(\mathbf{t})d\mu\Big)^{-\frac{p'}{p}}, & \mathbf{x}\in\mathbb{E}, \\ \varphi^{\frac{p'}{p}}(\mathbf{x})G_\sigma^{-\frac{p'}{p}}, & \mathbf{x}\in\mathbb{A}\setminus\mathbb{E}, \end{cases} \tag{2.9}$$

де $\mathbb{E} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{A} : \ \varphi(\mathbf{x}) \geq \bar{\varphi}(s^*-)\}$, *а величина* $G_\sigma = G_\sigma(\varphi, p)$ *дорівнює правій частині рівності (2.7).*

Зазначимо, що у випадку $p = 1$ рівність (2.4) збігається з рівністю (1.54) твердження 1.3.4.

2.1.2. Допоміжна лема 2.1.1 і її доведення. Перед доведенням теореми 2.1.1 сформулюємо і доведемо наступну допоміжну лему 2.1.1, яка в ньому займає центральне місце. Для цього введемо такі позначення.

Нехай $L_p(0,a)$, $a \in (0,\infty]$, — простір всіх вимірних на $(0,a)$ за Лебегом функцій f таких, що

$$\|f\|_{L_p(0,a)} = \Big(\int\limits_0^\infty |f(t)|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad 0 < p < \infty,$$

$U_p(0,a)$ — одинична куля простору $L_p(0,a)$, і $\mathcal{A}$ — множина всіх незростаючих додатних функцій $\alpha(t)$, істотно обмежених на проміжку $(0,a)$, для яких у випадку, коли $a = \infty$,

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = 0. \tag{2.10}$$

Нехай, далі, α — довільна функція з $\mathcal{A}$, і при даному $p \in (0,1]$ $\mathcal{M}_p^\alpha$ — множина всіх невід'ємних функцій m з $U_p(0,a)$, для яких добуток $\alpha(t)m(t)$ на проміжку $(0,a)$ не зростає і набуває тільки скінченну кількість значень. Для кожного $\sigma > 0$, фіксованої функції $\alpha \in \mathcal{A}$ та для будь-яких $m \in \mathcal{M}_p^\alpha$ розглянемо аналоги величин (1.52):

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_\sigma(m,\alpha) := e_\sigma(\alpha\, m)_{L_1(0,a)} = \inf_{\delta_\sigma \subset (0,a)} \|\alpha\, m - \chi_{\delta_\sigma} \alpha\, m\|_{L_1(0,a)} = \\ = \int\limits_0^a \alpha(t)m(t)dt - \sup_{\delta_\sigma \subset (0,a)} \int\limits_{\delta_\sigma} \alpha(t)m(t)dt,\end{aligned} \tag{2.11}$$

де δ_σ — підмножини з $(0,a)$, міри яких дорівнюють σ, χ_{δ_σ} — характеристична функція множини δ_σ, а також аналоги величин (2.3):

$$\mathscr{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^\alpha, \alpha) := \sup_{m \in \mathcal{M}_p^\alpha} \mathscr{E}_\sigma(m,\alpha) = \sup_{m \in \mathcal{M}_p^\alpha} e_\sigma(\alpha\, m)_{L_1(0,a)}. \tag{2.12}$$

З означення множин $\mathcal{M}_p^\alpha$ і $\mathcal{A}$ випливає, що інтеграли в правій частині співвідношення (2.11) скінченні, і тому величини $\mathscr{E}_\sigma(m,\alpha)$ і $\mathscr{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^\alpha, \alpha)$ мають зміст.

Лема 2.1.1 . *Нехай* $\alpha \in \mathcal{A}$ *і* $p \in (0,1]$. *Тоді при кожному* $\sigma \in (0,a)$ *справджується рівність*

$$\mathscr{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^\alpha, \alpha) = \sup_{s \in (0,a]} (s - \sigma)\Big(\int\limits_0^s \alpha^{-p}(t)dt\Big)^{-\frac{1}{p}}. \tag{2.13}$$

При цьому точна верхня межа в правій частині рівності (2.13) *завжди досягається в деякій скінченній точці* $s^* \in (\sigma, a]$. *Точна верхня межа в правій частині співвідношення* (2.12) *реалізується функцією* $m^* = m^*(t)$ *з* $\mathcal{M}_p^\alpha$, *де*

$$m^*(t) = \frac{\chi_{(0,\,s^*)}(t)}{\alpha(t)} \Big(\int\limits_0^{s^*} \alpha^{-p}(x)dx \Big)^{-\frac{1}{p}}, \tag{2.14}$$

а $\chi_{(0,\,s^*)}(t)$ — *характеристична функція множини* $(0, s^*)$.

Зауважимо, що значення величин $\mathscr{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^\alpha, \alpha)$ у випадку, коли $\mathcal{M}_p^\alpha$ — множина всіх невід'ємних функцій з одиничної кулі простору $L_1(0, a)$, знайдено в [147]. Твердження, які містять розв'язки аналогічних задач для числових рядів, отримано в роботах [141, 142, 144 (гл.XI)].

Доведення. Нехай m — будь-яка функція з множини $\mathcal{M}_p^\alpha$. Тоді добуток $\alpha(t)m(t)$ при деякому $n \in \mathbb{N}$ зображується у вигляді

$$\alpha(t)m(t) = y_k, \quad t \in (s_{k-1}, s_k),\ k = 1, 2, \ldots, n+1, \tag{2.15}$$

де $y_1 > y_2 > \ldots > y_n > y_{n+1} = 0$ — деякі числа, і $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_n \le s_{n+1} = a$. Звідси, покладаючи $\Delta_k = s_k - s_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, маємо

$$\mathscr{E}_\sigma(m, \alpha) = \int\limits_\sigma^a \alpha(t)m(t)dt = \sum_{k=1}^n y_k \Delta_k - \int\limits_0^\sigma \alpha(t)m(t)dt.$$

Переконаємось, що можна вважати, що довжина Δ_1 проміжку $(0, s_1)$, на якому добуток $\alpha(t)m(t)$ набуває своє найбільше значення, не менше за σ. Якщо це не так, то через k_σ, $k_\sigma \in [1, n+1]$, позначимо найменше натуральне число таке, що $s_{k_\sigma} > \sigma$, і покладемо $\widetilde{s}_0 = 0$, $\widetilde{s}_1 = s_{k_\sigma}$, $\widetilde{y}_1 = y_{k_\sigma}$; $\widetilde{s}_k = s_{k_\sigma+k-1}$ і $\widetilde{y}_k = y_{k_\sigma+k-1}$, де $k = 2, \ldots, n - k_\sigma + 1$. Розглянемо функцію $\widetilde{m}(t)$ таку, що $\widetilde{m}(t) = 0$, коли $t > \widetilde{s}_{n-k_\sigma+1}$, і

$$\alpha(t)\,\widetilde{m}(t) = \widetilde{y}_k, \quad t \in (\widetilde{s}_{k-1}, \widetilde{s}_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n - k_\sigma + 1.$$

Для цієї функції $\widetilde{\Delta}_1 = \widetilde{s}_1 - \widetilde{s}_0 = s_{k_\sigma} > \sigma$, $\|\widetilde{m}\|_{L_p(0,a)} \le \|m\|_{L_p(0,a)} \le 1$, тобто, $\widetilde{m} \in \mathcal{M}_p^\alpha$ і

$$\mathscr{E}_\sigma(\widetilde{m}, \alpha) = \widetilde{y}_1(\widetilde{\Delta}_1 - \sigma) + \sum_{k=2}^{n-k_\sigma+1} \widetilde{y}_k \widetilde{\Delta}_k = y_{k_\sigma}(s_{k_\sigma} - \sigma) + \sum_{k=k_\sigma+1}^{n-1} y_k \Delta_k = \mathscr{E}_\sigma(m, \alpha).$$

Тому надалі будемо вважати, що довжина проміжку $(0, s_1)$ не менша за σ. В такому випадку

$$\mathscr{E}_\sigma(m, \alpha) = y_1(\Delta_1 - \sigma) + \sum_{k=2}^n y_k \Delta_k. \tag{2.16}$$

Покладемо $r := 1/p \in [1, \infty)$, $a_k := y_k^p$, $p_k := \int\limits_{s_{k-1}}^{s_k} \alpha^{-p}(x)dx$, $k = 1, 2, \dots, n$ і виберемо числа b_k так, що $b_1 = (\Delta_1 - \sigma)/p_1$, а при всіх $k = 2, 3, \dots, n$ $b_k = \Delta_k/p_k$. Бачимо, що $\mathscr{E}_\sigma(m, \alpha) = \sum_{k=1}^n p_k b_k a_k^r$ і для оцінки величини $\mathscr{E}_\sigma(m, \alpha)$ можна використати наслідок 5.7.1 з підрозділу 5.7. Отримаємо

$$\mathscr{E}_\sigma(m, \alpha) = \sum_{k=1}^n p_k b_k a_k^r \le \Big(\sum_{k=1}^n p_k a_k\Big)^r \max_{l \in [1,n]} \frac{\sum_{k=1}^l p_k b_k}{(\sum_{k=1}^l p_k)^r}. \tag{2.17}$$

Внаслідок (2.15) і прийнятих позначень при кожному $k = 1, 2, \dots, n$

$$\sum_{k=1}^n p_k a_k = \sum_{k=1}^n y_k^p \int\limits_{s_{k-1}}^{s_k} \alpha^{-p}(x)dx = \sum_{k=1}^n \int\limits_{s_{k-1}}^{s_k} m^p(x)dx = \|m\|_{L_p(0,a)}^p,$$

$$\sum_{k=1}^l p_k b_k = \Delta_1 - \sigma + \sum_{k=2}^l \Delta_k = s_l - \sigma,$$

а

$$\sum_{k=1}^l p_k = \sum_{k=1}^l \int\limits_{s_{k-1}}^{s_k} \alpha^{-p}(x)dx = \int\limits_0^{s_l} \alpha^{-p}(x)dx.$$

Тому із співвідношення (2.17) випливає, що

$$\mathscr{E}_\sigma(m, \alpha) \le \|m\|_{L_p(0,a)} \max_{l \in [1,n]} (s_l - \sigma)\Big(\int_0^{s_l} \alpha^{-p}(x)dx\Big)^{-\frac{1}{p}} \tag{2.18}$$

Звідси, враховуючи нерівності $\|m\|_{L_p(0,a)} \le 1$ та

$$\max_{l \in [1,n]} (s_l - \sigma)\Big(\int\limits_0^{s_l} \alpha^{-p}(x)dx\Big)^{-\frac{1}{p}} \le \sup_{s \in (0,a]} (s - \sigma)\Big(\int\limits_0^{s} \alpha^{-p}(x)dx\Big)^{-\frac{1}{p}},$$

робимо висновок, що

$$\mathscr{E}_\sigma(m, \alpha) \le \sup_{s \in (0,a]} (s - \sigma)\Big(\int\limits_0^{s} \alpha^{-p}(x)dx\Big)^{-\frac{1}{p}}. \tag{2.19}$$

Зрозуміло, що у випадку, коли $a < \infty$, існує число $s^* > \sigma$, яке реалізує точну верхню межу в правій частині співвідношення (2.13). Якщо ж $a = \infty$, то з означення множини $\mathcal{A}$ випливає, що при кожному фіксованому $\sigma > 0$

$$\lim_{s \to \infty} (s - \sigma)(\int\limits_0^{s} \alpha^{-p}(t)dt)^{-\frac{1}{p}} \le \lim_{s \to \infty} (s - \sigma)\Big(\alpha^{-p}(0+)s/2 + \alpha^{-p}(s/2+)s/2\Big)^{-\frac{1}{p}} = 0.$$

Тому і в цьому випадку знайдеться принаймні одне число $s^* > \sigma$, яке реалізує точну верхню межу в правій частині співвідношення (2.13). Таким чином, із врахуванням (2.19) маємо

$$\mathscr{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^\alpha, \alpha) \leq \sup_{s\in(0,a]} (s-\sigma)\Big(\int\limits_0^s \alpha^{-p}(t)dt\Big)^{-\frac{1}{p}} = (s^*-\sigma)\Big(\int\limits_0^{s^*} \alpha^{-p}(t)dt\Big)^{-\frac{1}{p}}, \tag{2.20}$$

і для завершення доведення леми достатньо помітити, що функція m^*, означена рівністю (2.14), належить множині $\mathcal{M}_p^\alpha$, і для неї

$$\mathscr{E}_\sigma(m^*, \alpha) = (s^*-\sigma)\Big(\int\limits_0^{s^*} \alpha^{-p}(t)dt\Big)^{-\frac{1}{p}}.$$

Об'єднуючи останнє співвідношення із співвідношенням (2.20), завершуємо доведення леми 2.1.1.

2.1.3. Доведення теореми 2.1.1. Перейдемо безпосередньо до доведення теореми 2.1.1. Нехай $p \in (0, 1]$, $\varphi \in \Phi(\mathbb{A})$ і σ — деяке фіксоване дійсне число. Позначимо через $G_\sigma = G_\sigma(\varphi, p)$ праву частину рівності (2.4) і покажемо, що для будь-якої функції $y \in \mathcal{U}_p(\mathbb{A})$ виконується нерівність

$$e_\sigma(\varphi\, y) \leq G_\sigma(\varphi, p), \tag{2.21}$$

Для цього розглянемо функції y_n, які означаються рівністю

$$\varphi(\mathbf{x})y_n(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{k}{n}, & \mathbf{x}:\ \frac{k}{n} \leq \varphi(\mathbf{x})y(\mathbf{x}) < \frac{k+1}{n},\ k = 0, 1, \dots, n^2-1, \\ n, & \mathbf{x}:\ \varphi(\mathbf{x})y(\mathbf{x}) \geq n. \end{cases} \tag{2.22}$$

Бачимо, що $y_n \in \mathcal{U}_p(\mathbb{A})$, $\varphi(\mathbf{x})y(\mathbf{x}) \geq \varphi(\mathbf{x})y_n(\mathbf{x})$ для будь-яких $\mathbf{x} \in \mathbb{A}$ і $n \in \mathbb{N}$ і внаслідок сумовності на $\mathbb{A}$ добутку $\varphi(\mathbf{x})y(\mathbf{x})$, величини

$$\int\limits_{\mathbb{A}} (\varphi(\mathbf{x})y(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})y_n(\mathbf{x}))d\mu$$

прямують до нулю при $n \to \infty$. Тому якщо довести справедливість нерівності (2.21) для всіх функцій y_n, які означаються рівністю (2.22), то на підставі наслідку 1.3.1 підрозділу 1.3 (при $f = \varphi \cdot y$, $f_n = \varphi \cdot y_n$) звідси буде випливати, що ця нерівність виконується і для даної функції $y \in \mathcal{U}_p(\mathbb{A})$.

Насправді ми доведемо більш загальний факт. Для даної функції φ позначимо через $\mathcal{U}_p^\varphi(\mathbb{A})$ множину всіх функцій $y \in \mathcal{U}_p(\mathbb{A})$, для яких добуток $\varphi \cdot y$ набуває на множині $\mathbb{A}$ тільки скінченну кількість значень (зрозуміло, що у випадку, коли $\mathrm{mes}_\mu \mathbb{A} = \infty$, ці значення не дорівнюють нулю лише на множинах скінченною міри), і переконаємось, що нерівність (2.21) виконується для будь-якої функції $y \in \mathcal{U}_p^\varphi(\mathbb{A})$.

Отже, нехай функція $y \in \mathcal{U}_p^\varphi(\mathbb{A})$ така, що при деякому $n \in \mathbb{N}$ добуток $\varphi \cdot y =: f$ набуває на множині $\mathbb{A}$ тільки n різних відмінних від нуля значень f_k, $k = \overline{1,n}$, які для зручності впорядкуємо за спаданням:

$$f_1 > f_2 > \ldots > f_n > 0,$$

і покладемо $\mathbb{A}_k := \{\mathbf{x} \in \mathbb{A} : \ f(\mathbf{x}) = f_k\}$, $\mu(A_k) =: \mu_k$.

Тоді

$$e_\sigma(\varphi\, y) = \inf_{\gamma_\sigma} \Big(\int\limits_{\mathbb{A}} f(\mathbf{x}) d\mu - \int\limits_{\gamma_\sigma} f(\mathbf{x}) d\mu \Big) = \sum_{k=1}^{n} f_k \mu_k - \sup_{\gamma_\sigma} \int\limits_{\gamma_\sigma} f(\mathbf{x}) d\mu. \tag{2.23}$$

Переконаємось, що, як і при доведенні леми 2.1.1, можна вважати, що $\mu_1 = \mu(\mathbb{A}_1) \geq \sigma$. З цією метою для даного $\sigma \in (0, a)$ позначимо через k_σ найменше натуральне число таке, що $\sum\limits_{k=1}^{k_\sigma} \mu_k \geq \sigma$, і покладемо $\widetilde{\mathbb{A}}_1 = \bigcup\limits_{i=1}^{k_\sigma} \mathbb{A}_i$, $\widetilde{f}_1 = f_{k_\sigma}$; $\widetilde{\mathbb{A}}_k = \mathbb{A}_{k_\sigma + k - 1}$ і $\widetilde{f}_k = f_{k_\sigma + k - 1}$, де $k = 2, \ldots, n - k_\sigma + 1$. Розглянемо функцію $\widetilde{y}(\mathbf{x})$ таку, що $\widetilde{y}(\mathbf{x}) = 0$, коли $t \in \mathbb{A} \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n-k_\sigma+1} \widetilde{\mathbb{A}}_i$, і

$$\varphi(\mathbf{x})\, \widetilde{y}(\mathbf{x}) = \widetilde{f}_k, \quad \mathbf{x} \in \widetilde{\mathbb{A}}_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n - k_\sigma + 1.$$

Для цієї функції $\mu(\widetilde{\mathbb{A}}_1) \geq \sigma$, $\|\widetilde{y}\|_{L_p(\mathbb{A}, d\mu)} \leq \|y\|_{L_p(\mathbb{A}, d\mu)} \leq 1$, тобто, $\widetilde{y} \in \mathcal{U}_p^\varphi(\mathbb{A})$ і

$$e_\sigma(\varphi\, \widetilde{y}) = \widetilde{f}_1 (\mathrm{mes}_\mu \widetilde{\mathbb{A}}_1 - \sigma) + \sum_{k=2}^{n-k_\sigma+1} \widetilde{f}_k \mu(\widetilde{\mathbb{A}}_k) = f_{k_\sigma} \Big(\sum_{k=1}^{k_\sigma} \mu_k - \sigma \Big) + \sum_{k=k_\sigma+1}^{n-1} f_k \mu_k = e_\sigma(\varphi\, y).$$

Тому далі будемо вважати, що μ-міра множини $\mathbb{A}_1$ не менша за σ.

На проміжку $t \in (0, a)$ розглянемо функцію $m'(t) = m'(y, t)$, яка означається рівністю

$$m'(t) = \begin{cases} \bar{\varphi}^{-1}(t) f_k, & t \in (a_{k-1}, a_k], \ k = \overline{1,n}, \\ 0, & t \in (a_n, a), \end{cases} \tag{2.24}$$

де $\bar{\varphi}(t)$ — спадна перестановка функції $\varphi(\mathbf{x})$, і $a_k := \sum\limits_{i=1}^{k} \mu_i$, $a_0 := 0$. Переконаємось, що функція m' належить одиничній кулі $U_p(0, a)$ простору $L_p(0, a)$ і для неї виконується рівність

$$e_\sigma(\varphi\, y) = \int\limits_0^a \bar{\varphi}(t) m'(t) - \sup_{\delta_\sigma \subset (0,a)} \int\limits_{\delta_\sigma} \bar{\varphi}(t) m'(t) dt = \mathscr{E}_\sigma(m', \bar{\varphi}), \tag{2.25}$$

і тим самим задача про оцінку величини $e_\sigma(\varphi\, y)$ для $y \in \mathcal{U}_p^\varphi(\mathbb{A})$ зведеться до дослідження величин $\mathscr{E}_\sigma(m', \bar\varphi)$ на множині всіх функцій $m \in U_p(0,a)$ вигляду (2.24).

Враховуючи (2.24) і те, що $a_1 = \mu_1 \geq \sigma$, маємо

$$\mathscr{E}_\sigma(m', \bar\varphi) = f_1(a_1 - \sigma) + \sum_{k=2}^{n} f_k(a_k - a_{k-1}) = f_1(\mu_1 - \sigma) + \sum_{k=2}^{n} f_k \mu_k. \tag{2.26}$$

З іншого боку, внаслідок (2.23)

$$e_\sigma(\varphi\, y) = \sum_{k=1}^{n} f_k \mu_k - \sup_{\gamma_\sigma} \int\limits_{\gamma_\sigma} f(\mathbf{x}) d\mu = f_1(\mu_1 - \sigma) + \sum_{k=2}^{n} f_k \mu_k. \tag{2.27}$$

Порівнюючи вирази в правих частинах співвідношень (2.26) та (2.27), бачимо, що дійсно виконується співвідношення (2.25).

Покажемо тепер, що

$$\|m'\|_{L_p(0,a)} \leq \|y\|_{L_p(\mathbb{A}, d\mu)} \leq 1. \tag{2.28}$$

Маємо

$$\|m'\|^p_{L_p(0,a)} = \int\limits_0^a m'^p(t) dt = \sum_{k=1}^{n} f_k^p \int\limits_{a_{k-1}}^{a_k} \bar\varphi^{\,-p}(t) dt = \sum_{k=1}^{n} (f_k^p - f_{k+1}^p) \int\limits_0^{a_k} \bar\varphi^{\,-p}(t) dt, \tag{2.29}$$

де $f_{n+1} := 0$, і

$$\|y\|^p_{L_p(\mathbb{A}, d\mu)} = \int\limits_{\mathbb{A}} y^p(\mathbf{x}) d\mu = \sum_{k=1}^{n} f_k^p \int\limits_{\mathbb{A}_k} \varphi^{-p}(\mathbf{x}) d\mu = \sum_{k=1}^{n} (f_k^p - f_{k+1}^p) \int\limits_{\bigcup\limits_{i=1}^{k} \mathbb{A}_i} \varphi^{-p}(\mathbf{x}) d\mu.$$

Далі, позначивши через $\bar\varphi_k(t)$ спадну перестановку функції

$$\varphi_k(\mathbf{x}) = \begin{cases} \varphi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \bigcup\limits_{i=1}^{k} \mathbb{A}_i, \\ 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{A} \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k} \mathbb{A}_i, \end{cases}$$

на підставі рівності (1.43) отримаємо

$$\int\limits_{\bigcup\limits_{i=1}^{k} \mathbb{A}_i} \varphi^{-p}(\mathbf{x}) d\mu = \int\limits_0^{a_k} \bar\varphi_k^{-p}(t) dt,$$

і тому

$$\|y\|^p_{L_p(\mathbb{A}, d\mu)} = \sum_{k=1}^{n-1} (f_k^p - f_{k+1}^p) \int\limits_0^{a_k} \bar\varphi_k^{-p}(t) dt.$$

Порівнюючи цю рівність з рівністю (2.29) і враховуючи те, що при кожному $t \in (0, a_k)$ виконується нерівність $\bar{\varphi}^{-1}(t) \leq \bar{\varphi}_k^{-1}(t)$, отримуємо оцінку (2.28). Отже, для функції $m'(t)$ виконується рівність (2.25) і $m' \in U_p(0, a)$.

Нехай, далі, $\mathcal{M}_p^{\bar{\varphi}}$ — множина всіх невід'ємних функцій $m \in U_p(0, a)$, для яких добуток $\bar{\varphi}(t)m(t)$ на проміжку $(0, a)$ не зростає і набуває тільки скінченну кількість значень. Внаслідок (2.24) і (2.28) бачимо, що $m' \in \mathcal{M}_p^{\bar{\varphi}}$, і тому внаслідок (2.25) для будь-якої функції $y \in \mathcal{U}_p^{\varphi}(\mathbb{A})$ справджується нерівність

$$e_\sigma(\varphi\, y) \leq \sup_{m \in \mathcal{M}_p^{\bar{\varphi}}} \inf_{\delta_\sigma \subset (0,a)} \Big(\int\limits_0^a \bar{\varphi}(t)m(t)dt - \int\limits_{\delta_\sigma} \bar{\varphi}(t)m(t)dt \Big) = \mathscr{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^{\bar{\varphi}}, \bar{\varphi}). \tag{2.30}$$

Для знаходження величини $\mathscr{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^{\bar{\varphi}}, \bar{\varphi})$ скористаємося доведеною вище лемою 2.1.1. Покладаючи $\alpha(t) = \bar{\varphi}(t)$, $t \in (0, a)$, бачимо, що $\alpha \in \mathcal{A}$, і згідно з (2.13) отримуємо

$$\mathscr{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^{\bar{\varphi}}, \bar{\varphi}) = G_\sigma(\varphi, p) = \sup_{s \in (0,a]} (s - \sigma) \Big(\int\limits_0^s \frac{dt}{\bar{\varphi}^{\,p}(t)} \Big)^{-\frac{1}{p}}. \tag{2.31}$$

При цьому точна верхня межа в правій частині останнього співвідношення досягається при деякому скінченному значенні $s = s^*$. Об'єднуючи співвідношення (2.30) та (2.31), робимо висновок, що нерівність (2.21) виконується для будь-якої функції $y \in \mathcal{U}_p^{\varphi}(\mathbb{A})$, а тому і для будь-якої функції y з множини $\mathcal{U}_p(\mathbb{A})$.

Для завершення доведення теореми 2.1.1 покажемо, що у множині $\mathcal{U}_p(\mathbb{A})$ існує функція $y^* = y^*(\mathbf{x}, \bar{\varphi}, \sigma, p)$, для якої

$$e_\sigma(\varphi\, y^*) = G_\sigma(\varphi, p).$$

З цією метою виділимо із множини $\{\mathbf{x} \in \mathbb{A} : \ \varphi(\mathbf{x}) \geq \bar{\varphi}(s^*-)\}$ будь-яку вимірну підмножину $\mathbb{E}$ μ-міри s^*, яка містить множину $\{\mathbf{x} \in \mathbb{A} : \ \varphi(\mathbf{x}) > \bar{\varphi}(s^*-)\}$, і розглянемо функцію y^*, означену співвідношенням (2.5). Для неї маємо: $y^* \in L_1(\mathbb{A}, d\mu)$ і

$$\|y^*\|^p_{L_p(\mathbb{A},d\mu)} = \int\limits_{\mathbb{A}} y^*(\mathbf{x})^p d\mu = \int\limits_{\mathbb{E}} \varphi^{-p}(\mathbf{x})d\mu \Big(\int\limits_{\mathbb{E}} \varphi^{-p}(\mathbf{t})d\mu \Big)^{-1} = 1,$$

тобто, $y^* \in \mathcal{U}_p(\mathbb{A})$. Оскільки для будь-якого числа $h \geq 0$ μ-міра множини $\{\mathbf{x} \in \mathbb{E} : \varphi(\mathbf{x}) \geq h\}$ дорівнює мірі Лебега множини $\{t \in (0, s^*) : \ \bar{\varphi}(t) \geq h\}$, то

$$\int\limits_{\mathbb{E}} \varphi^{-p}(\mathbf{x})d\mu = \int\limits_0^{s^*} \bar{\varphi}^{\,-p}(t)dt,$$

і тому

$$e_\sigma(\varphi\, y^*) = (s^* - \sigma)\Big(\int\limits_{\mathbb{E}} \varphi^{-p}(\mathbf{x})d\mu\Big)^{-\frac{1}{p}} = G_\sigma(\varphi, p).$$

Таким чином, співвідношення (2.4) дійсно є рівністю і теорему 2.1.1 доведено.

2.1.4. Точні значення величин $e_\sigma(\varphi, p)$ у випадку, коли $p \in (0, 1]$ і функція φ є сталою. В доведенні леми 2.1.1 умова (2.10) використовується лише при отриманні співвідношення (2.20). Тому всі міркування її доведення, включаючи отримання співвідношення (2.19), залишаються в силі і без умови (2.10). Зокрема, нерівність (2.19) буде виконуватися, якщо функція α є сталою на $(0, a)$: $\alpha(t) \equiv c$, $c > 0$. Звідси бачимо, що

$$\mathscr{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^c, c) = \sup_{m \in \mathcal{M}_p^c} \mathscr{E}_\sigma(m, c) \le \sup_{s \in (0,a]} (s - \sigma)\Big(\int\limits_0^s c^{-p}\, dt\Big)^{-\frac{1}{p}} = c \sup_{s \in (0,a]} \frac{s - \sigma}{s^{1/p}}. \qquad (2.32)$$

Використовуючи дане співвідношення неважко встановити такий аналог леми 2.1.1.

Лема 2.1.2 . *Нехай $p \in (0, 1]$ і $\alpha(t) \equiv c$, $c > 0$. Тоді при кожному $\sigma \in (0, a)$ виконується рівність*

$$\mathscr{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^c, c) = G_\sigma(c, p) := \begin{cases} c\, p(\frac{1-p}{\sigma})^{(1-p)/p}, & p \in (0,1),\ \frac{\sigma}{1-p} < a \le \infty; \\ c\, \frac{a-\sigma}{a^{1/p}}, \quad p \in (0,1),\ a < \frac{\sigma}{1-p}; & p = 1,\ a < \infty; \\ c, & p = 1,\ a = \infty. \end{cases} \qquad (2.33)$$

Доведення. Дійсно, при кожному фіксованому $p \in (0, 1)$ функція $g(s) = (s - \sigma)/s^{1/p}$ на множині $s > \sigma$ має єдину критичну точку $s^* = \sigma/(1 - p)$, яка є її точкою максимуму, і

$$g(s^*) = p((1 - p)/\sigma)^{\frac{1-p}{p}}.$$

Якщо ж $p = 1$, то $g(s)$ з ростом s, не спадаючи, прямує до одиниці. У такому випадку

$$\sup_{s>0} g(s) = \sup_{s>0} (s - \sigma)/s = \lim_{s \to +\infty} (s - \sigma)/s = 1.$$

Об'єднуючи отримані співвідношення з оцінкою (2.32), робимо висновок, що для будь-якого $p \in (0, 1]$ має місце нерівність

$$\mathscr{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^c, c) \le G_\sigma(c, p). \qquad (2.34)$$

Позначивши

$$s^* = \begin{cases} \frac{\sigma}{1-p}, & p \in (0,1),\ \frac{\sigma}{1-p} < a \le \infty; \\ a, & p \in (0,1),\ a < \frac{\sigma}{1-p};\ p = 1,\ a < \infty, \end{cases} \qquad (2.35)$$

зауважуємо, що у відповідних випадках точна верхня межа величин $\mathscr{E}_\sigma(\cdot, c)$ на множині $\mathcal{M}_p^c$ реалізується функцією

$$m^*(t) = \begin{cases} (s^*)^{-\frac{1}{p}}, & t \in (0, s^*], \\ 0, & t \in (s^*, a), \end{cases}$$

Якщо ж $a = \infty$ і $p = 1$, то оцінка (2.34) також є точною, так як для будь-якого якзавгодно малого $\varepsilon > 0$ можна вказати функцію m_ε, наприклад, покладаючи

$$m_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{\sigma+1}, & t \in (0, \frac{\sigma+1}{\varepsilon}], \\ 0, & t \in (\frac{\sigma+1}{\varepsilon}, a), \end{cases}$$

$\varepsilon \in (0, \frac{\sigma+1}{\sigma})$, для якої

$$\mathscr{E}_\sigma(m_\varepsilon, c) > G_\sigma(c, p) - c\,\varepsilon = c - c\,\varepsilon.$$

На основі леми 2.1.2 встановлюємо таке твердження.

Теорема 2.1.3 . *Нехай* $p \in (0, 1]$, $\varphi(\mathbf{x}) \equiv c$, $c > 0$, *і*

$$e_\sigma(c, p) = e_\sigma(c, p)_{L_1(\mathbb{A}, d\mu)} = \sup_{y \in \mathcal{U}_p(\mathbb{A})} e_\sigma(cy) = \sup_{y \in \mathcal{U}_p(\mathbb{A})} \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \Big(\int\limits_{\mathbb{A}} c\, y(\mathbf{x}) d\mu - \int\limits_{\gamma_\sigma} c\, y(\mathbf{x}) d\mu \Big).$$

Тоді при будь-якому $\sigma \in (0, a)$ *справджується рівність*

$$e_\sigma(c, p) = G_\sigma(c, p),$$

де величина $G_\sigma(c, p)$ *визначається у співвідношенні (2.33).*

Доведення. Наслідуючи доведення теореми 2.1.1, спочатку переконаємось в правильності оцінки

$$e_\sigma(cy) \le G_\sigma(c, p), \tag{2.36}$$

на множині $\mathcal{U}_p^\varphi(\mathbb{A}) = \mathcal{U}_p^c(\mathbb{A})$ всіх функцій $y \in \mathcal{U}_p(\mathbb{A})$, для яких добуток $\varphi \cdot y = c \cdot y$ набуває на $\mathbb{A}$ скінченну кількість значень. При цьому, покладаючи

$$m'(t) = \begin{cases} f_k/c, & t \in (a_{k-1}, a_k], \ k = \overline{1, n}, \\ 0, & t \in (a_n, a), \end{cases} \tag{2.37}$$

де $f_1, f_2, \ldots, f_n$ — значення функції $c \cdot y$, впорядковані за спаданням, $a_k = \sum_{i=1}^k \mu_i$, $a_0 = 0$ і $\mu_k = \mu(\mathbb{A}_k) = \mu\Big(\{\mathbf{x} \in \mathbb{A} : \ y(\mathbf{x}) = f_k\}\Big)$, отримаємо

$$e_\sigma(cy) = \inf_{\delta_\sigma \subset (0, a)} \Big(\int\limits_0^a c\, m'(t) dt - \int\limits_{\delta_\sigma} c\, m'(t) dt \Big) = \mathscr{E}_\sigma(m', c).$$

Таким чином, задача про оцінку величини $e_\sigma(\varphi\, y)$ на множині $\mathcal{U}_p^c(\mathbb{A})$ звелася до дослідження поведінки величин $\mathscr{E}_\sigma(m', c)$ на множині всіх функцій $m' \in U_p(0, a)$ вигляду (2.37). Оскільки кожна така функція m' належить множині $\mathcal{M}_p^c$, то внаслідок леми 2.1.2, справджується співвідношення

$$\mathscr{E}_\sigma(m', c) \leq G_\sigma(c, p),$$

з якого випливає виконання оцінки (2.36) для будь-якої функції $y \in \mathcal{U}_p^c(\mathbb{A})$. Звідси, як і при доведенні теореми 2.1.1, використовуючи наслідок 1.3.1 підрозділу 1.3, переконуємося в справедливости цієї оцінки і для будь-якої функції $y \in \mathcal{U}_p(\mathbb{A})$.

Для завершення доведення теореми у випадках, коли $p \in (0, 1)$ і $\frac{\sigma}{1-p} < a \leq \infty$; $p \in (0, 1)$ і $a < \frac{\sigma}{1-p}$; $p = 1$ і $a < \infty$ достатньо розглянути функцію

$$y^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} (s^*)^{-\frac{1}{p}}, & \mathbf{x} \in \mathbb{E}, \\ 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{E}, \end{cases}$$

де число s^* визначається співвідношенням (2.35), а $\mathbb{E} = \mathbb{E}(s^*)$ — довільна підмножина множини $\mathbb{A}$ μ-міри s^*. Ця функція належить множині $\mathcal{U}_p(\mathbb{A})$, і для неї маємо

$$e_\sigma(cy^*) = G_\sigma(c, p).$$

У випадку, коли $a = \infty$, а $p = 1$, оцінка (2.36) також є точною, оскільки для будь-якого якзавгодно малого $\varepsilon > 0$ можна вказати функцію $y_\varepsilon \in \mathcal{U}_1(\mathbb{A})$, наприклад, покладаючи

$$y_\varepsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{\sigma+1}, & \mathbf{x} \in \mathbb{E}_\varepsilon, \\ 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{E}_\varepsilon, \end{cases}$$

де $\mathbb{E}_\varepsilon \subset \mathbb{A}$, $\mu(\mathbb{E}_\varepsilon) = \frac{\sigma+1}{\varepsilon}$, для якої буде виконуватися співвідношення

$$e_\sigma(\varphi\, y_\varepsilon) > G_\sigma(c, p) - c\,\varepsilon = c - c\,\varepsilon.$$

2.1.5. Допоміжна лема 2.1.3 і її доведення. Теорема 2.1.2 базується на наступній лемі 2.1.3. У її формулюванні здебільшого використовуються позначення леми 2.1.1, однак далі (на відміну від випадку $p \in (0, 1]$) для довільних $\alpha \in \mathcal{A}$ і $p \in (1, \infty)$ через $\mathcal{M}_p^\alpha$ позначимо множину всіх невід'ємних функцій m з $U_p(0, a)$, для яких добуток $\alpha(t)m(t)$ на проміжку $(0, a)$ не зростає.

Лема 2.1.3 . *Нехай $p \in (1, \infty)$, α — довільна функція з множини $\mathcal{A}$, для якої*

$$\|\alpha\|_{L_{p'}(0,a)} < \infty, \qquad 1/p + 1/p' = 1, \tag{2.38}$$

і $\mathscr{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^\alpha, \alpha)$ — величина, означена співвідношенням (2.12). Тоді при кожному $\sigma > 0$ справджується рівність

$$\mathscr{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^\alpha, \alpha) = \Big((s^* - \sigma)^{p'}\Big(\int\limits_0^{s^*} \alpha^{-p}(t)dt\Big)^{-\frac{p'}{p}} + \int\limits_{s^*}^{a} \alpha^{p'}(t)dt\Big)^{\frac{1}{p'}} := \mathscr{E}_\sigma, \tag{2.39}$$

в якій s^* — найбільше на $(0, a]$ число, для якого

$$s - \sigma \leq \alpha^p(s) \int\limits_0^s \alpha^{-p}(t)dt, \text{ при всіх } s \in [\sigma, s^*). \tag{2.40}$$

При цьому рівність $s^* = a$ можлива тільки у випадку, коли $a < \infty$. Точна верхня межа в правій частині співвідношення (2.12) реалізується функцією $m^* \in \mathcal{M}_p^\alpha$, в якої при $s^* = a$

$$m^*(t) = \Big(\alpha^p(t) \int\limits_0^a \alpha^{-p}(x)dx\Big)^{-\frac{1}{p}}, \quad t \in (0, a), \tag{2.41}$$

і при $s^* < a$

$$m^*(t) = \begin{cases} \alpha^{-1}(t)(s^* - \sigma)^{\frac{p'}{p}} \Big(\int\limits_0^{s^*} \alpha^{-p}(x)dx\Big)^{-\frac{p'}{p}} \mathscr{E}_\sigma^{-\frac{p'}{p}}, & t \in (0, s^*], \\ \alpha^{\frac{p'}{p}}(t) \mathscr{E}_\sigma^{-\frac{p'}{p}}, & t > s^*. \end{cases} \tag{2.42}$$

Зазначимо, що внаслідок умови (2.38), інтеграли в правій частині (2.11) скінченні, і тому величини $\mathscr{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^\alpha, \alpha)$ коректні.

Доведення. Нехай функція α задовольняє умови леми. Тоді, згідно з означенням множини $\mathcal{M}_p^\alpha$, якщо $m \in \mathcal{M}_p^\alpha$, а $\mathscr{E}_\sigma(m, \alpha)$ — величина, яка означається співвідношенням (2.11), то

$$\mathscr{E}_\sigma(m, \alpha) = \int\limits_\sigma^a \alpha(t)m(t)dt = \int\limits_0^a \nu(t)\alpha(t)m(t)dt, \quad \text{де } \nu(t) := \begin{cases} 0, & t \in (0, \sigma], \\ 1, & t > \sigma. \end{cases} \tag{2.43}$$

Оскільки при $s \geq \sigma$ виконується рівність

$$\alpha^{-p}(s)(s - \sigma) - \int\limits_0^s \alpha^{-p}(t)dt = \int\limits_\sigma^s (\alpha^{-p}(s) - \alpha^{-p}(t))dt - \int\limits_0^\sigma \alpha^{-p}(t)dt,$$

де величина $\int_\sigma^s(\alpha^{-p}(s) - \alpha^{-p}(t))dt$ при $s = \sigma$ дорівнює нулю, а з ростом s не спадаючи прямує до нескінченності, то завжди можна вказати найбільше число s^*, яке задовольняє співвідношення (2.40).

Далі, позначимо через $\widetilde{\mathcal{M}}_p^\alpha$ множину всіх функцій m з $\mathcal{M}_p^\alpha$, для яких функція $\alpha(t)m(t)$ є сталою на $(0,s^*]$, і переконаємось, що справджується рівність

$$\mathscr{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^\alpha,\alpha)=\sup_{m\in\widetilde{\mathcal{M}}_p^\alpha}\mathscr{E}_\sigma(m,\alpha). \tag{2.44}$$

Для цього покажемо, що для кожної функції $m\in\mathcal{M}_p^\alpha$ знайдеться функція $m_1\in\widetilde{\mathcal{M}}_p^\alpha$, для якої $\|m_1\|_{L_p(0,a)}\le\|m\|_{L_p(0,a)}$ і в той же час

$$\mathscr{E}_\sigma(m_1,\alpha)\ge\mathscr{E}_\sigma(m,\alpha). \tag{2.45}$$

З цією метою розглянемо функцію $m_1(t)$, таку, що $m_1(t)=m(t)$ при $t\in(s^*,a)$, а при $t\in(0,s^*]$ значення $m_1(t)$ визначаються співвідношенням

$$\alpha(t)m_1(t)=\Big(\int\limits_0^{s^*}m^p(x)dx\Big)^{\frac1p}\Big(\int\limits_0^{s^*}\alpha^{-p}(x)dx\Big)^{-\frac1p}. \tag{2.46}$$

Для цієї функції будемо мати

$$\|m_1\|_{L_p(0,a)}^p=\int\limits_0^{s^*}\alpha^{-p}(t)dt\Big(\int\limits_0^{s^*}m^p(x)dx\Big)\Big(\int\limits_0^{s^*}\alpha^{-p}(x)dx\Big)^{-1}+$$

$$+\int\limits_{s^*}^{a}m^p(x)dx=\|m\|_{L_p(0,a)}^p. \tag{2.47}$$

Для доведення нерівності (2.45) внаслідок (2.43) і (2.46) досить переконатися, що

$$\int\limits_0^{s^*}\nu(t)\alpha(t)m(t)dt\le\int\limits_0^{s^*}\nu(t)dt\Big(\int\limits_0^{s^*}m^p(t)dt\Big)^{\frac1p}\Big(\int\limits_0^{s^*}\alpha^{-p}(t)dt\Big)^{-\frac1p}. \tag{2.48}$$

Поклавши

$$K(t)=\alpha^{-p}(t)\bigg(\nu(t)\alpha^p(t)-(s^*-\sigma)\Big(\int\limits_0^{s^*}\alpha^{-p}(x)dx\Big)^{-1}\bigg), \tag{2.49}$$

помічаємо, що на підставі на (2.40), $K(t)\le0$, якщо $t\in(0,\sigma]$, і $K(t)\ge0$ при $t\in(\sigma,s^*)$. Крім того,

$$\int\limits_0^{s^*}K(t)dt=0.$$

Тому має місце зображення:

$$\int_0^{s^*} \nu(t)\alpha(t)m(t)dt - \int_0^{s^*} \nu(t)dt\Big(\int_0^{s^*} \alpha^{-p}(t)dt\Big)^{-1}\int_0^{s^*} \alpha^{-\frac{p}{p'}}m(t)dt =$$

$$= \int_0^{s^*} (\alpha(t)m(t) - c)K(t)dt, \qquad (2.50)$$

де c — будь-яке дійсное число.

З огляду на те, що добуток $\alpha(t)m(t)$ на проміжку $(0, a)$ є монотонним, виберемо в ролі c число $c^* = \alpha(\sigma+)m(\sigma+)$. В такому випадку функція $(\alpha(t)m(t) - c^*)K(t)$ будет недодатною при всіх $t \in (0, s^*)$. Звідси випливає, що величина в правій частині останнього співвідношення є недодатною, і тому виконується нерівність

$$\int_0^{s^*} \nu(t)\alpha(t)m(t)dt \le \int_0^{s^*} \nu(t)dt\Big(\int_0^{s^*} \alpha^{-p}(t)dt\Big)^{-1}\int_0^{s^*} \alpha^{-\frac{p}{p'}}m(t)dt. \qquad (2.51)$$

Застосувавши до останнього інтегралу в (2.51) нерівність Гельдера, отримаємо співвідношення (2.48):

$$\int_0^{s^*} \nu(t)\alpha(t)m(t)dt \le \int_0^{s^*} \nu(t)dt\Big(\int_0^{s^*} \alpha^{-p}(t)dt\Big)^{-1}\Big(\int_0^{s^*} m^p(t)dt\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_0^{s^*} \alpha^{-p}(t)dt\Big)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= \int_0^{s^*} \nu(t)dt\Big(\int_0^{s^*} m^p(t)dt\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_0^{s^*} \alpha^{-p}(t)dt\Big)^{-\frac{1}{p}},$$

а разом з ним і (2.45). Об'єднуючи співвідношення (2.45)–(2.47), отримуємо шукану рівність (2.44).

З означення множини $\widetilde{\mathcal{M}}_p^\alpha$ випливає, що для довільної функції $m \in \widetilde{\mathcal{M}}_p^\alpha$ при кожному $t \in (0, s^*)$

$$\alpha(t)m(t) = \Big(\int_0^{s^*} m^p(x)dx\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_0^{s^*} \alpha^{-p}(x)dx\Big)^{-\frac{1}{p}}.$$

Тому

$$\mathscr{E}_\sigma(m,\alpha) = (s^* - \sigma)\Big(\int_0^{s^*} m^p(t)dt\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_0^{s^*} \alpha^{-p}(t)dt\Big)^{-\frac{1}{p}} + \int_{s^*}^{a} \alpha(t)m(t)dt. \qquad (2.52)$$

Далі будемо розрізняти два випадки: випадок, коли $s^* = a$ (що можливо лише коли $a < \infty$), і випадок, коли $s^* < a$.

В першому випадку останній інтеграл в співвідношенні (2.52) відсутній, а

$$\int_0^{s^*} m^p(t)dt = \|m\|^p_{L_p(0,a)} \leq 1,$$

тому внаслідок (2.52) робимо висновок, що

$$\mathscr{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^\alpha, \alpha) \leq (a-\sigma)\Big(\int_0^a \alpha^{-p}(t)dt\Big)^{-\frac{1}{p}}.$$

Для завершення доведення леми 2.1.3 в цьому випадку достатньо помітити, що функція m^*, яка означається рівністю (2.41), належить множині $\widetilde{\mathcal{M}}_p^\alpha$ і для неї виконується рівність

$$\mathscr{E}_\sigma(m^*, \alpha) = (a-\sigma)\Big(\int_0^a \alpha^{-p}(t)dt\Big)^{-\frac{1}{p}}.$$

У випадку, коли $s^* < a$, застосовуючи до виразу в правій частині (2.52) спочатку інтегральну нерівність Гельдера, а потім нерівність Гельдера для сумм, будемо мати

$$\mathscr{E}_\sigma(m,\alpha) \leq (s^*-\sigma)\Big(\int_0^{s^*} m^p(t)dt\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_0^{s^*} \alpha^{-p}(t)dt\Big)^{-\frac{1}{p}} + \Big(\int_{s^*}^a m^p(t)dt\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_{s^*}^a \alpha^{p'}(t)dt\Big)^{\frac{1}{p'}} \leq$$

.

$$\leq \Big(\int_0^a m^p(t)dt\Big)^{\frac{1}{p}}\Big((s^*-\sigma)^{p'}\Big(\int_0^{s^*} \alpha^{-p}(t)dt\Big)^{-\frac{p'}{p}} + \int_{s^*}^a \alpha^{p'}(t)dt\Big)^{\frac{1}{p'}}$$

Звідси, внаслідок того, що $\|m\|_{L_p(0,a)} \leq 1$, отримуємо необхідну оцінку величини $\mathscr{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^\alpha, \alpha)$.

Розглянемо тепер функцію m^*, означену співвідношенням (2.42), і покажемо, що $m^* \in \widetilde{\mathcal{M}}_p^\alpha$. Дійсно, внаслідок (2.42) $\|m^*\|_{L_p(0,a)} \leq 1$, і при кожному $t \in (0, s^*]$

$$\alpha(t)m^*(t) = (s^*-\sigma)^{\frac{p'}{p}}\Big(\int_0^{s^*} \alpha^{-p}(x)dx\Big)^{-\frac{p'}{p}} \mathscr{E}_\sigma^{-\frac{1}{p}}, \tag{2.53}$$

а при $t \in (s^*, a)$

$$\alpha(t)m^*(t) = \alpha^{p'}(t)\mathscr{E}_\sigma^{-\frac{1}{p}}. \tag{2.54}$$

Тобто, функція $\alpha(t)m^*(t)$ на проміжку $(0, s^*]$ є сталою, а на проміжку (s^*, a) — не зростає. Тому достатньо показати, що для будь-якого $t_0 > s^*$

$$\alpha(s^*)m^*(s^*) \geq \alpha(t_0)m^*(t_0), \tag{2.55}$$

або що

$$(s^* - \sigma)\Big(\int\limits_0^{s^*} \alpha^{-p}(x)dx\Big)^{-1} \geq \alpha^p(t_0). \tag{2.56}$$

У випадку, коли при $s = s^*$ нерівність (2.40) не виконується, для будь-якого $t_0 > s^*$ маємо

$$(s^* - \sigma)\Big(\int\limits_0^{s^*} \alpha^{-p}(x)dx\Big)^{-1} \geq \alpha^p(s^*) \geq \alpha^p(t_0),$$

і тому справджується нерівність (2.55).

Якщо ж

$$(s^* - \sigma)\Big(\int\limits_0^{s^*} \alpha^{-p}(x)dx\Big)^{-1} \leq \alpha^p(s^*),$$

то розглянемо функцію

$$H(s) := (s - \sigma)\Big(\int\limits_0^{s} \alpha^{-p}(x)dx\Big)^{-1}, \quad s \geq \sigma.$$

Її похідна має вигляд

$$H'(s) = \Big(\int\limits_0^{s} \alpha^{-p}(x)dx - (s-\sigma)\alpha^{-p}(s)\Big)\Big(\int\limits_0^{s} \alpha^{-p}(x)dx\Big)^{-2}.$$

Внаслідок означення числа s^* робимо висновок, що функція $H(s)$ не зростає при всіх $s \geq s^*$. Звідси випливає, що при будь-якому $s > s^*$ нерівність (2.40) не виконується.

Підібравши для даного t_0 число $s_0 > s^*$ так, щоб $\alpha(s_0) \geq \alpha(t_0)$, бачимо, що і в цьому випадку справджується нерівність (2.56):

$$\frac{s^* - \sigma}{\int\limits_0^{s^*} \alpha^{-p}(x)dx} = H(s^*) \geq H(s_0) = \frac{s_0 - \sigma}{\int\limits_0^{s_0} \alpha^{-p}(x)dx} \geq \alpha^p(s_0) \geq \alpha^p(t),$$

а отже, і нерівність (2.55).

Таким чином, функція m^* належить множині $\widetilde{\mathcal{M}}_p^\alpha$ і для неї, внаслідок (2.53)–(2.55),

$$\mathscr{E}_\sigma(m^*,\alpha)=\mathscr{E}_\sigma^{-\frac{p'}{p}}\Big((s^*-\sigma)^{\frac{p'}{p}}\Big(\int\limits_0^{s^*}\alpha^{-p}(t)dt\Big)^{-\frac{p'}{p}}(s^*-\sigma)+\int\limits_{s^*}^{a}\alpha^{\frac{p'}{p}+1}(t)dt\Big)=$$

$$=\mathscr{E}_\sigma^{-\frac{p'}{p}}\Big((s^*-\sigma)^{p'}\Big(\int\limits_0^{s^*}\alpha^{-p}(t)dt\Big)^{-\frac{p'}{p}}+\int\limits_{s^*}^{a}\alpha^{p'}(t)dt\Big)=\mathscr{E}_\sigma.$$

Лему доведено.

Зауваження 2.1.1 . Якщо виконується умова (2.40), то похідна функції

$$F(s)=(s-\sigma)\Big(\int_0^s\alpha^{-p}(t)dt\Big)^{-1}=\int_0^s\nu(t)dt\Big(\int_0^s\alpha^{-p}(t)dt\Big)^{-1}$$

при всіх $s\in[\sigma,s^*)$ є невід'ємною, і отже дана функція при всіх таких s не спадає. звідси випливає, що для довільних $s\in(0,s^*)$ виконується умова

$$\int_0^s\nu(t)dt\Big(\int_0^s\alpha^{-p}(t)dt\Big)^{-1}\le\int_0^{s^*}\nu(t)dt\Big(\int_0^{s^*}\alpha^{-p}(t)dt\Big)^{-1}.$$

Тому поклавши $r=p$, $f(t)=\alpha(t)m(t)$, $g(t)=\nu(t)\alpha(t)$ і $p(t)=\alpha^{-1}(t)$, для отримання оцінки (2.48) в доведенні леми 2.1.3 можна було скористатися оцінкою (5.86) підрозділу 5.6.2, яку було доведено в більш пізній роботі автора [196]. Однак ми навмисно наводимо оригінальне доведення даного твердження з роботи [158] (див. також [159]), оскільки в ньому застосовується прийом, що використовує властивості функціоналу (2.49) і зображення вигляду (2.50). Даний прийом було взято нами з роботи [125] і він є на нашу думку цікавим сам по собі.

2.1.6. Доведення теореми 2.1.2. Як і при доведенні теореми 2.1.1, спочатку переконуємося, що для будь-якої функції $y\in\mathcal{U}_p(\mathbb{A})$ виконується нерівність

$$e_\sigma(\varphi\, y)\le G_\sigma(\varphi,p),\tag{2.57}$$

в якій величина $G_\sigma(\varphi,p)$ величина дорівнює правій частині рівності (2.7). Для цього, проводячи міркування, аналогічні доведенню теореми 2.1.1, показуємо, що для будь-якої функції $y\in\mathcal{U}_p(\mathbb{A})$ справджується нерівність

$$e_\sigma(\varphi\, y)\le\sup_{m\in\mathcal{M}_p^{\bar\varphi}}\inf_{\delta_\sigma\subset(0,a)}\Big(\int\limits_0^a\bar\varphi(t)m(t)dt-\int\limits_{\delta_\sigma}\bar\varphi(t)m(t)dt\Big)=\mathscr{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^{\bar\varphi},\bar\varphi),\tag{2.58}$$

де $\mathcal{M}_p^{\bar\varphi}$ — множина всіх невід'ємних функцій $m \in U_p(0,a)$, для яких добуток $\bar\varphi(t)m(t)$ на $(0,a)$ не зростає. Тим самим задача знову зводиться до дослідження величин $\mathscr{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^{\bar\varphi}, \bar\varphi)$.

Для оцінки величин $\mathscr{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^{\bar\varphi}, \bar\varphi)$ скористаємося лемою 2.1.3. Покладаючи $\alpha(t) = \bar\varphi(t)$, $t \in (0,a)$, бачимо, що функція α задовольняє умови цієї леми, і згідно з (2.39) отримуємо

$$\mathscr{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^{\bar\varphi}, \bar\varphi) = G_\sigma(\varphi, p) = \Big((s^* - \sigma)^{p'}\Big(\int\limits_0^{s^*} \bar\varphi^{\,-p}(t)\,dt\Big)^{-\frac{p'}{p}} + \int\limits_{s^*}^{a} \bar\varphi^{\,q}(t)\,dt\Big)^{\frac{1}{p'}}, \qquad (2.59)$$

де s^* — найбільше на проміжку $(\sigma, a]$ число, для якого при всіх $s \in (\sigma, s^*)$ виконується нерівність (2.6).

Об'єднуючи співвідношення (2.58) і (2.59), робимо висновок, що нерівність (2.57) виконується для будь-якої функції y з множини $\mathcal{U}_p(\mathbb{A})$. Тому

$$e_\sigma(\varphi, p) = \sup_{y \in \mathcal{U}_p(\mathbb{A})} e_\sigma(\varphi\, y) \le G_\sigma(\varphi, p). \qquad (2.60)$$

Для завершення доведення теореми 2.1.2 залишається показати, що в співвідношенні (2.60) строгої нерівності бути не може. Для цього достатньо переконатися, що в множині $\mathcal{U}_p(\mathbb{A})$ існує функція $y^* = y^*(\mathbf{x}, \bar\varphi, \sigma, p)$, для якої

$$e_\sigma(\varphi\, y^*) = G_\sigma(\varphi, p). \qquad (2.61)$$

Нехай $s^* = s^*(\sigma, \varphi)$ — найбільше на проміжку $(\sigma, a]$ число таке, що при всіх $s \in (\sigma, s^*)$ виконується нерівність (2.6). Зазначимо, що якщо на деякому проміжку (s_1, s_2) функція $\bar\varphi$ є сталою і при деякому $s = s_0$ з цього проміжку виконується співвідношення (2.6), то це співвідношення буде справджуватися і при будь-якому $s' \in (s_0, s_2]$:

$$s' - \sigma = s_0 - \sigma + (s' - s_0) \le \bar\varphi^p(s_0)\int\limits_0^{s_0} \bar\varphi^{-p}(t)dt + \bar\varphi^p(s_0)\frac{s' - s_0}{\bar\varphi^p(s_0)} = \bar\varphi^p(s')\int\limits_0^{s'} \bar\varphi^{-p}(t)dt.$$

Це означає, що у випадку, коли $s^*(\sigma, \varphi) < a$, для будь-якого $\varepsilon > 0$ будемо мати $\bar\varphi(s^* + \varepsilon) < \bar\varphi(s^*-)$, а μ-міра множини $\mathbb{E} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{A} :\ \varphi(\mathbf{x}) \ge \bar\varphi(s^*-)\}$ дорівнює мірі Лебега множини $\{t \in (0,a] :\ \bar\varphi(t) \ge \bar\varphi(s^*-)\}$ і тому дорівнює s^*.

У випадку, коли $s^*(\sigma, \varphi) = a$ $(a < \infty)$, співвідношення (2.61) задовольняє функція $y^* \in \mathcal{U}_p(\mathbb{A})$, яка означається рівністю (2.8). Дійсно,

$$\|y^*\|^p_{L_p(\mathbb{A}, d\mu)} = \int\limits_{\mathbb{A}} y^*(\mathbf{t})^p d\mu = \int\limits_{\mathbb{A}} \varphi^{-p}(\mathbf{t})d\mu\Big(\int\limits_{\mathbb{A}} \varphi^{-p}(\mathbf{x})d\mu\Big)^{-1} = 1,$$

тому $y^* \in \mathcal{U}_p(\mathbb{A})$, і внаслідок (1.43),

$$e_\sigma(\varphi\, y^*) = (a-\sigma)\Big(\int\limits_{\mathbb{A}} \varphi^{-p}(\mathbf{x})d\mu\Big)^{-\frac{1}{p}} = G_\sigma(\varphi, p).$$

У випадку, коли $s^* < a$, в ролі екстремальної візьмемо функцію $y^*(\mathbf{t})$, яка задається співвідношенням (2.9). Оскільки для будь-якого $h > 0$ μ-міра множини $\{\mathbf{t} \in \mathbb{E} : \ \varphi(\mathbf{t}) \geq h\}$ дорівнює мірі Лебега множини $\{t \in (0, s^*) : \ \bar{\varphi}(t) \geq h\}$, а μ-міра множини $\{\mathbf{t} \in \mathbb{A}\backslash\mathbb{E} : \ \varphi(\mathbf{t}) \geq h\}$ дорівнює мірі Лебега множини $\{t \in (s^*, a) : \ \bar{\varphi}(t) \geq h\}$, то

$$\int\limits_{\mathbb{E}} \varphi^{-p}(\mathbf{x})d\mu = \int\limits_0^{s^*} \bar{\varphi}^{\,-p}(t)dt, \quad \int\limits_{\mathbb{A}\backslash E} \varphi^{p'}(\mathbf{x})d\mu = \int\limits_{s^*}^{a} \bar{\varphi}^{p'}(t)dt. \tag{2.62}$$

Тому

$$\|y^*\|^p_{L_p(\mathbb{A},d\mu)} = \int\limits_{\mathbb{A}} y^*(\mathbf{t})^p d\mu =$$

$$= G_\sigma^{-p'}\left((s^*-\sigma)^{p'}\Big(\int\limits_{\mathbb{E}} \varphi^{-p}(\mathbf{x})d\mu\Big)^{-p'} \int\limits_{\mathbb{E}} \varphi^{-p}(\mathbf{t})d\mu + \int\limits_{\mathbb{A}\backslash E} \varphi^{p'}(\mathbf{t})d\mu\right) = 1,$$

де $G_\sigma = G_\sigma(\varphi, p)$, і отже, $y^* \in \mathcal{U}_p(\mathbb{A})$. Крім того, внаслідок (2.9) і (2.62) при всіх $\mathbf{t} \in E$

$$\varphi(\mathbf{t})y^*(\mathbf{t}) = G_\sigma^{-\frac{p'}{p}}(s^*-\sigma)^{\frac{p'}{p}}\Big(\int\limits_{\mathbb{E}} \varphi^{-p}(\mathbf{x})d\mu\Big)^{-\frac{p'}{p}} =$$

$$= G_\sigma^{-\frac{p'}{p}}(s^*-\sigma)^{\frac{p'}{p}}\Big(\int\limits_0^{s^*} \bar{\varphi}^{-p}(x)dx\Big)^{-\frac{p'}{p}}, \tag{2.63}$$

а при $\mathbf{t} \in \mathbb{A} \setminus E$

$$\varphi(\mathbf{t})y^*(\mathbf{t}) = G_\sigma^{-\frac{p'}{p}}\varphi^{1+\frac{p'}{p}}(\mathbf{t}) = G_\sigma^{-\frac{p'}{p}}\varphi^{p'}(\mathbf{t}). \tag{2.64}$$

Переконаємось, що для будь-яких $\mathbf{x} \in E$ та $\mathbf{t} \in \mathbb{A} \setminus E$

$$\varphi(\mathbf{x})y^*(\mathbf{x}) \geq \varphi(\mathbf{t})y^*(\mathbf{t}), \tag{2.65}$$

що внаслідок (2.63) і (2.64) рівносильно нерівності

$$(s^*-\sigma)\Big(\int\limits_0^{s^*} \bar{\varphi}^{-p}(x)dx\Big)^{-1} \geq \varphi^p(\mathbf{t}), \quad \mathbf{t} \in \mathbb{A} \setminus E. \tag{2.66}$$

Це можна зробити аналогічно доведенню нерівності (2.53). У випадку, коли при $s = s^*$ нерівність (2.6) не виконується, для будь-якого $\mathbf{t} \in \mathbb{A} \setminus E$ маємо

$$(s^* - \sigma)\Big(\int\limits_0^{s^*} \bar{\varphi}^{\,-p}(x)dx \Big)^{-1} \geq \bar{\varphi}^p(s^*) \geq \varphi^p(\mathbf{t}),$$

і тому справджується нерівність (2.65).

Якщо ж

$$(s^* - \sigma)\Big(\int\limits_0^{s^*} \bar{\varphi}^{\,-p}(x)dx \Big)^{-1} \leq \bar{\varphi}^p(s^*),$$

то розглянемо функцію

$$H(s) := (s - \sigma)\Big(\int\limits_0^{s} \bar{\varphi}^{\,-p}(x)dx \Big)^{-1}$$

при будь-якому $s \geq \sigma$. Її похідна має вигляд

$$H'(s) = \Big(\int\limits_0^{s} \bar{\varphi}^{\,-p}(x)dx - (s-\sigma)\bar{\varphi}^{\,-p}(s) \Big)\Big(\int\limits_0^{s} \bar{\varphi}^{\,-p}(x)dx \Big)^{-2}.$$

Внаслідок означення числа s^* робимо висновок, що функція $H(s)$ не спадає при всіх $s \in [\sigma, s^*)$ і не зростає при $s \geq s^*$. Звідси випливає, що при будь-якому $s > s^*$ нерівність (2.6) не виконується.

Підібравши для даного $\mathbf{t} \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{E}$ число $s_0 > s^*$ так, щоб $\bar{\varphi}(s_0) \geq \varphi(\mathbf{t})$, бачимо, що і в цьому випадку справджується нерівність (2.66):

$$\frac{s^* - \sigma}{\int\limits_0^{s^*} \bar{\varphi}^{\,-p}(x)dx} = H(s^*) \geq H(s_0) = \frac{s_0 - \sigma}{\int\limits_0^{s_0} \bar{\varphi}^{\,-p}(x)dx} \geq \bar{\varphi}^p(s_0) \geq \varphi^p(\mathbf{t}),$$

а отже, і нерівність (2.65).

Враховуючи співвідношення (2.9), (2.62)–(2.65), отримуємо

$$e_\sigma(\varphi\, y^*) = G_\sigma^{-\frac{p'}{p}} \Big((s^* - \sigma)^{\frac{p'}{p}} \Big(\int\limits_{\mathbb{E}} \varphi^{-p}(\mathbf{x})d\mu \Big)^{-\frac{p'}{p}} (s^* - \sigma) + \int\limits_{A \setminus \mathbb{E}} \varphi^{1+\frac{p'}{p}}(\mathbf{t})d\mu \Big) =$$

$$= G_\sigma^{-\frac{p'}{p}} \Big((s^* - \sigma)^{p'} \Big(\int\limits_0^{s^*} \bar{\varphi}^{\,-p}(t)\, dt \Big)^{-\frac{p'}{p}} + \int\limits_{s^*}^{a} \bar{\varphi}^{\,p'}(t)\, dt \Big) = G_\sigma(\varphi, p).$$

Таким чином, в другій частині (2.60) можна поставити знак рівності. Теорему 2.1.2 доведено.

2.1.7. Точні значення величин $e_\sigma(\varphi,p)$ у випадку, коли міра $d\mu$ не є неперервною. Теореми 2.1.1 і 2.1.2 були доведені у випадку, коли міра $d\mu$ є неперервною. Проте, повністю повторюючи наведені вище міркування, неважко переконатися, що теорема 2.1.2 має місце для будь-якої σ-адитивної міри $d\mu$. Якщо ж виконуються умови теореми 2.1.1, то можна показати, що у випадку довільної σ-адитивної міри $d\mu$ справджується нерівність

$$e_\sigma(\varphi,p)=e_\sigma(\varphi,p)_{L_1(\mathbb{A},d\mu)}\le\sup_{s\in E_{\mathbb{A}}(\mu)}(s-\sigma)\Big(\int\limits_0^s\frac{dt}{\bar\varphi^{\,p}(t)}\Big)^{-\frac1p},\tag{2.67}$$

в якій $\bar\varphi(t)$ — спадна перестановка функції $\varphi(\mathbf{x})$, а $E_{\mathbb{A}}(\mu)$ — множина значень міри $d\mu$ на множині $\mathbb{A}$:

$$E_{\mathbb{A}}(\mu)=\{t\in[0,a]\ :\ \exists B_t\subset A\ :\ \mu(B_t)=t\}.$$

Якщо міра $d\mu$ неперервна, то $E_{\mathbb{A}}(d\mu)=(0,a]$ і в (2.67) можна поставити знак рівності. Однак знак рівності в співвідношенні (2.67) можна поставити і в багатьох випадках, коли міра $d\mu$ не є неперервною. Зокрема, це так, якщо носієм міри $d\mu$ в $\mathbb{R}^d$ є цілочисельна решітка $\mathbb{Z}^d$, де вона дорівнює, наприклад, одиниці: $\mu(\mathbf{k})\equiv1,\ \mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n$, і $\mathbb{A}=\mathbb{Z}^d$. Дійсно, в цьому випадку для будь-якого $\sigma\in\mathbb{N}$ маємо

$$e_\sigma(\varphi,p)_{L_1(\mathbb{A},d\mu)}\le\sup_{s\in E_{\mathbb{A}}(\mu)}(s-\sigma)\Big(\int\limits_0^s\frac{dt}{\bar\varphi^{\,p}(t)}\Big)^{-\frac1p}=$$

$$=\sup_{s\in E_{\mathbb{A}}(\mu)}(s-\sigma)\Big(\sum_{k=1}^s\bar\varphi^{\,-p}(k)\Big)^{-\frac1p}=(s^*-\sigma)\Big(\sum_{k=1}^{s^*}\bar\varphi^{\,-p}(k)\Big)^{-\frac1p},$$

де $s^*\in E_{\mathbb{A}}(\mu)\cap\mathbb{N}$. Покладемо $\mathbb{E}=\{\mathbf{x}\in\mathbb{A}:\ \varphi(\mathbf{x})\ge\bar\varphi(s^*-)\}$ і розглянемо функцію

$$y^*(\mathbf{x})=\frac{\chi_{\mathbb{E}}(\mathbf{x})}{\varphi(\mathbf{x})}\Big(\int\limits_E\varphi^{-p}(\mathbf{t})d\mu\Big)^{-\frac1p},$$

де $\chi_{\mathbb{E}}(\cdot)$ — характеристична функція множини $\mathbb{E}$. Тоді $y^*\in\mathcal{U}_p(\mathbb{A})$, і оскільки $\mu(\mathbb{E})$=s^*, то

$$\int\limits_{\mathbb{E}}\varphi^{-p}(\mathbf{x})d\mu=\int\limits_0^{s^*}\bar\varphi^{\,-p}(t)dt=\sum_{k=1}^{s^*}\bar\varphi^{\,-p}(k)$$

і тому

$$e_\sigma(\varphi\, y^*) = (s^*-\sigma)\Big(\int\limits_{\mathbb{E}} \varphi^{-p}(\mathbf{x})d\mu\Big)^{-\frac{1}{p}} = (s^*-\sigma)\Big(\sum_{k=1}^{s^*} \bar{\varphi}^{\,-p}(k)\Big)^{-\frac{1}{p}}.$$

2.2 Оцінки найкращих наближень інтегралами при необмеженому зростанні їх рангу

В цьому підрозділі досліджується поведінка величин $e_\sigma(\varphi,p)$ вигляду (2.3) при $\sigma\to\infty$. Зрозуміло, що така задача має зміст лише у випадку, коли $\mathrm{mes}_\mu \mathbb{A} = \infty$. В силу теорем 2.1.1 і 2.1.2 задача про дослідження поведінки величин $e_\sigma(\varphi,p)$ при $\sigma\to\infty$ зводиться до дослідження величин $G_\sigma(\varphi,p)$, які у випадку, коли $p\in(0,1]$ та $\varphi\in\Phi(\mathbb{A})$, задаються рівністю

$$G_\sigma(\varphi,p) := \sup_{s>\sigma}(s-\sigma)\Big(\int\limits_0^s \frac{dt}{\bar{\varphi}^{\,p}(t)}\Big)^{-\frac{1}{p}} \tag{2.68}$$

де $\bar{\varphi}(t)$ — спадна перестановка функції $\varphi(\mathbf{x})$. Якщо ж $p\in(1,\infty)$, і функція $\varphi\in\Phi(\mathbb{A})$ задовольняє умову (2.1), то

$$G_\sigma(\varphi,p) := \Big((s^*-\sigma)^{p'}\Big(\int\limits_0^{s^*} \bar{\varphi}^{\,-p}(t)\,dt\Big)^{-\frac{p'}{p}} + \int\limits_{s^*}^{\infty} \bar{\varphi}^{\,p'}(t)\,dt\Big)^{\frac{1}{p'}}, \tag{2.69}$$

де $\bar{\varphi}(t)$ — спадна перестановка функції $\varphi(\mathbf{x})$, а s^* — найбільше на проміжку (σ,∞) число таке, що при всіх $s\in(\sigma,s^*]$ виконується нерівність

$$s-\sigma \le \bar{\varphi}^{\,p}(s)\int\limits_0^s \bar{\varphi}^{\,-p}(t)\,dt. \tag{2.70}$$

У підрозділі 6.6 досліджено поведінку величин $G_\sigma(\varphi,p)$ у випадку, коли перестановка $\bar{\varphi}(t)$ є деякої опуклою спадною до нуля функцією і в залежності від швидкості спадання знайдено для них точні порядкові оцінки. В отриманих результатах до умов монотонності функцій $\bar{\varphi}(t)$, додаються також умови їх опуклості. Ці умови є технічними, оскільки застосовувався розвинутий в роботах О. І. Степанця та його учнів апарат опуклих функцій. Це апарат використовує класифікацію таких функцій, наведену в підрозділі 6. В той же час слід зазначити, що для практичних застосувань таке обмеження є малозначимим.

На підставі теореми 2.1.1 та теореми 6.6.1 при $\psi(t+1) = \bar{\varphi}^p(t)$, $t \geq 0$, отримуємо наступне твердження.

Твердження 2.2.1 . *Якщо* $p \in (0,1]$, *і функція* $\varphi \in \Phi(\mathbb{A})$ *така, що при будь-якому* $t \geq 0$ *виконується рівність* $\bar{\varphi}^p(t) = \psi(t+1)$, *де* $\bar{\varphi}$ *— спадна перестановка функції* φ, *а* $\psi \in \mathfrak{M}_0$, *то справджується точна порядкова при* $\sigma \to \infty$ *оцінка*

$$e_\sigma(\varphi, p) \asymp \frac{\bar{\varphi}(\sigma)}{\sigma^{\frac{1}{p}-1}}. \tag{2.71}$$

У співвідношенні (2.71) і далі під виразом "$a(\sigma) \asymp b(\sigma)$ при $\sigma \to \infty$" слід розуміти, що існують такі сталі $0 < K_1 < K_2$, що при всіх σ, більших за деяке число σ_0, виконуються нерівності $a(\sigma) \leq K_2 b(\sigma)$ (в цьому випадку пишемо "$a(\sigma) \ll b(\sigma)$ при $\sigma \to \infty$") і $a(\sigma) \geq K_1 b(\sigma)$ (в такому випадку пишемо "$a(\sigma) \gg b(\sigma)$ при $\sigma \to \infty$") .

Для довільної опуклої спадної до нуля функції $f(t)$, $t \geq 0$, за аналогією з підрозділом 6.1 розглянемо характеристику $\eta(f;t)$ таку, що для довільного $t \geq 0$

$$f(\eta(f,t)) = \frac{1}{2} f(t).$$

Тоді якщо функції ψ та $\bar{\varphi}$ пов'язані співвідношенням $\psi(t+1) = \bar{\varphi}^p(t)$, $p \in (0,1]$, то для будь-якого $t \geq 0$

$$\eta(\bar{\varphi}^p; t) = \eta(\psi; t+1) - 1. \tag{2.72}$$

Якщо при цьому $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+ \subset F$, то внаслідок твердження 6.2.2 при $t \to \infty$

$$\eta(\bar{\varphi}^p; t) - t = \eta(\psi; t+1) - (t+1) \asymp \frac{\psi(t+1)}{|\psi'(t+1)|} \asymp$$

$$\asymp p \frac{\psi^{1/p}(t+1)}{|(\psi^{1/p}(t+1))'|} \asymp \eta(\psi^{1/p}; t+1) - (t+1) \asymp \eta(\bar{\varphi}; t) - t. \tag{2.73}$$

Враховуючи (2.73), на підставі теорем 2.1.1 та 6.6.2 отримуємо оцінку величин $e_\sigma(\varphi, p)$ у випадку, коли ψ належить множині $\mathfrak{M}_\infty^+$.

Твердження 2.2.2 . *Якщо* $p \in (0,1]$ *і функція* $\varphi \in \Phi(\mathbb{A})$ *при будь-якому* $t \geq 0$ *задовольняє рівність* $\bar{\varphi}^p(t) = \psi(t+1)$, *де* $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$ *і при деякому* $\varepsilon > 0$

$$\eta'(\psi, t) \geq \frac{1}{2} + \varepsilon \quad \forall t > t_\varepsilon, \tag{2.74}$$

то має місце точна порядкова при $\sigma \to \infty$ *оцінка*

$$e_\sigma(\varphi, p) \asymp \frac{\bar{\varphi}(\sigma)}{(\eta(\bar{\varphi}; \sigma) - \sigma)^{\frac{1}{p}-1}}. \tag{2.75}$$

У випадку, коли $p \in (1,\infty)$ для отримання аналогічних оцінок величин $e_\sigma(\varphi,p)$ покладемо $\psi(t+1)=\bar{\varphi}(t)$, $t\geq 0$. Тоді із теорем 6.6.3 та 2.1.2 отримаємо таке твердження.

Твердження 2.2.3 . *Якщо $p\in(1,\infty)$ і функція $\varphi\in\Phi(\mathbb{A})$ при будь-якому $t\geq 0$ задовольняє рівність $\bar{\varphi}(t)=\psi(t+1)$, де функція $\psi\in\mathfrak{M}_C$ така, що $\|\psi\|_{L_{p'}[1,\infty)}<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, і функція $1/\psi(t)$ опукла при всіх t, більших деякого числа $t_0\geq 1$, то при $\sigma\to\infty$ справджується співвідношення*

$$e_\sigma(\varphi,p)\asymp\bar{\varphi}(\sigma)\sigma^{1-\frac{1}{p}}. \tag{2.76}$$

На підставі теорем 6.6.4 та 2.1.2 із врахуванням співвідношення (2.72) (при $p=1$) отримуємо аналогічне твердження у випадку, коли функція ψ належить множині $\mathfrak{M}_\infty^+$.

Твердження 2.2.4 . *Якщо $p\in(1,\infty)$ і функція $\varphi\in\Phi(\mathbb{A})$ при будь-якому $t\geq 0$ задовольняє рівність $\bar{\varphi}(t)=\psi(t+1)$, де $\psi\in\mathfrak{M}_\infty^+$ і така, що виконується умова* (2.74), *то для будь-якого $p\in(1,\infty)$ при $\sigma\to\infty$ справджується співвідношення*

$$e_\sigma(\varphi,p)\asymp\bar{\varphi}(\sigma)(\eta(\bar{\varphi};\sigma)-\sigma)^{1-\frac{1}{p}}. \tag{2.77}$$

2.3 Наближення інтегралів інтегралами по заданих множинах та аналоги базисних поперечників

2.3.1. Постановка задачі та отримані результати. Згідно з означеннями величин $e_\sigma(f)$ та $E_{\gamma_\sigma}(f)$ (див. співвідношення (1.40) та (1.55)), для довільної функції $f\in L_1(\mathbb{A},d\mu)$ і будь-якої множини $\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma$, $\sigma>0$, справджується нерівність

$$e_\sigma(f)\leq E_{\gamma_\sigma}(f). \tag{2.78}$$

Однак аналізуючи результати підрозділів 1.4 та 2.2, бачимо, що коли функція $\varphi\in\Phi(\mathbb{A})$ задовольняє умови твердження 2.2.1 або 2.2.2, то величини $e_\sigma(\varphi,1)$ мають той самий порядок при $\sigma\to\infty$, що і величини $D_\sigma(\varphi,1)$:

$$D_\sigma(\varphi,1)\asymp E_{\gamma_\sigma^*}(\varphi,1)\asymp e_\sigma(\varphi,1)\asymp\bar{\varphi}(\sigma).$$

У зв'язку з цим виникає питання, на скільки відрізняються при інших значеннях параметра $p \in (0, \infty)$ величини $e_\sigma(\varphi, p)$ вигляду (2.3) від значень величин

$$E_{\gamma_\sigma}(\varphi, p) := E_{\gamma_\sigma}(\varphi, p)_{L_1(\mathbb{A}, d\mu)} = \sup_{y \in \mathcal{U}_p(\mathbb{A})} E_{\gamma_\sigma}(\varphi\, y) = \sup_{y \in \mathcal{U}_p(\mathbb{A})} E_{\gamma_\sigma}(\varphi\, y)_{L_1(\mathbb{A}, d\mu)} \qquad (2.79)$$

та

$$D_\sigma(\varphi, p) := D_\sigma(\varphi, p)_{L_1(\mathbb{A}, d\mu)} = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} E_{\gamma_\sigma}(\varphi, p) = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} E_{\gamma_\sigma}(\varphi, p)_{L_1(\mathbb{A}, d\mu)}. \qquad (2.80)$$

Для відповіді на поставлене питання знайдемо точні значення $E_{\gamma_\sigma}(\varphi, p)$ і $D_\sigma(\varphi, p)$.

Як і в підрозділі 2.1, при $p > 1$ додатково припускаємо, що функція φ задовольняє умову (2.1), яка гарантує скінченність норми в співвідношенні (1.56).

Теорема 2.3.1 . *Нехай функція $\varphi \in \Phi(\mathbb{A})$ задовольняє умову* (2.1). *Тоді для довільних $p \in (1, \infty)$, $\sigma > 0$ і $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$ має місце рівність*

$$E_{\gamma_\sigma}(\varphi, p) = \|\varphi_{\gamma_\sigma}\|_{L_{p'}(\mathbb{A}, d\mu)} = \|\bar{\varphi}_{\gamma_\sigma}\|_{L_{p'}(0,a)}, \quad 1/p + 1/p' = 1, \qquad (2.81)$$

в якій $\bar{\varphi}_{\gamma_\sigma}(t)$ — спадна перестановка функції φ_{γ_σ}, що задається співвідношенням (1.59) *і*

$$D_\sigma(\varphi, p) = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \|\bar{\varphi}_{\gamma_\sigma}\|_{L_{p'}(0,a)} = \|\bar{\varphi}\|_{L_{p'}(\sigma,a)}, \qquad (2.82)$$

де $\bar{\varphi}$ — спадна перестановка функції $\varphi(\mathbf{x})$. При цьому точна нижня межа в (2.82) реалізується множиною $\gamma_\sigma^* \in \Gamma_\sigma$, означеною в твердженні 1.4.1:

$$E_{\gamma_\sigma^*}(\varphi, p) = D_\sigma(\varphi, p) = \|\bar{\varphi}\|_{L_{p'}(\sigma,a)}.$$

Нехай тепер $p \in (0, 1)$. В цьому випадку, якщо для деякої множини $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$ μ-міра множини $B_{\gamma_\sigma} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{A} \setminus \gamma_\sigma \ : \ \varphi(\mathbf{x}) > 0\}$ дорівнює нулю, то $E_{\gamma_\sigma^*}(\varphi, p) = 0$, і тоді $D_\sigma(\varphi, p) = E_{\gamma_\sigma}(\varphi, p) = 0$. Якщо ж множина γ_σ така, що $\mu(B_{\gamma_\sigma}) > 0$, то $E_{\gamma_\sigma}(\varphi, p) = \infty$, і якщо при будь-якому $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$ $\mu(B_{\gamma_\sigma}) > 0$, то і $D_\sigma(\varphi, p) = \infty$.

Цей факт випливає з того, що множини $\mathcal{U}_p(\mathbb{A})$, взагалі кажучи, містять функції із як завгодно великими нормами в просторі $L_1(\mathbb{A}, d\mu)$.

В зв'язку з цим природно розглянути величини $E_{\gamma_\sigma}(\varphi\, y)$ вигляду (1.56) також у випадку, коли $y \in \mathcal{U}'_p(\mathbb{A}) = U_p^+(\mathbb{A}) \cap U_1(\mathbb{A})$. Має місце таке твердження.

Теорема 2.3.2 . *Нехай $p \in (0, 1]$ та $\varphi \in \Phi(\mathbb{A})$. Тоді для довільних $\sigma > 0$ та $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$ виконуються рівності*

$$E'_{\gamma_\sigma}(\varphi, p) := E'_{\gamma_\sigma}(\varphi, p)_{L_1(\mathbb{A}, d\mu)} = \sup_{y \in \mathcal{U}'_p(\mathbb{A})} E_{\gamma_\sigma}(\varphi\, y) = \bar{\varphi}_{\gamma_\sigma}(0+), \qquad (2.83)$$

де $\bar{\varphi}_{\gamma_\sigma}(t)$ *— спадна перестановка функції, яка задається співвідношенням (1.59), і*

$$D'_\sigma(\varphi,p) := D'_\sigma(\varphi,p)_{L_1(\mathbb{A},d\mu)} = \inf_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma} E'_{\gamma_\sigma}(\varphi,p) = \bar{\varphi}(\sigma+), \tag{2.84}$$

де $\bar{\varphi}$ *— спадна перестановка функції* $\varphi(\mathbf{x})$*. При цьому для множини* $\gamma^*_\sigma \in \Gamma_\sigma$*, означеної в твердженні 1.4.1, справджується рівність*

$$E'_{\gamma^*_\sigma}(\varphi,p) = D'_\sigma(\varphi,p) = \bar{\varphi}(\sigma+).$$

У випадку, коли міра $d\mu$ не є неперервною, вкладення $U_p^+(\mathbb{A}) \subset U_1(\mathbb{A})$ може виконуватися автоматично. Зокрема, це так, якщо $\mathbb{A} = \mathbb{Z}^d$, а носієм міри $d\mu$ в $\mathbb{R}^d$ є цілочисельна решітка $\mathbb{Z}^d$, де вона дорівнює, наприклад, одиниці: $\mu(\mathbf{k}) \equiv 1,\ \mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d$.

В цьому випадку для будь-якої $f\in L_1(\mathbb{A},d\mu)$

$$\int_{\mathbb{A}} f(\mathbf{x})d\mu = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} f(\mathbf{k});$$

$L_p(\mathbb{A},d\mu)$, $p\in(0,\infty]$ — множини послідовностей $\{y(\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$, для яких величини

$$\|y\|_{L_p(\mathbb{A},d\mu)} = \begin{cases} \Big(\sum\limits_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |y(\mathbf{k})|^p\Big)^{1/p}, & p\in(0,\infty), \\ \sup\limits_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |\ y(\mathbf{k})|, & p=\infty \end{cases}$$

є скінченними, і множини $\mathcal{U}_p(\mathbb{A})$ завжди збігаються з множинами $U_p^+(\mathbb{A})$, що складаються з додатних послідовностей, норми яких $\|\cdot\|_{L_p(\mathbb{A},d\mu)}$ не перевищують одиницю. Множини Γ_σ означені тільки для натуральних σ і складаються з множин γ_σ, що містять σ різних точок з множини $\mathbb{Z}^d$. Замість σ в цьому випадку будемо писати n, а замість $U_p^+(\mathbb{A})$ — U_p^+. Тоді

$$E_{\gamma_n}(f) = \Big|\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d\setminus\gamma_n} f(\mathbf{k})\Big|,$$

і якщо $f(\mathbf{k}) = \varphi_{\mathbf{k}} y_{\mathbf{k}}$, $\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d$, де $\varphi = \{\varphi_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ — деяка додатна послідовність, для якої

$$\lim_{|\mathbf{k}|\to\infty} \varphi_{\mathbf{k}} = 0, \quad |\mathbf{k}| = (k_1^2+k_2^2+\ldots+k_m^2)^{1/2} \tag{2.85}$$

(в такому випадку пишемо $\varphi\in\Phi$), а $y=\{y_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ належить до U_p^+, то покладаємо

$$E_{\gamma_n}(\varphi\, y) = \sum_{\mathbf{k}\overline{\in}\gamma_n} \varphi_{\mathbf{k}} y_{\mathbf{k}}$$

и

$$E_{\gamma_n}(\varphi,p) = \sup_{y\in U_p^+} E_{\gamma_n}(\varphi\, y).$$

В прийняти позначеннях справджується таке твердження:

Теорема 2.3.2′. *Нехай* $p\in(0,1]$ *і* $\varphi\in\Phi$. *Тоді для довільних натуральних* n *і* $\gamma_n\in\Gamma_n$ *виконуються рівності*

$$E_{\gamma_n}(\varphi,p) = \max_{\mathbf{k}\overline{\in}\gamma_n} \varphi_{\mathbf{k}} \tag{2.86}$$

і

$$D_n(\varphi,p) := \inf_{\gamma_n\in\Gamma_n} E_{\gamma_n}(\varphi,p) = \bar{\varphi}(n+1), \tag{2.87}$$

де $\bar{\varphi}(k)$, $k\in\mathbb{N}$, *— спадна перестановка послідовності* φ. *Точна нижня межа в (2.87) реалізується множиною* γ_n^*, *яка містить множину* $e_k' = \{k\in\mathbb{Z}^d \ : \ \varphi_k > \bar{\varphi}(n+1)\}$ *і яку у випадку, коли кількість точок* $|e_n'|$ *в* e_n' *менша за* n, *доповнено будь-якими* $n-|e_n'|$ *точками множини* $\{k\in\mathbb{Z}^d \ : \ \varphi_k = \bar{\varphi}(n+1)\}$:

$$D_n(\varphi,p) = E_{\gamma_n^*}(\varphi,p) = \bar{\varphi}(n+1),$$

Аналіз результатів підрозділу 2.3 показує, що у випадку, коли $p\in(0,1)$, а міра $d\mu$ така, що множину $\mathcal{U}_p(\mathbb{A},d\mu)$ неможливо вкласти в жодну з куль $U_1(\mathbb{A},d\mu,R)$ простору $L_1(\mathbb{A},d\mu)$ радіуса $R>0$, величини $E_{\gamma_\sigma}(\varphi,p)$ і $D_\sigma(\varphi,p)$ можуть бути необмеженими, на відміну від величин $e_\sigma(\varphi,p)$.

Порівнюючи порядкові оцінки для величин $e_\sigma(\varphi,p)$ зі значеннями величин $E'_{\gamma_\sigma}(\varphi,p)$ і $D'_\sigma(\varphi,p)$, які знайдено в теоремі 2.3.2, робимо висновок, що коли $p\in(0,1)$, а функція $\varphi\in\Phi(\mathbb{A})$ задовольняє умови твердження 2.2.1 або 2.2.2, то

$$\lim_{\sigma\to\infty} \frac{e_\sigma(\varphi,p)}{D'_\sigma(\varphi,p)} = 0,$$

тобто, в цьому випадку величини $e_\sigma(\varphi,p)$ прямують до нуля при $\sigma\to\infty$ швидше, ніж величини $D'_\sigma(\varphi,p)$.

При доведенні теорем 6.6.3 та 6.6.4 в підрозділі 6.6 було отримано також оцінки інтегралів, які містяться (внаслідок означення норми простору $L_p(0,a)$) в правій частині співвідношення (2.82) теореми 2.3.1.

Тому на підставі співвідношення (6.178) із врахуванням теореми 2.3.1 отримуємо таке твердження.

Твердження 2.3.1 . *Якщо* $p \in (1, \infty)$ *і функція* $\varphi \in \Phi(\mathbb{A})$ *при будь-якому* $t \geq 0$ *задовольняє рівність* $\bar{\varphi}(t) = \psi(t+1)$, *де* $\bar{\varphi}$ — *спадна перестановка функції* φ, *а функція* $\psi \in \mathfrak{M}_C$ *така, що* $\|\psi\|_{L_{p'}[1,\infty)} < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, *і функція* $1/\psi(t)$ *опукла при всіх* $t \geq t_0 \geq 1$, *то при* $\sigma \to \infty$ *справджується співвідношення*

$$D_\sigma(\varphi, p) \asymp \bar{\varphi}(\sigma)\sigma^{1-\frac{1}{p}}.$$

При доведенні співвідношення (6.190) в п.6.6.5 використовувався лише той факт, що функція ψ належить множині $\mathfrak{M}_\infty^+$. Тому враховуючи теорему 2.3.1, отримуємо таке твердження.

Твердження 2.3.2 . *Якщо* $p \in (1, \infty)$ *і функція* $\varphi \in \Phi(\mathbb{A})$ *при будь-якому* $t \geq 0$ *задовольняє рівність* $\bar{\varphi}(t) = \psi(t+1)$, *де* $\bar{\varphi}$ — *спадна перестановка функції* φ, *а* $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, *то при* $\sigma \to \infty$ *справджується співвідношення*

$$D_\sigma(\varphi, p) \asymp \bar{\varphi}(\sigma)(\eta(\bar{\varphi}; \sigma) - \sigma)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Порівнюючи результати даних тверджень з результатами тверджень 2.2.3 та 2.2.4 і враховуючи зауваження 6.2.2, бачимо, що коли $p \in (1, \infty)$, а функція $\varphi \in \Phi(\mathbb{A})$ задовольняє всі умови цих тверджень, при $\sigma \to \infty$ справджується співвідношення

$$e_\sigma(\varphi, p) \asymp D_\sigma(\varphi, p) \asymp \bar{\varphi}(\sigma)(\eta(\bar{\varphi}; \sigma) - \sigma)^{1-\frac{1}{p}}.$$

2.3.2. Доведення теореми 2.3.1. Нехай y — довільна функція з $\mathcal{U}_p(\mathbb{A})$. Тоді внаслідок нерівності Гельдера і співвідношень (1.59) та (1.43)

$$E_{\gamma_\sigma}(\varphi\, y) = \int\limits_{\mathbb{A}\setminus\gamma_\sigma} \varphi(\mathbf{x})y(\mathbf{x})d\mu \leq \|y\|_{L_p(\mathbb{A},d\mu)} \Big(\int\limits_{\mathbb{A}\setminus\gamma_\sigma} \varphi^{p'}(\mathbf{x})d\mu \Big)^{\frac{1}{p'}} \leq$$

$$\leq \|\varphi_{\gamma_\sigma}\|_{L_{p'}(\mathbb{A},d\mu)} = \|\bar{\varphi}_{\gamma_\sigma}\|_{L_{p'}(0,a)}, \tag{2.88}$$

і для доведення (2.81) залишається показати, що строгої нерівності в (2.88) бути не може. З цією метою розглянемо функцію $h = h(\mathbf{x})$,

$$h(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \in \gamma_\sigma, \\ \varphi_{\gamma_\sigma}^{p'/p}(\mathbf{x}) \|\varphi_{\gamma_\sigma}\|_{L_{p'}(\mathbb{A},d\mu)}^{-p'/p}, & \mathbf{x} \in \mathbb{A} \setminus \gamma_\sigma. \end{cases} \tag{2.89}$$

Тоді
$$\|h\|_{L_p(\mathbb{A},d\mu)} = \|\varphi_{\gamma_\sigma}\|^{-p'}_{L_{p'}(\mathbb{A},d\mu)} \int\limits_{\mathbb{A}\setminus\gamma_\sigma} \varphi^{p'}_{\gamma_\sigma}(\mathbf{x})d\mu = 1, \tag{2.90}$$
тобто, $h \in \mathcal{U}_p(\mathbb{A})$. Крім того, внаслідок (1.59)
$$E_{\gamma_\sigma}(\varphi\, h) = \|\varphi_{\gamma_\sigma}\|^{-p'/p}_{L_{p'}(\mathbb{A},d\mu)} \int\limits_{\mathbb{A}\setminus\gamma_\sigma} \varphi(\mathbf{x})\varphi^{p'/p}_{\gamma_\sigma}(\mathbf{x})d\mu =$$
$$= \|\varphi_{\gamma_\sigma}\|^{-p'/p}_{L_{p'}(\mathbb{A},d\mu)} \int\limits_{\mathbb{A}\setminus\gamma_\sigma} \varphi^{p'}_{\gamma_\sigma}(\mathbf{x})d\mu = \|\varphi_{\gamma_\sigma}\|_{L_{p'}(\mathbb{A},d\mu)}. \tag{2.91}$$
Об'єднуючи (2.88)–(2.91), робимо висновок, що співвідношення (2.81) доведено.

Розглядаючи точні нижні межі по множині Γ_σ обох частин (2.81), отримуємо
$$D_\sigma(\varphi, p) = \inf_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma} \|\bar\varphi_{\gamma_\sigma}\|_{L_{p'}(0,a)}.$$
Звідси з огляду на (1.59) робимо висновок, що найменше значення величини $\|\bar\varphi_{\gamma_\sigma}\|_{L_{p'}(0,a)}$ буде у випадку, коли $\gamma_\sigma = \gamma^*_\sigma$, і це значення дорівнює $\|\bar\varphi\|_{L_{p'}(\sigma,a)}$:
$$\inf_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma} \|\bar\varphi_{\gamma_\sigma}\|_{L_{p'}(0,a)} = \|\bar\varphi\|_{L_{p'}(\sigma,a)}.$$
Теорему доведено.

2.3.3. Доведення теореми 2.3.2. Функція $\varphi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{x})$ істотно обмежена на $\mathbb{A}_\sigma := \mathbb{A}\setminus\gamma_\sigma$. Тому її перестановка в спадному порядку обмежена, і для неї буде виконуватися рівність
$$\bar\varphi_{\gamma_\sigma}(0+) = \lim_{v\to 0+} \bar\varphi_{\gamma_\sigma}(v) =: y_\sigma.$$

Якщо при цьому $\bar\varphi_{\gamma_\sigma}(0+) = y_\sigma = 0$, то майже скрізь на $\mathbb{A}_\sigma$ $\varphi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{x}) = 0$, і в такому випадку $E_{\gamma_\sigma}(\varphi, p) = 0 = \bar\varphi_{\gamma_\sigma}(0+)$.

Якщо ж $y_\sigma > 0$, то при кожному $y > 0$ покладемо $e_y = \{\mathbf{t}\in\mathbb{A}_\sigma : \varphi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{t}) \ge y\}$. Тоді при $y > y_\sigma$ μ-міра множини e_y дорівнює нулю, і $\mu(e_y) > 0$ при $0 < y < y_\sigma$. Звідси, зокрема, випливає, що
$$y_\sigma = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{t}\in A_\sigma} \varphi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{t}).$$
Внаслідок твердження 1.4.1 для будь-якої функції $h \in \mathcal{U}'_p(\mathbb{A})$ справджується оцінка
$$E_{\gamma_\sigma}(\varphi\, h) \le y_\sigma.$$

Тому

$$E'_{\gamma_\sigma}(\varphi,p)=\sup_{h\in\mathcal{U}'_p(\mathbb{A},d\mu)} E_{\gamma_\sigma}(\varphi\, h)\le y_\sigma, \tag{2.92}$$

і для доведення (2.83) залишається показати, що строгого нерівності в останньому співвідношенні бути не може.

Нехай y — будь-яке число з проміжку $(0,y_\sigma)$ і $\bar e_y$ — довільна підмножина множини e_y, міра якої не перевищує одиницю: $\mathrm{mes}_\mu \bar e_y\le 1$. Покладемо

$$h_y(\mathbf{t})=\begin{cases}(\mathrm{mes}_\mu\ \bar e_y)^{-1}, & \mathbf{t}\in\bar e_y,\\ 0, & \mathbf{t}\in\mathbb{A}\setminus\bar e_y\end{cases}$$

так, що завжди $h_y\in\mathcal{U}'_p(\mathbb{A})$, і в той же час

$$y\le E_{\gamma_\sigma}(\varphi\, h_y)=\int\limits_{A_\sigma}\varphi_\sigma(\mathbf{t})h_y(\mathbf{t})d\mu\le y_\sigma.$$

Спрямовуючи y до y_σ, бачимо, що дійсно в (2.92) строгої нерівності бути не може, що і завершує доведення рівності (2.83).

Розглядаючи точні нижні межі по множині Γ_σ обох частин (2.83), отримуємо

$$D'_\sigma(\varphi,p)=\inf_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma}\bar\varphi_{\gamma_\sigma}(0+).$$

Враховуючи співвідношення (1.59), робимо висновок, що найменше значення величини $\bar\varphi_{\gamma_\sigma}(0+)$ буде у випадку, коли $\gamma_\sigma=\gamma^*_\sigma$, і це значення дорівнює $\bar\varphi(\sigma+)$:

$$\inf_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma}\bar\varphi_{\gamma_\sigma}(0+)=\bar\varphi(\sigma+).$$

Цим співвідношення (2.84) доведено.

2.3.4. Доведення теореми 2.3.2′. Внаслідок (2.85), величина $\max\limits_{\mathbf{k}\overline{\in}\gamma_n}\varphi_k$ скінченна для будь-якої функції $\varphi\in\Phi$, причому для деякого $\mathbf{k_0}\in\mathbb{Z}^d\setminus\gamma_n$ буде виконуватися рівність

$$\max_{\mathbf{k}\overline{\in}\gamma_n}\varphi_{\mathbf{k}}=\varphi_{\mathbf{k_0}}.$$

Тому внаслідок відомої нерівностіІєнсена, для довільної послідовності $y\in U_p^+$ виконується співвідношення

$$E_{\gamma_n}(\varphi\, y)=\sum_{\mathbf{k}\overline{\in}\gamma_n}\varphi_{\mathbf{k}}y_{\mathbf{k}}\le\max_{\mathbf{k}\overline{\in}\gamma_n}\varphi_{\mathbf{k}}\sum_{\mathbf{k}\overline{\in}\gamma_n}y_{\mathbf{k}}\le\max_{\mathbf{k}\overline{\in}\gamma_n}\varphi_{\mathbf{k}}\sum_{\mathbf{k}\overline{\in}\gamma_n}y^p_{\mathbf{k}}\le\max_{\mathbf{k}\overline{\in}\gamma_n}\varphi_{\mathbf{k}}, \tag{2.93}$$

З іншого боку послідовність

$$y^* = \begin{cases} 1, & \mathbf{k} = \mathbf{k_0}, \\ 0, & \mathbf{k} \neq \mathbf{k_0} \end{cases}$$

належить множині U_p^+ і для неї має місце рівність $E(\varphi\, y^*) = \varphi_{\mathbf{k_0}}$, яка разом з (2.93) і доводить співвідношення (2.86).

Розглядаючи точні нижні межі по множині Γ_n обох частин (2.86), отримуємо

$$D_n(\varphi, p) = \inf_{\gamma_n \in \Gamma_n} \max_{\mathbf{k} \overline{\in} \gamma_n} \varphi_{\mathbf{k}}.$$

Звідси робимо висновок, що найменше значення величини $\max\limits_{\mathbf{k} \overline{\in} \gamma_n} \varphi_{\mathbf{k}}$ буде у випадку, коли $\gamma_n = \gamma_n^*$, і це значення дорівнює $\bar{\varphi}(n+1)$:

$$\inf_{\gamma_n \in \Gamma_n} \max_{\mathbf{k} \overline{\in} \gamma_n} \varphi_{\mathbf{k}} = \bar{\varphi}(n+1).$$

Цим співвідношення (2.87) доведено.

2.4 Аналоги найкращих наближень інтегралів за допомогою інтегралів скінченного рангу в просторах Орліча

2.4.1. Нехай, як і вище, $(\mathbb{R}^d, d\mu)$, $d \geq 1$, — d-вимірний евклідів простір точок $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$, зі скінченною σ-адитивною неперервною мірою $d\mu$, $\mathbb{A}$ — μ-вимірна підмножина з $(\mathbb{R}^d, d\mu)$, μ-міра якої дорівнює a, $a \in (0, \infty]$; $Y = Y(\mathbb{A}, d\mu)$ — множина всіх заданих на $\mathbb{A}$ функцій $f = f(\mathbf{x})$, вимірних відносно міри $d\mu$.

Нехай $M(t)$, $t \geq 0$, — довільна функція Орліча, тобто, неспадна опукла функція така, що $M(0) = 0$ і $M(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Позначимо через $L_M(\mathbb{A}, d\mu)$ множину всіх функцій $f \in Y(\mathbb{A}, d\mu)$, які задовольняють умову

$$\int_{\mathbb{A}} M\big(C|f(\mathbf{x})|\big)\ d\mu < \infty,$$

де C — довільна додатна стала.

Лінійний простір $L_M(\mathbb{A}, d\mu)$ є банаховим з нормою Люксембурга

$$\|f\|_{L_M(\mathbb{A},\, d\mu)} := \inf\Big\{\alpha > 0 : \int_{\mathbb{A}} M\big(|f(\mathbf{x})|/\alpha\big)\ d\mu \leq 1\Big\} \tag{2.94}$$

і називається простором Орліча.

Зауважимо, що у випадку, коли $M(t)=t^p$, $p\geq 1$, простори $L_M(\mathbb{A},d\mu)$ збігаються з просторами $L_p(\mathbb{A},d\mu)$, означеними в на початку розділу 2.

Нехай, далі, $f\in L_M(\mathbb{A},d\mu)$, σ — деяке фіксоване додатне число, і $\Gamma_\sigma=\Gamma_\sigma(\mathbb{A})$ — множина всіх μ-вимірних підмножин γ_σ з $\mathbb{A}$, μ-міра яких дорівнює σ.

В даному підрозділі досліджуються величини

$$e_\sigma(f)_{L_M(\mathbb{A},\,d\mu)}:=\inf_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma}\|f-\chi_{\gamma_\sigma}f\|_{L_M(\mathbb{A},\,d\mu)}=$$

$$=\inf_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma}\inf\left\{\alpha>0:\int_{\mathbb{A}}M\big(|f(\mathbf{x})|/\alpha\big)\,d\mu-\int_{\gamma_\sigma}M\big(|f(\mathbf{x})|/\alpha\big)\,d\mu\leq 1\right\},\tag{2.95}$$

де, як і раніше, $\chi_{\gamma_\sigma}=\chi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{x})$ — характеристична функція множини γ_σ.

Величини $e_\sigma(f)_{L_M(\mathbb{A},\,d\mu)}$ можна розглядати як аналоги в просторах $L_M(\mathbb{A},d\mu)$ величин $e_n(f,\varphi)_H$, які означаються рівністю (1.8), а з огляду на (1.50) також і величин $e_\sigma(f)_{L_1(\mathbb{A},d\mu)}$.

Аналогічно до підрозділу 2.1 будемо розглядати величини $e_\sigma(f)_{L_M(\mathbb{A},\,d\mu)}$, які визначаються рівністю (2.95), для функцій $f=\varphi{\cdot}y$, де $\varphi\in\Phi(\mathbb{A})$, а y — деяка невід'ємна функція з множини $U_p^+(\mathbb{A})$. В цьому випадку вони будуть мати вигляд

$$e_\sigma(f)_{L_M(\mathbb{A},\,d\mu)}=e_\sigma(\varphi\,y)_{L_M(\mathbb{A},\,d\mu)}=\inf_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma}\|\varphi\,y-\chi_{\gamma_\sigma}\varphi\,y\|_{L_M(\mathbb{A},\,d\mu)}\tag{2.96}$$

Наступне твердження дає точні значення величин

$$e_\sigma(\varphi,p)_{L_M(\mathbb{A},\,d\mu)}:=\sup_{y\in\mathcal{U}_p(\mathbb{A},M)}e_\sigma(\varphi\,y)_{L_M(\mathbb{A},\,d\mu)}\tag{2.97}$$

де $\mathcal{U}_p(\mathbb{A},M)=U_p^+(\mathbb{A})\cap L_M(\mathbb{A},d\mu)$ у випадку, коли $\varphi\in\Phi(\mathbb{A})$, $p\in(0,\infty)$, а M — довільна функція Орліча така, що функція $M(t^{1/p})$ теж є функцією Орліча.

Теорема 2.4.1 . *Нехай $p\in(0,\infty)$, $\varphi\in\Phi(\mathbb{A})$, а M — деяка функція Орліча така, що функція $M(t^{1/p})$ теж є функцією Орліча. Тоді при будь-якому $\sigma\in(0,a)$ має місце рівність*

$$e_\sigma(\varphi,p)_{L_M(\mathbb{A},\,d\mu)}=\sup_{s>n}\left(\int_0^s\bar{\varphi}^{-p}(t)dt\right)^{-\frac{1}{p}}\Big/M^{-1}\big(1/(s-\sigma)\big),\tag{2.98}$$

де M^{-1} — обернена функція функції M, $\bar{\varphi}(t)$ — спадна перестановка функції $\varphi(\mathbf{x})$. При цьому точна верхня межа в правій частині (2.98) досягається при деякому скінченному значенні $s=s^*$. Точна верхня межа у співвідношенні (2.97) реалізується функцією $y^*=y^*(\mathbf{x},\varphi,\sigma,p)$, яка задається рівністю (2.5).

Зазначимо, що коли $M(t) = t$, $t \geq 0$, (тобто, коли $L_M(\mathbb{A}, d\mu) = L_1(\mathbb{A}, d\mu)$), функція $M(t^{1/p}) = t^{1/p}$ є функцією Орліча при $p \in (0, 1]$. В цьому випадку твердження теореми 2.4.1 збігається з твердженням теореми 2.1.1 підрозділу 2.1.

Аналогічне твердження в дискретних просторах Орліча l_M було отримано в роботі [203] і висвітлено в підрозділі 5.1.

Доведення теореми 2.4.1 проведемо за схемою доведень теорем 2.1.1 та 2.1.2.

2.4.2. Допоміжна лема 2.4.1 і її доведення. Встановимо допоміжну лему 2.4.1, яка займає в доведенні теореми 2.4.1 центральне місце. Для її формулювання введемо такі позначення. Нехай $M(t)$, $t \geq 0$, — довільна функція Орліча; $L_M(0, a)$, $a \in (0, \infty]$, — простір Орліча всіх вимірних на $(0, a)$ за Лебегом функцій $f(t)$ зі скінченною нормою

$$\|f\|_{L_M(0,a)} := \inf \Big\{ \alpha > 0 : \int_0^a M\big(|f(t)|/\alpha\big)\, dt \leq 1 \Big\},$$

і, як і раніше, $L_p(0, a)$, $0 < p < \infty$, — простір всіх вимірних на $(0, a)$ за Лебегом функцій $f(t)$ таких, що

$$\|f\|_{L_p(0,a)} := \Big(\int_0^a |f(t)|^p dt \Big)^{1/p} < \infty.$$

Нехай також $U_p(0, a)$ — одинична куля простору $L_p(0, a)$, і Ω — множина всіх незростаючих додатних функцій $\omega(t)$, істотно обмежених на проміжку $(0, a)$, $0 < a \leq \infty$, для яких у випадку, коли $a = \infty$,

$$\lim_{t \to \infty} \omega(t) = 0. \tag{2.99}$$

Нехай, далі, ω — довільна функція з Ω, і при даному $p \in (0, \infty)$ $\mathcal{M}_p^\omega$ — множина всіх невід'ємних функцій $m = m(t)$ з $U_p(0, a)$, для яких добуток $\omega(t)m(t)$ на проміжку $(0, a)$ не зростає і набуває скінченну кількість значень. Для кожного $\sigma > 0$ і для довільних функцій $\omega \in \Omega$ і $m \in \mathcal{M}_p^\omega$ розглянемо аналоги величин (2.96):

$$\mathscr{E}_\sigma(m, \omega)_{L_M} := e_\sigma(\omega\, u)_{L_M(0,a)} = \inf_{\delta_\sigma \subset (0,a)} \|\omega(t)m(t) - \chi_{\delta_\sigma}(t)\omega(t)m(t)\|_{L_M(0,a)} =$$

$$= \inf_{\delta_\sigma \subset (0,a)} \inf \Big\{ \alpha > 0 : \int_{(0,a)\setminus\delta_\sigma} M\big(\omega(t)m(t)/\alpha\big)\, dt \leq 1 \Big\},$$

де δ_σ — підмножини з $(0, a)$, міри яких дорівнюють σ і аналоги величин (2.97):

$$\mathscr{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^\omega, \omega)_{L_M} := \sup_{m \in \mathcal{M}_p^\omega} \mathscr{E}_\sigma(m, \omega)_{L_M} = \sup_{m \in \mathcal{M}_p^\omega} e_\sigma(\omega\, u)_{L_M(0,a)}. \tag{2.100}$$

Лема 2.4.1 . *Нехай $\omega \in \Omega$, $p \in (0, \infty)$ і $M(t)$ — функція Орліча така, що $M(t^{1/p})$ теж є функцією Орліча. Тоді при кожному $\sigma \in (0, a)$ має місце рівність*

$$\mathscr{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^\omega, \omega)_{L_M} = \sup_{s \in (0,a]} \Big(\int_0^s \omega^{-p}(t) dt \Big)^{-\frac{1}{p}} \big/ M^{-1}\big(1/(s-\sigma)\big), \tag{2.101}$$

де M^{-1} — обернена функція функції M. При цьому точна верхня межа в правій частині рівності (2.101) *завжди досягається в деякій скінченній точці $s^* \in (\sigma, a]$. Точна верхня межа в правій частині співвідношення* (2.100) *реалізується функцією $m^* = m^*(t)$ з $\mathcal{M}_p^\omega$, де*

$$m^*(t) = \frac{\chi_{(0,\,s^*)}(t)}{\omega(t)} \Big(\int_0^{s^*} \omega^{-p}(x) dx \Big)^{-\frac{1}{p}}, \tag{2.102}$$

а $\chi_{(0,\,s^*)}(t)$ — характеристична функція множини $(0, s^*)$.

Доведення. Нехай m — довільна функція з множини $\mathcal{M}_p^\omega$. Тоді добуток $\omega(t)m(t)$ при деякому $n \in \mathbb{N}$ зображується у вигляді

$$\omega(t)m(t) = y_k, \quad t \in (s_{k-1}, s_k),\ k = 1, 2, \dots, n+1, \tag{2.103}$$

де $y_1 > y_2 > \ldots > y_n > y_{n+1} = 0$ — деякі числа, і $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_n \le s_{n+1} = a$. Звідси, покладаючи $\Delta_k = s_k - s_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, n$, маємо

$$\mathscr{E}_\sigma(m, \omega)_{L_M} = \inf \Big\{ \alpha > 0 :\ \int_\sigma^a M\big(\omega(t)m(t)/\alpha\big)\ dt \le 1 \Big\} =$$

$$= \inf \Big\{ \alpha > 0 :\ \sum_{k=1}^n M(y_k/\alpha)\Delta_k - \int_0^\sigma M\big(\omega(t)m(t)/\alpha\big)\ dt \le 1 \Big\}.$$

Переконаємось, що можна вважати, що довжина Δ_1 проміжку $(0, s_1)$, на якому добуток $\omega(t)m(t)$ набуває свого найбільшого значення, не менша за σ. Якщо це не так, то через k_σ, $k_\sigma \in [1, n+1]$, позначимо найменше натуральне число таке, що $s_{k_\sigma} > \sigma$, і покладемо $\widetilde{s}_0 = 0$, $\widetilde{s}_1 = s_{k_\sigma}$, $\widetilde{y}_1 = y_{k_\sigma}$; $\widetilde{s}_k = s_{k_\sigma+k-1}$ і $\widetilde{y}_k = y_{k_\sigma+k-1}$, де $k = 2, \dots, n - k_\sigma + 1$. Розглянемо функцію $\widetilde{m}(t)$ таку, що $\widetilde{m}(t) = 0$, коли $t > \widetilde{s}_{n-k_\sigma+1}$, і

$$\omega(t)\,\widetilde{m}(t) = \widetilde{y}_k, \quad t \in (\widetilde{s}_{k-1}, \widetilde{s}_k), \quad k = 1, 2, \dots, n - k_\sigma + 1.$$

Для цієї функцій $\widetilde{\Delta}_1 = \widetilde{s}_1 - \widetilde{s}_0 = s_{k_\sigma} > \sigma$, $\|\widetilde{m}\|_{L_p(0,a)} \le \|m\|_{L_p(0,a)} \le 1$, тобто, $\widetilde{m} \in \mathcal{M}_p^\omega$ і

$$\mathscr{E}_\sigma(\widetilde{m}, \omega)_{L_M} = \inf \Big\{ \alpha > 0 :\ M(\widetilde{y}_1/\alpha)(\widetilde{\Delta}_1 - \sigma) + \sum_{k=2}^{n-k_\sigma+1} M(\widetilde{y}_k/\alpha)\Delta_k \le 1 \Big\} =$$

$$= \inf\Big\{\alpha > 0:\ M(y_{k_\sigma}/\alpha)(s_{k_\sigma} - \sigma) + \sum_{k=k_\sigma+1}^{n-1} M(y_k/\alpha)\Delta_k \le 1\Big\} = \mathscr{E}_\sigma(m,\omega).$$

Тому надалі будемо вважати, що довжина проміжку $(0, s_1)$ не менша за σ. В такому випадку

$$\mathscr{E}_\sigma(m,\omega)_{L_M} = \inf\Big\{\alpha > 0:\ M(y_1/\alpha)(\Delta_1 - \sigma) + \sum_{k=2}^{n} M(y_k/\alpha)\Delta_k \le 1\Big\}. \tag{2.104}$$

В силу (2.103) при кожному $k = 1, 2, \dots, n$

$$m_k := \int_{s_{k-1}}^{s_k} m^p(x)dx = y_k^p \int_{s_{k-1}}^{s_k} \omega^{-p}(x)dx,$$

і тому

$$y_k = \omega(t)m(t) = \omega_k m_k^{\frac{1}{p}}, \quad t \in [s_{k-1}, s_k),$$

де

$$\omega_k := \Big(\int_{s_{k-1}}^{s_k} \omega^{-p}(x)dx\Big)^{-\frac{1}{p}}.$$

Звідси рівність (2.104) можна записати у вигляді

$$\mathscr{E}_\sigma(m,\omega)_{L_M} = \inf\Big\{\alpha > 0 : F_\sigma(m,\alpha) \le 1\Big\}, \tag{2.105}$$

де

$$F_\sigma(m,\alpha) := F_\sigma(m,\omega,\alpha,M) = M(\omega_1 m_1^{\frac{1}{p}}/\alpha)(\Delta_1 - \sigma) + \sum_{k=2}^{n} M(\omega_k m_k^{\frac{1}{p}}/\alpha)\Delta_k.$$

Покладемо $N(t) = M(t^{\frac{1}{p}})$, $p_k = \omega_k^{-p}$, $a_k = \omega_k^p m_k/\alpha^p$, $k = 1, 2, \dots, n$, і виберемо числа b_k так, що $b_1 = (\Delta_1 - \sigma)\omega_1^p$ та $b_k = \Delta_k \omega_k^p$ при $k = 2, \dots, n$. Тоді для оцінки величини $F_\sigma(m,\alpha)$ можна застосувати теорему 5.7.1 підрозділу 5.7. Отримаємо

$$F_\sigma(m,\alpha) = \sum_{k=1}^{n} p_k b_k N(a_k) \le \max_{l\in[1,n]} \left\{ N\Big(\frac{\sum_{k=1}^n p_k a_k}{\sum_{k=1}^l p_k}\Big) \sum_{k=1}^{l} p_k b_k \right\} =$$

$$= \max_{l\in[1,n]} \left\{ N\Big(\frac{\sum_{k=1}^n m_k}{\alpha^p \sum_{k=1}^l \omega_k^{-p}}\Big) \Big(\sum_{k=1}^{l} \Delta_k - \sigma\Big) \right\} =$$

$$= \max_{l\in[1,n]} \left\{ M\Big(\frac{\|m\|_{L_p(0,a)}}{\alpha(\int_0^{s_l} \omega^{-p}(x)\ dx)^{1/p}}\Big)(s_l - \sigma) \right\}.$$

Оскільки $\|m\|_{L_p(0,a)} \le 1$, а функція M неспадна, то для довільного $\alpha > 0$

$$F_\sigma(m,\alpha) \le \sup_{s>\sigma}(s-\sigma)M(\widetilde{\omega}_s/\alpha), \text{ де } \quad \widetilde{\omega}_s := \Big(\int_0^s \omega^{-p}(x)dx\Big)^{-\frac{1}{p}}. \tag{2.106}$$

Зрозуміло, що у випадку, коли $a < \infty$, існує число $s_\alpha > \sigma$, яке реалізує точну верхню межу в правій частині співвідношення (2.106). Якщо ж $a = \infty$, то беручи до уваги монотонне прямування до нуля при $t \to \infty$ функції $\omega(t)$, неспадання частки $M(t^{1/p})/t,\ t > 0$, та нерівність

$$M(t/\mu) \le M(t)/\mu,$$

яка виконується для довільної функції Орліча $M(t)$ та будь-яких чисел $\mu \ge 1$ і $t \ge 0$, для довільного фіксованого $\alpha > 0$ отримуємо

$$\lim_{s\to\infty}(s-n)M(\widetilde{\omega}_s/\alpha) = \lim_{s\to\infty}(s-\sigma)M\Big(\frac{1}{\alpha}\Big(\int_0^s \omega^{-p}(t)\ dt\Big)^{\frac{1}{p}}\Big) \le$$

$$\le K\lim_{s\to\infty}\omega(s/2)\frac{M(1/s^{1/p})}{1/s} = 0. \tag{2.107}$$

Тому і в цьому випадку знайдеться принаймні одне число $s_\alpha > \sigma$, яке реалізує точну верхню межу в правій частині співвідношення (2.106). Отже, з урахуванням (2.106) маємо

$$F_\sigma(m,\alpha) \le \sup_{s\in(0,a]}(s-\sigma)M(\widetilde{\omega}_s/\alpha) = (s_\alpha-\sigma)M(\widetilde{\omega}_{s_\alpha}/\alpha). \tag{2.108}$$

Далі, для довільної функції $m \in \mathcal{M}_p^\omega$ покладемо

$$\alpha_m := \inf\Big\{\alpha > 0 : \int_\sigma^a M\big(\omega(t)m(t)/\alpha\big)\ dt \le 1\Big\},$$

і розглянемо функцію $\bar{m} = \bar{m}(t)$ таку, що

$$\bar{m}(t) = \begin{cases} \Big(\int_0^s \omega^{-p}(\tau)\ d\tau\Big)^{-1}\omega^{-1}(t), & t \in (0,s], \\ 0, & t \in (s,a), \end{cases} \tag{2.109}$$

де $s = s_{\alpha_m}$, число s_{α_m} визначається співвідношенням (2.108) при $\alpha = \alpha_m$. Тоді очевидно, що $\bar{m} \in \mathcal{M}_p^\omega$, і виконується нерівність

$$\int_\sigma^a M\big(\omega(t)m(t)/\alpha\big)\ dt \le \int_\sigma^a M\big(\omega(t)\bar{m}(t)/\alpha\big)\ dt,$$

а отже і нерівність $\mathscr{E}_\sigma(m,\omega)_{L_M} \le \mathscr{E}_\sigma(\bar{m},\omega)_{L_M}$.

Позначимо через $\bar{\mathcal{M}}_p^\omega$ множину всіх функцій $\bar{m} \in \mathcal{M}_p^\omega$, що мають вигляд (2.109) при довільних s, $s \in (\sigma, a)$. Тоді має місце рівність

$$\mathscr{E}_\sigma(m,\omega)_{L_M} = \sup_{m\in\bar{\mathcal{M}}_p^\omega} \mathscr{E}_\sigma(\bar{m},\omega)_{L_M} \tag{2.110}$$

Звідси на підставі (2.110) отримуємо

$$\mathscr{E}_\sigma(m,\omega)_{L_M} = \sup_{s\in(\sigma,a)} \inf\Big\{\alpha>0 : (s-\sigma)M\Big(\frac{1}{\alpha}\big(\int_0^s \omega^{-p}(t)\ dt\big)^{-\frac{1}{p}}\Big) \le 1\Big\} =$$

$$= \sup_{s\in(\sigma,a)} \xi_s, \tag{2.111}$$

де числа ξ_s визначаються рівністю

$$\xi_s := \Big(\int_0^s \omega^{-p}(t)\ dt\Big)^{-\frac{1}{p}} / M^{-1}\big(1/(s-\sigma)\big),$$

M^{-1} — функція, обернена до M. При цьому внаслідок (2.107) для довільного $\varepsilon > 0$ існує такий номер s_ε, що при всіх $s > s_\varepsilon$ величина $(s-n)M(\widetilde{\omega}_s/\varepsilon) < 1$ і тому при всіх $s > s_\varepsilon$, $\xi_s < \varepsilon$. Звідси випливає, що завжди існує такий номер s^*, що $\sup\limits_{s>n} \xi_s = \xi_{s^*}$.

Для завершення доведення леми 2.4.1 достатньо помітити, що функція m^*, визначена рівністю (2.102), належить множині $\mathcal{M}_p^\omega$, і для неї

$$\mathscr{E}_\sigma(m^*,\omega)_{L_M} = \Big(\int_0^{s^*} \omega^{-p}(t)\ dt\Big)^{-\frac{1}{p}} / M^{-1}\big(1/(s^*-\sigma)\big).$$

2.4.3. Доведення теореми 2.4.1. Нехай $\varphi \in \Phi(\mathbb{A})$, $p \in (0,\infty)$ і M — деяка функція Орліча така, що функція $M(t^{1/p})$ теж є функцією Орліча. Позначимо через $G_\sigma = G_\sigma(\varphi, p, M)$ праву частину співвідношення (2.98). Покажемо спочатку, що для довільної функції $y \in \mathcal{U}_p(\mathbb{A}, M)$ виконується нерівність

$$e_\sigma(\varphi\, y)_{L_M(\mathbb{A},\,d\mu)} \le G_\sigma. \tag{2.112}$$

Для цього розглянемо функції y_n, які визначаються рівністю (2.22). Бачимо, що $y_n \in \mathcal{U}_p(\mathbb{A}, M)$, $\varphi(\mathbf{x})y(\mathbf{x}) \ge \varphi(\mathbf{x})y_n(\mathbf{x})$ для довільних $\mathbf{x} \in \mathbb{A}$ та $n \in \mathbb{N}$. Тому $e_\sigma(\varphi\, y_n)_{L_M(\mathbb{A},\,d\mu)} \le e_\sigma(\varphi\, y)_{L_M(\mathbb{A},\,d\mu)}$. Внаслідок того, що $\varphi \in \Phi(\mathbb{A})$ і $y \in L_M(\mathbb{A}, d\mu)$ величини

$$\|\varphi\, y - \varphi\, y_n\|_{L_M(\mathbb{A},\,d\mu)}$$

збігаються до нуля при $n \to \infty$. Тоді для фіксованої множини $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$

$$\|\varphi\, y - \chi_{\gamma_\sigma}\varphi\, y\|_{L_M(\mathbb{A},\,d\mu)} \le \|\varphi\, y - \varphi y_n\|_{L_M(\mathbb{A},\,d\mu)} + \|\varphi\, y_n - \chi_{\gamma_\sigma}\varphi\, y_n\|_{L_M(\mathbb{A},\,d\mu)} +$$

$$+\|\chi_{\gamma_\sigma}\varphi\, y - \chi_{\gamma_\sigma}\varphi\, y_n\|_{L_M(\mathbb{A},\, d\mu)} \le 2\|\varphi\, y - \varphi\, y_n\|_{L_M(\mathbb{A},\, d\mu)} + \|\varphi\, y_n - \chi_{\gamma_\sigma}\varphi\, y_n\|_{L_M(\mathbb{A},\, d\mu)}.$$

Звідси отримуємо

$$|e_\sigma(\varphi\, y)_{L_M(\mathbb{A},\, d\mu)} - e_\sigma(\varphi\, y)_{L_M(\mathbb{A},\, d\mu)}| \le 2\|\varphi\, y - \varphi\, y_n\|_{L_M(\mathbb{A},\, d\mu)} \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

Тому якщо довести справедливість нерівності (2.112) для всіх функцій y_n, які визначаються рівністями (2.22), то звідси буде випливати, що ця нерівність виконується і для довільної функції $y \in \mathcal{U}_p(\mathbb{A}, M)$.

Як і в підрозділі 2.1.3, для даної функції φ позначимо через $\mathcal{U}_p^\varphi(\mathbb{A})$ множину всіх функцій $y \in \mathcal{U}_p(\mathbb{A}, M)$, для яких добуток $\varphi(\mathbf{x})y(\mathbf{x})$ набуває на множині $\mathbb{A}$ тільки скінченну кількість значень (зрозуміло, що у випадку, коли $\mathrm{mes}_\mu\mathbb{A} = \infty$, ці значення не дорівнюють нулю лише на множинах скінченної міри), і переконаємось, що нерівність (2.112) виконується для довільної функції $y \in \mathcal{U}_p^\varphi(\mathbb{A})$.

Отже, нехай функція $y \in \mathcal{U}_p^\varphi(\mathbb{A})$ така, що при деякому $n \in \mathbb{N}$ добуток $\varphi(\mathbf{x})y(\mathbf{x}) =: f(\mathbf{x})$ набуває на множині $\mathbb{A}$ лише n різних відмінних від нуля значень f_k, $k = \overline{1, n}$, які для зручності впорядкуємо за спаданням:

$$f_1 > f_2 > \ldots > f_n > 0,$$

і покладемо $\mathbb{A}_k := \{\mathbf{x} \in \mathbb{A} :\ f(\mathbf{x}) = f_k\}$, $\mu(\mathbb{A}_k) =: \mu_k$.

Тоді

$$e_\sigma(\varphi\, y)_{L_M(\mathbb{A},\, d\mu)} := \inf_{\gamma_\sigma}\ \inf\left\{\alpha > 0 :\ \int_{\mathbb{A}\setminus\gamma_\sigma} M\big(f(\mathbf{x})/\alpha\big)\ d\mu \le 1\right\} =$$

$$= \inf\left\{\alpha > 0 :\ \sum_{k=1}^{n} M(f_k/\alpha)\mu_k - \sup_{\gamma_\sigma}\int_{\gamma_\sigma} M\big(f(\mathbf{x})/\alpha\big)\ d\mu \le 1\right\}. \tag{2.113}$$

Переконаємось, що можна вважати $\mu_1 = \mu(A_1) \ge \sigma$. З цією метою для даного $\sigma \in (0, a)$ позначимо через k_σ найменше натуральне число таке, що $\sum\limits_{k=1}^{k_\sigma} \mu_k \ge \sigma$, і покладемо $\widetilde{\mathbb{A}}_1 = \bigcup\limits_{i=1}^{k_\sigma} \mathbb{A}_i$, $\widetilde{f}_1 = f_{k_\sigma}$; $\widetilde{\mathbb{A}}_k = \mathbb{A}_{k_\sigma+k-1}$ и $\widetilde{f}_k = f_{k_\sigma+k-1}$, где $k = 2, \ldots, n-k_\sigma+1$. Розглянемо функцію $\widetilde{y}(\mathbf{x})$ таку, що $\widetilde{y}(\mathbf{x}) = 0$, коли $t \in \mathbb{A} \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n-k_\sigma+1} \widetilde{\mathbb{A}}_i$, і

$$\varphi(\mathbf{x})\,\widetilde{y}(\mathbf{x}) = \widetilde{f}_k, \quad \mathbf{x} \in \widetilde{\mathbb{A}}_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n - k_\sigma + 1.$$

Для цієї функції $\mu(\widetilde{\mathbb{A}}_1) \ge \sigma$, $\|\widetilde{y}\|_{L_p(\mathbb{A}, d\mu)} \le \|y\|_{L_p(\mathbb{A}, d\mu)} \le 1$, тобто $\widetilde{y} \in \mathcal{U}_p^\varphi(\mathbb{A})$ і

$$e_\sigma(\varphi\,\widetilde{y})_{L_M(\mathbb{A},\, d\mu)} = \inf\left\{\alpha > 0 :\ M(\widetilde{f}_1/\alpha)(\mathrm{mes}_\mu\widetilde{\mathbb{A}}_1 - \sigma) + \sum_{k=2}^{n-k_\sigma+1} M(\widetilde{f}_k/\alpha)\mu(\widetilde{\mathbb{A}}_k) \le 1\right\} =$$

$$= \inf\Big\{\alpha>0:\ M(f_{k_\sigma}/\alpha)\Big(\sum_{k=1}^{k_\sigma}\mu_k-\sigma\Big)+\sum_{k=k_\sigma+1}^{n-1}M(f_k/\alpha)\mu_k\le 1\Big\}=e_\sigma(\varphi\, y)_{L_M(\mathbb{A},\,d\mu)}.$$

Тому далі будемо вважати, що μ-міра множини $\mathbb{A}_1$ не менша σ.

На проміжку $t\in(0,a)$ розглянемо функцію $m'(t)=m'(y,t)$ вигляду (2.24). Як показано в підрозділі 2.1.3,

$$\|m'\|_{L_p(0,a)}\le\|y\|_{L_p(\mathbb{A},d\mu)}\le 1. \qquad (2.114)$$

Тому функція m' належить одиничній кулі $U_p(0,a)$ простору $L_p(0,a)$. Переконаємось, що

$$e_\sigma(\varphi\, y)_{L_M(\mathbb{A},\,d\mu)}=\inf_{\gamma_\sigma\in(0,a)}\inf\Big\{\alpha>0:\int\limits_{(0,a)\setminus\gamma_\sigma}M\big(\bar\varphi(t)m'(t)/\alpha\big)dt\le 1\Big\}=\mathscr{E}_\sigma(m',\bar\varphi)_{L_M} \quad (2.115)$$

і тим самим задачу про оцінку величини $e_\sigma(\varphi\, y)_{L_M(\mathbb{A},\,d\mu)}$ для $y\in\mathcal{U}_p^\varphi(\mathbb{A})$ буде зведено до дослідження величин $\mathscr{E}_\sigma(m',\bar\varphi)_{L_M}$ на множині всіх функцій $m'\in U_p(0,a)$ вигляду (2.24).

Враховуючи те, що $a_1=\mu_1\ge\sigma$, маємо

$$\mathscr{E}_\sigma(m',\bar\varphi)_{L_M}=\inf\Big\{\alpha>0:\ M(f_1/\alpha)\big(a_1-\sigma\big)+\sum_{k=2}^{n}M(f_k/\alpha)(a_k-a_{k-1})\le 1\Big\}=$$

$$=\inf\Big\{\alpha>0:\ M(f_1/\alpha)\big(\mu_1-\sigma\big)+\sum_{k=2}^{n}M(f_k/\alpha)\mu_k\le 1\Big\}. \qquad (2.116)$$

З іншого боку, внаслідок (2.113)

$$e_\sigma(\varphi\, y)_{L_M(\mathbb{A},\,d\mu)}=\inf\Big\{\alpha>0:\ \sum_{k=1}^{n}M(f_k/\alpha)\mu_k-\sup_{\gamma_\sigma}\int_{\gamma_\sigma}M\Big(f(\mathbf{x})/\alpha\Big)\,d\mu\le 1\Big\}=$$

$$=\inf\Big\{\alpha>0:\ M(f_1/\alpha)\big(a_1-\sigma\big)+\sum_{k=2}^{n}M(f_k/\alpha)\mu_k\le 1\Big\}. \qquad (2.117)$$

Порівнюючи вирази в правих частинах співвідношень (2.116) та (2.117), бачимо, що дійсно $e_\sigma(\varphi\, y)_{L_M(\mathbb{A},\,d\mu)}=\mathscr{E}_\sigma(m',\bar\varphi)_{L_M}$.

Нехай, далі, $\mathcal{M}_p^{\bar\varphi}$ — множина всіх невід'ємних функцій $m\in U_p(0,a)$, для яких добуток $\bar\varphi(t)m(t)$ на проміжку $(0,a)$ не зростає і набуває лише скінченну кількість значень. З огляду на означення функції $m'(t)$ та нерівність (2.114) бачимо, що $m'\in\mathcal{M}_p^{\bar\varphi}$, і тому з урахуванням (2.115) для довільної функції $y\in\mathcal{U}_p^\varphi(\mathbb{A})$

$$e_\sigma(\varphi\, y)_{L_M(\mathbb{A},\,d\mu)}\le\sup_{m\in\mathcal{M}_p^{\bar\varphi}}\inf_{\gamma_\sigma\in(0,a)}\inf\Big\{\alpha>0:\int_{(0,a)\setminus\gamma_\sigma}M\big(\bar\varphi(t)m(t)/\alpha\big)dt\le 1\Big\}=$$

$$= \mathscr{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^{\bar\varphi}, \bar\varphi)_{L_M}. \tag{2.118}$$

Для знаходження величини $\mathscr{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^{\bar\varphi}, \bar\varphi)_{L_M}$ скористаємося доведеною вище лемою 2.4.1. Покладаючи $\omega(t) = \bar\varphi(t)$, $t \in (0, a)$, бачимо, що $\omega \in \Omega$, і згідно з (2.101) отримуємо

$$\mathscr{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^{\bar\varphi}, \bar\varphi)_{L_M} = \sup_{s\in(0,a]} \Big(\int_0^s \bar\varphi^{-p}(t)dt \Big)^{-\frac{1}{p}} / M^{-1}\big(\frac{1}{s-n}\big). \tag{2.119}$$

При цьому точна верхня межа в правій частині останнього співвідношення досягається при деякому скінченному значенні $s = s^*$. Об'єднуючи (2.118) та (2.119), приходимо до висновку, що нерівність (2.112) виконується для довільної функції $y \in \mathcal{U}_p^\varphi(\mathbb{A})$, а отже, і для довільної функції y з множини $\mathcal{U}_p(\mathbb{A}, M)$.

Для завершення доведення теореми 2.4.1 покажемо, що у множині $\mathcal{U}_p(\mathbb{A}, M)$ існує функція $y^* = y^*(\mathbf{x}, \bar\varphi, \sigma, p)$, для якої

$$e_\sigma(\varphi\, y^*)_{L_M(\mathbb{A},\, d\mu)} = \Big(\int_0^{s^*} \bar\varphi^{-p}(t)dt \Big)^{-\frac{1}{p}} / M^{-1}\big(1/(s^*-n)\big).$$

З цією метою виділимо з множини $\{\mathbf{x} \in \mathbb{A} :\ \varphi(\mathbf{x}) \geq \bar\varphi(s^*-)\}$ довільну вимірну підмножину $\mathbb{E}$ μ-міри s^*, яка містить множину $\{\mathbf{x} \in \mathbb{A} :\ \varphi(\mathbf{x}) > \bar\varphi(s^*-)\}$, і розглянемо функцію y^*, визначену співвідношенням (2.5). Для неї маємо: $y^* \in L_1(\mathbb{A}, d\mu)$ і

$$\|y^*\|^p_{L_p(\mathbb{A},d\mu)} = \int_{\mathbb{A}} y^*(\mathbf{x})^p\ d\mu = \int_{\mathbb{E}} \varphi^{-p}(\mathbf{x})\ d\mu \Big(\int_{\mathbb{E}} \varphi^{-p}(\mathbf{t})\ d\mu \Big)^{-1} = 1,$$

тобто $y^* \in \mathcal{U}_p(\mathbb{A}, M)$. Оскільки для довільного числа $h \geq 0$ μ-міра множини $\{\mathbf{x} \in \mathbb{E} :\ \varphi(\mathbf{x}) \geq h\}$ дорівнює мірі Лебега множини $\{t \in (0, s^*) :\ \bar\varphi(t) \geq h\}$, то

$$\int_{\mathbb{E}} \varphi^{-p}(\mathbf{x})\ d\mu = \int_0^{s^*} \bar\varphi^{\,-p}(t)\ dt,$$

і тому

$$e_\sigma(\varphi\, y^*)_{L_M(\mathbb{A},\, d\mu)} = \inf_{\gamma_\sigma} \inf \Big\{ \alpha > 0 :\ \int_{\mathbb{A}\setminus\gamma_\sigma} M\big(\varphi(\mathbf{x}) y^*(\mathbf{x})/\alpha\big)\ d\mu \leq 1 \Big\} =$$

$$= \inf \Big\{ \alpha > 0 :\ (s^* - \sigma) M\Big(\big(\int_{\mathbb{E}} \varphi^{-p}(\mathbf{x}) d\mu \big)^{-\frac{1}{p}} / \alpha \Big) \leq 1 \Big\} =$$

$$= \inf \Big\{ \alpha > 0 :\ M\Big(\big(\int_0^{s^*} \bar\varphi^{-p}(t) dt \big)^{-\frac{1}{p}} / \alpha \Big) \leq 1/(s^* - \sigma) \Big\} =$$

$$= \Big(\int_0^{s^*} \bar\varphi^{-p}(t)dt \Big)^{-\frac{1}{p}} / M^{-1}\big(1/(s^*-n)\big).$$

Таким чином, співвідношення (2.98) дійсно є рівністю і теорему 2.4.1 доведено.

2.5 Деякі застосування отриманих результатів

В наступних підрозділах розглядаються застосування результатів, отриманих у підрозділах 2.1–2.3, до питань збіжності, а також до наближення вимірних функцій цілими функціями експоненціального типу.

2.5.1. Критерій збіжності інтегралів. Як вже зазначалося, ідея вивчення величин $e_\sigma(f)$ вигляду (1.40) бере свій початок від роботи С. Б. Стєчкіна [134], в якій знайдено знайдено необхідні та достатні умови абсолютної збіжності ортогональних рядів, саме в термінах величин, інтегральними аналогами яких є величини $e_\sigma(f)$. Істотне місце в доведенні твердження 1.1.3 займає наступний результат для числових рядів:

Твердження 2.5.1 *(С. Б. Стєчкін [134]). Нехай послідовність $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ належить простору l_2: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$. Тоді для того, щоб ця послідовність належала простору l_1, тобто, щоб збігався ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|$, необхідно і достатньо, щоб збігався ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\, \sigma_{n-1}(x)_{l_2},$$

де при кожному $n = 1, 2, \ldots$

$$\sigma_n(x)_{l_2} = \inf_{\alpha_k, \gamma_n} \Big\| x - \sum_{k\in\gamma_n} \alpha_k e_k \Big\|_{l_2} = \inf_{\gamma_n} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 - \sum_{k\in\gamma_n} |x_k|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$$

— величина найкращого n-членного наближення послідовності x в просторі l_2.

За допомогою величин $e_\sigma(f)$ вдається розповсюдити цей результат в такому напрямку.

Нехай f — будь-яка функція із простору $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$, $p \in (0, \infty)$, а s — деяке відмінне від p число. Виникає питання про умови збіжності інтегралу

$$\int\limits_{\mathbb{A}} |f(\mathbf{x})|^s d\mu, \tag{2.120}$$

тобто, щоб дана функція належала простору $L_s(\mathbb{A}, d\mu)$.

У випадку, коли $\mathrm{mes}_\mu \mathbb{A} < \infty$, а $0 < s \le p$, має місце вкладення $L_p(\mathbb{A}, d\mu) \subset L_s(\mathbb{A}, d\mu)$, і тому інтеграл (2.120) збігається для будь-якої функції $f \in L_p(\mathbb{A}, d\mu)$. Проте якщо $0 < p < s$ або ж $\mathrm{mes}_\mu \mathbb{A} = \infty$, то аналогічне вкладення в загальному випадку невірне.

Відповідь на поставлене питання дає така теорема.

Теорема 2.5.1 . *Нехай f — будь-яка функція з простору $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$, $\mathrm{mes}_\mu \mathbb{A} = \infty$, $p \in (0, \infty)$. Тоді*

1) *якщо $0 < s < p < \infty$, то для того, щоб збігався інтеграл (2.120), необхідно і достатньо, щоб збігався інтеграл*

$$\int\limits_0^\infty \left(\frac{e_\sigma(g)}{\sigma}\right)^{\frac{s}{p}} d\sigma, \tag{2.121}$$

де g — спадна перестановка функції $|f(\mathbf{x})|^p$ на множині $\mathbb{A}$, а $e_\sigma(g) = e_\sigma(g)_{L_1(0,a)}$ — найкраще наближення інтегралу функції g по проміжку $(0, \infty)$ інтегралами рангу σ;

2) *якщо ж $0 < p < s < \infty$, то для збіжності інтегралу (2.120) необхідно і достатньо, щоб збігався інтеграл*

$$\int\limits_0^\infty e_\sigma^{\frac{s}{p}}(h) d\sigma,$$

де $h(t) = g(t)/t$, $t \in (0, \infty)$, g — спадна перестановка функції $|f(\mathbf{x})|^p$ на множині $\mathbb{A}$, а $e_\sigma(h) = e_\sigma(h)_{L_1(0,a)}$ — найкраще наближення інтегралу функції h по проміжку $(0, \infty)$ інтегралами рангу σ.

Дана теорема випливає із такої леми.

Лема 2.5.1 . *Нехай $u(t)$ — довільна невід'ємна монотонно неспадна на $(0, \infty)$ функція, для якої $\int_0^\infty u(t)dt < \infty$, і $F(x) := \int_x^\infty u(t)dt$. Тоді якщо $r \in (0, 1)$, то*

$$\frac{1-r}{e} \int\limits_0^\infty \left(\frac{F(x)}{x}\right)^r dx \le \int\limits_0^\infty u^r(x) dx \le \left(\frac{1-r}{r}\right)^r \int\limits_0^\infty \left(\frac{F(x)}{x}\right)^r dx, \tag{2.122}$$

якщо ж $r > 1$, то

$$r^{-r} \int\limits_0^\infty (F^r(x) dx \le \int\limits_0^\infty (xu(x))^r dx \le \frac{r^r}{(r-1)^{r-1}} \int\limits_0^\infty F^r(x) dx. \tag{2.123}$$

Зазначимо, що нерівності вигляду (2.122) і (2.123) називають нерівностями Гарді.

Другу із нерівностей у співвідношенні (2.122) доведено в [183, с. 302], перша нерівність випливає із леми 2.5 роботи [65].

У співвідношенні (2.123) першу нерівність доведено в [183, с. 294], друга випливає із наступних міркувань, аналогічних доведенню леми 2.5 роботи [65].

Оскільки функція $u(t)$ не зростає на $(0,\infty)$, то для будь-якого числа $C>1$ маємо

$$J:=\int\limits_0^\infty F^r(x)dx\geq\int\limits_0^\infty\Big(\int\limits_x^{Cx}u(t)dt\Big)^r dx+\int\limits_0^\infty\Big(\int\limits_{Cx}^\infty u(t)dt\Big)^r dx\geq\frac{(C-1)^r}{C^{r+1}}J^*+\frac{1}{C}J,$$

де $J^*=\int_0^\infty(xu(x))^r dx$. Звідки при $C=r$ отримуємо необхідну нерівність. Тим самим лему 2.5.1 доведено.

Для доведення пункту 1) теореми 2.5.1 покладемо $r=s/p$ і $u(t)=g(t)$, де $g(t)$ — спадна перестановка функції $|f(\mathbf{x})|^p$ на множині $\mathbb{A}$. Тоді з огляду на означення

$$e_\sigma(g)=\int\limits_\sigma^\infty g(t)dt=\int\limits_\sigma^\infty u(t)dt=F(\sigma).$$

Крім того, на підставі рівності (1.43)

$$\int\limits_{\mathbb{A}}|f(\mathbf{x})|^s d\mu=\int\limits_0^\infty g^{\frac{s}{p}}(t)dt=\int\limits_0^\infty u^r(t)dt.$$

Звідси внаслідок співвідношень (2.122) випливає, що інтеграл (2.120) збігається тоді і тільки тоді, коли збігається інтеграл (2.121), що і треба було довести.

Для доведення пункту 2) достатньо покласти $u(t)=h(t)$, де $h(t)=\dfrac{g(t)}{t}$, $r=s/p$ і аналогічно скористатися співвідношенням (2.123). Теорему доведено.

Розглянемо також випадок, коли дана функція $f\in L_p(\mathbb{A},d\mu)$, $p\in(0,\infty)$, $(f\not\equiv 0)$ є добутком двох функцій:

$$f(\mathbf{x})=\varphi(\mathbf{x})y(\mathbf{x})\quad\forall\mathbf{x}\in\mathbb{A},\tag{2.124}$$

де $|\varphi|\in\Phi(\mathbb{A})$, а $y\in L_q(\mathbb{A},d\mu)\cap L_p(\mathbb{A},d\mu)$, $0<q\leq p$, і знайдемо достатні умови збіжності інтегралу

$$\int\limits_{\mathbb{A}}|f(\mathbf{x})|^s d\mu=\int\limits_{\mathbb{A}}|\varphi(\mathbf{x})y(\mathbf{x})|^s d\mu,\quad 0<s<p.\tag{2.125}$$

Внаслідок обмеженості функцій $|\varphi|\in\Phi(\mathbb{A})$ умова $y\in L_q(\mathbb{A},d\mu)\cap L_p(\mathbb{A},d\mu)$, $0<q\leq p$, гарантує включення $f\in L_s(\mathbb{A},d\mu)$ при $s\in[q,p]$, тому змістовним тут є випадок, коли $s<q$.

Покладемо $v(\mathbf{x})=|y(\mathbf{x})|/\|y\|_q$, де $\|y\|_q=\|y\|_{L_q(\mathbb{A},d\mu)}$. Тоді $v\in\mathcal{U}_q(\mathbb{A})$, і внаслідок теореми 2.5.1, для того, щоб збігався інтеграл (2.125), необхідно і достатньо, щоб збігався інтеграл вигляду (2.121). При цьому з огляду на прийняті позначення та властивості величин $e_\sigma(f)$ маємо

$$e_\sigma(g) = e_\sigma(|f|^p) = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \Big(\int\limits_{\mathbb{A}} |f(\mathbf{x})|^p d\mu - \int\limits_{\gamma_\sigma} |f(\mathbf{x})|^p d\mu \Big) =$$

$$= \|y\|_q^p \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \Big(\int\limits_{\mathbb{A}} |\varphi(\mathbf{x})|^p v^p(\mathbf{x}) d\mu - \int\limits_{\gamma_\sigma} |\varphi(\mathbf{x})|^p v^p(\mathbf{x}) d\mu \Big) =$$

$$= \|y\|_q^p e_\sigma(|\varphi|^p \cdot v^p) \le \|y\|_q^p \sup_{v \in \mathcal{U}_q(\mathbb{A})} e_\sigma(|\varphi|^p \cdot v^p) = \|y\|_q^p e_\sigma\big(|\varphi|^p, \frac{q}{p}\big).$$

Крім того, для будь-якого $\sigma > 0$ згідно з означенням, $e_\sigma(|f|^p) \le \|f\|^p_{L_p(\mathbb{A},d\mu)} < \infty$. Тому для довільної функції $f \in L_p(\mathbb{A}, d\mu)$ вигляду (2.124) і будь-якого $M > 0$ виконується співвідношення

$$\int\limits_0^\infty \Big(\frac{e_\sigma(g)}{\sigma}\Big)^{\frac{s}{p}} d\sigma = \int\limits_0^\infty \Big(\frac{e_\sigma(|f|^p)}{\sigma}\Big)^{\frac{s}{p}} d\sigma = \int\limits_0^\infty \Big(\frac{e_\sigma(g)}{\sigma}\Big)^{\frac{s}{p}} d\sigma \le$$

$$\le \|f\|^s_{L_p(\mathbb{A},d\mu)} \int\limits_0^M \sigma^{-\frac{s}{p}} d\sigma + \|y\|_q^s \int\limits_M^\infty \Big(\frac{e_\sigma(|\varphi|^p, \frac{q}{p})}{\sigma}\Big)^{\frac{s}{p}} d\sigma \le K_1 + K_2 \int\limits_M^\infty \Big(\frac{e_\sigma(|\varphi|^p, \frac{q}{p})}{\sigma}\Big)^{\frac{s}{p}} d\sigma.$$

Звідси, враховуючи теорему 2.1.1, отримуємо таке твердження.

Наслідок 2.5.1 . *Нехай функція $f \in L_p(\mathbb{A}, d\mu)$, $p \in (0,\infty)$, зображується у вигляді* (2.124), *де $|\varphi| \in \Phi(\mathbb{A})$, а $y \in L_q(\mathbb{A}, d\mu) \cap L_p(\mathbb{A}, d\mu)$, $0 < q \le p$. Тоді для того, щоб збігався інтеграл* (2.125), *достатньо, щоб збігався інтеграл*

$$\int\limits_M^\infty \Big(\frac{G_\sigma(|\varphi|^p, \frac{q}{p})}{\sigma}\Big)^{\frac{s}{p}} d\sigma,$$

де M — деяке додатне число,

$$G_\sigma(|\varphi|^p, \frac{q}{p}) = \sup_{l \in (0,\infty)} (l - \sigma) \Big(\int\limits_0^l \frac{dt}{\bar{\varphi}^{\,q}(t)} \Big)^{-\frac{p}{q}},$$

а $\bar{\varphi}$ — спадна перестановка функції $|\varphi|$ на множині $\mathbb{A}$.

Скориставшись твердженням 2.2.1, із наслідку 2.5.1 можна отримати таке твердження.

Наслідок 2.5.2 . *Нехай функція* $f \in L_p(\mathbb{A}, d\mu)$, $p \in (0, \infty)$, *зображується у вигляді* (2.124), *де* $y \in L_q(\mathbb{A}, d\mu) \cap L_p(\mathbb{A}, d\mu)$, $0 < q \le p$, *а функція* $|\varphi| \in \Phi(\mathbb{A})$ *така, що при будь-якому* $t \ge 0$ *виконується рівність* $\bar{\varphi}^{\,q}(t+1) = \psi(t)$, *в якій* $\psi \in \mathfrak{M}_0$. *Тоді якщо при деякому* $M > 0$ *збігається інтеграл*

$$\int\limits_M^\infty \frac{\bar{\varphi}^s(\sigma)}{\sigma^{\frac{s}{q}}} d\sigma,$$

то збігається і інтеграл

$$\int\limits_{\mathbb{A}} |f(\mathbf{x})|^s d\mu, \quad 0 < s < p.$$

2.5.2. Застосування отриманих результатів до наближень функціональних класів цілими функціями експоненціального типу. Розглянемо ще одне застосування отриманих вище результатів. При цьому будемо здебільшого використовувати понят-тя та позначення підрозділу 1.5.4.

Нехай $L_p(\mathbb{R}^d)$ — простір всіх вимірних за Лебегом на $\mathbb{R}^d$, $d \ge 1$, функцій $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_d)$, які задовольняють співвідношення (1.88).

Позначимо через $\psi U_{q,2}$ множину ψ-інтегралів всіх функцій із $L_2(\mathbb{R}^d)$, які належать одиничній кулі $U_q(\mathbb{R}^d) = \{\varphi : \|\varphi\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \le 1\}$ простору $L_q(\mathbb{R}^d)$, $q \ge 1$. Розглянемо наступну характеристику:

$$e_\sigma(\psi U_{q,2})_2 = \sup_{f \in \psi U_{q,2}} e_\sigma(f)_2, \tag{2.126}$$

де, як і в підрозділі 1.5.4, для $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$

$$e_\sigma(f)_2 = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \mathscr{E}^2_{\gamma_\sigma}(f)_2 = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \|f - U_{\gamma_\sigma}(f)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

В прийнятих позначеннях має місце таке твердження.

Теорема 2.5.2 . *Нехай* $q \in [1, 2]$ *і* $\psi(\mathbf{x})$ — *будь-яка невід'ємна істотно обмежена на* $\mathbb{R}^d$, $d \ge 1$ *функція, для якої* $\lim\limits_{|\mathbf{x}| \to \infty} |\psi(\mathbf{x})| = 0$. *Тоді при кожному* $\sigma > 0$ *справджується рівність*

$$e_\sigma(\psi U_{q,2})_2 = \sup_{s > \sigma} (s - \sigma)^{\frac{1}{2}} \Big(\int\limits_0^s \bar{\psi}^{\,-q}(t)\, dt \Big)^{-\frac{1}{q}}, \tag{2.127}$$

де $\bar{\psi}(t)$ — *спадна перестановка функції* $\psi(\mathbf{x})$. *При цьому точна верхня межа в правій частині* (2.127) *досягається при деякому скінченному значенні* $s = s^*$. *Точна верхня* *межа в правій частині співвідношення* (2.126) *реалізується функцією* $f^* = f^*(\mathbf{x})$, *для якої*

$$\widehat{f}^*(\mathbf{x}) = \chi_{\mathbb{E}}(\mathbf{x})\Big(\int\limits_E \psi^{-q}(\mathbf{t})d\mathbf{t}\Big)^{-\frac{1}{q}}, \tag{2.128}$$

де $\mathbb{E}$ *— будь-яка вимірна підмножина множини* $\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d:\ \psi(\mathbf{x})\geq\bar{\psi}(s^*-)\}$ *лебегової міри* s^*, *що містить множину* $\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d:\ \psi(\mathbf{x})>\bar{\psi}(s^*-)\}$, *а* $\chi_{\mathbb{E}}(\cdot)$ *— характеристична функція множини* $\mathbb{E}$.

Доведення. Для будь-якої функції $f\in L_2(\mathbb{R}^d)$ внаслідок (1.90) і (1.89) маємо

$$\|f-U_{\gamma_\sigma}(f;\lambda)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \|\widehat{f}(\mathbf{x})-\widehat{U}_{\gamma_\sigma}(f;\lambda;\mathbf{x})\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \int\limits_{\gamma_\sigma}(1-\lambda(\mathbf{x}))^2\widehat{f}^{\,2}(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus\gamma_\sigma}\widehat{f}^{\,2}(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

Звідси випливає, що для довільних $f\in L_2(\mathbb{R}^d)$ і $\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma$, $\sigma>0$ справджується рівність

$$\|f-U_{\gamma_\sigma}(f)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \int\limits_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}^{\,2}(\mathbf{x})d\mathbf{x} - \int\limits_{\gamma_\sigma}\widehat{f}^{\,2}(\mathbf{x})d\mathbf{x}. \tag{2.129}$$

Якщо тепер $f_\psi\in\psi U_{q,\,2}$, то згідно з означенням величин $e_\sigma(f)_2$ і співвідношеннями (2.129) і (1.92) маємо

$$e^2_\sigma(f_\psi)_2 = \inf_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma}\|f-U_{\gamma_\sigma}(f)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \inf_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\widehat{f_\psi}^{\,2}(\mathbf{x})d\mathbf{x} - \int\limits_{\gamma_\sigma}\widehat{f_\psi}^{\,2}(\mathbf{x})d\mathbf{x}\Big) =$$

$$= \inf_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\psi^2(\mathbf{x})\widehat{f}^{\,2}(\mathbf{x})d\mathbf{x} - \int\limits_{\gamma_\sigma}\psi^2(\mathbf{x})\widehat{f}^{\,2}(\mathbf{x})d\mathbf{x}\Big),$$

де $f\in U_q(\mathbb{R}^d)$.

Покладемо $\varphi(\mathbf{x})=\psi^2(\mathbf{x})$, $y(\mathbf{x})=\widehat{f}^{\,2}(\mathbf{x})$ і $p=q/2$. Бачимо, що функція y належить $\mathcal{U}_p(\mathbb{R}^d)$, $p\in(0,1]$, виконується рівність

$$e^2_\sigma(f_\psi)_2 = \inf_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\varphi(\mathbf{x})y(\mathbf{x})d\mathbf{x} - \int\limits_{\gamma_\sigma}\varphi(\mathbf{x})y(\mathbf{x})d\mathbf{x}\Big) = e_\sigma(\varphi\, y),$$

а функція φ задовольняє умови теореми 2.1.1. Тому справджується співвідношення

$$e^2_\sigma(\psi U_{q,2})_2 = \sup_{f\in\psi U_{q,2}} e^2_\sigma(f)_2 \leq \sup_{y\in\mathcal{U}_p(\mathbb{R}^d)} e_\sigma(\varphi\, y) = e_\sigma(\varphi, p),$$

із якого внаслідок (2.4) випливає необхідна оцінка зверху для величини $e_\sigma^2(\psi U_{q,\,2})_2$:

$$e_\sigma^2(\psi U_{q,\,2})_2 \le \sup_{s>\sigma}(s-\sigma)\Big(\int\limits_0^s \bar\varphi^{\,-p}(t)\,dt\Big)^{-\frac{2}{p}} = \sup_{s>\sigma}(s-\sigma)\Big(\int\limits_0^s \bar\psi^{\,-q}(t)\,dt\Big)^{-\frac{2}{q}},$$

де $\bar\psi(t)$ — спадна перестановка функції $\psi(\mathbf{x})$. При цьому точна верхня межа в правій частині останнього співвідношення досягається при деякому скінченному значенні $s = s^*$.

Для завершення доведення теореми достатньо помітити, що функція f^*, для якої перетворення Фур'є $\widehat{f^*}$ означається рівністю (2.128), належить множині $\psi U_{q,\,2}$, і що справджується співвідношення

$$e_\sigma^2(f^*)_2 = (s^*-\sigma)\Big(\int\limits_0^{s^*} \bar\psi^{\,-q}(t)\,dt\Big)^{-\frac{2}{q}}.$$

Теорему доведено.

2.6 Застосування отриманих результатів до знаходження апроксимативних характеристик просторів S^p_Φ

В даному підрозділі розглядається застосування результатів підрозділів 2.1–2.3 до знаходження апроксимативних характеристик просторів S^p_Φ (означення див. підрозділ 1.5).

2.6.1. Точні значення величин $\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi U^q_\Phi)_{p,\Phi}$, $\mathscr{D}_\sigma(\Psi U^q_\Phi)_{p,\Phi}$ та $e_\sigma(\Psi U^q_\Phi)_{p,\Phi}$ у випадку, коли $0<p<q<\infty$. В роботі [147] при доведенні тверджень 1.5.2 та 1.5.3 важливу роль відігравали відповідно твердження 1.4.1 та 1.3.4. Отримані в підрозділах 2.1 та 2.3 результати про точні значення величин $E_{\gamma_\sigma}(\varphi,p)$, $D_\sigma(\varphi,p)$ та $e_\sigma(\varphi,p)$ дають змогу поширити результати тверджень 1.5.2 та 1.5.3 на випадок довільних різних p та q.

Як і в підрозділі 1.5.3, припускаємо, що $\mathscr{X}$ — довільний лінійний простір, $\mathbb{A}$ — будь-яка μ-вимірна підмножина з $(\mathbb{R}^d,\mathcal{B},d\mu)$, $\mathrm{mes}_\mu\mathbb{A} = a\in(0,\infty]$, і $\Phi:\mathscr{X}\to Y(\mathbb{A},d\mu)$ — будь-який оператор, який задовольняє умову (A_p). У випадку, коли $0<p<q<\infty$, при цьому вважаємо, що функція $\Psi(\mathbf{t})$ є істотно обмеженою на $\mathbb{A}$ і задовольняє умови:

$$\Psi(\mathbf{t}) \ne 0 \quad \forall\mathbf{t}\in\mathbb{A} \tag{2.130}$$

та

$$\|\Psi\|_{L_{\frac{pq}{q-p}}(\mathbb{A},d\mu)} = \Bigg(\int\limits_{\mathbb{A}} |\Psi(\mathbf{t})|^{\frac{pq}{q-p}} d\mu\Bigg)^{\frac{q-p}{pq}} < \infty. \qquad (2.131)$$

Тоді якщо элемент x_Ψ належить до ΨU^q_ϕ, то він є Ψ-інтегралом деякого елемента $x \in U^q_\Phi$, для якого, згідно з означенням,

$$\|x\|^q_{q,\Phi} = \int\limits_{\mathbb{A}} |\widehat{x}(\mathbf{t})|^q \, d\mu \leq 1.$$

Звідси на підставі нерівності Гельдера робимо висновок, що

$$\|x_\Psi\|^p_{p,\Phi} = \int\limits_{\mathbb{A}} |\Psi(\mathbf{t})|^p |\widehat{x}(\mathbf{t})|^p \, d\mu \leq \Bigg(\int\limits_{\mathbb{A}} |\Psi(\mathbf{t})|^{\frac{pq}{q-p}} \, d\mu\Bigg)^{\frac{q-p}{q}} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{A}} |\widehat{x}(\mathbf{t})|^q d\mu\Bigg)^{\frac{p}{q}} < \infty.$$

Тобто, якщо виконуються вказані вище умови, то виконується вкладення $\Psi U^q_\Phi \subset S^p_\Phi$ і мають зміст величини $\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi U^q_\Phi)_{p,\Phi}$, $\mathscr{D}_\sigma(\Psi U^q_\Phi)_{p,\Phi}$ та $e_\sigma(\Psi U^q_\Phi)_{p,\Phi}$.

Теорема 2.6.1 . *Нехай $0 < p < q$, і $\Psi = \Psi(\mathbf{t})$ — довільна істотно обмежена функція з множини $Y(\mathbb{A}, d\mu)$, яка задовольняє співвідношення (2.130) та (2.131). Тоді для довільного $\sigma \in (0, a)$ і будь-якої множини $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$ справджуються оцінки*

$$\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi U^q_\Phi)_{p,\Phi} \leq \|\bar{\Psi}_{\gamma_\sigma}\|_{L_{\frac{pq}{q-p}}((0,a),dt)}, \quad 1/p + 1/q = 1, \qquad (2.132)$$

де $\bar{\Psi}_{\gamma_\sigma}(v)$ — спадна перестановка функції $\Psi_\sigma(\mathbf{t}) = \Psi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{t})$, яка визначається рівністю (1.85), і

$$\mathscr{D}_\sigma(\Psi U^q_\Phi)_{p,\Phi} \leq \|\bar{\Psi}\|_{L_{\frac{pq}{q-p}}((\sigma,a),dt)}, \qquad (2.133)$$

де $\bar{\Psi}(v)$ — спадна перестановка функції $|\Psi(\mathbf{t})|$.

Якщо ж при цьому оператор Φ відображає простір S^p_Φ на простір $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$, а простір S^q_Φ — на $L_q(\mathbb{A}, d\mu)$, то співвідношення (2.132) і (2.133) є рівностями. При цьому для множини $\gamma^*_\sigma \in \Gamma_\sigma$, визначеної в теоремі 1.5.2, виконується рівність

$$\mathscr{E}_{\gamma^*_\sigma}(\Psi U^q_\Phi)_{p,\Phi} = \mathscr{D}_\sigma(\Psi U^q_\Phi)_{p,\Phi} = \|\bar{\Psi}\|_{L_{\frac{pq}{q-p}}((\sigma,a),dt)}.$$

Доведення. Якщо $x \in \psi U^q_\Phi$, то внаслідок співвідношень (1.77), (1.62), (1.71) та (2.1)

$$\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(x)^p_{p,\Phi} = \|\Phi((x) - U_{\gamma_\sigma}(x))\|^p_{L_p(\mathbb{A},d\mu)} = \|\widehat{x}(\mathbf{t}) - \chi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{t})\widehat{x}(\mathbf{t})\|^p_{L_p(\mathbb{A},d\mu)} =$$

$$= \|\Psi(\mathbf{t})y(\mathbf{t}) - \chi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{t})\Psi(\mathbf{t})y(\mathbf{t})\|^p_{L_p(\mathbb{A},d\mu)} = \int\limits_{A\setminus\gamma_\sigma} |\Psi(\mathbf{t})y(\mathbf{t})|^p d\mu = E_{\gamma_\sigma}(|\Psi|^p \cdot |y|^p),$$

де y — деяка фіксована функція така, що $|y|^p$ належить множині $\mathcal{U}_r(\mathbb{A})$, $r = q/p \in (1,\infty)$, яка означається співвідношенням (2.2).

Тому згідно з (1.78) та (2.135) і (2.80) та (2.79) маємо

$$\mathscr{E}^p_{\gamma_\sigma}(\Psi U^q_\Phi)_{p,\Phi} \le \sup_{h\in\mathcal{U}_r(\mathbb{A})} E_{\gamma_\sigma}(|\Psi|^p \cdot h) = E_{\gamma_\sigma}(|\Psi|^p, r)$$

а

$$\mathscr{D}^p_\sigma(\Psi U^q_\Phi)_{p,\Phi} = \inf_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma} \mathscr{E}^p_{\gamma_\sigma}(\Psi U^q_\Phi)_{p,\Phi} \le \inf_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma} E_{\gamma_\sigma}(|\Psi|^p, r) = D_\sigma(|\Psi|^p, r).$$

Далі, покладаючи $\varphi(\mathbf{t}) = |\Psi(\mathbf{t})|^p$, бачимо, що функція φ задовольняє умови теореми 2.3.1, і тому має місце оцінка (2.132):

$$\mathscr{E}^p_{\gamma_\sigma}(\Psi U^q_\Phi)_{p,\Phi} \le E_{\gamma_\sigma}(|\Psi|^p, r) = \|\bar{\Psi}^p_{\gamma_\sigma}\|_{L_{\frac{r}{r-1}}((0,a),dt)} = \|\bar{\Psi}_{\gamma_\sigma}\|^p_{L_{\frac{pq}{q-p}}((0,a),dt)},$$

і оцінка (2.133):

$$\mathscr{D}^p_\sigma(\Psi U^q_\Phi)_{p,\Phi} \le D_\sigma(|\Psi|^p, r) = \|\bar{\Psi}^p\|_{L_{\frac{r}{r-1}}((\sigma,a),dt)} = \|\bar{\Psi}\|^p_{L_{\frac{pq}{q-p}}((\sigma,a),dt)}.$$

Нехай тепер оператор Φ відображає простір S^p_Φ на простір $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$, а простір S^q_Φ — на $L_q(A, d\mu)$. Покладемо $h = h(\mathbf{x})$, де

$$h(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \in \gamma_\sigma, \\ |\Psi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{x})|^{\frac{p}{q-p}} \|\Psi_{\gamma_\sigma}\|^{-\frac{p}{q-p}}_{L_{\frac{pq}{q-p}}(A,d\mu)}, & \mathbf{x} \in \mathbb{A}\setminus\gamma_\sigma. \end{cases} \tag{2.134}$$

Тоді внаслідок (1.85)

$$E_{\gamma_\sigma}(|\Psi|^p \cdot h^p) = \|\Psi_{\gamma_\sigma}\|^{-\frac{p^2}{q-p}}_{L_{\frac{pq}{q-p}}(\mathbb{A},d\mu)} \int\limits_{\mathbb{A}\setminus\gamma_\sigma} |\Psi(\mathbf{t})|^p |\Psi(\mathbf{t})|^{\frac{p^2}{q-p}} d\mu =$$

$$= \|\Psi_{\gamma_\sigma}\|^p_{L_{\frac{pq}{q-p}}(\mathbb{A},d\mu)} = \|\bar{\Psi}_{\gamma_\sigma}\|^p_{L_{\frac{pq}{q-p}}((0,a),dt)}$$

і

$$\|h\|^q_{L_q(\mathbb{A},d\mu)} = \|\Psi_{\gamma_\sigma}\|^{-\frac{pq}{q-p}}_{L_{\frac{pq}{q-p}}(\mathbb{A},d\mu)} \int\limits_{\mathbb{A}\setminus\gamma_\sigma} \Psi^{\frac{pq}{q-p}}_{\gamma_\sigma}(\mathbf{x}) d\mu = 1, \tag{2.135}$$

тобто, функція h належить одиничній кулі $U_q(\mathbb{A})$. Оскільки оператор Φ відображає простір S^q_Φ на весь простір $L_q(\mathbb{A}, d\mu)$, то існує елемент $f \in S^q_\Phi$ такий, що майже скрізь на $\mathbb{A}$ $\widehat{f}(\mathbf{t}) = h(\mathbf{t})$, і отже, $f \in U^q_\Phi$.

Далі, розглянемо функцію $g = g(\mathbf{t})$, для якої майже скрізь

$$g(\mathbf{t}) = \Psi(\mathbf{t})h(\mathbf{t}) = \Psi(\mathbf{t})\widehat{f}(\mathbf{t}). \tag{2.136}$$

На підставі співвідношень (2.131), (2.134) та (2.135) бачимо, що ця функція належить простору $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$, і так як оператор Φ відображає простір S^p_Φ на весь простір $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$, то існує елемент f_Ψ, для якого майже скрізь на $\mathbb{A}$ справджується рівність $\widehat{f}_\Psi(\mathbf{t}) = g(\mathbf{t})$. Цей елемент внаслідок (2.136) і того, що $f \in U^q_\Phi$, належить множині ΨU^q_Φ, і для нього має місце співвідношення

$$\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(f_\Psi)^p_{p,\Phi} = \|\widehat{f}_\Psi(\mathbf{t}) - \chi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{t})\widehat{f}_\Psi(\mathbf{t})\|^p_{L_p(\mathbb{A},d\mu)} = \|\Psi(\mathbf{t})f(\mathbf{t}) - \chi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{t})\Psi(\mathbf{t})f(\mathbf{t})\|^p_{L_p(\mathbb{A},d\mu)} =$$

$$= \int\limits_{A\setminus\gamma_\sigma} |\Psi(\mathbf{t})h(\mathbf{t})|^p d\mu = E_{\gamma_\sigma}(|\Psi|^p \cdot h^p) = \|\bar{\Psi}_{\gamma_\sigma}\|^p_{L_{\frac{pq}{q-p}}((0,a),dt)},$$

із якого випливає, що у вказаному випадку співвідношення (2.132) насправді є рівністю. Якщо при цьому $\gamma_\sigma = \gamma^*_\sigma$ — множина, означена в теоремі 1.5.2, то $\|\bar{\Psi}_{\gamma^*_\sigma}\|_{L_{\frac{pq}{q-p}}((0,a),dt)} = \|\bar{\Psi}\|^p_{L_{\frac{pq}{q-p}}((\sigma,a),dt)}$, і тоді згідно з співвідношенням (2.132) (яке тепер є рівністю)

$$\mathscr{E}_{\gamma^*_\sigma}(\Psi U^q_\Phi)_{p,\Phi} = \|\bar{\Psi}\|^p_{L_{\frac{pq}{q-p}}((\sigma,a),dt)}.$$

Звідси випливає, що і співвідношення (2.133) також є рівністю. Теорему доведено.

Теорема 2.6.2 . *Нехай $0 < p < q$, і $\Psi = \Psi(\mathbf{t})$ — довільна істотно обмежена функція з множини $Y(\mathbb{A}, d\mu)$, яка задовольняє співвідношення (2.130) та (2.131). Тоді для довільного $\sigma \in (0, a)$ має місце оцінка*

$$e^p_\sigma(\Psi U^q_\Phi)_{p,\Phi} \le \left((l^* - \sigma)^{\frac{q}{q-p}}\left(\int\limits_0^{l^*} \bar{\Psi}^{\,-q}(t)\,dt\right)^{\frac{p}{p-q}} + \int\limits_{l^*}^{a} \bar{\Psi}^{\,\frac{pq}{q-p}}(t)\,dt\right)^{\frac{q-p}{q}}, \tag{2.137}$$

в якій $\bar{\Psi}(t)$ — спадна перестановка функції $|\Psi(\mathbf{t})|$, а l^* — найбільше на $(\sigma, a]$ число, для якого при всіх $l \in (\sigma, l^*)$

$$l - \sigma \le \bar{\Psi}^{\,q}(l)\left(\int\limits_0^{l} \bar{\Psi}^{-q}(t)\,dt\right). \tag{2.138}$$

Таке число l^* завжди існує. Якщо ж при цьому оператор Φ відображає простір S^p_Φ на простір $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$, а простір S^q_Φ — на $L_q(\mathbb{A}, d\mu)$, то співвідношення (2.137) є рівністю.

Доведення. Якщо $x \in \psi U^q_\Phi$, то на підставі (1.80), (1.62) та (1.71)

$$e_\sigma(x)^p_{p,\Phi} = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \|\Phi((x) - U_{\gamma_\sigma}(x))\|^p_{L_p(\mathbb{A},d\mu)} = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \|\widehat{x}(\mathbf{t}) - \chi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{t})\widehat{x}(\mathbf{t})\|^p_{L_p(\mathbb{A},d\mu)} =$$

$$= \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \|\Psi(\mathbf{t})y(\mathbf{t}) - \chi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{t})\Psi(\mathbf{t})y(\mathbf{t})\|^p_{L_p(\mathbb{A},d\mu)} = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \int\limits_{A\setminus\gamma_\sigma} |\Psi(\mathbf{t})y(\mathbf{t})|^p d\mu = e_\sigma(|\Psi|^p \cdot |y|^p),$$

де y — деяка фіксована функція така, що $|y|^p \in \mathcal{U}_r(\mathbb{A})$, $r = q/p \in (1, \infty)$.

Тому згідно з (1.81) та (2.3) маємо

$$e^p_\sigma(\Psi U^q_\Phi)_{p,\Phi} \le \sup_{h \in \mathcal{U}_r(\mathbb{A})} e_\sigma(|\Psi|^p \cdot h) = e_\sigma(|\Psi|^p, r).$$

Далі, покладаючи $\varphi(\mathbf{t}) = |\Psi(\mathbf{t})|^p$, бачимо, що функція φ задовольняє умови теореми 2.1.2, і отже, справджується оцінка (2.137):

$$e^p_\sigma(\Psi U^q_\Phi)_{p,\Phi} \le e_\sigma(|\Psi|^p, r) =$$

$$= \left((s^* - \sigma)^{\frac{q}{q-p}} \left(\int\limits_0^{s^*} \bar{\Psi}^{\,-q}(t)\, dt\right)^{\frac{p}{p-q}} + \int\limits_{s^*}^{a} \bar{\Psi}^{\,\frac{pq}{q-p}}(t)\, dt\right)^{\frac{q-p}{q}}, \tag{2.139}$$

в якій $\bar{\Psi}(t)$ — спадна перестановка функції $|\Psi(t)|$, а s^* — найбільше на $(\sigma, a]$ число, для якого при всіх $s \in (\sigma, s^*)$ виконується нерівність (2.138).

Нехай тепер оператор Φ відображає простір S^p_Φ на простір $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$, а простір S^q_Φ — на $L_q(\mathbb{A}, d\mu)$. У випадку, коли $l^* = a$, розглядають функцію $h \in U_q(\mathbb{A})$ таку, що

$$h^q(\mathbf{t}) = \left(|\Psi(\mathbf{t})|^q \int\limits_{\mathbb{A}} |\Psi(\mathbf{x})|^{-q} d\mu\right)^{-1}, \quad \mathbf{t} \in \mathbb{A}.$$

а при $l^* < a$ — функцію $h \in U_q(\mathbb{A})$ таку, що

$$h(\mathbf{t}) = \begin{cases} |\Psi(\mathbf{t})|^{-1}(l^* - \sigma)^{\frac{1}{q-p}} \left(\int\limits_E |\Psi(\mathbf{x})|^{-q} d\mu\right)^{-\frac{1}{q-p}} \Theta^{-\frac{1}{q-p}}, & \mathbf{t} \in E, \\ |\Psi(\mathbf{t})|^{\frac{p}{q-p}} \Theta^{-\frac{1}{q-p}}, & \mathbf{t} \in \mathbb{A} \setminus E, \end{cases}$$

де величина $\Theta = \Theta(\Psi, \sigma, p, q)$ дорівнює правій частині нерівності (2.139), а $E = \{\mathbf{x} \in \mathbb{A} : \ \Psi(\mathbf{x}) \ge \bar{\Psi}(l^* - 0)\}$.

Оскільки оператор Φ відображає простір S^q_Φ на весь простір $L_q(\mathbb{A}, d\mu)$, то існує елемент $f \in S^q_\Phi$ такий, що майже скрізь на $\mathbb{A}$ $\widehat{f}(\mathbf{t}) = h(\mathbf{t})$, і отже, $f \in U^q_\Phi$.

Далі, розглядають функцію $g = g(\mathbf{t})$ таку, що майже скрізь

$$g(\mathbf{t}) = \Psi(\mathbf{t})h(\mathbf{t}) = \Psi(\mathbf{t})\widehat{f}(\mathbf{t}). \tag{2.140}$$

Внаслідок (2.131) і того, що $h \in U_q(\mathbb{A})$, ця функція належить простору $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$, і оскільки оператор Φ відображає простір S^p_Φ на весь простір $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$, то існує елемент f_Ψ, для якого майже скрізь на $\mathbb{A}$ виконується рівність $\widehat{f}_\Psi(\mathbf{t}) = g(\mathbf{t})$. Цей елемент внаслідок (2.140) і того, що $f \in U^q_\Phi$, належить множині ΨU^q_Φ, і для нього має місце співвідношення

$$e^p_\sigma(f_\Psi)_{p,\Phi} = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \|\widehat{f}_\Psi(\mathbf{t}) - \chi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{t})\widehat{f}_\Psi(\mathbf{t})\|^p_{L_p(\mathbb{A},d\mu)} =$$

$$= \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \|\Psi(\mathbf{t})f(\mathbf{t}) - \chi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{t})\Psi(\mathbf{t})f(\mathbf{t})\|^p_{L_p(\mathbb{A},d\mu)} = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \int\limits_{\mathbb{A}\setminus\gamma_\sigma} |\Psi(\mathbf{t})h(\mathbf{t})|^p d\mu =$$

$$= \Bigg((l^* - \sigma)^{\frac{q}{q-p}} \Bigg(\int\limits_0^{l^*} \bar{\Psi}^{\,-q}(t)\, dt \Bigg)^{\frac{p}{p-q}} + \int\limits_{l^*}^{a} \bar{\Psi}^{\,\frac{pq}{q-p}}(t)\, dt \Bigg)^{\frac{q-p}{q}},$$

з якого випливає, що у вказаному випадку співвідношення (2.137) насправді є рівністю.

2.6.2. Величини $\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi U^q_\Phi)_{p,\Phi}$, $\mathscr{D}_\sigma(\Psi U^q_\Phi)_{p,\Phi}$ та $e_\sigma(\Psi U^q_\Phi)_{p,\Phi}$ при $0 < q < p < \infty$. В цьому випадку, взагалі кажучи, одними умовами на функцію Ψ вкладення $\Psi U^q_\Phi \subset S^p_\Phi$ досягнути вже не можна. У зв'язку з цим покладають

$$\Psi U^{q,\,p}_\Phi := \Psi U^q_\Phi \cap \Psi S^p_\Phi, \quad 0 < q < p < \infty$$

і розглядають величини $\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(x)_p$ та $e_\sigma(x)_p$ тільки при $x \in \Psi U^{q,\,p}_\Phi$.

Зазначимо, що якщо для деякої множини $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$ виконується рівність

$$\mathrm{mes}_\mu B_{\gamma_\sigma} := \mathrm{mes}_\mu\{\mathbf{x}{\in}\mathbb{A} \setminus \gamma_\sigma :\ \Psi(\mathbf{x}) > 0\} = 0,$$

то $\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi U^{q,\,p}_\Phi)_p = 0$, і тоді $\mathscr{D}_\sigma(\Psi U^{q,\,p}_\Phi)_p = \mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi U^{q,\,p}_\Phi)_p = 0$. Якщо ж γ_σ така, що $\mathrm{mes}_\mu B_{\gamma_\sigma} > 0$, то, внаслідок того, що множини $\Psi U^{q,\,p}_\Phi$ можуть містити елементи з як завгодно великими нормами в просторі S^p_Φ, взагалі кажучи, виконується рівність $\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi U^{q,\,p}_\Phi)_p = \infty$. Якщо умова $\mathrm{mes}_\mu B_{\gamma_\sigma} > 0$ має місце для будь-яких $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$, то і $\mathscr{D}_\sigma(\Psi U^{q,\,p}_\Phi)_p = \infty$.

У зв'язку з цим природно розглядати величини $\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(x)_p$ тільки для $x \in \Psi\widetilde{U}^{q,\,p}_\Phi = \Psi U^q_\Phi \cap \Psi U^p_\Phi$.

Теорема 2.6.3 . *Нехай $0 < q \le p < \infty$ і $\Psi = \Psi(\mathbf{t})$ — довільна функція з $Y(\mathbb{A}, d\mu)$, істотно обмежена на $\mathbb{A}$, для якої у випадку, коли множина $\mathbb{A}$ необмежена, виконується рівність (1.83). Тоді для довільного $\sigma \in (0, a)$ і будь-якої множини $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$*

мають місце оцінки

$$\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi\widetilde{U}_{\Phi}^{q,p})_{p,\Phi} \le \bar{\Psi}_{\gamma_\sigma}(0+), \tag{2.141}$$

де $\bar{\Psi}_{\gamma_\sigma}(v)$ *— спадна перестановка функції* $\Psi_\sigma(\mathbf{t}) = \Psi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{t})$, *яка визначається співвідношенням (1.85),*

$$\mathscr{D}_{\sigma}(\Psi\widetilde{U}_{\Phi}^{q,p})_{p,\Phi} \le \bar{\Psi}(\sigma+0), \tag{2.142}$$

де $\bar{\Psi}(v)$ *— спадна перестановка функції* $|\Psi(\mathbf{t})|$.

Якщо ж крім того оператор Φ *відображає простір* S_{Φ}^{p} *на простір* $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$, *а простір* S_{Φ}^{q} *— на* $L_q(\mathbb{A}, d\mu)$, *то співвідношення (2.141) і (2.142) є рівностями. При цьому для множини* $\gamma_\sigma^* \in \Gamma_\sigma$, *визначеної в теоремі 1.5.2, виконуються рівності*

$$\mathscr{E}_{\gamma_\sigma^*}(\Psi\widetilde{U}_{\Phi}^{q,p})_{p,\Phi} = \mathscr{D}_{\sigma}(\Psi\widetilde{U}_{\Phi}^{q,p})_{p,\Phi} = \bar{\Psi}(\sigma+0).$$

Значення величин $e_\sigma(\Psi U_{\Phi}^{q,p})_{p,\Phi}$, $0 < q \le p < \infty$, дає таке твердження.

Теорема 2.6.4 . *Нехай* $0 < q \le p < \infty$ *і* $\Psi = \Psi(\mathbf{t})$ *— довільна функція з* $Y(\mathbb{A}, d\mu)$, *істотно обмежена на* $\mathbb{A}$, *яка у випадку необмеженої множини* $\mathbb{A}$ *задовольняє умову (1.83). Тоді для довільного* $\sigma \in (0, a)$ *виконується співвідношення*

$$e_\sigma^p(\Psi U_{\Phi}^{q,p})_{p,\Phi} \le \sup_{l\in(\sigma,a]} \frac{l-\sigma}{\left(\displaystyle\int_0^l \frac{dt}{\bar{\Psi}^q(t)}\right)^{p/q}}, \tag{2.143}$$

в якому $\bar{\Psi}(v)$ *— спадна перестановка функції* $|\Psi(\mathbf{t})|$. *Величина точної верхньої грані в (2.143) досягається при деякому скінченному значенні* $l = l^*$.

Якщо ж при цьому оператор Φ *відображає простір* S_{Φ}^{p} *на простір* $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$, *а простір* S_{Φ}^{q} *— на* $L_q(\mathbb{A}, d\mu)$, *то співвідношення (2.143) насправді є рівністю.*

Доведення теорем 2.6.3 та 2.6.4 проводяться за тією ж схемою, що і доведення теорем 2.6.1 та 2.6.2, із застосуванням теорем 2.1.1 та 2.3.2.

Для просторів S_{φ}^{p}, означення яких наведено в прикладі 1 підрозділу 1.5, твердження, аналогічні до теорем 2.6.1–2.6.4 були отримані в роботах [141, 142, 144 (гл.11)], а для просторів $S_{\varphi}^{p,\mu}$ (див. приклад $1'$) — в роботах [146, 119].

2.6.3. Порядкові оцінки величин $\mathscr{D}_{\sigma}(\Psi U_{\Phi}^{q})_{p,\Phi}$ та $e_\sigma(\Psi U_{\Phi}^{q})_{p,\Phi}$ при $\sigma \to \infty$. В цьому підрозділі досліджується поведінка при $\sigma \to \infty$ величин $\mathscr{D}_{\sigma}(\Psi U_{\Phi}^{q})_{p,\Phi}$ та $e_\sigma(\Psi U_{\Phi}^{q})_{p,\Phi}$, де $0 < p < q < \infty$, а також величин $e_\sigma(\Psi U_{\Phi}^{q,p})_{p}$, $0 < p \le q < \infty$. Зрозуміло, що така задача має зміст лише у випадку, коли $\mathrm{mes}_\mu A = \infty$.

При цьому в усіх наступних твердженнях припускається, що оператор Φ відображає простір S^p_Φ на простір $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$, а простір S^q_Φ — на $L_q(\mathbb{A}, d\mu)$.

В такому разі співвідношення (2.133), (2.137), (2.142) та (2.143) дають у відповідних випадках точні значення таких величин і тому для оцінки їх поведінки при $\sigma \to \infty$ можна за аналогією з підрозділами 2.2 та 2.3 скористатися результатами з підрозділу 6.6.

У випадку, коли $0 < q \le p < \infty$, справджуються наступні твердження.

Твердження 2.6.1 . *Нехай $0 < q \le p < \infty$ і $\Psi = \Psi(\mathbf{t})$ — довільна функція з $Y(\mathbb{A}, d\mu)$, істотно обмежена на $\mathbb{A}$, що задовольняє (1.83), і така, що при будь-якому $t{\ge}0$ виконується співвідношення $\bar{\Psi}^q(t) = \psi(t+1)$, де $\bar{\Psi}(t)$ — спадна перестановка функції $|\Psi(\mathbf{t})|$, а $\psi \in \mathfrak{M}_0$. Тоді має місце порядкова при $\sigma \to \infty$ оцінка*

$$e_\sigma(\Psi U^{q,p}_\Phi)_{p,\Phi} \asymp \frac{\bar{\Psi}(\sigma)}{\sigma^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}}.$$

Твердження 2.6.2 . *Нехай $0 < q \le p < \infty$ і $\Psi = \Psi(\mathbf{t})$ — довільна функція з $Y(\mathbb{A}, d\mu)$, істотно обмежена на $\mathbb{A}$, що задовольняє співвідношення (1.83) і рівність $\bar{\Psi}^q(t) = \psi(t+1)$, $t{\ge}0$, де $\bar{\Psi}(t)$ — спадна перестановка функції $|\Psi(\mathbf{t})|$, а $\psi \in \mathfrak{M}^+_\infty$ і така, що виконується умова* (6.139). *Тоді має місце порядкова при $\sigma \to \infty$ оцінка*

$$e_\sigma(\Psi U^{q,p}_\Phi)_{p,\Phi} \asymp \frac{\bar{\Psi}(\sigma)}{(\eta(\bar{\Psi};\sigma)-\sigma)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}}.$$

Зауваження 2.6.1 . Порівнюючи отримані порядкові оцінки для величин $e_\sigma(\Psi U^{q,p}_\Phi)_{p,\Phi}$ зі значеннями величин $\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi U^p_\Phi)_{p,\Phi}$ та $D_\sigma(\Psi U^p_\Phi)_{p,\Phi}$, які дає теорема 1.5.2, робимо висновок, що, коли $p = q$, а функція Ψ задовольняє умови твердження 2.6.1 чи 2.6.2, величини $e_\sigma(\Psi U^{q,p}_\Phi)_{p,\Phi} = e_\sigma(\Psi U^p_\Phi)_{p,\Phi}$ мають той самий порядок прямування до нуля при $\sigma \to \infty$, що і величини $\mathscr{D}_\sigma(\Psi U^p_\Phi)_{p,\Phi}$:

$$\mathscr{D}_\sigma(\Psi U^p_\Phi)_{p,\Phi} = \mathscr{E}_{\gamma^*_\sigma}(\Psi U^p_\Phi)_{p,\Phi} \asymp e_\sigma(\Psi U^p_\Phi)_{p,\Phi} \asymp \bar{\Psi}(\sigma).$$

Якщо ж $0 < q < p < \infty$, то, як вже зазначалося, величини $\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi U^{q,p}_\Phi)_p$ та $\mathscr{D}_\sigma(\Psi U^{q,p}_\Phi)_p$ можуть бути необмеженими, в той час як величини $e_\sigma(\Psi U^{q,p}_\Phi)_{p,\Phi}$ є обмеженими і монотонно спадають до нуля при $\sigma \to \infty$.

Порівнюючи отримані порядкові оцінки для величин $e_\sigma(\Psi U_\Phi^{q,p})_{p,\Phi}$ зі значеннями величин $\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi\widetilde{U}_\Phi^{q,p})_{p,\Phi}$ та $\mathscr{D}_\sigma(\Psi\widetilde{U}_\Phi^{q,p})_{p,\Phi}$, які знайдені в теоремі 2.6.3, робимо висновок, що коли $0<q<p<\infty$, а функція Ψ задовольняє умови твердження 2.6.1 чи 2.6.2, то

$$\lim_{\sigma\to\infty}\frac{e_\sigma(\Psi U_\Phi^{q,p})_{p,\Phi}}{\mathscr{D}_\sigma(\Psi\widetilde{U}_\Phi^{q,p})_{p,\Phi}}=0,$$

тобто у цьому випадку величини $e_\sigma(\Psi U_\Phi^{q,p})_{p,\Phi}$ швидше прямують до нуля при $\sigma\to\infty$, навіть ніж величини $\mathscr{D}_\sigma(\Psi\widetilde{U}_\Phi^{q,p})_{p,\Phi}$.

Нехай тепер $0<p<q<\infty$. Мають місце такі співвідношення.

Твердження 2.6.3 . *Нехай $0<p<q<\infty$ і $\Psi=\Psi(\mathbf{t})$ — довільна функція з $Y(\mathbb{A},d\mu)$, істотно обмежена на $\mathbb{A}$, яка задовольняє співвідношення (2.130), (2.131) та рівність $\bar\Psi(t)=\psi(t{+}1)$, де $\bar\Psi(t)$ — спадна перестановка функції $|\Psi(\mathbf{t})|$, а функція $\psi\in\mathfrak{M}_C$ така, що функція $1/\psi(t)$ опукла при всіх $t\geq t_0\geq 1$, Тоді при $\sigma\to\infty$ справджується співвідношення*

$$e_\sigma(\Psi U_\Phi^q)_{p,\Phi}\asymp\bar\Psi(\sigma)\sigma^{\frac1p-\frac1q}.$$

Твердження 2.6.4 . *Нехай $0<p<q<\infty$ і $\Psi=\Psi(\mathbf{t})$ — довільна функція з $Y(\mathbb{A},d\mu)$, істотно обмежена на $\mathbb{A}$, яка задовольняє співвідношення (2.130), (2.131) та рівність $\bar\Psi(t)=\psi(t{+}1)$, де $\bar\Psi(t)$ — спадна перестановка функції $|\Psi(\mathbf{t})|$, а $\psi\in\mathfrak{M}_\infty^+$ і така, що виконується умова* (6.139). *Тоді при $\sigma\to\infty$ при $\sigma\to\infty$ справджується співвідношення*

$$e_\sigma(\Psi U_\Phi^q)_{p,\Phi}\asymp\bar\Psi(\sigma)(\eta(\bar\Psi;\sigma)-\sigma)^{1-\frac1p}.$$

За аналогією з підрозділом 2.3 запишемо також відповідні оцінки величин $\mathscr{D}_\sigma(\Psi U_\Phi^q)_{p,\Phi}$.

Твердження 2.6.5 . *Нехай $0<p<q<\infty$ і $\Psi=\Psi(\mathbf{t})$ — довільна функція з $Y(\mathbb{A},d\mu)$, істотно обмежена на $\mathbb{A}$, яка задовольняє співвідношення (2.130), (2.131) і рівність $\bar\Psi(t)=\psi(t+1)$, де $\bar\Psi(t)$ — спадна перестановка функції $|\Psi(\mathbf{t})|$, а функція $\psi\in\mathfrak{M}_C$ така, що функція $1/\psi(t)$ опукла при всіх $t\geq t_0\geq 1$, то при $\sigma\to\infty$ справджується співвідношення*

$$\mathscr{D}_\sigma(\Psi U_\Phi^p)_{p,\Phi}\asymp\bar\Psi(\sigma)\sigma^{\frac1p-\frac1q}.$$

Твердження 2.6.6 . *Нехай* $0 < p < q < \infty$ *і* $\Psi = \Psi(\mathbf{t})$ — *довільна функція з* $Y(\mathbb{A}, d\mu)$, *істотно обмежена на* $\mathbb{A}$, *яка задовольняє співвідношення (2.130), (2.131) і рівність* $\bar{\Psi}(t) = \psi(t+1)$, *де* $\bar{\Psi}(t)$ — *спадна перестановка функції* $|\Psi(\mathbf{t})|$, *а* $\psi \in \mathfrak{M}_{\infty}^{+}$, *то при* $\sigma \to \infty$ *справджується співвідношення*

$$\mathscr{D}_{\sigma}(\Psi U_{\Phi}^{q})_{p,\Phi} \asymp \bar{\Psi}(\sigma)(\eta(\bar{\Psi};\sigma) - \sigma)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Зауваження 2.6.2 . Порівнюючи знайдені порядкові оцінки для величин $e_{\sigma}(\Psi U_{\Phi}^{q})_{p,\Phi}$ та $\mathscr{D}_{\sigma}(\Psi U_{\Phi}^{q})_{p}$ бачимо, що у вказаних випадках виконується співвідношення:

$$e_{\sigma}(\Psi U_{\Phi}^{q})_{p,\Phi} \asymp \mathscr{D}_{\sigma}(\Psi U_{\Phi}^{q})_{p,\Phi} \asymp \bar{\Psi}(\sigma)(\eta(\bar{\Psi};\sigma) - \sigma)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}, \quad \sigma \to \infty, \quad 0 < p < q < \infty.$$

2.7 Висновки до розділу 2

Розглянуто величини $e_\sigma(f)$ найкращих наближень інтегралів функцій з просторів $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$ за допомогою інтегралів скінченного рангу σ. Знайдено явні формули для обчислення точних верхніх меж величин $e_\sigma(f)$ на класах функцій, які зображуються у вигляді добутків деякої фіксованої невід'ємної функції та функцій з одиничної кулі $U_p(\mathbb{A})$ простору $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$ при всіх $p > 0$. Отримано точні порядкові оцінки цих величин при необмеженому зростанні їх рангу.

Для даних класів функцій знайдено точні значення та точні порядкові оцінки інтегральних аналогів величин найкращих наближень функцій поліномами заданого порядку та тригонометричного поперечника.

В термінах величин $e_\sigma(f)$ отримано необхідні та достатні умови належності функцій з просторів $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$ просторам $L_s(\mathbb{A}, d\mu)$, $0 < p, s < \infty$.

Отримані результати застосовано до знаходження апроксимативних характеристик просторів S^p_Φ та до наближень вимірних функцій, які задаються згортками із сумовними ядрами, цілими функціями експоненціального типу.

Розглянуто аналоги величин найкращих наближень інтегралів за допомогою інтегралів скінченного рангу в просторах Орліча $L_M(\mathbb{A}, d\mu)$. Знайдено явні формули для обчислення точних верхніх меж цих аналогів в просторах Орліча $L_M(\mathbb{A}, d\mu)$ на згаданих вище класах функцій для всіх $p > 0$ та функцій Орліча $M(t)$ таких, що функція $M(t^{1/p})$ теж є функцією Орліча.

Розділ 3

Нелінійні наближення класів $\mathcal{F}^{\psi}_{q,r}$ в просторах S^p та L_p

В даному розділі досліджуються асимптотична поведінка (в сенсі порядкових оцінок) апроксимативних харарактеристик класів функцій багатьох змінних $\mathcal{F}^{\psi}_{q,r}$ в просторах $S^p(\mathbb{T}^d)$ та $L_p(\mathbb{T}^d)$. Для їх формулювання здебільшого використовуються позначення, прийняті в підрозділі 1.2 та твердження з підрозділу 6.7.

3.1 Порядкові оцінки нелінійних апроксимативних характеристик класів $\mathcal{F}^{\psi}_{q,r}$ в S^p

3.1.1. Найкращі n-членні тригонометричні наближення в просторах S^p. Як зазначено в підрозділі 1.2, точні значення величин $\sigma_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p}$, а внаслідок співвідношення (1.28) і точні значення величин $G_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p}$ та $\sigma^{\perp}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p}$, при будь-яких $0 < p,\, q < \infty$ були отримані О. І. Степанцем і сформульовані в твердженнях 1.2.4 та 1.2.5.

Враховуючи позначення (6.194) та (6.195) величин $H_n(\Psi, s)$ з підрозділу 6.7, співвідношення (1.35) та (1.38) можна записати у вигляді

$$\sigma^p_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p} = H_n(\bar{\psi}^p, q/p), \quad 0 < p,\, q < \infty.$$

Зазначимо, що коли функція ψ спадає до нуля, незростаючу перестановку $\bar{\psi} = \bar{\psi}(j)$, $j = 1, 2, \ldots$, системи чисел $\psi(|\mathbf{k}|_r)$ можна визначити рівністю

$$\bar{\psi}(l) = \psi(m), \quad l \in (V_{m-1}, V_m], \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{3.1}$$

де $V_m := |\widetilde{\Delta}^d_{m,r}|$ — кількість елементів множини

$$\widetilde{\Delta}^d_{m,r} := \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d : |\mathbf{k}|_r \le m, \quad m = 0, 1, \ldots\}. \tag{3.2}$$

Далі, при формулюванні результатів важливо, щоб при всіх достатньо великих m (більших, ніж деяке додатне число k_0) виконувалось співвідношення

$$M_r(m-c_1)^d < V_m = |\widetilde{\Delta}^d_{m,r}| \le M_r(m+c_2)^d, \tag{3.3}$$

де M_r, c_1 та c_2 — деякі додатні сталі.

Зрозуміло, що у випадку, коли $r=\infty$, співвідношення (3.3) виконується і $M_\infty = \mathrm{vol}\{\mathbf{k}\in\mathbb{R}^d : |\mathbf{k}|_\infty \le 1\} = 2^d$, якщо ж $r=1$, то $M_1 = \mathrm{vol}\{\mathbf{k}\in\mathbb{R}^d : |\mathbf{k}|_1 \le 1\} = 2^d/d!$. Чи має місце подібне співвідношення при інших r нам невідомо, однак навіть для цих випадків наведені далі результати є новими.

Слід зазначити, що коли виконується умова (3.3), внаслідок (3.1) перестановка $\bar\psi$ належить означеній в підрозділі 6.7.1 множині $S_d(\nu,M)=S_d(\nu,M,c_1,c_2)$ при $M=M_r$. Тому на підставі теорем 6.7.1–6.7.4 можна сформулювати такі твердження.

Твердження 3.1.1 . *Нехай $d\ge 1$, $0<r\le\infty$, $0<p,\,q<\infty$, виконуються умова (3.3), і функція ψ^p належить множині B, а при $0<p<q$, крім цього, при всіх t, більших ніж деяке число t_0, є опуклою та задовольняє умову*

$$t|\psi'(t)|/\psi(t) \ge K_0 > \beta,\ \ \psi'(t) := \psi'(t+), \tag{3.4}$$

де $\beta = d(1/p-1/q)$. Тоді

$$\sigma_n(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{S^p} \asymp \psi(n^{\frac{1}{d}})\, n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}. \tag{3.5}$$

Враховуючи вигляд оцінки (3.5) і те, що умова (3.3) виконується, зокрема, при $r=1$ та $r=\infty$, з даного твердження легко отримати такий наслідок.

Наслідок 3.1.1 . *Нехай $d\ge 1$, $0<p,\,q<\infty$ і функція ψ задовольняє умови твердження 3.1.1. Тоді для довільного $r\in[1,\infty]$ має місце оцінка (3.5).*

Дійсно, для довільних чисел $r\in[1,\infty]$, $0<q<\infty$ і будь-якої додатної спадної функції $\psi=\psi(t)$, $t\ge 1$,

$$\mathcal{F}^\psi_{q,1} \subset \mathcal{F}^\psi_{q,r} \subset \mathcal{F}^\psi_{q,\infty}. \tag{3.6}$$

Тому якщо виконуються умови наслідку 3.1.1, то для довільного $r\in[1,\infty]$

$$\psi(n^{\frac{1}{d}})\, n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \ll \sigma_n(\mathcal{F}^\psi_{q,1})_{S^p} \le \sigma_n(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{S^p} \le \sigma_n(\mathcal{F}^\psi_{q,\infty})_{S^p} \ll \psi(n^{\frac{1}{d}})\, n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Твердження 3.1.2 . *Нехай $d\ge 1$, $0<r\le\infty$, $0<p,\,q<\infty$, виконуються умова (3.3), а функція ψ^p належить множині $\mathfrak{M}'_\infty$ або $\mathfrak{M}^c_\infty$ Тоді*

$$\sigma_n(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{S^p} \asymp \psi(m_n)(n\alpha(\psi^p,m_n))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \asymp \psi(m_n)(n\alpha(\psi,m_n))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}, \tag{3.7}$$

де величина

$$m_n = (n/M_r)^{\frac{1}{d}}. \tag{3.8}$$

У випадку, коли $d = 1$, класи $\mathcal{F}^{\psi}_{q,r} =: \mathcal{F}^{\psi}_{q}$ не залежать від r, умова (3.3) виконується з константою $M_r = 2$. Тому для довільної функції $\psi^p \in \mathfrak{M}'_\infty \cup \mathfrak{M}^c_\infty$ та будь-яких $0 < p,\, q < \infty$

$$\sigma_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q})_{S^p(\mathbb{T}^1)} \asymp \psi(n/2)(n\alpha(\psi, n/2))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}. \tag{3.10$'$}$$

Твердження 3.1.3 . *Нехай $d \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < r \leq \infty$, $0 < p < q < \infty$, $\psi^p \in \mathfrak{M}''_\infty$, виконується умова* (3.3) *та умова*

$$k^{(d-1)/\alpha}\psi(k+1)/\psi(k) \to 0, \quad k \to \infty, \tag{3.9}$$

з $\alpha = p$. Тоді при всіх $n \in [V_{m-1}, V_m)$

$$\sigma_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p} \asymp \psi(m)(V_m - n)^{\frac{1}{p}}\, n^{\frac{1-d}{dq}}. \tag{3.10}$$

Зауваження 3.1.1 . Якщо виконуються умови твердження 3.1.3 і $n \in [V_{m-1}, V_m)$, то внаслідок (6.207) справджується співвідношення

$$\psi(m) n^{\frac{1-d}{qd}} \ll \sigma_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p} \ll \psi(m) n^{\frac{d-1}{d}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}. \tag{3.11}$$

Твердження 3.1.4 . *Нехай $d \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < r \leq \infty$, $0 < q \leq p < \infty$, $\psi^p \in \mathfrak{M}''_\infty$, виконуються умови* (3.3) *та* (3.9) *при $\alpha = q$. Тоді*

1) при $n = V_{m-1}$ має місце оцінка

$$\sigma_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p} \asymp \psi(m); \tag{3.12}$$

2) для всіх $n \in (V_{m-1}, V_m)$ таких, що

$$q(V_m - V_{m-1}) \geq p\,(V_m - n); \tag{3.13}$$

справджується оцінка (3.10)*;*

3) для всіх $n \in (V_{m-1}, V_m)$, що не задовольняють умову (3.13),

$$\sigma_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p} \asymp \psi(m)(n - V_{m-1})^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}. \tag{3.14}$$

Зазначимо, що у випадку, коли $r=\infty$, для довільного $m\in\mathbb{N}$ маємо $V_m = |\widetilde{\Delta}^d_{m,\infty}| = (2m+1)^d$. Тому якщо $n \in [V_{m-1}, V_m)$, то число m визначається рівністю $m = [\frac{(n+1)^{\frac{1}{d}}}{2}]$, де $[c]$ — ціла частина числа c.

У випадку, коли $d = 1$, якщо $n \in [V_{m-1}, V_m)$, то $n = V_{m-1}{=}V_m{-}1$, а $m = [(n{+}1)/2]$. Тому для довільної функції $\psi^p \in \mathfrak{M}''_\infty$ та будь-яких $0 < p,\, q < \infty$

$$\sigma_n(\mathcal{F}^\psi_q)_{S^p(\mathbb{T}^1)} \asymp \psi([(n+1)/2]). \tag{3.15}$$

Як бачимо, при $d > 1$ у випадку $0 < q \le p < \infty$ отримані оцінки істотно залежать від розміщення числа n на півсегменті $[V_{m-1}, V_m)$. Розглядаючи у твердженнях 3.1.3 та 3.1.4 деякі конкретні підпослідовності $n(m)$ отримаємо такий наслідок.

Наслідок 3.1.2 . *Нехай* $d \ge 1$, $m{\in}\mathbb{N}$, $n \in [V_{m-1}, V_m)$, $0 < r \le \infty$, $0 < p, q < \infty$, $\psi^p \in \mathfrak{M}''_\infty$, *виконуються умови* (3.3) *та* (3.9) *при* $\alpha = \min\{p, q\}$. *Тоді*

1) якщо $n = n(m) = V_m - c_m$, $c_m \in \mathbb{N}$, $c_m \le K$, $m = 1, 2, \ldots$, *то для довільних* $0 < p,\, q < \infty$

$$\sigma_n(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{S^p} \asymp \psi(m) n^{\frac{1-d}{dq}}; \tag{3.16}$$

2) якщо $n = n(m) = V_{m-1} + c_m$, $c_m \in \mathbb{N}$, $c_m \le K$, $m = 1, 2, \ldots$, *то для довільних* $0 < p < q < \infty$

$$\sigma_n(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{S^p} \asymp \psi(m)\, n^{\frac{d-1}{d}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}; \tag{3.17}$$

а для довільних $0 < q < p < \infty$

$$\sigma_n(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{S^p} \asymp \psi(m); \tag{3.18}$$

3) якщо ж підпослідовність $n = n(m)$ *така, що*

$$(V_m - V_{m-1}) \asymp (V_m - n), \tag{3.19}$$

то для довільних $0 < p < q < \infty$ *справджується оцінка* (3.17), *а при* $0 < q \le p < \infty$ *оцінка* (3.17) *справджується за умови, що* $n = n(m) \ne V_{m-1}$, $m = 1, 2, \ldots$.

3.1.2. Тригонометричні та тригонометричні ортопроекційні поперечники в S^p. Запишемо тепер оцінки величин $\mathscr{D}^\perp_n(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{S^p}$ та $\mathscr{D}_n(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{S^p}$, які визначаються співвідношеннями (1.23) та (1.24) при $X = S^p = S^p(\mathbb{T}^d)$.

Із співвідношення (1.34) випливає, що коли виконується умова (3.3) і функція $\psi = \psi(t)$, $t \ge 0$, спадає та задовольняє співвідношення (1.33), то для будь-яких $0 < q \le p < \infty$ при кожному $n \in [V_{m-1}, V_m)$ має місце рівність

$$\mathscr{D}_n(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{S^p} = \mathscr{D}^\perp_n(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{S^p} = \psi(m). \tag{1.34$'$}$$

Якщо виконується умова (3.3), то для довільного $n \in [V_{m-1}, V_m)$ маємо

$$m_n - c_2 < m < m_n + c_1 + 1, \tag{3.20}$$

де, як і раніше, m_n визначається співвідношенням (3.8).

Звідси із врахування означення множини B бачимо, що довільної функції $\psi \in B$ і для будь-яких $0 < q \le p < \infty$

$$\mathscr{D}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p} = \mathscr{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p} \asymp \psi(m_n) \asymp \psi(n^{1/d}), \tag{3.21}$$

Якщо ж ψ належить множині $\mathfrak{M}'_\infty$ або $\mathfrak{M}^c_\infty$, то з огляду на твердження 6.2.4

$$\mathscr{D}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p} = \mathscr{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p} \asymp \psi(m_n). \tag{3.22}$$

У випадку, коли виконується умови наведених вище тверджень 3.1.1–3.1.3, можна отримати також оцінку правої частини співвідношення (1.37).

Дійсно, на підставі (3.1) та (3.3) при $n \in [V_{m-1}, V_m)$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \bar{\psi}^{\frac{pq}{q-p}}(k) = (V_m - n)\psi^{\frac{pq}{q-p}}(m) + \sum_{s=m+1}^{\infty} (V_s - V_{s-1})\psi^{\frac{pq}{q-p}}(s) \asymp$$

$$\asymp (V_m - n)\psi^{\frac{pq}{q-p}}(m) + \sum_{s=m+1}^{\infty} s^{d-1}\psi^{\frac{pq}{q-p}}(s). \tag{3.23}$$

Нехай спочатку $\psi^p \in \mathfrak{M}''_\infty$ і при $\alpha = \frac{pq}{q-p}$ виконується умова (3.9). Тоді внаслідок (6.286)

$$\sum_{s=m+1}^{\infty} s^{d-1}\psi^{\frac{pq}{q-p}}(s) \asymp (m+1)^{d-1}(\psi^p(m+1))^{\frac{q}{q-p}} \asymp$$

$$\asymp (m+1)^{d-1}\psi^{\frac{pq}{q-p}}(m+1) \ll \psi^{\frac{pq}{q-p}}(m). \tag{3.24}$$

Об'єднуючи співвідношення (1.37), (3.23) та (3.24), робимо висновок, що коли $\psi^p \in \mathfrak{M}''_\infty$ і при $\alpha = \frac{pq}{q-p}$ виконується умова (3.9), то при всіх $0 < p < q < \infty$

$$\mathscr{D}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p} = \mathscr{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p} \asymp \psi(m)(V_m - n)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}. \tag{3.25}$$

Твердження 3.1.5 . *Нехай $d \ge 1$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < r \le \infty$, $0 < p$, $q < \infty$. Тоді*

1) якщо $0 < q \le p < \infty$, то для довільної додатної спадної до нуля функції $\psi(t)$, $t \ge 1$, при кожному $n \in [V_{m-1}, V_m)$ справджується рівність (1.34′);

2) якщо ж $0 < p < q < \infty$, виконується умова (3.3) $\psi^p \in \mathfrak{M}''_\infty$ і при $\alpha = \frac{pq}{q-p}$ має місце співвідношення (3.9), то при кожному $n \in [V_{m-1}, V_m)$ справджується оцінка (3.25).

У випадку $d = 1$ аналогічно можна зробити висновок, що при $0 < q \le p < \infty$ для довільної додатної спадної до нуля функції $\psi(t)$, $t \ge 1$,

$$\mathscr{D}_n(\mathcal{F}^{\psi}_q)_{S^p(\mathbb{T}^1)} = \mathscr{D}^{\perp}_n(\mathcal{F}^{\psi}_q)_{S^p(\mathbb{T}^1)} = \psi([(n+1)/2]), \qquad (1.34'')$$

а при $0 < p < q < \infty$ для довільної функції $\psi^p \in \mathfrak{M}''_{\infty}$

$$\mathscr{D}_n(\mathcal{F}^{\psi}_q)_{S^p(\mathbb{T}^1)} = \mathscr{D}^{\perp}_n(\mathcal{F}^{\psi}_q)_{S^p(\mathbb{T}^1)} \asymp \psi([(n+1)/2]). \qquad (3.25')$$

Нехай тепер функція ψ задовольняє умови твердження 3.1.1 (які гарантують в цьому випадку збіжність ряду в (1.37)). Внаслідок (6.237) із врахуванням (3.8) та означення множини B маємо

$$\sum_{s=m+1}^{\infty} s^{d-1}(\psi^p(k))^{\frac{q}{q-p}} \asymp m^d(\psi^p(m))^{\frac{q}{q-p}} \asymp n\psi^{\frac{pq}{q-p}}(n^{1/d}). \qquad (3.26)$$

Крім цього, для довільного $n \in [V_{m-1}, V_m)$

$$\sum_{s=m+1}^{\infty} s^{d-1}(\psi^p(k))^{\frac{q}{q-p}} \ll \sum_{k=n+1}^{\infty} \bar{\psi}^{\frac{pq}{q-p}}(k) \ll \sum_{s=m}^{\infty} s^{d-1}(\psi^p(k))^{\frac{q}{q-p}} \qquad (3.27)$$

і тому

$$\sum_{s=m+1}^{\infty} s^{d-1}(\psi^p(k))^{\frac{q}{q-p}} \asymp n\psi^{\frac{pq}{q-p}}(n^{1/d}). \qquad (3.28)$$

Таким чином, має місце наступне твердження.

Твердження 3.1.6 . *Нехай $d \ge 1$, $0 < r \le \infty$, $0 < p, q < \infty$ і виконується умова (3.3). Тоді*

1) якщо $0 < q \le p < \infty$, то для довільної функції $\psi \in B$ має місце оцінка (3.21).

2) якщо ж $0 < p < q < \infty$, а функція ψ^p належить B і при всіх t, більших ніж деяке число t_0, є опуклою та задовольняє умову (3.4) при $\beta = d(1/p - 1/q)$, то

$$\mathscr{D}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p} = \mathscr{D}^{\perp}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p} \asymp \psi(n^{\frac{1}{d}})n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}. \qquad (3.29)$$

Нехай нарешті виконуються умови твердження 3.1.2. Тоді внаслідок (6.277) із врахуванням (3.8) та твердження 6.2.4

$$\sum_{s=m+1}^{\infty} s^{d-1}(\psi^p(s))^{\frac{q}{q-p}} \asymp m^d(\psi^p(m))^{\frac{q}{q-p}}\alpha(\psi^p, m) \asymp n\psi^{\frac{pq}{q-p}}(m_n)\alpha(\psi, m_n), \qquad (3.30)$$

Об'єднуючи співвідношення (3.27) та (3.30) і враховуючи твердження 6.2.4 та 6.2.5 отримуємо необхідну оцінку

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \bar{\psi}^{\frac{pq}{q-p}}(k) \asymp n\psi^{\frac{pq}{q-p}}(m_n)\alpha(\psi, m_n).$$

Твердження 3.1.7 . *Нехай* $d \geq 1$, $0 < r \leq \infty$, $0 < p$, $q < \infty$, *виконуються умова* (3.3), *а функція* ψ^p *належить* $\mathfrak{M}'_\infty$ *або* $\mathfrak{M}^c_\infty$. *Тоді для довільних* $0 < q \leq p < \infty$ *має місце співвідношення (3.22), а для довільних* $0 < p < q < \infty$ *— співвідношення*

$$\mathscr{D}_n(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{S^p} = \mathscr{D}^\perp_n(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{S^p} \asymp \psi(m_n)(n\alpha(\psi, m_n))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}. \tag{3.31}$$

Внаслідок (6.38) для довільної функції $\psi^p \in \mathfrak{M}^c_\infty$ маємо $n\alpha(\psi, m_n) \asymp n^{\frac{d-1}{d}}$. Тому із врахуванням твердження 6.2.4 робимо висновок, що для довільної функції $\psi^p \in \mathfrak{M}^c_\infty$ та будь-яких $0 < p$, $q < \infty$ справджується оцінка

$$\mathscr{D}_n(\mathcal{F}^\psi_q)_{S^p(\mathbb{T}^1)} = \mathscr{D}^\perp_n(\mathcal{F}^\psi_q)_{S^p(\mathbb{T}^1)} \asymp \sigma_n(\mathcal{F}^\psi_q)_{S^p(\mathbb{T}^1)} \asymp \psi(n/2). \tag{3.32}$$

Зауваження 3.1.2 . Порівнюючи оцінки величин $\sigma_n(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{S^p}$ і величин $\mathscr{D}_n(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{S^p}$ та $\mathscr{D}^\perp_n(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{S^p}$, робимо висновок, що у випадку, коли $d = 1$ і $\psi^p \in \mathfrak{M}''_\infty \cup \mathfrak{M}^c_\infty$, для будь-яких чисел $0 < p$, $q < \infty$

$$\sigma_n(\mathcal{F}^\psi_q)_{S^p(\mathbb{T}^1)} \asymp \mathscr{D}_n(\mathcal{F}^\psi_q)_{S^p(\mathbb{T}^1)} = \mathscr{D}^\perp_n(\mathcal{F}^\psi_q)_{S^p(\mathbb{T}^1)}.$$

Якщо $d > 1$, то аналогічне співвідношення

$$\sigma_n(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{S^p} \asymp \mathscr{D}_n(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{S^p} = \mathscr{D}^\perp_n(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{S^p} \tag{3.33}$$

справджується коли $0 < q < p < \infty$ і функція ψ задовольняє умови тверджень 3.1.1 та 3.1.2. Якщо ж $d > 1$, а $0 < q \leq p < \infty$, то для довільної функції, яка задовольняє умови тверджень 3.1.1 та 3.1.2

$$\sigma_n(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{S^p} = o\Big(\mathscr{D}_n(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{S^p}\Big), \ n \to \infty. \tag{3.34}$$

Якщо ж ψ^p належить множині $\mathfrak{M}''_\infty$ і $d > 1$, то при всіх $0 < q < p < \infty$ співвідношення (3.33) виконується (за відповідних додаткових умов тверджень 3.1.3 та 3.1.4) для підпослідовності вигляду $n = n(m) = V_{m-1} + c_m$, $c_m \in \mathbb{N}$, $c_m \leq K$, $m = 1, 2, \ldots$, а при всіх $0 < p = q < \infty$ — для підпослідовності $n = n(m) = V_{m-1}$, $m = 1, 2, \ldots$ У випадку, коли $0 < p < q < \infty$ співвідношення (3.33) виконується для підпослідовностей $n = n(m)$, що задовольняють умову (3.19); якщо ж дана підпослідовність $n = n(m)$ така, що $(V_m - n) = o(V_m - V_{m-1})$, $m \to \infty$, то справджується співвідношення (3.34).

3.2 Порядкові оцінки апроксимативних характеристик класів $\mathcal{F}^{\psi}_{q,r}$ в L_p

У випадку, коли $2 \le p < \infty$, на підставі теореми Гаусдорфа-Юнга (див., наприклад, [167, с. 16]) для довільної функції $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ має місце нерівність

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} \le \|f\|_{S^{p'}(\mathbb{T}^d)}. \tag{3.35}$$

Тут і далі, для довільного $1 < p < \infty$ покладаємо $p' := \frac{p}{p-1}$ і $p' := \infty$ при $p = 1$. При цьому, очевидно, $p' > 1$.

Якщо ж $1 \le p < 2$, то

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} \le \|f\|_{L_2(\mathbb{T}^d)} = \|f\|_{S^2(\mathbb{T}^d)}. \tag{3.36}$$

Таким чином, із отриманих у підрозділах 3.1.1 та 3.1.2 оцінок апроксимативних величин просторів $S^p(\mathbb{T}^d)$ випливають також і оцінки зверху аналогічних величин просторів $L_p(\mathbb{T}^d)$.

В даному підрозділі розглянемо випадки, у яких вдається також отримати відповідні оцінки знизу.

3.2.1. Нелінійні наближення в просторах L_p. Як вже зазначалося в підрозділі 1.2.2 (твердження 1.2.1 та 1.2.2), порядкові оцінки величин $\sigma_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,\infty})_{L_p}$ та $G_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,\infty})_{L_p}$ у випадку, коли функція $\psi(t)$ є степеневою: $\psi(t) = t^{-s}$, $s > 0$, при всіх $1 \le p \le \infty$ було отримано відповідно у роботах [40] та [166].

Наступне твердженні, зокрема, показують, що оцінки цих величин вигляду (1.30) та (1.31) мають місце для більш широкої множини функцій ψ.

Теорема 3.2.1 . *Нехай $d \ge 1$, $1 \le p < \infty$, $0 < q < \infty$, функція ψ належить множині B, а при $q > p/(p-1)$, крім цього, при всіх t, більших, ніж деяке число t_0, є опуклою і задовольняє умову (3.4) з $\beta := d(1/2 - 1/q)$ при $1 < p \le 2$ і $\beta := d(1 - 1/p - 1/q)$ при $2 \le p < \infty$. Тоді*

$$\sigma_n^{\perp}(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{L_p} \asymp G_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{L_p} \asymp \begin{cases} \psi(n^{\frac{1}{d}})n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}, & 1 \le p \le 2, \\ \psi(n^{\frac{1}{d}})n^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}, & 2 \le p < \infty, \end{cases} \tag{3.37}$$

при всіх $1 \le p \le 2$

$$\sigma_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{L_p} \asymp \psi(n^{\frac{1}{d}})n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}, \tag{3.38}$$

а при всіх $2 < p < \infty$

$$\psi(n^{\frac{1}{d}})n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} \ll \sigma_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{L_p} \ll \psi(n^{\frac{1}{d}})n^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}. \tag{3.39}$$

У випадку, коли $2 < p \le \infty$, оцінки величин $\sigma_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{L_p}$ дає таке твердження:

Теорема 3.2.2 . *Нехай $d \ge 1$, $2 \le p \le \infty$, $0 < q < \infty$, функція ψ належить множині B і при всіх t, більших, ніж деяке число t_0, є опуклою і задовольняє умову (3.4) з $\beta = d(1-1/q)_+$. Тоді при всіх $2 \le p \le \infty$ має місце співвідношення (3.38).*

Зазначимо, що умови на функцію ψ в теоремах 3.2.1 та 3.2.2 забезпечують вкладення $\mathcal{F}^{\psi}_{q,r} \subset L_p$.

Підставивши в ці твердження $r = \infty$ і $\psi(t) = t^{-s}$, $s > 0$, отримуємо такий наслідок.

Наслідок 3.2.1 . *Нехай $1 \le r \le \infty$, $1 \le p < \infty$, $0 < q < \infty$, s додатне число, яке при $q > p/(p-1)$ задовольняє нерівність $s > \beta$, де число β визначене в теоремі 3.2.1. Тоді при всіх $1 \le p < \infty$ виконується співвідношення (1.31):*

$$G_n(\mathcal{F}^s_{q,\infty})_{L_p} \asymp \begin{cases} n^{-\frac{s}{d}-\frac{1}{q}+\frac{1}{2}}, & 1 \le p < 2, \\ n^{-\frac{s}{d}+1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}, & 2 \le p < \infty, \end{cases}$$

а при всіх $1 \le p \le 2$ — співвідношення (1.30):

$$\sigma_n(\mathcal{F}^s_{q,\infty})_{L_p} \asymp n^{-\frac{s}{d}-\frac{1}{q}+\frac{1}{2}}.$$

Якщо ж $s > d(1-1/q)_+$, то співвідношення (1.30) виконується при всіх $1 \le p \le \infty$.

Дане твердження доповнює згадані вище результати тверджень 1.2.1 та 1.2.2 в такий спосіб:

- з наслідку 3.2.1, зокрема, випливає, що у випадку, коли $1 < q \le p/(p-1)$, співвідношення (1.30) (при $1 \le p \le 2$) і співвідношення (1.31) (при $1 \le p < \infty$) виконуються також для всіх $s > 0$;

- якщо $1 < p \le 2$ і $q > p/(p-1)$, то співвідношення (1.30) та (1.31) також виконується при всіх s таких, що $d(1/2 - 1/q) < s \le d(1-1/q)$;

- якщо $2 < p < \infty$ і $q > p/(p-1)$, то (1.31) також має місце при всіх s таких, що $d(1-1/p-1/q) < s \le d(1-1/q)$;

- у випадку, коли $2 < p \le \infty$, умови на s в наслідку 3.2.1 (для справедливості співвідношення (1.30)) є такими ж як і в твердженні 1.2.1.

Зазначимо також, що при $0 < q \le p/(p-1)$ умови теореми 3.2.1 задовольняють, наприклад, функції $\psi(t) = t^{-\beta}\ln^{\varepsilon}(t+e)$ для всіх $\beta > 0$ та $\varepsilon \in \mathbb{R}$ і функції $\psi(t) =$

$\ln^{\varepsilon}(t+e)$ для всіх $\varepsilon < 0$. Якщо ж $1 < p/(p-1) < q$, то умови теореми 3.2.1, зокрема, задовольняють функції $\psi(t) = t^{-\beta}\ln^{\varepsilon}(t+e)$ при всіх $\varepsilon \in \mathbb{R}$ та $\beta > d(1/2 - 1/q)$, якщо $1 < p \le 2$, і при всіх $\varepsilon \in \mathbb{R}$ та $\beta > d(1 - 1/p - 1/q)$, якщо $2 < p < \infty$. Умови теореми 3.2.2 виконуються, зокрема, для функцій $\psi(t) = t^{-s}\ln^{\varepsilon}(t+e)$ при $\varepsilon \in \mathbb{R}$ і $s > d(1-1/q)_+$.

Доведення теореми 3.2.1. *Оцінки зверху.* У випадку, коли $1 \le p \le 2$, на підставі співвідношень (1.27), (1.28) та (3.36)

$$\sigma_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{L_p} \ll G_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{L_p} \ll G_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{L_2} \ll \sigma_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^2}. \tag{3.40}$$

Тому для отримання необхідної оцінки зверху в (3.37) та (3.38) достатньо скористатися наслідком 3.1.1 для простору S^2.

Якщо ж $2 \le p < \infty$, то використовуючи співвідношення (1.27), (1.28) та (3.35), отримаємо

$$\sigma_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{L_p} \ll G_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{L_p} \ll G_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^{p'}} \ll \sigma_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^{p'}}, \tag{3.41}$$

і необхідна оцінка зверху в (3.37) та (3.39) випливає з наслідку 3.1.1 для простору $S^{p'}$.

Оцінки знизу. Позначимо через $\mathcal{T}_m$, $m \in \mathbb{N}$, множину всіх поліномів вигляду

$$T_m = \sum_{|\mathbf{k}|_\infty \le m} \widehat{T}_m(\mathbf{k}) e_{\mathbf{k}},$$

а через $\mathcal{A}_q(\mathcal{T}_m)$, $0 < q < \infty$, — підмножину всіх поліномів $T_m \in \mathcal{T}_m$, для яких $\|T\|_{S^q} \le 1$. З теореми 5.2 із роботи [40] випливає, що для будь-яких $0 < q < \infty$, $1 \le p < \infty$, $m = 1, 2, \ldots$ та $n = ((2m+1)^d - 1)/2$ має місце оцінка

$$\sigma_n(\mathcal{A}_q(\mathcal{T}_m))_{L_p} \gg n^{1/2 - 1/q}.$$

Для будь-якого фіксованого $m \in \mathbb{N}$ розглянемо множину

$$\psi(dm)\mathcal{A}_q(\mathcal{T}_m) = \{T \in \mathcal{T}_m \ : \ \|T\|_{S^q} \le \psi(dm)\}.$$

Внаслідок монотонності ψ для довільного полінома $T \in \psi(dm)\mathcal{A}_q(\mathcal{T}_m)$ маємо

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \left|\widehat{T}(\mathbf{k})/\psi(|\mathbf{k}|_1)\right|^q \le \sum_{|\mathbf{k}|_\infty \le m} \left|\widehat{T}(\mathbf{k})/\psi(d|\mathbf{k}|_\infty)\right|^q \le \sum_{|\mathbf{k}|_\infty \le m} \left|\widehat{T}(\mathbf{k})/\psi(dm)\right|^q \le 1$$

Тому множина $\psi(dm)\mathcal{A}_q(\mathcal{T}_m)$ міститься в множині $\mathcal{F}^{\psi}_{q,1}$. З огляду на означення множини B для всіх $m = 1, 2, \ldots$ і $n = ((2m+1)^d - 1)/2$ одержуємо

$$\sigma_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,1})_{L_p} \ge \sigma_n(\psi(dm)\mathcal{A}_q(\mathcal{T}_m))_{L_p} \gg \psi(dm) n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} \gg \psi(n^{\frac{1}{d}}) n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}}.$$

Беручи до уваги співвідношення (1.27) та (3.6), монотонність величин σ_n і включення $\psi \in B$, бачимо, що при всіх $1 \le p < \infty$ та $1 \le r \le \infty$

$$G_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{L_p} \gg \sigma^{\perp}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{L_p} \gg \sigma_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{L_p} \gg \sigma_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,1})_{L_p} \gg \psi(n^{\frac{1}{d}})n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}.$$

У випадку, коли $2 < p < \infty$, для величин $\sigma^{\perp}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{L_p}$ та $G_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{L_p}$ можна покращити. Для цього розглянемо функцію

$$f_1 = \sum_{|\mathbf{k}|_1 \le m_n} \widehat{f_1}(\mathbf{k}) e_{\mathbf{k}} = C_1(n) \sum_{|\mathbf{k}|_1 \le m_n} e_{\mathbf{k}}, \quad \text{де} \;\; C_1^{-q}(n) := \sum_{|\mathbf{j}\,|_1 \le m_n} \psi^{-q}(|\mathbf{j}|_1),$$

$m_n := [(2n/M_1)^{1/d}]$ і $M_1 = 2^d/d!$. Легко бачити, що $f_1 \in \mathcal{F}^{\psi}_{q,1}$. Внаслідок (3.3) число $|\Delta^d_{m,1}|$ елементів множини $\Delta^d_{m,1} = \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d : |\mathbf{k}|_1 = m, \, m \in \mathbb{N}\}$ при всіх достатньо великих m задовольняє умову

$$M_1(m - c_3)^{d-1} < |\Delta^d_{m,1}| = |\widetilde{\Delta}^d_{m,1}| - |\widetilde{\Delta}^d_{m-1,1}| \le M_1(m - c_4)^{d-1}, \tag{3.42}$$

де c_3 та c_4 — деякі додатні числа. Крім цього, функція ψ належить множині B, і тому з врахуванням (6.216) отримуємо

$$C_1^{-q}(n) \asymp \sum_{k=1}^{m_n} \frac{k^{d-1}}{\psi^q(k)} \asymp \frac{m_n^d}{\psi^q(m_n)} \asymp \frac{n}{\psi^q(n^{\frac{1}{d}})}. \tag{3.43}$$

Для довільного набору чисел $\gamma_n \subset \mathbb{Z}^d$, використовуючи нерівність Нікольського [96], співвідношення (3.3) та (3.43), маємо

$$\Big\| f_1 - \sum_{\mathbf{k} \in \gamma_n} \widehat{f_1}(\mathbf{k}) e_{\mathbf{k}} \Big\|_{L_p} \gg C_1(n) n^{-\frac{1}{p}} \Big\| \sum_{|\mathbf{k}|_1 \le m_n : \, \mathbf{k} \notin \gamma_n} e_{\mathbf{k}} \Big\|_{L_\infty} \asymp \psi(n^{\frac{1}{d}}) n^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Таким чином, для всіх $2 < p < \infty$ має місце оцінка

$$G_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{L_p} \gg \sigma^{\perp}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{L_p} \gg \sigma^{\perp}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,1})_{L_p} \gg \sigma^{\perp}_n(f_1)_{L_p} \gg \psi(n^{\frac{1}{d}}) n^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Теорему 3.2.1 доведено.

Доведення теореми 3.2.2. *Оцінки знизу* в теоремі 3.2.2 випливають із доведеної вище теореми 3.2.1. Доведення *оцінок зверху* проведемо за схемою з доведення теореми 6.1 [40] (див. твердження 1.2.1).

Лема 3.2.1 *(Р. ДеВор, В. М. Темляков [40]). Для кожного $0 < q \le \infty$, кожного $m = 1, 2, \ldots$ та $1 \le n \le (2m+1)^d$ маємо*

$$\sigma_n(\mathcal{A}_q(\mathcal{T}_m))_{L_\infty} \ll n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} L(m^d/n), \quad 0 < q \le 1, \tag{3.44}$$

де $L(x) = (1 + (\ln x)_+)^{1/2}$, *і*

$$\sigma_n(\mathcal{A}_q(\mathcal{T}_m))_{L_\infty} \ll m^{d-\frac{d}{q}} n^{-\frac{1}{2}} L(m^d/n), \quad 1 < q \le \infty. \tag{3.45}$$

Для довільної функції $f \in \mathcal{F}^{\psi}_{q,\infty}$ будемо використовувати зображення

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} f_j, \quad \text{де} \quad f_j := \sum_{2^{j-1} \le |\mathbf{k}|_\infty < 2^j} \widehat{f}(\mathbf{k}) e_{\mathbf{k}}, \ j \ge 1,$$

і $f_0 = \widehat{f}(\mathbf{0})$. Зазначимо, що

$$f_j/\psi(2^{j-1}) \in \mathcal{A}_q(\mathcal{T}_{2^j}), \quad j = 1, 2, \ldots \tag{3.46}$$

При довільному $N = 1, 2, \ldots$ будемо наближати f наступним чином. Нехай N_0 — найбільше натуральне число j таке, що $n_j := [(j-N)^{-2} 2^{Nd}] \ge 1$ ($[x]$ — ціла частина числа x), тобто, $N_0 = [2^{\frac{Nd}{2}} + N]$. Якщо $j \le N$, то покладаємо $P_j := f_j$. Якщо ж $N < j \le N_0$, то внаслідок (3.44), (3.45) та (3.46) існує такий поліном $P_j \in \Sigma_{n_j}$, що

$$\|f_j - P_j\|_{L_p} \ll n_j^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} L(2^{jd}/n_j) \psi(2^{j-1}), \quad 0 < q \le 1. \tag{3.47}$$

і

$$\|f_j - P_j\|_{L_p} \ll 2^{j(d-\frac{d}{q})} n_j^{-\frac{1}{2}} L(2^{jd}/n_j) \psi(2^{j-1}), \quad 1 < q < \infty. \tag{3.48}$$

Покладемо $P = \sum\limits_{j=0}^{N_0} P_j$. Оскільки

$$(2 \cdot 2^N + 1)^d + \sum_{j=N+1}^{N_0} (j-N)^{-2} 2^{Nd} \le a 2^{Nd},$$

де величина a залежить тільки від d, то P є лінійною комбінацією щонайбільше $a2^{Nd}$ експонент $e_{\mathbf{k}}$. Тому P належить множині $\Sigma_{a2^{Nd}}$. Маємо

$$\|f - P\|_{L_p} \le \sum_{j=N+1}^{N_0} \|f_j - P_j\|_{L_p} + \sum_{j=N_0+1}^{\infty} \|f_j\|_{L_p} =: S_1 + S_2. \tag{3.49}$$

При всіх $x \ge 1$ виконується нерівність $[x] \ge x/2$. Тому для достатньо великих N та $N < j \le N_0$ з означення $L(x)$ отримуємо

$$L(2^{jd}/n_j) \le (1 + \ln(2^{d(j-N)+1}(j-N)^2))^{\frac{1}{2}} \ll (j-N)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.50}$$

Розглянемо спочатку випадку $0 < q \leq 1$. Міркуючи аналогічно до доведення оцінки (6.236), легко показати, що коли функція $\psi \in B$ при всіх t, більших деякого числа t_0, є опуклою і задовольняє умову (3.4) з деяким фіксованим $\beta \geq 0$, то для довільного числа $\alpha \in \mathbb{R}$ і достатньо великих $t > N$, функція $h_{\alpha,\beta}(t) := 2^{\beta t}(t - N)^{\alpha}\psi(2^{t-1})$ спадає до нуля і виконується співвідношення

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} 2^{\beta j}(j-N)^{\alpha}\psi(2^{j-1}) \ll 2^{\beta N}\psi(2^N). \tag{3.51}$$

В даному випадку $\beta = 0$. На підставі (3.47), (3.50) та (3.51) отримуємо оцінку суми S_1 в (3.49):

$$S_1 \ll \sum_{j=N+1}^{\infty} (j-N)^{2(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})} 2^{-Nd(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})} (j-N)^{\frac{1}{2}}\psi(2^{j-1}) \ll$$

$$\ll 2^{-N(\frac{d}{q}-\frac{d}{2})} \sum_{j=N+1}^{\infty} (j-N)^{\frac{2}{q}-\frac{1}{2}}\psi(2^{j-1}) \ll 2^{-N(\frac{d}{q}-\frac{d}{2})}\psi(2^N). \tag{3.52}$$

Для оцінки S_2 зауважимо, що з (3.46) випливає

$$S_2 = \sum_{j=N_0+1}^{\infty} \|f_j\|_{L_p} \leq \sum_{j=N_0+1}^{\infty} \|f_j\|_{L_\infty} \leq \sum_{j=N_0+1}^{\infty} \Big(\sum_{2^{j-1} \leq |\mathbf{k}|_\infty < 2^j} |\widehat{f}(\mathbf{k})| \Big) \leq$$

$$\leq \sum_{j=N_0+1}^{\infty} \|f_j\|_{S^q} \ll \sum_{j=N_0+1}^{\infty} \psi(2^{j-1}) \ll \psi(2^{N_0}).$$

Далі, зазначимо, що коли при всіх t, більших деякого числа t_0, ψ є опуклою та задовольняє умову (3.4), то для будь-якого $\alpha > 0$ маємо $\psi(2^{N(\alpha+1)}) \ll \psi(2^N)2^{-N\alpha}$.

З означення числа N_0 маємо $N_0 \geq N + 2^{\frac{Nd}{2}} - 1$. Тому якщо N є достатньо великим ($N = N(d,q)$), то $N_0 \geq N(1 + d/q - d/2)$. Звідси

$$S_2 \ll \psi(2^{N(1+\frac{d}{q}-\frac{d}{2})}) \ll 2^{-N(\frac{d}{q}-\frac{d}{2})}\psi(2^N).$$

Використовуючи останню оцінку та (3.52) у співвідношенні (3.49), знаходимо

$$\sigma_{a2^{Nd}}(f)_{L_p} \leq \|f - P\|_{L_p} \ll 2^{-N(\frac{d}{q}-\frac{d}{2})}\psi(2^N). \tag{3.53}$$

У випадку $1 < q < \infty$ умова (3.4) виконується з $\beta = d - d/q$. На підставі (3.48), (3.50) та (3.51) маємо

$$S_1 \ll 2^{-\frac{N}{2}} \sum_{j=N+1}^{\infty} 2^{j(d-\frac{d}{q})}(j-N)^{\frac{3}{2}}\psi(2^{j-1}) \ll \psi(2^N)2^{-N(\frac{d}{q}-\frac{d}{2})}. \tag{3.54}$$

Для оцінки суми S_2 використаємо нерівність Гельдера, співвідношення (3.46) та (3.51), а також нерівності $N_0 \geq N + 2^{\frac{Nd}{2}} - 1$ та $h_{\alpha,\beta}(N_0) \leq h_{\alpha,\beta}(N+1)$ при $\alpha = 1$ і $\beta = d - d/q$. Отримаємо

$$S_2 \leq \sum_{j=N_0+1}^{\infty} \|f_j\|_{L_\infty} \leq \sum_{j=N_0+1}^{\infty} \psi(2^{j-1}) \Big(\sum_{2^{j-1} \leq |\mathbf{k}|_\infty < 2^j} \big| \widehat{f}(\mathbf{k})/\psi(2^{j-1}) \big| \Big) \leq$$

$$\leq \sum_{j=N_0+1}^{\infty} \psi(2^{j-1}) 2^{(j-1)(d-\frac{d}{q})} \ll \psi(2^{N_0}) 2^{N_0(d-\frac{d}{q})} \ll \psi(2^N) 2^{N(\frac{d}{2}-\frac{d}{q})}.$$

Застосовуючи останню оцінку та оцінку (3.54) в (3.49), бачимо, що і в цьому випадку виконується співвідношення (3.53). Таким чином, оцінка зверху в (3.4) випливає з монотонності величини σ_n та включення $\psi \in B$. Теорему 3.2.2 доведено.

Теорема 3.2.3 . *Нехай $m \in \mathbb{N}$, $0 < r \leq \infty$, $0 < q < \infty$, $1 \leq p < \infty$, виконується умова* (3.3) *і $n \in [V_{m-1}, V_m)$. Тоді*

1) якщо $n = n(m) = V_{m-1}$, то при всіх $q \leq p'$ для довільної функції $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$, що задовольняє умову (3.9) *при $\alpha = \min\{p', q\}$, справджується оцінка*

$$\sigma_n^\perp(\mathcal{F}_{q,r}^\psi)_{L_p} \asymp G_n(\mathcal{F}_{q,r}^\psi)_{L_p} \asymp \psi(m); \tag{3.55}$$

2) якщо $n = n(m) = V_m - c_m$, $c_m \in \mathbb{N}$, $c_m \leq K$, то для довільної функції $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$, що задовольняє умову (3.9) *з $\alpha = \min\{p', q\}$, при всіх $0 < q < \infty$ справджується оцінка*

$$\sigma_n^\perp(\mathcal{F}_{q,r}^\psi)_{L_p} \asymp G_n(\mathcal{F}_{q,r}^\psi)_{L_p} \asymp \frac{\psi(m)}{n^{\frac{d-1}{dq}}}; \tag{3.56}$$

3) якщо $n = n(m) = V_{m-1} + c_m$, $c_m \in \mathbb{N}$, $c_m \leq K$, то при всіх $q < p'$ для довільної функції $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$, що задовольняє умову (3.9) *з $\alpha = \min\{p', q\}$, справджується оцінка* (3.63).

Доведення. Для отримання оцінок зверху в теоремі 3.2.3 достатньо скористатись співвідношеннями (3.40) та (3.41) і відповідними оцінками величин $\sigma_n(\mathcal{F}_{q,r}^\psi)_{S^p}$ $\big($у твердженні 1) — оцінкою (3.12), у твердженні 2) — оцінкою (3.16), у твердженні 3) — оцінкою (3.18)$\big)$.

Для отримання оцінок знизу, розглянемо систему $\mathbf{k}_1^*, \mathbf{k}_2^*, \ldots$ всіх векторів з множини $\mathbb{Z}^d$ таких, що

$$\psi(|\mathbf{k}_j^*|_r) = \bar{\psi}(j), \quad j = 1, 2, \ldots \tag{3.57}$$

де $\bar{\psi}=\bar{\psi}(j)$, $j=1,2,\ldots$, — незростаюча перестановка системи чисел $\psi(|\mathbf{k}|_r)$, $\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d$. Покладемо

$$f_2=\sum_{j=1}^{n+1}\widehat{f}_2(\mathbf{k}_j^*)e_{\mathbf{k}_j^*}=C_2(n)\sum_{j=1}^{n+1}e_{\mathbf{k}_j^*},\quad \text{де}\quad C_2^{-q}(n):=\sum_{j=1}^{n+1}\psi^{-q}(|\mathbf{k}_j^*|_r).$$

Тоді очевидно, що $f_2\in\mathcal{F}_{q,r}^{\psi}$ і внаслідок (3.64) та (3.1) при $n\in[V_{m-1},V_m)$.

$$C_2^{-q}(n)=\sum_{j=1}^{n+1}\bar{\psi}^{-q}(j)\asymp\sum_{k=1}^{m-1}\frac{V_k-V_{k-1}}{\psi^q(k)}+\frac{n+1-V_{m-1}}{\psi^q(m)}. \tag{3.58}$$

На підставі співвідношень (3.3) та (6.278) маємо

$$\sum_{k=1}^{m-1}\frac{V_k-V_{k-1}}{\psi^q(k)}\asymp\sum_{k=1}^{m-1}\frac{k^{d-1}}{\psi^q(k)}\asymp\frac{(m-1)^{d-1}}{\psi^q(m-1)} \tag{3.59}$$

Об'єднуючи співвідношення (3.65) та (3.59), з урахуванням умови (3.9) робимо висновок

$$C_2^{-q}(n)\asymp\psi^{-q}(m)(n+1-V_{m-1}). \tag{3.60}$$

Для довільного набору векторів $\gamma_n\subset\mathbb{Z}^d$ отримуємо

$$\Big\|f_2-\sum_{\mathbf{k}\in\gamma_n}\widehat{f}_2(\mathbf{k})e_{\mathbf{k}}\Big\|_{L_p}\gg\Big\|\sum_{\substack{j=1\\ \mathbf{k}_j^*\notin\gamma_n}}^{n+1}\widehat{f}_2(\mathbf{k}_j^*)e_{\mathbf{k}_j^*}\Big\|_{L_p}\gg$$

$$\gg\Big\|\sum_{\substack{j=1\\ \mathbf{k}_j^*\notin\gamma_n}}^{n+1}\widehat{f}_2(\mathbf{k}_j^*)e_{\mathbf{k}_j^*}\Big\|_{L_1}\gg\min_{\substack{j=\overline{1,n+1}\\ \mathbf{k}_j^*\notin\gamma_n}}|\widehat{f}_2(\mathbf{k}_j^*)|\gg C_2(n). \tag{3.61}$$

Із співвідношень (3.61) та (3.60) випливає, що при всіх $1\le p<\infty$ має місце оцінка:

$$\sigma_n^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{L_p}\gg\sigma_n^{\perp}(f_2)_{L_p}\gg\psi(m)(n+1-V_{m-1})^{-\frac{1}{q}}.$$

Далі, якщо $d=1$, то очевидно, $n+1-V_{m-1}=1$. При $d>1$ у випадку, коли $n=n(m)=V_m+c_m$, $c_m\in\mathbb{N}$, $c_m\le K$, залишається помітити, що $(n+1-V_{m-1})\asymp K$; а у випадку, коли $n=n(m)=V_m-c_m$, $c_m\in\mathbb{N}$, $c_m\le K$, скористатись співвідношенням (6.207). Теорему доведено.

Як вже зазначалося, у випадку, коли $d=1$, класи $\mathcal{F}_{q,r}^{\psi}=:\mathcal{F}_q^{\psi}$ не залежать від r, умова (3.3) виконується з константою $M_r=2$, і якщо $n\in[V_{m-1},V_m)$, то $n=V_{m-1}=V_m-1$ а $m=[(n+1)/2]$. Тому з теореми 3.2.3 можна отримати такий наслідок.

Наслідок 3.2.2 . *Для будь-яких* $1 \le p < \infty$ *та* $0 < q < \infty$ *і довільної функції* $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$

$$\sigma_n^\perp(\mathcal{F}_q^\psi)_{L_p(\mathbb{T}^1)} \asymp G_n(\mathcal{F}_q^\psi)_{L_p(\mathbb{T}^1)} \asymp \psi([(n+1)/2]). \tag{3.62}$$

Аналогічну оцінку нам вдається отримати також у випадку, коли $d = 1$ і функція $\psi^{p'}$ належить множині $\mathfrak{M}^c_\infty$.

Теорема 3.2.4 . *Нехай* $1 \le p < \infty$*,* $0 < q < \infty$ *і функція* $\psi^{p'}$ *належить множині* $\mathfrak{M}^c_\infty$*. Тоді*

$$\sigma_n^\perp(\mathcal{F}_q^\psi)_{L_p(\mathbb{T}^1)} \asymp G_n(\mathcal{F}_q^\psi)_{L_p(\mathbb{T}^1)} \asymp \mathscr{D}_n^\perp(\mathcal{F}_q^\psi)_{L_p(\mathbb{T}^1)} \asymp \psi(n/2). \tag{3.63}$$

Доведення. Для отримання оцінок зверху в цьому твердженні достатньо скористатись співвідношеннями (3.40) та (3.41) і оцінкою (3.32).

Для отримання оцінок знизу розглянемо множину $k_1^*, k_2^*, \ldots$ всіх цілих чисел таких, що

$$\psi(|k_j^*|) = \bar{\psi}(j), \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{3.64}$$

де $\bar{\psi} = \bar{\psi}(j)$, $j = 1, 2, \ldots,$ — незростаюча перестановка системи чисел $\psi(|k|)$, $k \in \mathbb{Z}^d$. Покладемо

$$f_3 = \sum_{j=1}^{n+1} \widehat{f}_2(k_j^*) e_{k_j} = C_3(n) \sum_{j=1}^{n+1} e_{k_j}, \quad \text{де} \quad C_3^{-q}(n) = \sum_{j=1}^{n+1} \psi^{-q}(|k_j^*|).$$

Очевидно, що $f_3 \in \mathcal{F}_q^\psi$, а на підставі (3.64), (6.250) та твердження 6.2.4 робимо висновок, що

$$C_3^{-q}(n) \asymp \sum_{j=1}^{n+1} \bar{\psi}^{-q}(j) \asymp \sum_{k=1}^{[(n+1)/2]} \psi^{-q}(k) \asymp \psi^{-q}(n/2). \tag{3.65}$$

Тому для довільного набору чисел $\gamma_n \subset \mathbb{Z}$

$$\Big\| f_3 - \sum_{k \in \gamma_n} \widehat{f}_3(k) e_k \Big\|_{L_p(\mathbb{T}^1)} \gg \Big\| \sum_{\substack{j=1 \\ k_j^* \notin \gamma_n}}^{n+1} \widehat{f}_3(k_j^*) e_{k_j^*} \Big\|_{L_p(\mathbb{T}^1)} \gg$$

$$\gg \Big\| \sum_{\substack{j=1 \\ k_j^* \notin \gamma_n}}^{n+1} \widehat{f}_3(k_j^*) e_{k_j^*} \Big\|_{L_1(\mathbb{T}^1)} \gg \min_{\substack{j=\overline{1,n+1} \\ k_j^* \notin \gamma_n}} |\widehat{f}_3(k_j^*)| \gg C_3(n) \gg \psi(n/2).$$

Звідси випливає, що при всіх $1 \le p < \infty$ має місце необхідна оцінка:

$$\sigma_n^{\perp}(\mathcal{F}_q^{\psi})_{L_p(\mathbb{T}^1)} \gg \sigma_n^{\perp}(f_3)_{L_p(\mathbb{T}^1)} \gg \psi(n/2).$$

Теорему доведено.

3.2.2. Тригонометричні ортопроекційні поперечники в L_p.

Теорема 3.2.5 . *Нехай* $m \in \mathbb{N}$, $0 < r \le \infty$, $1 \le p < \infty$, $0<q<\infty$, *виконується умова* (3.3) *і* $n \in [V_{m-1}, V_m)$. *Тоді*

1) якщо $0 < q \le p'$, *то для довільної додатної спадної до нуля функції* $\psi(t)$, $t \ge 1$, *справджується рівність*

$$\mathscr{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{L_p} = \psi(m); \tag{3.66}$$

2) якщо ж $1 < p' < q < \infty$, $\psi \in \mathfrak{M}_\infty''$ *і задовольняє умову* (3.9) *при* $\alpha = \frac{p'q}{q-p'}$, *то для підпослідовності вигляду* $n=n(m) = V_m - c_m$, $m = 1, 2, \ldots$, $c_m \in \mathbb{N}$, $c_m \le K$, *має місце*

$$\mathscr{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{L_p} \asymp \psi(m). \tag{3.67}$$

Доведення. Для отримання оцінок зверху в (3.66) та (3.67) достатньо скористатись співвідношеннями (3.35) та (3.36) і твердженням 3.1.5 (із врахуванням того, що коли $n = n(m) = V_m - c_m$, $m = 1, 2, \ldots$, $c_m \in \mathbb{N}$, $c_m \le K$, величина $(V_m - n) \asymp K$).

Щоб отримати оцінки знизу, розглянемо для довільного набору $\gamma_n \in \mathbb{Z}^d$ систему $\mathbf{k}_1(\gamma_n), \mathbf{k}_2(\gamma_n), \ldots$ всіх векторів з множини $\mathbb{Z}^d \setminus \gamma_n$ таких, що

$$\psi(|\mathbf{k}_1(\gamma_n)|_r) \ge \psi(|\mathbf{k}_2(\gamma_n)|_r) \ge \ldots$$

і функцію $f_4 = f_4(\gamma_n) = \psi(|\mathbf{k}_1(\gamma_n)|_r) e_{\mathbf{k}_1(\gamma_n)}$. Очевидно, що $f_4 \in \mathcal{F}_{q,r}^{\psi}$ і

$$\mathscr{E}_{\gamma_n}(f_4)_{L_p} = \left\| \psi(|\mathbf{k}_1(\gamma_n)|_r) e_{\mathbf{k}_1(\gamma_n)} \right\|_{L_p} = \psi(|\mathbf{k}_1(\gamma_n)|_r),$$

Звідси з врахуванням (3.1) випливає необхідна оцінка знизу величини $\mathscr{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}_q^{\psi})_{L_p}$:

$$\mathscr{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{L_p} \ge \inf_{\gamma_n} \mathscr{E}_{\gamma_n}(f_4)_{L_p} = \inf_{\gamma_n} \psi(|\mathbf{k}_1(\gamma_n)|_r) = \bar{\psi}(n+1) = \psi(m),$$

де, як і раніше, через $\bar{\psi} = \bar{\psi}(j)$, $j = 1, 2, \ldots$, позначається незростаюча перестановка системи чисел $\psi(|\mathbf{k}|_r)$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$. Теорему доведено.

Наслідок 3.2.3 . *Нехай* $1 \le p < \infty$, *тоді для довільної додатної спадної до нуля функції* $\psi(t)$, $t \ge 1$, *та будь-яких* $0 < q \le p' < \infty$

$$\mathscr{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}_q^{\psi})_{L_p(\mathbb{T}^1)} = \psi([(n+1)/2]); \tag{3.66$'$}$$

якщо ж $q > p'$, *то для довільної функції* $\psi \in \mathfrak{M}''_{\infty}$

$$\mathscr{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}_q^{\psi})_{L_p(\mathbb{T}^1)} \asymp \psi([(n+1)/2]). \tag{3.67$'$}$$

Встановимо також порядкові оцінки величин $\mathscr{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{L_p}$ у випадку, коли функція ψ належить множині B і задовольняє умови теореми 3.2.1.

Твердження 3.2.1 . *Нехай* $0 < r \le \infty$, $1 \le p < \infty$, $0 < q < \infty$, *виконується умова (3.3) і функція* ψ *задовольняє умови теореми 3.2.1. Тоді*

$$\mathscr{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{L_p} \asymp \begin{cases} \psi(n^{\frac{1}{d}}), & 0 < q \le p',\ 1 \le p < \infty, \\ \psi(n^{\frac{1}{d}})n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}, & p' < q < \infty,\ 1 < p < 2, \\ \psi(n^{\frac{1}{d}})n^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}, & p' < q < \infty,\ 2 \le p < \infty. \end{cases} \tag{3.68}$$

Дійсно, у випадку, коли $0 < q \le p'$ оцінка (3.68) випливає з (3.66) із врахуванням (3.8) та означення множини B. Якщо ж $p' < q < \infty$, то для отримання оцінок зверху в (3.68) достатньо скористатись нерівностями (3.35) та (3.36) і співвідношенням (3.29). Оцінки знизу випливають із співвідношення (1.26) та відповідних оцінок величин $\sigma_n^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{L_p}$, які дає теорема 3.2.1.

Зауваження 3.2.1 . Аналізуючи результати підрозділу 3.2, бачимо, що у випадку, коли $d = 1$ і $\psi^{p'} \in \mathfrak{M}''_{\infty} \cup \mathfrak{M}^{c}_{\infty}$, для будь-яких $1 \le p < \infty$ та $0 < q < \infty$

$$\sigma_n^{\perp}(\mathcal{F}_q^{\psi})_{L_p(\mathbb{T}^1)} \asymp G_n(\mathcal{F}_q^{\psi})_{L_p(\mathbb{T}^1)} \asymp \mathscr{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}_q^{\psi})_{L_p(\mathbb{T}^1)}.$$

Якщо $d > 1$ і виконуються умови теорем 3.2.3 та 3.2.1, то при всіх $q < p'$ аналогічне співвідношення

$$\sigma_n^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{L_p} \asymp G_n(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{L_p} \asymp \mathscr{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{L_p} \tag{3.69}$$

виконується для підпослідовності вигляду $n = n(m) = V_{m-1} + c_m$, $c_m \in \mathbb{N}$, $c_m \le K$, $m = 1, 2, \ldots$, а при всіх $q = p'$ — для підпослідовності $n = n(m) = V_{m-1}$, $m = 1, 2, \ldots$

Якщо ж підпослідовність $n = n(m) = V_m - c_m$, $c_m \in \mathbb{N}$, $c_m \le K$, то для всіх $0 < q < \infty$ при $n \to \infty$ маємо

$$\sigma_n^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{L_p} \asymp G_n(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{L_p} = o\big(\mathscr{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{L_p}\big). \tag{3.70}$$

У випадку, коли виконуються умови теореми 3.2.1, при всіх $d \ge 1$ та $0 < q \le p'$, $1 \le p < \infty$ виконується співвідношення (3.70), а при всіх $d \ge 1$ та $p' < q < \infty$ — співвідношення (3.69).

3.3 Висновки до розділу 3

Досліджено асимптотичну поведінку низки важливих нелінійних апроксимативних характеристик (таких, як найкраще n-членне тригонометричне наближення, найкраще n-членне ортогональне тригонометричне наближення, наближення n-членними гріді апроксимантами, базисний поперечник) класів функцій багатьох змінних $\mathcal{F}^{\psi}_{q,r}$ в інтегральній метриці та у просторах S^p.

Знайдено точні порядкові оцінки даних характеристик при $n \to \infty$ для різних параметрів r, ψ та q, які визначають ці класи. Встановлено залежність швидкості прямування до нуля цих характеристик від вибору цих параметрів.

Описано випадки, у яких отримані порядкові оцінки величин найкращих n-членних тригонометричних наближень класів $\mathcal{F}^{\psi}_{q,r}$ є конструктивними.

Розділ 4

Наближення середніми Тейлора-Абеля-Пуассона

4.1 Прямі та обернені теореми наближення 2π-періодичних середніми Тейлора-Абеля-Пуассона

В цьому підрозділі досліджуються в просторах L_p апроксимативні характеристики операторів Тейлора-Абеля-Пуассона, які породжуються послідовністю чисел $\lambda_{k,r}(\varrho)$ вигляду (1.146). Зокрема, в термінах наближень цими операторами дається конструктивна характеристика класів функцій, K-функціонали радіальних похідних яких не перевищують деякої мажоранти.

4.1.1. Нехай f — довільна функція з простору $L_1 = L_1(-\pi, \pi)$; $\widehat{f}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, – її коефіцієнти Фур'є. Аналогічно до підрозділу 1.8.2 для будь-яких $\varrho \in [0,1)$ і $r \in \mathbb{N}$ покладемо

$$A_{\varrho,r}(f)(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_{|k|,r}(\varrho)\widehat{f}(k)e^{ikx}, \tag{4.1}$$

де згідно з (1.146) числа $\lambda_{k,r}(\varrho) \equiv 1$ при $k = 0, 1, \ldots, r-1$ і

$$\lambda_{k,r}(\varrho) := \sum_{j=0}^{r-1} \binom{k}{j} (1-\varrho)^j \varrho^{k-j}, k = r, r+1, \ldots, \quad \varrho \in [0,1).$$

Перетворення $A_{\varrho,r}$ можна розглядати як лінійний оператор простору L_1 в себе. Дійсно, $\lambda_{k,r}(0) = 0$, а при всіх $k = r, r+1, \ldots$ та $\varrho \in (0,1)$ маємо

$$\sum_{j=0}^{r-1} \binom{k}{j} (1-\varrho)^j \varrho^{k-j} \le rq^k k^{r-1}, \quad \text{де } 0 < q := \max\{1-\varrho, \varrho\} < 1.$$

Тому для довільної функції $f \in L_1$ і будь-якого $0 < \varrho < 1$ ряд у правій частині (4.1) мажорується збіжним рядом $2r\|f\|_1 \sum_{k=r}^{\infty} q^k k^{r-1}$.

Позначимо через $f(\varrho, x)$, $0 \le \varrho < 1$, інтеграл Пуассона (оператор Пуассона) функції $f \in L_1$:

$$f(\varrho, x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) P(\varrho, x-t) dt, \tag{4.2}$$

де $P(\varrho, t) = \frac{1-\varrho^2}{|1-\varrho e^{it}|^2}$ — ядро Пуассона.

Зазначимо, що коли функція $f \in L_1$ і має ряд Фур'є степеневого типу, тобто, $f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx}$, то $f(\varrho, x) = f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}(k) z^k, \quad z = \varrho e^{ix}$.

Наступне твердження показує зв'язок операторів $A_{\varrho,r}$ і перетворень Р. Лейса і П. Л. Бутцера та Г. Суноучі, розглянутих в підрозділі 1.8.2.

Лема 4.1.1 . *Нехай $f \in L_1$. Тоді для довільних чисел $r \in \mathbb{N}$, $\varrho \in [0, 1)$ та $x \in [0, 2\pi]$,*

$$A_{\varrho,r}(f)(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\partial^k f(\varrho, x)}{\partial \varrho^k} \cdot \frac{(1-\varrho)^k}{k!}. \tag{4.3}$$

Доведення. Поставимо у відповідність функції f дві функції

$$f_1(z) := \widehat{f}(0)/2 + \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}(k) z^k \quad \text{i} \quad f_2(z) := \widehat{f}(0)/2 + \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}(-k) z^k, \tag{4.4}$$

голоморфні в крузі $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Тоді на підставі леми 1.8.1 (лема 4 [120]) випливає, що для довільних $z \in \overline{\mathbb{D}}$ мають місце рівності

$$\frac{\widehat{f}(0)}{2} + \sum_{k=1}^{r-1} \widehat{f}(k) z^k + \sum_{k=r}^{\infty} \lambda_{k,r}(\varrho) \widehat{f}(k) z^k = \frac{\widehat{f}(0)}{2} + \sum_{k=1}^{r-1} z^k f_1^{(k)}(\varrho z) \frac{(1-\varrho)^k}{k!} \tag{4.5}$$

і

$$\frac{\widehat{f}(0)}{2} + \sum_{k=1}^{r-1} \widehat{f}(-k) \overline{z}^k + \sum_{k=r}^{\infty} \lambda_{k,r}(\varrho) \widehat{f}(-k) \overline{z}^k = \frac{\widehat{f}(0)}{2} + \sum_{k=1}^{r-1} \overline{z}^k f_2^{(k)}(\varrho \overline{z}) \frac{(1-\varrho)^k}{k!}, \tag{4.6}$$

в яких при $r = 1$ покладаємо $\sum_{k=1}^{0} := 0$. Насправді, в [120] співвідношення вигляду (4.5) та (4.6) були доведені для $z \in \mathbb{D}$, але дані обмеження не є важливими.

Додавши ці дві рівності в точці $z = e^{ix}$ і врахувавши співвідношення

$$e^{ikx} f_1^{(k)}(\varrho e^{ix}) + e^{-ikx} f_2^{(k)}(\varrho e^{-ix}) = \frac{\partial^k f(\varrho, x)}{\partial \varrho^k}, \tag{4.7}$$

отримаємо (4.3). Лему доведено.

4.1.2. Прямі та обернені теореми. Сформулюємо тепер прямі та обернені теореми наближення операторами $A_{\varrho,r}$ в термінах K–функціоналів функцій, породжених їх радіальними похідними.

Якщо для функції $f \in L_1$ і деякого натурального n існує така функція $g \in L_1$, що

$$\widehat{g}(k) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad |k| < n, \\ \dfrac{|k|!}{(|k|-n)!}\widehat{f}(k) & \text{при} \quad |k| \geq n, \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

то кажуть, що у функції f існує радіальна похідна g порядку n, для якої використовують позначення $f^{[n]}$. В даному випадку термін "радіальна похідна" використовується з огляду на такий факт.

Якщо функція $f^{[r]} \in L_1$, то її інтеграл Пуассона може бути зображений у вигляді

$$f^{[r]}(\varrho, x) = (f(\varrho, \cdot))^{[r]}(x) = \varrho^r \frac{\partial^r f(\varrho, x)}{\partial \varrho^r} \quad \varrho \in [0,1), \ \forall\, x \in [0, 2\pi]. \tag{4.8}$$

Тому внаслідок теореми про граничні значення інтегралу Пуассона (див., наприклад, [117, с. 27]), для майже всіх $x \in [0, 2\pi]$ маємо $f^{[r]}(x) = \lim_{\varrho \to 1-} f^{[r]}(\varrho, x)$.

Співвідношення (4.8) можна легко отримати шляхом почленного диференціювання по змінній ϱ розкладу інтегралу Пуассона в рівномірно збіжний ряд

$$f(\varrho, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varrho^{|k|} \widehat{f}(k) e^{ikx} \quad \forall\, \varrho \in [0,1), \ x \in [0, 2\pi]. \tag{4.9}$$

З означення радіальної похідної, зокрема, випливає таке правило диференціювання: *якщо* $f(x) = \sum_{|k| \leq m} \widehat{f}(k) e^{ikx}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, *то*

$$f^{[n]}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad m < n, \\ \displaystyle\sum_{n \leq |k| \leq m} \frac{|k|!}{(|k|-n)!} \widehat{f}(k) e^{ikx} & \text{при} \quad m \geq n. \end{cases} \tag{4.10}$$

В просторі L_p K–функціоналом функції f (див., наприклад, [39 (гл. 6)]) породженим радіальною похідною порядку n, називають величину

$$K_n(\delta, f)_p := \inf \left\{ \|f - h\|_{L_p} + \delta^n \left\|h^{[n]}\right\|_{L_p} : h^{[n]} \in L_p \right\}, \quad \delta > 0.$$

Далі, розглянемо функції $\omega(t)$, $t \in [0,1]$, які задовольняють такі умови:

1) $\omega(t)$ є неперервною на $[0,1]$;

2) $\omega(t) \uparrow$;

3) $\omega(t) \neq 0$ для довільного $t \in (0,1]$;

4) $\omega(t) \to 0$ при $t \to 0$;

а також відомі умови Зигмунда–Барі– Стєчкіна (див, наприклад, [5]):

$$(\mathscr{Z}) \qquad \int_0^\delta \frac{\omega(t)}{t} dt = O(\omega(\delta)), \qquad \delta > 0, \tag{4.11}$$

$$(\mathscr{Z}_n) \qquad \int_\delta^1 \frac{\omega(t)}{t^{n+1}} dt = O\Big(\frac{\omega(\delta)}{\delta^n}\Big), \quad \delta > 0, \ n \in \mathbb{N}. \tag{4.12}$$

Основні результати даного підрозділу містяться в наступних твердженнях:

Теорема 4.1.1 . *Нехай $f \in L_p$, $1 \le p \le \infty$, $n, r \in \mathbb{N}$, $n \le r$ і функція $\omega(t)$, $t \in [0,1]$, задовольняє умови 1)–4) і $(\mathscr{Z})$. Якщо*

$$K_n\big(\delta, f^{[r-n]}\big)_p = O(\omega(\delta)), \quad \delta \to 0+, \tag{4.13}$$

то має місце співвідношення

$$\|f - A_{\varrho,r}(f)\|_{L_p} = O\left((1-\varrho)^{r-n}\omega(1-\varrho)\right), \quad \varrho \to 1-. \tag{4.14}$$

Теорема 4.1.2 . *Нехай $f \in L_p$, $1 \le p \le \infty$, $n, r \in \mathbb{N}$, $n \le r$ і функція $\omega(t)$, $t \in [0,1]$, задовольняє умови 1)–4), $(\mathscr{Z})$ та $(\mathscr{Z}_n)$. Якщо виконується співвідношення (4.14), то функція $f^{[r-n]} \in L_p$ і також виконується співвідношення (4.13).*

Зауваження 4.1.1 . Для довільного $n \in \mathbb{N}$ з умови $(\mathscr{Z}_n)$ випливає, що

$$\liminf_{\delta \to 0+} (\delta^{-n}\omega(\delta)) > 0$$

або ж, що $(1-\varrho)^{r-n}\omega(1-\varrho) \gg (1-\varrho)^r$ при $\varrho \to 1-$. Тому якщо виконується умова $(\mathscr{Z}_n)$, то величина в лівій частині (4.14) спадає до нуля при $\varrho \to 1-$ не швидше за функцію $(1-\varrho)^r$.

Зазначимо також, що на відміну від твердження 1.8.3 в умовах теореми 4.1.2 не вимагається існування та належності до L_p проміжних похідних $f^{[s]}$, $s < r - n$.

Розглянувши в теоремах 4.1.1 та 4.1.2 функцію $\omega(t) = t^\alpha$, $\alpha > 0$, отримаємо такі наслідки.

Наслідок 4.1.1 . *Нехай $f \in L_p$, $1 \le p \le \infty$, $n, r \in \mathbb{N}$, $n \le r$ і $0 < \alpha < n$. Якщо*

$$K_n\left(\delta, f^{[r-n]}\right)_p = O(\delta^\alpha), \quad \delta \to 0+, \tag{4.13$'$}$$

то

$$\|f - A_{\varrho,r}(f)\|_p = O\left((1-\varrho)^{r-n+\alpha}\right), \quad \varrho \to 1-. \tag{4.14$'$}$$

Наслідок 4.1.2 . *Нехай $f \in L_p$, $1 \le p \le \infty$, $n, r \in \mathbb{N}$, $n \le r$ і $0 < \alpha < n$. Якщо виконується співвідношення (4.14′), то $f^{[r-n]} \in L_p$ і виконується співвідношення (4.13′).*

Розглянемо також окремо випадок, коли $n = 1$. В такому разі внаслідок теореми 2.4 ([39], гл. 6 §2) множина всіх функцій $f \in L_p$, які задовольняють умову $K_1(\delta, f)_p = O(\delta^\alpha)$, $\delta \to 0+$, $\alpha \in (0,1)$, збігається з класом Ліпшиця

$$\mathrm{Lip}(\alpha, L_p) = \Big\{ f \in L_p \,:\, \omega(f,\delta)_p := \sup_{|h| \le \delta} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_p = O(\delta^\alpha),\ \delta \to 0+ \Big\}.$$

Наслідок 4.1.3 . *Нехай $f \in L_p$, $1 \le p \le \infty$, $r \in \mathbb{N}$ і $0 < \alpha < 1$. Наступні співвідношення еквівалентні:*

1) $\|f - A_{\varrho,r}(f)\|_p = O\left((1-\varrho)^{r-1+\alpha}\right), \quad \varrho \to 1-;$
2) $f^{[r-1]} \in \mathrm{Lip}(\alpha, L_p)$.

4.1.3. Допоміжні твердження. Перед доведенням теорем 4.1.1 та 4.1.2 встановимо низку допоміжних тверджень.

Для довільної функції $f \in L_p$, $1 \le p \le \infty$, $0 \le \varrho < 1$ і $r = 0, 1, 2, \ldots$ позначимо

$$M_p(\varrho, f, r) := \varrho^r \Big\| \frac{\partial^r f(\varrho, \cdot)}{\partial \varrho^r} \Big\|_p = \Big\| (f(\varrho, \cdot))^{[r]}(\cdot) \Big\|_p. \tag{4.15}$$

Лема 4.1.2 . *Нехай $f \in L_p$, $1 \le p \le \infty$. Тоді для будь-яких чисел $n \in \mathbb{N}$ та $\varrho \in [1/2, 1)$ має місце співвідношення*

$$\frac{1}{2n!}(1-\varrho)^n M_p(\varrho, f, n) \le K_n(1-\varrho, f)_p \le$$
$$\le \|f - A_{\varrho,n}(f)\|_{L_p} + \frac{4^n - 1}{3}(1-\varrho)^n M_p(\sqrt{\varrho}, f, n).$$

Доведення. Спочатку зазначимо, що твердження леми 4.1.2 є тривіальним у випадку, коли f є тригонометричним поліномом порядку не вище $n-1$, тобто, коли $f(x) = \sum_{|k| \le n-1} \widehat{f}(k) e^{ikx}$, а також у випадку, коли $\varrho = 0$. Тому надалі в доведенні ці два випадки виключаємо.

Нехай функція g така, що $g^{[n]} \in L_p$. Оскільки

$$\frac{1-\varrho^2}{|1 - e^{i(x-t)}\varrho|^2} = \frac{1}{1 - e^{i(x-t)}\varrho} + \frac{1}{1 - e^{-i(x-t)}\varrho} - 1,$$

то внаслідок (4.2) для довільних чисел $\varrho \in [0,1)$ і $x \in [0, 2\pi]$ маємо

$$\frac{\partial^n f(\varrho, x)}{\partial \varrho^n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(t) - g(t)) \frac{\partial^n}{\partial \varrho^n} \left(\frac{1-\varrho^2}{|1 - e^{i(x-t)}\varrho|^2} \right) dt + \frac{\partial^n g(\varrho, x)}{\partial \varrho^n} =$$

$$= \frac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(t)-g(t))\left(\frac{e^{ir(x-t)}}{(1-e^{i(x-t)}\varrho)^{n+1}}+\frac{e^{-ir(x-t)}}{(1-e^{-i(x-t)}\varrho)^{n+1}}\right)dt+\frac{\partial^n g(\varrho,x)}{\partial\varrho^n}=$$

$$=\frac{n!}{\pi}\int_0^{2\pi}(f(t)-g(t))\,\mathrm{Re}\,\frac{e^{ir(x-t)}}{(1-e^{i(x-t)}\varrho)^{n+1}}dt+\frac{\partial^n g(\varrho,x)}{\partial\varrho^n}.$$

Звідси, зробивши заміну змінних інтегрування, за інтегральною нерівністю Мінковського отримуємо оцінку

$$\left\|\frac{\partial^n f(\varrho,\cdot)}{\partial\varrho^n}\right\|_{L_p}\le\frac{n!}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{|1-\varrho e^{it}|^{n+1}}\|f-g\|_{L_p}+\left\|\frac{\partial^n g(\varrho,\cdot)}{\partial\varrho^n}\right\|_{L_p}\le$$

$$\le\frac{2n!}{(1-\varrho)^n}\|f-g\|_{L_p}+\left\|\frac{\partial^n g(\varrho,\cdot)}{\partial\varrho^n}\right\|_{L_p}.$$

З огляду на співвідношення (4.8), (4.15) і нерівність $\|g^{[n]}(\varrho,\cdot)\|_{L_p}\le\|g^{[n]}\|_{L_p}$ бачимо, що для будь-якого $\varrho\in(0,1)$,

$$\frac{1}{2n!}(1-\varrho)^n M_p(\varrho,f,n)\le\|f-g\|_{L_p}+(1-\varrho)^n\left\|g^{[n]}\right\|_{L_p}.$$

Розглядаючи інфімум по всіх функціях g, для яких $g^{[n]}\in L_p$, робимо висновок, що

$$\frac{1}{2n!}(1-\varrho)^n M_p(\varrho,f,n)\le K_n(1-\varrho,f)_p\,.$$

З іншого боку, з означення K–функціоналу випливає

$$K_n(1-\varrho,f)_p\le\|f-A_{\varrho,n}(f)\|_{L_p}+(1-\varrho)^n\left\|\left(A_{\varrho,n}(f)\right)^{[n]}\right\|_{L_p}. \tag{4.16}$$

На підставі (4.3) та (4.8) маємо

$$(A_{\varrho,n}(f))^{[n]}(x)=\Bigg(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(f(\varrho,\cdot))^{[k]}(\cdot)}{\varrho^k k!}(1-\varrho)^k\Bigg)^{[n]}(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{((f(\varrho,\cdot))^{[k]}(\cdot))^{[n]}(x)}{\varrho^k k!}(1-\varrho)^k.$$

Оскільки для довільних натуральних k та n

$$((f(\varrho,\cdot))^{[n]}(\cdot))^{[k]}(x)=((f(\varrho,\cdot))^{[k]}(\cdot))^{[n]}(x), \tag{4.17}$$

то

$$(A_{\varrho,n}(f))^{[n]}(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{((f(\varrho,\cdot))^{[n]}(\cdot))^{[k]}(x)}{\varrho^k k!}(1-\varrho)^k.$$

Звідси

$$\|(A_{\varrho,n}(f))^{[n]}\|_{L_p}\le\sum_{k=0}^{r-1}\frac{\|((f(\varrho,\cdot))^{[n]}(\cdot))^{[k]}\|_{L_p}}{\varrho^k k!}(1-\varrho)^k. \tag{4.18}$$

З означення інтегралу Пуассона випливає, що для будь-яких $k = 0, 1, \ldots, r-1$

$$((f(\varrho,\cdot))^{[n]}(\cdot))^{[k]}(x) = \Big(\sum_{|j|\geq n} \frac{|j|!}{(|j|-n)!}\widehat{f}_j \varrho^{\frac{|j|}{2}} e^{ijx} \varrho^{\frac{|j|}{2}}\Big)^{[k]}(x) =$$

$$= \Big(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} (f(\sqrt{\varrho},\cdot))^{[n]}(t) P(\sqrt{\varrho}, t-\cdot)dt\Big)^{[k]}(x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} (f(\sqrt{\varrho},\cdot))^{[n]}(t) \sum_{|\nu|\geq k} \frac{|\nu|!}{(|\nu|-k)!}\varrho^{\frac{|\nu|}{2}} e^{i\nu(t-x)}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} (f(\sqrt{\varrho},\cdot))^{[n]}(t+x) \sum_{|\nu|\geq k} \frac{|\nu|!}{(|\nu|-k)!}\varrho^{\frac{|\nu|}{2}} e^{i\nu t}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} (f(\sqrt{\varrho},\cdot))^{[n]}(t+x) \Big(\tau^k \frac{\partial^k}{\partial \tau^k} P(\tau,t)\Big)\Big|_{\tau=\sqrt{\varrho}} dt.$$

Використовуючи інтегральну нерівність Мінковського, при $k = 0$ отримаємо

$$\|((f(\varrho,\cdot))^{[n]}(\cdot))^{[k]}\|_{L_p} = \|(f(\varrho,\cdot))^{[n]}\|_{L_p} \leq$$

$$\leq M_p(\sqrt{\varrho}, f, n)\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |P(\sqrt{\varrho},t)|dt = M_p(\sqrt{\varrho}, f, n). \tag{4.19}$$

Якщо ж $k = 1, 2, \ldots$, то

$$\frac{\partial^k}{\partial \tau^k} P(\tau,t) = \frac{\partial^k}{\partial \tau^k}\Big(\frac{1}{1-\tau e^{it}} + \frac{\tau e^{-it}}{1-\tau e^{-it}}\Big) = \frac{k!\, e^{ikt}}{(1-\tau e^{it})^{k+1}} + \frac{k!\, e^{-ikt}}{(1-\tau e^{-it})^{k+1}}.$$

Звідси аналогічно випливає

$$\|(f^{[n]}(\varrho,\cdot))^{[k]}\|_{L_p} \leq M_p(\sqrt{\varrho}, f, n)\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \Big|\Big(\tau^k \frac{\partial^k}{\partial \tau^k} P(\tau,t)\Big)\Big|_{\tau=\sqrt{\varrho}}\Big| dt \leq$$

$$\leq 2k!\, M_p(\sqrt{\varrho}, f, n)\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{|1-\sqrt{\varrho}e^{it}|^{k+1}} \leq M_p(\sqrt{\varrho}, f, n)\frac{2^k k!}{(1-\varrho)^k} \tag{4.20}$$

Об'єднуючи співвідношення (4.18)–(4.20), бачимо, що при всіх $\varrho \in [1/2, 1)$

$$\|(A_{\varrho,n}(f))^{[n]}\|_{L_p} \leq M_p(\sqrt{\varrho}, f, n) + M_p(\sqrt{\varrho}, f, n)\sum_{k=1}^{n-1} 4^k = M_p(\sqrt{\varrho}, f, n)\frac{4^n-1}{3}. \tag{4.21}$$

На підставі (4.21) та (4.16) робимо висновок, що

$$K_n\left(1-\varrho,f\right)_p \le \|f-A_{\varrho,n}(f)\|_{L_p}+\frac{4^n-1}{3}(1-\varrho)^n M_p(\sqrt{\varrho},f,n).$$

В наступному твердженні йдеться про нерівність типу Бернштейна для радіальних похідних вищих порядків $(A_{\varrho,r}(f))^{[r]}$.

Лема 4.1.3 . *Нехай $r\in\mathbb{N}$, $1\le p\le\infty$ і $\varrho\in[1/2,1)$. Тоді для довільної функції $f\in L_p$ має місце нерівність*

$$\|(A_{\varrho,r}(f))^{[r]}\|_{L_p}\le C_r\frac{\|f\|_{L_p}}{(1-\varrho)^r}, \tag{4.22}$$

де величина C_r залежить тільки від r.

Зазначимо, що для голоморфних функцій аналогічну нерівність було отримано в роботі [120].

Доведення. На підставі (4.8) для довільної функції $f\in L_p$ і всіх $x\in[0,2\pi]$ маємо

$$(f(\varrho,\cdot))^{[r]}(x)=\frac{\varrho^r}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\frac{\partial^r}{\partial\varrho^r}\left(\frac{1-\varrho^2}{|1-e^{i(x-t)}\varrho|^2}\right)dt=$$

$$=\frac{r!\varrho^r}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\left(\frac{e^{ir(x-t)}}{(1-e^{i(x-t)}\varrho)^{r+1}}+\frac{e^{-ir(x-t)}}{(1-e^{-i(x-t)}\varrho)^{r+1}}\right)dt=$$

$$=\frac{r!\varrho^r}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\,\mathrm{Re}\,\frac{e^{ir(x-t)}}{(1-e^{i(x-t)}\varrho)^{r+1}}dt.$$

Зробивши заміну змінних інтегрування, за інтегральною нерівністю Мінковського отримуємо

$$M_p\left(\varrho,f,r\right)\le\frac{r!}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{|1-\varrho e^{it}|^{r+1}}\|f\|_{L_p}\le\frac{2r!}{(1-\varrho)^r}\|f\|_{L_p}. \tag{4.23}$$

Об'єднуючи останнє співвідношення і співвідношення (4.21) при $n=r$, робимо висновок, що

$$\|(A_{\varrho,r}(f))^{[r]}\|_{L_p}\le M_p(\sqrt{\varrho},f,r)\frac{4^r-1}{3}\le\frac{2r!(4^r-1)}{3(1-\sqrt{\varrho})^r}\|f\|_{L_p}\le\frac{r!(2^{3r+1}-2^{r+1})}{3}\cdot\frac{\|f\|_{L_p}}{(1-\varrho)^r}.$$

Лема 4.1.4 . *Нехай $r\in\mathbb{N}$ і $0\le\varrho<1$. Тоді для довільної функції $f\in L_p$, $1\le p\le\infty$, такої, що*

$$\int_\varrho^1\left\|\frac{\partial^r f(\zeta,\cdot)}{\partial\zeta^r}\right\|_{L_p}(1-\zeta)^{r-1}d\zeta<\infty \tag{4.24}$$

і майже всіх $x \in [-\pi, \pi]$ справджується рівність

$$f(x) - A_{\varrho,r}(f)(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_{\varrho}^{1} \frac{\partial^r f(\zeta, x)}{\partial \zeta^r} (1-\zeta)^{r-1} d\zeta. \qquad (4.25)$$

Доведення. При фіксованих $r \in \mathbb{N}$ та $0 \le \varrho < 1$ інтеграл в правій частині (4.25) визначає деяку функцію $F(x)$. З огляду на (4.24) і інтегральну нерівність Мінковського бачимо, що функція F належить простору L_p. Знайдемо коефіцієнти Фур'є функції F і порівняємо їх з коефіцієнтами Фур'є функції $G := f - A_{\varrho,r}(f)$. Оскільки при будь-яких $r \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\partial^r f(\zeta, x)}{\partial \zeta^r} = \sum_{|k| \ge r} \frac{|k|!}{(|k|-r)!} \widehat{f}(k) \zeta^{|k|-r} e^{ikx},$$

то коефіцієнти Фур'є $\widehat{F}(k) = 0$ при $|k| < r$. Якщо ж $|k| \ge r$, то використовуючи метод інтегрування частинами переконуємось, що

$$\widehat{F}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(t) e^{-ikt} dt = \widehat{f}(k) \sum_{j=r}^{|k|} \binom{|k|}{j} (1-\varrho)^j \varrho^{|k|-j} \qquad (4.26)$$

З іншого боку, коефіцієнти Фур'є $\widehat{G}(k)$ функції G дорівнюють нулю при $|k| < r$. Якщо ж $|k| \ge r$, то з огляду на рівність

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-\varrho)^j \varrho^{k-j} = ((1-\varrho) + \varrho)^k = 1, \ k = 0, 1, \ldots, \qquad (4.27)$$

бачимо, що

$$\widehat{G}(k) = (1 - \lambda_{|k|,r}(\varrho)) \widehat{f}(k) = \widehat{f}(k) \sum_{j=r}^{|k|} \binom{|k|}{j} (1-\varrho)^j \varrho^{|k|-j}.$$

Таким чином, при всіх $k \in \mathbb{Z}$ маємо $\widehat{F}(k) = \widehat{G}(k)$, і тому при майже всіх $x \in [-\pi, \pi]$ виконується співвідношення (4.25).

4.1.4. Доведення теореми 4.1.1. Нехай функція f така, що $f^{[r-n]} \in L_p$ і виконується співвідношення (4.13). Застосуємо першу нерівність в лемі 4.1.2 до функції $f^{[r-n]}$. З огляду на (4.8) та (4.15) отримаємо

$$\frac{1}{2n!} (1-\varrho)^n M_p(\varrho, f, r) \le K_n \left(1 - \varrho, f^{[r-n]}\right)_p.$$

Звідси випливає

$$M_p(\varrho, f, r) \le C\frac{\omega(1-\varrho)}{(1-\varrho)^n}, \quad \varrho \to 1-. \tag{4.28}$$

Використовуючи співвідношення (4.15), (4.28) та ($\mathscr{L}$) і застосовуючи інтегральну нерівність Мінковського, будемо мати

$$\int_\varrho^1 \left\| \frac{\partial^r f(\zeta, \cdot)}{\partial \zeta^r} \right\|_{L_p} (1-\zeta)^{r-1} d\zeta \le \int_\varrho^1 M_p(\zeta, f, r) \frac{(1-\zeta)^{r-1}}{\zeta^r} d\zeta$$

$$\le 2^r C(1-\varrho)^{r-n} \int_\varrho^1 \frac{\omega(1-\zeta)}{1-\zeta} d\zeta = O\left((1-\varrho)^{r-n}\omega(1-\varrho)\right), \quad \varrho \to 1-. \tag{4.29}$$

Тому внаслідок леми 4.1.4 при майже всіх $x \in [-\pi, \pi]$, виконується співвідношення (4.25). Тоді використовуючи (4.25), інтегральну нерівність Мінковського і оцінку (4.29), отримаємо (4.14):

$$\|f - A_{\varrho,r}(f)\|_{L_p} \le \frac{1}{(r-1)!} \int_\varrho^1 M_p(\zeta, f, r) \frac{(1-\zeta)^{r-1}}{\zeta^r} d\zeta =$$

$$= O\left((1-\varrho)^{r-n}\omega(1-\varrho)\right), \quad \varrho \to 1-.$$

4.1.5. Доведення теореми 4.1.2. Перед усім зазначимо, що для довільної функції $f \in L_p$ і будь-яких фіксованих чисел $s, r \in \mathbb{N}$ та $\varrho \in (0,1)$ виконується співвідношення

$$\left\|A^{[s]}_{\varrho,r}(f)\right\|_{L_p} = \left\| \sum_{|k|\ge s} \frac{|k|!}{(|k|-s)!} \omega_{|k|}(\varrho) \widehat{f}(k) e^{ikt} \right\|_{L_p} \le 2r\|f\|_{L_p} \Bigg(C + \sum_{k \ge \max\{s,r\}} q^k k^{s+r-1}\Bigg) < \infty,$$

де $0 < q = \max\{1-\varrho, \varrho\} < 1$.

Введено такі позначення: $\varrho_k := 1 - 2^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$, і $A_k := A_k(f) := A_{\varrho_k, r}(f)$. Для будь-яких $x \in [0, 2\pi]$ і $s \in \mathbb{N}$ розглянемо ряд

$$A^{[s]}_0(f)(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (A^{[s]}_k(f)(x) - A^{[s]}_{k-1}(f)(x)). \tag{4.30}$$

З означення операторів $A_{\varrho,r}$ випливає, що для будь-яких $\varrho_1, \varrho_2 \in [0,1)$ і $r \in \mathbb{N}$,

$$A_{\varrho_1,r}\left(A_{\varrho_2,r}(f)\right) = A_{\varrho_2,r}\left(A_{\varrho_1,r}(f)\right).$$

На підставі леми 4.1.3 і співвідношення (4.14) для будь-яких $k \in \mathbb{N}$ і $s \in \mathbb{N}$ маємо

$$\left\|A^{[s]}_k - A^{[s]}_{k-1}\right\|_{L_p} = \left\|A^{[s]}_k(f - A_{k-1}(f)) - A^{[s]}_{k-1}(f - A_k(f))\right\|_{L_p} \le$$

$$\leq \left\|A_k^{[s]}(f - A_{k-1}(f))\right\|_{L_p} + \left\|A_{k-1}^{[s]}(f - A_k(f))\right\|_{L_p} \leq$$

$$\leq C_s \frac{\|f - A_{k-1}(f)\|_{L_p}}{(1-\varrho_k)^s} + C_s \frac{\|f - A_k(f)\|_{L_p}}{(1-\varrho_{k-1})^s}$$

$$= O\left(\frac{\omega(1-\varrho_{k-1})}{(1-\varrho_k)^{s-r+n}}\right) + O\left(\frac{\omega(1-\varrho_k)}{(1-\varrho_{k-1})^{s-r+n}}\right), \quad k \to +\infty. \tag{4.31}$$

Таким чином, для довільного $s \leq r - n$,

$$\left\|A_k^{[s]} - A_{k-1}^{[s]}\right\|_{L_p} = O\left(\omega(1-\varrho_{k-1})\right) = O\Big(\omega\Big(2^{-(k-1)}\Big)\Big), \quad k \to +\infty. \tag{4.32}$$

Розглянемо суму $\sum_{k=1}^{N} \omega(2^{-(k-1)})$, $N \in \mathbb{N}$. Враховуючи монотонність функції ω і умову $(\mathscr{Z})$, бачимо, що для всіх $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{N} \omega(2^{-(k-1)}) \leq \omega(1) + \int_1^N \omega(2^{-(t-1)})dt =$$

$$= \omega(1) + \frac{1}{\ln 2}\int_{2^{-N+1}}^{1} \frac{\omega(\tau)}{\tau} d\tau \leq C\omega(1) < \infty \tag{4.33}$$

Об'єднуючи співвідношення (4.32) та (4.33), робимо висновок, що при всіх $s \leq r-n$ ряд в (4.30) збігається в метриці простору L_p, $1 \leq p \leq \infty$. Тому на підставі відомої теореми Банаха–Алаоглу для довільного $s = 0, 1, \ldots, r-n$ існує підпослідовність

$$S_{N_j}^{[s]}(x) = A_0^{[s]}(f)(x) + \sum_{k=1}^{N_j} (A_k^{[s]}(f)(x) - A_{k-1}^{[s]}(f)(x)), \quad j = 1, 2, \ldots \tag{4.34}$$

частинних сум цього ряду, яка збігається до деякої функції $g \in L_p$ майже скрізь на $[0, 2\pi]$ при $j \to +\infty$.

Покажемо, що майже скрізь на $[0, 2\pi]$ має місце рівність $g = f^{[s]}$. Для цього знайдемо коефіцієнти Фур'є функції g. При будь-якому фіксованому $k \in \mathbb{Z}$ і всіх $j = 1, 2, \ldots$ маємо

$$\widehat{g}(k) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_{N_j}^{[s]}(t) e^{-ikt} dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (g(t) - S_{N_j}^{[s]}(t)) e^{-ikt} dt.$$

Оскільки послідовність $\{S_{N_j}^{[s]}\}_{j=1}^{\infty}$ збігається майже скрізь на $[0, 2\pi]$ до функції g, то другий інтеграл в правій частині останньої рівності прямує до нуля при $j \to +\infty$. З огляду на співвідношення (4.34) та означення радіальної похідної робимо висновок, що перший інтеграл дорівнює нулю при $|k| < s$, а якщо $|k| \geq s$, то

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_{N_j}^{[s]}(t) e^{-ikt} dt = \lambda_{|k|,r}(1 - 2^{-N_j}) \frac{|k|!}{(|k|-s)!} \widehat{f}(k) \underset{j \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{|k|!}{(|k|-s)!} \widehat{f}(k).$$

Таким чином, рівність $g= f^{[s]}$ доведено. Отже, для функції f при всіх $s=0,1,\ldots,r-n$ існує похідна $f^{[s]}$ і ця похідна $f^{[s]}\in L_p$.

Далі, доведено оцінку (4.28). На підставі (4.15) та (4.31) для довільних $k\in\mathbb{N}$ та $\varrho\in(0,1)$ маємо

$$M_p\left(\varrho, A_k-A_{k-1},r\right)\le \left\|A_k^{[r]}-A_{k-1}^{[r]}\right\|_{L_p}=O\left(\frac{\omega(1-\varrho_{k-1})}{(1-\varrho_k)^n}\right)+O\left(\frac{\omega(1-\varrho_k)}{(1-\varrho_{k-1})^n}\right)=$$

$$=O\left(2^{kn}\omega(2^{-k+1})+2^{(k-1)n}\omega(2^{-k})\right)=O\left(2^{(k-1)n}\omega(2^{-(k-1)})\right),\quad k\to+\infty. \qquad (4.35)$$

Тоді внаслідок (4.23) та (4.14) при будь-яких $r\in\mathbb{N}$, $\varrho\in(0,1)$ і $x\in[0,2\pi]$

$$M_p\left(\varrho, f-A_{\varrho,r}(f),r\right)\le 2r!\frac{\|f-A_{\varrho,r}(f)\|_p}{(1-\varrho)^r}=O\left(\frac{\omega(1-\varrho)}{(1-\varrho)^n}\right),\quad \varrho\to 1-.$$

Тому для довільного натурального N

$$M_p\left(\varrho_N, f-A_N(f),r\right)=O\left(\frac{\omega(1-\varrho_N)}{(1-\varrho_N)^n}\right)=O\left(2^{Nn}\omega(2^{-N})\right),\ N\to+\infty. \qquad (4.36)$$

Розглянемо суму $\sum_{k=1}^N 2^{(k-1)n}\omega(2^{-(k-1)})$, $N\in\mathbb{N}$. Оскільки функція ω задовольняє умову $(\mathscr{Z}_n)$, то функція $\omega(t)/t^n$ майже спадає на $(0,1]$ (див, наприклад, [5]). Звідси

$$C_1\sum_{k=1}^N 2^{(k-1)n}\omega(2^{-(k-1)})\le 2^{(N-1)n}\omega(2^{-(N-1)})+\int_1^N 2^{(t-1)n}\omega(2^{-(t-1)})dt$$

$$\le 2^{(N-1)n}\omega(2^{-(N-1)})+\frac{1}{\ln 2}\int_{2^{-N+1}}^1 \omega(\tau)/\tau^{n+1}d\tau\le C_2 2^{(N-1)n}\omega(2^{-(N-1)}). \qquad (4.37)$$

Покладаючи $\varrho=\varrho_N$ і враховуючи співвідношення (4.35), (4.36), (4.37) та

$$A_0(x)=S_{r-1}(f)(x)=\sum_{|k|\le r-1}\widehat{f}(k)e^{ikx},$$

отримуємо

$$M_p\left(\varrho_N,f,r\right)=M_p\left(\varrho_N,f-S_{r-1}(f),r\right)=M_p\Big(\varrho_N,f-A_{\varrho_N}+\sum_{k=1}^N(A_k-A_{k-1}),r\Big)$$

$$=O\Big(\sum_{k=1}^N 2^{(k-1)n}\omega(2^{-(k-1)})\Big)=O\left(2^{Nn}\omega(2^{-N})\right)=O\left(\frac{\omega(1-\varrho_N)}{(1-\varrho_N)^n}\right),\ N\to+\infty. \qquad (4.38)$$

Якщо функція ω задовольняє умову $(\mathscr{Z}_n)$, то при всіх $t\in[0,1]$ $\omega(2t)\le C\omega(t)$ (див, наприклад, [5]). Крім цього, при всіх $\varrho\in[\varrho_{N-1},\varrho_N]$, we have $1-\varrho_N\le 1-\varrho\le 2(1-\varrho_N)$. Таким чином, із співвідношення (4.38) випливає оцінка (4.28).

Застосуємо тепер другу нерівність в лемі 4.1.2 до функції $f^{[r-n]}$, отримаємо

$$K_n\left(1-\varrho,f^{[r-n]}\right)_p\le\|f^{[r-n]}-A_{\varrho,n}(f^{[r-n]})\|_{L_p}+\frac{4^n-1}{3}(1-\varrho)^nM_p(\sqrt{\varrho},f,r).\quad(4.39)$$

З огляду на співвідношення (4.15) та (4.28) бачимо, що при $\varrho\in[1/2,1)$,

$$\int_\varrho^1\left\|\frac{\partial^nf^{[r-n]}(\zeta,\cdot)}{\partial\zeta^n}\right\|_{L_p}(1-\zeta)^{n-1}d\zeta=\int_\varrho^1\left\|(f(\zeta,\cdot))^{[r]}(x)\right\|_{L_p}\frac{(1-\zeta)^{n-1}}{\zeta^n}d\zeta=$$

$$=\int_\varrho^1M_p\left(\zeta,f,r\right)\frac{(1-\zeta)^{n-1}}{\zeta^n}d\zeta\le 2^nC\int_\varrho^1\frac{\omega(1-\zeta)}{1-\zeta}d\zeta=O\left(\omega(1-\varrho)\right),\quad\varrho\to1-.\quad(4.40)$$

Отже, до функції $f^{[r-n]}$ можна застосувати лему 4.1.4. Із (4.15) випливає

$$f^{[r-n]}(x)-A_{\varrho,n}(f^{[r-n]})(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_\varrho^1(f(\zeta,\cdot))^{[r]}(x)\frac{(1-\zeta)^{n-1}}{\zeta^n}d\zeta.$$

На підставі інтегральної нерівності Мінковського і співвідношення (4.40) маємо

$$\|f^{[r-n]}-A_{\varrho,n}(f^{[r-n]})\|_{L_p}\le$$

$$\le\frac{1}{(n-1)!}\int_\varrho^1M_p\left(\zeta,f,r\right)\frac{(1-\zeta)^{n-1}}{\zeta^n}d\zeta=O\left(\omega(1-\varrho)\right),\quad\varrho\to1-.\quad(4.41)$$

Об'єднуючи співвідношення (4.39), (4.28) та (4.41), отримуємо необхідну оцінку (4.13).

4.2 Наближення лінійними методами функцій з просторів S^p

В даному підрозділі продовжуються дослідження апроксимативних властивостей лінійних операторів, які породжуються послідовністю чисел $\lambda_{k,r}(\varrho)$ вигляду (1.146). Зокрема, у просторах $S^p=S^p(\mathbb{T}^d)$ (озн. див. підрозділ 1.2), вивчаються апроксимативні властивості операторів $A^{\triangle}_{\varrho,r}$ (а також операторів $P^{\triangle}_{\varrho,s}$), що породжують відповідні лінійні методи підсумовування по трикутних областях кратних рядів Фур'є. В термінах похибок наближення цими операторами в просторі $S^p(\mathbb{T}^d)$ дається конструктивна характеристика класів функцій, узагальнені похідні яких належать множинам S^pH_ω.

4.2.1. Позначення та постановка задачі. Нехай f — довільна функція з простору $L_1(\mathbb{T}^d)$. Покладемо

$$H_\nu(f)(\mathbf{x}) := \sum_{|\mathbf{k}|_1=\nu} \widehat{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}, \quad \nu \in \mathbb{N},$$

де, як і раніше, $\widehat{f}(\mathbf{k})$ — коефіцієнти Фур'є, $|\mathbf{k}|_1 := \sum_{j=1}^d |k_j|$. Тоді ряд Фур'є функції f має вигляд

$$S[f](\mathbf{x}) := \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{x},\mathbf{k})} = \sum_{\nu=0}^{\infty} H_\nu(f)(\mathbf{x}).$$

Виходячи з останньої рівності, розглянемо лінійні оператори $S_n^\triangle$, $\sigma_n^\triangle$, $P_{\varrho,s}^\triangle$ і $A_{\varrho,r}^\triangle$, визначені на $L_1(\mathbb{T}^d)$ відповідно рівностями

$$S_n^\triangle(f)(\mathbf{x}) = \sum_{\nu=0}^{n} H_\nu(f)(\mathbf{x}),\ n = 0, 1, \ldots,$$

$$\sigma_n^\triangle(f)(\mathbf{x}) = \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n} S_\nu^\triangle(f)(\mathbf{x}) = \sum_{\nu=0}^{n}\left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right) H_\nu(f)(\mathbf{x}),\ n \in \mathbb{N},$$

$$P_{\varrho,s}^\triangle(f)(\mathbf{x}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varrho^{\nu^s} H_\nu(f)(\mathbf{x}), \quad s > 0,\ \varrho \in [0,1),$$

і

$$A_{\varrho,r}^\triangle(f)(\mathbf{x}) = S_{r-1}^\triangle(f)(\mathbf{x}) + \sum_{\nu=r}^{\infty} \lambda_{\nu,r} H_\nu(f)(\mathbf{x}), \tag{4.42}$$

де

$$\lambda_{\nu,r} := \lambda_{\nu,r}(\varrho) := \sum_{k=0}^{r-1} \binom{\nu}{k} (1-\varrho)^k \varrho^{\nu-k} = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(1-\varrho)^k}{k!}\ \frac{d^k}{d\varrho^k}\varrho^\nu, \quad r \in \mathbb{N},\ \varrho \in [0,1).$$

Вирази $S_n^\triangle(f)(\mathbf{x})$, $\sigma_n^\triangle(f)(\mathbf{x})$ і $P_{\varrho,s}^\triangle(f)(\mathbf{x})$ називаються відповідно трикутною частинною сумою ряду Фур'є, трикутною сумою Фейєра і узагальненою трикутною сумою Абеля–Пуассона функції f. Вираз $A_{\varrho,r}^\triangle(f)(\mathbf{x})$ називають трикутною сумою Тейлора–Абеля–Пуассона функції f.

Зазначимо, що означення оператора $A_{\varrho,r}^\triangle$ є коректним тому, що

$$\sum_{k=0}^{r-1} \binom{\nu}{k} (1-\varrho)^k \varrho^{\nu-k} \le r q^\nu \nu^{r-1},\ \text{де } q = \max\{1-\varrho, \varrho\},$$

і отже, для будь-якої функції $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$ при $0 < \varrho < 1$ ряд в правій частині (4.42) мажорується збіжним рядом

$$r \sum_{\nu=r}^{\infty} q^\nu \nu^{r-1} \sum_{|\mathbf{k}|_1=\nu} |\widehat{f}(\mathbf{k})|.$$

Нагадаємо, що інтегралом Пуассона функції $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$ називається функція $P(f)$, визначена в $[0,1)^d \times \mathbb{R}^d$ рівністю

$$f(\boldsymbol{\varrho}, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x}+\mathbf{t}) P(\boldsymbol{\varrho}, \mathbf{t}) d\mathbf{t},$$

де

$$P(\boldsymbol{\varrho}, \mathbf{t}) := \prod_{j=1}^{d} \frac{1-\varrho_j^2}{1-2\varrho_j \cos t_j + \varrho_j^2}, \ \ \varrho_j \in [0,1),$$

— кратне ядро Пуассона і $\mathbf{x}+\mathbf{t} := (x_1+t_1, \ldots, x_d+t_d)$.

Надалі домовимось під виразом $f(\varrho, \mathbf{x})$ розуміти інтеграл Пуассона, в якому $\boldsymbol{\varrho}$ — це вектор з однаковими координатами, тобто $\boldsymbol{\varrho} = (\varrho, \ldots, \varrho)$.

Для функції $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$, виходячи з розкладу ядра Пуассона в ряд за степенями ϱ, її інтеграл Пуассона $f(\varrho, \mathbf{x})$, при $\varrho \in [0,1)$, можемо записати у вигляді

$$f(\varrho, \mathbf{x}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varrho^{\nu} H_{\nu}(f)(\mathbf{x}).$$

Сума ряду в правій частині цієї рівності збігається з сумою Абеля–Пуассона ряду $\sum_{\nu=0}^{\infty} H_{\nu}(f)(\mathbf{x})$, або, що те ж саме, з сумою $P^{\triangle}_{\varrho,1}(f)(\mathbf{x})$. При $\mathbf{x} = \mathbf{0} := (0, \ldots, 0)$ суму цього ряду спрощено позначимо $F(\varrho)$ і розглянемо її як функцію змінної ϱ. Зрозуміло, що функція F є аналітичною на піввідрізку $[0,1)$. Тому в околі точки $\varrho \in [0,1)$ для функції F справджується формула Тейлора, за якою

$$F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(\varrho)}{k!} (t-\varrho)^k.$$

За допомогою безпосереднього обчислення переконуємося у тому, що частинна сума цього ряду порядку $r-1$ при $t=1$ збігається з сумою $A^{\triangle}_{\varrho,r}(f)(\mathbf{0})$. Зокрема, при $r=1$ дістанемо $F(\varrho) = A^{\triangle}_{\varrho,1}(f)(\mathbf{0}) = P^{\triangle}_{\varrho,1}(f)(\mathbf{0})$.

Отже, суму $A^{\triangle}_{\varrho,r}(f)(\mathbf{0})$, з одного боку, можна тлумачити як суму Тейлора порядку $r-1$ функції F, а з другого, при $r=1$, — як суму Абеля–Пуассона.

В даному підрозділі вивчаються оператори $A^{\triangle}_{\varrho,r}$ і $P^{\triangle}_{\varrho,s}$ як лінійних методів наближення функцій в просторах S^p. При цьому основна увага звертається на зв'язок апроксимативних властивостей сум $A^{\triangle}_{\varrho,r}(f)$ і $P^{\triangle}_{\varrho,s}(f)$ із диференціальними властивостями функції f, а саме, властивостями похідних, означених в такий спосіб.

Нехай $\psi = \{\psi(\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ – кратна числова послідовність, члени якої не всі дорівнюють нулеві і

$$\mathscr{Z}(\psi) := \mathscr{Z}^d(\psi) := \left\{ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d : \psi(\mathbf{k}) = 0 \right\}.$$

Надалі вважаємо, що множина $\mathscr{Z}(\psi)$ має скінченну кількість елементів.

Якщо для даної функції $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$ знайдеться функція $g \in L_1(\mathbb{T}^d)$ така, що

$$S[f](\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathscr{Z}(\psi)} \widehat{f}(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})} + \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \psi(\mathbf{k})\widehat{g}(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}, \tag{4.43}$$

то кажуть, що у функції f існує ψ-похідна g, для якої використовують позначення $g = f^{\psi}$. При цьому, якщо $\mathscr{Z}(\psi) = \varnothing$, то перша сума в (4.43) покладається рівною нулеві.

Зрозуміло, що ψ-похідна для функцій з простору S^p є єдиною з точністю до суми $\sum_{\mathbf{k}\in\mathscr{Z}(\psi)} a_{\mathbf{k}}e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}$, де $a_{\mathbf{k}}$ — будь-які числа.

Дане означення ψ-похідної пристосоване для потреб досліджень, викладених у цій статті, і за суттю не відрізняється від усталеного поняття ψ-похідної О. І. Степанця [144] (гл. XI, §2), [141].

В цій роботі розглядаються ψ-похідні функцій з $L_1(\mathbb{T}^d)$ в таких двох випадках:

$$1) \quad \psi(\mathbf{k}) = \nu^{-r}, \text{ якщо } |\mathbf{k}|_1 = \nu,\ \nu = 0, 1, \ldots,\ r \geq 0;$$

$$2) \quad \psi(\mathbf{k}) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } |\mathbf{k}|_1 = 0, 1, \ldots, r-1, \\ \dfrac{(\nu - r)!}{\nu!}, & \text{якщо } |\mathbf{k}|_1 = \nu,\ \nu \geq r,\ r \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

При цьому у першому випадку для ψ-похідної функції f використовуємо позначення $f^{(r)}$, у другому — $f^{[r]}$, а при $r = 0$ покладаємо $f^{(0)} = f^{[0]} = f$.

Нехай $\varrho \in [0, 1)$, тоді

$$f^{[r]}(\varrho, \mathbf{x}) = \varrho^r \frac{\partial^r}{\partial \varrho^r} f(\varrho, \mathbf{x}), \tag{4.44}$$

і внаслідок відомої теореми про радіальні граничні значення інтеграла Пуассона (див., наприклад, [117, с. 27]), для майже всіх $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$

$$f^{[r]}(\mathbf{x}) = \lim_{\varrho\to 1-} \frac{\partial^r}{\partial \varrho^r} f(\varrho, \mathbf{x}). \tag{4.45}$$

Відмітимо також, що $f^{(1)} = f^{[1]}$.

Оператори $P^{\triangle}_{\varrho,s}$ в загальному випадку, як агрегати наближення функцій однієї змінної, мабуть, вперше розглядалися в [16, 17]. В частинному ж випадку, коли $r = s = 1$, оператори $A^{\triangle}_{\varrho,1}$ та $P^{\triangle}_{\varrho,1}$ збігаються між собою і породжують метод Абеля–Пуассона підсумовування кратних рядів Фур'є по трикутних областях. Задача про наближення сумами Абеля–Пуассона 2π-періодичних функцій як однієї, так і багатьох змінних має багату історію з великою кількістю визначних результатів, огляд яких потребує написання окремої статті. Тут згадаємо лише монографії [6, 57, 58, 21], в яких викладено основоположні результати з цієї тематики.

4.2.2. Основні результати. У формулюванні основних результатів домовимося про такі позначення. Нехай $\mathbb{Z}_+^d := \mathbb{R}_+^d \cap \mathbb{Z}^d$, $\mathbb{Z}_-^d := \left\{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d : k_j < 0, j = 1, \ldots, d\right\}$, $Y := \mathbb{Z}_+^d \cup \mathbb{Z}_-^d$, і

$$L_{p,Y} := L_{p,Y}(\mathbb{T}^d) := \left\{ f \in L_p(\mathbb{T}^d) : \widehat{f}(\mathbf{k}) = 0 \;\forall\; \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d \setminus Y \right\}.$$

Нехай ω — довільна фіксована функція, визначена на відрізку $[0,1]$. Для довільного простору X, під яким розуміємо один із просторів L_p, S^p або C, покладемо

$$XH_\omega := \left\{ f : f \in X,\ \|f - f_h\|_X = O(\omega(|h|)),\ |h| \to 0 \right\},$$

де $f_h(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x} + h),\ \mathbf{x} + h := (x_1 + h, \ldots, x_d + h),\ h \in \mathbb{R}^1$.

Надалі будемо розглядати функції $\omega(t)$, $0 \le t \le 1$, які задовольняють наступні умови 1)–4):

1) $\omega(t)$ неперервна на $[0,1]$;

2) $\omega(t) \uparrow$;

3) $\omega(t) \neq 0$ для довільних $t \in (0,1]$;

4) $\omega(t) \to 0$ при $t \to 0$;

а також відому умову

($\mathscr{B}$): $\displaystyle\sum_{v=n+1}^{\infty} \frac{1}{v}\,\omega\Big(\frac{1}{v}\Big) = O\Big[\omega\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big]$ (див., наприклад, [5]).

Твердження 4.2.1 . *Нехай $1 \le p < \infty$, $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$, $d \in \mathbb{N}$ і ω — довільна функція, яка задовольняє умови 1)–4) та ($\mathscr{B}$). Наступні твердження рівносильні:*

1) $\left\| S_n^{\triangle}\left(f^{[1]}\right) \right\|_{S^p} = O(n\omega(\frac{1}{n})), \quad n \to \infty;$

2) $\left\| f - \sigma_n^{\triangle}(f) \right\|_{S^p} = O(\omega(\frac{1}{n})), \quad n \to \infty.$

Крім цього, якщо виконується одне із тверджень 1)–3), то

3) $f \in S^p H_\omega$.

Якщо ж $f \in L_{1,Y}(\mathbb{T}^d)$, то всі твердження 1)–4) є еквівалентними.

Дамо декілька коментарів до твердження 4.2.1.

Передусім зазначимо, що імплікація 2) $\Rightarrow$ 3) є твердженням типу прямих та обернених теорем для методу Фейєра [21].

Для даного $\alpha \in (0,1]$ і простору X, під яким розуміється один з просторів L_p, S^p чи C, покладемо

$$\mathrm{Lip}(\alpha, X) := \left\{ f : f \in X,\ \|f - f_h\|_X = O(1)|h|^\alpha,\ |h| \to 0 \right\},$$

де $f_h(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}+h),\ \mathbf{x}+h := (x_1+h,\dots,x_d+h),\ h\in\mathbb{R}^1$.

В роботах [83–90] Ф. Моріц досліджував умови абсолютної збіжності рядів Фур'є функцій однієї та багатьох змінних. Зокрема, в [83] автор отримав умови абсолютної збіжності рядів Фур'є функцій однієї змінної, а також умови належності таких функцій класам $\mathrm{Lip}(\alpha, C)$, які означаються в термінах оцінок швидкості зростання частинних сум Фур'є їх похідних. В [87] подібні результати отримано для функцій багатьох змінних в термінах прямокутних частинних сум Фур'є їх змішаних похідних. Твердження 4.2.1 тісно пов'язане з цими результатами в наступний спосіб:

У випадку, коли $d=1$, $p=1$ та $\omega(t)=t^\alpha$, іплікація 1) $\Rightarrow$ 3) збігається з твердженням (i) теореми 1 [83]. У випадку, коли $d>1$, різниця імплікації 1) $\Rightarrow$ 3) від аналогічного результату роботи [87] полягає в тому, що в даному підрозділі розглядаються трикутні частинні суми Фур'є.

В наступній теоремі даються прямі та обернені теореми наближення функцій оператором $A^{\triangle}_{\varrho,r}$ в просторі S^p в термінах мажорант ω.

Теорема 4.2.1 . *Нехай* $1\le p<\infty$, $r\in\mathbb{N}$, $f\in L_1(\mathbb{T}^d)$, $d\in\mathbb{N}$ *і* ω *— довільна функція, яка задовольняє умови 1)–4) та* $(\mathscr{B})$. *Наступні твердження рівносильні:*

1) $\|f-A^{\triangle}_{\varrho,r}(f)\|_{S^p} = O((1-\varrho)^{r-1}\omega(1-\varrho)),\quad \varrho\to 1-$;

2) $\left\|P(f^{[r]})(\varrho,\cdot)\right\|_{S^p} = O(\frac{\omega(1-\varrho)}{1-\varrho}),\quad \varrho\to 1-$;

Крім цього, якщо виконується одне із тверджень 1) чи 2), то

3) $f^{[r-1]}\in S^pH_\omega$.

Якщо ж $f\in L_{1,Y}(\mathbb{T}^d)$, *то всі твердження 1)–3) є еквівалентними.*

Зазначимо, що імплікація 2) $\Rightarrow$ 3) є твердженням типу теорем Гарді–Літтлвуда [182].

Розглянемо тепер апроксимативні властивості сум $P^{\triangle}_{\varrho,s}(f)$ в просторі S^p.

Покажемо, що

$$\|f-P^{\triangle}_{\varrho,s}(f)\|^p_{S^p} \sim \|f^{(s-1)}-P^{\triangle}_{\varrho,1}(f^{(s-1)})\|^p_{S^p},\quad \varrho\to 1-\,. \tag{4.46}$$

Для цього покладемо

$$a_\nu := \|H_\nu(f)\|_{S^p},\quad \nu=0,1,\dots.$$

Тоді

$$\|f-P^{\triangle}_{\varrho,s}(f)\|^p_{S^p} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\varrho^{\nu^s}\right)^p a^p_\nu.$$

Оскільки

$$\lim_{\varrho\to 1-}\frac{1-\varrho^{\nu^s}}{1-\varrho} = \nu^s,\quad \nu\in\mathbb{N},\ s\ge 1,$$

то

$$\lim_{\varrho\to 1-}\frac{\|f-P^{\triangle}_{\varrho,s}(f)\|^p_{S^p}}{\|f^{(s-1)}-P^{\triangle}_{\varrho,1}(f^{(s-1)})\|^p_{S^p}}=\lim_{\varrho\to 1-}\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}a^p_\nu\dfrac{(1-\varrho^{\nu^s})^p}{(1-\varrho)^p}}{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}a^p_\nu\nu^{p(s-1)}\dfrac{(1-\varrho^{\nu})^p}{(1-\varrho)^p}}=\frac{\|f^{(s)}\|^p_{S^p}}{\|f^{(s)}\|^p_{S^p}}=1,$$

що й доводить (4.46).

Легко бачити, що

$$P^{\triangle}_{\varrho,1}(f)(\mathbf{x})=A^{\triangle}_{\varrho,1}(f)(\mathbf{x}).$$

Тому, застосувавши теорему 4.2.1 до функції $f=g^{(s-1)}$ зі значенням параметра $r=1$ і врахувавши співвідношення (4.46), одержимо таке твердження.

Теорема 4.2.2 . *Нехай* $1\le p<\infty$, $s\in\mathbb{N}$, $f\in L_1(\mathbb{T}^d)$, $d\in\mathbb{N}$ *і* ω *— довільна функція, яка задовольняє умови 1)–4) та* $(\mathscr{B})$. *Наступні твердження рівносильні:*

1) $\|f-P^{\triangle}_{\varrho,s}(f)\|_{S^p}=O(\omega(1-\varrho))$, $\quad\varrho\to 1-$;

2) $\left\|P(f^{(s)})(\varrho,\cdot)\right\|_{S^p}=O(\frac{\omega(1-\varrho)}{1-\varrho})$, $\quad\varrho\to 1-$;

Крім цього, якщо виконується одне із тверджень 1) чи 2), то

3) $f^{(s-1)}\in S^pH_\omega$.

Якщо ж $f\in L_{1,Y}(\mathbb{T}^d)$, *то всі твердження 1)–3) є еквівалентними.*

Зауваження 4.2.1 . При $d=1$ простір $L_{1,Y}(\mathbb{T}^1)$ збігається з простором $L_1(\mathbb{T}^1)$ і тому твердження 1)–3) в твердженні 4.2.1 і теоремах 4.2.1 та 4.2.2 є рівносильними без жодних застережень.

Розглянемо окремо випадок, коли $\omega(t)=t^\alpha$, $\alpha>0$. В цьому випадку, мають місце такі твердження.

Теорема 4.2.1′. *Нехай* $1\le p<\infty$, $0<\alpha\le 1$, $r\in\mathbb{N}$ *і* $f\in L_1(\mathbb{T}^d)$, $d\in\mathbb{N}$. *Наступні твердження рівносильні:*

1) $\|f-A^{\triangle}_{\varrho,r}(f)\|_{S^p}=O(1)(1-\varrho)^{r+\alpha-1}$, $\quad\varrho\to 1-$;

2) $\left\|P(f^{[r]})(\varrho,\cdot)\right\|_{S^p}=O(1)(1-\varrho)^{\alpha-1}$, $\quad\varrho\to 1-$;

3) $\left\|S^{\triangle}_n\left(f^{[r]}\right)\right\|_{S^p}=O(1)n^{1-\alpha}$, $\quad n\to\infty$;

4) $\left\|f^{[r-1]}-\sigma^{\triangle}_n\left(f^{[r-1]}\right)\right\|_{S^p}=O(1)n^{-\alpha}$, $\quad n\to\infty$;

5) $\left\|S^{\triangle}_n\left(f^{[r-1]}\right)-\sigma^{\triangle}_n\left(f^{[r-1]}\right)\right\|_{S^p}=O(1)n^{-\alpha}$, $\quad n\to\infty$;

Крім цього, якщо виконується одне із тверджень 1)–5), то

6) $f^{[r-1]}\in\mathrm{Lip}(\alpha,S^p)$.

Якщо ж $f\in L_{1,Y}(\mathbb{T}^d)$, *то всі твердження 1)–6) є еквівалентними.*

Теорема 4.2.2′. *Нехай* $1 \le p < \infty$, $0 < \alpha \le 1$, $s \ge 1$ *і* $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$, $d \in \mathbb{N}$. *Наступні твердження рівносильні:*

1) $\|f - P^{\triangle}_{\varrho,s}(f)\|_{S^p} = O(1)(1-\varrho)^{\alpha}, \quad \varrho \to 1-;$

2) $\left\|P(f^{(s)})(\varrho,\cdot)\right\|_{S^p} = O(1)(1-\varrho)^{\alpha-1}, \quad \varrho \to 1-;$

3) $\left\|S^{\triangle}_n\left(f^{(s)}\right)\right\|_{S^p} = O(1)n^{1-\alpha}, \quad n \to \infty;$

4) $\left\|f^{(s-1)} - \sigma^{\triangle}_n\left(f^{(s-1)}\right)\right\|_{S^p} = O(1)n^{-\alpha}, \quad n \to \infty;$

5) $\left\|S^{\triangle}_n\left(f^{(s-1)}\right) - \sigma^{\triangle}_n\left(f^{(s-1)}\right)\right\|_{S^p} = O(1)n^{-\alpha}, \quad n \to \infty;$

Крім цього, якщо виконується одне із тверджень 1)–5), то

6) $f^{(s-1)} \in \mathrm{Lip}(\alpha, S^p)$.

Якщо ж $f \in L_{1,Y}(\mathbb{T}^d)$, *то всі твердження 1)–6) є еквівалентними.*

Результати, що містяться в теоремах 4.2.1–4.2.2′, примикають до результатів Г. Г. Лоренца [75]. Тут звернемо увагу на деякі факти, які випливають з результатів зазначеної роботи і теорем 4.2.1′ та 4.2.2′.

В наступних твердженнях $d = 1$ і тому символ $\triangle$ в записах операторів $A^{\triangle}_{\varrho,r}$ і $P^{\triangle}_{\varrho,s}$ будемо опускати як непотрібний.

Наслідок 4.2.1 . *Нехай* $0 < \alpha < 1/2$, $1 \le p < 2/(2\alpha+1)$ *і* $r \in \mathbb{N}$. *Якщо* f *— функція, для якої* $f^{[r]} \in \mathrm{Lip}(\alpha, C)$, *то*

$$\|f - A_{\varrho,r}(f)\|_{S^p} = O(1)(1-\varrho)^{r+\alpha+1/2-1/p}, \quad \varrho \to 1- \,. \tag{4.47}$$

Якщо ж $f^{(r)} \in \mathrm{Lip}(\alpha, C)$, *то*

$$\|f - P_{\varrho,r}(f)\|_{S^p} = O(1)(1-\varrho)^{\alpha+3/2-1/p}, \quad \varrho \to 1- \,.$$

Справді, в [75, с. 137] показано, що за умов наслідку 4.2.1 має місце співвідношення

$$\left\|S_n(f^{[r]})\right\|_{S^p} = O(1)n^{1/p-\alpha-1/2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

а згідно з теоремою 4.2.1′ звідси отримаємо (4.47). Аналогічно доводиться твердження для $P_{\varrho,r}(f)$.

Зауваження 4.2.2 . Із наслідку 4.2.2 та теореми 4.2.1′ випливає, що при будь-яких $\alpha \in (0, 1/2)$ та $p \in [1, 2/(2\alpha+1))$ виконується включення $\mathrm{Lip}(\alpha, C) \subset \mathrm{Lip}(\alpha + 3/2 - 1/p, S^p)$.

Наслідок 4.2.2 . *Нехай* $0 < \alpha \le 1$, $1 < p \le 2$, $p' = p/(p-1)$ *і* $r \in \mathbb{N}$. *Якщо* f *— функція, для якої* $f^{[r-1]} \in \mathrm{Lip}(\alpha, L_p)$, *то*

$$\|f - A_{\varrho,r}(f)\|_{S^{p'}} = O(1)(1-\varrho)^{r+\alpha-1}, \quad \varrho \to 1- . \tag{4.48}$$

Якщо ж $f^{(r-1)} \in \mathrm{Lip}(\alpha, L_p)$, *то*

$$\|f - P_{\varrho,r}(f)\|_{S^{p'}} = O(1)(1-\varrho)^{\alpha}, \quad \varrho \to 1- .$$

Справді, за теоремою Гаусдорфа–Юнга (див., наприклад, [167, с. 16]) для довільного $1 < p \le 2$

$$\|g\|_{S^{p'}} \le \|g\|_{L_p} \quad \forall\, g \in L_p.$$

Отже, якщо $f^{[r-1]} \in \mathrm{Lip}(\alpha, L_p)$, то $f^{[r-1]} \in \mathrm{Lip}(\alpha, S^{p'})$. Тому співвідношення (4.48) справджується згідно з теоремою $4.2.1'$.

4.2.3. Доведення результатів підрозділу 4.2.2.

Доведення твердження 4.2.1. 1) $\Rightarrow$ 2). Покладемо $a_\nu = \|H_\nu(f)\|_{S^p}$, $\nu = 0, 1, \ldots$. Тоді

$$\left\|f - \sigma_n^{\triangle}(f)\right\|_{S^p}^p = \frac{1}{(n+1)^p}\sum_{\nu=1}^{n}(\nu a_\nu)^p + \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{1}{\nu^p}(\nu a_\nu)^p. \tag{4.49}$$

Для довільного фіксованого натурального $N > n$, застосовуючи до останньої суми в даному виразі перетворення Абеля

$$\frac{1}{(n+1)^p}\sum_{\nu=1}^{n}(\nu a_\nu)^p + \sum_{\nu=n+1}^{N}\frac{1}{\nu^p}(\nu a_\nu)^p,$$

отримаємо

$$\frac{1}{(n+1)^p}\sum_{\nu=1}^{n}(\nu a_\nu)^p + \sum_{\nu=n+1}^{N}\frac{1}{\nu^p}(\nu a_\nu)^p = \frac{1}{(n+1)^p}\sum_{\nu=1}^{n}(\nu a_\nu)^p - \frac{1}{n^p}\sum_{\nu=1}^{n}(\nu a_\nu)^p + \frac{1}{N^p}\sum_{k=1}^{N}(k a_k)^p +$$

$$+\sum_{\nu=n+1}^{N}\left(\frac{1}{(\nu-1)^p} - \frac{1}{\nu^p}\right)\sum_{k=1}^{\nu-1}(k a_k)^p \le p\sum_{\nu=n}^{N}\frac{1}{\nu^{p+1}}\left\|S_\nu^{\triangle}(f^{[1]})\right\|_{S^p}^p + \frac{1}{N^p}\sum_{k=1}^{N}(k a_k)^p. \tag{4.50}$$

Внаслідок твердження 1) остання сума в цьому співвідношенні прямує до нуля при $N \to \infty$. Оскільки функція ω задовольняє умову $(\mathscr{B})$, то для довлільного N

$$\sum_{\nu=n}^{N}\frac{1}{\nu^{p+1}}\left\|S_\nu^{\triangle}(f^{[1]})\right\|_{S^p}^p \le O(1)\sum_{\nu=n}^{\infty}\frac{\omega^p(1/\nu)}{\nu} = O(\omega^p(1/\nu)), \quad n \to \infty. \tag{4.51}$$

Об'єднуючи співвідношення (4.49)–(4.51), робимо висновок, що дійсно справджується твердження 2).

2) $\Rightarrow$ 1). Маємо

$$\left\|S_n^{\triangle}\left(f^{[1]}\right)\right\|_{S^p}=\sum_{\nu=1}^{n}(\nu a_\nu)^p\le(n+1)^p\left\|f-\sigma_n^{\triangle}(f)\right\|_{S^p}^p=O(n\omega(1/n)),\ n\to\infty.$$

Таким чином, якщо справджується одне із тверджень 1) чи 2), то справджуються і інше твердження. Крім цього, оскільки $\omega(t)\to 0$ при $t\to 0$, то з твердження 2) випливає, що $f\in S^p$. Покладаючи $n=1/[h],\ h>0$, отримуємо

$$\|f-f_h\|_{S^p}^p=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu^p|1-e^{i\nu h}|^p=2^p\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu^p\left|\sin\frac{\nu h}{2}\right|^p\le\sum_{\nu=1}^{n-1}a_\nu^p\left|2\sin\frac{\nu}{2n}\right|^p+2^p\sum_{\nu=n}^{\infty}a_\nu^p\le$$

$$\le\frac{2^p}{n^p}\sum_{\nu=1}^{n-1}(\nu a_\nu)^p+2^p\sum_{\nu=n}^{\infty}a_\nu^p=2^p\left\|f-\sigma_{n-1}^{\triangle}(f)\right\|_{S^p}^p=O(\omega^p(1/n))=O(\omega^p(h)),\quad n\to\infty,$$

і тому $f\in S^pH_\omega$.

Для завершення доведення твердження 4.2.1 достатньо переконатися, що коли $f\in L_{1,Y}(\mathbb{T}^d)$, то має місце імплікація 3) $\Rightarrow$ 1).

Покладаючи $h_n:=\pi/n,\ n\in\mathbb{N}$, внаслідок нерівності $\nu h_n\le\pi\sin(\nu h_n/2)$, яка виконується для всіх $\nu=1,2,\ldots,n$, отримуємо

$$\|S_n^{\triangle}(f^{[1]})\|_{S^p}^p=\sum_{\nu=1}^{n}\nu^pa_\nu^p\le\frac{1}{h_n^p}\sum_{\nu=1}^{n}(\nu h_n)^pa_\nu^p\le\frac{\pi}{h_n^p}\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu^p\left|\sin\frac{\nu h_n}{2}\right|^p\le$$

$$\le\frac{\pi}{h_n^p}\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu^p\left|\sin\frac{\nu h_n}{2}\right|^p=O\Big(\frac{\omega(h_n)}{h_n}\Big)=O(n\omega(1/n)),\quad n\to\infty.$$

Тврердження 4.2.1 доведено.

Доведення теореми 4.2.1. Вище показано, що теорема 4.2.2 випливає з теореми 4.2.1. Тому залишається довести істинність останньої.

1) $\Rightarrow$ 2). Нехай, як і раніше, $a_\nu:=\|H_\nu(f)\|_{S^p},\ \nu=0,1,\ldots.$ Тоді

$$\|f\|_{S^p}=\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\|H_\nu(f)\|_{S^p}^p\right)^{1/p}=\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu^p\right)^{1/p}.$$

Внаслідок рівності (4.27)

$$\|f-A_{\varrho,r}^{\triangle}(f)\|_{S^p}^p=\sum_{\nu=r}^{\infty}|1-\lambda_{\nu,r}(\varrho)|^pa_\nu^p=\sum_{\nu=r}^{\infty}\left(\sum_{k=r}^{\nu}\binom{\nu}{k}(1-\varrho)^k\varrho^{\nu-k}\right)^pa_\nu^p\ge$$

$$\geq (1-\varrho)^{rp}\sum_{\nu=r}^{\infty}\binom{\nu}{r}^p \varrho^{(\nu-r)p}a_\nu^p.$$

З іншого боку

$$\frac{1}{(r!)^p}\left\|\frac{\partial^r}{\partial\varrho^r}P(f)(\varrho,\cdot)\right\|_{S^p}^p=\sum_{\nu=r}^{\infty}\binom{\nu}{r}^p a_\nu^p\varrho^{(\nu-r)p}.$$

На підставі цих нерівностей та рівності (4.44), бачимо, що при $\varrho\to 1-$,

$$\left\|P(f^{[r]})(\varrho,\cdot)\right\|_{S^p}\leq r!(1-\varrho)^{-r}\|f-A_{\varrho,r}^{\triangle}(f)\|_{S^p}=O\Big(\frac{\omega(1-\varrho)}{1-\varrho}\Big).$$

Далі, для довільних чисел $n>r$ та $\varrho\in[0,1)$,

$$\frac{1}{(r!)^p}\left\|\frac{\partial^r}{\partial\varrho^r}P(f)(\varrho,\cdot)\right\|_{S^p}^p=\sum_{\nu=r}^{\infty}\binom{\nu}{r}^p a_\nu^p\varrho^{(\nu-r)p}\geq$$

$$\geq\varrho^{(n-r)p}\sum_{\nu=r}^{n}\binom{\nu}{r}^p a_\nu^p=\varrho^{(n-r)p}\frac{1}{(r!)^p}\left\|S_n^{\triangle}\left(f^{[r]}\right)\right\|_{S^p}^p.$$

З останнього співвідношення, покладаючи $\varrho=1-1/n$ і беручи до уваги умову 2), робимо висновок, що

$$\left\|S_n^{\triangle}\left(f^{[r]}\right)\right\|_{S^p}\leq O(1)\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\frac{\omega(1/n)}{1/n}=O(n\omega(1/n)),\ \text{as}\ n\to\infty.$$

Тому якщо справджується одне із тверджень 1) чи 2), то для функції $g=f^{[r-1]}$ виконується також твердження 1) з твердження 4.2.1:

$$\left\|S_n^{\triangle}\left(g^{[1]}\right)\right\|_{S^p}=O(n\omega(1/n)),\quad n\to\infty. \tag{4.52}$$

На підставі твердження 4.2.1 робимо висновок, що

$$\left\|g-\sigma_n^{\triangle}(g)\right\|_{S^p}=\left\|f^{[r-1]}-\sigma_n^{\triangle}\left(f^{[r-1]}\right)\right\|_{S^p}=O(\omega(1/n)),\quad n\to\infty, \tag{4.53}$$

і функція $g=f^{[r-1]}$, а також функція f (внаслідок означення похідної $f^{[r-1]}$) належать множині S^pH_ω.

Переконаємось в істинності імплікації 2) $\Rightarrow$ 1).

З рівності (4.27) випливає, що для будь-якого $\varrho\in[0,1]$,

$$\sum_{k=r}^{\nu}\binom{\nu}{k}(1-\varrho)^k\varrho^{\nu-k}\leq 1,\quad \nu\geq r.$$

Звідси

$$\|f - A^{\triangle}_{\varrho,r}(f)\|^p_{S^p} = \sum_{\nu=r}^{\infty} \left(\sum_{k=r}^{\nu} \binom{\nu}{k} (1-\varrho)^k \varrho^{\nu-k} \right)^p a_\nu^p \le \|f\|^p_{S^p} < \infty,$$

З останнього співвідношення робимо висновок, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує такий номер n_0, що при всіх $n > n_0$ та $\varrho \in [0, 1)$,

$$\|f - A^{\triangle}_{\varrho,r}(f)\|^p_{S^p} = \sum_{\nu=r}^{n} \left(\sum_{k=r}^{\nu} \binom{\nu}{k} (1-\varrho)^k \varrho^{\nu-k} \right)^p a_\nu^p + \varepsilon. \tag{4.54}$$

Покажемо тепер, що при всіх $\nu \ge r$ справджується нерівність

$$\sum_{k=r}^{\nu} \binom{\nu}{k} (1-\varrho)^k \varrho^{\nu-k} \le \binom{\nu}{k} (1-\varrho)^r \quad \forall\ \varrho \in [0, 1]. \tag{4.55}$$

Покладаючи $m = \nu - r$ і

$$c_k = \frac{\binom{\nu}{k+r}}{\binom{\nu}{r}}, \quad k = 0, 1, \ldots, m,$$

бачимо, що нерівність (4.55) виконується тоді і лише тоді, коли

$$\sum_{k=0}^{m} c_k (1-\varrho)^k \varrho^{m-k} \le 1 \quad \forall\ \varrho \in [0, 1].$$

Для перевірки останньої нерівності достатньо зазначити, що

$$c_k = \frac{\nu!}{(k+r)!(\nu-k-r)!} \cdot \frac{r!(\nu-r)!}{\nu!} \le \frac{(\nu-r)!}{k!(\nu-r-k)!} = \binom{m}{k}$$

і використати біноміальну формулу (див. (4.27)).

Таким чином, продовжуючи далі оцінку (4.54), із врахуванням (4.55), отримуємо

$$\|f - A^{\triangle}_{\varrho,r}(f)\|^p_{S^p} \le (1-\varrho)^{pr} \sum_{\nu=r}^{n} \binom{\nu}{k}^p a_\nu^p + \varepsilon = \frac{(1-\varrho)^{pr}}{(r!)^p} \|S^{\triangle}_n(f^{[r]})\|^p_{S^p} + \varepsilon \le$$

$$\le \frac{(1-\varrho)^{pr}(n+1)^p}{(r!)^p} \left\| f^{[r-1]} - \sigma^{\triangle}_n \left(f^{[r-1]} \right) \right\|^p_{S^p} + \varepsilon.$$

Покладемо в цих співвідношеннях $n = n_\varrho = [(1-\varrho)^{-1}]$, де $[\cdot]$ — ціла частина числа. Тоді з огляду на (4.53), отримаємо

$$\|f - A^{\triangle}_{\varrho,r}(f)\|^p_{S^p} = O(1)(1-\varrho)^{pr} n_\varrho^p \left\| f^{[r-1]} - \sigma^{\triangle}_{n_\varrho} \left(f^{[r-1]} \right) \right\|^p_{S^p} + \varepsilon =$$

$$= O(1)(1-\varrho)^{p(r-1)}\omega(1-\varrho)+\varepsilon.$$

при $\varrho \to 1-$. Внаслідок довільності ε з цього співвідношення випливає істинність імплікації 2) $\Rightarrow$ 1).

Таким чином, ми показали, що твердження 1) та 2) є еквівалентними. Крім цього, ми довели, що твердження 1) та 2) є еквівалентними до співвідношень (4.52) та (4.53).

Еквівалентність тверджень 1)–3) у випадку, коли $f \in L_{1,Y}(\mathbb{T}^d)$, випливає з твердження 4.2.1. Теорему 4.2.1 доведено.

Доведення теореми 4.2.1′. Теорема 4.2.2′ аналогічно випливає з теореми 4.2.1′. В теоремі 4.2.1′ рівносильність умов 1)–4), а також включення $f^{[r-1]} \in \mathrm{Lip}(\alpha, S^p)$ за їх виконання (або ж рівносильність всіх умов 1)–4) та 6) для функцій $f \in L_{1,Y}(\mathbb{T}^d)$) випливає із доведення теореми 4.2.1 для випадку, коли $\omega(t) = t^\alpha$, $\alpha > 0$. Тому достатньо довести такі імплікації: 4) $\Rightarrow$ 5) $\Rightarrow$ 3).

4) $\Rightarrow$ 5). Нехай $g = f^{[r-1]}$ і $b_\nu = \|H_\nu(g)\|_{S^p}$. Тоді

$$\left\|S_n^{\triangle}(g) - \sigma_n^{\triangle}(g)\right\|_{S^p} = \frac{1}{(n+1)^p}\sum_{\nu=1}^{n}(\nu b_\nu)^p \le \frac{1}{(n+1)^p}\sum_{\nu=1}^{n}(\nu b_\nu)^p + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} b_\nu^p =$$

$$= \left\|g - \sigma_n^{\triangle}(g)\right\|_{S^p}^p = O(1)n^{-p\alpha},\ n \to \infty.$$

5) $\Rightarrow$ 3). Маємо

$$\left\|S_n^{\triangle}\left(g^{[1]}\right)\right\|_{S^p} = \sum_{\nu=1}^{n}(\nu b_\nu)^p = (n+1)^p \left\|S_n^{\triangle}(g) - \sigma_n^{\triangle}(g)\right\|_{S^p}^p = O(1)n^{p(1-\alpha)},\ n \to \infty.$$

Теорему 4.2.1′ доведено.

4.3 Висновки до розділу 4

Досліджено апроксимаційні властивості операторів Тейлора-Абеля-Пуассона в просторах функцій однієї та багатьох змінних. Встановлено зв'язок даних операторів та інших відомих перетворень з робіт Р. Лейса і П. Л. Бутцера та Г. Суноучі, а також доведено прямі та обернені теореми наближення 2π-періодичних функцій операторами Тейлора-Абеля-Пуассона в термінах K–функціоналів функцій, породжених їх радіальними похідними. В термінах наближень даними операторами одержано конструктивну характеристику класів 2π-періодичних функцій, K-функціонали радіальних похідних яких не перевищують деякої мажоранти.

У просторах S^p функцій багатьох змінних встановлено прямі та обернені теореми наближення операторами Тейлора–Абеля–Пуассона $A^{\triangle}_{\varrho,r}$ та операторами $P^{\triangle}_{\varrho,s}$, що породжують відповідні лінійні методи підсумовування по трикутних областях кратних рядів Фур'є. В термінах похибок наближення цими операторами отримано конструктивну характеристику класів функцій, узагальнені похідні яких належать множинам $S^p H_\omega$.

Розділ 5

Наближення в просторах послідовностей

В даному розділі досліджуються задачі теорії наближень в лінійних дискретних просторах. Зокрема, в підрозділах 5.1 та 5.2 знайдено точні значення найкращих n-членних та найкращих наближень деяких множин образів лінійних операторів у дискретних просторах Орліча l_M та просторах $l_{\mathbf{p}}$ зі змінним показником підсумовування (означення просторів див. підрозділ 1.6). В підрозділі 5.3 розглядається питання насичення у просторах S^p_φ лінійних методів підсумовування рядів Фур'є, які задаються довільними послідовностями функцій, визначених на деякій підмножині простору $\mathbb{C}$. В підрозділі 5.4 встановлюються точні порядкові оцінки важливих нелінійних апроксимативних характеристик просторів S^p_φ. В підрозділах 5.6 та 5.7 отримано деякі нові нерівності типу Чебишова.

5.1 Апроксимативні характеристики діагональних операторів в дискретних просторах Орліча

5.1.1. Нехай $M(t)$, $t \geq 0$, — довільна функція Орліча, тобто, неспадна опукла функція така, що $M(0) = 0$ і $M(t) \to \infty$ при $t \to \infty$; нехай також l_M — дискретний простір Орліча, який визначається функцією $M(t)$.

Нехай, далі, $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — довільна послідовність додатних чисел, які задовольняють умову

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0, \tag{5.1}$$

і нехай

$$T : x = \{x_k\}_{k=1}^\infty \to Tx = \{\lambda_k x_k\}_{k=1}^\infty \tag{5.2}$$

— діагональний оператор на просторі послідовностей дійсних чисел.

5.1.2. Величини $\sigma_n(T : l_q \to l_M)$. Наслідуючи С. Б. Стєчкіна, для довільної послідовності $x \in l_M$ розглянемо величину $\sigma_n(x)_{l_M}$ її найкращого n-членного наближення, яка означається співвідношенням

$$\sigma_n(x)_{l_M} := \inf_{a_i,\gamma_n} \|x - P_{\gamma_n}\|_{l_M} = \inf_{a_i,\gamma_n} \Big\|x - \sum_{i\in\gamma_n} a_i e_i\Big\|_{l_M},$$

де γ_n — довільні набори із n натуральних чисел, a_i — будь-які дійсні числа.

Наступне твердження дає точні значення величин

$$\sigma_n(T : l_q \to l_M) := \sup_{x\in Bl_q} \sigma_n(Tx)_{l_M} \tag{5.3}$$

найкращих n-членних наближень в просторах l_M множини $T(B\,l_q)$ образів всіх елементів одиничної кулі $B\,l_q$ звичайного простору l_q під дією оператора T.

Очевидно, що значення величин $\sigma_n(T : l_q \to l_M)$ не залежать від перестановок векторів $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$. Тому надалі, не втрачаючи загальності, будемо вважати, що $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна незростаюча послідовність додатних чисел, що задовольняє умову (5.1).

Теорема 5.1.1 . *Нехай $0 < q < \infty$ — довільне додатне число і $M(t)$ — функція Орліча така, що функція $M(t^{1/q})$ також є функцією Орліча. Нехай також $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна незростаюча послідовність додатних чисел, яка задовольняє умову* (5.1). *Тоді для довільного $n \in \mathbb{N}$ має місце рівність*

$$\sigma_n(T : l_q \to l_M) = \sup_{s>n} \frac{\left(\sum_{k=1}^{s} \lambda_k^{-q}\right)^{-\frac{1}{q}}}{M^{-1}(\frac{1}{s-n})}, \tag{5.4}$$

де M^{-1} — функція, обернена до функції M. Точна верхня межа в правій частині (5.4) досягається при деякому скінченному значенні $s = s^*$. Точна верхня межа в правій частині (5.3) реалізується послідовністю x^*=$\{x_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ вигляду

$$x_k^* = \begin{cases} \left(\lambda_k^q \sum_{k=1}^{s^*} \lambda_k^{-q}\right)^{-\frac{1}{q}}, & k = 1, 2, \ldots, s^*, \\ 0, & k > s^* \end{cases} \tag{5.5}$$

Зазначимо, що у випадку, коли $M(t) = t^q$, $0 < q \le p < \infty$, твердження теореми 5.1.1 отримано О. І. Степанцем (див. твердження 1.6.2′). У випадку скінченно мірних просторів l_p^d при всіх $0 < p, q \leq \infty$ точні значення величин $\sigma_n(T : l_q^d \to l_p^d)$ були знайдені в [31].

При доведенні даної теореми будемо використовувати схему і деякі методи робіт [142], [144 (гл.XI)] та [153]. Спочатку встановимо таке допоміжне твердження.

Твердження 5.1.1 . *Нехай $M(t)$, $t \geq 0$, — довільна неспадна опукла внизу функція, $M(0) \leq 0$. Тоді для будь-яких чисел $t_2 > t_1 \geq 0$ та $A \geq B > 0$ має місце нерівність*

$$M(At_1) + M(Bt_2) \leq M(A(t_1 + t_2)). \tag{5.6}$$

Дійсно, оскільки функція $M(t)$ опукла і $M(0) \leq 0$, то для довільних чисел $\mu \in [0, 1]$ та $t \geq 0$,

$$M(\mu t) = M(\mu t + (1 - \mu) \cdot 0) \leq \mu M(t) + (1 - \mu)M(0) \leq \mu M(t). \tag{5.7}$$

Звідси маємо

$$M(t_1) + M(t_2) = M\Big((t_1 + t_2)\frac{t_1}{t_1 + t_2}\Big) + M\Big((t_1 + t_2)\frac{t_2}{t_1 + t_2}\Big) \leq$$

$$\frac{t_1}{t_1 + t_2}M(t_1 + t_2) + \frac{t_2}{t_1 + t_2}M(t_1 + t_2) = M(t_1 + t_2).$$

Тому, враховуючи неспадання функції $M(x)$ і нерівність $A(t_1 + t_2) \geq At_1 + Bt_2$, отримуємо (5.6):

$$M(A(t_1 + t_2)) \geq M(At_1 + Bt_2) \geq M(At_1) + M(Bt_2).$$

Покладаючи в нерівності (5.7) $\mu = u/t$, $u \leq t$, будемо мати

$$\frac{M(u)}{u} \leq \frac{M(t)}{t}, \quad u \leq t.$$

Звідси випливає, що функція $M(t)/t$, $t > 0$, не спадає

Зазначимо, що коли виконуються умови теореми 5.1.1, то внаслідок монотонності функції $M(t)/t^q$ для довільної послідовності $x \in B\, l_q$ і будь-якого додатного числа μ маємо $M(\mu|x_k|)/(\mu|x_k|)^q \leq M(\mu)/\mu^q$. Покладаючи $\mu = \lambda^* = \max\limits_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k$, отримуємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} M(\lambda_k|x_k|) \leq \sum_{k=1}^{\infty} M(\lambda^*|x_k|) \leq M(\lambda^*) \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^q \leq M(\lambda^*) < \infty.$$

Тому в такому випадку $Tx \in l_M$ і величини $\sigma_n(T : l_q \to l_M)$ мають зміст.

Доведення теореми 5.1.1. Оскільки для довільних $x \in l_M$, $\alpha > 0$, $a_i \in \mathbb{R}$ та набору γ_n,

$$\sum_{k\in\gamma_n} M(|x_k - a_i|/\alpha) + \sum_{k\notin\gamma_n} M(|x_k|/\alpha) \geq \sum_{k\notin\gamma_n} M(|x_k|/\alpha),$$

то для довільної послідовності $x \in l_M$

$$\inf_{a_i} \|x - \sum_{i\in\gamma_n} a_i e_i\|_{l_M} = \|x - S_{\gamma_n}(x)\|_{l_M} = \inf\Big\{\alpha > 0 : \sum_{k\notin\gamma_n} M(|x_k|/\alpha) \leq 1\Big\}, \qquad (5.8)$$

де $S_{\gamma_n}(x) = \sum_{k\in\gamma_n} x_k e_k$.

Звідси випливає, що для довільної послідовності $x \in l_M$

$$\sigma_n(x)_{l_M} = \inf_{\gamma_n} \|x - S_{\gamma_n}(x)\|_{l_M} = \inf_{\gamma_n} \inf\Big\{\alpha > 0 : \sum_{k\notin\gamma_n} M(|x_k|/\alpha) \leq 1\Big\}. \qquad (5.9)$$

При доведенні ми будемо звужувати множину всіх послідовностей $x \in B\,l_q$, для яких достатньо розглядати точні верхні межі величин $\sigma_n(Tx)_{l_M}$, щоб в результаті отриманти оцінку величини $\sigma_n(T : l_q \to l_M)$. Для цього ми будемо показувати, що для довільної послідовності x з множини $B\,l_q$ (або з деякої підмножини $B \subset B\,l_q$) існує така послідовність $y \in B\,l_q$ (або $y \in B$) (яка задовольняє деякі додаткові умови), що $\sigma_n(Tx)_{l_M} \leq \sigma_n(Ty)_{l_M}$.

Спочатку позначимо через B'_q множину всіх послідовностей $x \in B\,l_q$ невід'ємних чисел таких, що $\|x\|_{l_q} = 1$. Очевидно, що при знаходженні оцінки величини $\sigma_n(T : l_q \to l_M)$ достатньо обмежитися множиною set B'_q.

Справді, для довільної послідовності $x \in B\,l_q$, $x \neq \theta$, розглядаючи послідовність $x' = \{x'_k\}_{k=1}^{\infty}$, $x'_k = |x_k|/\|x\|_{l_q}$, бачимо, що $\|x'\|_{l_q} = 1$, а також для довільного $k \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $|x_k| \leq x'_k$. Тому $\sigma_n(Tx)_{l_M} \leq \sigma_n(Tx')_{l_M}$.

Далі, позначимо через B''_q множину всіх послідовностей $x \in B'_q$ таких, що $\lambda_1 x_1 \geq \lambda_2 x_2 \geq \ldots$. Переконаємось, що при відшуканні точної верхньої межі в (5.3) достатньо обмежитися множиною B''_q.

Дійсно, для довільної послідовності $x \in B'_q$ розглянемо послідовність $x''_k = \frac{\overline{\lambda_k x_k}}{\lambda_k}$, де $\overline{\lambda_k x_k}$ — незростаюча перестановка послідовності чисел $\lambda_k x_k$ (так як $\lambda_k x_k \to 0$ при $k \to \infty$, така перестановка завжди існує). Очевидно, що $\sigma_n(Tx)_{l_M} = \sigma_n(Tx'')_{l_M}$, і внаслідок теореми 368 монографії [183] маємо

$$\|x''\|_{l_q}^q = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\overline{\lambda_k x_k}}{\lambda_k}\right)^q \leq \sum_{k=1}^{\infty} x_k^q = 1,$$

тому $x'' \in B''_q$.

На підставі означення множини B''_q для довільної послідовності $x \in B''_q$ і будь-якого $\alpha > 0$ маємо $\sup\limits_{\gamma_n} \sum_{k \in \gamma_n} M(\lambda_k x_k/\alpha) = \sum_{k=1}^n M(\lambda_k x_k/\alpha)$ і тому

$$\sigma_n(Tx)_{l_M} = \inf\Big\{\alpha > 0 : \sum_{k=n+1}^{\infty} M(\lambda_k x_k/\alpha) \le 1\Big\}.$$

Звідси бачимо, що при відшуканні величин $\sigma_n(Tx)_{l_M}$ достатньо розглядати такі послідовності $x \in B''_q$, що при всіх $k \in [1, n+1]$ числа $\lambda_k x_k$ є однаковими.

Нехай тепер $\mathcal{M}$ — множина всіх послідовностей $m = \{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ невід'ємних чисел m_k таких, що $|m| := \sum_{k=1}^{\infty} m_k = 1$, а послідовність $\lambda_k m_k^{\frac{1}{q}}$ не зростає і при всіх $k \in [1, n+1]$ числа $\lambda_k m_k^{\frac{1}{q}}$ є однаковими. Тоді очевидно

$$\sigma_n(T : l_q \to l_M) = \sup_{m \in \mathcal{M}} \inf\Big\{\alpha > 0 : \sum_{k=n+1}^{\infty} M(\lambda_k m_k^{\frac{1}{q}}/\alpha) \le 1\Big\} =: \sup_{m \in \mathcal{M}} \mathscr{E}_n(m) =: \mathscr{E}_n.$$

Далі, позначимо через $\mathcal{M}'$ множину всіх послідовностей $m \in \mathcal{M}$, для кожної з яких існує такий номер k_m, що при всіх $k > k_m$, маємо $m_k = 0$. Покажемо, що для оцінки величини $\mathscr{E}_n$ достатньо обмежитися підмножиною $\mathcal{M}'$.

Дійсно, якщо дана послідовність $m \in \mathcal{M}$ не належить до множини $\mathcal{M}'$, то існує такий номер k_1, що $\lambda_{n+1} m_{n+1}^{\frac{1}{q}} > \lambda_{k_1} m_{k_1}^{\frac{1}{q}}$. Оскільки $\sum_{k=1}^{\infty} m_k = 1$, то існує такий номер k_m, що

$$\lambda_{n+1} m_{n+1}^{\frac{1}{q}} > \lambda_{k_1}\Big(m_{k_1} + \sum_{k=k_m+1}^{\infty} m_k\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Розглянемо послідовність $m' = \{m'_k\}_{k=1}^{\infty}$, для якої

$$m'_k = \begin{cases} m_k, & k \in [1, k_1 - 1] \cup [k_1 + 1, k_l], \\ m_{k_1} + \sum_{k=k_m+1}^{\infty} m_k, & k = k_1, \\ 0, & k > k_l. \end{cases}$$

Тоді очевидно, що $|m'| = |m| = 1$, $m' \in \mathcal{M}'$, і внаслідок твердження 5.1.1 маємо $\mathscr{E}_n(m) \le \mathscr{E}_n(m')$. Тому

$$\mathscr{E}_n = \sup_{m \in \mathcal{M}'} \mathscr{E}_n(m) = \sup_{m \in \mathcal{M}'} \inf\Big\{\alpha > 0 : F_n(m, \alpha) \le 1\Big\}$$

де

$$F_n(m, \alpha) := F_n(m, \lambda, \alpha, M) = \sum_{k=n+1}^{k_m} M(\lambda_k m_k^{\frac{1}{q}}/\alpha).$$

Покладемо $N(t) = M(t^{\frac{1}{q}})$, $p_k = \lambda_k^{-q}$, $a_k = \lambda_k^q m_k/\alpha^q$, де $k = 1, 2, \ldots, k_m$, і виберемо числа b_k так, що $b_k = 0$ при $k = 1, 2, \ldots, n$ і $b_k = \lambda_k^{-q}$ при $k = n+1, \ldots, k_m$. Тоді для оцінки величини $F_n(m, \alpha)$ ми можемо скористатися теоремою 5.7.1 з підрозділу 5.7. Отримаємо

$$F_n(m,\alpha) = \sum_{k=1}^{k_m} p_k b_k N(a_k) \le \max_{s\in[1,k_m]} \left\{ N\Big(\frac{\sum_{k=1}^{k_m} p_k a_k}{\sum_{k=1}^{s} p_k}\Big) \sum_{k=1}^{s} p_k b_k \right\} =$$

$$= \max_{s\in[1,k_m]} \left\{ N\Big(\frac{\sum_{k=1}^{k_m} m_k}{\alpha^p \sum_{k=1}^{s} \lambda_k^{-p}}\Big)(s-n) \right\} \le$$

$$\le \sup_{s>n} (s-n) M(\widetilde{\lambda}_s/\alpha), \text{ де } \quad \widetilde{\lambda}_s := \Big(\sum_{k=1}^{s} \lambda_k^{-p}\Big)^{-\frac{1}{p}}. \tag{5.10}$$

Оскільки числа λ_k спадають монотонно до нуля при $k \to \infty$, то з огляду на (5.7) і монотонність функції $M(t^{1/q})/t$ для довільного фіксованого $\alpha > 0$, маємо

$$\lim_{s\to\infty} (s-n) M(\widetilde{\lambda}_s/\alpha) = \lim_{s\to\infty} (s-n) M\Big(\frac{1}{\alpha}\big(\sum_{k=1}^{s} \lambda_k^{-q}\big)^{-\frac{1}{q}}\Big) \le K \lim_{s\to\infty} \lambda_{[s/2]} \frac{M(1/s^{1/q})}{1/s} = 0. \tag{5.11}$$

Звідси випливає, що для довільного фіксованого $\alpha > 0$, існує принаймні одне таке натуральне число s_α, що

$$\sup_{s>n} (s-n) M(\widetilde{\lambda}_s/\alpha) = (s_\alpha - n) M(\widetilde{\lambda}_{s_\alpha}/\alpha). \tag{5.12}$$

Для завершення доведення для довільної послідовності $m \in \mathcal{M}'$ покладемо

$$\alpha_m := \inf \Big\{ \alpha > 0 : F_n(m,\alpha) \le 1 \Big\},$$

і розглянемо послідовність $\bar{m} = \{\bar{m}_k\}_{k=1}^{\infty}$, для якої

$$\bar{m}_k = \begin{cases} \widetilde{\lambda}_s^q \lambda_k^{-q}, & k = 1, 2, \ldots, s, \\ 0, & k > s, \end{cases} \tag{5.13}$$

де $s = s_{\alpha_m}$, число s_{α_m} визначається співвідношенням (5.12) при $\alpha = \alpha_m$, а числа $\widetilde{\lambda}_s$ — в співвідношенні (5.10). Тоді очевидно, що $\bar{m} \in \mathcal{M}'$, і внаслідок (5.10) маємо $F_n(m, \alpha_m) \le F_n(\bar{m}, \alpha_m)$. Звідси $\mathscr{E}_n(m) \le \mathscr{E}_n(\bar{m})$.

Нарешті позначимо через $\bar{\mathcal{M}}$ — множину всіх послідовностей $\bar{m} \in \mathcal{M}'$ вигляду (5.13), де s, $s > n$ — довільні натуральні числа. Тоді має місце рівність

$$\mathscr{E}_n = \sup_{m\in\bar{\mathcal{M}}} \mathscr{E}_n(m) \tag{5.14}$$

На основі (5.13) та (5.14) одержуємо

$$\mathscr{E}_n = \sup_{s>n} \inf \Big\{ \alpha > 0 : (s-n) M(\widetilde{\lambda}_s/\alpha) \le 1 \Big\} = \sup_{s>n} \xi_s,$$

де

$$\xi_s := \Big(\sum_{k=1}^{s} \lambda_k^{-q} \Big)^{-\frac{1}{q}} / M^{-1}\big(1/(s-n)\big),$$

M^{-1} — функція, обернена до функції M. При цьому на підставі (5.11) бачимо, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує номер s_ε такий, що при всіх $s > s_\varepsilon$, величина $(s-n)M(\widetilde{\lambda}_s/\varepsilon) < 1$ і тому для всіх $s > s_\varepsilon$, $\xi_s < \varepsilon$. Звідси випливає, що завжди існує число s^*, для якого $\sup\limits_{s>n} \xi_s = \xi_{s^*}$.

Розглянемо послідовність $x^* = \{x_k^*\}_{k=1}^\infty$ вигляду (5.5). Легко бачити, що $x^* \in Bl_q$ і

$$\sigma_n(Tx^*)_{l_M} = \inf \left\{ \alpha > 0 : (s^* - n) M \Big(\big(\sum_{k=1}^{s^*} \lambda_k^{-q} \big)^{-\frac{1}{q}} / \alpha \Big) \le 1 \right\} = \xi_{s^*}.$$

Теорему доведено.

Дане твердження було опубліковано в спільній роботі [203]. В [203] також було знайдено низку інших апроксимативних характеристик просторів l_M. Для повноти викладу сформулюємо також ці результати, зазначивши, що основні етапи їх доведень належать С. О. Чайченку.

5.1.3. Найкращі наближення, базисні та колмогоровські поперечники в l_M. Нехай $M(t)$ і $N(t)$ — дві довільні функції Орліча, l_M та l_N — простори Орліча, які відповідають цим функціям, і $B\,l_M$ — одинична куля простору l_M. Для будь-якого фіксованого набору γ_n із n різних натуральних чисел розглянемо величину

$$E_{\gamma_n}(T : l_M \to l_N) := E_{\gamma_n}(T(B\,l_M), l_N) = \sup_{x \in B\,l_M} E_{\gamma_n}(Tx, l_N) = \sup_{x \in B\,l_M} \inf_{a_i} \|Tx - P_{\gamma_n}\|_{l_N}$$

найкращого наближення в просторі l_N множини $T(B\,l_M)$ за допомогою всіх можливих n-членних поліномів $P_{\gamma_n} = \sum_{i \in \gamma_n} a_i e_i$, що відповідають набору γ_n, a_i — довільні дійсні числа.

Зазначимо, що коли

$$0 < N(t) \le M(t), \quad t \in [0, 1], \tag{5.15}$$

а послідовність λ задовольняє умову (5.1), для довільного $x \in B\,l_M$ маємо $Tx \in l_N$ і отже, величини $E_{\gamma_n}(T : l_M \to l_N)$ за таких умов мають зміст.

Дійсно, поклавши $\lambda^* := \max_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k$, в такому випадку з врахуванням неспадання функцій $M(t)$ та $N(t)$ для довільного $x \in B\, l_M$ будемо мати

$$\sum_{k=1}^{\infty} N\Big(\frac{\lambda_k |x_k|}{\lambda^*}\Big) \le \sum_{k=1}^{\infty} N(|x_k|) \le \sum_{k=1}^{\infty} M(|x_k|) \le \sum_{k=1}^{\infty} M\Big(\frac{|x_k|}{\|x\|_{l_M}}\Big) \le 1.$$

Звідси випливає, що $\|Tx\|_{l_N} \le \lambda^* < \infty$ і $Tx \in l_N$.

Твердження 5.1.2 *(С. О. Чайченко [203]). Нехай $M(t)$ та $N(t)$ — довільні функції Орліча, що задовольняють співвідношення* (5.15) *і*

$$\inf\{\alpha > 0 : M(1/\alpha) \le 1\} = \inf\{\alpha > 0 : N(1/\alpha) \le 1\}, \tag{5.16}$$

нехай $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна послідовність додатних чисел, для якої виконується умова (5.1)*. Тоді для довільного набору γ_n із n різних натуральних чисел має місце рівність*

$$E_{\gamma_n}(T : l_M \to l_N) = \max_{k \notin \gamma_n} \lambda_k. \tag{5.17}$$

Зазначимо, що співвідношення (5.16) виконується, зокрема, у випадку, коли $M(1) = N(1) = 1$.

Розглядаючи точні нижні межі в обох частинах рівності (5.17) по всім можливим наборам γ_n із n натуральних чисел, робимо висновок, що точна нижня межа в правій частині (5.17) реалізується набором γ_n^*, який визначається співвідношенням

$$\gamma_n^* = \{i_k \in \mathbb{N} : \quad \lambda_{i_k} = \bar{\lambda}_k,\ k = 1, 2, \ldots, n\}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{5.18}$$

де $\bar{\lambda} = \{\bar{\lambda}_k\}_{k=1}^{\infty}$ — неспадна перестановка чисел λ_k і

$$\max_{k \notin \gamma_n^*} \lambda_k = \bar{\lambda}_{n+1}. \tag{5.19}$$

Наслідок 5.1.1 *(С. О. Чайченко [203]). Нехай $M(t)$ та $N(t)$ — довільні функції Орліча, що задовольняють співвідношення* (5.15) *та* (5.16)*, $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна послідовність додатних чисел, для якої виконується умова* (5.1)*. Тоді для довільного $n \in \mathbb{N}$*

$$\mathscr{D}_n(T : l_M \to l_N) = \mathscr{D}_n(T(B\, l_M), l_N) := \inf_{\gamma_n} E_{\gamma_n}(T : l_M \to l_N) = \bar{\lambda}_{n+1}, \tag{5.20}$$

де $\bar{\lambda} = \{\bar{\lambda}_k\}_{k=1}^{\infty}$ – незростаюча перестановка чисел λ_k.

Зазначимо, що у випадку, коли $M(t) = t^q$ і $N(t) = t^p$, $0 < q \le p$, тобто, коли $l_M = l_q$ і $l_N = l_p$, співвідношення (5.20) збігається із співвідношенням (1.119) твердження 1.6.3′.

При формулюванні наступного твердження використовуються характеристичні послідовності $\varepsilon(\lambda)$, $g_n(\lambda)$ та $\delta(\lambda)$, визначені в підрозділі 1.6.4 рівностями (1.125).

Твердження 5.1.3 *(С. О. Чайченко [203]). Нехай $M(t)$ — довільна функція Орліча, $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна послідовність додатних чисел, для якої виконується умова* (5.1). *Тоді для довільного $n \in \mathbb{N}$ мають місце рівності*

$$d_{\delta_{n-1}}(T : l_M \to l_M) = d_{\delta_{n-1}+1}(T : l_M \to l_M) = \ldots = d_{\delta_n - 1}(T : l_M \to l_M) = \varepsilon_n, \qquad (5.21)$$

в яких δ_s і ε_s, $s = 1, 2, \ldots,$ — елементи характеристичних послідовностей $\delta(\lambda)$ та $\varepsilon(\lambda)$ послідовності λ, а $\delta_0 = 0$.

Зазначимо, що у випадку, коли $M(t) = t^p$, $p \in [1, \infty)$, твердження 5.1.3 збігається з твердженням 1.6.4. У випадку скінченно мірних просторів l_p^d твердження, аналогічне до твердження 5.1.3, випливає з теореми 2.1 глави VI монографії [102].

5.2 Апроксимативні характеристики діагональних операторів в просторах $l_{\mathbf{p}}$

В даному підрозділі продовжується вивчення апроксимативних характеристик діагональних операторів в дискретних просторах. Зокрема, в ньому знаходяться точні значення величин найкращих наближень та базисних поперечників деяких множин образів таких операторів в просторах $l_{\mathbf{p}}$. Твердження цього підрозділу опубліковані в спільній роботі [201]. Для повноти викладу в підрозділі наводяться всі основні результати з [201], однак твердження, які належать співавтору роботи, формулюються без доведень.

5.2.1. Нехай $\mathbf{p} = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна послідовність додатних чисел, що задовольняють умову

$$1 \le p_k \le K, \quad k = 1, 2, \ldots, \qquad (5.22)$$

де K — деяка додатна стала. Через $l_{\mathbf{p}}$ позначимо простір всіх послідовностей $\mathbf{x} = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ дійсних чисел зі скінченою нормою Люксембурга

$$\|\mathbf{x}\|_{l_{\mathbf{p}}} := \inf\left\{\alpha > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{x_k}{\alpha}\right|^{p_k} \le 1\right\}. \qquad (5.23)$$

Нагадаємо, що коли $\mathbf{p} = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна послідовність чисел, що задовольняють умову (1.100), то

$$l_{\mathbf{p}} = \left\{ x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \ : \quad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{p_k} < \infty \right\}, \tag{5.24}$$

Нехай $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна послідовність додатних чисел, що задовольняють умову (5.1) і T — діагональний оператор, який визначається за допомогою послідовності λ співвідношенням (5.2).

Для довільного набору γ_n із n різних натуральних чисел розглянемо величину

$$E_{\gamma_n}(T : l_{\mathbf{q}} \to l_{\mathbf{p}}) := E_{\gamma_n}(T(B\, l_{\mathbf{q}}), l_{\mathbf{p}}) = \sup_{x \in B\, l_{\mathbf{q}}} E_{\gamma_n}(Tx)_{l_{\mathbf{p}}} = \sup_{x \in B\, l_{\mathbf{q}}} \inf_{a_i} \|Tx - P_{\gamma_n}\|_{l_{\mathbf{p}}}$$

найкращого наближення в просторі $l_{\mathbf{p}}$ множини $T(B\, l_{\mathbf{q}})$ за допомогою всіх можливих n-членних поліномів $P_{\gamma_n} = \sum_{i \in \gamma_n} a_i e_i$, що відповідають набору γ_n, де $B\, l_{\mathbf{q}}$ — одинична куля простору $l_{\mathbf{q}}$, a_i — довільні дійсні числа.

У випадку, коли $1 \le p_k \le p^* < q_* < q_k \le K$, $k \in \mathbb{N}$, умовою, що гарантує для довільного $x \in B\, l_{\mathbf{q}}$ включення $Tx \in l_{\mathbf{p}}$, а отже і коректність введених вище величин $E_{\gamma_n}(T : l_{\mathbf{q}} \to l_{\mathbf{p}})$, є умова

$$\|\lambda\|_{l_{\frac{\mathbf{pq}}{\mathbf{q}-\mathbf{p}}}} = \inf \left\{ \alpha > 0 : \ \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\lambda_k}{\alpha} \right|^{\frac{p_k q_k}{q_k - p_k}} \le 1 \right\} < \infty. \tag{5.25}$$

Дійсно, для довільних чисел $a > 0$ і $b > 0$ маємо

$$ab \le \frac{a^s}{s} + \frac{b^{s'}}{s'}, \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1,$$

звідси для будь-яких $a_k > 0$ і $b_k > 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^{s_k}}{s_k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k^{s'_k}}{s'_k}, \quad \frac{1}{s_k} + \frac{1}{s'_k} = 1. \tag{5.26}$$

Тому якщо виконується умова (5.25) і $x \in B\, l_{\mathbf{q}}$, то поклавши $a_k = \lambda_k^{p_k}$, $b_k = |x_k|^{p_k}$, $s_k = q_k/(q_k - p_k)$, $s'_k = q_k/p_k$, з урахуванням (5.24) отримаємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k x_k|^{p_k} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^{\frac{p_k q_k}{q_k - p_k}}}{q_k/(q_k - p_k)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|^{q_k}}{q_k/p_k} \le$$

$$\le \max_{i \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{q_i - p_i}{q_i} \right\} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{\frac{p_k q_k}{q_k - p_k}} + \max_{i \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{p_i}{q_i} \right\} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{q_k} < \infty,$$

тобто, $Tx \in l_{\mathbf{p}}$.

Теорема 5.2.1 . *Нехай* $\mathbf{p} = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ *і* $\mathbf{q} = \{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— довільні послідовності додатних чисел таких, що* $1 \le p_k \le p^* < q_* < q_k \le K$, $k \in \mathbb{N}$; $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— будь-яка послідовність додатних чисел, що задовольняють умову (5.25). Якщо для набору* γ_n *із* $n \in \mathbb{N}$ *різних натуральних чисел*

$$\max_{i \notin \gamma_n} \left\{ \frac{q_i - p_i}{q_i} \right\} + \max_{i \notin \gamma_n} \left\{ \frac{p_i}{q_i} \right\} = 1, \tag{5.27}$$

то справджується рівність

$$E_{\gamma_n}(T : l_{\mathbf{q}} \to l_{\mathbf{p}}) = \|\widetilde{\lambda}\|_{l_{\frac{\mathbf{pq}}{\mathbf{q}-\mathbf{p}}}}, \tag{5.28}$$

де послідовність $\widetilde{\lambda} = \widetilde{\lambda}(\gamma_n) = \{\widetilde{\lambda}_k\}_{k=1}^{\infty}$ *така, що*

$$\widetilde{\lambda}_k = \begin{cases} \lambda_k, & k \notin \gamma_n, \\ 0, & k \in \gamma_n. \end{cases} \tag{5.29}$$

Доведення. Оскільки для довільного $x \in l_{\mathbf{p}}$, будь-яких $\alpha > 0$ та $a_i \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k \in \gamma_n} \left| \frac{x_k - a_i}{\alpha} \right|^{p_k} + \sum_{k \notin \gamma_n} \left| \frac{x_k}{\alpha} \right|^{p_k} \ge \sum_{k \notin \gamma_n} \left| \frac{x_k}{\alpha} \right|^{p_k},$$

то для довільного $x \in l_{\mathbf{p}}$

$$E_{\gamma_n}(x)_{l_{\mathbf{p}}} = \mathscr{E}_{\gamma_n}(x)_{l_{\mathbf{p}}} := \|x - S_{\gamma_n}(x)\|_{l_{\mathbf{p}}} = \inf \Big\{ \alpha > 0 : \sum_{k \notin \gamma_n} \left| \frac{x_k}{\alpha} \right|^{p_k} \le 1 \Big\}, \tag{5.30}$$

де $S_{\gamma_n}(x) = \sum_{k \in \gamma_n} x_k e_k$.

З огляду на (5.29) для довільного $x \in B\, l_{\mathbf{q}} \subset l_{\mathbf{p}}$ і будь-якого $\varepsilon > 0$ розглянемо величину

$$\sum_{k \notin \gamma_n} \left| \frac{\lambda_k x_k}{\|\widetilde{\lambda}\|_{l_{\frac{\mathbf{pq}}{\mathbf{q}-\mathbf{p}}}} + \varepsilon} \right|^{p_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\widetilde{\lambda}_k x_k}{\|\widetilde{\lambda}\|_{l_{\frac{\mathbf{pq}}{\mathbf{q}-\mathbf{p}}}} + \varepsilon} \right|^{p_k}.$$

Поклавши у співвідношенні (5.26) $a_k = \widetilde{\lambda}_k^{p_k} / (\|\widetilde{\lambda}\|^{p_k}_{l_{\frac{\mathbf{pq}}{\mathbf{q}-\mathbf{p}}}} + \varepsilon)$, $b_k = |x_k|^{p_k}$, $s_k = q_k/(q_k - p_k)$ та $s'_k = q_k/p_k$, із врахуванням (5.27) та означення норми простору $l_{\mathbf{p}}$ отримаємо

$$\sum_{k \notin \gamma_n} \left| \frac{\lambda_k x_k}{\|\widetilde{\lambda}\|_{l_{\frac{\mathbf{pq}}{\mathbf{q}-\mathbf{p}}}} + \varepsilon} \right|^{p_k} \le \sum_{k \notin \gamma_n} \frac{q_k - p_k}{q_k} \left| \frac{\lambda_k}{\|\widetilde{\lambda}\|_{l_{\frac{\mathbf{pq}}{\mathbf{q}-\mathbf{p}}}} + \varepsilon} \right|^{\frac{p_k q_k}{q_k - p_k}} + \sum_{k \notin \gamma_n} \frac{p_k}{q_k} |x_k|^{q_k} \le$$

$$\le \max_{i \notin \gamma_n} \left\{ \frac{q_i - p_i}{q_i} \right\} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\widetilde{\lambda}_k}{\|\widetilde{\lambda}\|_{l_{\frac{\mathbf{pq}}{\mathbf{q}-\mathbf{p}}}} + \varepsilon} \right|^{\frac{p_k q_k}{q_k - p_k}} + \max_{i \notin \gamma_n} \left\{ \frac{p_i}{q_i} \right\} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{q_k} \le$$

$$\le \max_{i\notin\gamma_n}\left\{\frac{q_i-p_i}{q_i}\right\}+\max_{i\notin\gamma_n}\left\{\frac{p_i}{q_i}\right\}=1,$$

Звідси випливає, що для довільного $x\in B\,l_{\mathbf{q}}$ і будь-якого $\varepsilon>0$

$$E_{\gamma_n}(Tx)_{l_{\mathbf{p}}}\le \|\widetilde{\lambda}\|_{l_{\frac{\mathbf{pq}}{\mathbf{q-p}}}}+\varepsilon.$$

і отже, внаслідок довільності ε

$$E_{\gamma_n}(T:l_{\mathbf{q}}\to l_{\mathbf{p}})\le \|\widetilde{\lambda}\|_{l_{\frac{\mathbf{pq}}{\mathbf{q-p}}}}. \tag{5.31}$$

З іншого боку, розглянемо послідовність $\widetilde{x}=\{\widetilde{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ таку, що

$$\widetilde{x}_k=\widetilde{\lambda}_k^{\frac{p_k}{q_k-p_k}}\cdot\|\widetilde{\lambda}\|_{l_{\frac{\mathbf{pq}}{\mathbf{q-p}}}}^{\frac{p_k}{p_k-q_k}},\quad k=1,2,\ldots$$

Тоді

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\widetilde{x}_k|^{q_k}=\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\widetilde{\lambda}_k^{\frac{p_k}{q_k-p_k}}}{\|\widetilde{\lambda}\|_{l_{\frac{\mathbf{pq}}{\mathbf{q-p}}}}^{\frac{p_k}{q_k-p_k}}}\right|^{q_k}=\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\widetilde{\lambda}_k}{\|\widetilde{\lambda}\|_{l_{\frac{\mathbf{pq}}{\mathbf{q-p}}}}}\right|^{\frac{p_kq_k}{q_k-p_k}}\le 1,$$

тому $\|\widetilde{x}\|_{l_{\mathbf{q}}}\le 1$ і $\widetilde{x}\in B\,l_{\mathbf{q}}$. Крім цього, з огляду на означення норми простору $l_{\mathbf{p}}$ маємо

$$\sum_{k\notin\gamma_n}\left|\frac{\lambda_k\widetilde{x}_k}{\|\widetilde{\lambda}\|_{l_{\frac{\mathbf{pq}}{\mathbf{q-p}}}}}\right|^{p_k}=\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\widetilde{\lambda}_k}{\|\widetilde{\lambda}\|_{l_{\frac{\mathbf{pq}}{\mathbf{q-p}}}}}\cdot\frac{\widetilde{\lambda}_k^{\frac{p_k}{q_k-p_k}}}{\|\widetilde{\lambda}\|_{l_{\frac{\mathbf{pq}}{\mathbf{q-p}}}}^{\frac{p_k}{q_k-p_k}}}\right|^{p_k}=\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\widetilde{\lambda}_k}{\|\widetilde{\lambda}\|_{l_{\frac{\mathbf{pq}}{\mathbf{q-p}}}}}\right|^{\frac{p_kq_k}{q_k-p_k}}\le 1.$$

Покажемо тепер, що

$$\inf\left\{\alpha>0:\sum_{k\notin\gamma_n}\left|\frac{\lambda\widetilde{x}_k}{\alpha}\right|^{p_k}\le 1\right\}=\|\widetilde{\lambda}\|_{l_{\frac{\mathbf{pq}}{\mathbf{q-p}}}} \tag{5.32}$$

Дійсно, якщо припустити, що при деякому $\alpha_0=\|\widetilde{\lambda}\|_{l_{\frac{\mathbf{pq}}{\mathbf{q-p}}}}-\varepsilon_0>0$, $\varepsilon_0>0$, виконується нерівність

$$\sum_{k\notin\gamma_n}\left|\frac{\lambda_k\widetilde{x}_k}{\alpha_0}\right|^{p_k}\le 1,$$

то звідси отримаємо

$$1\ge\sum_{k\notin\gamma_n}\left|\frac{\lambda_k\widetilde{x}_k}{\|\widetilde{\lambda}\|-\varepsilon_0}\right|^{p_k}=\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\widetilde{\lambda}_k}{\|\widetilde{\lambda}\|(1-\varepsilon_0/\|\widetilde{\lambda}\|)}\cdot\frac{\widetilde{\lambda}_k^{\frac{p_k}{q_k-p_k}}}{\|\widetilde{\lambda}\|^{\frac{p_k}{q_k-p_k}}}\right|^{p_k}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\widetilde{\lambda}_k}{\|\widetilde{\lambda}\|(1-\varepsilon_0/\|\widetilde{\lambda}\|)^{\frac{q_k-p_k}{p_k}}}\right|^{\frac{p_kq_k}{q_k-p_k}}\ge\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\widetilde{\lambda}_k}{\|\widetilde{\lambda}\|(1-\varepsilon_0/\|\widetilde{\lambda}\|)^{\frac{q_*-p^*}{K}}}\right|^{\frac{p_kq_k}{q_k-p_k}}, \tag{5.33}$$

де для спрщення запису було покладено $\|\widetilde{\lambda}\| = \|\widetilde{\lambda}\|_{l_{\frac{\mathbf{pq}}{\mathbf{q-p}}}}$. Тобто, за даного припущення при $\alpha_1 = \|\widetilde{\lambda}\|(1-\varepsilon_0/\|\widetilde{\lambda}\|)^{\frac{q_*-p^*}{K}} < \|\widetilde{\lambda}\|$ виконується нерівність

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\widetilde{\lambda}_k}{\alpha_1}\right|^{\frac{p_kq_k}{q_k-p_k}} \le 1,$$

а це суперечить тому, що $\|\widetilde{\lambda}\|$ — норма послідовності $\widetilde{\lambda}$ в просторі $l_{\frac{\mathbf{pq}}{\mathbf{q-p}}}$. Таким чином, припущення невірне і має місце співвідношення (5.32). Зі співвідношень (5.30) і (5.32) отримуємо

$$E_{\gamma_n}(T\widetilde{x})_{l_{\mathbf{p}}} = \|\widetilde{\lambda}\|_{l_{\frac{\mathbf{pq}}{\mathbf{q-p}}}}. \tag{5.34}$$

Об'єднуючи співвідношення (5.31) і (5.34), переконуємося у справедливості рівності (5.28). Теорему доведено.

Зазначимо, що умова (5.27) виконується тільки для послідовностей $\mathbf{p}$ і $\mathbf{q}$ таких, що $q_k = K_0 p_k$ для всіх $k \in \mathbb{N}\setminus\gamma_n$, де K_0 є додатною сталою. Нажаль, в загальному випадку ми не змогли отримати відповідний результат.

5.2.2. В подальшому будемо вважати, що $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — це довільна незростаюча послідовність невід'ємних чисел, що задовольняють умову (5.25). Нехай, також, $\mathbf{p} = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ і $\mathbf{q}= \{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільні неспадні послідовності додатних чисел таких, що $1 \le p_k \le p^* < q_* < q_k \le K$, $k \in \mathbb{N}$, and

$$\max_{i\in\mathbb{N}}\left\{\frac{q_i-p_i}{q_i}\right\} + \max_{i\in\mathbb{N}}\left\{\frac{p_i}{q_i}\right\} = 1, \tag{5.35}$$

тобто, $q_k = K_0 p_k$, де K_0 — додатня стала, $K_0 > 1$. Переходячи до нижньої межі в правій частині рівності (5.28) по всім можливим наборам γ_n з n різних натуральних чисел, знаходимо

$$\inf_{\gamma_n}\|\widetilde{\lambda}\|_{l_{\frac{\mathbf{pq}}{\mathbf{q-p}}}} = \|\lambda^*\|_{l_{\frac{\mathbf{pq}}{\mathbf{q-p}}}},$$

де послідовність $\lambda^* = \{\lambda_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ така, що

$$\lambda_k^* = \begin{cases} 0, & k = 1,2,\ldots,n,\\ \lambda_k, & k > n. \end{cases} \tag{5.36}$$

З теореми 5.2.1 випливає наступний наслідок.

Наслідок 5.2.1 . *Нехай $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — будь-яка послідовність додатних чисел, що задовольняють умову (5.25). Нехай, далі, $\mathbf{p} = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ і $\mathbf{q}= \{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільні послідовності додатних чисел таких, що $1 \le p_k \le p^* < q_* < q_k \le K$, $k \in \mathbb{N}$ і виконується рівність (5.35). Тоді для для довільного $n \in \mathbb{N}$*

$$\mathscr{D}_n(T: l_{\mathbf{q}} \to l_{\mathbf{p}}) = \mathscr{D}_n(T(B\, l_{\mathbf{q}}), l_{\mathbf{p}}) := \inf_{\gamma_n} E_{\gamma_n}(T: l_{\mathbf{q}} \to l_{\mathbf{p}}) = \|\lambda^*\|_{l_{\frac{\mathbf{pq}}{\mathbf{q-p}}}}, \tag{5.37}$$

де послідовність $\lambda^* = \{\lambda_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ визначається рівністю (5.36).

5.2.3. Зазначимо, що коли $0 < q_k \le p_k$, $k \in \mathbb{N}$, а послідовність λ задовольняє умову (5.1), для довільного $x \in B\, l_{\mathbf{q}}$ маємо $Tx \in l_{\mathbf{p}}$ і отже, величини $E_{\gamma_n}(T : l_{\mathbf{q}} \to l_{\mathbf{p}})$ за таких умов мають зміст.

Дійсно, в такому випадку для довільного $x \in B\, l_{\mathbf{q}}$ всі $|x_k| \le 1$, тому для будь-яких $0 < q_k \le p_k$ маємо $|x_k|^{p_k} \le |x_k|^{q_k}$ і

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\lambda_k x_k}{\lambda^*} \right|^{p_k} \le \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{p_k} \le \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{q_k} \le \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{x_k}{\|x\|_{l_{\mathbf{q}}}} \right|^{q_k} \le 1, \text{ де } \lambda^* = \max_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k.$$

Звідси випливає, що $\|Tx\|_{l_{\mathbf{p}}} \le \lambda^* < \infty$ і $Tx \in l_{\mathbf{p}}$.

Твердження 5.2.1 *(С. О. Чайченко [203]). Нехай $\mathbf{p} = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ і $\mathbf{q} = \{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільні послідовності додатних чисел, що задовольняють нерівності (5.22) і $q_k \le p_k$, $k \in \mathbb{N}$; $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна послідовність додатних чисел, що задовольняють умову (5.1). Тоді для довільного набору γ_n із n різних натуральних чисел має місце рівність*

$$E_{\gamma_n}(T : l_{\mathbf{q}} \to l_{\mathbf{p}}) = \max_{k \notin \gamma_n} \lambda_k. \tag{5.38}$$

Аналогічно до підрозділу 5.1.3, розглядаючи точні нижні межі в обох частинах рівності (5.38) по всім можливим наборам γ_n з n натуральних чисел, робимо висновок, що точна нижня межа в правій частині (5.38) реалізується набором γ_n^*, який визначається співвідношенням (5.18), і має місце рівність (5.19).

Наслідок 5.2.2 *(С. О. Чайченко [203]). Нехай $\mathbf{p} = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ і $\mathbf{q} = \{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільні послідовності додатних чисел, що задовольняють відповідно умови (5.22) і $q_k \le p_k$, $k \in \mathbb{N}$; $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна послідовність додатних чисел, що задовольняють умову (5.1). Тоді для довільного $n \in \mathbb{N}$*

$$\mathscr{D}_n(T : l_{\mathbf{q}} \to l_{\mathbf{p}}) = \bar{\lambda}_{n+1}, \tag{5.39}$$

де $\bar{\lambda} = \{\bar{\lambda}_k\}_{k=1}^{\infty}$ – незростаюча перестановка чисел λ_k.

Зазначимо, що у випадку, коли послідовності $\mathbf{p}$ і $\mathbf{q}$ є сталими ($p_k = p$, $q_k = q$ для всіх $k \in \mathbb{N}$), тобто, коли $l_{\mathbf{p}} = l_p$ і $l_{\mathbf{q}} = l_q$, співвідношення (5.37) збігається з рівністю (1.121) твердження 1.6.2′, а співвідношення (5.39) — з рівністю (1.119) твердження 1.6.3′.

При формулюванні наступного твердження використовуються характеристичні послідовності $\varepsilon(\lambda)$, $g_n(\lambda)$ та $\delta(\lambda)$, визначені в підрозділі 1.6.4 рівностями (1.125).

Твердження 5.2.2 *(С. О. Чайченко [203]). Нехай* $\mathbf{p} = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— довільна послідовність додатних чисел, що задовольняють нерівності (5.22);* $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— довільна послідовність додатних чисел, що задовольняють умову (5.1). Тоді для довільного* $n \in \mathbb{N}$ *мають місце рівності*

$$d_{\delta_{n-1}}(T : l_{\mathbf{p}} \to l_{\mathbf{p}}) = d_{\delta_{n-1}+1}(T : l_{\mathbf{p}} \to l_{\mathbf{p}}) = \ldots = d_{\delta_n - 1}(T : l_{\mathbf{p}} \to l_{\mathbf{p}}) = \varepsilon_n, \qquad (5.40)$$

в яких δ_s *і* ε_s, $s = 1, 2, \ldots,$ *— елементи характеристичних послідовностей* $\delta(\lambda)$ *та* $\varepsilon(\lambda)$ *послідовності* λ, *а* $\delta_0 = 0$.

Зазначимо, що у випадку, послідовність $\mathbf{p}$ є сталою ($p_k = p$, $k \in \mathbb{N}$), твердження 5.2.2 збігається з твердженням 1.6.4.

5.3 Насичення лінійних методів підсумовування рядів Фур'є у просторах S^p_φ

5.3.1. В даному підрозділі вивчаються загальні питання теорії лінійних методів підсумовування рядів Фур'є у просторах S^p_φ, означення яких було наведено в підрозділі 1.5.

Наявність в просторі $\mathscr{X}$ ортонормованої системи φ дозволяє кожному елементу $f \in \mathscr{X}$ ставити у відповідність його формальний ряд Фур'є за цією системою вигляду

$$S[f]_\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_\varphi(k)\varphi_k, \qquad (5.41)$$

який у тригонометричному випадку є звичайним рядом Фур'є функції $f \in L$. Тому задачі цього підрозділу можна трактувати як задачі про підсумовування узагальнених рядів Фур'є, що означаються рівністю (5.41).

Нехай $\Lambda = \{\lambda_k(r)\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна послідовність функцій, що залежать від параметра r, який визначений на деякій підмножині $M \subset \mathbb{C}$, яка має єдину точку скупчення r_0.

Надалі обмежимося в наших розглядах випадком, коли простір S^p_φ є повним, а послідовність функцій $\Lambda = \{\lambda_k(r)\}$ задовольняє умову

$$|\lambda_k(r)| \le K, \quad k \in \mathbb{N} \qquad (5.42)$$

де K — деяка величина, яка може залежати від r, але не залежить від k. Тоді кожному елементу $f \in S^p_\varphi$ на основі його розкладу (5.41) в ряд Фур'є за системою φ при будь-якому $r \in M$ можна поставити у відповідність елемент $U_r(f;\Lambda) \in S^p_\varphi$, ряд Фур'є якого має вигляд

$$S[U_r(f;\Lambda)] = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(r)\widehat{f}_\varphi(k)\varphi_k, \tag{5.43}$$

тобто, такий, що

$$\widehat{U}_r(f;\Lambda)_\varphi(k) = \big(U_r(f;\Lambda),\varphi_k\big) = \lambda_k(r)\widehat{f}_\varphi(k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

В такому випадку довільна послідовність функцій Λ, які задовольняють умову (5.42) задає метод побудови елементів $U_r(f;\Lambda)$ або, іншими словами, конкретну сукупність операторів $U_r(f;\Lambda)$, які відображають повний метричний простір S^p_φ в себе. В такому разі також кажуть, що послідовність функцій Λ визначає конкретний лінійний метод (Λ-метод) підсумовування рядів Фур'є.

У випадку, коли параметр $r = n$ змінюється на множині $\mathbb{N}$ натуральних чисел, а точка скупчення $r_0 = \infty$, послідовності Λ утворюють нескінченні прямокутні матриці чисел $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}$, які відповідають так званим прямокутним Λ-методам підсумовування рядів Фур'є. Якщо ж при цьому $\lambda_k(r) = \lambda_k^{(n)} = 0$ для довільного $k > n$, то методи підсумовування, породжені такою послідовністю (матрицею) Λ називають трикутними Λ-методами (див., наприклад, [47, 143]).

У випадку, коли $\lambda_k(r)$ — функції, які залежать від неперервного параметра r, Λ-метод називають континуальним.

Наведемо декілька прикладів Λ-методів.

1. Якщо послідовність Λ така, що

$$\lambda_k(r) = \Big(\frac{\sin(k-1)r}{(k-1)r}\Big)^h, \quad k = 2,3,\ldots,\ h > 0,\ r_0 = 0,\ \lambda_1(r) \equiv 1,$$

то ряди $S[U_r(f;\Lambda)]$ мають вигляд:

$$S[U_r(f;\Lambda)] = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{\sin(k-1)r}{(k-1)r}\Big)^h \widehat{f}_\varphi(k)\varphi_k.$$

Такий метод називають *методом Рімана.*

2. Методу Абеля-Пуассона відповідає послідовність функцій $\lambda_k(r) = r^{k-1}$, $0 < r < 1$, $r_0 = 1$. Ряди $S[U_r(f;\Lambda)]$ в цьому випадку

$$S[U_r(f;\Lambda)] = \sum_{k=1}^{\infty} r^{k-1}\widehat{f}_\varphi(k)\varphi_k =: P_r(f). \tag{5.44}$$

3. Якщо послідовність (матриця) Λ така, що

$$\lambda_k(r) = \lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & k = 1, 2, \ldots, n, \\ 0, & k > n, \end{cases}$$

то елементи $U_r(f; \Lambda) = U_n(f; \Lambda)$ збігаються з частинними сумами $S_n(f)$ порядку n ряду (5.41). Згідно з прийнятою термінологією, такий метод називають *методом частинних сум Фур'є.*

4. Метод середніх арифметичних (*метод Фейєра)* визначається матрицею Λ, в якій $\lambda_k(r) = = \lambda_k^{(n)} = 1 - \frac{k-1}{n}, k = 1, 2, ..., n$ і $\lambda_k^{(n)} = 0,\ k > n$. Елементи $U_n(f; \Lambda)$ в цьому методі називаються *сумами Фейєра.* Вони мають вигляд:

$$U_r(f; \Lambda) = U_n(f; \Lambda) = \sigma_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_k(f).$$

5. У випадку, коли $\lambda_k(r) = \lambda_k^{(n)} = \cos \frac{(k-1)\pi}{2n}, k = 1, 2, ..., n$ і $\lambda_k^{(n)} = 0, k > n, U_r(f; \Lambda)$ співпадають з поліномами, що відповідють *методу Рогозинського.* При цьому

$$U_r(f; \Lambda) = U_n(f; \Lambda) = \sum_{k=1}^{n} \widehat{f}_\varphi(k) \cos \frac{(k-1)\pi}{2n} \varphi_k = R_n(f).$$

6. Якщо $\lambda_k(r) = \lambda_k^{(n)} = 1 - (\frac{k-1}{n})^s, k = 1, 2, , ..., n, s > 0$ і $\lambda_k(r) = \lambda_k^{(n)} = 0,\ k > n$, то

$$U_r(f; \Lambda) = U_n(f; \Lambda) = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \left(\frac{k-1}{n}\right)^s\right) \widehat{f}_\varphi(k) \varphi_k = Z_n^{(s)}(f).$$

Поліноми $Z_n^{(s)}(f)$ називають *сумами Зигмунда.* При $s = 1$ суми Зигмунда співпадають із сумами Фейєра $\sigma_n(f)$.

7. Якщо

$$\lambda_k(r) = \lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & k = 1, 2, \ldots, n - q, \\ 1 - \frac{k-n+q}{q+1}, & k = n - q + 1, \ldots, n, \\ 0, & k > n, \end{cases}$$

то

$$U_r(f; \Lambda) = U_n(f; \Lambda) = \frac{1}{q+1} \sum_{k=n-q}^{n} S_k(f) = V_{n-q}^n(f).$$

Такий метод називається *методом Валле–Пуссена,* а поліноми $V_{n-q}^n(f)$ — *сумами Валле–Пуссена.* Якщо $q = 0$, то $V_{n-q}^n(f) = V_n^n(f) = S_n(f)$, якщо $q = n - 1$, то $V_{n-q}^n(f) = V_1^n(f) = \sigma_n(f)$.

У зв'язку із заміною ряду Фур'є (5.41) функції f рядом (5.43) природно постає питання про регулярність лінійних методів в просторах S_φ^p, тобто, питання про те, які умови повинні задовольняти послідовність функцій $\Lambda = \{\lambda_k(r)\}$, щоб виконувалася рівність

$$\lim_{r\to r_0} \|f - U_r(f;\Lambda)\|_{p,\varphi} = 0 \tag{5.45}$$

для всіх функцій $f \in S^p_\varphi(\mathscr{X})$ незалежно від вибору параметрів $\mathscr{X}$, φ та $p \in [1,\infty)$, які визначають простір $S^p_\varphi(\mathscr{X})$? Вичерпну відповідь на поставлене питання випливає з основних теорем функціонального аналізу:

для того, щоб виконувалось співвідношення (5.45) для всіх елементів $f \in S^p_\varphi(\mathscr{X})$ *необхідно і достатньо, щоб при кожному фіксованому* k, $k = 1, 2, \ldots$

$$\lim_{r\to r_0} \lambda_k(r) = 1,$$

і крім того, щоб послідовність чисел

$$L_r(\Lambda) = \sup_{\|f\|_{p,\varphi}\le 1} \|U_r(f;\Lambda)\|_{p,\varphi} = \sup_{k\in\mathbb{N}} |\lambda_k(r)|, \tag{5.46}$$

була обмеженою:

$$L_r(\Lambda) = O(1), \ r\to r_0.$$

Величини виду (5.46) інколи називають (див., наприклад, [143 (гл. I)]) *константами Лебега* даного методу $U_r(\Lambda)$.

5.3.2. Постановка задачі про насичення та означення насичення. Нехай $U_r(\Lambda)$ — довільний Λ-метод, який породжує елементи $U_r(f;\Lambda)$, ряди Фур'є яких мають вигляд (5.43). Якщо при деякому $k_0 \in \mathbb{N}$ буде виконуватись співвідношення

$$\lim_{r\to r_0} \frac{\|f - U_r(f;\Lambda)\|_{p,\varphi}}{|1-\lambda_{k_0}(r)|} = 0, \tag{5.47}$$

то $\widehat{f}_\varphi(k_0) = 0$. Дійсно, оскільки згідно з (1.65)

$$\|f - U_r(f;\Lambda)\|^p_{p,\varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{f}_\varphi(k)|^p |1-\lambda_k(r)|^p \ge |1-\lambda_{k_0}(r)|^p |\widehat{f}_\varphi(k_0)|^p, \tag{5.48}$$

то співвідношення (5.47) виконується лише тоді, коли $\widehat{f}_\varphi(k_0) = 0$.

Звідси випливає, що коли для даного методу $U_r(\Lambda)$ має місце (5.47) для всіх k починаючи з деякого номера k_1, то елемент $f = \sum_{k=1}^{k_1-1} \widehat{f}_\varphi(k)\varphi_k$ — поліном порядку не вище k_1. Зокрема, якщо при цьому $k_1 = 2$, то $f = \widehat{f}_\varphi(1)\varphi_1$. Це означає, що порядок прямування до нуля величини $\|f - U_r(f;\Lambda)\|_{p,\varphi}$ при $r \to r_0$ не може перевищувати максимального порядку прямування до нуля будь-якої із різниць $1-\lambda_k(r)$, $k=1,2,\ldots$. Наприклад, для сум Фейєра $1-\lambda_k(r)=1-\lambda_k^{(n)}=\frac{k-1}{n}$, $k=2,3,\ldots,n$, і тоді $\min\limits_{k=2,3,\ldots,n}(1-\lambda_k^{(n)})=n^{-1}$. Тому виконання співвідношення

$$\|f-\sigma_n(f)\|_{p,\varphi}=o(n^{-1}),\quad n\to\infty$$

можливе лише у випадку, коли $f=\widehat{f}_\varphi(1)\varphi_1$. Тобто, довільний елемент $f\neq\widehat{f}_\varphi(1)\varphi_1$, за допомогою сум Фейєра можна наблизити з точністю не вище $O(n^{-1})$:

$$\|f-\sigma_n(f)\|_{p,\varphi}>Kn^{-1},$$

де K — деяка стала, що не залежить від n.

У випадку наближення методом Абеля-Пуассона

$$\|f-P_r(f)\|_{p,\varphi}>K(1-r),\quad 0<r<1,\ \ f\neq\widehat{f}_\varphi(1)\varphi_1;$$

у випадку наближення сумами Зигмунда —

$$\|f-Z_n^{(s)}(f)\|_{p,\varphi}>Kn^{-s},\quad f\neq\widehat{f}_\varphi(1)\varphi_1.$$

У зв'язку з цим в теорії лінійних методів виникла задача про насичення, яка полягає в тому, щоб для конкретного лінійного методу за властивостями елементів послідовності Λ визначити найкращий порядок $\nu_\Lambda(r)$ прямування до нуля при $r\to r_0$ величини $\|f-U_r(f;\Lambda)\|_X$, який може бути досягнутий для даного методу в лінійному нормованому просторі X, і описати найширший клас елементів, на якому порядки наближень даним методом співпадають з $\nu_\Lambda(r)$.

Поняття насичення лінійних методів було введено Ж. Фаваром у 1947 році в роботі [178] (див. також [179]). Проте ще в 1941 році Д. Алексіч [2] показав, що для сум Фейєра співвідношення $\|f(\cdot)-\sigma_n(f;\cdot)\|_C=O(n^{-1})$ виконується тоді і лише тоді, коли $\widetilde{f}\in Lip(C;1)$. Доведення того важливого факту, що для цих сум із співвідношення $\|f(\cdot)-\sigma_n(f;\cdot)\|_C=o(n^{-1})$ випливає , що $f(x)=\mathrm{const}$, і який якраз встановлює насиченість методу Фейєра, було наведено А. Зігмундом в [56].

В подальшому цю тематику розвивали М. Заманський, Г. Суноучі, К. Ватарі, Ф. І. Харшиладзе, А. Х. Турецький, П. Бутцер і Р. Нессель та інші.

В роботі О. І. Степанця та В. Т. Гаврилюк [32] було сформульовано основні твердження, які характеризують властивість насичення в просторах C та L_p лінійних методів, що породжуються довільними нескінченними трикутними числовими матрицями. У просторах S^p_φ питання насичення таких лінійних методів вивчалося у роботах [190] і [192], де, зокрема, було означено поняття насичення лінійних методів, а також показано, що насиченість лінійного методу і порядок насичення не залежать від вибору параметрів $\mathscr{X}$, φ та p, що визначають простір $S^p_\varphi(\mathscr{X})$.

В цьому підрозділ встановимо аналогічні твердження для лінійних методів, які задаються довільними послідовностями функцій, визначених на деякій підмножині з $\mathbb{C}$.

Існують різні хоча і близькі за змістом означення поняття насичення (див., наприклад, [47 (гл. VIII), 32, 21 (гл. V)]). Зокрема, в роботі [32] було сформульовано наступне означення насичення лінійного методу для просторів $C = C[-\pi, \pi]$ та $L_p = L_p[-\pi, \pi]$, $p \in [1, \infty)$.

Означення A. *Нехай X — один із просторів C або L_p, $p \in [1, \infty)$, і $U_n(\Lambda)$ — лінійний метод підсумовування рядів Фур'е, який породжує поліноми $U_n(f; x; \Lambda)$ вигляду*

$$U_n(f; x; \Lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k^{(n)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Якщо існує додатна монотонно спадна до нуля функція $\varphi_\Lambda(n)$, $n \in \mathbb{N}$, така, що із співвідношення

$$\|f(x) - U_n(f; x; \Lambda)\|_X = o(\varphi_\Lambda(n)), \quad n \to \infty \tag{5.49}$$

випливає, що $f(x) \equiv \mathrm{const}$ при $X = C$ і $f(x) = \mathrm{const}$ майже скрізь при $X = L_p$, і знайдеться принаймні одна функція $f(\cdot)$, відмінна від сталої, для якої

$$\|f(x) - U_n(f; x; \Lambda)\|_X = O(\varphi_\Lambda(n)), \quad n \to \infty, \tag{5.50}$$

то кажуть, що метод $U_n(\Lambda)$ є насиченим в просторі X. Множина $\Phi(\Lambda)_X$ всіх функцій, для яких виконується співвідношення (5.50) називається класом насичення, а функція $\varphi_\Lambda(n)$ — порядком насичення.

Інколи вимагається (див., наприклад, [47]), щоб із співвідношення (5.49) випливало, що функція $f(x)$ належить деякій скінченно вимірній множині, або ж, як у монографії [21], що функція $f(x)$ є так званим інваріантним елементом для сім'ї операторів $U_n(f; x; \Lambda)$.

Здебільшого означення властивості насичення відрізняються одне від одного лише тим, як у них вводиться поняття інваріантного елемента. Наприклад, у означенні A інваріантними елементами даного лінійного методу є функції $f(x) \equiv \mathrm{const}$ при $X = C$ і $f(x) = \mathrm{const}$ майже скрізь при $X = L_p$. Однак згідно з таким означенням метод

Валле–Пуссена (нагадаємо, що в цьому випадку

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & k = 1, 2, \ldots, n-q, \\ 1 - \frac{k-n+q}{q+1}, & k = n-q+1, \ldots, n, \\ 0, & k > n, \end{cases}$$

де $q = q(n)$ — деякий цілий параметр, $0 \le q(n) \le n-1$, який може залежати від n) не є насиченим при будь-якому виборі параметра q. З іншого боку у випадку, коли $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q(n)}{n} = 1$ і $n - q(n) = c_n < c \neq 0$, будь-яку функцію f, що не є тригонометричним поліномом порядку меншого за c_n, можна наблизити сумами Валле–Пуссена з точністю не вище $O(n^{-1})$. Тобто, в цьому випадку метод Валле–Пуссена дає наближення таке ж саме як і метод Фейєра, який, як відомо, є насиченим. У зв'язку з цим в роботі [190] (див. також [192]) було означено насиченість лінійного методу (у випадку, коли послідовності Λ утворюють нескінченні трикутні матриці чисел $\Lambda = \{\lambda_k(r)\} = \|\lambda_k^{(n)}\|$) так, щоб воно охоплювало якомога більше лінійних методів, які в певному розумінні володіють цією властивістю, і зокрема, метод Валле-Пуссена у вище розглянутому випадку.

В цьому пункті роботи розповсюдимо це поняття на випадок довільної послідовності функцій $\Lambda = \{\lambda_k(r)\}$.

Для довільного $\delta > 0$ через $O_\delta(r_0)$ позначимо δ-окіл точки r_0 в множині M:

$$O_\delta(r_0) = \{r \in M \ : \ |r - r_0| < \delta\}, \quad \text{при } r_0 < \infty$$

і

$$O_\delta(r_0) = \{r \in M \ : \ |r| \ge \delta\}, \quad \text{при } r_0 = \infty$$

Для даної послідовності функцій Λ розглянемо множину B_Λ всіх натуральних чисел k, для яких існує функція $\delta_\Lambda = \delta_\Lambda(k)$ така, що $\lambda_k(r) = 1$, для всіх $r \in O_{\delta_\Lambda}(r_0)$, тобто

$$B_\Lambda = \{k \in \mathbb{N} : \quad \exists \delta_\Lambda = \delta_\Lambda(k) : \quad \lambda_k(r) = 1, \ r \in O_{\delta_\Lambda}(r_0)\}$$

Елемент f простору S^p_φ називається *інваріантним елементом методу* $U_r(\Lambda)$, якщо його коефіцієнти Фур'є $\widehat{f}_\varphi(k) = (f, \varphi_k)$ дорівнюють нулеві принаймні для всіх $k \in \mathbb{N} \setminus B_\Lambda$.

Множину всіх інваріантних елементів методу $U_r(\Lambda)$ в просторі S^p_φ позначимо через $F_\Lambda(S^p_\varphi)$. Легко бачити, що будь-який лінійний метод $U_r(\Lambda)$ має в просторі S^p_φ хоча б один інваріантний елемент. Таким є, зокрема, нульовий елемент простору S^p_φ.

Зауваження 5.3.1 . Зазначимо, що у випадку, коли при деяких параметрах $\mathscr{X}$, p та φ множина $F_\Lambda(S^p_\varphi(\mathscr{X}))$ збігається з усім простором $S^p_\varphi(\mathscr{X})$, виконується рівність $B_\Lambda = \mathbb{N}$; і навпаки, якщо $B_\Lambda = \mathbb{N}$, то $F_\Lambda(S^p_\varphi(\mathscr{X})) = S^p_\varphi(\mathscr{X})$ для будь-яких $\mathscr{X}$, p та φ.

Оскільки для методів Фейєра, Рімана, Абеля-Пуассона, Рогозинського та Зигмунда $\lambda_k^{(n)} \neq 1$ для всіх $k = 2, 3, \ldots$, то $B_\Lambda = \{1\}$, і інваріантними елементами цих методів в S^p_φ будуть елементи $f \in S^p_\varphi$, які можна подати у вигляді: $f = \widehat{f}_\varphi(1)\varphi_1$.

Означення 5.3.1 . *Лінійний метод $U_r(\Lambda)$ називається насиченим в просторі $S^p_\varphi(\mathscr{X})$, $p \in [1, \infty)$, якщо існує додатна монотонно спадна до нуля при $r \to r_0$ функція $\nu_\Lambda(r)$, для якої виконуються такі умови:*

1) із співвідношення

$$\|f - U_r(f;\Lambda)\|_{p,\varphi} = o(\nu_\Lambda(r)), \ r \to r_0 \tag{5.51}$$

випливає, що $f \in F_\Lambda(S^p_\varphi(\mathscr{X}))$,

2) існує принаймні один елемент $f \in S^p_\varphi(\mathscr{X}) \setminus F_\Lambda(S^p_\varphi(\mathscr{X}))$, для якого при всіх $r \in M$ виконується співвідношення

$$\|f - U_r(f;\Lambda)\|_{p,\varphi} = O(\nu_\Lambda(r)), \ r \to r_0. \tag{5.52}$$

Функція ν_Λ називається порядком насичення, а множина $\Phi(\Lambda)_p$ всіх елементів простору $S^p_\varphi(\mathscr{X})$, для яких виконується (5.52) — класом насичення методу $U_r(\Lambda)$.

Означення 5.3.2 . *Якщо для даного методу не існує додатної монотонно спадної до нуля при $r \to r_0$ функції $\nu_\Lambda(r)$, що задовольняє умови означення 5.3.1, то кажуть, що цей метод не є насиченим в просторі S^p_φ.*

У випадку, коли послідовності Λ утворюють нескінченні прямокутні матриці чисел $\Lambda = \{\lambda_k(r)\} = \|\lambda_k^{(n)}\|$ $(r_0 = \infty)$ з даних означень можна легко отримати означення поняття насичення, сформульовані в роботах [190, 192].

Наступне твердження вказує на інваріантність поняття насичення лінійного методу відносно просторів $S^p_\varphi(\mathscr{X})$.

Теорема 5.3.1 . *Якщо лінійний метод $U_r(\Lambda)$ є насиченим в просторі $S^p_\varphi(\mathscr{X})$ при даних фіксованих параметрах $\mathscr{X}$, p, φ з порядком насичення $\nu_\Lambda(r)$, то даний метод є насиченим і в просторах $S^{p'}_{\varphi'}(\mathscr{X}')$ для будь-яких інших параметрів $\mathscr{X}'$, p', φ' з тим самим порядком насичення $\nu_\Lambda(r)$.*

Доведення. Нехай лінійний метод $U_r(\Lambda)$ є насиченим в просторі $S^p_\varphi(\mathscr{X})$ з порядком насичення $\nu_\Lambda(n)$, і нехай для деякого елемента $f \in S^{p'}_{\varphi'}(\mathscr{X}')$ виконується співвідношення

$$\|f - U_r(f;\Lambda)\|_{p',\varphi'} = o(\nu_\Lambda(r)), \quad r \to r_0. \tag{5.51$'$}$$

Покажемо, що тоді $f \in F_\Lambda(S^{p'}_{\varphi'}(\mathscr{X}'))$, тобто, що $\widehat{f}_{\varphi'}(k_0) = 0$ для будь-якого $k_0 \in \mathbb{N}\backslash B_\Lambda$.

За означенням співвідношення (5.51′) виконується тоді і лише тоді, коли для довільного $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що для всіх $r \in O_\delta(r_0)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|1-\lambda_k(r)|^{p'}}{\nu_\Lambda(r)^{p'}} |\widehat{f}_{\varphi'}(k)|^{p'} < \varepsilon. \tag{5.53}$$

Зафіксуємо довільне $k_0 \in \mathbb{N} \setminus B_\Lambda$, і розглянемо елемент φ_{k_0}. Зрозуміло, що φ_{k_0} не є інваріантним елементом методу $U_r(\Lambda)$ в просторі $S^p_\varphi(\mathscr{X})$, тобто $\varphi_{k_0} \in S^p_\varphi \setminus F_\Lambda$, і оскільки метод є насиченим в $S^p_\varphi(\mathscr{X})$, то

$$\|\varphi_{k_0} - U_r(\varphi_{k_0};\Lambda_0)\|_{p,\varphi} \neq o(\nu_\Lambda(r)),\ r \to r_0.$$

Це означає, що, існує стала $C_{k_0} > 0$ така, що для будь-якого δ_1, $0 < \delta_1 < \delta$ знайдеться число $r = r(\delta_1) \in O_{\delta_1}(r_0)$, для якого виконується співвідношення

$$\frac{\|\varphi_{k_0} - U_r(\varphi_{k_0};\Lambda_0)\|_{p,\varphi}}{\nu_\Lambda(r)} = \frac{|1-\lambda_{k_0}(r)|}{\nu_\Lambda(r)} \geq C_{k_0} > 0.$$

Звідси, внаслідок довільності ε, випливає, що виконання нерівності (5.53) можливе лише у випадку, коли $\widehat{f}_{\varphi'}(k_0) = 0$. Таким чином, показано, що для будь-якого $k_0 \in \mathbb{N} \setminus B_\Lambda$ коефіцієнт $\widehat{f}_\varphi(k_0) = 0$. Тобто, $f \in F_\Lambda(S^{p'}_{\varphi'}(\mathscr{X}'))$, і умова 1) означення 5.3.1 для простору $S^{p'}_{\varphi'}(\mathscr{X}')$ виконується.

Покажемо тепер, що умова 2) означення 5.3.1 в просторі $S^{p'}_{\varphi'}(\mathscr{X}')$ також виконується. Оскільки метод $U_r(\Lambda)$ є насиченим в просторі $S^p_\varphi(\mathscr{X})$, то існує $f \in S^p_\varphi(\mathscr{X}) \setminus F_\Lambda(S^p_\varphi(\mathscr{X}))$, для якого є правильним співвідношення (5.52), причому $\widehat{f}_\varphi(k_1) \neq 0$ хоча б для одного $k_1 \in \mathbb{N}\backslash B_\Lambda$. Покладемо $f_1 = \widehat{f}_\varphi(k_1){\varphi'}_{k_1}$. Тоді $f_1 \in S^{p'}_{\varphi'}(\mathscr{X}')\backslash F_\Lambda(S^{p'}_{\varphi'}(\mathscr{X}'))$, і виконується співвідношення

$$\|f_1 - U_r(f_1;\Lambda)\|_{p',\varphi'} \leq \|f - U_r(f;\Lambda)\|_{p,\varphi} = O(\nu_\Lambda(r)),\ r \to r_0.$$

Тобто, умова 2) для простору $S^{p'}_{\varphi'}(\mathscr{X}')$ також виконується, і лінійний метод $U_r(\Lambda)$ є насиченим в просторі $S^{p'}_{\varphi'}(\mathscr{X}')$ з порядком насичення $\nu_\Lambda(r)$. Теорему доведено.

5.3.3. Достатні умови насичення. Для формулювання достатніх умов насичення введемо ще деякі позначення. Нехай $\psi = \psi(k),\ k = 1, 2, \dots ,$ — послідовність комплексних відмінних від нуля чисел, $\psi_k \neq 0\ \forall k \in \mathbb{N}$. Позначимо через ψS^p_φ множину всіх елементів $f \in S^p_\varphi$ для яких виконується умова

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\psi(k)|^p} |\hat{f}_\varphi(k)|^p < \infty. \tag{5.54}$$

Теорема 5.3.2 . *Якщо для даної послідовності функцій Λ множина B_Λ не збігається з усією множиною $\mathbb{N}$, і існує додатна монотонно спадна до нуля при $r \to r_0$ функція $\nu_\Lambda(r)$ така, що при всіх $k \in \mathbb{N} \setminus B_\Lambda$*

$$\lim_{r \to r_0} \frac{|1 - \lambda_k(r)|}{\nu_\Lambda(r)} = \frac{c}{\psi_0(k)}, \quad \text{де} \ \ \psi_0(k) > 0, \quad |c| > 0, \tag{5.55}$$

то

1) метод $U_r(\Lambda)$ є насиченим в усіх просторах $S^p_\varphi(\mathscr{X})$, незалежно від вибору параметрів $X,\ p,\ \varphi$, з порядком насичення $\nu_\Lambda(r)$;

2) справедливе вкладення

$$\Phi(\Lambda)_p \subseteq \psi S^p_\varphi, \tag{5.56}$$

де послідовність $\psi = \{\psi(k)\}_{k=1}^{\infty}$ така, що при $k \in \mathbb{N} \setminus B_\Lambda \quad \psi(k) = \psi_0(k)$, а при $k \in B_\Lambda \ \ |\psi(k)| \geq K_0 > 0$, де K_0— деяка додатна стала.

3) Якщо ж при цьому існує окіл $O_\delta(r_0)$, який міститься в усіх околах $O_{\delta_\Lambda(k)}(r_0)$: $O_\delta(r_0) \subset O_{\delta_\Lambda(k)}(r_0)$, $k \in B_\Lambda$, і виконується умова

$$\mu_k(r) := \frac{\psi_0(k)|1 - \lambda_k(r)|}{\nu_\Lambda(r)} \leq K_1 \quad k \in \mathbb{N} \setminus B_\Lambda,\ r \in O_{\delta_1}(r_0), \tag{5.57}$$

де $O_{\delta_1}(r_0)$ — деякий окіл з $O_\delta(r_0)$, то є правильною рівність

$$\Phi(\Lambda)_p = \psi S^p_\varphi. \tag{5.58}$$

Зауваження 5.3.2 . Зазначимо, що окіл $O_\delta(r_0)$, який міститиметься в усіх околах $O_{\delta_\Lambda(k)}(r_0)$, $k \in B_\Lambda$, буде існувати, зокрема, у випадку скінченної множини B_Λ.

У випадку, коли послідовності Λ утворюють нескінченні трикутні матриці чисел $\Lambda = \{\lambda_k(r)\} = \|\lambda_k^{(n)}\|$ $(r_0 = \infty)$ дане твердження доведено в [190], якщо ж множина B_Λ містить лише один елемент, то його можна отримати із результатів монографії [21 (гл. V)].

Доведення. Внаслідок теореми 5.3.1 для доведення даного твердження достатньо переконатися, що метод $U_r(\Lambda)$ є насиченим в $S^p_\varphi(\mathscr{X})$ хоча б при одному виборі параметрів X, φ та p. Зафіксуємо довільним чином параметри X, φ та p і покажемо, що за виконання умов теореми даний метод є насиченим в просторі $S^p_\varphi = S^p_\varphi(\mathscr{X})$.

Згідно з (5.48) якщо $\lambda_k(r) \neq 1$, то для будь-якого елемента $f \in S^p_\varphi$

$$0 \le |\widehat{f}_\varphi(k)| \le \frac{\|f - U_r(f;\Lambda)\|_{p,\varphi}}{|1-\lambda_k(r)|} = \frac{\nu_\Lambda(r)}{|1-\lambda_k(r)|}\frac{\|f - U_r(f;\Lambda)\|_{p,\varphi}}{\nu_\Lambda(r)}. \tag{5.59}$$

Якщо виконуються співвідношення (5.51) і (5.55), то права частина (5.59) прямує до нуля при $r \to r_0$. Це означає, що $\widehat{f}_\varphi(k) = 0,\ \ \forall k \in \mathbb{N} \setminus B_\Lambda$. Звідси випливає, що f — інваріантний елемент методу $U_r(\Lambda)$.

Нехай k_0 — довільне число із множини $\mathbb{N} \setminus B_\Lambda$ і $f_0 = \varphi_{k_0}$ Зрозуміло, що f_0 — неінваріантний елемент методу $U_r(\Lambda)$. Враховуючи (5.55), отримаємо

$$\|f_0 - U_r(f_0;\Lambda)\|_{p,\varphi} = \|\nu_\Lambda(r)\frac{1-\lambda_{k_0}(r)}{\nu_\Lambda(r)}\varphi_{k_0}\|_{p,\varphi} = \nu_\Lambda(r)\frac{|1-\lambda_{k_0}(r)|}{\nu_\Lambda(r)} \le C_{k_0}\nu_\Lambda(r),$$

де C_{k_0} — деяка стала.

Це означає, що метод $U_r(\Lambda)$ насичений в просторі S^p_φ, $p \in (0,\infty)$ і порядок насичення цього методу $\nu_\Lambda(r)$.

Переконаємось тепер в правильності вкладення (5.56). Для цього розглянемо довільний елемент $f \in S^p_\varphi$, який задовольняє співвідношення (5.52), і покажемо, що цей елемент належить множині ψS^p_φ, тобто, що справджується співвідношення (5.54).

З означення послідовності $\psi = \psi(k)$ випливає, що для кожного $f \in S^p_\varphi$

$$\sum_{k \in B_\Lambda} \frac{1}{|\psi(k)|^p}|\widehat{f}_\varphi(k)|^p \le \frac{1}{K_0}\sum_{k \in B_\Lambda}|\widehat{f}_\varphi(k)|^p \le \frac{\|f\|^p_{p,\varphi}}{K_0} < \infty,$$

і для доведення (5.54) досить показати, що справджується співвідношення

$$\sum_{k \in \mathbb{N}\setminus B_\Lambda} \frac{1}{|\psi(k)|^p}|\widehat{f}_\varphi(k)|^p < \infty. \tag{5.60}$$

Зрозуміло, що у випадку, коли множина $\mathbb{N} \setminus B_\Lambda$ — скінченна, останнє співвідношення виконується, а тому виконується і співвідношення (5.54).

Нехай тепер множина $\mathbb{N}\setminus B_\Lambda$ містить нескінченну кількість елементів. Для довільного натурального числа m покладемо $A_m = [1;m] \cap (\mathbb{N} \setminus B_\Lambda)$, і розглянемо частинну суму порядку не вище m ряду в (5.60)

$$\sum_{k \in A_m}\Big|\frac{\widehat{f}_\varphi(k)}{\psi(k)}\Big|^p. \tag{5.61}$$

Внаслідок (5.55) для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться число $\delta = \delta(\varepsilon, m) > 0$ таке, що для всіх $r \in O_\delta(r_0)$ і всіх $k \in A_m \quad \lambda_k(r) \neq 1$, і виконуватиметься нерівність

$$\frac{\nu_\Lambda(r)}{\psi_0(k)|1-\lambda_k(r)|} < \frac{1}{|c|} + \varepsilon. \tag{5.62}$$

Тоді, помноживши чисельник та знаменник кожного доданку суми (5.61) на величину $\dfrac{|1-\lambda_k(r)|^p}{\nu_\Lambda^p(r)}$, де $k \in A_m$, $r \in O_\delta(r_0)$, на підставі (5.62) і (5.52) отримаємо

$$\sum_{k\in A_m} \Big|\frac{\widehat{f}_\varphi(k)}{\psi(k)}\Big|^p = \sum_{k\in A_m} \frac{|1-\lambda_k(r)|^p|\widehat{f}_\varphi(k)|^p}{\nu_\Lambda^p(r)} \frac{\nu_\Lambda^p(r)}{|\psi_0(k)|^p|1-\lambda_k(r)|^p} \leq$$

$$\leq (1/|c| + \varepsilon)^p \sum_{k\in A_m} \frac{|1-\lambda_k(r)|^p|\widehat{f}_\varphi(k)|^p}{\nu_\Lambda^p(r)} \leq K_2.$$

Тобто, співвідношення (5.60) виконується, а тому виконуються співвідношення (5.54) і вкладення (5.56).

Переконаємось нарешті, що у випадку, коли всі околи $O_{\delta_\Lambda(k)}(r_0)$ містять деякий окіл $O_\delta(r_0)$, і виконуються умови теореми, то є правильним і протилежне включення:

$$\Phi(\Lambda)_p \supseteq \psi S_\varphi^p, \tag{5.63}$$

тобто, що для довільного елемента f, який задовольняє співвідношення (5.54), виконується нерівність (5.52).

Дійсно, в цьому випадку для всіх $r \in O_\delta(r_0)$ і $k \in B_\Lambda \quad \lambda_k(r) = 1$. Звідси випливає, що

$$\sum_{k\in B_\Lambda} \frac{|1-\lambda_k(r)|^p|\widehat{f}_\varphi(k)|^p}{\nu_\Lambda^p(r)} \leq \max_{r\in M\setminus O_\delta(r_0)} \max_{k\in B_\Lambda} \frac{|1-\lambda_k(r)|^p}{\nu_\Lambda^p(r)} \|f\|_{p,\varphi}^p = K_3. \tag{5.64}$$

Крім того, на підставі (5.57) при будь-якому $r \in O_{\delta_1}(r_0)$

$$\sum_{k\in \mathbb{N}\setminus B_\Lambda} \frac{|1-\lambda_k(r)|^p|\widehat{f}_\varphi(k)|^p}{\nu_\Lambda^p(r)} = \sum_{k\in \mathbb{N}\setminus B_\Lambda} \frac{\widehat{f}_\varphi(k)}{\psi(k)} \frac{|1-\lambda_k(r)|^p\psi(k)^p}{\nu_\Lambda^p(r)} \leq$$

$$\leq K_1 \sum_{k\in \mathbb{N}\setminus B_\Lambda} \frac{\widehat{f}_\varphi(k)}{\psi(k)} = K_4. \tag{5.65}$$

З (5.64) та (5.65) випливає, що при $K = K_3 + K_4$ для всіх $r \in O_{\delta_1}(r_0)$ виконується нерівність

$$\|f - U_r(f; \Lambda)\|_{p,\varphi} \leq K\nu_\Lambda(r),$$

тобто, $f \in \Phi(\Lambda)_p$ і справджується вкладення (5.63).

Об'єднуючи співвідношення (5.63) та (5.56), отримаємо (5.58). Теорему доведено.

Зауваження 5.3.3 . Твердження теореми 5.3.2 залишиться в силі, а її доведення практично не зміниться, якщо умову (5.55) замінити умовами:

$$\frac{|1-\lambda_k(r)|}{\nu_\Lambda(r)} = \alpha(k,r) + \beta(r) \tag{5.55$'$}$$

або

$$\frac{|1-\lambda_k(r)|}{\nu_\Lambda(r)} = \alpha(k,r)\beta(r), \tag{5.55$''$}$$

де $\alpha(k,r)$ така, що $\lim\limits_{r\to r_0}\alpha(k,r) = \frac{C}{\psi_0(k)}, \quad k\in\mathbb{N}\setminus B_\Lambda, \quad |c|>0,$ а $\beta(r)$ — величина, що не залежить від k і рівномірно обмежена по $r\to r_0:$ $|\beta(r)|<A$ і $\beta(r)\neq -\frac{C}{\psi_0(k)}$ в першому випадку, і $|\beta(r)|>\alpha_0>0$ у випадку (5.55$''$).

Зазначимо, що при формулюванні даної теореми у роботах [190] і [192] було пропущено умову (5.57).

5.3.4. Приклади. Як вже зазначалось, питання насичення в S^p_φ лінійних методів підсумовування рядів Фур'є, що задаються трикутними нескінченними числовими матрицями, розглядалися у роботах [190] та [192]. Зокрема, було показано, що, як і в періодичному випадку, методи Зігмунда, Рогозинського, Фавара, а також метод Валле Пуссена, якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{q(n)}{n}=1$ і $n-q(n)\to c_n<c$, є насиченими в усіх просторах $S^p_\varphi(\mathscr{X})$ незалежно від вибору параметрів $\mathscr{X}$, φ та p. Для цих методів вказано порядки та класи насичення. Також показано, що метод Валле Пуссена в усіх інших випадках не є насиченим в $S^p_\varphi(\mathscr{X})$.

В цьому пункті встановимо чи володіють властивістю насичення деякі відомі лінійні методи, що задаються послідовностями функцій, визначених на деякій підмножині з $\mathbb{C}$.

1. Узагальнений метод Абеля-Пуассона визначається послідовністю функцій $\Lambda = \{\lambda_k(r)\}$ таких, що

$$\lambda_k(r) = r^{(k-1)^s}, \quad k=1,2,\ldots;\ s>0,\ 0<r<1,\ r\to 1.$$

Цей метод є насиченим в усіх просторах $S^p_\varphi(\mathscr{X})$, $1\le p<\infty$, з порядком насичення $\nu_\Lambda(r)=1-r$, $\Phi(\Lambda)_p=\psi S^p_\varphi$, де

$$\psi(k) = \begin{cases} (k-1)^{-s}, & k=2,3,\ldots, \\ 1, & k=1. \end{cases}$$

Дійсно, оскільки в даному випадку

$$\lim_{r\to1}\frac{|1-\lambda_k(r)|}{\nu_\Lambda(r)} = (k-1)^s, \quad k=2,3,\ldots,$$

$B_\Lambda = \{1\}$, величини $\mu_k(r)$ обмежені (що легко перевірити), то згідно з теоремою 5.3.2 метод є насиченим з порядком насичення $\nu_\Lambda(r) = 1 - r$, і $\Phi(\Lambda)_p = \psi S^p_\varphi$.

У випадку, коли $s = 1$, елементи $U_r(f;\Lambda)$ цього методу співпадають з операторами $P_r(f)$, які означаються рівністю (5.44) і відповідають звичайному *методу Абеля-Пуассона.* Звідси випливає, що даний метод є також насиченим в усіх просторах $S^p_\varphi(\mathscr{X})$, $1 \le p < \infty$, з порядком насичення $\nu_\Lambda(r) = 1 - r$, причому клас насичення $\Phi(\Lambda)_p$ збігається з множиною ψS^p_φ, де

$$\psi(k) = \begin{cases} (k-1)^{-1}, & k = 2, 3, \dots, \\ 1, & k = 1. \end{cases}$$

2. Метод Рімана задається послідовністю функцій $\Lambda = \{\lambda_k(r)\}$, які визначаються рівностями

$$\lambda_k(r) = \left(\frac{\sin(k-1)r}{(k-1)r}\right)^h, \quad k = 2, 3 \dots; \ \lambda_1(r) \equiv 1, \ h > 0, \ r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \ r \to 0.$$

Даний метод насичений в усіх просторах $S^p_\varphi(\mathscr{X})$, $1 \le p < \infty$, з порядком насичення $\nu_\Lambda(r) = 1 - \left(\dfrac{\sin r}{r}\right)^h$, і $\Phi(\Lambda)_p = \psi S^p_\varphi$, де

$$\psi(k) = \begin{cases} (k-1)^{-2}, & k = 2, 3, \dots, \\ 1, & k = 1. \end{cases}$$

Дійсно, в цьому випадку

$$\lim_{r\to 1} \frac{|1 - \lambda_k(r)|}{\nu_\Lambda(r)} = (k-1)^2, \quad k = 2, 3, \dots,$$

$B_\Lambda = \{1\}$, а величини $\mu_k(r)$ обмежені. Тому на підставі теореми 5.3.2 метод є насиченим з порядком насичення $\nu_\Lambda(r) = 1 - \left(\dfrac{\sin r}{r}\right)^h$, і $\Phi(\Lambda)_p = \psi S^p_\varphi$.

3. Бігармонійний метод Абеля-Пуассона. В цьому випадку послідовність функцій $\Lambda = \{\lambda_k(r)\}$ така, що

$$\lambda_k(r) = \left(1 + \frac{(k-1)}{2}(1 - r^2)\right) r^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots; \ 0 < r < 1, \ r \to 1.$$

Цей метод є також насиченим в усіх просторах $S^p_\varphi(\mathscr{X})$, $1 \le p < \infty$, з порядком насичення $\nu_\Lambda(r) = 1 - \frac{r}{2}(3 - r^2)$, причому клас насичення $\Phi(\Lambda)_p$ збігається з множиною ψS^p_φ, де $\psi(k) \equiv 1$, тобто, $\Phi(\Lambda)_p = S^p_\varphi$

Дійсно, внаслідок теореми 5.3.2, так як

$$\lim_{r\to 1} \frac{|1 - \lambda_k(r)|}{\nu_\Lambda(r)} = 1, \quad k = 2, 3, \dots,$$

$B_\Lambda = \{1\}$, а величини $\mu_k(r)$ обмежені, то метод є насиченим в усіх просторах $S^p_\varphi(\mathscr{X})$ з порядком насичення $\nu_\Lambda(r) = 1 - \frac{r}{2}(3 - r^2)$, і $\Phi(\Lambda)_p = S^p_\varphi$.

4. Метод модуля неперервності. Послідовність функцій $\Lambda = \{\lambda_k(r)\}$ цього методу визначається рівностями

$$\lambda_k(r) = e^{i(k-1)(1-r)}, \quad k \in \mathbb{N};\ 0 < r < 1,\ r \to 1.$$

Цей метод насичений в усіх просторах $S^p_\varphi(\mathscr{X})$, $1 \le p < \infty$, з порядком насичення $\nu_\Lambda(r) = 1 - e^{i(1-r)}$, і $\Phi(\Lambda)_p = \psi S^p_\varphi$, де

$$\psi(k) = \begin{cases} (k-1)^{-1}, & k = 2, 3, \dots, \\ 1, & k = 1. \end{cases}$$

Справді, оскільки в цьому випадку

$$\lim_{r \to 1} \frac{|1 - \lambda_k(r)|}{\nu_\Lambda(r)} = (k-1), \quad k = 2, 3, \dots,$$

$B_\Lambda = \{1\}$, і величини $\mu_k(r)$ обмежені, то внаслідок теореми 5.3.2 метод є насиченим з порядком насичення $\nu_\Lambda(r) = 1 - e^{i(1-r)}$, і $\Phi(\Lambda)_p = \psi S^p_\varphi$.

5.4 Оцінки нелінійних апроксимативних характеристик просторів S^p_φ

В цьому підрозділі отримано порядкові оцінки важливих нелінійних апроксимативних характеристик просторів S^p_φ. Ці результати є наслідками сформульованих в підрозділі 1.6.3 відповідних результатів О. І. Степанця та тверджень підрозділу 6.7 про порядкові оцінки величин $H_n(\Psi; s)$ вигляду (6.194) та (6.195).

Будемо вважати, що послідовності $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ є звуженнями деяких додатних спадних до нуля функцій $\psi = \psi(t)$, $t \ge 1$. В такому випадку при всіх натуральних k маємо $\bar{\psi}(k) = \psi(k)$. Враховуючи означення величин $H_n(\Psi; s)$, рівності (1.109) та (1.112) з тверджень 1.6.2 та 1.6.3 можна записати у вигляді

$$\sigma_n^p(\psi\, U^q_\varphi)_{p,\varphi} = H_n(\psi, q/p).$$

Таким чином, на підставі наслідків 6.7.1–6.7.3 можна сформулювати такі твердження.

Твердження 5.4.1 . *Нехай $0 < p, q < \infty$, функція ψ належить множині B, а при $0 < p < q$, крім цього, при всіх t, більших ніж деяке число t_0, є опуклою та задовольняє умову*

$$t|\psi'(t)|/\psi(t) \ge K_0 > \beta,\ \psi'(t) := \psi'(t+), \tag{5.66}$$

де $\beta = d(1/p - 1/q)$. *Тоді має місце оцінка*

$$\sigma_n(\psi U^q_\varphi)_{p,\varphi} \asymp \psi(n) n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Твердження 5.4.2 . *Нехай* $0 < p, q < \infty$, *функція* ψ^p *належить множині* $\mathfrak{M}'_\infty$ *або* $\mathfrak{M}^c_\infty$. *Тоді має місце оцінка*

$$\sigma_n(\psi U^q_\varphi)_{p,\varphi} \asymp \psi(n)(n\alpha(\psi,n))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \asymp \psi(n)(\eta(\psi,n)-n))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Твердження 5.4.3 . *Нехай* $0 < p, q < \infty$, *функція* ψ^p *належить множині* $\mathfrak{M}''_\infty$. *Тоді має місце оцінка*

$$\sigma_n(\psi U^q_\varphi)_{p,\varphi} \asymp \psi(n+1).$$

Швидкість прямування до нуля величин $\mathscr{D}_n(\psi\, U^q_\varphi)_{p,\varphi}$ при $0 < q \le p$ визначається рівністю (1.108). Якщо ж $0 < p < q$, то застосовуючи до ряду в правій частині співвідношення (1.111) за аналогією з підрозідлом 3.1.2 відповідні оцінки з підрозділу 6.7 отримаємо такі твердження.

Твердження 5.4.4 . *Нехай* $0 < p < q$, *функція* ψ *належить множині* B *і крім цього, при всіх* t, *більших ніж деяке число* t_0, *є опуклою і задовольняє умову (5.67), то*

$$\mathscr{D}_n(\psi\, U^q_\varphi)_{p,\varphi} \asymp \psi(n) n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Твердження 5.4.5 . *Нехай* $0 < p < q$, *функція* ψ^p *належить множині* $\mathfrak{M}'_\infty$ *або* $\mathfrak{M}^c_\infty$. *Тоді*

$$\mathscr{D}_n(\psi\, U^q_\varphi)_{p,\varphi} \asymp \psi(n)(n\alpha(\psi,n))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \asymp \psi(n)(\eta(\psi,n)-n))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Твердження 5.4.6 . *Нехай* $0 < p < q$, *функція* ψ^p *належить множині* $\mathfrak{M}''_\infty$. *Тоді*

$$\mathscr{D}_n(\psi\, U^q_\varphi)_{p,\varphi} \asymp \psi(n+1).$$

Порівнюючи порядкові рівності для величин $\sigma_n(\psi U^q_\varphi)_{p,\varphi}$ та $\mathscr{D}_n(\psi\, U^q_\varphi)_{p,\varphi}$ бачимо, що у випадку, коли $0<q\le p$, а послідовність $\psi=\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ є звуженням на множині натуральних чисел деякої функції ψ з множини B або $\mathfrak{M}'_\infty$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma_n(\psi U^q_\varphi)_{p,\varphi}}{\mathscr{D}_n(\psi\, U^q_\varphi)_{p,\varphi}}=0.$$

Якщо ж $0<p<q$, або функція ψ належить множинам $\mathfrak{M}^c_\infty$ чи $\mathfrak{M}''_\infty$, і $0<p$, $q<\infty$, то має місце порядкова рівність

$$\sigma_n(\psi U^q_\varphi)_{p,\varphi}\asymp\mathscr{D}_n(\psi\, U^q_\varphi)_{p,\varphi},\quad n\to\infty.$$

На завершення цього підрозділу сформулюємо також наслідки для відповідних апроксимативних характеристик діагональних операторів в просторах l_p. При цьому будемо використовувати позначення з підрозділу 1.6.4 і вважати, що послідовності $\lambda=\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ є звуженнями деяких додатних спадних до нуля функцій $\lambda=\lambda(t)$, $t\ge 1$.

Твердження 5.4.7 . *Нехай $0<p$, $q<\infty$, функція λ належить множині B, а при $0<p<q$, крім цього, при всіх t, більших ніж деяке число t_0, є опуклою та задовольняє умову*

$$t|\lambda'(t)|/\lambda(t)\ge K_0>\beta,\ \ \lambda'(t):=\lambda'(t+), \tag{5.67}$$

де $\beta=d(1/p-1/q)$. Тоді мають місце оцінки

$$\sigma_n(T:l_q\to l_p)\asymp\lambda(n)n^{\frac1p-\frac1q}$$

і

$$\mathscr{D}_n(T:l_q\to l_p)\asymp\lambda(n)n^{\frac1p-\frac1q},\quad 0<p<q.$$

Твердження 5.4.8 . *Нехай $0<p$, $q<\infty$, функція λ^p належить множині $\mathfrak{M}'_\infty$ або $\mathfrak{M}^c_\infty$. Тоді мають місце оцінки*

$$\sigma_n(T:l_q\to l_p)\asymp\lambda(n)(n\alpha(\lambda,n))^{\frac1p-\frac1q}\asymp\lambda(n)(\eta(\lambda,n)-n))^{\frac1p-\frac1q}$$

і

$$\mathscr{D}_n(T:l_q\to l_p)\asymp\lambda(n)(n\alpha(\lambda,n))^{\frac1p-\frac1q}\asymp\lambda(n)(\eta(\lambda,n)-n))^{\frac1p-\frac1q},\quad 0<p<q.$$

Твердження 5.4.9 . *Нехай* $0 < p, q < \infty$, *функція* λ^p *належить множині* $\mathfrak{M}''_\infty$. *Тоді мають місце оцінки*

$$\sigma_n(T : l_q \to l_p) \asymp \lambda(n+1).$$

і

$$\mathscr{D}_n(T : l_q \to l_p) \asymp \lambda(n+1), \quad 0 < p < q.$$

5.5 Абсолютна збіжність ортогональних рядів

Повернемось ще раз до задачі про абсолютну збіжність ортогональних рядів. З огляду на твердження 2.5.1 за аналогією з підрозділом 2.5.1 природньо розглянути також таке питання: *нехай послідовність* $x = \{x_k\}_{k=1}^\infty$ *належить простору* l_p: $\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p < \infty$, $0 < p < \infty$ *і* s *— довільне фіксоване число з проміжку* $(0, p)$. *Які додаткові умови повинна задовольняти дана послідовність* x, *щоб ряд*

$$\sum_{k=1}^\infty |x_k|^s \tag{5.68}$$

збігався, тобто, щоб $x \in l_s$?

Відповіді на це питання випливає з такої теореми.

Теорема 5.5.1 . *Нехай* $x = \{x_k\}_{k=1}^\infty \in l_p$, $0 < p < \infty$, *і* $s \in (0, p)$. *Для того, щоб збігався ряд (5.68), необхідно та достатньо, щоб збігався ряд*

$$\sum_{n=1}^\infty n^{-s/p} \sigma_{n-1}^s(x)_{l_p}, \tag{5.69}$$

де, як і раніше,

$$\sigma_n(x)_{l_p} = \inf_{\alpha_k, \gamma_n} \|x - \sum_{k \in \gamma_n} \alpha_k e_k\|_{l_p} = \inf_{\gamma_{n-1}} \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p - \sum_{k \in \gamma_n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{5.70}$$

— величина найкращого n*-членного наближення послідовності* x *в просторі* l_p.

Доведення цього твердження базується на такій лемі — аналогу для числових рядів леми 2.5.1.

Лема 5.5.1 . *Нехай* u_n — *довільна невід'ємна монотонно незростаюча послідовність, для якої* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$, *і* $F_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} u_k$. *Тоді для будь-якого* $r \in (0,1)$

$$\left(1 - \frac{2^r}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{F_n}{n}\right)^r \le \sum_{n=1}^{\infty} u_n^r \le \left(\frac{1-r}{r}\right)^r \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{F_n}{n}\right)^r. \tag{5.71}$$

Зазначимо, що нерівності вигляду (5.71), як і нерівності вигляду (2.122) і (2.123), називають нерівностями Гарді.

Доведення. Другу з нерівностей у співвідношенні (5.71) по-суті доведено в [66] (див. також [183, с. 307]). Перша отримується за допомогою наступних міркувань, аналогічних доведенню леми 2.5.1. Оскільки послідовність u_n не зростає на $(0, \infty)$, то для будь-якого натурального числа $A > 1$ маємо

$$J := \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{F_n}{n}\right)^r \le \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{An} u_k\right)^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=An}^{\infty} u_k\right)^r. \tag{5.72}$$

Внаслідок монотонності послідовності u_n для першого доданку в правій частині (5.72) справджується оцінка

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{An} u_k\right)^r \le (A-1)^r \sum_{n=1}^{\infty} u_n^r. \tag{5.73}$$

Крім того, так як для довільних $n \in \mathbb{N}$ та $k = 0, 1, \ldots, A-1$

$$\frac{1}{n+k} \sum_{k=n+k}^{\infty} u_k \ge \frac{1}{An} \sum_{k=An}^{\infty} u_k,$$

то має місце нерівність

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=An}^{\infty} u_k\right)^r \le \frac{1}{A^{1-r}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{\infty} u_k\right)^r. \tag{5.74}$$

Об'єднуючи співвідношення (5.72)–(5.74), отримуємо

$$J \le (A-1)^r \sum_{n=1}^{\infty} u_n^r + \frac{1}{A^{1-r}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{\infty} u_k\right)^r =$$

$$= (A-1)^r J^* + \frac{1}{A^{1-r}}\, J,$$

де $J^* = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^r$. Звідси при $C = 2$ випливає необхідна нерівність.

Для доведення теореми 5.5.1 покладемо $r = s/p$ і $u_k = \bar{x}_k^p$, де $\bar{x}_k$ — спадна перестановка послідовності $|x_k|$. Тоді

$$\sigma_{n-1}^p(x)_{l_p} = \sum_{k=n}^{\infty} \bar{x}_k^p = \sum_{k=n}^{\infty} u_k = F(n).$$

Крім того, внаслідок означення перестановки послідовності

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^s = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{x}_k^s = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^r.$$

Звідси на підставі співвідношень (5.71) бачимо, що ряд (5.68) збігається тоді і лише тоді, коли збігається ряд (5.69). Теорему доведено.

Зазначимо, що у випадку $p = 2$ дане твердження збігається з твердженням 1.1.4 Р. ДеВора та В. М. Темлякова.

5.6 Необхідні та достатні умови виконання нерівностей типу Чебишова

В наступних двох розділах встановлюються деякі нові нерівності типу Чебишова. Ці результати істотно використовуються в розділах 2.1, 2.4 та 5.1.

5.6.1. Постановка задачі. Нехай f, g: $[a, b] \to \mathbb{R}$ та $p : [a, b] \to \mathbb{R}_0^+$ — довільні інтегровні на відрізку $[a, b]$ функції. Тоді якщо обидві функції f та g не спадають (або не зростають), то має місце нерівність (див., наприклад, [82 (гл. IX)])

$$\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx \geq \int_a^b p(x)f(x)dx \int_a^b p(x)g(x)dx \Big(\int_a^b p(x)dx \Big)^{-1}. \tag{5.75}$$

якщо ж одна з функцій f або g не зростає, а інша — не спадає, то має місце обернена нерівність

$$\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx \leq \int_a^b p(x)f(x)dx \int_a^b p(x)g(x)dx \Big(\int_a^b p(x)dx \Big)^{-1} \tag{5.76}$$

Відповідні аналоги нерівностей (5.75) і (5.76) для послідовностей формулюються наступним чином. Нехай $a = \{a_i\}_{i=1}^n$, $b = \{b_i\}_{i=1}^n$ — довільні незростаючі (або ж неспадні) послідовності чисел, $n \in \mathbb{N}$ і $p = \{p_i\}_{i=1}^n$ — будь-яка додатна послідовність чисел. Тоді

$$\sum_{k=1}^{n} p_k a_k b_k \geq \sum_{i=1}^{n} p_i a_i \sum_{k=1}^{n} p_k b_k \Big(\sum_{j=1}^{n} p_j \Big)^{-1}. \tag{5.77}$$

Якщо ж одна із послідовностей a або b не зростає, а інша — не спадає, то має місце обернена нерівність

$$\sum_{k=1}^{n} p_k a_k b_k \leq \sum_{i=1}^{n} p_i a_i \sum_{k=1}^{n} p_k b_k \Big(\sum_{j=1}^{n} p_j \Big)^{-1}. \tag{5.78}$$

Нерівності вигляду (5.75)–(5.78) відомі як нерівності Чебишова. Нерівність (5.75) була сформульована в 1882 році П.Л. Чебишовим в роботі [185]. В цій роботі П.Л. Чебишов формулював без доведень різні властивості залишкових членів деяких нескінченних дробів. При цьому з однієї із сформульованих властивостей випливало, що коли p, f, g — інтегровні на $[a, b]$ функції, $p(x) > 0$, і

$$\operatorname{sgn} \frac{df(x)}{dx} = \operatorname{sgn} \frac{dg(x)}{dx}$$

то має місце нерівність (5.75). Ця робота і дана властивість зокрема викликали великий інтерес у математиків того часу. У зв'язку з цим в 1883 році в роботі [186] П.Л. Чебишов публікує доведення цього результату.

Зазначимо, що існує велика кількість різноманітних доведень нерівностей (5.75)–(5.78) (див., наприклад, [3, 103, 125). Відомо також багато аналогів та узагальнень цих нерівностей. Зокрема, такі результати можна знайти в главі IX монографії [82], в якій проведено дуже детальний огляд результатів, пов'язаних з цією тематикою (див. також [80, 81]). Крім цього, варто відзначити також роботу [184], в якій міститься низка важливих результатів, які стосуються нерівностей типу Чебишева для сильно спадних функцій, додатних опуклих та вгнутих функцій, а також нерівностей Чебишова в банахових просторах та симетричних просторах.

В даному підрозділі вивчається таке питання: які мінімальні умови повинні задовольняти функції $p : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ та g: $[a, b] \to \mathbb{R}_0^+$, щоб нерівність

$$\int\limits_a^b p(x)f(x)g(x)dx \geq \Big(\int\limits_a^b p^r(x)f^r(x)dx \Big)^{1/r} \int\limits_a^b p(x)g(x)dx \Big(\int\limits_a^b p^r(x)dx \Big)^{-1/r} \tag{5.79}$$

або нерівність

$$\int\limits_a^b p(x)f(x)g(x)dx \leq \Big(\int\limits_a^b p^r(x)f^r(x)dx \Big)^{1/r} \int\limits_a^b p(x)g(x)dx \Big(\int\limits_a^b p^r(x)dx \Big)^{-1/r}, \tag{5.80}$$

де r — довільне додатне число, виконувалась для довільної не зростаючої на $[a, b]$ функції f: $[a, b] \to \mathbb{R}_0^+$.

Наші дослідження цього питання беруть свій початок від спільної статті О. І. Степанця та автора [158] (див. також [159]). В роботі [158] досліджувалися величини найкращих наближень інтегралів за допомогою інтегралів скінченного рангу (див. розділ 2) і нерівності вигляду (5.80) були потрібні для отримання точних значень точних верхніх меж цих величин на певних класах функцій (див. доведення леми 2.1.3). При цьому функція f була незростаючою, функція p не спадала, а функція g (на відміну від умов в нерівностях Чебишова) не була монотонною і мала спеціальний вигляд. В роботі [158] було отримано умови слабкіші умови (ніж умова монотонності функції g) на функції p та g, які гарантували виконання нерівності (5.80) (і, зокрема, нерівності (5.76)) для довільної незростаючої на $[a, b]$ функції f.

В даному підрозділі отримано необхідні та достатні умови на довільні інтегровні функції $p : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ та g: $[a, b] \to \mathbb{R}_0^+$ такі, щоб нерівність (5.80) або нерівність (5.79) виконувалася для будь-якої не зростаючої на $[a, b]$ функції f.

5.6.2. Основні результати.

Теорема 5.6.1 . *Нехай $r \in (0, 1]$ і g: $[a, b] \to \mathbb{R}_0^+$ та p: $[a, b] \to \mathbb{R}^+$ — інтегровні на $[a, b]$ функції. Для того, щоб нерівність (5.79) виконувалась для довільної незростаючої функції f: $[a, b] \to \mathbb{R}_0^+$, необхідно і достатньо, щоб для всіх $s \in (a, b)$*

$$\int_a^s p(x)g(x)dx\Big(\int_a^s p^r(x)dx\Big)^{-1} \geq \int_a^b p(x)g(x)dx\Big(\int_a^b p^r(x)dx\Big)^{-1}. \qquad (5.81)$$

У випадку, коли $r \in (1, \infty)$ має місце таке твердження:

Теорема 5.6.2 . *Нехай $r \in (1, \infty)$ і g: $[a, b] \to \mathbb{R}_0^+$ та p: $[a, b] \to \mathbb{R}^+$ — інтегровні на $[a, b]$ функції. Для того, щоб нерівність (5.79) виконувалась для довільної незростаючої функції f: $[a, b] \to \mathbb{R}_0^+$, необхідно і достатньо, щоб для всіх $s \in (a, b)$*

$$\int_a^s p(x)g(x)dx\Big(\int_a^s p^r(x)dx\Big)^{-1/r} \geq \int_a^b p(x)g(x)dx\Big(\int_a^b p^r(x)dx\Big)^{-1/r}. \qquad (5.82)$$

Зазначимо, що у випадку, коли $r = 1$ і f — зростаюча на $[a, b]$ функція, справедливість нерівності (5.75) за подібних умов випливає з наступного результату Дж. Ф. Стеффенсена:

Твердження 5.6.1 *(Дж. Ф. Стеффенсен [161], [82 (гл. IX)]). Якщо F зростаюча на $[a,b]$ функція і F, G та H — інтегравні на $[a,b]$ функції такі, що при всіх $s \in [a,b]$*

$$\int_a^s G(x)dx\Big(\int_a^b G(x)dx\Big)^{-1} \le \int_a^s H(x)dx\Big(\int_a^b H(x)dx\Big)^{-1},$$

то

$$\int_a^b F(x)G(x)dx\Big(\int_a^b G(x)dx\Big)^{-1} \le \int_a^b F(x)H(x)dx\Big(\int_a^b H(x)dx\Big)^{-1}.$$

Поклавши в цьому твердженні $F(x) = f(x)$, $H(x) = p(x) > 0$, $G(x) = p(x)g(x)$, робимо висновок, що нерівність (5.75) виконується якщо $p(x) > 0$, f — зростаюча на $[a,b]$ функція і при всіх $s \in [a,b]$,

$$\int_a^s p(x)g(x)dx\Big(\int_a^s p(x)dx\Big)^{-1} \le \int_a^b p(x)g(x)dx\Big(\int_a^b p(x)dx\Big)^{-1}. \tag{5.83}$$

Звернемо увагу також на роботу М. Бернацького [11]. З результатів цієї роботи випливає, що нерівність (5.75) також виконується у випадку, коли обидві функції

$$f(x) \quad \text{та} \quad \int_a^x p(t)g(t)dt\Big(\int_a^x p(t)dt\Big)^{-1}$$

зростають або спадають. Ці умови є простішими за умови (5.81)–(5.83), але менш загальними.

У випадку, коли при даному $r > 0$ добуток $p^{1-r}(x)g(x)$ не зростає, похідна функції

$$\Phi_r(s) = \int_a^s p(x)g(x)dx\Big(\int_a^s p^r(x)dx\Big)^{-1} \tag{5.84}$$

є недодатною на $(a,b]$. Тому функція $\Phi_r(s)$ також є незростаючою і умова (5.81) виконується. Звідси отримуємо таке твердження.

Наслідок 5.6.1 . *Нехай f, g: $[a,b] \to \mathbb{R}_0^+$ та p: $[a,b] \to \mathbb{R}^+$ — інтегровні функції. Якщо при даному $r \in (0,1]$ добуток $p^{1-r}(x)g(x)$ не зростає на $[a,b]$ і функція f також є незростаючою на $[a,b]$, то має місце нерівність (5.79).*

Розглянемо тепер нерівність (5.80).

Теорема 5.6.3 . *Нехай $r \in (0,1]$ і g: $[a,b] \to \mathbb{R}_0^+$ та p: $[a,b] \to \mathbb{R}^+$ — інтегровні на $[a,b]$ функції. Для того, щоб нерівність (5.80) виконувалась для довільної незростаючої функції f: $[a,b] \to \mathbb{R}_0^+$, необхідно і достатньо, щоб для всіх $s \in (a,b)$*

$$\int_a^s p(x)g(x)dx\Big(\int_a^s p^r(x)dx\Big)^{-1/r} \leq \int_a^b p(x)g(x)dx\Big(\int_a^b p^r(x)dx\Big)^{-1/r}. \qquad (5.85)$$

У випадку, коли $r \in (1,\infty)$ має місце таке твердження:

Теорема 5.6.4 . *Нехай $r \in (1,\infty)$ і g: $[a,b] \to \mathbb{R}_0^+$ та p: $[a,b] \to \mathbb{R}^+$ — інтегровні на $[a,b]$ функції. Для того, щоб нерівність (5.80) виконувалась для довільної незростаючої функції f: $[a,b] \to \mathbb{R}_0^+$, необхідно і достатньо, щоб для всіх $s \in (a,b)$*

$$\int_a^s p(x)g(x)dx\Big(\int_a^s p^r(x)dx\Big)^{-1} \leq \int_a^b p(x)g(x)dx\Big(\int_a^b p^r(x)dx\Big)^{-1}. \qquad (5.86)$$

Зазначимо, що у випадку, коли f: $[a,b] \to \mathbb{R}_0^+$ та p: $[a,b] \to \mathbb{R}^+$ — незростаючі функції, а функція g така, що $g(x) = 0$ при всіх $x \in [a,\sigma)$ і $g(x) = 1/p(x)$ при $x \in [\sigma,b]$, $a < \sigma < b$, достатність умов (5.85) та (5.86) для виконання нерівності (5.80) випливає (для відповідних $r \in (0,\infty)$) з доведень лем 2 та 3 роботи [158] (див. також [159, леми 3.1 та 3.3]).

У випадку, коли при даному $r > 0$ добуток $p^{1-r}(x)g(x)$ не спадає, похідна функції $\Phi_r(s)$, означеної рівністю (5.84) є невід'ємною на $(a,b]$. Тому функція $\Phi_r(s)$ також є неспадною і умова (5.86) виконується. Таким чином, має місце таке твердження:

Наслідок 5.6.2 . *Нехай f, g: $[a,b] \to \mathbb{R}_0^+$ та p: $[a,b] \to \mathbb{R}^+$ — інтегровні функції. Якщо при даному $r \in [1,\infty)$ добуток $p^{1-r}(x)g(x)$ не спадає на $[a,b]$, а функція f не зростає на $[a,b]$, то має місце нерівність (5.80).*

Зауваження 5.6.1 . Твердження, які дають необхідні та достатні умови виконання нерівностей (5.79) та (5.80) для довільної *неспадної* функції f мають той самий вигляд, що і теореми 5.6.1–5.6.4, але всі інтеграли вигляду $\int_a^s(\cdot)dx$ в умовах (5.81), (5.82), (5.85) та (5.86) слід замінити в цих твердженнях на інтеграли вигляду $\int_s^b(\cdot)dx$.

5.6.3. Дискретні аналоги теорем 5.6.1–5.6.4. При доведенні теорем 5.6.1–5.6.4 істотно використовуються їх дискретні аналоги.

Лема 5.6.1 . *Нехай $r \in (0,1]$, $b = \{b_k\}_{k=1}^n$ та $p = \{p_k\}_{k=1}^n$ — довільні послідовності невід'ємних чисел, $n \in \mathbb{N}$, $p_k > 0$. Для довільної незростаючої послідовності невід'ємних чисел $a = \{a_k\}_{k=1}^n$ нерівність*

$$\sum_{k=1}^{n} p_k a_k b_k \geq \Big(\sum_{i=1}^{n} p_i^r a_i^r\Big)^{1/r} \sum_{k=1}^{n} p_k b_k \Big(\sum_{k=1}^{n} p_k^r\Big)^{-1/r} \tag{5.87}$$

виконується тоді і лише тоді, коли

$$\min_{s\in[1,n]} \sum_{k=1}^{s} p_k b_k \Big(\sum_{k=1}^{s} p_k^r\Big)^{-1} = \sum_{k=1}^{n} p_k b_k \Big(\sum_{k=1}^{n} p_k^r\Big)^{-1}. \tag{5.88}$$

Доведення. *Достатність.* Спочатку перевіримо достатність умови (5.88) для виконання нерівності (5.87) у випадку, коли $n = 2$. Для цього покладемо

$$c := (p_1 a_1)^r + (p_2 a_2)^r, \quad x_1 := (p_1 a_1)^r, \quad \alpha_k := p_k b_k, \quad \beta_k := p_k^{-1}, \quad k = 1, 2, \tag{5.89}$$

і на відрізку $[0, c]$ розглянемо функцію

$$h(x) := \alpha_1 \beta_1 x^{1/r} + \alpha_2 \beta_2 (c - x)^{1/r}. \tag{5.90}$$

Якщо $r \neq 1$, $\alpha_1 \neq 0$ і $\alpha_2 \neq 0$, то єдина критична точка цієї функції, яка має вигляд

$$x_* = c(\alpha_1\beta_1)^{\frac{r}{r-1}}\Big((\alpha_1\beta_1)^{\frac{r}{r-1}} + (\alpha_2\beta_2)^{\frac{r}{r-1}}\Big)^{-1} = c(\alpha_2\beta_2)^{\frac{r}{1-r}}\Big((\alpha_1\beta_1)^{\frac{r}{1-r}} + (\alpha_2\beta_2)^{\frac{r}{1-r}}\Big)^{-1}, \tag{5.91}$$

є точкою мінімуму. Тому при всіх $x \in [0, x_*]$ функція $h(x)$ не зростає, а при всіх $x \in [x_*, c]$ — не спадає. Звідси випливає, що на довільному відрізку $[x_0, c] \subset [x_*, c]$ дана функція набуває свого найменшого значення в точці x_0. Тобто, $\forall x \in [x_0, c] \subset [x_*, c]$

$$h(x) \geq h(x_0). \tag{5.92}$$

Поклавши

$$x_0 = c\,\beta_1^{-r}(\beta_1^{-r} + \beta_2^{-r})^{-1}, \tag{5.93}$$

бачимо, що $[x_0, c] = \{x \in [0, c] \ : \ \beta_1 x^{\frac{1}{r}} \geq \beta_2 (c - x)^{\frac{1}{r}}\}$. Тому якщо послідовність a не зростає, то внаслідок (5.89)

$$\beta_1 x_1^{\frac{1}{r}} = a_1 \geq a_2 = \beta_2 (c - x_1)^{\frac{1}{r}},$$

і отже, $x_1 \in [x_0, c]$. Таким чином, якщо $x_0 \geq x_*$, то на підставі (5.92)

$$h(x_1) \geq h(x_0), \tag{5.94}$$

звідки, враховуючи позначення в (5.89), (5.90) та (5.93), ми отримуємо (5.87):

$$\sum_{k=1}^{2} p_k a_k b_k = h(x_1) \geq h(x_0) = \Big(\sum_{i=1}^{2} p_i^r a_i^r\Big)^{1/r} \sum_{k=1}^{2} p_k b_k \Big(\sum_{k=1}^{2} p_k^r\Big)^{-1/r}. \tag{5.95}$$

Отже, покажемо, що $x_0 \geq x_*$. Внаслідок (5.88) із врахуванням (5.89) маємо

$$\min_{s\in[1,2]} \sum_{k=1}^{s} \alpha_k \Big(\sum_{k=1}^{s} \beta_k^{-r}\Big)^{-1} = \sum_{k=1}^{2} \alpha_k \Big(\sum_{k=1}^{2} \beta_k^{-r}\Big)^{-1}.$$

Тоді на підставі співвідношення

$$\min_{k=1,2} \delta_k \gamma_k^r \leq \frac{\delta_1 + \delta_2}{\gamma_1^{-r} + \gamma_2^{-r}} \leq \max_{k=1,2} \delta_k \gamma_k^r \tag{5.96}$$

яке виконується для довільних чисел $\delta_k \geq 0$, $\gamma_k > 0$ та $r > 0$ і перетворюється у рівність тоді і лише тоді, коли $\delta_1\gamma_1^r = \delta_2\gamma_2^r$, будемо мати

$$\alpha_1 \beta_1^r \geq \alpha_2 \beta_2^r. \tag{5.97}$$

Внаслідок співвідношень (5.97), (5.91) та (5.93)

$$x_0 - x_* = \frac{c\left((\alpha_1\beta_1^r)^{\frac{r}{1-r}} - (\alpha_2\beta_2^r)^{\frac{r}{1-r}}\right)}{\left(\beta_1^{-r} + \beta_2^{-r}\right)\left((\alpha_1\beta_1)^{\frac{r}{r-1}} + (\alpha_2\beta_2)^{\frac{r}{r-1}}\right)} \geq 0.$$

Таким чином, бачимо, що дійсно $x_0 \geq x_*$ і тому справджується співвідношення (5.95).

Якщо $r = 1$, то внаслідок (5.97) функція $h(x)$ неспадна на будь-якому проміжку $[x_0, c] \subset [0, c]$. Якщо $\alpha_2 = 0$ і $\alpha_1 \neq 0$, то функція $h(x)$ також не спадає на будь-якому проміжку $[x_0, c] \subset [0, c]$. Тому в цих випадках нерівність (5.92) виконується, а тому виконується також співвідношення (5.95).

З огляду на (5.97), бачимо що тільки в тривіальному випадку, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, має місце рівність $\alpha_1 = 0$.

Таким чином, при $n = 2$ достатність умови (5.88) для виконання нерівності (5.87) доведено.

В загальному випадку твердження про достатність умови (5.88) для виконання нерівності (5.87) доведемо за індукцією по n.

Випадок $n = 1$ тривіальний.

У випадку, коли $n = 2$, дане твердження доведено вище.

Припустимо, що воно має місце при $n = m - 1 \geq 1$.

Покажемо, що при $n = m$ дане твердження також виконується.

Спочатку переконаємось, що при деякому s, $s < m-1$ справджується нерівність:

$$\min_{j=s,s+1} \frac{\sum_{k=s}^{j} p_k b_k}{\sum_{k=s}^{j} p_k^r} = \frac{p_s b_s + p_{s+1} b_{s+1}}{p_s^r + p_{s+1}^r}. \tag{5.98}$$

Дійсно, якщо при всіх $s < m-1$

$$\min_{j=s,s+1} \sum_{k=s}^{j} p_k b_k \Big(\sum_{k=s}^{j} p_k^r \Big)^{-1} = b_s p_s^{1-r} < \sum_{k=s}^{s+1} p_k b_k \Big(\sum_{k=s}^{s+1} p_k^r \Big)^{-1}, \tag{5.99}$$

то використовуючи (5.96), із співвідношення (5.99) отримаємо

$$b_1 p_1^{1-r} < b_2 p_2^{1-r} < \ldots < b_m p_m^{1-r}.$$

Внаслідок (5.96) звідси випливає, що

$$\sum_{k=1}^{m} p_k b_k \Big(\sum_{k=1}^{m} p_k^r \Big)^{-1} > \min_{k \in [1,m]} b_k p_k^{1-r} = b_1 p_1^{1-r}.$$

Тобто, ми отримали протиріччя з умовою (5.88). Отже, існує принаймні один номер $s < m-1$, при якому виконується співвідношення (5.98).

Нехай, наприклад, співвідношення (5.98) виконується при $s = 1$. Тоді до оцінки суми $\sum\limits_{k=1}^{2} p_k a_k b_k$ ми можемо застосувати дане твердження (яке у випадку $n = 2$ було доведено вище). Отримаємо

$$\sum_{k=1}^{m} p_k a_k b_k \geq \Big(p_1^r a_1^r + p_2^r a_2^r \Big)^{1/r} (p_1 b_1 + p_2 b_2) \Big(p_1^r + p_2^r \Big)^{-1/r} +$$

$$+ \sum_{k=3}^{m} p_k a_k b_k = \sum_{k=1}^{m-1} p'_k a'_k b'_k, \tag{5.100}$$

де

$$p'_k = \begin{cases} (p_1^r + p_2^r)^{1/r}, & k = 1, \\ p_{k+1}, & k = \overline{2, m-1}; \end{cases} \quad b'_k = \begin{cases} (p_1 b_1 + p_2 b_2) \Big(p_1^r + p_2^r \Big)^{-1/r}, & k = 1, \\ b_{k+1}, & k = \overline{2, m-1}; \end{cases} \tag{5.101}$$

$$a'_k = \begin{cases} \Big(p_1^r a_1^r + p_2^r a_2^r \Big)^{1/r} \Big(p_1^r + p_2^r \Big)^{-1/r}, & k = 1, \\ a_{k+1}, & k = \overline{2, m-1}. \end{cases} \tag{5.102}$$

Сума $\sum\limits_{k=1}^{m-1} p'_k a'_k b'_k$ містить $m-1$ доданок. Для довільної незростаючої послідовності $a = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ послідовність вигляду (5.102) також не зростає.

Справді, на підставі (5.102) для довільного $k = 2, 3, \dots, m-2$ маємо

$$a'_k = a_{k+1} \geq a_{k+2} = a'_{k+1}.$$

Нерівність $a'_1 \geq a'_2$ еквівалентна нерівності

$$\Big(\frac{p_1^r a_1^r + p_2^r a_2^r}{p_1^r + p_2^r}\Big)^{1/r} \geq a_3,$$

яка виконується для довільної незростаючої послідовності a.

Внаслідок (5.88) та (5.101)

$$\min_{s\in[1,m-1]} \frac{\sum_{k=1}^{s} p'_k b'_k}{\sum_{k=1}^{s} {p'_k}^r} \geq \min_{s\in[1,m]} \frac{\sum_{k=1}^{s} p_k b_k}{\sum_{k=1}^{s} p_k^r} = \frac{\sum_{k=1}^{m} p_k b_k}{\sum_{k=1}^{m} p_k^r} = \frac{\sum_{k=1}^{m-1} p'_k b'_k}{\sum_{k=1}^{m-1} {p'_k}^r}.$$

звідси випливає, що послідовності a'_k, b'_k and p'_k задовольняють припущення індукції. Таким чином, на підставі (5.100), (5.101) та (5.102) отримуємо

$$\sum_{k=1}^{m} p_k a_k b_k \geq \sum_{k=1}^{m-1} p'_k a'_k b'_k \geq \Big(\sum_{i=1}^{m-1} {p'_i}^r {a'_i}^r\Big)^{1/r} \sum_{k=1}^{m-1} p'_k b'_k \Big(\sum_{j=1}^{m-1} {p'_j}^r\Big)^{-1/r} =$$

$$= \Big(\sum_{i=1}^{m} p_i^r a_i^r\Big)^{1/r} \sum_{k=1}^{m} p_k b_k \Big(\sum_{j=1}^{m} p_j^r\Big)^{-1/r}$$

Отже, у випадку, коли умова (5.98) виконується при $s = 1$, нерівність (5.87) має місце. Аналогічно можна показати, що справедливість нерівності (5.87) у випадку, коли (5.98) виконується при довільному іншому $1 < s < m-1$.

Необхідність умови (5.88) доведемо методом від супротивного. Припустимо, що

$$\min_{s\in[1,n]} \sum_{k=1}^{s} p_k b_k \Big(\sum_{k=1}^{s} p_k^r\Big)^{-1} = \sum_{k=1}^{s^*} p_k b_k \Big(\sum_{k=1}^{s^*} p_k^r\Big)^{-1} < \sum_{k=1}^{n} p_k b_k \Big(\sum_{k=1}^{n} p_k^r\Big)^{-1}. \tag{5.103}$$

Покладемо

$$\alpha_1 = \sum_{i=1}^{s^*} p_i b_i, \quad \alpha_2 = \sum_{i=s^*+1}^{n} p_i b_i, \quad \beta_1 = (\sum_{i=1}^{s^*} p_i^r)^{-1/r}, \quad \beta_2 = (\sum_{i=s^*+1}^{n} p_i^r)^{-1/r},$$

і для довільного $c > 0$ на проміжку $[0, c]$ розглянемо функцію $h(x)$ вигляду (5.90).

Далі, розглянемо послідовність $a' = \{a'_i\}_{i=1}^{n}$ таку, що

$$a'_i = \begin{cases} \beta_1 x_*^{\frac{1}{r}}, & i = 1, 2, \dots, s^*, \\ \beta_2 (c - x_*)^{\frac{1}{r}}, & i = s^*+1, \dots, n, \end{cases}$$

де x_* визначається рівністю (5.91).

На підставі означення послідовності a', маємо

$$\sum_{k=1}^{n} p_k a'_k b_k = h(x_*) \tag{5.104}$$

і

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} p_i^r {a'_i}^r\Big)^{1/r} \sum_{k=1}^{n} p_k b_k \Big(\sum_{k=1}^{n} p_k^r\Big)^{-1/r} = h(x_0), \tag{5.105}$$

де x_0 визначається співвідношенням (5.93).

Беручи до уваги (5.96), із співвідношення (5.103) робимо висновок, що

$$\alpha_1\beta_1^r = \sum_{k=1}^{s^*} p_k b_k \Big(\sum_{k=1}^{s^*} p_k^r\Big)^{-1} < \sum_{k=s^*+1}^{n} p_k b_k \Big(\sum_{k=s^*+1}^{n} p_k^r\Big)^{-1} = \alpha_2\beta_2^r. \tag{5.106}$$

Тому

$$x_0 - x_* = \frac{c\left((\alpha_1\beta_1^r)^{\frac{r}{1-r}} - (\alpha_2\beta_2^r)^{\frac{r}{1-r}}\right)}{\left(\beta_1^{-r} + \beta_2^{-r}\right)\left((\alpha_1\beta_1)^{\frac{r}{r-1}} + (\alpha_2\beta_2)^{\frac{r}{r-1}}\right)} < 0,$$

і $x_0 < x_*$. З огляду на співвіношення $[x_0, c] = \{x \in [0, c] \ : \ \beta_1 x^{\frac{1}{r}} \geq \beta_2(c-x)^{\frac{1}{r}}\}$ бачимо, що $\beta_1 x_*^{\frac{1}{r}} \geq \beta_2(c-x_*)^{\frac{1}{r}}$ і для будь-якого $i = 1, 2, \ldots, n-1$ нерівність $a'_i \geq a'_{i+1}$ виконується.

Крім цього, як зазначено вище, при $r \neq 1$, $\alpha_1 \neq 0$ та $\alpha_2 \neq 0$ точка x_* із (5.91) є точкою мінімуму функції $h(x)$. Звідси

$$h(x_*) < h(x_0). \tag{5.107}$$

Якщо $r = 1$ (внаслідок (5.106)) або якщо $\alpha_1 = 0$ та $\alpha_2 \neq 0$, то функція $h(x)$ не зростає на проміжку $[0, c]$. Тобто, в цих випадках нерівність (5.107) також виконується. Внаслідок (5.106) рівність $\alpha_2 = 0$ неможлива.

Об'єднуючи співвідношення (5.104), (5.105) та (5.107), робимо висновок, що для послідовності a', нерівність (5.87) не виконується. Таким чином, припущення невірне і необхідність умови (5.88) доведено.

Лема 5.6.2 . *Нехай $r \in [1, \infty)$, $b = \{b_k\}_{k=1}^n$ та $p = \{p_k\}_{k=1}^n$ — довільні послідовності невід'ємних чисел, $n \in \mathbb{N}$, $p_k > 0$. Для довільної незростаючої послідовності невід'ємних чисел $a = \{a_k\}_{k=1}^n$ нерівність (5.87) виконується тоді і лише тоді, коли*

$$\min_{s\in[1,n]} \sum_{k=1}^{s} p_k b_k \Big(\sum_{k=1}^{s} p_k^r\Big)^{-1/r} = \sum_{k=1}^{n} p_k b_k \Big(\sum_{k=1}^{n} p_k^r\Big)^{-1/r}. \tag{5.108}$$

Доведення. Необхідність. Аналогічно припустимо, що

$$\min_{s\in[1,n]}\sum_{k=1}^{s} p_k b_k\Big(\sum_{k=1}^{s} p_k^r\Big)^{-1/r} = \sum_{k=1}^{s^*} p_k b_k\Big(\sum_{k=1}^{s^*} p_k^r\Big)^{-1/r} < \sum_{k=1}^{n} p_k b_k\Big(\sum_{k=1}^{n} p_k^r\Big)^{-1/r}. \tag{5.109}$$

Розглянемо послідовність $a' = \{a_i'\}_{i=1}^n$ вигляду

$$a_i' = \begin{cases} (\sum_{k=1}^{s^*} p_k^r)^{-1/r}, & k = 1, 2, \ldots, s^*, \\ 0, & k = s^*+1, \ldots, n. \end{cases}$$

Для цієї послідовність будемо мати

$$\sum_{k=1}^{n} p_k a_k' b_k = \sum_{k=1}^{s^*} p_k b_k\Big(\sum_{k=1}^{s^*} p_k^r\Big)^{-1/r}$$

і

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} p_i^r {a_i'}^r\Big)^{1/r}\sum_{k=1}^{n} p_k b_k\Big(\sum_{k=1}^{n} p_k^r\Big)^{-1/r} = \sum_{k=1}^{n} p_k b_k\Big(\sum_{k=1}^{n} p_k^r\Big)^{-1/r}.$$

Об'єднуючи ці співвідношення і враховуючи (5.109), робимо висновок, що для послідовності a' нерівність (5.87) не виконується. Отже, необхідність умови (5.108) доведено.

Достатність. Твердження про достатність умови (5.108) для виконання нерівності (5.87) доведемо за індукцією по n.

Випадок $n = 1$ очевидний.

Припустимо, що при $n = m - 1 \geq 1$ дане твердження виконується.

Покажемо, що воно виконується також при $n = m$.

Для цього ми використаєм позначення (5.89) і на проміжку $[0, c]$ розглянемо функцію $h(x)$, означену рівністю (5.90), в якій $r \in (1, \infty)$.

Поклавши

$$x_0 = c\,\beta_1^{-r}(\beta_1^{-r} + \beta_2^{-r})^{-1},$$

аналогічно до доведення леми 5.6.1 робимо висновок, що $[x_0, c] = \{x \in [0, c] : \beta_1 x^{\frac{1}{r}} \geq \beta_2 (c-x)^{\frac{1}{r}}\}$. На підставі (5.89) та монотонності послідовності a бачимо, що $x_1 \in [x_0, c]$.

Далі, розглянемо наступні два випадки:

$$1)\ h(x_1) \geq h(x_0) \tag{5.110}$$

і

$$2)\ h(x_1) < h(x_0). \tag{5.111}$$

В першому випадку, використаємо позначення (5.101) та (5.102). Тоді внаслідок (5.110) отримуємо

$$\sum_{k=1}^{m} p_k a_k b_k = h(x_1) + \sum_{k=3}^{m} p_k a_k b_k \geq h(x_0) + \sum_{k=3}^{m} p_k a_k b_k = \sum_{k=1}^{m-1} p'_k a'_k b'_k. \tag{5.112}$$

Сума $\sum\limits_{k=1}^{m-1} p'_k a'_k b'_k$ містить $m-1$ доданок. Для довільної незростаючої послідовності $a = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ послідовність вигляду (5.102) також не зростає. Крім цього, з огляду на співвідношення (5.108) та (5.101) бачимо, що

$$\min_{s\in[1,m-1]} \frac{\sum\limits_{k=1}^{s} p'_k b'_k}{\left(\sum\limits_{k=1}^{s} {p'_k}^r\right)^{1/r}} \geq \min_{s\in[1,m]} \frac{\sum\limits_{k=1}^{s} p_k b_k}{\left(\sum\limits_{k=1}^{s} p_k^r\right)^{1/r}} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} p_k b_k}{\left(\sum\limits_{k=1}^{m} p_k^r\right)^{1/r}} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{m-1} p'_k b'_k}{\left(\sum\limits_{k=1}^{m-1} {p'_k}^r\right)^{1/r}}. \tag{5.113}$$

Тому послідовності a'_k, b'_k and p'_k задовольняють припущення індукції. Звідси, внаслідок (5.112), (5.101) і (5.102) отримуємо

$$\sum_{k=1}^{m} p_k a_k b_k \geq \sum_{k=1}^{m-1} p'_k a'_k b'_k \geq \left(\sum_{i=1}^{m-1} {p'_i}^r {a'_i}^r\right)^{1/r} \sum_{k=1}^{m-1} p'_k b'_k \left(\sum_{k=1}^{m-1} {p'_k}^r\right)^{-1/r} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{m} p_i^r a_i^r\right)^{1/r} \sum_{k=1}^{m} p_k b_k \left(\sum_{k=1}^{m} p_k^r\right)^{-1/r}. \tag{5.114}$$

Отже, у випадку, коли умова (5.110) виконується, нерівність (5.87) також має місце.

Покажемо тепер, що це так і у випадку, коли виконується умова (5.111). Легко бачити, що внаслідок (5.111) число $\alpha_2 \neq 0$. При $\alpha_1 \neq 0$ на відрізку $[0, c]$ функція $h(x)$ має єдину критичну точку

$$x_* = \frac{c(\alpha_2\beta_2)^{\frac{r}{1-r}}}{(\alpha_1\beta_1)^{\frac{r}{1-r}} + (\alpha_2\beta_2)^{\frac{r}{1-r}}},$$

яка є її точкою максимуму. Тому при $x \in [0, x_*]$ функція $h(x)$ не спадає, а при $x \in [x_*, c]$ — не зростає. На підставі (5.111) і нерівності $x_1 > x_0$, робимо висновок, що при $x \in [x_1, c]$ функція $h(x)$ є незростаючою. Звідси випливає, що для довільного $\widetilde{x} \in [x_1, c]$ має місце нерівність

$$h(\widetilde{x}) < h(x_1). \tag{5.115}$$

Якщо $\alpha_1 = 0$, то функція $h(x)$ не зростає на будь-якому проміжку interval $[x_0, c]$ і тому в цьому випадку, співвідношення (5.115) також виконується.

Нехай $\widetilde{x}$ — таке число, що $\beta_2(c-\widetilde{x})^{\frac{1}{r}} = a_3$. Тоді враховуючи прийняті позначення та монотонність послідовності a, робимо висновок, що $\widetilde{x} \in [x_1, c]$ і отже для такого $\widetilde{x}$ нерівність (5.115) має місце

Покладаючи

$$p'_k = \begin{cases} p_1, & k=1, \\ (p_2^r + p_3^r)^{1/r}, & k=2, \\ p_{k+1}, & k=\overline{3,m-1}; \end{cases} \quad b'_k = \begin{cases} b_1, & k=1, \\ (p_2b_2 + p_3b_3)\Big(p_2^r + p_3^r\Big)^{-1/r}, & k=2, \\ b_{k+1}, & k=\overline{3,m-1}; \end{cases} \tag{5.116}$$

$$a'_k = \begin{cases} a_1, & k=1, \\ \Big(p_2^r a_2^r + p_3^r a_3^r\Big)^{1/r}\Big(p_2^r + p_3^r\Big)^{-1/r}, & k=2, \\ a_{k+1}, & k=\overline{3,m-1}, \end{cases} \tag{5.117}$$

отримуємо

$$\sum_{k=1}^{m} p_k a_k b_k = h(x_1) + \sum_{k=3}^{m} p_k a_k b_k \ge h(\widetilde{x}) + \sum_{k=3}^{m} p_k a_k b_k = \sum_{k=1}^{m-1} p'_k a'_k b'_k.$$

Сума $\sum\limits_{k=1}^{m-1} p'_k a'_k b'_k$ містить $m-1$ доданок. Для довільної незростаючої послідовності $a = \{a_k\}_{k=1}^n$ послідовність вигляду (5.117) також не зростає. Крім цього, з огляду на співвідношення (5.108) та (5.116) виконується співвідношення (5.113).

Таким чином, як і в попередньому випадку, послідовності a'_k, b'_k and p'_k задовольняють припущення індукції. Звідси випливає, що і в цьому випадку співвідношення (5.114), а разом з ним і нерівність (5.87) мають місце. Лему доведено.

Лема 5.6.3 . *Нехай $r \in (0,1]$, $b = \{b_k\}_{k=1}^n$ та $p = \{p_k\}_{k=1}^n$ — довільні послідовності невід'ємних чисел, $n \in \mathbb{N}$, $p_k > 0$. Для довільної незростаючої послідовності невід'ємних чисел $a = \{a_k\}_{k=1}^n$ нерівність*

$$\sum_{k=1}^{n} p_k a_k b_k \le \Big(\sum_{i=1}^{n} p_i^r a_i^r\Big)^{1/r} \sum_{k=1}^{n} p_k b_k \Big(\sum_{k=1}^{n} p_k^r\Big)^{-1/r} \tag{5.118}$$

виконується тоді і лише тоді, коли

$$\max_{s\in[1,n]} \sum_{k=1}^{s} p_k b_k \Big(\sum_{k=1}^{s} p_k^r\Big)^{-1/r} = \sum_{k=1}^{n} p_k b_k \Big(\sum_{k=1}^{n} p_k^r\Big)^{-1/r}. \tag{5.119}$$

Лема 5.6.4 . *Нехай $r \in [1,\infty)$, $b = \{b_k\}_{k=1}^n$ та $p = \{p_k\}_{k=1}^n$ — довільні послідовності невід'ємних чисел, $n \in \mathbb{N}$, $p_k > 0$. Для довільної незростаючої послідовності* *невід'ємних чисел* $a = \{a_k\}_{k=1}^n$ *нерівність (5.118) виконується тоді і лише тоді, коли*

$$\max_{s\in[1,n]} \sum_{k=1}^{s} p_k b_k \Big(\sum_{k=1}^{s} p_k^r \Big)^{-1} = \sum_{k=1}^{n} p_k b_k \Big(\sum_{k=1}^{n} p_k^r \Big)^{-1}. \tag{5.120}$$

Доведення леми 5.6.3 цілком аналогічне до доведення леми 5.6.2, а доведення леми 5.6.4 цілком аналогічне до доведення леми 5.6.1.

Зазначимо, що з твердження 3 роботи [191] випливає достатність умови (5.120) для виконання нерівності (5.118) для довільної незростаючої послідовності $a = \{a_k\}_{k=1}^n$ і будь-якого число $r \in [1, \infty)$. В доведенні леми 1 роботи [152] було показано, що для довільного $r \in (0, 1)$ і будь-якої незростаючої послідовності $a = \{a_k\}_{k=1}^n$ нерівність (5.118) справджується, якщо виконується умова (5.119).

5.6.4. Доведення теорем 5.6.1–5.6.4. Доведемо теореми 5.6.1 та 5.6.2. Доведення теорем 5.6.3 та 5.6.4 цілком аналогічне.

Необхідність в теоремах 5.6.1 та 5.6.2 доводиться за аналогією з доведення необхідності в лемах 5.6.1 та 5.6.2 відповідно.

Достатність. Нехай g: $[a, b] \to \mathbb{R}_0^+$ та p: $[a, b] \to \mathbb{R}^+$ — інтегровну функції, які при відповідному $r \in (0, \infty)$ задовольняють умови (5.81) або (5.82).

Спочатку покажемо, що твердження про виконання нерівності (5.79) для всіх функцій f, які при деякому заданому $n = n(f) \in \mathbb{N}$ зображуються у вигляді

$$f(t) = a_k, \quad t \in (s_{k-1}, s_k),\ k = 1, 2, \ldots, n, \tag{5.121}$$

де $a_1 > a_2 > \ldots > a_n \geq 0$ і $a = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = b$.

Для довільного $k = 1, 2, \ldots, n$ покладемо

$$p_k = \Big(\int\limits_{s_{k-1}}^{s_k} p^r(x)dx \Big)^{1/r}, \quad b_k = \int\limits_{s_{k-1}}^{s_k} p(x)g(x)dx \Big(\int\limits_{s_{k-1}}^{s_k} p^r(x)dx \Big)^{-1/r}. \tag{5.122}$$

Якщо виконується умова (5.81) або (5.82), то відповідно буде мати місце наступне співвідношення:

$$\min_{s\in[1,n]} \sum_{k=1}^{s} p_k b_k \Big(\sum_{k=1}^{s} p_k^r \Big)^{-1} = \min_{k=\overline{1,n}} \int\limits_{a}^{s_k} p(x)g(x)dx \Big(\int\limits_{a}^{s_k} p^r(x)dx \Big)^{-1} \geq$$

$$\geq \int\limits_{a}^{b} p(x)g(x)dx \Big(\int\limits_{a}^{b} p^r(x)dx \Big)^{-1} = \sum_{k=1}^{n} p_k b_k \Big(\sum_{k=1}^{n} p_k^r \Big)^{-1}$$

або

$$\min_{s\in[1,n]}\sum_{k=1}^{s}p_k b_k\Big(\sum_{k=1}^{s}p_k^r\Big)^{-r}=\min_{k=\overline{1,n}}\int\limits_a^{s_k}p(x)g(x)dx\Big(\int\limits_a^{s_k}p^r(x)dx\Big)^{-r}\geq$$

$$\geq\int\limits_a^{b}p(x)g(x)dx\Big(\int\limits_a^{b}p^r(x)dx\Big)^{-r}=\sum_{k=1}^{n}p_k b_k\Big(\sum_{k=1}^{n}p_k^r\Big)^{-r}$$

Тобто, послідовності $a=\{a_k\}_{k=1}^n$, $b=\{b_k\}_{k=1}^n$ та $p=\{p_k\}_{k=1}^n$ задовольняють умови лем 5.6.2 або 5.6.1. Тому має місце нерівність (5.87), з якої враховуючи (5.121) та (5.122), отримуємо необхідне співвідношення

$$\int\limits_a^{b}p(x)f(x)g(x)dx=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{s_{k-1}}^{s_k}p(x)f(x)g(x)dx=\sum_{k=1}^{n}p_k a_k b_k\geq$$

$$\geq\Big(\sum_{i=1}^{n}p_i^r a_i^r\Big)^{\frac{1}{r}}\sum_{k=1}^{n}p_k b_k\Big(\sum_{k=1}^{n}p_k^r\Big)^{-\frac{1}{r}}=$$

$$=\Big(\int\limits_a^{b}p^r(x)f^r(x)dx\Big)^{\frac{1}{r}}\int\limits_a^{b}p(x)g(x)dx\Big(\int\limits_a^{b}p^r(x)dx\Big)^{-\frac{1}{r}}.$$

Для доведення достатності в загальному випадку розглянемо функції $f_n(t)$, $n\in\mathbb{N}$, такі, що

$$f_n(t)=\frac{kf(a)}{n},\quad t:\ \frac{(k-1)f(a)}{n}<f(t)\leq\frac{kf(a)}{n},\ k=1,2,\ldots,n. \tag{5.123}$$

Бачимо, що при всіх $n\in\mathbb{N}$ та $t\in[a,b]$ виконується нерінвітсь $f(t)\leq f_n(t)$. Внаслідок сумовності на $[a,b]$ добутку $p(t)f(t)g(t)$, значення

$$\int\limits_a^{b}p(t)g(t)(f_n(t)-f(t))dt$$

прямують до нуля при $n\to\infty$. Крім цього, для довільного $n\in\mathbb{N}$ функція $f_n(t)$ не зростає і приймає скінченну кількість значень, а для таких функцій виконання нерівності (5.79) вже доведено. Таким чином, з огляду на (5.123) робимо висонвок, що для будь-якого $\varepsilon>0$ при всіх достатньо великих n $(n>n_0(\varepsilon))$

$$\int\limits_a^{b}p(t)f(t)g(t)dt=\int\limits_a^{b}p(t)g(t)f_n(t)dt-\int\limits_a^{b}p(t)g(t)(f_n(t)-f(t))dt\geq$$

$$\geq \Big(\int\limits_a^b p^r(t) f_n^r(t) dt \Big)^{1/r} \frac{\int_a^b p(t) g(t) dt}{\Big(\int_a^s p^r(t) dt \Big)^{1/r}} - \varepsilon \geq \Big(\int\limits_a^b p^r(t) f^r(t) dt \Big)^{1/r} \frac{\int_a^b p(t) g(t) dt}{\Big(\int_a^b p^r(t) dt \Big)^{1/r}} - \varepsilon.$$

Отже, нерівність (5.79), а разом з нею і теореми 5.6.1 та 5.6.2 доведено.

5.7 Інші нерівності типу Чебишова

5.7.1. В цьому підрозділі продовжуються дослідження нерівностей типу Чебишова і зокрема, отримано наступне твердження.

Теорема 5.7.1 . *Нехай* $a = \{a_k\}_{k=1}^n$, $b = \{b_k\}_{k=1}^n$ *та* $p = \{p_k\}_{k=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$ *— довільні послідовності невід'ємних чисел таких, що* $a_1 \geq a_2 \geq \dots a_n$ *і* $p_k > 0$. *Тоді для будь-якої опуклої функції* $M\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *такої, що* $M(0) = 0$, *справджується нерівність*

$$\sum_{k=1}^n p_k b_k M(a_k) \leq \max_{s \in [1,n]} \left\{ M\Big(\frac{\sum_{k=1}^n p_k a_k}{\sum_{k=1}^s p_k} \Big) \sum_{k=1}^s p_k b_k \right\}, \tag{5.124}$$

а для будь-якої вгнутої функції $M\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *такої, що* $M(0) = 0$, *— нерівність*

$$\sum_{k=1}^n p_k b_k M(a_k) \geq \min_{s \in [1,n]} \left\{ M\Big(\frac{\sum_{k=1}^n p_k a_k}{\sum_{k=1}^s p_k} \Big) \sum_{k=1}^s p_k b_k \right\}. \tag{5.125}$$

Доведення. Розглянемо випадок, коли функція M є опуклою (у випадку, коли M вгнута, доведення цілком аналогічне).

Твердження про те, що для довільної опуклої функції $M\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ виконується нерівність (5.124), доведемо методом математичної індукції.

Випадок $n = 1$ тривіальний. Розглянемо також випадок $n = 2$. Покладемо

$$c = p_1 a_1 + p_2 a_2, \quad x_0 = p_1 a_1, \quad \alpha_k = p_k b_k, \quad \beta_k = p_k^{-1}, \quad k = 1, 2, \tag{5.126}$$

і на проміжку $[0, c]$ розглянемо функцію

$$h(x) = \alpha_1 M(\beta_1 x) + \alpha_2 M(\beta_2 (c - x)). \tag{5.127}$$

Внаслідок опуклості функції $M(t)$ функція $h(x)$ є також опуклою на $[0, c]$. Тому ця функція на будь-якому проміжку $[x_1, x_2] \subseteq [0, c]$ набуває свого найбільшого значення в одному з його кінців. Звідси

$$h(x) \leq \max\{h(x_1), h(x_2)\} \quad \forall x \in [x_1, x_2]. \tag{5.128}$$

Покладаючи $x_1 := \beta_2 c(\beta_1+\beta_2)^{-1}$ і $x_2 := c$, бачимо, що число x_0 (з огляду на монотонність послідовності a) належить проміжку $[x_1, x_2]$.

Таким чином, на підставі (5.126)–(5.128) та рівності $M(0)=0$ отримуємо

$$\sum_{k=1}^{2} p_k b_k M(a_k) = h(x_0) \le \max\{h(x_1), h(x_2)\} =$$

$$= \max\Big\{M\Big(\frac{p_1a_1+p_2a_2}{p_1+p_2}\Big)(p_1b_1+p_2b_2), M\Big(\frac{p_1a_1+p_2a_2}{p_1}\Big)p_1b_1\Big\}.$$

Тобто, при $n=2$ нерівність (5.124) виконується

Припустимо, що дане твердження виконується при $n=m-1\ge 1$ і покажемо, що воно також має місце при $n=m$. Скористаємось позначеннями (5.126) і розглянемо на проміжку $[0,c]$ функцію $h(x)$ вигляду (5.127). Покладаючи $x_1 := \beta_2 c(\beta_1+\beta_2)^{-1}$ і $x_2 := c - a_3/\beta_2$, бачимо, що число x_0 (внаслідок монотонності a) належить $[x_1, x_2]$. Тому з огляду на (5.126)–(5.128) отримуємо

$$\sum_{k=1}^{m} p_k b_k M(a_k) = h(x_0) + \sum_{k=3}^{m} p_k b_k M(a_k) \le \max\{h(x_1), h(x_2)\} + \sum_{k=3}^{m} p_k b_k M(a_k). \quad (5.129)$$

Далі, у випадку, коли $h(x_1) \ge h(x_2)$, покладаємо

$$p'_k = \begin{cases} p_1+p_2, & k=1, \\ p_{k+1}, & k=\overline{2,m-1}; \end{cases} \quad b'_k = \begin{cases} (p_1b_1+p_2b_2)/(p_1+p_2), & k=1, \\ b_{k+1}, & k=\overline{2,m-1}; \end{cases} \quad (5.130)$$

$$a'_k = \begin{cases} (p_1a_1+p_2a_2)/(p_1+p_2), & k=1, \\ a_{k+1}, & k=\overline{2,m-1}. \end{cases} \quad (5.131)$$

Тоді внаслідок (5.129) робимо висновок, що

$$\sum_{k=1}^{m} p_k b_k M(a_k) \le \sum_{k=1}^{m-1} p'_k b'_k M(a'_k). \quad (5.132)$$

Якщо ж $h(x_1) < h(x_2)$, то нерівність (5.132) виконується для послідовностей a', b' та p' вигляду:

$$p'_k = \begin{cases} p_1, & k=1, \\ p_2+p_3, & k=2, \\ p_{k+1}, & k=\overline{3,m-1}; \end{cases} \quad b'_k = \begin{cases} b_1, & k=1, \\ (p_2b_2+p_3b_3)(p_2+p_3)^{-1}, & k=2, \\ b_{k+1}, & k=\overline{3,m-1}; \end{cases} \quad (5.133)$$

$$a'_k = \begin{cases} (p_1a_1+p_2a_2-p_2a_3)/p_1, & k=1, \\ a_{k+1}. & k=\overline{2,m-1}, \end{cases} \quad (5.134)$$

Сума в правій частині співвідношення (5.132) містить $m-1$ доданок. Крім того, в обох випадках послідовності a', b' та p' задовольняють припущення індукції. Звідси враховуючи (5.130)–(5.134), отримуємо необхідну оцінку (5.124):

$$\sum_{k=1}^{m} p_k b_k M(a_k) \le \sum_{k=1}^{m-1} p'_k b'_k M(a'_k) \le \sup_{s\in[1,m-1]} \left\{ M\left(\frac{\sum_{k=1}^{m-1} p'_k a'_k}{\sum_{k=1}^{s} p'_k}\right) \sum_{k=1}^{s} p'_k b'_k \right\} \le$$

$$\le \sup_{s\in[1,m]} \left\{ M\left(\frac{\sum_{k=1}^{m} p_k a_k}{\sum_{k=1}^{s} p_k}\right) \sum_{k=1}^{s} p_k b_k \right\}.$$

Теорему доведено.

5.7.2. Покажемо зв'язок отриманих нерівностей (5.144) та (5.145) із класичними нерівностями Чебишова. Для цього покладемо в теоремі 5.7.1 $M(t) = t^r$, $r \in (0,\infty)$, Тоді мають місце такі твердження.

Наслідок 5.7.1 . *Нехай $a = \{a_k\}_{k=1}^n$, $b = \{b_k\}_{k=1}^n$ та $p = \{p_k\}_{k=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$ — довільні послідовності невід'ємних чисел таких, що $a_1 \ge a_2 \ge \dots a_n$ і $p_k > 0$. Тоді для будь-якого $r \in [1,\infty)$ справджується нерівність*

$$\sum_{k=1}^{n} p_k b_k a_k^r \le \left(\sum_{k=1}^{n} p_k a_k\right)^r \max_{s\in[1,n]} \frac{\sum_{k=1}^{s} p_k b_k}{(\sum_{k=1}^{s} p_k)^r}, \tag{5.135}$$

а для будь-якого $r \in (0,1]$ — нерівність

$$\sum_{k=1}^{n} p_k b_k a_k^r \ge \left(\sum_{k=1}^{n} p_k a_k\right)^r \min_{s\in[1,n]} \frac{\sum_{k=1}^{s} p_k b_k}{(\sum_{k=1}^{s} p_k)^r}. \tag{5.136}$$

Зазначимо, що нерівність (5.135) було отримано в роботі [152]

Наслідок 5.7.2 . *Нехай $r \in [1,\infty)$, $b = \{b_k\}_{k=1}^n$ та $p = \{p_k\}_{k=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$ — довільні послідовності невід'ємних чисел, $p_k > 0$. Для довільної незростаючої послідовності невід'ємних чисел $a = \{a_k\}_{k=1}^n$ нерівність*

$$\sum_{k=1}^{n} p_k b_k a_k^r \le \left(\sum_{k=1}^{n} p_k a_k\right)^r \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k b_k}{(\sum_{k=1}^{n} p_k)^r}, \tag{5.137}$$

виконується тоді і лише тоді, коли

$$\max_{s\in[1,n]} \frac{\sum_{k=1}^{s} p_k b_k}{(\sum_{k=1}^{s} p_k)^r} = \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k b_k}{(\sum_{k=1}^{n} p_k)^r} \tag{5.138}$$

Наслідок 5.7.2$'$. *Нехай $r \in (0,1]$, $b = \{b_k\}_{k=1}^n$ та $p = \{p_k\}_{k=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$ — довільні послідовності невід'ємних чисел, $p_k > 0$. Для довільної незростаючої послідовності невід'ємних чисел $a = \{a_k\}_{k=1}^n$ нерівність*

$$\sum_{k=1}^n p_k b_k a_k^r \geq \Big(\sum_{k=1}^n p_k a_k\Big)^r \frac{\sum_{k=1}^n p_k b_k}{(\sum_{k=1}^n p_k)^r}, \tag{5.139}$$

виконується тоді і лише тоді, коли

$$\min_{s\in[1,n]} \frac{\sum_{k=1}^s p_k b_k}{(\sum_{k=1}^s p_k)^r} = \frac{\sum_{k=1}^n p_k b_k}{(\sum_{k=1}^n p_k)^r}. \tag{5.140}$$

Достатність в наслідках 5.7.2 та 5.7.2$'$ випливає безпосередньо із наслідку 5.7.1. Покажемо, що умови (5.138) та (5.140) є також необхідними для виконання відповідно нерівностей (5.137) та (5.139). Для цього, як і при доведенні необхідності в лемах 5.6.1 та 5.6.2, використаємо метод від супротивного.

Розглянемо випадок $r \in [1,\infty)$ (доведення у випадку, коли $r \in (0,1]$, цілком аналогічне). Припустимо, що виконується нерівність (5.137), однак

$$\max_{s\in[1,n]} \frac{\sum_{k=1}^s p_k b_k}{(\sum_{k=1}^s p_k)^r} = \frac{\sum_{k=1}^{s^*} p_k b_k}{(\sum_{k=1}^{s^*} p_k)^r} > \frac{\sum_{k=1}^n p_k b_k}{(\sum_{k=1}^n p_k)^r}. \tag{5.141}$$

Візьмемо послідовність $a' = \{a'_i\}_{i=1}^n$ вигляду

$$a'_i = \begin{cases} (\sum_{k=1}^{s^*} p_k)^{-1}, & k = 1,2,\ldots,s^*, \\ 0, & k = s^*+1,\ldots,n. \end{cases}$$

Тоді для цієї послідовності будемо мати

$$\sum_{k=1}^n p_k b_k (a'_k)^r = \frac{\sum_{k=1}^{s^*} p_k b_k}{(\sum_{k=1}^{s^*} p_k)^r} > \Big(\sum_{k=1}^n p_k a_k\Big)^r \frac{\sum_{k=1}^n p_k b_k}{(\sum_{k=1}^n p_k)^r} = \frac{\sum_{k=1}^n p_k b_k}{(\sum_{k=1}^n p_k)^r}.$$

Тобто, припущення невірне і має місце співвідношення (5.137).

Поклавши в наслідках 5.7.2 та 5.7.2$'$ число $r = 1$, бачимо, що нерівності (5.137) та (5.139) є класичними нерівностями Чебишова (5.77) та (5.78). При цьому твердження цих наслідків збігаються з твердженнями лем 5.6.4 та 5.6.1 відповідно.

У випадку, коли послідовність $M(a_k)$ є незростаючою, а послідовність b — неспадною (або незростаючою), до оцінки суми $\sum_{k=1}^n p_k b_k M(a_k)$ в лівій частині співвідношення (5.124) (або відповідно (5.125)) можна застосувати класичні нерівності

Чебишова (5.77) (або (5.78)). Відповідно отримаємо

$$\sum_{k=1}^{n} p_k b_k M(a_k) \le \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k M(a_k)}{\sum_{k=1}^{n} p_k} \sum_{k=1}^{n} p_k b_k \tag{5.142}$$

і

$$\sum_{k=1}^{n} p_k b_k M(a_k) \ge \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k M(a_k)}{\sum_{k=1}^{n} p_k} \sum_{k=1}^{n} p_k b_k. \tag{5.143}$$

При цьому якщо максимум (або мінімум) в правій частині співвідношення (5.124) (або відповідно (5.125)) досягається при $s = n$, то із співвідношень (5.124) і (5.125) отримаємо

$$\sum_{k=1}^{n} p_k b_k M(a_k) \le M\Big(\frac{\sum_{k=1}^{n} p_k a_k}{\sum_{k=1}^{n} p_k}\Big) \sum_{k=1}^{n} p_k b_k \tag{5.144}$$

і

$$\sum_{k=1}^{n} p_k b_k M(a_k) \ge M\Big(\frac{\sum_{k=1}^{n} p_k a_k}{\sum_{k=1}^{n} p_k}\Big) \sum_{k=1}^{n} p_k b_k \tag{5.145}$$

Аналізуючи співвідношення (5.142)–(5.145), слід зазначити, що внаслідок нерівності Ієнсена (див.,наприклад, [82 (гл. I)]) оцінки (5.144) та (5.145) суми $\sum_{k=1}^{n} p_k b_k M(a_k)$ є більш точними, ніж оцінки (5.142) та (5.143).

Зауваження 5.7.1 . У випадку, коли послідовність a не спадає, нерівності (5.144) та (5.145) мають аналогічний вигляд, однак в цих нерівностях всі суми вигляду $\sum_{k=1}^{s}$ слід замінити на суми вигляду $\sum_{k=n-s}^{n}$.

5.7.3. Встановимо також аналог теореми 5.7.1 у випадку нескінченних послідовностей a, b та p.

Теорема 5.7.1′. *Нехай $a = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, $b = \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ та $p = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$, $n \in \mathbb{N}$ — довільні послідовності невід'ємних чисел таких, що $a_1 \ge a_2 \ge \ldots a_n \ge \ldots$, $p_k > 0$ і збігається ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k b_k$. Тоді для будь-якої опуклої функції $M\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ такої, що $M(0) = 0$, справджується нерівність*

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k b_k M(a_k) \le \sup_{s\in[1,\infty)} \left\{ M\Big(\frac{\sum_{k=1}^{\infty} p_k a_k}{\sum_{k=1}^{s} p_k}\Big) \sum_{k=1}^{s} p_k b_k \right\}, \tag{5.124′}$$

а для будь-якої вгнутої функції $M\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ такої, що $M(0) = 0$, — нерівність

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k b_k M(a_k) \ge \inf_{s\in[1,\infty)} \left\{ M\Big(\frac{\sum_{k=1}^{\infty} p_k a_k}{\sum_{k=1}^{s} p_k}\Big) \sum_{k=1}^{s} p_k b_k \right\}. \tag{5.125′}$$

Доведення. Доведемо нерівність (5.124′) нерівність (5.125′) доводиться аналогічно.

Перед усім зазначимо, що коли функція M та послідовність a задовольняють умови теореми 5.7.1′, то існує номер $m_0 = m_0(M, f) \in \mathbb{N}$ такий, що для довільних натуральних $n > n_0$ при всіх $k = 1, 2, \ldots$ виконується нерівність $|M(a_k)| < m$.

Для довільного натурального $m > m_0$ розглянемо систему цілих невід'ємних точок $l_{0,m} < l_{1,m} < \ldots < l_{n,m} = \infty$, які означаються наступним чином: покладемо $l_{0,m} = 0$, а для довільного $i \in [1; n] \cap \mathbb{N}$ значення $l_{i,m}$ є найбільшим номером таким, що $l_{i,m} > l_{i-1,m}$ і для всіх натуральних $k \in I_{i,m} := [l_{i-1,m} + 1; l_{i,m}]$ виконується така нерівність

$$|M(a_{l_{i,m}}) - M(a_k)| \leq \frac{1}{m}.$$

Внаслідок умов на функцію M та послідовність a така система точок завжди існує і $n \leq 2m^2$.

Далі, розглянемо послідовності $\widetilde{a}_m = \{\widetilde{a}_{i,m}\}_{i=1}^n$, $\widetilde{b} = \{\widetilde{b}_i\}_{i=1}^n$ та $\widetilde{p} = \{\widetilde{p}_i\}_{i=1}^n$ такі, що

$$\widetilde{a}_{i,m} = a_{l_{i,m}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \ m > m_0, \tag{5.146}$$

а

$$\widetilde{b}_i = \sum_{k \in I_{i,m}} p_k b_k \Bigg(\sum_{k \in I_{i,m}} p_k \Bigg)^{-1}, \quad \widetilde{p}_i = \sum_{k \in I_{i,m}} p_k, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.147}$$

бачимо, що для довільних $m > m_0$ і $k \in [l_{i-1,m} + 1; l_{i,m}]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, виконується нерівність $|M(a_k) - M(\widetilde{a}_{i,m})| \leq \frac{1}{m}$. Тому внаслідок збіжності ряду $\sum_{k=1}^\infty p_k b_k$ величина

$$\Big| \sum_{k=1}^\infty p_k b_k M(a_k) - \sum_{i=1}^n \widetilde{p}_i \widetilde{b}_i M(\widetilde{a}_{i,m}) \Big| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{k \in I_{i,m}} p_k b_k |M(a_k) - M(a_{l_{i,m}})| < \frac{1}{m} \sum_{k=1}^\infty p_k b_k$$

збігається до нуля при $n \to \infty$. Крім цього, при будь-якому фіксованому $m > m_0$ послідовність $\widetilde{a}_m = \{\widetilde{a}_{i,m}\}_{i=1}^n$ спадає. Тобто, вона задовольняє умови теореми 5.7.1.

Таким чином, із врахуванням неперервності функції M робимо висновок, що для довільного $\varepsilon > 0$ при всіх достатньо великих m ($m > m_1(\varepsilon)$) справджується співвідношення

$$\sum_{k=1}^\infty p_k b_k M(a_k) = \sum_{i=1}^n \widetilde{p}_i \widetilde{b}_i M(\widetilde{a}_{i,m}) + \Big(\sum_{k=1}^\infty p_k b_k M(a_k) - \sum_{i=1}^n \widetilde{p}_i \widetilde{b}_i M(\widetilde{a}_{i,m}) \Big) \leq$$

$$\leq \max_{l \in [1,n]} \left\{ M\Big(\frac{\sum_{i=1}^n \widetilde{p}_i \widetilde{a}_{i,m}}{\sum_{i=1}^l \widetilde{p}_i} \Big) \sum_{i=1}^l \widetilde{p}_i \widetilde{b}_i \right\} + \frac{\varepsilon}{2} =$$

$$= \max_{l\in[1,n]} \left\{ M\Big(\frac{\sum_{i=1}^{n}\widetilde{a}_{i,m}\sum_{k\in I_{i,m}}p_k}{\sum_{i=1}^{l}\sum_{k\in I_{i,m}}p_k}\Big)\sum_{i=1}^{l}\sum_{k\in I_{i,m}}p_kb_k\right\} + \frac{\varepsilon}{2} \le$$

$$\le \sup_{s\in[1,\infty)} \left\{ M\Big(\frac{\sum_{k=1}^{\infty}p_ka_k}{\sum_{k=1}^{s}p_k}\Big)\sum_{k=1}^{s}p_kb_k\right\} + \varepsilon.$$

Теорему доведено.

Зазначимо, що результати даного підрозділу опубліковано в роботі [202]. В цій роботі було отримано також аналогічне твердження для інтегралів. Воно має вигляд:

Теорема 5.7.2 *(С. О. Чайченко [202]). Нехай $g\colon [a,b]\to\mathbb{R}_0^+$ та $p\colon [a,b]\to\mathbb{R}^+$ (де $b\in(a,\infty]$) — інтегровні функції такі, що добуток $p\cdot g$ є також інтегровною на $[a,b]$ функцією. Нехай також $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}_0^+$ — незростаюча функція. Тоді для довільної опуклої функції $M\colon [0,\infty)\to\mathbb{R}$ такої, що $M(0)=0$, виконується нерівність*

$$\int_a^b p(x)g(x)M(f(x))dx \le \sup_{s\in(a,b]}\left\{M\Big(\frac{\int_a^b p(x)f(x)dx}{\int_a^s p(x)dx}\Big)\int_a^s p(x)g(x)dx\right\}, \qquad (5.148)$$

а для довільної вгнутої функції $M\colon [0,\infty)\to\mathbb{R}$ такої, що $M(0)=0$, — нерівність

$$\int_a^b p(x)g(x)M(f(x))dx \ge \inf_{s\in(a,b]}\left\{M\Big(\frac{\int_a^b p(x)f(x)dx}{\int_a^s p(x)dx}\Big)\int_a^s p(x)g(x)dx\right\}. \qquad (5.149)$$

5.8 Висновки до розділу 5

В дискретних просторах Орліча l_M та просторах $l_{\mathbf{p}}$ зі змінним показником підсумовування знайдено точні значення відповідно найкращих n-членних наближень та найкращих наближень деяких множин образів лінійних операторів.

В просторах S^p_φ вивчено питання насичення лінійних методів підсумовування рядів Фур'є, які задаються довільними послідовностями функцій, визначених на деякій множині комплексних чисел. Зокрема, сформульоване означення насичення таких методів в S^p_φ, показано інваріантність поняття насичення відносно просторів S^p_φ та знайдено достатні умови насичення.

Отримано точні порядкові оцінки важливих нелінійних апроксимативних характеристик просторів S^p_φ.

В підрозділах 5.6 та 5.7 отримано деякі нові нерівності типу Чебишова. При цьому в підрозділі 5.6 встановлено необхідні та достатні умови виконання таких нерівностей.

Розділ 6

Асимптотичні властивості опуклих функцій

Важливу роль при дослідженні асимптотичної поведінки апроксимативних величин, які розглядаються в даній роботі, відіграє класифікація множини $\mathfrak{M}$ всіх додатних опуклих спадних до нуля функцій неперервного аргумента $t \geq 1$ таких, що похідна $\psi'(t){:=}\,\psi'(t+)$ при $t = 1$ скінченна:

$$\mathfrak{M} = \{\psi \in C_{[1,\infty)} : \ \psi(t) > 0, \ |\psi'(1)| < \infty, \ \psi(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) \leq$$
$$\leq \alpha\psi(t_1) + (1-\alpha)\psi(t_2), \forall\alpha \in [0,1], \ \forall t_1, t_2 \in [1,\infty), \lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0\}. \tag{6.1}$$

6.1 Множини $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_C$ та $\mathfrak{M}_\infty$

Множина $\mathfrak{M}$ досить неоднорідна за швидкістю прямування до нуля при $t \to \infty$ її елементів: функції $\psi(t)$ можуть спадати як завгодно повільно, так і як завгодно швидко. Тому виникає необхідність розбиття множини $\mathfrak{M}$ на підмножини, які об'єднують функції $\psi \in \mathfrak{M}$, що в певному сенсі мають однаковий характер прямування до нуля.

Наслідуючи О. І. Степанця [143, с. 159–176], в ролі характеристик, з врахуванням яких зручно проводити таке розбиття, розглянемо пару функцій $\eta(\psi;t)$ та $\mu(\psi;t)$, які означаються наступним чином. Для $\psi \in \mathfrak{M}$ через $\eta(\psi;t)$ позначимо функцію, яка пов'язана з ψ рівністю

$$\psi(\eta(\psi;t)) = \frac{1}{2}\psi(t), \quad t \geq 1. \tag{6.2}$$

Внаслідок строгої монотонності функції ψ величина $\eta(\psi;t)$ для всіх $t \geq 1$ визначається однозначно із співвідношення (6.2):

$$\eta(\psi;t) = \psi^{-1}\Big(\frac{1}{2}\psi(t)\Big), \tag{6.3}$$

де $\psi^{-1}(\cdot)$ — функція, обернена до ψ.

Функція $\mu(\psi;t)$ задається рівністю

$$\mu(\psi;t)=\frac{t}{\eta(\psi;t)-t}. \tag{6.4}$$

Як випливає із (6.2), величина $\eta(\psi;t)-t$ є довжиною проміжку $[t,\eta(\psi;t)]$, на якому значення функції ψ зменшується рівно в два рази. В зв'язку з цим функцію $\mu(\psi;t)$ прийнято називати (див., наприклад, [136, с. 94]) модулем напіврозпаду функції ψ. При позначенні цієї функції в дужках будемо писати два аргументи, другий з яких є невідомою змінною, а перший позначає функцію, за якою побудована функція $\mu(\psi;t)$.

Для функції $\psi_1(t)=t^{-r}$, $r>0$, маємо $\mu(\psi_1;t)=(2^{1/r}-1)^{-1}$. Якщо $\psi_2(t)=1/\ln(t+e)$, то $\mu(\psi_2;t)=t/((t+e)^2+e-t)$; якщо ж $\psi_3(t)=e^{-t}$, то $\mu(\psi_3;t)=t/\ln 2$. З цих прикладів бачимо, що величина $\mu(\psi;t)$ може бути обмеженою зверху та знизу деякими додатними числами, може прямувати до нуля або до нескінченності при $t\to\infty$. У зв'язку з цим із множини $\mathfrak{M}$ прийнято виділяти такі підмножини:

$$\mathfrak{M}_0=\Big\{\psi\in\mathfrak{M}:\quad 0<\mu(\psi;t)\le K\quad\forall t\ge 1\Big\}, \tag{6.5}$$

$$\mathfrak{M}_\infty=\Big\{\psi\in\mathfrak{M}:\quad 0<K\le\mu(\psi;t)<\infty\quad\forall t\ge 1\Big\}, \tag{6.6}$$

$$\mathfrak{M}_C=\mathfrak{M}_0\cap\mathfrak{M}_\infty=\Big\{\psi\in\mathfrak{M}:\quad 0<K_1\le\mu(\psi;t)\le K_2\quad\forall t\ge 1\Big\}. \tag{6.7}$$

Як і раніше, через K, K_1, $K_2,\ldots$ позначаються деякі додатні сталі, що не залежать від величин, які є у розглядуваному випадку параметрами (в данному випадку — від змінної t).

Множина $\mathfrak{M}_0$, зокрема, містить функції ψ, для яких величина $\mu(\psi;t)$ прямує до нуля при $t\to\infty$, а множина $\mathfrak{M}_\infty$ — функції ψ, для яких $\mu(\psi;t)$ прямує до нескінченності. Цим пояснюється наявність відповідних індексів (0 або ∞) у позначенні вказаних множин. Множина $\mathfrak{M}_C$ містить ті і лише ті функції ψ з $\mathfrak{M}$, для яких величина $\mu(\psi;t)$ обмежена зверху та знизу константами (Constant) і тому її позначають $\mathfrak{M}_C$.

Далі, через $\mathfrak{M}_0^+$ позначають підмножину функцій $\psi\in\mathfrak{M}_0$, для яких величина $\mu(\psi;t)$ при $t\to\infty$ монотонно прямує до нуля:

$$\mathfrak{M}_0^+=\{\psi\in\mathfrak{M}:\quad \mu(\psi;t)\downarrow 0\}, \tag{6.8}$$

а через $\mathfrak{M}_\infty^+$ – підмножину функцій $\psi\in\mathfrak{M}_\infty$, у яких $\mu(\psi;t)$ монотонно і необмежено зростає при $t\to\infty$:

$$\mathfrak{M}_\infty^+=\{\psi\in\mathfrak{M}:\quad \mu(\psi;t)\uparrow\infty\}. \tag{6.9}$$

Зазначимо, що природними представниками множини $\mathfrak{M}_C$ є функції t^{-r}, $r>0$, функції $t^{-r}\ln^{\varepsilon}(t{+}a)$ при будь-яких $\varepsilon\in\mathbb{R}$, додатних r та a, для яких $a\geq e^{3\varepsilon/r}-1$ та ін. Множині $\mathfrak{M}_0^+$, зокрема, належать функції $\ln^{\varepsilon}(t+e)$ при $\varepsilon<0$, а множині $\mathfrak{M}_\infty^+$ — функції $\exp(-\lambda t^r)$ при $\lambda>0$ і $r\in(0,1]$, а також функції $\exp(-\lambda(t+a)^r)$ при $\lambda>0$, $r>1$ і $a\geq((r-1)/(r\lambda))^{1/r}-1$. У цьому легко переконатися за допомогою такого критерія, який було отримано О.І Степанцем [143, с. 161] (див. також [140]).

Твердження 6.1.1 *(О. І. Степанець [143, с. 161]). Функція $\psi\in\mathfrak{M}$ належить до $\mathfrak{M}_0$ тоді і лише тоді, коли величина*

$$\alpha(\psi;t):=\frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|},\quad \text{де } \psi'(t):=\psi'(t+), \tag{6.10}$$

задовольняє умову

$$\alpha(\psi;t)\geq K>0\quad \forall t\geq 1; \tag{6.11}$$

$\psi\in\mathfrak{M}$ належить до $\mathfrak{M}_\infty$ тоді і лише тоді, коли

$$\alpha(\psi;t)\leq K\quad \forall t\geq 1; \tag{6.12}$$

$\psi\in\mathfrak{M}$ належить до $\mathfrak{M}_C$ тоді і лише тоді, коли

$$0<K_1\leq\alpha(\psi;t)\leq K_2\quad \forall t\geq 1. \tag{6.13}$$

Якщо функція $\alpha(\psi;t)$ не спадає і

$$\lim_{t\to\infty}\alpha(\psi;t)=\infty, \tag{6.14}$$

то $\psi\in\mathfrak{M}_0^+$. Якщо ж $\alpha(\psi;t)$ не зростає і

$$\lim_{t\to\infty}\alpha(\psi;t)=0, \tag{6.15}$$

то $\psi\in\mathfrak{M}_\infty^+$.

Однак, якщо для множини $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_\infty$ та $\mathfrak{M}_C$ знайдені умови є необхідними і достатніми, то для множин $\mathfrak{M}_0^+$ і $\mathfrak{M}_\infty^+$ вони є лише достатніми. Наступне твердження дає необхідні та достатні умови того, щоб функція $\psi\in\mathfrak{M}$ належала до множини $\mathfrak{M}_\infty^+$.

Теорема 6.1.1 . *Нехай $\psi\in\mathfrak{M}$. Тоді для того, щоб ψ належала множині $\mathfrak{M}_\infty^+$ необхідно і достатньо, щоб функція $\alpha(t)=\alpha(\psi;t)$, яка визначається рівністю (6.10), задовольняла умову (6.15) і наступну нерівність*

$$\frac{\alpha(\eta(\psi;t))}{\alpha(t)}\leq 1\quad \forall t\geq 1. \tag{6.16}$$

Доведення. Покажемо спочатку, що якщо функція α задовольняє умови (6.15) та (6.16), то $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$. Прямування до нескінченності при $t \to \infty$ величини $\mu(\psi;t)$ за умови (6.15) випливає з доведення твердження 6.1.1 (див. [143 (с. 161), 140]). Переконаємось, що функція $\mu(\psi;t)$ монотонно спадає.

Розглядаючи функцію $1/\mu(\psi;t) = (\eta(t)/t) - 1$, робимо висновок, що це можливо тоді і лише тоді, коли

$$t\eta'(t) - \eta(t) \leq 0. \tag{6.17}$$

Згідно з (6.2) та (6.10)

$$\frac{1}{2}\psi(t) = \psi(\eta(t)) = -\eta(t)\psi'(\eta(t))\alpha(\eta(t)).$$

Об'єднуючи цю рівність із рівністю (6.10) і враховуючи те, що, внаслідок (6.3), $\forall\psi \in \mathfrak{M}$

$$\eta'(t) = \eta'(\psi,t) = \frac{\psi'(t)}{2\psi'(\eta(t))}, \tag{6.18}$$

отримуємо

$$\frac{t\eta'(t)\alpha(t)}{\eta(t)\alpha(\eta(t))} = 1,$$

або

$$t\eta'(t) = \eta(t)\frac{\alpha(\eta(t))}{\alpha(t)}. \tag{6.19}$$

Звідси, на підставі (6.16) робимо висновок, що співвідношення (6.17) є правильним, а отже, функція $\mu(\psi;t)$ монотонно спадає при $t \geq 1$, і $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$.

Переконаємось тепер, що для довільної функції $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$ величина $\alpha(\psi;t)$ задовольняє умови (6.15) та (6.16).

Якщо $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, то справджується нерівність (6.17), враховуючи яку із співвідношення (6.19) отримуємо (6.16). Крім того, для довільної функції $\psi \in \mathfrak{M}$ при кожному $t \geq 1$ маємо

$$|\psi'(\eta(t))|(\eta(t) - t) \leq \frac{1}{2}\psi(t) = -\int\limits_t^{\eta(t)} \psi'(\tau)d\tau \leq |\psi'(t)|(\eta(t) - t). \tag{6.20}$$

Звідси

$$\alpha(t) = \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|} \leq 2\frac{\eta(t) - t}{t} = \frac{2}{\mu(\psi;t)}. \tag{6.21}$$

Тому, якщо $\psi \in \mathfrak{M}$ така, що величина $\mu(\psi;t)$ монотонно і необмежено зростає, коли $t \to \infty$, тобто, $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, то виконується співвідношення (6.15).

В роботі [143, с. 165] (див. також [140]) було отримано наступне твердження для функцій з множин $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_\infty$ та $\mathfrak{M}_C$.

Твердження 6.1.2 *(О.І. Степанець [143, с. 165]). Якщо $\psi \in \mathfrak{M}_0$, то можна вказати таке $r_1 > 0$, що при всіх $t \geq 1$ буде виконуватись нерівність*

$$\psi(t) \geq Kt^{-r_1}, \tag{6.22}$$

якщо $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$, то існує число $r_2 > 0$ таке, що при всіх $t \geq 1$

$$\psi(t) \leq Kt^{-r_2}, \tag{6.23}$$

якщо ж $\psi \in \mathfrak{M}_C$, то існують числа $r_1, r_2 > 0$ такі, що при всіх $t \geq 1$

$$K_1 t^{-r_1} \leq \psi(t) \leq K_2 t^{-r_2}. \tag{6.24}$$

Встановимо відповідний факт і для функцій з множини $\mathfrak{M}_\infty^+$.

Теорема 6.1.2 . *Якщо $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, то для довільного $r > 0$ знайдеться число $K > 0$ таке, що $\forall t \geq 1$*

$$\psi(t) \leq Kt^{-r}. \tag{6.25}$$

Доведення. Записуючи рівність (6.10) у вигляді

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = -\frac{1}{t\alpha(t)}$$

і інтегруючи останнє співвідношення по проміжку $[1, t]$, $t > 1$, отримуємо

$$\psi(t) = \psi(1)\mathrm{exp}\Big(-\int\limits_1^t \frac{d\tau}{\tau\alpha(\tau)}\Big). \tag{6.26}$$

Оскільки $\alpha(t) \to 0$ при $t \to \infty$, то для довільного $r > 0$ знайдеться число t_r таке, що для всіх $t > t_r$ виконується нерівність $1/\alpha(t) > r$. Тому при $t > t_r$ будемо мати

$$\psi(t) = \psi(1)\mathrm{exp}\Big(-\int\limits_1^{t_r} \frac{d\tau}{\tau\alpha(\tau)} - \int\limits_{t_r}^{t} \frac{d\tau}{\tau\alpha(\tau)}\Big) \leq$$

$$\leq \psi(1)\mathrm{exp}\Big(-\int\limits_1^{t_r} \frac{d\tau}{\tau\alpha(\tau)}\Big)\mathrm{exp}\Big(-r\int\limits_{t_r}^{t} \frac{d\tau}{\tau}\Big) = \psi(1)\, t_r^r \,\mathrm{exp}\Big(-\int\limits_1^{t_r} \frac{d\tau}{\tau\alpha(\tau)}\Big) t^{-r},$$

звідки і випливатиме співвідношення (6.25). Теорему доведено.

Наведемо також ще одну властивість функцій з множини $\mathfrak{M}$, отриману в роботі [159], яка використовується в підрозділі 6.6.

Теорема 6.1.3 . *Нехай функція* $\psi \in \mathfrak{M}$ *така, що функція* $h(t) := 1/\psi(t)$ *опукла при* $t \geq t_0 \geq 1$. *Тоді при будь-якому* $t \geq t_0 \geq 1$ *справджується нерівність*

$$\eta'(\psi;t) \leq 2. \tag{6.27}$$

Доведення. Дійсно, згідно з означенням функції η при будь-якому $t \geq 1$ маємо

$$h(\eta(\psi;t)) = 2h(t).$$

Звідси отримуємо

$$h'(\eta(\psi;t)) \cdot \eta'(\psi;t) = 2h'(t).$$

Оскільки функція $h(t)$ опукла при $t \geq a$, то її похідна $h'(t)$ на цьому проміжку не спадає, і тому справджується співвідношення (6.27):

$$\eta'(\psi;t) = \frac{2h'(t)}{h'(\eta(\psi;t))} \leq 2.$$

6.2 Допоміжні твердження для функцій з множин F, $\mathfrak{M}_\infty^+$ та $\mathfrak{M}_0$

В даному підрозділі наведемо низку тверджень для множини F, яка означається наступною рівністю (6.29), для її підмножини $\mathfrak{M}_\infty^+$, а також для множини $\mathfrak{M}_0$.

Згідно з (6.3) для довільної функції $\psi \in \mathfrak{M}$ має місце рівність

$$\eta'(\psi,t) = \frac{\psi'(t)}{2\psi'(\eta(t))}, \quad t \geq 1,$$

із якої випливає, що

$$\eta'(\psi,t) \geq \frac{1}{2}, \quad t \geq 1. \tag{6.28}$$

Приклади функцій $\psi(t) = t^{-r}$, $r > 0$ та $\psi(t) = \ln^{-\varepsilon}(t+e)$, $\varepsilon > 0$, показують, що величина $\eta'(\psi,t)$ для різних функцій $\psi \in \mathfrak{M}$ може бути як обмеженою зверху, так і необмеженою. У зв'язку з цим розглядають множину (див., наприклад, [140, 143 (с. 164–166)])

$$F = \{\psi \in \mathfrak{M} : \quad \eta'(\psi;t) \leq K\}. \tag{6.29}$$

Множина F має низку специфічних властивостей, які були отримані О. І. Степанцем і містяться в наступних твердженнях.

Твердження 6.2.1 *(О. І. Степанець [140]). Має місце включення*

$$\mathfrak{M}_C \cup \mathfrak{M}_\infty^+ \subseteq F. \tag{6.30}$$

Твердження 6.2.2 *(О. І. Степанець [140]). Для того, щоб функція $\psi \in \mathfrak{M}$ належала множині F, необхідно і достатньо, щоб при всіх $t \geq 1$ виконувалося співвідношення*

$$K_1|\psi'(t)|(\eta(t) - t) \leq \psi(t) \leq K_2|\psi'(\eta(t))|(\eta(t) - t), \quad \eta(t) = \eta(\psi, t). \tag{6.31}$$

(О. І. Степанець [140]). Якщо покласти $\lambda(t) := \psi(t)/|\psi'(t)|$, то із (6.31) випливає, що $\forall\psi \in F$

$$K_1(\eta(t) - t) \leq \lambda(t) \leq K_2(\eta(t) - t), \quad \eta(t) = \eta(\psi, t). \tag{6.32}$$

Зауваження 6.2.1 Зауваження 6.2.2 . Із тверджень 6.1.1, 6.2.1 та зауваження 6.2.1 випливає, що $\forall\psi \in \mathfrak{M}_C$

$$\eta(\psi, t) - t \asymp \psi(t)/|\psi'(t)| \asymp t, \quad t \geq 1. \tag{6.33}$$

Твердження 6.2.3 *(О. І. Степанець [140]). Для того, щоб функція $\psi \in \mathfrak{M}$ належала множині F, необхідно і достатньо, щоб при всіх $t \geq 1$ виконувалася нерівність*

$$\frac{\eta(\eta(t)) - \eta(t)}{\eta(t) - t} \leq K, \quad \eta(t) = \eta(\psi; t). \tag{6.34}$$

Як зазначено вище, для довільної функції $\psi \in \mathfrak{M}$ виконується нерівність (6.28). З іншого боку, якщо $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, то внаслідок (6.9) маємо

$$\eta(\psi; t) = t(1 + \gamma(t)),$$

де $\gamma(t)$ – функція, монотонно спадна до нуля при $t \to \infty$. Звідки випливає, що

$$\eta'(\psi; t) \leq 1 + \gamma(t).$$

Таким чином, якщо $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, то справджується оцінка

$$\frac{1}{2} \leq \eta'(\psi; t) \leq 1 + \gamma(t), \quad \lim_{t\to\infty} \gamma(t) = 0. \tag{6.35}$$

Виявляється, що якщо існує границя при $t \to \infty$ величини $\eta'(\psi; t)$, то ця границя дорівнює одиниці. Точніше справедлива

Теорема 6.2.1 . *Якщо* $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, *і, окрім того*

$$\lim_{t\to\infty} \eta'(\psi;t) = a, \tag{6.36}$$

то $a = 1$.

Доведення. Із (6.35) випливає, що величина a більшою за одиницю бути не може. Припустимо, що $a < 1$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ знайшлося б таке число t_ε, що при всіх $t \geq t_\varepsilon$ виконувалася б нерівність $\eta'(\psi;t) < 1 - \varepsilon$. В такому разі

$$\eta(\psi;t) - \eta(\psi;t_\varepsilon) = \int\limits_{t_\varepsilon}^{t} \eta'(\psi;\tau)d\tau < (1-\varepsilon)(t - t_\varepsilon),$$

звідки випливало б, що при досить великих значеннях t $\eta(\psi;t) < t$, що неможливо. Тому дійсно $a = 1$. Теорему доведено.

При отриманні багатьох результатів для різноманітних класів функцій, які характеризуються функціями ψ з множини $\mathfrak{M}_\infty^+$, доцільним є окремо виділити такі підмножини цієї множини. Позначимо через $\mathfrak{M}'_\infty$ множину всіх функцій $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, що задовольняють умови

$$\alpha(\psi,t) = \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|} \downarrow 0 \tag{6.37}$$

і $\psi(t)/|\psi'(t)| \uparrow \infty$. Через $\mathfrak{M}_\infty^c$ позначимо множину всіх функцій $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, які задовольняють умови (6.37) і

$$K_1 \leq t\alpha(\psi,t) = \psi(t)/|\psi'(t)| \leq K_2, \quad t \geq 1, \tag{6.38}$$

а через $\mathfrak{M}''_\infty$ — множину всіх функцій $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, для яких

$$\psi(t)/|\psi'(t)| \downarrow 0, \quad \psi'(t) := \psi'(t+). \tag{6.39}$$

Зазначимо, що природними представниками множин $\mathfrak{M}'_\infty$, $\mathfrak{M}_\infty^c$ і $\mathfrak{M}''_\infty$ є функції $\exp(-\alpha t^s)$, $\alpha > 0$, у випадках, коли $s \in (0,1)$, $s = 1$ та $s > 1$ відповідно.

Для цих підмножин мають місце такі твердження:

Твердження 6.2.4 . *Для довільних фіксованих чисел* $d \geq 1$ *та* $c > 0$ *і для будь-якої функції* ψ *з множин* $\mathfrak{M}'_\infty$ *чи* $\mathfrak{M}_\infty^c$ *існує число* $K_c > 0$ *таке, що при всіх* $t \geq 1$,

$$1 \leq \frac{\psi(t^{1/d})}{\psi((t+c)^{1/d})} \leq K_c. \tag{6.40}$$

Доведення. Якщо функція ψ належить до множин $\mathfrak{M}'_\infty$ чи $\mathfrak{M}^c_\infty$, то при всіх $t \geq 1$ виконується нерівність $|\psi'(t)|/\psi(t) \leq K$. Звідси випливає, що для довільних $d \geq 1$, $c > 0$ і $t \geq 1$,

$$\int\limits_{t^{1/d}}^{(t+c)^{1/d}} \frac{|\psi'(\tau)|}{\psi(\tau)} d\tau \leq K((t+c)^{1/d} - t^{1/d}) \leq K\, c.$$

З іншого боку маємо

$$\int\limits_{t^{1/d}}^{(t+c)^{1/d}} \frac{|\psi'(\tau)|}{\psi(\tau)} d\tau = -\int\limits_{t^{1/d}}^{(t+c)^{1/d}} \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} d\tau = \ln \frac{\psi(t^{1/d})}{\psi((t+c)^{1/d})}.$$

Таким чином, існує число $K_c > 0$ таке, що при всіх $t \geq 1$ виконується співвідношення (6.40).

Твердження 6.2.5 . *Для довільних фіксованих чисел $d \geq 1$, $c > 0$ і для будь-якої функції ψ з множин $\mathfrak{M}'_\infty$ чи $\mathfrak{M}^c_\infty$ існують такі сталі $K_{c,1}, K_{c,2} > 0$, що при всіх $t \geq 1$,*

$$K_{c,1} \leq \frac{\psi(t^{1/d})/|\psi'(t^{1/d})|}{\psi((t+c)^{1/d}/|\psi'((t+c)^{1/d})|} \leq K_{c,2}. \tag{6.41}$$

Доведення. Для довільної функції $\psi \in \mathfrak{M}^c_\infty$ справедливість співвідношення (6.41) очевидна.

Якщо ж $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty$, то функція $\psi(t)/|\psi'(t)|$ монотонно зростає. Тому

$$\frac{\psi(t^{1/d})/|\psi'(t^{1/d})|}{\psi((t+c)^{1/d}/|\psi'((t+c)^{1/d})|} \leq 1. \tag{6.42}$$

З іншого боку внаслідок (6.37) величина $\alpha(\psi; t)$ монотонно спадає до нуля. Звідси

$$\frac{\psi(t^{1/d})/|\psi'(t^{1/d})|}{\psi((t+c)^{1/d}/|\psi'((t+c)^{1/d})|} = \frac{t^{1/d}}{(t+c)^{1/d}} \cdot \frac{\alpha(\psi; t^{1/d})}{\alpha(\psi; (t+c)^{1/d})} \geq K. \tag{6.43}$$

Об'єднуючи співвідношення (6.42) та (6.44), робимо висновок, що і в цьому випадку існують такі числа $K_{c,1}$, $K_{c,2} > 0$, що при всіх $t \geq 1$ виконується співвідношення (6.41).

Твердження 6.2.6 . *Якщо $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$, то для будь-яких чисел $c > 0$ і $K > 0$ при всіх достатньо великих t*

$$\frac{\psi(t)}{\psi(t+c)} \geq K. \tag{6.44}$$

Доведення. Дійсно, якщо $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$, то для довільної сталої $K_c > 0$ при всіх достатньо великих t виконується нерівність $|\psi'(t)|/\psi(t) \geq K_c$. Тому при $K_c = \frac{\ln K}{c}$ для таких t будемо мати

$$\ln \frac{\psi(t)}{\psi(t+c)} = \int\limits_t^{t+c} \frac{|\psi'(\tau)|}{\psi(\tau)} d\tau \geq K_c\, c = \frac{\ln K}{c}\, c = \ln K,$$

і співвідношення (6.44) доведено.

Встановимо також наступне твердження, яке використовується при оцінцах в підрозділі 6.7.

Твердження 6.2.7 . *Якщо $\psi \in \mathfrak{M}^+_\infty$ і для деяких послідовностей натуральних чисел a_n та b_n виконується співвідношення*

$$\psi(a_n) \asymp \psi(b_n), \tag{6.45}$$

то

$$a_n \asymp b_n.$$

Доведення. З означення множини $\mathfrak{M}^+_\infty$ та зауваження 6.2.1 випливає, що при всіх $t \geq 1$

$$\frac{1}{t} \leq K \frac{|\psi'(t)|}{\psi(t)}, \quad K = \mathrm{const}.$$

Інтегруючи ліву і праву частину цієї нерівності в межах від a до b $(1 \leq a < b)$, отримуємо

$$\ln \frac{b}{a} \leq K \ln \frac{\psi(a)}{\psi(b)}.$$

Поклавши в це співвідношення $\bar{a}_n = \min\{a_n, b_n\}$ і $\bar{b}_n = \max\{a_n, b_n\}$, внаслідок (6.45) робимо висновок, що існує стала $K_1 > 1$ така, що при всіх $n \in \mathbb{N}$ має місце співвідношення $\bar{b}_n \leq K_1 \bar{a}_n$, звідки

$$1/K_1 a_n \leq b_n \leq K_1 a_n.$$

Насамкінець даного підрозділу позначимо через B множину всіх монотонно спадних до нуля при $t \to \infty$ функцій $\psi(t)$, $t \geq 1$, які задовольняють так звану Δ_2-умову:

$$\frac{\psi(t)}{\psi(2t)} \leq K, \quad K \equiv \mathrm{const}. \tag{6.46}$$

Тоді як показано в [143 (§3.16)] має місце рівність

$$B \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0. \tag{6.47}$$

6.3 Твердження для функцій, оберенених до функцій з множини $\mathfrak{M}$

В цьому підрозділі розглядаються множини функцій, оберенених до функцій з множини $\mathfrak{M}$ і встановлюється низка нових тверджень для таких функцій.

Нехай $\mathfrak{M}^*$ — множина всіх додатних при $t \in (0,1]$ опуклих донизу спадних функцій $\varphi(\cdot)$ таких, що $\lim\limits_{t\to 0+} \varphi(t) = +\infty$.

Для $\varphi \in \mathfrak{M}^*$ означимо характеристики $\zeta(t) = \zeta(\varphi;t)$ та $\nu(t) = \nu(\varphi;t)$ — аналоги величин $\eta(t)$ та $\mu(t)$, які визначаються наступним чином

$$\varphi(\zeta(t)) = 2\varphi(t), \quad t \in (0,1]. \tag{6.48}$$

Внаслідок строгої монотонності φ, функція $\zeta(t)$ при всіх $t \in (0,1]$ визначається однозначно:

$$\zeta(t) = \zeta(\varphi;t) = \varphi^{-1}(2\varphi(t)). \tag{6.49}$$

Функція $\nu(t)$ задається рівністю

$$\nu(t) = \nu(\varphi;t) = \frac{\zeta(t)}{t - \zeta(t)}.$$

Якщо $\varphi_1(t) = t^{-r}$, $r > 0$, то $\zeta(\varphi_1;t) = 2^{-1/r}t$ і $\nu(\varphi_1;t) = (2^{1/r} - 1)^{-1}$; якщо $\varphi_2(t) = \ln\frac{1}{t}$, тобто, $\varphi_2(t)$ — обернена функція до функції e^{-t}, то $\zeta(\varphi_2;t) = t^2$ і $\nu(\varphi_2;t) = t/(1-t)$, а якщо ж $\varphi_3(t) = e^{1/t}$ ($\varphi_3^{-1}(t) = 1/\ln t$), то $\zeta(\varphi_3;t) = \dfrac{t}{t\ln 2 + 1}$ і $\nu(\varphi_3;t) = (t\ln 2)^{-1}$. З даних прикладів бачимо, що функція $\nu(t)$ може бути обмеженою зверху та знизу деякими сталими, може прямувати до нуля або до нескінченності при $t \to 0$. На основі таких ознак виділимо із множини $\mathfrak{M}^*$ наступні підмножини:

$$\mathfrak{M}_0^* = \{\varphi \in \mathfrak{M}^* \ : \quad 0 < \nu(\varphi;t) \le K \ \ \forall t \in (0,1] \ \},$$

$$\mathfrak{M}_\infty^* = \{\varphi \in \mathfrak{M}^* \ : \quad 0 < K \le \nu(\varphi;t) < \infty \ \ \forall t \in (0,1] \ \},$$

$$\mathfrak{M}_C^* = \mathfrak{M}_0^* \cap \mathfrak{M}_\infty^* = \{\varphi \in \mathfrak{M}^* \ : \quad 0 < K_1 \le \nu(\varphi;t) \le K_2 \ \ \forall t \in (0,1] \ \}.$$

Далі, через $\mathfrak{M}_0^{*+}$ позначимо підмножину всіх функцій $\varphi \in \mathfrak{M}^*$, для яких величина $\nu(\varphi;t)$ при $t \to 0$ монотонно прямує до нуля:

$$\mathfrak{M}_0^{*+} = \{\varphi \in \mathfrak{M}^* \ : \quad \nu(\varphi;t) \downarrow 0 \text{ при } t \to 0 \ \},$$

а через $\mathfrak{M}_\infty^{*+}$ — підмножину всіх функцій $\varphi \in \mathfrak{M}^*$, для яких $\nu(\varphi;t)$ монотонно і необмежено зростає при $t \to 0$:

$$\mathfrak{M}_\infty^{*+} = \{\varphi \in \mathfrak{M}^* \ : \quad \nu(\varphi;t) \uparrow \infty \text{ при } t \to 0 \ \}.$$

У функцій $\varphi \in \mathfrak{M}^*$ на проміжку $(0,1)$ існують монотонні похідні $\varphi'(t)$, що допускають розриви лише першого роду. Тому надалі вважаємо, що $\varphi'(t) = \varphi'(t-0)$, $t \in (0,1)$. При цих позначеннях має місце наступний аналог твердження 6.1.1.

Теорема 6.3.1 . *Функція $\varphi \in \mathfrak{M}^*$ належить множині $\mathfrak{M}_0^*$ тоді і лише тоді, коли величина*

$$\beta(t) = \beta(\varphi; t) = \frac{t|\varphi'(t)|}{\varphi(t)}, \quad \varphi'(t) := \varphi'(t-), \tag{6.50}$$

задовольняє умову

$$\beta(t) \leq K \quad \forall t \in (0,1]; \tag{6.51}$$

$\varphi \in \mathfrak{M}^*$ *належить множині* $\mathfrak{M}_\infty^*$ *тоді і лише тоді, коли*

$$\beta(t) \geq K > 0 \quad \forall t \in (0,1]; \tag{6.52}$$

$\varphi \in \mathfrak{M}^*$ *належить множині* $\mathfrak{M}_C^*$ *тоді і лише тоді, коли*

$$0 < K_1 \leq \beta(t) \leq K_2 \quad \forall t \in (0,1]. \tag{6.53}$$

Якщо функція $\beta(t)$ не спадає і

$$\lim_{t\to 0} \beta(t) = 0, \tag{6.54}$$

то $\varphi \in \mathfrak{M}_0^{*+}$. Якщо ж $\beta(t)$ не зростає і

$$\lim_{t\to 0} \beta(t) = \infty, \tag{6.55}$$

то $\varphi \in \mathfrak{M}_\infty^{*+}$.

Доведення. Враховуючи рівність (6.50), $\forall t \in (0,1]$ маємо

$$\varphi(t) \int\limits_{\zeta(t)}^{t} \frac{\beta(\tau)}{\tau} d\tau \leq \int\limits_{\zeta(t)}^{t} |\varphi'(\tau)| d\tau = \int\limits_{\zeta(t)}^{t} \frac{\beta(\tau)\varphi(\tau)}{\tau} d\tau \leq \varphi(\zeta(t)) \int\limits_{\zeta(t)}^{t} \frac{\beta(\tau)}{\tau} d\tau$$

або, із врахуванням (6.48),

$$\varphi(t) \int\limits_{\zeta(t)}^{t} \frac{\beta(\tau)}{\tau} d\tau \leq \varphi(t) \leq 2\varphi(t) \int\limits_{\zeta(t)}^{t} \frac{\beta(\tau)}{\tau} d\tau,$$

тобто $\forall t \in (0,1]$

$$\frac{1}{2} \leq \int\limits_{\zeta(t)}^{t} \frac{\beta(\tau)}{\tau} d\tau \leq 1. \tag{6.56}$$

Якщо виконується (6.51), то звідси

$$\frac{1}{2K} \le \int\limits_{\zeta(t)}^{t} \frac{d\tau}{\tau} = \ln\frac{t}{\zeta(t)} = \ln(\frac{1}{\nu(\varphi;t)} + 1).$$

Таким чином,

$$\nu(\varphi;t) \le (e^{1/(2K)} - 1)^{-1},$$

тобто $\varphi \in \mathfrak{M}_0^*$.

Якщо виконується умова (6.52), то з (6.56) аналогічно знаходимо

$$\ln(\frac{1}{\nu(\varphi;t)} + 1) \le \frac{1}{K},$$

звідки одразу випливає, що $\varphi \in \mathfrak{M}_\infty^*$. Таким самим чином переконуємося, що при виконанні умови (6.53) функція φ належить множині $\mathfrak{M}_C^*$.

Якщо $\beta(t)$ не спадає і виконується (6.54), то внаслідок (6.56) $\forall t \in (0,1]$

$$\beta(t) \ge 1/\Big(2\ln(\frac{1}{\nu(\varphi;t)} + 1)\Big).$$

Звідси із врахуванням (6.54) робимо висновок, що

$$\lim_{t\to 0} \nu(\varphi;t) = 0.$$

Переконаємося, що $\nu(\varphi;t)$ монотонно не зростає при $t \to 0$. Це можливо тоді і лише тоді, коли

$$t\zeta'(t) - \zeta(t) \ge 0, \quad \zeta'(t) = \zeta'(t-0). \tag{6.57}$$

Згідно з (6.48) та (6.50)

$$2\varphi(t) = \varphi(\zeta(t)) = -\frac{\zeta(t)\varphi'(\zeta(t))}{\beta(\zeta(t))}.$$

Об'єднуючи цю рівність із рівністю (6.50) і враховуючи те, що внаслідок (6.49) $\forall\varphi \in \mathfrak{M}^*$

$$\zeta'(t) = \frac{2\varphi'(t)}{\varphi'(\zeta(t))}, \tag{6.58}$$

отримуємо

$$\frac{t\zeta'(t)\beta(\zeta(t))}{\beta(t)\zeta(t)} = 1,$$

або

$$t\zeta'(t) = \zeta(t)\frac{\beta(t)}{\beta(\zeta(t))} \ge \zeta(t),$$

тобто, співвідношення (6.57) дійсно є правильним. Тим самим доведено, що коли $\beta(t)$ не спадає і виконується (6.54), то $\varphi \in \mathfrak{M}_0^{*+}$. Аналогічно переконуємося, що у випадку, коли $\beta(t)$ не зростає і справджується умова (6.55), функція φ належить множині $\mathfrak{M}_\infty^{*+}$.

Залишається показати, що $\forall\varphi \in \mathfrak{M}_0^*$ виконується умова (6.51), а $\forall\varphi \in \mathfrak{M}_\infty^*$ — умова (6.52) і для будь-якої функції $\varphi \in \mathfrak{M}_C^*$ справджується умова (6.53).

Для кожної функції $\varphi \in \mathfrak{M}^*$ при довільному $t \in (0,1]$ маємо

$$|\varphi'(t)|(t-\zeta(t)) \leq \varphi(t) = -\int\limits_{\zeta(t)}^{t} \varphi'(\tau)d\tau \leq |\varphi'(\zeta(t))|(t-\zeta(t)).$$

Звідси

$$\frac{t|\varphi'(t)|}{\varphi(t)} \leq \frac{t}{t-\zeta(t)} = 1 + \frac{\zeta(t)}{t-\zeta(t)}.$$

Якщо $\varphi \in \mathfrak{M}^*$ така, що

$$\nu(\varphi;t) = \frac{\zeta(t)}{t-\zeta(t)} \leq K \quad \forall t \in (0,1],$$

тобто, $\varphi \in \mathfrak{M}_0^*$, то

$$\beta(t) = \frac{t|\varphi'(t)|}{\varphi(t)} \leq K+1.$$

Тим самим доведено, що якщо $\varphi \in \mathfrak{M}_0^*$, то умова (6.51) виконується, а також те, що для функцій $\varphi \in \mathfrak{M}_C^*$ справджується права частина співвідношення (6.53).

Для кожної функції $\varphi \in \mathfrak{M}^*$ позначимо через $\overline{\zeta}(t) = \overline{\zeta}(\varphi;t)$ функцію, обернену до $\zeta(t)$. Внаслідок (6.58) при довільному $t \in (0,1]$ справедлива нерівність $\zeta'(t) > 2$, з якої випливає строга монотонність функції $\zeta(t)$. Тому функція $\overline{\zeta}(t)$ на півінтервалі $(0,\zeta(1)]$ визначається однозначно і при кожному $t \in (0,\zeta(1)]$ справджується співвідношення

$$\frac{1}{2}\varphi(t) = -\int\limits_{t}^{\overline{\zeta}(t)} \varphi'(\tau)d\tau \leq |\varphi'(t)|(\overline{\zeta}(t)-t)$$

або

$$\frac{t}{\overline{\zeta}(t)-t} \leq 2\frac{t|\varphi'(t)|}{\varphi(t)}. \tag{6.59}$$

Припустимо тепер, що функція $\varphi \in \mathfrak{M}^*$ така, що

$$\nu(\varphi;t) = \frac{\zeta(t)}{t-\zeta(t)} \geq K > 0 \quad \forall t \in (0,1], \tag{6.60}$$

тобто, $\varphi \in \mathfrak{M}_\infty^*$. Тоді покладаючи $z = \overline{\zeta}(t)$, знаходимо

$$\frac{t}{t - \overline{\zeta}(t)} = \frac{\zeta(z)}{\zeta(z) - z} \geq K$$

підставляючи дану оцінку в (6.59) робимо висновок, що коли виконується (6.60), то при всіх $t \in (0, \zeta(1)]$

$$\beta(t) = \frac{t|\varphi'(t)|}{\varphi(t)} \geq K_1 > 0.$$

Зрозуміло, що така ж нерівність справедлива і при $t \in [\zeta(1), 1]$. Таким чином, якщо $\varphi \in \mathfrak{M}_\infty^*$, то умова (6.52) виконується, а якщо $\varphi \in \mathfrak{M}_C^*$, то справджується і ліва частина співвідношення (6.53). Теорему доведено.

Із твердження 6.1.1 легко випливає наступний факт, який вказує на певну спорідненість функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, що мають подібні величини $\alpha = \alpha(\psi; \cdot)$.

Наслідок 6.3.1 . *Якщо для функцій* $\psi_1 \in \mathfrak{M}$ *та* $\psi_2 \in \mathfrak{M}$ *величина* $r(t) = \dfrac{\alpha(\psi_1; t)}{\alpha(\psi_2; t)}$ *при всіх* $t \geq 1$ *задовольняє співвідношення*

$$0 < K_1 \leq r(t) \leq K_2 < \infty,$$

то властивості цих функцій співпадають в тому сенсі, що якщо одна з цих функцій належить множині $\mathfrak{M}_\infty$, $\mathfrak{M}_0$ *або* $\mathfrak{M}_C$, *то і інша функція також належить цій самій множині.*

Зрозуміло, що аналогічне твердження для функцій з множини $\mathfrak{M}^*$ випливає із теореми 6.3.1.

Наслідок 6.3.1′. *Якщо для функцій* $\varphi_1 \in \mathfrak{M}^*$ *та* $\varphi_2 \in \mathfrak{M}^*$ *величина* $r^*(t) = \dfrac{\beta(\varphi_1; t)}{\beta(\varphi_2; t)}$ *при всіх* $t \in (0, 1]$ *задовольняє співвідношення*

$$0 < K_1 \leq r^*(t) \leq K_2 < \infty,$$

то властивості цих функцій співпадають в тому сенсі, що якщо одна з цих функцій належить множині $\mathfrak{M}_\infty^*$, $\mathfrak{M}_0^*$ *або* $\mathfrak{M}_C^*$, *то і інша функція належить цій самій множині.*

З означення множин $\mathfrak{M}$ та $\mathfrak{M}^*$ випливає, що для довільної $\psi \in \mathfrak{M}$, функція φ, обернена до функції $\psi(t)/\psi(1)$, належить множині $\mathfrak{M}^*$. Крім того, на підставі теорем про похідну оберненої функції $\forall t \geq 1$ маємо

$$\alpha(\psi; t) = \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|} = \frac{\psi(t)\psi(1)}{t|\psi'(t)|\psi(1)} = \frac{y|\varphi'(y)|}{\varphi(y)} = \beta(\varphi; y),$$

де $y = \psi(t)/\psi(1) \in (0, 1]$. Звідси на підставі твердження А та теореми 1 отримуємо наступний наслідок.

Наслідок 6.3.2 . *Функція* $\psi \in \mathfrak{M}$ *належить множині* $\mathfrak{M}_0$ ($\mathfrak{M}_\infty$, $\mathfrak{M}_C$, $\mathfrak{M}_0^+$ *або* $\mathfrak{M}_\infty^+$) *тоді і лише тоді, коли функція* φ, *яка є оберненою функцією до функції* $\psi(t)/\psi(1)$, *належить відповідно множині* $\mathfrak{M}_\infty^*$ ($\mathfrak{M}_0^*$, $\mathfrak{M}_C^*$, $\mathfrak{M}_\infty^{*+}$ *або* $\mathfrak{M}_0^{*+}$).

Записуючи рівність (6.50) у вигляді

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = -\frac{\beta(t)}{t}$$

та інтегруючи останнє співвідношення по проміжку $[t, 1]$, $t \le 1$, отримуємо

$$\varphi(t) = \varphi(1)\exp(\int_t^1 \frac{\beta(\tau)}{\tau} d\tau).$$

Аналізуючи цю рівність отримуємо наступний аналог твердження 6.1.2.

Наслідок 6.3.3 . *Якщо* $\varphi \in \mathfrak{M}_0^*$, *то можна вказати таке* $r_1 > 0$, *що при всіх* $t \in (0, 1]$ *буде виконуватись нерівність*

$$\varphi(t) \le Kt^{-r_1},$$

якщо $\varphi \in \mathfrak{M}_\infty^*$, *то існує число* $r_2 > 0$ *таке, що при всіх* $t \in (0, 1]$

$$\varphi(t) \ge Kt^{-r_2},$$

якщо ж $\varphi \in \mathfrak{M}_C^*$, *то існують числа* $r_1, r_2 > 0$ *такі, що при всіх* $t \in (0, 1]$

$$K_1 t^{-r_1} \le \varphi(t) \le K_2 t^{-r_2}.$$

6.4 Мажоранти і міноранти опуклих функцій

6.4.1. Якщо $\psi_1(t) = e^{-t} \in \mathfrak{M}_\infty$, то $\forall t \ge 1$, $r > 0$ маємо $\psi_1(t) \le t^{-r}$; якщо $\psi_2(t) = \frac{1}{\ln t} \in \mathfrak{M}_0$, то $\forall t \ge 1$, $r > 0$ $\psi_2(t) \ge t^{-r}$, якщо ж $\psi_3(t) = t^{-r}$, $r > 0$, то для довільного $t \ge 1$ та r_1, $r_2 > 0$ таких, що $r_2 < r < r_1$, $t^{-r_1} \le \psi_3(t) \le t^{-r_2}$. У зв'язку з цим природно виникає питання: чи гарантують співвідношення вигляду (6.22)–(6.24) належність функцій $\psi \in \mathfrak{M}$ до однієї із множин $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_\infty$ чи $\mathfrak{M}_C$? Відповідь на це питання дають твердження, отримані в даному підрозділі.

Теорема 6.4.1 . *Якою б не була монотонно незростаюча на проміжку* $t \geq 1$ *функція* $f(t)$ *така, що* $f(t) > 0$ *при* $t \geq 1$, *і для якої* $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$, *знайдеться функція* $\psi \in \mathfrak{M}$ *така, що*

$$\psi(t) < f(t) \quad \forall t \geq 1, \tag{6.61}$$

і при цьому справджуються співвідношення $\varliminf\limits_{t\to\infty} \mu(\psi;t) = 0$ *та* $\varlimsup\limits_{t\to\infty} \mu(\psi;t) = \infty$.

Це означає, що нерівності вигляду (6.23) не гарантують функціям $\psi \in \mathfrak{M}$ належність ані до множини $\mathfrak{M}_\infty$, ані до множини $\mathfrak{M}_0$. Звідси, зокрема, випливає, що множина $\mathfrak{M} \setminus (\mathfrak{M}_\infty \cup \mathfrak{M}_0)$ не є порожньою.

Доведення. Нехай $y = f(t)$ — довільна функція, що задовольняє умовам твердження. Побудуємо функцію $\psi(t)$ наступним чином. Нехай $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, — послідовність додатних чисел така, що

$$n_{2k+1} = 1 + \frac{1}{k}, \qquad 1 < n_{2k} < n_{2k+2} \quad k \in \mathbb{N} \quad \text{і} \quad \lim_{k\to\infty} n_{2k} = \infty.$$

Через a_1 позначимо деяке число з проміжку $t > 1$ і при деякому $\xi > 0$ розглянемо функцію $y_1(\xi,t)$, графіком якої є пряма $l_\xi^{(1)}$, що проходить через точки $(a_1, 2\xi)$ і $(n_1 a_1, \xi)$. Позначимо через ξ_1, $\xi_1 > 0$, таке значення ξ, при якому справджується нерівність

$$y_1(\xi_1, t) \leq f(t), \quad t > 1.$$

При довільному значенні ξ лінія $l_\xi^{(1)}$ перетинає вісь Ot в точці $(2n_1 - 1)a_1$, тому таке значення ξ_1 завжди знайдеться.

Далі, покладемо $(2n_1 - 1)a_1 = a_2$ і при $\xi > 0$ розглянемо функцію $y_2(\xi,t)$, графіком якої є лінія $l_\xi^{(2)}$, що проходить через точки $(a_2, 2\xi)$ і $(n_2 a_2, \xi)$. Через ξ_2 позначимо число, для якого

$$y_2(\xi_2, t) \leq f(t), \quad t > 1,$$

і, окрім того, лінії $l_{\xi_1}^{(1)}$ та $l_{\xi_2}^{(2)}$ перетинаються в деякій точці b_1, що лежать на проміжку $[n_1 a_1, (2n_1 - 1)a_1)$. Таке число ξ_2 знайдеться, бо лінія $l_\xi^{(2)}$ перетинає вісь Ot в точці $(2n_2 - 1)a_2$, що не залежить від ξ.

Покладемо $(2n_2 - 1)a_2 = a_3$ і продовжимо процес побудови функцій $y_i(\xi_i, t)$, $i = 3, 4, \ldots$. При цьому k-й, $k \geq 3$, крок полягає в наступному. Покладемо $a_k = (2n_{k-1} - 1)a_{k-1}$, розглянемо функцію $y_k(\xi, t)$, графік якої є пряма $l_\xi^{(k)}$, що проходить через точки $(a_k, 2\xi)$ і $(n_k a_k, \xi)$, знайдемо значення ξ_k, для якого буде

$$y_k(\xi_k, t) \leq f(t), \quad t > 1, \tag{6.62}$$

і, окрім того, лінії $l^{(k-1)}_{\xi_{k-1}}$ та $l^{(k)}_{\xi_k}$ перетинаються в деякій точці b_{k-1} з проміжку $[n_{k-1}a_{k-1}, (2n_{k-1}-1)a_{k-1})$.

В результаті буде побудовано

1) послідовність точок a_k таких, що

$$a_k = (2n_{k-1}-1)a_{k-1}, \quad k = 2, 3, \ldots,$$

2) послідовність точок b_k, для яких

$$n_k a_k \le b_k < (2n_k - 1)a_k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

3) послідовність лінійних функцій $y_k(\xi_k, t)$, $k = 1, 2, \ldots$, для яких справджується співвідношення (6.62) і лінії $l^{(k-1)}_{\xi_{k-1}}$ та $l^{(k)}_{\xi_k}$ перетинаються в точках b_k.

Після цього покладемо

$$\psi(t) = y_k(\xi_k, t), \quad t \in [b_{k-1}, b_k], \quad k = 1, 2, \ldots, \quad b_0 := 1.$$

Графіком функції $\psi(t)$ є ламана лінія з вузлами в точках b_k, яка за побудовою є опуклою до низу при всіх $t > 1$ і $\lim\limits_{t\to\infty} \psi(t) = 0$. Тобто, $\psi \in \mathfrak{M}$ і для неї справджується оцінка (6.61). В той же час на кожному проміжку $[a_k, n_k a_k]$ функція $\psi(t)$ спадає в два рази. Тому $\eta(\psi, a_k) = n_k a_k$ і, отже, $\dfrac{\eta(\psi, a_k) - a_k}{a_k} = n_k - 1$. Звідси на підставі того, що

$$\frac{\eta(\psi, a_{2k+1}) - a_{2k+1}}{a_{2k+1}} = \frac{1}{k}, \quad \text{а} \quad \frac{\eta(\psi, a_{2k}) - a_{2k}}{a_{2k}} = n_{2k} - 1,$$

отримуємо потрібні співвідношення:

$$\varliminf_{t\to\infty} \mu(\psi; t) = \lim_{k\to\infty} \frac{\eta(\psi, a_{2k+1}) - a_{2k+1}}{a_{2k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$$

і

$$\varlimsup_{t\to\infty} \mu(\psi; t) = \lim_{k\to\infty} \frac{\eta(\psi, a_{2k}) - a_{2k}}{a_{2k}} = \lim_{k\to\infty} (n_{2k} - 1) = \infty.$$

6.4.2. Наступне твердження показує, що нерівності вигляду (6.22) також не гарантують функціям $\psi \in \mathfrak{M}$ належність до множини $\mathfrak{M}_0$.

Теорема 6.4.2 . *Якою б не була незростаюча при $t \ge 1$ функція $f(t)$ така, що $f(t) > 0$ при $t \ge 1$, і для якої $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$, знайдеться функція $\psi \in \mathfrak{M}$ така, що*

$$f(t) < \psi(t) \quad \forall t \ge 1 \tag{6.63}$$

і при цьому величина $\mu(\psi; t)$ є необмеженою.

Доведення. Не втрачаючи загальності , будемо вважати, що $f(t) < 1$. Проміжок $y \in (0, 1]$ розіб'ємо точками $y_k = \frac{1}{2^k}$, $k = 0, 1, \ldots$, і через t_k позначимо точки, для яких $f(t_k) = y_k$. У випадку, коли при деякому k таких точок є багато, через t_k позначимо найбільшу із них, тобто

$$t_k = \max\{t : \ y(t) = y_k\}, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Таким чином, будемо мати

$$f(t) < y_k, \quad t > t_k, \ \ k = 0, 1, \ldots.$$

Перед усім на проміжку $[1, t_1]$ функцію ψ означимо так, щоб її графіком була лінія l_0, яка з'єднує $(1, 2)$ та $(t_1, 1)$. При цьому менший із кутів, під якими l_0 перетинає пряму $y = 1$, позначимо через α_0. Лінія l_0 перетинає графік функції $f(t)$ в деякій точці $\bar{t}_0 > t_1$.

Далі, для побудови функції ψ застосуємо процедуру, на першому кроці якої візьмемо довільне число $\xi > \max\{t_2, \bar{t}_0\}$, і розглянемо лінію $l(\xi) = l(\xi; t)$, що з'єднує точки $(\xi, \frac{1}{2^1})$ та $(\xi + \sqrt{\xi}, \frac{1}{2^2})$. Менший із кутів, під якими $l(\xi)$ перетинає пряму $y = \frac{1}{2^2}$, позначимо через α_2. Тоді

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{1}{2^2 \sqrt{\xi}},$$

і тому кут α_2 неперервно зменшується із ростом ξ. Звідси випливає, що знайдеться значення $\xi = t_2'$, $t_2' > \max\{t_2, \bar{t}_0\}$, таке, що точка перетину t_1' прямих l_0 та $l(\xi)$ буде лежати справа від точки t_1, тобто, $t_1' > t_1$. Лінію $l(\xi)$ при $\xi = t_2'$ позначимо через l_2. Тоді функцію $\psi(t)$ на проміжку $[t_1, t_2' + \sqrt{t_2'}]$ означимо так, щоб її графік при $t \in [t_2', t_2' + \sqrt{t_2'}]$ співпадав із лінією l_2, а на проміжку $[t_1, t_2')$ — із лінією l_1, яка сполучає точки $(t_1, 1)$ та $(t_2', \frac{1}{2^1})$.

Таким чином, функцію $\psi(t)$ буде означено при всіх $t \in [1, t_2' + \sqrt{t_2'}]$. Вона є опуклою і задовольняє співвідношення (6.63).

На другому кроці візьмемо довільне число $\xi > \max\{t_4, \bar{t}_2\}$, де $\bar{t}_2$ — точка перетину прямої l_2 із графіком функції $f(t)$. Розглянемо лінію $l(\xi) = l(\xi; t)$, що з'єднує точки $(\xi, \frac{1}{2^3})$ та $(\xi + \sqrt{\xi}, \frac{1}{2^4})$. Менший із кутів, під якими $l(\xi)$ перетинає пряму $y = \frac{1}{2^4}$, позначимо через α_k. Тоді

$$\operatorname{tg} \alpha_4 = \frac{1}{2^4 \sqrt{\xi}},$$

і кут α_4 знову неперервно зменшується із ростом ξ. Тому знайдеться значення $\xi = t_4'$, $t_4' > \max\{t_4, \bar{t}_2\}$, таке, що точка перетину t_3' прямих l_2 та $l(\xi)$ буде лежати справа від точки $t'_2 + \sqrt{t'_2}$, тобто, $t'_3 > t'_2 + \sqrt{t'_2}$. Лінію $l(\xi)$ при $\xi = t'_4$ позначимо через l_4. Тоді функцію $\psi(t)$ на проміжку $[t'_2 + \sqrt{t'_2}, t'_4 + \sqrt{t'_4}]$ означимо так, щоб її графік при $t \in [t'_4, t'_4 + \sqrt{t'_4}]$ співпадав із лінією l_4, а на проміжку $[t'_2 + \sqrt{t'_2}, t'_4)$ — із лінією l_3, яка сполучає точки $(t'_2 + \sqrt{t'_2}, \frac{1}{2^2})$ та $(t'_4, \frac{1}{2^3})$. Тим самим, функцію $\psi(t)$ означено при всіх $t \in [1, t'_4 + \sqrt{t'_4}]$. Вона є опуклою і задовольняє співвідношення (6.63).

Продовжуючи цей процес далі, на деякому, наприклад, k-ому кроці візьмемо довільне число $\xi > \max\{t_{2k}, \bar{t}_{2k-2}\}$, де $\bar{t}_{2k-2}$ — точка перетину прямої l_{2k-2} із графіком функції $f(t)$. Розглянемо лінію $l(\xi) = l(\xi; t)$, що з'єднує точки $(\xi, \frac{1}{2^{2k-1}})$ та $(\xi + \sqrt{\xi}, \frac{1}{2^{2k}})$. Менший із кутів, під якими $l(\xi)$ перетинає пряму $y = \frac{1}{2^{2k}}$, позначимо через α_{2k}. Тоді

$$\operatorname{tg} \alpha_{2k} = \frac{1}{2^{2k}\sqrt{\xi}},$$

і кут α_{2k} неперервно зменшується із ростом ξ. Тому знайдеться значення $\xi = t'_{2k}$, $t'_{2k} > \max\{t_{2k}, \bar{t}_{2k-2}\}$, таке, що точка перетину t'_{2k-1} прямих l_{2k-2} та $l(\xi)$ буде лежати справа від точки $t'_{2k-2} + \sqrt{t'_{2k-2}}$, тобто, $t'_{2k-1} > t'_{2k-2} + \sqrt{t'_{2k-2}}$. Лінію $l(\xi)$ при $\xi = t'_{2k}$ позначимо через l_{2k}. Тоді функцію $\psi(t)$ на проміжку $[t'_{2k-2} + \sqrt{t'_{2k-2}}, t'_{2k} + \sqrt{t'_{2k}}]$ означимо так, щоб її графік при $t \in [t'_{2k}, t'_{2k} + \sqrt{t'_{2k}}]$ співпадав із лінією l_{2k}, а на проміжку $[t'_{2k-2} + \sqrt{t'_{2k-2}}, t'_{2k})$ — із лінією l_{2k-1}, яка сполучає точки $(t'_{2k-2} + \sqrt{t'_{2k-2}}, \frac{1}{2^{2k-2}})$ та $(t'_{2k}, \frac{1}{2^{2k-1}})$. Тим самим, функцію $\psi(t)$ означено при всіх $t \in [1, t'_{2k} + \sqrt{t'_{2k}}]$. Вона є опуклою і задовольняє співвідношення (6.63).

В результаті такого процесу буде побудовано функцію $\psi(t)$, графіком якої є ламана лінія із вузлами в точках $(1, 2)$, $(t_1, 1)$, $(t'_{2k}, \frac{1}{2^{2k-1}})$ та $(t'_{2k} + \sqrt{t'_{2k}}, \frac{1}{2^{2k}})$, $k = 1, 2, \ldots$. Ця функція за побудовою є опуклою до низу при всіх $t > 1$ і $\lim\limits_{t\to\infty} \psi(t) = 0$. Тобто, $\psi \in \mathfrak{M}$ і для неї справджується оцінка (6.63). В той же час на кожному із проміжків $(t'_{2k}, t'_{2k} + \sqrt{t'_{2k}})$, $k = 1, 2, \ldots$, функція $\psi(t)$ спадає в два рази. Тому $\eta(\psi, t'_{2k}) = t'_{2k} + \sqrt{t'_{2k}}$ і, отже,

$$\frac{t'_{2k}}{\eta(\psi, t'_{2k}) - t'_{2k}} = \sqrt{t'_{2k}} \longrightarrow \infty \text{ при } k \to \infty.$$

Таким чином, теореми 6.4.1 і 6.4.2 зокрема показують, що нерівності вигляду (6.22) та (6.23) взагалі кажучи не гарантують функції $\psi \in \mathfrak{M}$ належність до множин $\mathfrak{M}_\infty$ та $\mathfrak{M}_0$ відповідно.

6.4.3. Розглянемо тепер випадок, коли для даної функції $\psi(t) \in \mathfrak{M}$ виконується співвідношення

$$\psi_1(t) \le \psi(t) \le \psi_2(t) \quad \forall t \ge 1, \tag{6.64}$$

де ψ_1, ψ_2 — деякі функції з множини $\mathfrak{M}$. Позначимо через $\psi_1^{-1}(\xi)$ та $\psi_2^{-1}(\xi)$ функції, обернені відповідно до функцій ψ_1 та ψ_2. Внаслідок строгої монотонності функцій ψ_1 та ψ_2, ці функції визначаються однозначно для довільного $\xi \in (0, \psi_1(1)]$.

В прийнятих позначеннях справедливе наступне твердження.

Теорема 6.4.3 . *Нехай $\psi_1 \in \mathfrak{M}$, а ψ_2 — довільна неперервна спадна на проміжку $[1, \infty)$ функція така, що при кожному $t \geq 1$ виконується нерівність $\psi_2(t) \geq \psi_1(t)$, і*

$$\overline{\lim_{\xi \to 0}} \frac{\psi_2^{-1}(\xi) - \psi_1^{-1}(\xi)}{\psi_1^{-1}(\xi)} = \infty, \tag{6.65}$$

Тоді існує функція $\psi \in \mathfrak{M}$, для якої виконується співвідношення (6.64), і при цьому величина $1/\mu(\psi; t)$ не є обмеженою.

Доведення. Нехай функції ψ_1 та ψ_2 задовольняють умови даного твердження. Тоді внаслідок (6.65) існує монотонно спадна до нуля послідовність чисел $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ така, що

$$\lim_{k \to \infty} \frac{t'_k - t_k}{t_k} = \infty, \quad t_k = \psi_1^{-1}(\xi_k), \quad t'_k = \psi_2^{-1}(\xi_k). \tag{6.66}$$

Шукану функцію ψ можна будувати, наприклад, таким чином.

Перед усім розглянемо функцію $y_1(\xi_1, t)$, графіком якої є пряма l_1, що проходить через точки $(t_1; \xi_1)$ та $(t'_1; \psi_1(t'_1))$. Тоді для будь-якого $t \in (t_1, t'_1)$ будемо мати

$$\psi_1(t) \leq y_1(\xi_1, t) \leq \psi_2(t).$$

На наступному кроці позначимо через ξ_{i_2}, $i_2 \geq 2$, найближчий зліва від точки $\psi_1(t'_1)$ елемент послідовності $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$. Послідовність $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ монотонно спадає до нуля, тому таке значення завжди знайдеться.

Розглянемо функцію $y_2(\xi_{i_2}, t)$, графіком якої є пряма l_2, що проходить через точки $(t_{i_2}; \xi_{i_2})$ та $(t'_{i_2}; \psi_1(t'_{i_2}))$. Тоді для будь-якого $t \in (t_{i_2}, t'_{i_2})$ знову будемо мати

$$\psi_1(t) \leq y_2(\xi_{i_2}, t) \leq \psi_2(t).$$

Далі, позначимо через ξ_{i_3}, $i_3 > i_2$, найближчий зліва від точки $\psi_1(t'_{i_2})$ елемент послідовності $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$, і продовжимо процес побудови функцій $y_k(\xi_k, t)$ при $k = 3, 4, \ldots$. При цьому k-й крок буде полягати в наступному. Позначимо через ξ_{i_k}, $i_k > i_{k-1}$, найближчий зліва від точки $\psi_1(t'_{i_{k-1}})$ елемент послідовності $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$. Розглянемо функцію $y_k(\xi_{i_k}, t)$, графіком якої є пряма l_k, що проходить через точки $(t_{i_k}; \xi_{i_k})$ та $(t'_{i_k}; \psi_1(t'_{i_k}))$. Тоді, аналогічно, для будь-якого $t \in (t_{i_k}, t'_{i_k})$

$$\psi_1(t) \leq y_k(\xi_{i_k}, t) \leq \psi_2(t). \tag{6.67}$$

Таким чином, буде побудовано послідовність лінійних функцій $y_k(\xi_{i_k}, t)$, $k = 1, 2, \ldots$, $i_1 := 1$, для яких при кожному $t \in (t_{i_k}, t'_{i_k})$ буде справджуватись співвідношення (6.67).

Після цього покладемо

$$\psi(t) = \begin{cases} \psi_1(t), & t \in [t'_{i_k}, t_{i_{k+1}}),\ k = 0, 1, \ldots,\ t'_{i_0} := 1 \\ y_k(\xi_{i_k}, t), & t \in [t_{i_k}, t'_{i_k}),\ k = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

За побудовою дана функція $\psi(t)$ є опуклою до низу при всіх $t > 1$ і $\lim\limits_{t\to\infty} \psi(t) = 0$. Тобто, $\psi \in \mathfrak{M}$ і для неї на підставі (6.67) справджується оцінка (6.64). В той же якщо позначити через α_k гострі кути між прямими l_k і $y = \xi_{i_k}/2$, то будемо мати

$$\operatorname{tg} \alpha_k = \frac{\psi_1(t_{i_k}) - \psi_1(t'_{i_k})}{t'_{i_k} - t_{i_k}},$$

і

$$\frac{1}{\mu(\psi, t_{i_k})} = \frac{\eta(\psi, t_{i_k}) - t_{i_k}}{t_{i_k}} = \frac{\psi_1(t_{i_k})}{2t_{i_k} \operatorname{tg} \alpha_k} = \frac{1}{2} \frac{t'_{i_k} - t_{i_k}}{t_{i_k}} \frac{\psi_1(t_{i_k})}{\psi_1(t_{i_k}) - \psi_1(t'_{i_k})} \geq \frac{1}{2} \frac{t'_{i_k} - t_{i_k}}{t_{i_k}}$$

Звідси внаслідок (6.66) робимо висновок, що величина $1/\mu(\psi, t)$ не є обмеженою, що і треба було довести.

На підставі твердження 6.1.2 для довільної функції $\psi \in \mathfrak{M}_C$ виконується співвідношення (6.24). Однак із теореми 6.4.3 випливає, що умова (6.24) не гарантує належність функції $\psi \in \mathfrak{M}$ навіть до множини $\mathfrak{M}_\infty$.

Дійсно, якщо покласти для будь-якого $t \geq 1$ $\psi_1(t) = t^{-r_1}$, а $\psi_2(t) = t^{-r_2}$, де $r_1 > r_2 > 0$, то для будь-якого $\xi \in (0, 1)$ будемо мати

$$\frac{\psi_2^{-1}(\xi) - \psi_1^{-1}(\xi)}{\psi_1^{-1}(\xi)} = \frac{\xi^{-\frac{1}{r_2}} - \xi^{-\frac{1}{r_1}}}{\xi^{-\frac{1}{r_1}}} = \xi^{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} - 1 \longrightarrow \infty \quad \text{при } \xi \to 0.$$

І отже, існує функція $\psi \in \mathfrak{M}$, для якої при всіх $t \geq 1$ справджується нерівність

$$t^{-r_1} \leq \psi(t) \leq t^{-r_2},$$

і яка однак не належить множині $\mathfrak{M}_\infty$.

Разом з тим у випадку, коли

$$\varlimsup_{\xi\to 0} \frac{\psi_2^{-1}(\xi) - \psi_1^{-1}(\xi)}{\psi_1^{-1}(\xi)} < \infty,$$

умова (6.64) вже забезпечує належність функції ψ до множини $\mathfrak{M}_\infty$.

Теорема 6.4.4 . *Нехай* $\psi_2 \in \mathfrak{M}_\infty$, *а* ψ_1 — *довільна неперервна додатна спадна на проміжку* $[1, \infty)$ *функція така, що* $\psi_1(t) \le \psi_2(t)$ $\forall t \ge 1$, *і при будь-якому* $\xi \in (0, \psi_1(1))$

$$\frac{\psi_2^{-1}(\xi) - \psi_1^{-1}(\xi)}{\psi_1^{-1}(\xi)} \le K_1, \tag{6.68}$$

де K_1 — *деяка додатна стала, що не залежить від параметра* ξ. *Тоді кожна функція* $\psi \in \mathfrak{M}$, *яка задовольняє співвідношення (6.64), належить множині* $\mathfrak{M}_\infty$.

Доведення. Візьмемо довільну функцію $\psi \in \mathfrak{M}$, яка задовольняє співвідношення (6.64), і при будь-якому $t \ge 1$ покладемо $\xi = \psi(t)$. Для даного ξ через t_ξ та t'_ξ позначимо значення параметра t такі, що $\psi_1^{-1}(\xi) = t_\xi$ і $\psi_2^{-1}(\xi) = t'_\xi$. Тоді на підставі (6.64) маємо

$$t_\xi \le t \le t'_\xi \qquad \text{і} \qquad \eta(\psi_1; t_\xi) \le \eta(\psi; t) \le \eta(\psi_2; t'_\xi).$$

Звідси випливає, що $\eta(\psi; t) - t \le \eta(\psi_2; t'_\xi) - t_\xi$. Тому внаслідок (6.68) та того, що $\psi_2 \in \mathfrak{M}_\infty$ отримаємо

$$\frac{1}{\mu(\psi; t)} = \frac{\eta(\psi; t) - t}{t} \le \frac{\eta(\psi_2; t'_\xi) - t_\xi}{t_\xi} = \frac{\eta(\psi_2; t'_\xi) - t'_\xi}{t_\xi} + \frac{t'_\xi - t_\xi}{t_\xi} =$$

$$= \frac{\eta(\psi_2; t'_\xi) - t'_\xi}{t'_\xi} \cdot \frac{\psi_2^{-1}(\xi)}{\psi_1^{-1}(\xi)} + \frac{\psi_2^{-1}(\xi) - \psi_1^{-1}(\xi)}{\psi_1^{-1}(\xi)} \le (K_1 + 1)\frac{\eta(\psi_2; t'_\xi) - t'_\xi}{t'_\xi} + K_1 \le K, \ K = \text{const}.$$

Тобто, величина $1/\mu(t; \psi)$ обмежена на всьому проміжку $[1, \infty)$, і, отже, $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$.

Наступне твердження дає достатні умови виконання співвідношення (6.68).

Теорема 6.4.5 . *Нехай* $\psi_1 \in \mathfrak{M}$, *а* ψ_2 — *деяка неперервна додатна спадна до нуля на проміжку* $[1, \infty)$ *функція така, що при кожному* $t \ge 1$ *справджується нерівність* $\psi_1(t) \le \psi_2(t)$. *Тоді*

1) якщо $\psi_1 \in \mathfrak{M}_\infty$ *і виконується співвідношення*

$$\frac{\psi_2(t) - \psi_1(t)}{\psi_1(t)} \le K_1 \quad t \ge 1, \tag{6.69}$$

де K_1 — *деяка додатна стала, що не залежить від* t, *то існує стала* K_2 *така, що при будь-якому* $\xi \in (0, \psi_1(1)]$

$$\frac{\psi_2^{-1}(\xi) - \psi_1^{-1}(\xi)}{\psi_1^{-1}(\xi)} \le K_2; \tag{6.70}$$

2) якщо ψ_1 *належить множині* $\mathfrak{M}_0$, *то із співвідношення (6.70) випливає нерівність (6.69).*

3) якщо ж функція ψ_1 належить множині $\mathfrak{M}_C$, то умови (6.69) та (6.70) є рівносильними.

Доведення. Покажемо спочатку, що коли $\psi_1 \in \mathfrak{M}_\infty$ і виконується співвідношення (6.69), то є правильною і нерівність (6.70). Припустимо, що це не так, і існує спадна послідовність чисел $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$ така, що

$$\lim_{i\to\infty} \frac{t'_{\xi_i} - t_{\xi_i}}{t_{\xi_i}} = \infty, \quad t_{\xi_i} = \psi_1^{-1}(\xi_i),\ t'_{\xi_i} = \psi_2^{-1}(\xi_i).$$

Для будь-якого $\xi \in (0, \psi_1(1)]$ та довільного $k \in \mathbb{N}$ через $t_\xi^{(k)}$ будемо позначати таке число, для якого виконується рівність $\psi_1(t_\xi^{(k)}) = \frac{\xi}{2^k}$, $t_\xi^{(0)} := t_\xi$. Тоді для довільного $k \in \mathbb{N}$ $\quad t_\xi^{(k)} = \eta(\psi_1; t_\xi^{(k-1)})$.

Функція ψ_1 належить множині $\mathfrak{M}_\infty$, тому існує стала $C_1 > 0$ така, що при будь-якому $t \geq 1$

$$\frac{\eta(\psi_1; t) - t}{t} \leq C_1.$$

Звідси випливає, що при для довільних $\xi \in (0, \psi_1(1)]$ та $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{\eta(\psi_1; t_\xi^{(k)}) - t_\xi}{t_\xi} = \frac{\eta(\psi_1; t_\xi^{(k)})}{t_\xi^{(k)}} \cdot \frac{\eta(\psi_1; t_\xi^{(k-1)})}{t_\xi^{(k-1)}} \cdot \ldots \cdot \frac{\eta(\psi_1; t_\xi^{(0)})}{t_\xi} - 1 \leq (C_1 + 1)^{k+1} - 1.$$

Зокрема при $\xi = \xi_i$, $i = 1, 2, \ldots$

$$\frac{\eta(\psi_1; t_{\xi_i}^{(k)}) - t_{\xi_i}}{t_{\xi_i}} \leq (C_1 + 1)^{k+1} - 1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тому для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ існує номер i_k такий, що при всіх $i > i_k$ виконується нерівність

$$\frac{t'_{\xi_i} - t_{\xi_i}}{t_{\xi_i}} > \frac{\eta(\psi_1; t_{\xi_i}^{(k)}) - t_{\xi_i}}{t_{\xi_i}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Це означає, що $t'_{\xi_i} > \eta(\psi_1; t_{\xi_i}^{(k)})$, і тому справедливі наступні співвідношення

$$\psi_1(t'_{\xi_i}) < \xi_i/2^k \quad \text{і} \quad \psi_2(t'_{\xi_i}) - \psi_1(t'_{\xi_i}) > \psi_1(t_{\xi_i}) - \psi_1(\eta(\psi_1; t_{\xi_i}^{(k)})) = \xi_i\Big(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\Big).$$

Звідси

$$\frac{\psi_2(t'_{\xi_i}) - \psi_1(t'_{\xi_i})}{\psi_1(t'_{\xi_i})} > \frac{\xi_i(1 - 1/2^{k+1})}{\xi_i/2^{k+1}} = 2^{k+1} - 1.$$

Таким чином, внаслідок довільності k, отримуємо суперечність із нерівністю (6.69). Отже, припущення невірне і є правильною нерівність (6.70).

Покажемо тепер, що коли $\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$, то із нерівності (6.70) випливає нерівність (6.69). Знову застосуємо метод від супротивного, і припустимо, що існує зростаюча послідовність чисел $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ така, що величина $\dfrac{\psi_2(t_n)-\psi_1(t_n)}{\psi_1(t_n)}$ монотонно прямує до нескінченності при $n \to \infty$. Візьмемо довільне число $k \in \mathbb{N}$ і покладемо для будь-якого $n = 1, 2, \ldots$

$$\xi_n^{(k)} = 2^k \psi_1(t_n).$$

Оскільки $\psi_1(t) \to 0$ при $t \to \infty$, то при досить великих n справджується нерівність $\xi_n^{(k)} < \psi_1(1)$, і тому знайдеться точка $t_{\xi_n^{(k)}}$ така, що $\psi_1(t_{\xi_n^{(k)}}) = \xi_n^{(k)}$, $\ t_{\xi_n^{(0)}} := t_n$.

На підставі припущення величина $\dfrac{\psi_2(t_n)-\psi_1(t_n)}{\psi_1(t_n)}$ монотонно прямує до нескінченності при $n \to \infty$. Тому починаючи з деякого номера n_k матимемо

$$\frac{\psi_2(t_n)-\psi_1(t_n)}{\psi_1(t_n)} = \frac{\psi_2(t_n)-\psi_1(t_n)}{\xi_n^{(k)}/2^k} > 2^k - 1.$$

Звідси випливає, що

$$\psi_2(t_n) - \psi_1(t_n) > \xi_n^{(k)}\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) = \psi_1(t_{\xi_n^{(k)}}) - \psi_1(t_n),$$

а це означає, що $\psi_2(t_n) > \psi_1(t_{\xi_n^{(k)}})$ і $t'_{\xi_n^{(k)}} > t_n$, де $t'_{\xi_n^{(k)}} = \psi_2^{-1}(\xi_n^{(k)})$.

Функція ψ_1 належить множині $\mathfrak{M}_0$, і тому існує стала $C_2 > 0$ така, що при будь-якому $t \geq 1$

$$\frac{\eta(\psi_1; t) - t}{t} \geq C_2.$$

Звідси, внаслідок того, що $t_{\xi_n^{(k-1)}} = \eta(\psi_1; t_{\xi_n^{(k)}})$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, отримуємо

$$\frac{t_n - t_{\xi_n^{(k)}}}{t_{\xi_n^{(k)}}} = \frac{\eta(\psi_1; t_{\xi_n^{(1)}})}{t_{\xi_n^{(1)}}} \cdot \frac{\eta(\psi_1; t_{\xi_n^{(2)}})}{t_{\xi_n^{(2)}}} \cdot \frac{\eta(\psi_1; t_{\xi_n^{(3)}})}{t_{\xi_n^{(3)}}} \cdot \ldots \cdot \frac{\eta(\psi_1; t_{\xi_n^{(k)}})}{t_{\xi_n^{(k)}}} - 1 > (C_2 + 1)^k - 1$$

Тоді для будь-яких $n > n_k$

$$\frac{\psi_2^{-1}(\xi_n^{(k)}) - \psi_1^{-1}(\xi_n^{(k)})}{\psi_1^{-1}(\xi_n^{(k)})} = \frac{t'_{\xi_n^{(k)}} - t_{\xi_n^{(k)}}}{t_{\xi_n^{(k)}}} > \frac{t_n - t_{\xi_n^{(k)}}}{t_{\xi_n^{(k)}}} > (C_2 + 1)^k - 1.$$

Тобто, отримали співвідношення, яке внаслідок довільності k суперечить умові (6.70). Тому і в цьому разі припущення невірне і справедливе співвідношення (6.69).

Оскільки $\mathfrak{M}_C = \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{M}_\infty$, то твердження пункту 3) даної теореми випливає із щойно доведених перших двох пунктів.

Зауваження 6.4.1 . Існують функції $\psi_1,\ \psi_2 \in \mathfrak{M}_\infty^+$, для яких справджується співвідношення (6.70), однак не справджується співвідношення (6.69).

Дійсно, покладемо $\psi_1(t) = e^{-t^2-t}$, $\psi_2(t) = e^{-t^2}$. Тоді будемо мати

$$\frac{\psi_2(t)-\psi_1(t)}{\psi_1(t)} = \frac{e^{-t^2}}{e^{-t^2-t}} - 1 = e^t - 1 \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

однак

$$\frac{\psi_2^{-1}(\xi)-\psi_1^{-1}(\xi)}{\psi_1^{-1}(\xi)} = \frac{\sqrt{\ln\frac{1}{\xi}}}{(\sqrt{1-4\ln\xi}-1)/2} - 1 = \frac{2}{\sqrt{4-\frac{1}{\ln\frac{1}{\xi}}} - \frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{\xi}}}} - 1 \underset{\xi\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Зауваження 6.4.2 . Існують функції $\psi_1,\ \psi_2 \in \mathfrak{M}_0^+$, для яких справджується співвідношення (6.69), однак не справджується співвідношення (6.70).

Дійсно, покладемо $\psi_1(t) = \frac{1}{\ln t+\sqrt{\ln t}}$, $\psi_2(t) = \frac{1}{\ln t}$. Тоді

$$\frac{\psi_2(t)-\psi_1(t)}{\psi_1(t)} = \frac{\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{\ln t+\sqrt{\ln t}}}{\frac{1}{\ln t+\sqrt{\ln t}}} = \frac{1}{\sqrt{\ln t}} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

проте

$$\frac{\psi_2^{-1}(\xi)-\psi_1^{-1}(\xi)}{\psi_1^{-1}(\xi)} = \frac{e^{\frac{1}{\xi}}}{e^{\frac{\xi+2-\sqrt{\xi^2+4\xi}}{2\xi}}} - 1 = e^{\frac{\sqrt{\xi^2+4\xi}-\xi}{2\xi}} \underset{\xi\to 0}{\longrightarrow} \infty.$$

Із теорем 6.4.4 та 6.4.5 випливає наступний наслідок.

Наслідок 6.4.1 . *Нехай функції* $\psi_1,\ \psi_2 \in \mathfrak{M}_\infty$ *такі, що для будь-якого* $t \geq 1$ *справджуються нерівності* $\psi_1(t) \leq \psi_2(t)$ *і*

$$\frac{\psi_2(t)-\psi_1(t)}{\psi_1(t)} \leq K,$$

де K *— деяка додатна стала. Тоді довільна функція* $\psi \in \mathfrak{M}$, *що задовольняє співвідношення*

$$\psi_1(t) \leq \psi(t) \leq \psi_2(t) \quad \forall t \geq 1,$$

належить множині $\mathfrak{M}_\infty$.

6.4.4. Наступне твердження встановлює зв'язок між поведінкою відношення двох функцій $\psi_1,\ \psi_2 \in \mathfrak{M}$ і поведінкою відношення величин $\eta(\psi_1;t)$ та $\eta(\psi_2;t)$.

Теорема 6.4.6 . *Якщо $\psi_1 \in \mathfrak{M}_\infty$, а функція $\psi_2 \in \mathfrak{M}$ така, що*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)} = K, \quad K \in (0,\infty), \tag{6.71}$$

то справджується співвідношення

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\eta_1(t)}{\eta_2(t)} = 1, \quad \eta_1(t) = \eta(\psi_1;t),\ \eta_2(t) = \eta(\psi_2;t), \tag{6.72}$$

і $\psi_2 \in \mathfrak{M}_\infty$. Якщо ж в умові даного твердження функція ψ_1 належить множині $\mathfrak{M}_C$, то функція ψ_2 також буде належати множині $\mathfrak{M}_C$.

Разом з тим існують функції $\psi_1,\ \psi_2 \in \mathfrak{M}_0^+$, для яких виконується умова (6.71), і не виконується співвідношення (6.72).

Доведення. Якщо виконується (6.71), то

$$\psi_1(t) = \psi_2(t)(K + \varepsilon(t)), \tag{6.73}$$

де $\varepsilon(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Тому для довільного $t > 1$

$$\psi_1(\eta_2(t)) = \psi_2(\eta_2(t))(K + \varepsilon(\eta_2(t))) = \frac{\psi_2(t)}{2}\Big(K + \varepsilon(\eta_2(t))\Big) =$$

$$= \frac{\psi_1(t)}{2} \cdot \frac{K + \varepsilon(\eta_2(t))}{K + \varepsilon(t)} = \psi_1(\eta_1(t))\frac{K + \varepsilon(\eta_2(t))}{K + \varepsilon(t)}. \tag{6.74}$$

Оскільки завжди $\eta_2(t) > t$, то величина

$$r(t) = \frac{K + \varepsilon(\eta_2(t))}{K + \varepsilon(t)}$$

прямує до одиниці при $t \to \infty$, тому, внаслідок (6.74), маємо

$$\frac{\psi_1(\eta_2(t))}{\psi_1(\eta_1(t))} - 1 = \gamma(t), \quad \lim_{t\to\infty} \gamma(t) = 0. \tag{6.75}$$

Звідси

$$|\gamma(t)| = \frac{\Big|\psi_1(\eta_2(t)) - \psi_1(\eta_1(t))\Big|}{\psi_1(\eta_1(t))} = \frac{\left|\int\limits_{\eta_1(t)}^{\eta_2(t)} {\psi_1}'(\xi)d\xi\right|}{\psi_1(\eta_1(t))}. \tag{6.76}$$

Якщо в даній точці $t \quad \eta_1(t) \geq \eta_2(t)$, то внаслідок (6.76)

$$|\gamma(t)| \geq \frac{|\psi_1'(\eta_1(t))|\eta_1(t)\Big(1 - \frac{\eta_2(t)}{\eta_1(t)}\Big)}{\psi_1(\eta_1(t))}. \tag{6.77}$$

Функція ψ_1 належить множині $\mathfrak{M}_\infty$, тому згідно з твердженням A, знайдеться число K_1 таке, що при довільному $x \geq 1$

$$\frac{x|\psi_1'(x)|}{\psi_1(x)} \geq K_1.$$

Тому, внаслідок (6.77), матимемо

$$|\gamma(t)| \geq K_1\Big(1 - \frac{\eta_2(t)}{\eta_1(t)}\Big). \tag{6.78}$$

Якщо ж в точці $t \quad \eta_1(t) < \eta_2(t)$, то згідно з (6.76)

$$|\gamma(t)| \geq \frac{2|\psi_1'(\eta_2(t))|\,\eta_2(t)\Big(1 - \frac{\eta_1(t)}{\eta_2(t)}\Big)}{\psi_1(t)}.$$

Внаслідок (6.73) маємо

$$\frac{\psi_1(t)}{2} = \frac{\psi_2(t)}{2}\Big(K + \varepsilon(t)\Big) = \psi_2(\eta_2(t))\Big(K + \varepsilon(t)\Big) = \psi_1(\eta_2(t))\frac{K + \varepsilon(t)}{K + \varepsilon(\eta_2(t))}.$$

Тому при досить великих t та $x = \eta_2(t)$

$$|\gamma(t)| \geq \frac{x|\psi_1'(x)|}{\psi_1(x)}\Big(1 - \frac{\eta_1(t)}{\eta_2(t)}\Big) \cdot \frac{K + \varepsilon(\eta_2(t))}{K + \varepsilon(t)} \geq K_2\Big(1 - \frac{\eta_1(t)}{\eta_2(t)}\Big), \tag{6.79}$$

де K_2 — деяка додатна стала.

Згідно з (6.75) $\lim\limits_{t\to\infty} \gamma(t) = 0$. Тому із (6.78) та (6.79) одержуємо (6.72).

Включення $\psi_2 \in \mathfrak{M}_\infty$ отримуємо із наступного твердження, яке легко випливає із означення поняття границі функції та співвідношень (6.5)–(6.7):

якщо для функцій $\psi_1 \in \mathfrak{M}$ та $\psi_2 \in \mathfrak{M}$ виконується співвідношення

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\eta_1(t)}{\eta_2(t)} = 1, \quad \eta_1(t) = \eta(\psi_1; t),\ \eta_2(t) = \eta(\psi_2; t),$$

то властивості цих функцій співпадають в тому сенсі, що якщо одна з цих функцій належить множині $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_\infty$ або $\mathfrak{M}_C$, то і інша функція належить цій самій множині.

Зрозуміло, що якщо в умові теореми 6.4.6 функція ψ_1 належить множині $\mathfrak{M}_C$, то цілком аналогічно випливає, що і функція ψ_2 належить $\mathfrak{M}_C$.

Для закінчення доведення теореми достатньо пред'явити пару функцій з множини $\mathfrak{M}_0^+$, для яких виконується умова (6.71), і не виконується співвідношення (6.72).

В ролі таких функцій, зокрема, можна взяти функції $\psi_1(t) = \frac{1}{\ln t + \sqrt{\ln t}}$ та $\psi_2(t) = \frac{1}{\ln t}$. Для цих функцій

$$\eta_1(t) = \exp\Big(\frac{1}{2} + 2\ln t + 2\sqrt{\ln t} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + 8(\ln t + \sqrt{\ln t})}\Big), \quad \eta_2(t) = \exp(2\ln t).$$

Тому

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\eta_1(t)}{\eta_2(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{\exp\Big(\frac{1}{2}+2\ln t+2\sqrt{\ln t}-\frac{1}{2}\sqrt{1+8(\ln t+\sqrt{\ln t})}\Big)}{\exp(2\ln t)}=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\exp\Big(\frac{1}{2}+2\sqrt{\ln t}-\sqrt{\frac{1}{4}+2\ln t+2\sqrt{\ln t}}\Big)=\infty,$$

однак

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{\ln t}{\ln t+\sqrt{\ln t}}=1.$$

Зауваження 6.4.3 . Існують функції $\psi_1,\ \psi_2\in\mathfrak{M}_\infty^+$, для яких справджується співвідношення (6.72), однак не справджується співвідношення (6.71).

Дійсно, покладемо при всіх $t\geq 1$ $\psi_1(t)=e^{-t^2-t}$, а $\psi_2(t)=e^{-t^2}$. Тоді будемо мати

$$\eta_1(t)=\frac{1}{2}\sqrt{1-4\ln\frac{1}{2}+4t^2+4t}-\frac{1}{2},\quad a\ \eta_2(t)=\sqrt{t^2-\ln\frac{1}{2}}.$$

Тому

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\eta_1(t)}{\eta_2(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{1-4\ln\frac{1}{2}+4t^2+4t}-1}{2\sqrt{t^2-\ln\frac{1}{2}}}=1,$$

проте

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{e^{-t^2-t}}{e^{-t^2}}=0.$$

Зазначимо, що зв'язок між розбиттям множини $\mathfrak{M}$ на множини $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_\infty$ та $\mathfrak{M}_C$ і розбиттям множини $\mathfrak{M}$ з урахуванням відомих умов Барі–Стєчкіна вивчались у роботі [170].

6.5 Застосування опуклих функцій до класифікації нескінченно диференційовних періодичних функцій

6.5.1. В даному підрозділі наведено застосування розбиття множини $\mathfrak{M}$ до класифікації множини $\mathcal{D}^\infty$ нескінченно диференційовних періодичних функцій. Зокрема, отримано необхідні та достатні умови того, щоб 2π-періодична функція f належала одній із множин $\mathcal{D}^\infty$, $\mathcal{A}$ або ж $\mathcal{E}$, де $\mathcal{A}$ — множина всіх 2π-періодичних дійснозначних на дійсній осі функцій, які допускають аналітичне продовження в смугу $|Im\,z|<c$,

$c > 0$, а $\mathcal{E}$ — підмножина всіх функцій з $\mathcal{A}$, які допускають аналітичне продовження на всю комплексну площину (тобто, множина всіх 2π-періодичних дійснозначних на дійсній осі цілих функцій). Дані умови формулюються в термінах узагальнених $\bar{\psi}$-похідних, компоненти ψ_1 і ψ_2 що є звуженнями на множину натуральних чисел деяких функцій з множини $\mathfrak{M}$, і дозволяють класифікувати множини $\mathcal{D}^\infty$, $\mathcal{A}$ і $\mathcal{E}$ в залежності від швидкості спадання послідовностей ψ, що визначають $\bar{\psi}$-похідні.

В останньому пункті цього підрозділу досліджується зв'язок між класами $(\psi, \bar{\beta})$-диференційовних функцій і відомими класами Жевре $\mathcal{J}_\alpha$. Зокрема, встановлено необхідні та достатні умови належності періодичних функцій класам Жевре, які формулюються в термінах $(\psi, \bar{\beta})$-похідних цих функцій.

При формулюванні результатів цього підрозділу будемо здебільшого користуватися позначеннями підрозділів 1.7 та 6.1.

Твердження 6.5.1 . *Для кожної відмінної від тригонометричного полінома функції $f \in L$, можна вказати послідовність $\psi \in \mathfrak{M}$ таку, що $f \bar{\in} L^{\bar{\psi}}$ для довільних пар $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$, для яких $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, тобто, $f^{\bar{\psi}}$ не існує, і при цьому існує нескінченно зростаюча послідовність натуральних чисел $\{i_s\}_{s=1}^\infty$, для якої*

$$\psi(i_s) = \sqrt{a_{i_s}^2 + b_{i_s}^2}, \quad s = 1, 2, \ldots, \tag{6.80}$$

де $a_k(f)$ і $b_k(f)$ — коефіцієнти Фур'є функції f.

Дане твердження доповнює результат твердження 11 з [137] (див. також твердження 3.11.10 з [143, с. 157]), в якому для кожної відмінної від тригонометричного полінома функції $f \in L$ доводиться лише існування такої пари $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$, що $f \bar{\in} L^{\bar{\psi}}$.

Доведення твердження 6.5.1 багато в чому повторює доведення згаданого твердження 11 з [137]. Нехай функція f належить множині L. Записавши її ряд Фур'є у вигляді

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \cos(kx - \frac{\gamma_k \pi}{2}), \tag{6.81}$$

де

$$d_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \cos \frac{\gamma_k \pi}{2} = \frac{a_k}{d_k}, \quad \sin \frac{\gamma_k \pi}{2} = \frac{b_k}{d_k}, \tag{6.82}$$

бачимо, що

$$\lim_{k \to \infty} d_k = 0.$$

Тому функція

$$d(t) = \max_{k\geq t}\{d_k\}, \quad t \geq 1, \tag{6.83}$$

є кусково сталою, не зростає, і для неї справджується рівність

$$\lim_{t\to\infty} d(t) = 0.$$

Умова $f\bar{\in}\mathscr{T}$ рівносильна тому, що $d(t) > 0\ \forall t \geq 1$.

Позначимо через $k_j, j = 1, 2, \ldots$ точки, занумеровані в порядку їх зростання, в яких функція $d(t)$ змінює значення. Зрозуміло, що $d(k_j) = d_{k_j}$. Покладемо $z_j = (k_j, d_{k_j})$ і побудуємо функцію $l(t)$ наступним чином. Промінь l_1, який виходить з z_1 в напрямку, протилежному осі ординат, будемо обертати проти годинникової стрілки поки на ньому не з'явиться одна з точок z_j, $j > 1$. Цю точку позначимо через z_{j_1}. Якщо на промені з'явиться одразу декілька таких точок, то через z_{j_1} позначимо ту, у якої найбільша абсциса. На проміжку $[1, k_{j_1}]$ означимо $l(t)$ так, щоб її графік збігався з прямою, яка з'єднує точки z_1 і z_{k_1}. Далі, промінь l_2, який виходить з точки z_{j_1} і напрямок якого збігається з променем l_1 в кінцевому положенні, знову будемо обертати проти годинникової стрілки поки він не зустріне одну з точок z_j, $j > j_1$, що залишилися. Цю точку позначимо через z_{j_2}. Якщо при цьому на промені виявиться декілька таких точок, то через z_{j_2} позначаємо знову ту з них, у якої найбільша абсциса. На проміжку $[k_{j_1}, k_{j_2}]$ означимо $l(t)$ так, щоб її графік збігався з прямою, яка з'єднує точки z_{j_1} і z_{j_2}. Продовжуючи цей процесс, побудуємо функцію $l(t)$ для всіх $t \geq 1$. Вона буде мати такі властивості:

а) $l(t)$ опукла і $\lim\limits_{t\to\infty} l(t) = 0$;

б) $l(k_{j_s}) = d(k_{j_s}) = d_{k_{j_s}}$, $s = 1, 2, \ldots$

в) $l(k) = d(k)$, $k = 1, 2, \ldots$, якщо $d = \{d_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathfrak{M}$.

Тому, якщо покладемо $\psi_f(k) = l(k)$, то внаслідок а) робимо висновок, що $\psi_f \in \mathfrak{M}$, а внаслідок б) для послідовності $i_s = k_{j_s}$, $s = 1, 2, \ldots$, виконується рівність (6.80):

$$\psi_f(i_s) = \psi_f(k_{j_s}) = d_{k_{j_s}} = d_{i_s} = \sqrt{a_{i_s}^2 + b_{i_s}^2}, \quad s = 1, 2, \ldots$$

Розглянемо довільну пару $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$, для якої $\sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)} = \psi_f(k)$, $k = 1, 2, \ldots$. Ряд (1.128), що відповідає цій парі і функції f, можна подати у вигляді

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{\psi_1(k)}{\psi_f^2(k)}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) - \frac{\psi_2(k)}{\psi_f^2(k)}(a_k\sin kx - b_k\cos kx)\Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\psi_f(k)}\Big(\frac{\psi_1(k)}{\psi_f(k)}d_k\cos(kx - \frac{\gamma_k\pi}{2}) - \frac{\psi_2(k)}{\psi_f(k)}d_k\sin(kx - \frac{\gamma_k\pi}{2})\Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{\psi_f(k)} \cos(kx - \frac{(\gamma_k - \beta_k)\pi}{2}), \qquad (6.84)$$

де послідовності β_k визначаються системою

$$\begin{cases} \cos \frac{\beta_k \pi}{2} = \frac{\psi_1(k)}{\psi_f(k)}, \\ \sin \frac{\beta_k \pi}{2} = \frac{\psi_2(k)}{\psi_f(k)}, \end{cases} \qquad (6.85)$$

а послідовності γ_k — рівностями (6.82). На підставі співвідношення (6.80) коефіцієнти цього ряда не прямують до нуля. Тому він не може бути рядом Фур'є ніякої функції з L. Звідси випливає, що $\bar{\psi}$–похідної з такими параметрами функція $f(\cdot)$ не має, і послідовність ψ_f — шукана. Твердження доведено.

Якщо для довільної функції $f \in L \setminus \mathscr{T}$ через $\psi_f = \psi_f(k)$, як і раніше, позначати послідовність додатних чисел, яку побудовано вище в ході доведення твердження 6.5.1, то на основі формул (1.129)–(1.131), які виражають зв'язок між параметрами класів $L^{\bar{\psi}}$ і $L^{\psi}_{\bar{\beta}}$, можемо зробити висновок, що насправді має місце таке твердження.

Твердження 6.5.1$'$. *Для кожної відмінної від тригонометричного полінома функції $f \in L$ і для довільної послідовності дійсних чисел*

а) $f \bar{\in} L^{\psi_f}_{\bar{\beta}}$;

б) існує зростаюча послідовність натуральних чисел $\{i_s\}_{s=1}^{\infty}$, для якої

$$\psi_f(i_s) = \sqrt{a^2_{i_s}(f) + b^2_{i_s}(f)}, \quad s = 1, 2, \ldots,$$

де $a_k(f)$ і $b_k(f)$ — коефіцієнти Фур'є функції f. Якщо ж послідовність чисел $d_k = \sqrt{a^2_k(f) + b^2_k(f)}$, $k = 1, 2, \ldots$, належить множині $\mathfrak{M}$, то

$$\psi_f(k) = d_k, \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (6.86)$$

Виявляється, що для досить широкої множини функцій f з $L \setminus \mathscr{T}$ послідовність $\psi_f(k)$ серед всіх послідовностей $\psi(k)$ для яких $f \bar{\in} L^{\psi}_{\bar{\beta}}$ $\forall \beta_k \in \mathbb{R}$ має в певному сенсі "найменшу" швидкість прямування до нуля. А саме справджується

Твердження 6.5.2 . *Для довільної функції $f \in L \setminus \mathscr{T}$, у якої послідовність чисел $d_k = \sqrt{a^2_k(f) + b^2_k(f)}$ належить множині $\mathfrak{M}$, знайдеться послідовність дійсних чисел β_k таких, що яка б не була послідовність $\varepsilon(k) \in \mathfrak{M}$, $f \in L^{\psi_f/\varepsilon}_{\bar{\beta}}$.*

Доведення. Нехай $f \in L \setminus \mathscr{T}$. Означимо числа β_k рівностями

$$\begin{cases} \cos \frac{\beta_k \pi}{2} = \frac{a_k}{d_k}, \\ \sin \frac{\beta_k \pi}{2} = \frac{b_k}{d_k}, \end{cases}$$

і для довільної послідовності $\varepsilon \in \mathfrak{M}$ покладемо $\psi(k) = \frac{\psi_f(k)}{\varepsilon(k)}$. Оскільки послідовність $d = \{d_k\}_{k=1}^{\infty}$ належить множині $\mathfrak{M}$, то виконується рівність (6.86). Тому

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \Big(a_k \cos(kx + \frac{\beta_k \pi}{2}) + b_k \sin(kx + \frac{\beta_k \pi}{2}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{\psi(k)} \cos kx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k \varepsilon(k)}{\psi_f(k)} \cos kx = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon(k) \cos kx.$$

Внаслідок того, що $\varepsilon(k) \in \mathfrak{M}$, з твердження

Твердження 6.5.3 *(Н. К. Барі [6, §2 гл. 10]). Якщо $a_n \to 0$ і послідовність $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ опукла, то ряд $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ є рядом Фур'є деякої невід'ємної функції.*

робимо висновок, що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon(k) \cos kx$ є рядом Фур'є сумовної функції, а отже, $f \in L_{\bar{\beta}}^{\psi_f/\varepsilon}$. Твердження 6.5.2 доведено.

Звернемо увагу на те, що рівності (1.132) означають, що коли пара $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ пробігає множину $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$, то вся множина L (або C) розбивається на підмножини (класи) $L^{\bar{\psi}}$ (або $C^{\bar{\psi}}$). Рівність (1.133) означає, що при такій класифікації залишаються нерозрізненими лише тригонометричні поліноми.

Варто зазначити, що, як добре відомо, множина $\mathcal{D}^{\infty}$ нескінченно диференційовних 2π-періодичних функцій складається лише з тих функцій f, коефіцієнти Фур'є $c_k(f)$ яких спадають до нуля швидше будь-якого від'ємого степеня:

$$f \in \mathcal{D}^{\infty} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{k \to \infty} k^r c_k(f) = 0 \quad \forall r > 0. \tag{6.87}$$

Це, зокрема, вказує на те, що класифікація таких функцій в степеневій шкалі є неефективною.

6.5.2. Критерії належності функцій множині $\mathcal{D}^{\infty}$. Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що послідовності $\psi(k)$ з множини $\mathfrak{M}$ є звуженнями на множину натуральних чисел деяких додатних неперервних опуклих функцій $\psi(t)$ неперервного аргумента $t \geq 1$, які спадають до нуля при $t \to \infty$. Множину всіх таких функцій, як і в раніше, будемо позначати через $\mathfrak{M}$.

Теорема 6.5.1 . *Якщо $f \in \mathcal{D}^{\infty}$, то можна вказати функцію ψ з множини $\mathfrak{M}_{\infty}^{+}$ (озн. див. (6.8)) таку, що $f \in C^{\bar{\psi}}$ для всіх пар $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$, для яких $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$, $k \in \mathbb{N}$.*

Доведення. Нехай функція f належить множині $\mathcal{D}^{\infty}$. Записавши її ряд Фур'є у вигляді (6.81) і враховуючи (6.87), бачимо, що при будь-якому $r > 0$

$$\lim_{k\to\infty} k^r d_k = 0.$$

Тому функція

$$a(t) = \sup_{k\geq t}\{d_k k^2\}, \quad t \geq 1, \tag{6.88}$$

є кусково сталою, не зростає, і для неї справджується рівність

$$\lim_{t\to\infty} a(t) = 0.$$

Переконаємось, що для доведення теореми достатньо показати існування функції $\psi \in \mathfrak{M}_{\infty}^{+}$ такої, що при всіх $t \geq 1$ виконується нерівність $a(t) \leq \psi(t)$. Дійсно, в цьому випадку для довільних послідовностей $\psi_1(k)$ і $\psi_2(k)$ таких, що $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$, ряд (1.128), який відповідає їм і функції f, можна подати у вигляді (6.84). Внаслідок того, що $\psi(k) \geq a(k) \geq k^2 d_k \ \forall k \in \mathbb{N}$, цей ряд буде збігатися абсолютно, а отже, буде рядом Фур'є деякої сумовної функції $f^{\bar{\psi}}$, тобто, f буде належати множині $C^{\bar{\psi}}$.

Таким чином, потрібно встановити існування функції $\psi \in \mathfrak{M}_{\infty}^{+}$, яка задовольняє нерівність $a(t) \leq \psi(t)$.

Подамо функцію $a(t)$ при $t > 1$ у вигляді: $a(t) = t^{-r(t)}$. Тоді

$$r(t) = -\frac{\ln a(t)}{\ln t},$$

і оскільки для довільного $r > 0$ маємо $\lim\limits_{t\to\infty} t^r a(t) = 0$, то при кожному $r > 0$ для достатньо великих значень t виконується нерівність $a(t)t^r < 1$. Звідси випливає, що для таких t

$$r < -\frac{\ln a(t)}{\ln t} = r(t),$$

тобто, що

$$\lim_{t\to\infty} r(t) = +\infty.$$

Спочатку побудуємо додатну функцію $\varphi(t)$, $t \geq 1$, друга похідна якої $\varphi''(t)$ недодатна: $\varphi''(t) \leq 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = +\infty$, і для якої при всіх t, більших за деяке число $b \geq 1$, справджується нерівність $\varphi(t) \leq r(t)$.

Побудову функції φ можна провести, зокрема, наступним чином. Побудуємо спочатку кусково сталу неспадну функцію $f_1(t)$, $t \geq 1$, таку, що $\lim\limits_{t\to\infty} f_1(t) = +\infty$, і $f_1(t) \leq r(t)$.

Покладемо $t_0 = 1$, і через t_1, $t_1 \geq t_0 + 1$ позначимо довільне число таке, що при всіх $t \geq t_1$ виконується нерівність $r(t) > 0$. Зрозуміло, що таке число існує. Через t_2, $t_2 \geq t_1 + 1$ позначимо довільне число таке, що при всіх $t \geq t_2$ виконується нерівність $r(t) > \inf\limits_{t \geq t_1} r(t)$, через t_3, $t_3 \geq t_2 + 1$ позначимо довільне число таке, що при всіх $t \geq t_3$ $r(x) > \inf\limits_{t \geq t_2} r(t)$ і продовжимо процесс вибору чисел t_i при $i = 4, 5, \ldots$

Означимо функцію f_1 рівностями

$$f_1(t) = \begin{cases} \inf\limits_{t \geq 1} r(t), & t \in [1, t_1), \\ \inf\limits_{t \geq t_{k-1}} r(t), & t \in [t_{k-1}, t_k), \quad k = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Побудована функція $f_1(t)$ не спадає, для неї виконується нерівність $f_1(t) \leq r(t)$, і $\lim\limits_{t \to \infty} f_1(t) = +\infty$.

Далі, побудуємо невід'ємну кусково лінійну монотонно зростаючу до нескінченності функцію $f_2(t)$, $t > 0$, графік якої є опуклою вверх кривою, і при всіх $t \geq t_1$ лежить нижче графіка функції $f_1(t)$. Для цього розглянемо систему точок A_0, A_1, $A_2, \ldots$ таких, що $A_0 = A_0(0; 0)$, а при будь-якому натуральном $k \quad A_k = A_k(t_{k+1}, f_1(t_k))$.

Нехай $r_0 = r_0(t)$ — функція, графіком якої є промінь A_0A_1. Якщо промінь A_0A_1 лежить під графіком функції f_1, при $t \geq t_2$, то при $t \geq 0$ покладемо $f_2(t) = r_0(t)$, і процес побудови функції f_2 буде завершено. Якщо ж цей промінь перетинає графік функції f_1, то покладемо $f_2(t) = r_0(t)$ на проміжку $t \in [0, t_{k_0+1})$, де $t_{k_0+1} = t_2$, і через $\Delta_1 = [t_{k_1}, t_{k_1+1})$ позначимо півсегмент, який містить точку перетину даного променя з графіком функції f_1 (якщо ж таких півсегментів декілька, то через $\Delta_1 = [t_{k_1}, t_{k_1+1})$ позначимо півсегмент, який містить точку перетину з найменшою абсцисой).

Через $r_1 = r_1(t)$ позначимо функцію, графіком якої є промінь $A_1A_{k_1}$, $A_{k_1} = A_{k_1}(t_{k_1+1}, f_1(t_{k_1}))$, і на проміжку $t \in [t_{k_0+1}, t_{k_1+1})$ покладемо $f_2(t) = r_1(t)$.

Якщо промінь $A_1A_{k_1}$ лежить під графіком функції f_1, то при всіх $t \geq t_{k_1+1}$ покладемо $f_2(t) = r_1(t)$, і процес побудови функції f_2 буде завершено. Якщо ж цей промінь перетинає графік функції f_1, то через $\Delta_2 = [t_{k_2}, t_{k_2+1})$ позначимо півсегмент, який містить точку перетину променя $A_1A_{k_1}$ з графіком функції f_1 (у випадку, коли таких точок декілька, через $\Delta_2 = [t_{k_2}, t_{k_2+1})$ позначимо півсегмент, який містить точку перетину з найменшою абсцисою).

Через $r_2 = r_2(t)$ позначимо функцію, графіком якої є промінь $A_{k_1}A_{k_2}$, $A_{k_2} = A_{k_2}(t_{k_2+1}, f_1(t_{k_2}))$, і на проміжку $t \in [t_{k_1+1}, t_{k_2+1})$ покладемо $f_2(t) = r_2(t)$.

Продовжуючи цей процес, на деякому, наприклад, i-ому кроці може виявитися, що промінь $A_{k_{i-1}}A_{k_i}$ лежить під графіком функції f_1. В такому випадку для довільного $t \geq t_{k_i+1}$ покладемо $f_2(t) = r_i(t)$, де r_i — функція, графіком якої є промінь

$A_{k_{i-1}}A_{k_i}$. Якщо ж цей промінь перетинає графік функції f_1, то через $\Delta_i = [t_{k_i}, t_{k_i+1})$ позначимо півсегмент, який містить точку перетину променя $A_{k_{i-1}}A_{k_i}$ з графіком функції f_1 (якщо ж таких півсегментов декілька, то через $\Delta_i = [t_{k_i}, t_{k_i+1})$ позначимо півсегмент, який містить точку перетину з найменшою абсцисою).

Через $r_i = r_i(t)$ позначимо функцію, графіком якої є промінь $A_{k_i-1}A_{k_i}$, $A_{k_i} = A_{k_i}(t_{k_i+1}, f_1(t_{k_i}))$ і на проміжку $t \in [t_{k_i}, t_{k_i+1})$ покладемо $f_2(t) = r_i(t)$.

В результаті даного процесу буде побудовано невід'ємну опуклу вгору кусково лінійну функцію $f_2(t)$, $t > 0$, таку, що $f(0) = 0$, при всіх $t \geq t_1$, справджується нерівність $f_2(t) \leq f_1(t) \leq r(t)$, і

$$\lim_{t\to\infty} f_2(t) = +\infty.$$

Зрозуміло, що функцію $f_2(t)$ в околах вузлів t_{k_i+1} можна згладити так, щоб отримана функція $\varphi(t)$, $t > 0$, має наступні властивості:

а) $\varphi(0) = 0$,

б) $\varphi''(t) \leq 0 \quad \forall t > 0$,

в) $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = +\infty$,

г) $\varphi(t) \leq r(t) \quad \forall t \geq t_1$.

Тоді при всіх $t \geq t_1$ буде виконуватися співвідношення $g(t) := t^{-\varphi(t)} \geq t^{-r(x)} = a(t)$, і оскільки

$$g''(t) = t^{-\varphi(t)}\Big((\varphi'(t)\ln t)^2 + \frac{2\varphi(t)\varphi'(t)\ln t}{t} + \frac{\varphi^2(t)}{t^2} - \varphi''(t)\ln t - \frac{2\varphi'(t)}{t} + \frac{\varphi(t)}{t^2}\Big) \geq$$

$$\geq \Big(\varphi'(t)\ln t - \frac{1}{t\ln t}\Big)^2 - \frac{1}{t^2\ln^2 t} + \frac{\varphi(t)}{t^2} \geq \frac{1}{t^2}\Big(\varphi(t) - \frac{1}{\ln^2 t}\Big),$$

то починаючи з деякого числа $b_1 \geq 1$, функція $g(t)$ буде опуклою вниз.

Розглянемо тепер функцію

$$\psi(t) = \psi(t; K) = K\exp\Big(-\frac{1}{2}\int\limits_1^t \frac{\varphi(\tau)}{\tau}d\tau\Big), \quad t \geq 1, \tag{6.89}$$

де $K > 0$ — довільна фіксована стала. Зрозуміло, що $\lim\limits_{t\to\infty} \psi(t) = 0$. Її похідна має вигляд

$$\psi'(t) = -\frac{1}{2}K\exp\Big(-\frac{1}{2}\int\limits_1^t \frac{\varphi(\tau)}{\tau}d\tau\Big)\frac{\varphi(t)}{t}.$$

Внаслідок опуклості φ і того, що $\varphi(0) = 0$, кут нахилу січної, яка проходить через початок координат і будь-яку точку графіка функції $\varphi(t)$, із збільшенням значень аргумента t не зростає. Звідси випливає, що відношення $t/\varphi(t)$ не спадає, і тому функція $\psi'(t)$ також є неспадною. Таким чином, $\psi \in \mathfrak{M}$ і оскільки величина

$$\alpha(\psi; t) = \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|} = \frac{2}{\varphi(t)} \tag{6.90}$$

монотонно спадає до нуля при $t \to \infty$, то внаслідок теореми 6.1.1 функція ψ належить і множині $\mathfrak{M}_{\infty}^{+}$.

Покажемо, що за певного вибору сталої K графік функції $\psi(t; K)$ буде знаходитися вище графіка функції $a(t)$, яка означається рівністю (6.88).

Згідно з побудовою функції $g(t)$ і означенням характеристики $\eta = \eta(g; t)$ при будь-якому $t \geq b_1$ маємо

$$t^{-\varphi(t)} = g(t) = 2g(\eta(t)) = 2\eta(g; t)^{-\varphi(\eta(g;t))}.$$

Оскільки

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln(1 + 1/\varphi(t))}{1/\varphi(t)} = 1,$$

то для довільного $\varepsilon \in (0, 1 - \ln 2)$ існує число $t_* \geq b_1$ таке, що при всіх $t \geq t_*$

$$\varphi\Big(t + \frac{t}{\varphi(t)}\Big) \ln\Big(t + \frac{t}{\varphi(t)}\Big) = \varphi\Big(t + \frac{t}{\varphi(t)}\Big)\Big(\ln t + \ln\Big(1 + \frac{1}{\varphi(t)}\Big)\Big) \geq$$

$$\geq \varphi\Big(t + \frac{t}{\varphi(t)}\Big)\Big(\ln t + \frac{1 - \varepsilon}{\varphi(t)}\Big) \geq \varphi(t)\Big(\ln t + \frac{\ln 2}{\varphi(t)}\Big) = \varphi(t)\ln t + \ln 2.$$

Звідси випливає, що для довільного $t \geq t_*$

$$g\Big(t + \frac{t}{\varphi(t)}\Big) = \Big(t + \frac{t}{\varphi(t)}\Big)^{-\varphi\left(t + \frac{t}{\varphi(t)}\right)} \leq \frac{1}{2}\, t^{-\varphi(t)} = \frac{1}{2}g(t) = g(\eta(g; t)),$$

і тому

$$\eta(g; t) \leq t + \frac{t}{\varphi(t)}, \quad t \geq t_*.$$

Оскільки внаслідок (6.90) та нерівності (6.21) виконується співвідношення

$$\alpha(\psi; t) = \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|} = \frac{2}{\varphi(t)} \leq 2\frac{\eta(\psi; t) - t}{t}, \quad \forall t \geq 1,$$

то при всіх $t \geq t_*$ справджується нерівність

$$\eta(g; t) \leq t + \frac{t}{\varphi(t)} \leq \eta(\psi; t). \tag{6.91}$$

Тому якщо для деякого числа $t \geq t_*$ виконується умова $g(t) \leq \psi(t)$, то

$$g(\eta(g; t)) = \frac{1}{2}g(t) \leq \frac{1}{2}\psi(t) = \psi(\eta(\psi; t)) \leq \psi(\eta(g; t)).$$

В рівності (6.89) підберемо число $K = K_0$ так, щоб при всіх $t \in [1, \eta(g; t_*)]$ виконувалась нерівність $\psi(t; K_0) \geq g(t)$. Тоді внаслідок (6.91) така ж нерівність буде виконуватися і при всіх $t > \eta(g; t_*)$, тому

$$a(t) \leq g(t) \leq \psi(t; K_0), \quad t \geq 1.$$

Таким чином, функція $\psi(t) = \psi(t; K_0)$, яка означається рівністю (6.89) при $K = K_0$, належить множині $\mathfrak{M}_\infty^+$, і для неї при всіх $t \geq 1$ справджується нерівність $\psi(t) \geq a(t)$, тобто, ψ є шуканою. Теорему доведено.

Теорема 6.5.1 дозволяє отримати декілька нових критеріїв належності функції f множині $\mathcal{D}^\infty$.

Нехай $\mathfrak{M}^\infty$ — підмножина всіх функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, які спадають до нуля швидше довільної степенной функції:

$$\mathfrak{M}^\infty = \{\psi \in \mathfrak{M} \ : \ \forall r > 0 \ \lim_{t\to\infty} t^r \psi(t) = 0\}, \tag{6.92}$$

через $\mathfrak{M}_{\alpha,0}$ позначимо підмножина всіх функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, для яких величина $\alpha(\psi; t) = \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|}$ прямує до нуля при $t \to \infty$:

$$\mathfrak{M}_{\alpha,0} = \{\psi(t) \in \mathfrak{M} \ : \ \lim_{t\to\infty} \alpha(\psi; t) = 0\},$$

через $\mathfrak{M}_{\mu,\infty}$ — підмножина всіх функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, для яких величина $\mu(\psi; t)$ прямує до нескінченності при $t \to \infty$:

$$\mathfrak{M}_{\mu,\infty} = \{\psi(t) \in \mathfrak{M} \ : \ \lim_{t\to\infty} \mu(\psi; t) = \infty\}.$$

Якщо функція ψ належить множині $\mathfrak{M}_{\mu,\infty}$, то, внаслідок (6.21), справджується співвідношення

$$0 \leq \lim_{t\to\infty} \alpha(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|} \leq 2 \lim_{t\to\infty} \frac{\eta(\psi; t) - t}{t} = 0,$$

а отже, ψ належить множині $\mathfrak{M}_{\alpha,0}$.

Для довільної функції $\psi \in \mathfrak{M}$ при будь-якому $t > 1$ виконується рівність (6.26). Тому якщо $\psi \in \mathfrak{M}_{\alpha,0}$, то для довільного $r > 0$ і будь-якого t_0 такого, що $1/\alpha(t) \geq r+1$, $t \geq t_0$, маємо

$$\lim_{t\to\infty} t^r \psi(t) = \psi(1) \lim_{t\to\infty} \exp\Big(r \ln t - \int_1^t \frac{d\tau}{\tau\alpha(\tau)}\Big) \leq$$

$$\leq \psi(1) \lim_{t\to\infty} \exp\Big(- \int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{\tau}(\frac{1}{\alpha(\tau)} - r)d\tau + r\ln t_0\Big) \leq \psi(1) \lim_{t\to\infty} e^{-\ln t + (r+1)\ln t_0} = 0,$$

і отже, ψ належить множині $\mathfrak{M}^\infty$.

Таким чином, виконуються наступні вкладення:

$$\mathfrak{M}_\infty^+ \subset \mathfrak{M}_{\mu,\infty} \subset \mathfrak{M}_{\alpha,0} \subset \mathfrak{M}^\infty. \tag{6.93}$$

Якщо $f \in C^{\bar{\psi}}$ для деякої пари $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$, для якої функція $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$ належить множині $\mathfrak{M}^\infty$, то внаслідок (6.92) ряд (1.127) можна диференціювати будь-яку кількість разів, і в результаті будемо отримувати рівномірно збіжні ряди, тому $f \in \mathcal{D}^\infty$.

Звідси на підставі вкладень (6.93) і теореми 6.5.1 отримуємо таке твердження.

Теорема 6.5.2 . *Нехай $\mathcal{M}$ — довільна із множин $\mathfrak{M}_\infty^+$, $\mathfrak{M}_{\mu,\infty}$, $\mathfrak{M}_{\alpha,0}$ або $\mathfrak{M}^\infty$. Наступні твердження еквівалентні:*

i) *функція f належить множині $\mathcal{D}^\infty$;*

ii) *існує функція $\psi(t)$ з множини $\mathcal{M}$ така, що $f \in C^{\bar{\psi}}$ для всіх пар $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$, для яких при кожному $k \in \mathbb{N}$ виконується рівність $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$;*

iii) $f \in C^{\bar{\psi}}$ *для деякої пари $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ такої, що функція $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$ належить множині $\mathcal{M}$.*

На основі теорем 6.5.1 і 6.5.2 отримуємо такий аналог співвідношень (1.132):

$$\mathcal{D}^\infty = \bigcup_{\psi_1,\,\psi_2 \in \mathfrak{M}^\infty} C^{\bar{\psi}} = \bigcup_{\psi_1,\,\psi_2 \in \mathfrak{M}_{\alpha,0}} C^{\bar{\psi}} = \bigcup_{\psi_1,\,\psi_2 \in \mathfrak{M}_{\mu,\infty}} C^{\bar{\psi}} = \bigcup_{\psi_1,\,\psi_2 \in \mathfrak{M}_\infty^+} C^{\bar{\psi}}.$$

6.5.3. Критерії належності функцій множині $\mathcal{A}$.

Твердження 6.5.4 . *Якщо $f \in \mathcal{A}$, то існує число $q \in (0,1)$ таке, що $f \in C_{\bar{\beta}}^q$ для довільних послідовностей $\bar{\beta} = \{\beta_k\}$, $\beta_k \in \mathbb{R}$.*

Доведення. Нехай функція f належить множині $\mathcal{A}$. Як і при доведенні твердження 6.5.1, запишемо її ряд Фур'є у вигляді (6.81). Тоді (див. §25 гл.1 монографії [6]) існують сталі $A > 0$ і $\varrho \in (0,1)$ такі, що

$$d_k \leq A\varrho^k, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{6.94}$$

Виберемо довільне число $\varepsilon \in (0, 1-\varrho)$ і покладемо $q = \varrho + \varepsilon$. В такому випадку для довільної послідовності дійсних чисел β_k ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{q^k} \cos\left(kx - \frac{(\gamma_k - \beta_k)\pi}{2}\right) \tag{6.95}$$

збігається абсолютно, так як внаслідок співвідношень (6.94) і вибору числа q

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{q^k} \cos\left(kx - \frac{(\gamma_k - \beta_k)\pi}{2}\right) \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{q^k} \le A \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{\varrho + \varepsilon}\right)^k = \frac{A\varrho}{\varepsilon} < \infty.$$

Таким чином, ряд (6.95) є рядом Фур'є деякої сумовної функції $\varphi = f_{\bar\beta}^q$, тобто, $f \in C_{\bar\beta}^q$ і твердження 6.5.4 доведено.

З твердження 6.5.4 можна отримати декілька критеріїв належності функції f множині $\mathcal{A}$.

Нехай $\mathcal{D}^\varrho$, $\varrho \in (0,1)$, — множина всіх послідовностей $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ додатних чисел таких, що

$$\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} \le \varrho, \quad \varrho \in (0,1), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{6.96}$$

$\mathcal{D}_q$, $q \in [0,1)$, — множина всіх послідовностей додатних чисел, які задовольняють умову Даламбера:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = q, \quad q \in [0,1). \tag{6.97}$$

Нехай також $\mathfrak{M}_\eta^K$ — підмножина всіх функцій, $\psi \in \mathfrak{M}$, для яких існує стала $K > 0$ така, що

$$\eta(\psi; t) - t \le K, \quad t \ge 1, \tag{6.98}$$

і $\mathfrak{M}_{\eta,c}$ — підмножина всіх функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, які задовольняють умову

$$\lim_{t\to\infty} (\eta(\psi; t) - t) = c, \quad c \in [0, \infty). \tag{6.99}$$

Теорема 6.5.3 . *Нехай $\mathcal{M}^*$ — довільна з множин $\bigcup\limits_{\varrho\in(0,1)} \mathcal{D}^\varrho$, $\bigcup\limits_{q\in[0,1)} \mathcal{D}_q$, $\bigcup\limits_{K>0} \mathfrak{M}_\eta^K$ або $\bigcup\limits_{c\ge 0} \mathfrak{M}_{\eta,c}$. Наступні твердження еквівалентні:*

i) *функція f належить множині $\mathcal{A}$;*

ii) *існує число $q \in (0,1)$ таке, що $f \in C_{\bar\beta}^q$ для довільної послідовності $\bar\beta = \beta_k \in \mathbb{R}$;*

iii) *існує функція $\psi \in \mathcal{M}^*$, така, що $f \in C^{\bar\psi}$ для всіх пар $\bar\psi = (\psi_1, \psi_2)$, для яких при кожному $k \in \mathbb{N}$ виконується рівність $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$;*

iv) *$f \in C_{\bar\beta}^q$ для деякого $q \in (0,1)$ і деякої послідовності дійсних чисел $\bar\beta = \beta_k$;*

v) *$f \in C^{\bar\psi}$ для деякої пари $\bar\psi = (\psi_1, \psi_2)$ такої, що функція $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$ належить множині $\mathcal{M}^*$.*

Доведення. Внаслідок твердження 6.5.2

$$\text{i)} \Rightarrow \text{ii)}. \tag{6.100}$$

Крім того, оскільки функція $\psi(k)=q^k$ належить кожній з множин $\bigcup\limits_{\varrho\in(0,1)}\mathcal{D}^{\varrho}$, $\bigcup\limits_{q\in[0,1)}\mathcal{D}_q$, $\bigcup\limits_{K>0}\mathfrak{M}_{\eta}^{K}$ і $\bigcup\limits_{c\geq 0}\mathfrak{M}_{\eta,c}$, то очевидними є імплікації:

$$\text{ii)} \Rightarrow \text{iii)} \Rightarrow \text{v)} \tag{6.101}$$

і

$$\text{ii)} \Rightarrow \text{iv)} \Rightarrow \text{v)}. \tag{6.102}$$

Тому для доведення теореми достатньо показати, що

$$\text{v)} \Rightarrow \text{i)}. \tag{6.103}$$

Оскільки

$$\bigcup_{c\geq 0}\mathfrak{M}_{\eta,c}\subset\bigcup_{K>0}\mathfrak{M}_{\eta}^{K}, \tag{6.104}$$

то імплікацію (6.103) достатньо довести тільки у випадку, коли $\mathcal{M}^*$ є однією з множин $\bigcup\limits_{\varrho\in(0,1)}\mathcal{D}^{\varrho}$, $\bigcup\limits_{q\in[0,1)}\mathcal{D}_q$ або $\bigcup\limits_{K>0}\mathfrak{M}_{\eta}^{K}$.

Якщо $f\in C^{\bar\psi}$, то її ряд Фур'є в комплексній формі запишеться у вигляді

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k(f)e^{ikx}=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{|k|\geq 1}\mu_k\gamma_k e^{ikx}, \tag{6.105}$$

де

$$\gamma_k=\frac{\alpha_k-i\beta_k}{2},\quad \gamma_{-k}=\frac{\alpha_k+i\beta_k}{2},\quad k\in\mathbb{N},$$
$$\mu_k=\begin{cases}\psi_1(k)-i\psi_2(k), & k\geq 1,\\ \psi_1(|k|)+i\psi_2(|k|), & k\leq -1,\end{cases}$$

а α_k і β_k — коефіцієнти Фур'є функції $\varphi=f^{\bar\psi}$. Згідно з (6.105)

$$|c_k(f)|=\sqrt{\psi_1^2(|k|)+\psi_2^2(|k|)}|\gamma_k|=\psi(|k|)|\gamma_k|,\quad k\in\mathbb{Z}. \tag{6.106}$$

Як випливає з результатів §25 гл.1 монографії [6], включення $f\in\mathcal{A}$ буде доведено, якщо буде встановлено існування сталих $A>0$ і $\varrho\in(0,1)$ таких, що

$$|c_k(f)|<A\varrho^{|k|},\quad k\in\mathbb{Z}. \tag{6.107}$$

Нехай спочатку $\psi\in\mathcal{D}^{\varrho}$, $\varrho\in(0,1)$. Тоді внаслідок (6.96) і (6.106) маємо

$$|c_k(f)|=\prod_{j=1}^{|k|-1}\frac{\psi(|j|+1)}{\psi(|j|)}\psi(1)|\gamma_k|\leq\sup_{k\in\mathbb{Z}}|\gamma_k|\varrho^{|k|-1}\psi(1),\quad k\in\mathbb{Z}, \tag{6.108}$$

і тим самим рівність (6.107) доведено.

Нехай, далі, $\psi \in \mathcal{D}_q$, $q \in [0,1)$. Поклавши

$$\varepsilon_n = \sup_{k\geq n}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\right|, \quad n \in \mathbb{N},$$

бачимо, що, внаслідок (6.97), існує номер n_0 такий, що $\varepsilon_n < 1-q$ для всіх $n = n_0, n_0+1, \ldots$. Тоді, використовуючи (6.106), отримаємо

$$|c_k(f)| = \prod_{j=n_0}^{|k|-1}\frac{\psi(|j|+1)}{\psi(|j|)}\psi(n_0)|\gamma_k| \leq \sup_{k\in\mathbb{Z}}|\gamma_k|\psi(n_0)(q+\varepsilon_{n_0})^{|k|-n_0}, \ k \in \mathbb{Z}, \ |k| \geq n_0. \tag{6.109}$$

Із (6.109) випливає існування сталої $A > 0$ і числа $\varrho = q + \varepsilon_{n_0}$, для яких виконується нерівність (6.107).

Нехай нарешті $\psi \in \mathfrak{M}_\eta^K$. Внаслідок (6.21) і (6.98)

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} \leq -\frac{1}{2K}, \quad t \geq 1. \tag{6.110}$$

Інтегруючи останню нерівність по проміжку $[1,x]$, отримуємо

$$\psi(x) \leq \psi(1)e^{-\frac{x-1}{2K}}, \quad x \geq 1. \tag{6.111}$$

З (6.106) та (6.111) випливає нерівність

$$|c_k(f)| \leq \psi(1)\sup_{k\in\mathbb{Z}}|\gamma_k|e^{-\frac{|k|-1}{2K}}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

а разом з нею — і нерівність (6.107) при $\varrho = e^{-\frac{1}{2K}}$. Теорему доведено.

На основі теореми 6.5.3 отримуємо рівності

$$\mathcal{A} = \bigcup_{q\in(0,1),\,\beta_k\in\mathbb{R}} C^q_{\bar\beta} = \bigcup_{\psi_1,\psi_2\in\bigcup\limits_{\varrho\in(0,1)}\mathcal{D}^\varrho} C^{\bar\psi} =$$

$$= \bigcup_{\psi_1,\psi_2\in\bigcup\limits_{q\in[0,1)}\mathcal{D}_q} C^{\bar\psi} = \bigcup_{\psi_1,\psi_2\in\bigcup\limits_{K>0}\mathfrak{M}_\eta^K} C^{\bar\psi} = \bigcup_{\psi_1,\psi_2\in\bigcup\limits_{c>0}\mathfrak{M}_{\eta,c}} C^{\bar\psi}.$$

6.5.4. Критерії належності функцій множині $\mathcal{E}$.

Твердження 6.5.5 . *Для того, щоб 2π-періодична дійснозначна на дійсній осі функція f з рядом Фур'є*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)e^{ikx} \tag{6.112}$$

належала множині $\mathcal{E}$ необхідно і достатньо, щоб

$$\lim_{k\to\pm\infty} |c_k(f)|e^{\alpha|k|} = 0 \quad \forall\alpha > 0. \tag{6.113}$$

Доведення. *Необхідність* . Нехай $f \in \mathcal{E}$. Тоді на підставі наслідку 3.8.1 монографії [143 (§8 гл. III)]

$$|c_k(f)| = e^{-\varphi(k)|k|}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \lim_{k\to\pm\infty} \varphi(k) = +\infty. \tag{6.114}$$

Звідси для довільного $\alpha > 0$ маємо

$$\lim_{k\to\pm\infty} |c_k(f)|e^{\alpha|k|} = \lim_{k\to\pm\infty} e^{-|k|\varphi(k)}e^{\alpha|k|} = \lim_{k\to\pm\infty} e^{-|k|(\varphi(x)-\alpha)} = 0.$$

Достатність. Нехай для 2π-періодичної дійснозначної на дійсній осі функції f виконується співвідношення (6.113). Візьмемо довільне число $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, і покажемо, що воно знаходиться в смузі аналітичності функції f. Виберемо будь-яке число $d > |\mathrm{Im}\, z|$. Внаслідок (6.113) існує стала $K > 0$ така, що при всіх $k \in \mathbb{Z}$ виконується нерівність

$$|c_k(f)| \le Ke^{-d|k|}.$$

Тоді згідно з теоремою 3.8.3. монографії [143 (§8 гл. III)] функція f є аналітичною всередині смуги $|y| < d$, яка згідно з вибором числа d містить і точку z. Твердження доведено.

Позначимо через $\mathfrak{M}^+_{\eta,0}$ множину всіх функцій $\psi \in \mathfrak{M}^+_\infty$, для яких

$$\lim_{t\to\infty} (\eta(\psi; t) - t) = 0. \tag{6.115}$$

В прийнятих позначеннях справджується таке твердження.

Теорема 6.5.4 . *Якщо $f \in \mathcal{E}$, то можна вказати функцію ψ из множини $\mathfrak{M}^+_{\eta,0}$ таку, що $f \in C^{\bar\psi}$ для всіх пар $\bar\psi = (\psi_1, \psi_2)$, для яких $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$, $k \in \mathbb{N}$.*

Доведення. Нехай функція f належить множині $\mathcal{E}$. Запишемо її ряд Фур'є у вигляді (6.81) і розглянемо функцію $a(t)$, яка означається рівністю (6.88). Як і при доведенні теореми 6.5.1, неважко переконатися, що для доведення теореми 6.5.4 достатньо встановити існування функції $\psi \in \mathfrak{M}^+_{\eta,0}$, яка б при всіх $t \ge 1$ задовольняла нерівність $a(t) \le \psi(t)$.

Зобразимо функцію $\alpha(t)$, $t > 1$, у вигляді $a(t) = e^{-\xi(t)t}$. Тоді

$$\xi(t) = -\frac{\ln a(t)}{t}.$$

Оскільки $f \in \mathcal{E}$, то, внаслідок твердження 6.5.5, при будь-якому $\alpha > 0$ виконується співвідношення (6.113). Звідси внаслідок означення функції $a(t)$ робимо висновок, що для довільного $\alpha > 0$ $\lim\limits_{t\to\infty} e^{\alpha t}a(t) = 0$. Тому при кожному $\alpha > 0$ для достатньо великих значень t справджується нерівність $e^{\alpha t}a(t) < 1$. Звідси випливає, що для таких t

$$\alpha < -\frac{\ln a(t)}{t} = \xi(t),$$

а отже,

$$\lim_{t\to+\infty} \xi(t) = +\infty.$$

Розмірковуючи так, як і при доведенні теореми 6.5.1, побудуємо додатну функцію $\varphi(t)$, $t \geq 0$, яка має такі властивості:

а) $\varphi(0) = 0$,

б) $\varphi''(t) \leq 0 \quad \forall t > 0$,

в) $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = +\infty$,

г) $\varphi(t) \leq \xi(t)$, при всіх t, більших за деяке число $b_1 \geq 1$.

В такому випадку при всіх $t \geq b_1$ буде виконуватися співвідношення $g(t) := e^{-\varphi(t)t} \geq e^{-\xi(t)t} = a(t)$. З огляду на те, що

$$g''(t) = e^{-t\varphi(t)}\Big((\varphi'(t)t + \varphi(t))^2 - \varphi''(t) - 2\varphi'(t)\Big) = e^{-t\varphi(t)}\Big((\varphi'(t)t - \frac{1}{t})^2 + 2\varphi(t)\varphi'(t) -$$

$$-\varphi''(t)t + \varphi^2(t) - \frac{1}{t^2}\Big) \geq e^{-t\varphi(t)}\Big((\varphi'(t)t - \frac{1}{t})^2 + \varphi^2(t) - \frac{1}{t^2}\Big)$$

"підправимо" функцію φ так, щоб отримана при цьому функція $\varphi_1(t)$, $t \geq 1$, залишалась додатною, $\varphi_1''(t) \leq 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi_1(t) = +\infty$; при всіх t, великих деякого числа $b_0 \geq b_1 \geq 1$, $\varphi_1(t) \leq \xi(t)$, і при цьому для всіх $t \geq 1$ виконувалась нерівність $\varphi_1(t) \geq \frac{1}{t}$. З цією метою у випадку, коли φ є лінійною, промінь l, який виходить з точки $(1;1)$ в напрямку осі Oy, будемо обертати за годинниковою стрілкою до тих пір, поки він не перетне її графік. Якщо ж функція φ не є лінійною, то будемо обертати за годинниковою стрілкою промінь l до дотику з її графіком. Позначимо через $(b_2, \varphi(b_2))$ в першому випадку точку перетину, а в другому — точку дотику променя l і графіка функції $\varphi(t)$. Внаслідок властивостей а)–г) така точка $(b_2, \varphi(b_2))$ завжди існує.

Означимо φ_1, $t \geq 1$, в першому випадку як функцію, графіком якої є промінь l. В другому випадку — як функцію, графік якої при $t \in [1, b_2]$ збігається з променем l, а при $t > b_2$ — з графіком функції φ. Тоді для неї будемо мати $\varphi_1(t) \geq 0$, $t \geq 1$, $\varphi_1(t) \geq \frac{1}{t}$, $\varphi_1''(t) \leq 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi_1(t) = +\infty$; і при всіх t, більших за число $b_0 = \max\{b_1, b_2\}$, виконується нерівність $\varphi_1(t) \leq \xi(t)$.

Розглянемо функцію
$$\psi(t) = Ke^{-\varphi_1(t)t}, \tag{6.116}$$
де сталу K підібрано так, щоб при всіх $t \geq 1$ виконувалась нерівність $a(t) \leq Ke^{-\varphi_1(t)t}$. Зрозуміло, що така стала існує, оскільки згідно з побудовою при всіх $t \geq b_0$ справджується співвідношення $e^{-\varphi_1(t)t} \geq e^{-\xi(t)t} = a(t)$. Функція $\psi(t)$ є додатною, спадає до нуля при $t \to \infty$ і внаслідок того, що

$$\psi''(t) = e^{-t\varphi_1(t)}\Big((\varphi_1'(t)t + \varphi_1(t))^2 - \varphi_1''(t) - 2\varphi_1'(t)\Big) \geq$$

$$\geq Ke^{-t\varphi(t)}\Big((\varphi_1'(t)t - \frac{1}{t})^2 + \varphi_1^2(t) - \frac{1}{t^2}\Big) \geq 0,$$

є опуклою вниз, а отже, належить множині $\mathfrak{M}$. Крім того, оскільки величина

$$\alpha(\psi;t) = \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|} = \frac{Ke^{-\varphi_1(t)t}}{tKe^{-\varphi_1(t)t}(t\varphi'(t) + \varphi(t))} = \frac{1}{t(t\varphi'(t) + \varphi(t))}$$

монотонно спадає до нуля при $t \to \infty$, то згідно з твердженням 6.1.1 функція ψ належить множині $\mathfrak{M}_\infty^+$.

Для завершення доведення теореми залишається переконатися в тому, що $\lim\limits_{t\to\infty}(\eta(\psi;t) - t) = 0$. Оскільки $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+ \subset F$, то внаслідок твердження 6.2.2, маємо

$$\eta(\psi;t) - t \leq \frac{1}{K_1} \cdot \frac{\psi(t)}{|\psi'(t)|} = \frac{1}{K_1(t\varphi'(t) + \varphi(t))} \to 0, \quad t \to \infty.$$

Таким чином, $\psi \in \mathfrak{M}_{\eta,0}^+$, тобто, функція ψ — шукана. Теорему доведено.

Нехай, як і вище, $\mathcal{D}_0$ — множина всіх послідовностей додатних чисел, для яких
$$\lim_{k\to\infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = 0. \tag{6.117}$$

Оскільки для функції $\psi(t)$, яка визначається рівністю (6.116), при будь-якому натуральному k маємо

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{Ke^{-(k+1)\varphi_1(k+1)}}{Ke^{-k\varphi_1(k)}} = \lim_{k\to\infty} e^{-\varphi_1(k+1)+k(\varphi_1(k)-\varphi_1(k+1))} = 0,$$

то послідовність $\psi(k)$, $k = 1, 2, \ldots$, належить множині $\mathcal{D}_0$. Таким чином справедлива

Теорема 6.5.4$'$. *Якщо $f \in \mathcal{E}$, то можна вказати послідовність ψ з множини $\mathcal{D}_0$ таку, що $f \in C^{\bar\psi}$ для всіх пар $\bar\psi = (\psi_1, \psi_2)$, для яких $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$, $k \in \mathbb{N}$.*

На основі теорем 6.5.4 і 6.5.44$'$ можна отримати наступні критерії належності 2π-періодичної функції множині $\mathcal{E}$.

Теорема 6.5.5 . *Нехай $\mathcal{M}$ — будь-яка з множин $\mathfrak{M}^+_{\eta,0}$ або $\mathcal{D}_0$. Наступні твердження еквівалентні:*

i) $f \in \mathcal{E}$;

ii) *існує функція $\psi \in \mathcal{M}$, така, що $f \in C^{\bar\psi}$ для всіх пар $\bar\psi = (\psi_1, \psi_2)$, для яких при кожному $k \in \mathbb{N}$ виконується рівність $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(t) + \psi_2^2(t)}$;*

iii) *$f \in C^{\bar\psi}$ для деякої пари $\bar\psi = (\psi_1, \psi_2)$ такий, що функція $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(t) + \psi_2^2(t)}$ належить множині $\mathcal{M}$.*

Доведення. Імплікація i) $\Rightarrow$ ii) випливає з теорем 6.5.4 і 6.5.4$'$, імплікація ii) $\Rightarrow$ iii) очевидна.

Переконаємось в справедливості імплікації iii) $\Rightarrow$ i). Нехай функція f належить множині $C^{\bar\psi}$ для деякої пари $\bar\psi = (\psi_1, \psi_2)$ такої, що функція $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(t) + \psi_2^2(t)}$ належить множині $\mathcal{M}$. Покажемо, що тоді $f \in \mathcal{E}$. Як випливає з міркувань §3.8 монографії [143], для цього достатньо довести співвідношення

$$\lim_{k\to\infty} \ln \psi^{-1/k}(k) = \infty. \tag{6.118}$$

Нехай $\psi \in \mathfrak{M}^+_{\eta,0}$ і M — довільне додатне число. Внаслідок (6.115) і (6.21) для будь-якого $\varepsilon > 0$ і зокрема, для $\varepsilon = 1/(2M)$, при всіх t, більших за деяке число $t_\varepsilon > 1$, справджується нерівність

$$\frac{\psi(t)}{|\psi'(t)|} \le 2(\eta(\psi; t) - t) < \varepsilon,$$

з якої випливає, що

$$\frac{|\psi'(t)|}{\psi(t)} > \frac{1}{\varepsilon}. \tag{6.119}$$

Нехай K_0 — довільне число, більше за t_ε, для якого $\psi(K_0) < 1$. Інтегруючи ліву і праву частину нерівності (6.119) по проміжку $[K_0, K]$, отримуємо

$$\ln \frac{1}{\psi(K)} > \frac{1}{\varepsilon}(K - K_0) + \ln \frac{1}{\psi(K_0)}.$$

Звідси робимо висновок, що при всіх $k > 2K_0$ має місце співвідношення

$$\ln \psi^{-1/k}(k) = \frac{1}{k} \ln \frac{1}{\psi(k)} > \frac{k - K_0}{\varepsilon\, k} + \frac{1}{k} \ln \frac{1}{\psi(K_0)} > \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2\varepsilon} = \frac{1}{2\varepsilon} = M,$$

а це і означає, що виконується співвідношення (6.118), і отже, $f \in \mathcal{E}$.

Нехай тепер $\psi \in \mathcal{D}_0$. Для будь-якого натурального n покладемо

$$\varepsilon_n = \sup_{k \ge n} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}.$$

Внаслідок (6.117) і того, що $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \ldots$, для як завгодно великого числа $M_0 > 0$ існує номер n_0 такий, що $\varepsilon_m < 1/e^{2M_0}$, для всіх $m = n_0,\ n_0+1,\ldots$. Тоді для всіх $k > n_0$ і таких, що $\psi(n_0) < 1$ будемо мати

$$\ln \psi^{-1/k}(k) = \ln\Big(\prod_{j=n_0}^{k-1} \frac{\psi(j+1)}{\psi(j)}\psi(n_0)\Big)^{-1/k} \geq \ln\Big(\psi(n_0)\varepsilon_{n_0}^{k-n_0}\Big)^{-1/k} =$$

$$= \frac{k-n_0}{k}\ln\frac{1}{\varepsilon_{n_0}} + \frac{1}{k}\ln\frac{1}{\psi(n_0)} > M_0,$$

тому справджується співвідношення (6.118), звідки випливає, що функція f належить множині $\mathcal{E}$. Теорему доведено.

На основі теореми 6.5.5 отримуємо рівності

$$\mathcal{E} = \bigcup_{\psi_1,\,\psi_2\in\mathfrak{M}^+_{\infty,0}} C^{\bar\psi} = \bigcup_{\psi_1,\,\psi_2\in\mathcal{D}_0} C^{\bar\psi}.$$

Доведені вище теореми 6.5.1–6.5.5 встановлюють існування для кожної нескінченно диференційовної, аналітичної або цілої функції f існування функції $\psi \in \mathcal{M}$ (яка має деякі додаткові властивості, що залежать від її гладкості) такої, що $f \in C^{\bar\psi}$ для всіх пар $\bar\psi = (\psi_1, \psi_2)$, для яких $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$, $k \in \mathbb{N}$. З іншого боку, як випливає з твердження 6.5.1, для довільної відмінної від тригонометричного полінома функції $f \in \mathcal{D}^\infty$ існує $\psi \in \mathfrak{M}$ така, що $f \bar\in C^{\bar\psi}$ для всіх пар $\bar\psi = (\psi_1, \psi_2)$, для яких $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$. В зв'язку з цим виникає питання: чи може при цьому послідовність ψ належати таким підмножиним множини $\mathfrak{M}$ як $\mathfrak{M}^\infty$, $\mathfrak{M}_{\alpha,0}$, $\mathfrak{M}_{\mu,\infty}$, $\mathfrak{M}^+_\infty$ і $\mathfrak{M}^+_{\eta,0}$ або наприклад, вибиратися з множин $\mathcal{D}_q$? Два наступних твердження разом із ланцюжком вкладень (6.93) дають ствердну відповідь на це питання.

Теорема 6.5.6 . *Для довільної функції $f \in L \setminus \mathscr{T}$ можна вказати $\psi \in \mathfrak{M}^+_{\eta,0}$ таку, що $f \bar\in L^{\bar\psi}$ (тобто, $f^{\bar\psi}$ не існує) для всіх пар $\bar\psi = (\psi_1, \psi_2)$, для яких $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$, $k \in \mathbb{N}$.*

Доведення. В ході доведення твердження 6.5.1 для кожної 2π-періодичної сумовної функції f, яка не належить множині $\mathscr{T}$, було побудовано функцію $\psi_f \in \mathfrak{M}$ таку, що $f \bar\in L^{\bar\psi_f}$ для всіх пар послідовностей $\bar\psi_f = (\psi_1, \psi_2)$, для яких $\psi_f(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$, $k \in \mathbb{N}$. Тому для доведення теореми 6.5.6 достатньо встановити існування функції $\psi \in \mathfrak{M}^+_{\eta,0}$, графік якої знаходиться не вище графіка функції ψ_f.

Побудуємо функцію $\varphi(t) \in \mathfrak{M}$ таку, щоб її графік лежав не вище графіка функції $\xi(t) := \eta(\psi_f; t) - t$ і при цьому виконувалась нерівність

$$|\varphi'(t)| \leq \frac{3}{2}. \tag{6.120}$$

Зрозуміло, що у випадку, коли $\eta(\psi_f;t)-t\ge C>0$, побудова функції φ тривіальна. Якщо ж $\varliminf\limits_{t\to\infty}(\eta(\psi_f;t)-t)=0$, то побудувати функцію φ можна, наприклад, дещо модифікувавши схему, використану при доведенні твердження 6.5.1 (див. також доведення твердження 3.11.10 з [143, с. 157]).

Побудуємо допоміжну функцію $l=l(t)$. Для цього покладемо $z_0=(1,\xi(1))$. Промінь l_1, який виходить з точки z_0 в напрямку, протилежному осі ординат, будемо обертати проти годинникової стрілки до його дотику з графіком функції $\xi(t)$. Точку дотику позначимо через $z_1=(t_1,y_1)$. Якщо таких точок дотику декілька, то через $z_1=(t_1,y_1)$ позначимо точку з найбільшою абсцисою. На проміжку $[1,t_1]$ означимо функцію $l(t)$ так, щоб її графік збігся з відрізком, що з'єднує точки z_0 і z_1.

Далі, промінь l_2, який виходить з точки z_1 і напрямок якого збігається з напрямком променя l_1 в останньому положенні, знову будемо обертати проти годинникової стрілки до його дотику з графіком функції $\xi(t)$. Точку дотику позначимо через $z_2=(t_2,y_2)$. Якщо таких точок дотику декілька, то через $z_2=(t_2,y_2)$ позначимо точку з найбільшою абсцисою. На проміжку $[t_1,t_2]$ означимо функцію $l(t)$ так, щоб її графік збігався з відрізком, що з'єднує точки z_1 і z_2.

Продовжуючи цей процес, в результаті побудуємо функцію $l(t)$, $t\ge1$, яка буде належати множині $\mathfrak{M}$, таку, що $l(t)\le\xi(t)$, $t\ge1$. Згідно з побудовою при всіх достатньо великих t за виключенням вузлів t_i справджується нерівність $|l'(t)|\le\frac{3}{2}$. Зрозуміло, що функцію l можна змінити на скінченному проміжку так, щоб отримана при цьому функція φ належала множині $\mathfrak{M}$ і при $t\ge1$ задовольняла нерівність (6.120) та умову

$$\varphi(t)\le\xi(t)=\eta(\psi_f;t)-t. \tag{6.121}$$

Розглянемо функцію

$$\psi(t)=\psi(t;K)=K\exp\Big(-\frac{3}{2}\int\limits_1^t\frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\Big),\quad t\ge1, \tag{6.122}$$

де K — довільна додатна стала. Оскільки

$$\psi'(t)=-\frac{3}{2}K\exp\Big(-\frac{3}{2}\int\limits_1^t\frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\Big)\frac{1}{\varphi(t)}<0, \tag{6.123}$$

і

$$\psi''(t)=\frac{3}{2}K\exp\Big(-\frac{3}{2}\int\limits_1^t\frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\Big)\frac{1}{\varphi^2(t)}\Big(\frac{3}{2}+\varphi'(t)\Big)\ge0,$$

то $\psi \in \mathfrak{M}$. Величина

$$\alpha(\psi;t) = \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|} = \frac{2\varphi(t)}{3t} \tag{6.124}$$

монотонно спадає до нуля при $t \to \infty$, тому внаслідок твердження 6.1.1 робимо висновок, що $\psi \in \mathfrak{M}^+_\infty$.

Далі, оскільки $\psi \in \mathfrak{M}^+_\infty$, то для будь-якого $t \geq 1$

$$\eta'(\psi;t) \leq 1 + \gamma(t),$$

де $\gamma(t)$ — деяка функція, яка прямує до нуля при $t \to \infty$ (див., наприклад, [143, с. 166]). Тому при всіх t, більших за деяке число $\bar{t} \geq 1$, виконується співвідношення

$$\eta'(\psi;t) = \frac{\psi'(t)}{2\psi'(\eta(\psi;t))} \leq \frac{3}{2}.$$

Звідси внаслідок (6.122), (6.123) і (6.20) робимо висновок, що при всіх $t \geq \bar{t}$

$$\eta(\psi;t) - t \leq \frac{\psi(t)}{2|\psi'(\eta(\psi;t))|} \leq \frac{3}{2}\frac{\psi(t)}{|\psi'(t)|} = \varphi(t). \tag{6.125}$$

Згідно з побудовою $\varphi \in \mathfrak{M}$, тому $\lim\limits_{t\to\infty} \eta(\psi;t) - t = 0$, тобто, $\psi \in \mathfrak{M}^+_{\eta,0}$.

Нарешті переконаємось, що за певного вибору сталої K графік функції $\psi(t;K)$ буде лежать під графіком функції $\psi_f(t)$. Внаслідок (6.125) і (6.121) при всіх $t \geq \bar{t}$ маємо

$$\eta(\psi;t) \leq \eta(\psi_f;t). \tag{6.126}$$

Виберемо в (6.122) число $K = K_0$ так, щоб при всіх $t \in [1, \eta(\psi;\bar{t})]$ виконувалась нерівність $\psi(t;K_0) \leq \psi_f(t)$. Тоді, внаслідок (6.126), таке ж нерівність буде виконуватися і при всіх $t > \eta(\psi;\bar{t})$.

Звідси випливає, що функція $\psi(t) = \psi(t;K_0)$, яка при будь-якому $t \geq 1$ означається рівністю (6.122), де $K = K_0$, належить множині $\mathfrak{M}^+_\infty$, і для неї при всіх $t \geq 1$ справджується нерівність $\psi(t) \leq \psi_f(t)$, тобто, ψ — шукана. Теорему доведено.

Розглянемо далі послідовність $\psi(k)$ значень функції $\psi(t)$, яка задається рівністю (6.122), в натуральних точках $k = 1, 2, \ldots$. Внаслідок того, що $\varphi \in \mathfrak{M}$, при будь-якому натуральном k маємо

$$\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = \exp\Big(-\frac{3}{2}\int\limits_k^{k+1} \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\Big) \leq e^{-3/(2\varphi(k))}.$$

Тому $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = 0$. Таким чином, послідовність $\psi(k)$ значень функції ψ в натуральних точках $k = 1, 2, \ldots$ належить множині $\mathcal{D}_0$ і справедлива

Теорема 6.5.6$'$. *Для довільної функції* $f \in L \setminus \mathscr{T}$ *можна вказати послідовність* $\psi \in \mathcal{D}_0$ *таку, що* $f \bar{\in} L^{\bar{\psi}}$ *для всіх пар* $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$, *для яких* $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$, $k \in \mathbb{N}$.

На основі теорем 6.5.6 і 6.5.6$'$ із врахуванням вкладень (6.93), отримуємо наступні аналоги співвідношень (1.133):

$$\bigcap_{\psi_1,\psi_2 \in \mathfrak{M}^\infty} C^{\bar{\psi}} = \bigcap_{\psi_1,\psi_2 \in \mathfrak{M}_{\alpha,0}} C^{\bar{\psi}} = \bigcap_{\psi_1,\psi_2 \in \mathfrak{M}_{\mu,\infty}} C^{\bar{\psi}} = \bigcap_{\psi_1,\psi_2 \in \mathfrak{M}^+_\infty} C^{\bar{\psi}} = \mathscr{T},$$

$$\bigcap_{\psi_1,\psi_2 \in \bigcup\limits_{q\in[0,1)} \mathcal{D}_q} C^{\bar{\psi}} = \bigcap_{\psi_1,\psi_2 \in \bigcup\limits_{c>0} \mathfrak{M}_{\infty,\, c}} C^{\bar{\psi}} = \mathscr{T},$$

$$\bigcap_{\psi_1,\, \psi_2 \in \mathfrak{M}^+_{\infty,0}} C^{\bar{\psi}} = \bigcap_{\psi_1,\, \psi_2 \in \mathcal{D}_0} C^{\bar{\psi}} = \mathscr{T}.$$

Таким чином, весь спектр 2π-періодичних нескінченно диференційовних функцій можна проранжувати за допомогою їх $\bar{\psi}$-похідних, причому пари $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ достатньо вибирати так, щоб функції $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$ належали одній з множин $\mathfrak{M}^+_\infty$, $\mathfrak{M}_{\mu,\infty}$, $\mathfrak{M}_{\alpha,0}$ або $\mathfrak{M}^\infty$. Для розмежування функцій з $\mathcal{A}$ за допомогою їх $\bar{\psi}$-похідних пари $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ достатньо вибирати так, щоб функція $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$ належала одній з множин $\bigcup\limits_{\varrho\in(0,1)} \mathcal{D}^\varrho$, $\bigcup\limits_{q\in[0,1)} \mathcal{D}_q$, $\bigcup\limits_{K>0} \mathfrak{M}^K_\eta$ або $\bigcup\limits_{c\geq 0} \mathfrak{M}_{\eta,c}$, а для розмежування функцій з $\mathcal{E}$ — так, щоб $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$ належала одній з множин $\mathfrak{M}^+_{\eta,0}$ або ж $\mathcal{D}_0$. Нерозрізненними при такій класифікації залишаються тільки тригонометричні поліноми.

6.5.5. Класи $(\psi, \bar{\beta})$–диференційовних функцій та класи Жевре. В цьому пункті даного підрозділу встановлюється зв'язок між класифікацією 2π-періодичних функцій за допомогою $(\psi, \bar{\beta})$-похідних і відомою класифікацією Жевре, яка використовується для характеризации нескінченно диференційовних функцій.

Класом Жевре $\mathscr{I}_\alpha$, $\alpha > 0$, (див., наприклад, [61, с. 97]) називають множину 2π-періодичних нескінченно диференційовних функцій f, яка означається рівністю

$$\mathscr{I}_\alpha = \left\{ f \in \mathcal{D}^\infty \ : \ \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{\|f^{(k)}\|_C}{(k!)^\alpha} \right)^{1/k} < \infty \right\}.$$

Класи Жевре знайшли своє застосування функціональному аналізі, теорії тригонометричних рядів, диференціальних рівняннях та інших розділах математики. При $\alpha = 1$, як показав Прингсгейм (див., зокрема, [79, с. 3]), клас Жевре збігається з класом аналітичних на дійсній осі періодичних функцій. Якщо ж $\alpha \in (0, 1)$, то, як випливає з леми 7 роботи П.Л. Ульянова [177, с. 598], функції з класу $\mathscr{I}_\alpha$, аналітично продовжуються на всю комплексну площину, тобто, є цілими функціями.

В то й же час слід зазначити, що класифікація Жевре не дозволяє ранжувати всі нескінченно диференційовані періодичні функції. Це випливає, наприклад, з такого твердження.

Твердження 6.5.6 . *Існують функції, які належать множині $\mathcal{D}^\infty$ такі, що ні при яких $\alpha > 0$ не належать класам $\mathscr{I}_\alpha$. Тобто, справджується співвідношення*

$$\mathcal{D}^\infty \setminus \bigcup_{\alpha>0} \mathscr{I}_\alpha \neq \varnothing. \tag{6.127}$$

В той же час існують відмінні від от тригонометричних поліномів функції такі, що при довільних $\alpha > 0$ належать класам $\mathscr{I}_\alpha$. Тобто,

$$\bigcap_{\alpha>0} \mathscr{I}_\alpha \setminus \mathscr{T} \neq \varnothing. \tag{6.128}$$

Для доведення співвідношення (6.127) достатньо розглянути функцію

$$f_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^{\ln k}}$$

і переконатися, що вона належить множині $\mathcal{D}^\infty \setminus \bigcup_{\alpha>0} \mathscr{I}_\alpha$.

Включення $f_1 \in \mathcal{D}^\infty$ випливає з того, що при будь-якому $r > 0$ має місце рівність

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k^r}{k^{\ln k}} = 0.$$

Тому залишається довести, що для довільних $\alpha > 0$ $f_1 \notin \mathscr{I}_\alpha$.

Внаслідок твердження 3 роботи П.Л. Ульянова [177, с. 606] необхідною і достатньою умовою того, щоб функція f з рядом Фур'є

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx} \tag{6.129}$$

належала класу $\mathscr{I}_\alpha$, є умова:

$$\overline{\lim_{|k|\to\infty}} |c_k(f)|^{|k|^{-\frac{1}{\alpha}}} < 1. \tag{6.130}$$

Оскільки при будь-якому цілому ненульовому k $c_k(f_1) = \dfrac{1}{2|k|^{\ln|k|}}$, то для довільного $\alpha > 0$ маємо

$$\overline{\lim_{|k|\to\infty}} |c_k(f_1)|^{|k|^{-\frac{1}{\alpha}}} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \left(\frac{1}{2k^{\ln k}}\right)^{k^{-\frac{1}{\alpha}}} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \left(\frac{1}{k^{\ln k}}\right)^{k^{-\frac{1}{\alpha}}} = \lim_{k\to\infty} \exp\Bigl(-\frac{\ln^2 k}{k^{1/\alpha}}\Bigr) = 1.$$

Тому f_1 не належить класу $\mathscr{I}_\alpha$ ні при якому $\alpha > 0$ і співвідношення (6.127) доведено.

Для доведення нерівності (6.128) розглянемо функцію

$$f_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{e^{e^k}}\,.$$

Оскільки при будь-якому $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ $\quad c_k(f_2) = \frac{1}{2e^{e^{|k|}}}$, то для довільного $\alpha > 0$ маємо

$$\varlimsup_{|k|\to\infty} |c_k(f_2)|^{|k|^{-\frac{1}{\alpha}}} = \varlimsup_{k\to\infty} \left(\frac{1}{2e^{e^k}}\right)^{k^{-\frac{1}{\alpha}}} = \lim_{k\to\infty} \exp\Big(-\frac{e^k}{k^{1/\alpha}}\Big) = 0.$$

Тому f_2 належить класу $\mathscr{I}_\alpha$ при будь-якому $\alpha > 0$. Твердження 6.5.6 доведено.

Співвідношення (6.128), зокрема, показує, що при класифікації Жевре, на відміну від класифікації функцій за допомогою $(\psi, \bar{\beta})$–похідних, залишаються нерозрізненими не тільки тригонометричні поліноми, але і деякі цілі функції.

Між класами Жевре $\mathscr{I}_\alpha$ і множиними $C^{q,r}_{\bar{\beta}}$ існує тісний зв'язок, який виражається таким твердженням.

Теорема 6.5.7 . *Нехай $f \in C^{q,\frac{1}{\alpha}}_{\bar{\beta}}$, $q \in (0,1)$, $\alpha > 0$, $\beta_k \in \mathbb{R}$. Тоді $f \in \mathscr{I}_\alpha$. З іншого боку, якщо функція f належить класу $\mathscr{I}_\alpha$, $\alpha > 0$, то знайдеться число $q \in (0,1)$ таке, що для довільної послідовності $\beta_k \in \mathbb{R}$ справджується включення $f \in C^{q,\frac{1}{\alpha}}_{\bar{\beta}}$.*

Доведення. Нехай функція f належить множині $C^{q,\frac{1}{\alpha}}_{\bar{\beta}}$. Тоді (див., наприклад, [143, с. 151]) її ряд Фур'є має вигляд

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{|k|\geq 1} \mu_k \gamma_k e^{ikx}, \tag{6.131}$$

де

$$\gamma_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad \gamma_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}, \quad k \in \mathbb{N},$$

a_k і b_k — коефіцієнти Фур'є $(\psi, \bar{\beta})$-похідною функції f при $\psi(k) = q^{k^{\frac{1}{\alpha}}}$, а

$$\mu_k = \begin{cases} q^{k^{1/\alpha}} \cos \frac{\beta_k \pi}{2} - i q^{k^{1/\alpha}} \sin \frac{\beta_k \pi}{2}, & k \geq 1, \\ q^{|k|^{1/\alpha}} \cos \frac{\beta_{|k|} \pi}{2} + i q^{|k|^{1/\alpha}} \sin \frac{\beta_{|k|} \pi}{2}, & k \leq -1. \end{cases}$$

Звідси

$$|c_k(f)| = |\mu_k|\,|\gamma_k| = q^{|k|^{1/\alpha}} |\gamma_k|, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

і

$$\varlimsup_{|k|\to\infty} |c_k(f)|^{|k|^{-1/\alpha}} = \varlimsup_{|k|\to\infty} q |\gamma_k|^{|k|^{-1/\alpha}} \leq q < 1. \tag{6.132}$$

Внаслідок твердження 3 роботи [177, с. 606] функція f належить множині $\mathscr{I}_\alpha$.

Нехай тепер 2π-періодична функція f належить класу $\mathscr{I}_\alpha$ при деякому $\alpha > 0$. Записавши її ряд Фур'є у вигляді (6.81), покладемо

$$\varrho_f := \overline{\lim_{k\to\infty}} \, d_k^{k^{-1/\alpha}}. \tag{6.133}$$

Оскільки $f \in \mathscr{I}_\alpha$, то внаслідок твердження 3 роботи [177, с. 606] $\varrho_f \in [0,1)$. Виберемо довільне число ε з інтервалу $(0, 1-\varrho_f)$ і покладемо $q = \varrho_f + \varepsilon$. Покажемо, що якою б не була послідовність дійсних чисел $\bar\beta = \{\beta_k\}$, функція f буде належати множині $C_{\bar\beta}^{q,\frac{1}{\alpha}}$. Для цього, згідно з означенням, необхідно показати, що ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{q^{k^{1/\alpha}}} \cos\left(kx - \frac{(\gamma_k - \beta_k)\pi}{2}\right) \tag{6.134}$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції φ. Внаслідок рівності (6.133) існує додатна стала A (яка залежить від f) така, що

$$d_k < A\varrho_f^{k^{1/\alpha}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тому для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{q^{k^{1/\alpha}}}$, який є мажорантним для ряду (6.134), можемо записати

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{q^{k^{1/\alpha}}} \le A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varrho_f^{k^{1/\alpha}}}{q^{k^{1/\alpha}}} = A \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\varrho_f}{\varrho_f + \varepsilon}\right)^{k^{1/\alpha}} < \infty.$$

Таким чином, ряд (6.134) збігається рівномірно і отже, є рядом Фур'є деякої сумовної функції φ. Теорему доведено.

Із встановленої теореми безпосередньо отримуємо твердження, яке містить критерії належності функції класам $\mathscr{I}_\alpha$.

Наслідок 6.5.1 . *Нехай $\alpha > 0$. Наступні твердження еквівалентні:*

i) *функція f належить класу Жевре $\mathscr{I}_\alpha$;*

ii) *існує число $q \in (0,1)$ таке, що $f \in C_{\bar\beta}^{q,\frac{1}{\alpha}}$ для довільної послідовності $\bar\beta = \beta_k \in \mathbb{R}$;*

iii) *існує число $q \in (0,1)$ і послідовність дійсних чисел $\bar\beta = \{\beta_k\}$ такі, що $f \in C_{\bar\beta}^{q,\frac{1}{\alpha}}$.*

Із наведеного наслідку випливає, зокрема, що для довільної фіксованої послідовності дійсних чисел $\bar\beta = \beta_k$ і довільного $\alpha > 0$ виконується рівність

$$\mathscr{I}_\alpha = \bigcup_{q\in(0,1)} C_{\bar\beta}^{q,\frac{1}{\alpha}}.$$

6.6 Оцінки величин, в термінах яких виражаються найкращі наближення інтегралів за допомогою інтегралів скінченного рангу

6.6.1. Нехай $\psi = \psi(t)$, $t \geq 1$, — деяка додатна спадна до нуля функція. В даному підрозділі досліджується поведінка при $\sigma \to \infty$ величин $H_\sigma(\psi, p)$, які при $p \in (0, 1]$ означаються рівністю

$$H_\sigma(\psi, p) := \sup_{s>\sigma}(s-\sigma)\Big(\int\limits_1^{s+1} \frac{dt}{\psi(t)}\Big)^{-\frac{1}{p}}, \tag{6.135}$$

а при $p \in (1, \infty)$ — рівністю

$$H_\sigma(\psi, p) := \Big((s^*-\sigma)^q\Big(\int\limits_1^{s^*+1} \frac{dt}{\psi^p(t)}\Big)^{-\frac{q}{p}} + \int\limits_{s^*+1}^{\infty} \psi^q(t)\,dt\Big)^{\frac{1}{q}}, \tag{6.136}$$

в якій $s^* = s^*(\sigma)$ — таке найбільше на проміжку (σ, ∞) число, що при всіх $s \in (\sigma, s^*)$ виконується нерівність

$$s - \sigma \leq \psi^p(s+1) \int\limits_1^{s+1} \frac{dt}{\psi^p(t)}. \tag{6.137}$$

В підрозділі 2.1 в термінах величин $H_\sigma(\psi, p)$ знайдено точні значення величин $e_\sigma(\varphi, p)$. У підрозділі 1.2 в термінах дискретних аналогів цих величин сформульовані точні значення найкращих n-членних наближень класів $\mathcal{F}^\psi_{q,r}$ в просторах $S^p(\mathbb{T}^d)$. Варто зазначити, що подібні величини зустрічалися також при розв'язанні інших задач теорії наближення (див., наприклад, [126], [127], [102 (гл. VI)], [98],[180], [181], [31]). Тому задача про знаходження їх порядкових оцінок має також і самостійний інтерес.

В даному підрозділі розглядаються величини $H_\sigma(\psi, p)$, у випадку, коли функції ψ вибираються із множини $\mathfrak{M}$ всіх додатних опуклих спадних до нуля функцій неперервного аргумента $t \geq 1$, що задається рівністю (6.1). При цьому в залежності від швидкості спадання таких функцій отримано наступні твердження.

Теорема 6.6.1 . *Якщо функція ψ належить множині $\mathfrak{M}_0$, то для будь-якого $p \in (0, 1]$ справджується точна порядкова при $\sigma \to \infty$ оцінка*

$$H_\sigma(\psi; p) \asymp \frac{\psi^{\frac{1}{p}}(\sigma+1)}{\sigma^{\frac{1}{p}-1}}. \tag{6.138}$$

У випадку, коли ψ належить множині $\mathfrak{M}_\infty^+$ має місце таке твердження.

Теорема 6.6.2 . *Якщо функція ψ належить множині $\mathfrak{M}_\infty^+$ і при деякому $\varepsilon > 0$*

$$\eta'(\psi, t) \geq \frac{1}{2} + \varepsilon \quad \forall t > t_\varepsilon, \tag{6.139}$$

то для будь-якого $p \in (0, 1]$ справджується точна порядкова при $\sigma \to \infty$ оцінка

$$H_\sigma(\psi; p) \asymp \frac{\psi^{\frac{1}{p}}(\sigma + 1)}{(\eta(\psi; \sigma + 1) - \sigma - 1)^{\frac{1}{p} - 1}}. \tag{6.140}$$

Зазначимо, що умову (6.139) задовольняють, зокрема, функції $\exp(-\alpha t^r)$ при будь-яких $\alpha > 0$ та $r > 0$.

Нехай тепер $p \in (1, \infty)$. Якщо обмежитися розглядом функцій ψ з множини $\mathfrak{M}$ і врахувати позначення (6.5)–(6.7), то зрозуміло, що інтеграли в (6.136) можуть бути скінченними тільки, коли ці функції належать множині $\mathfrak{M}_\infty$.

Розглянемо спочатку випадок, коли $\psi \in \mathfrak{M}_C \subset \mathfrak{M}_\infty$.

Теорема 6.6.3 . *Нехай $p \in (1, \infty)$, а функція $\psi \in \mathfrak{M}_C$ така, що*

$$\|\psi\|^q_{L_q[1,\infty)} := \int\limits_1^\infty |\psi(t)|^q dt < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \tag{6.141}$$

і функція $1/\psi(t)$ опукла при всіх $t \geq t_0 \geq 1$. Тоді справджується співвідношення

$$H_\sigma(\psi, p) \asymp \psi(\sigma + 1)\sigma^{1 - \frac{1}{p}}, \quad \sigma \to \infty. \tag{6.142}$$

У випадку, коли функція ψ належить множині $\mathfrak{M}_\infty^+$, внаслідок теореми 6.1.2 умова (6.141) виконується завжди.

Теорема 6.6.4 . *Якщо функція ψ належить множині $\mathfrak{M}_\infty^+$ і така, що виконується умова* (6.139), *то для будь-якого $p \in (1, \infty)$ справджується співвідношення*

$$H_\sigma(\psi; p) \asymp \psi^{\frac{1}{p}}(\sigma + 1)(\eta(\psi; \sigma + 1) - \sigma - 1)^{1 - \frac{1}{p}}, \quad \sigma \to \infty. \tag{6.143}$$

6.6.2. Доведення теореми 6.6.1 про порядкові оцінки величин $H_\sigma(\psi;p)$ у випадку, коли $\psi\in\mathfrak{M}_0$ і $p\in(0,1]$. При заданих $\nu>1$ і $s>\nu$ розглянемо функцію

$$\widetilde{H}_\nu(s):=\frac{s-\nu}{\left(\int\limits_1^s\frac{dt}{\psi(t)}\right)^{\frac{1}{p}}},\quad 0<p\le 1. \tag{6.144}$$

Критична точка $s=s_\nu$ функції $\widetilde{H}_\nu(s)$ є точкою максимуму і задовольняє співвідношення

$$\widetilde{H}'_\nu(s)=\frac{\int\limits_1^s\frac{dt}{\psi(t)}-\frac{1}{p}(s-\nu)\psi^{-1}(s)}{\left(\int\limits_1^s\frac{dt}{\psi(t)}\right)^{\frac{1}{p}+1}}=0. \tag{6.145}$$

При цьому

$$\widetilde{H}_\nu(s_\nu)=\frac{s_\nu-\nu}{\int\limits_1^{s_\nu}\frac{dt}{\psi(t)}}\cdot\frac{1}{\left(\int\limits_1^{s_\nu}\frac{dt}{\psi(t)}\right)^{\frac{1}{p}-1}}=\frac{p\,\psi(s_\nu)}{\left(\int\limits_1^{s_\nu}\frac{dt}{\psi(t)}\right)^{\frac{1}{p}-1}}. \tag{6.146}$$

Покажемо спочатку, що в даному випадку

$$\psi(s_\nu)\asymp\psi(\nu). \tag{6.147}$$

Внаслідок монотонності функції ψ, завжди $\psi(s_\nu)\le\psi(\nu)$, тому для доведення (6.147) достатньо переконатися в існуванні сталої $K_1>0$, для якої

$$\psi(\nu)\le K_1\psi(s_\nu). \tag{6.148}$$

Розглянемо зростаючу послідовність чисел $\{\nu_k\}_{k=1}^\infty$ таких, що при будь-якому $k\in\mathbb{N}$ $\nu_k=\eta(\psi;\nu_{k-1})$, а $\nu_0:=\nu$. Оскільки функція ψ належить множині $\mathfrak{M}_0$, то внаслідок (6.5) для будь-якого $k\in\mathbb{N}$ та $\nu\ge1$ маємо

$$\frac{\nu_k-\nu}{\nu}=\frac{\nu_k}{\nu_{k-1}}\cdot\frac{\nu_{k-1}}{\nu_{k-2}}\cdot\ldots\cdot\frac{\nu_1}{\nu}-1\ge(K_2+1)^k-1,$$

тому починаючи з деякого номера $k_0\ge1$, будемо мати

$$\nu_{k_0}-\nu>\nu.$$

Покажемо, що $s_\nu\le\nu_{k_0+1}$. Тоді, згідно з означенням послідовності $\{\nu_k\}_{k=1}^\infty$

$$\psi(s_\nu)\ge\psi(\nu_{k_0+1})=\psi(\nu)/2^{k_0+1},$$

що і доводить нерівність (6.148), а разом з нею і порядкову оцінку (6.147).

Із співвідношення (6.145) випливає, що

$$\int\limits_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)} = \frac{s_\nu - \nu}{p\,\psi(s_\nu)}$$

або, що

$$\int\limits_1^{\nu} \frac{dt}{\psi(t)} = \Phi(s_\nu),$$

де

$$\Phi(s) = \int\limits_\nu^{s} \Big(\frac{1}{\psi(s)} - \frac{1}{\psi(t)}\Big)dt + \Big(\frac{1}{p} - 1\Big)\frac{s-\nu}{\psi(s)}. \qquad (6.149)$$

Функція $\Phi(s)$ не спадає при всіх $s > \nu$. Тому якщо при $s = \nu_{k_0+1}$ буде справджуватися нерівність

$$\int\limits_1^{\nu} \frac{dt}{\psi(t)}dt \le \Phi(s), \qquad (6.150)$$

то буде виконуватися і співвідношення $s_\nu \le \nu_{k_0+1}$.

Згідно з означенням послідовності $\{\nu_k\}$,

$$\frac{1}{\psi(\nu_{k_0+1})} - \frac{1}{\psi(\nu_{k_0})} = \frac{1}{\psi(\nu_{k_0})} = \frac{2^{k_0}}{\psi(\nu)} \ge \frac{1}{\psi(\nu)}.$$

Звідси, враховуючи монотонність функції ψ, отримуємо

$$\Phi(\nu_{k_0+1}) \ge \int\limits_\nu^{\nu_{k_0+1}} \Big(\frac{1}{\psi(\nu_{k_0+1})} - \frac{1}{\psi(t)}\Big)dt \ge \Big(\frac{1}{\psi(\nu_{k_0+1})} - \frac{1}{\psi(\nu_{k_0})}\Big)(\nu_{k_0} - \nu) \ge \frac{\nu}{\psi(\nu)} \ge \int\limits_1^{\nu} \frac{dt}{\psi(t)}.$$

Тобто, нерівність (6.150) при $s = \nu_{k_0+1}$ виконується. Тому дійсно $s_\nu \le \nu_{k_0+1}$ і отже, справджується співвідношення (6.147).

Якщо $p = 1$, то внаслідок (6.144)

$$H_\sigma(\psi; p) = \sup_{t \ge \sigma} \widetilde{H}_{\sigma+1}(t+1) = \sup_{s \ge \nu} \widetilde{H}_\nu(s),$$

де $\nu = \sigma + 1 > 1$, $s = t + 1 \ge \nu$. Звідси на підставі (6.146) та (6.147) отримуємо:

$$H_\sigma(\psi; p) = \sup_{s \ge \nu} \widetilde{H}_\nu(s) = \widetilde{H}_\nu(s_\nu) = p\,\psi(s_\nu) \asymp \psi(\nu) = \psi(\sigma + 1),$$

і співвідношення (6.138) в такому випадку доведено.

Якщо ж $p \in (0,1)$, то для доведення співвідношення (6.138) потрібно ще показати, що

$$\int\limits_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)} \asymp \frac{\nu-1}{\psi(\nu)}. \tag{6.151}$$

Маємо

$$\int\limits_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)} = \int\limits_0^{s_\nu-1} \frac{dt}{\psi(t+1)} = \frac{s_\nu-1}{\psi(s_\nu)} - \int\limits_0^{s_\nu-1} \frac{t|\psi'(t+1)|}{\psi^2(t+1)}dt \ge \frac{s_\nu-1}{\psi(s_\nu)} - \int\limits_0^{s_\nu-1} \frac{dt}{\alpha(\psi;t+1)\psi(t+1)},$$

де функція $\alpha(\psi;t)$ означається рівністю (6.10).

Оскільки $\psi \in \mathfrak{M}_0$, то внаслідок твердження 6.1.1 для будь-якого $t \ge 1$ справджується співвідношення $\alpha(\psi;t) \ge K_3 > 0$, враховуючи яке отримуємо

$$\int\limits_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)} \ge \frac{s_\nu-1}{\psi(s_\nu)} - \frac{1}{K_3}\int\limits_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)}$$

і тому

$$\int\limits_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)} \ge \frac{K_3}{K_3+1}\frac{s_\nu-1}{\psi(s_\nu)}.$$

З іншого боку, так як функція ψ спадає, то

$$\int\limits_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)} \le \frac{s_\nu-1}{\psi(s_\nu)}. \tag{6.152}$$

Тому

$$\int\limits_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)} \asymp \frac{s_\nu-1}{\psi(s_\nu)}. \tag{6.153}$$

Із співвідношень (6.145) та (6.152) випливає, що

$$(s_\nu-1)-(\nu-1) = p\,\psi(s_\nu)\int\limits_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)} \le p\,\psi(s_\nu)\frac{s_\nu-1}{\psi(s_\nu)} = p\,(s_\nu-1),$$

звідки бачимо, що

$$\nu-1 \le s_\nu-1 \le \frac{\nu-1}{1-p}.$$

Об'єднуючи останнє співвідношення із співвідношеннями (6.147) та (6.153), отримуємо (6.151).

Таким чином, поклавши $\nu = \sigma + 1$, будемо мати

$$H_\sigma(\psi;p) = \sup_{s\ge\nu} \widetilde{H}_\nu(s) = \widetilde{H}_\nu(s_\nu) = p\psi(s_\nu)\Big(\int\limits_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)}\Big)^{1-\frac{1}{p}} \asymp$$

$$\asymp \psi(\nu)\Big(\frac{\nu-1}{\psi(\nu)}\Big)^{1-\frac{1}{p}} = \frac{\psi^{\frac{1}{p}}(\nu)}{(\nu-1)^{\frac{1}{p}-1}} = \frac{\psi^{\frac{1}{p}}(\sigma+1)}{\sigma^{\frac{1}{p}-1}}.$$

Теорему 6.6.1 доведено.

6.6.3. Доведення теореми 6.6.2 про порядкові оцінки величин $H_\sigma(\psi;p)$ у випадку, коли $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$ і $p \in (0,1]$. Як помічено вище, критична точка $s = s_\nu$ функції $\widetilde{H}_\nu(s)$ є точкою максимуму і задовольняє співвідношенням (6.145) і (6.146).

Покажемо спочатку, що для довільної функції ψ, яка задовольняє умови теореми 6.6.2, справджується точна порядкова при $s \to \infty$ оцінка

$$\int\limits_1^s \frac{dt}{\psi(t)} \asymp \frac{\eta(\psi;s)-s}{\psi(s)}. \tag{6.154}$$

Використовуючи формулу інтегрування частинами, із врахуванням зауваження 6.2.1 отримуємо

$$\int\limits_1^s \frac{dt}{\psi(t)} = \frac{s}{\psi(s)} - \frac{1}{\psi(1)} - \int\limits_1^s \frac{t|\psi'(t)|dt}{\psi^2(t)} \ge \frac{s}{\psi(s)} - \frac{1}{\psi(1)} - \frac{1}{K_1}\int\limits_1^s \frac{\mu(\psi,t)dt}{\psi(t)}, \tag{6.155}$$

де величина $\mu(\psi,t) = \frac{t}{\eta(\psi;t)-t}$ згідно з означенням множини $\mathfrak{M}_\infty^+$ монотонно прямує до нескінченності. Звідси випливає, що

$$\int\limits_1^s \frac{dt}{\psi(t)} \ge \frac{1}{1+\mu(\psi;s)/K_1}\Big(\frac{s}{\psi(s)} - \frac{1}{\psi(1)}\Big) \ge K_3\frac{\eta(\psi;s)-s}{\psi(s)}. \tag{6.156}$$

З іншого боку, для довільної функції $\psi \in \mathfrak{M}$ при будь-якому $t \ge 1$ справджується співвідношення (6.20). Тому

$$\int\limits_1^s \frac{dt}{\psi(t)} \le 2\int\limits_1^s \frac{|\psi'(t)|}{\psi^2(t)}(\eta(\psi,t)-t)dt = 2\frac{\eta(\psi,t)-t}{\psi(t)} + 2\int\limits_1^s \frac{1-\eta'(\psi,t)}{\psi(t)}dt,$$

і якщо виконується умова (6.139), то при $s > t_\varepsilon$

$$\int\limits_1^s \frac{dt}{\psi(t)} \le 2\frac{\eta(\psi,t)-t}{\psi(t)} + 2\int\limits_1^{t_\varepsilon} \frac{1-\eta'(\psi,t)}{\psi(t)}dt + (1-2\varepsilon)\int\limits_{t_\varepsilon}^s \frac{1}{\psi(t)}dt \le$$

$$\leq 2\frac{\eta(\psi,t)-t}{\psi(t)} + (1-2\varepsilon)\int\limits_1^s \frac{1}{\psi(t)}dt + K_4. \tag{6.157}$$

Звідси випливає, що

$$\int\limits_1^s \frac{dt}{\psi(t)} \leq \frac{1}{\varepsilon}\Big(\frac{\eta(\psi,t)-t}{\psi(t)} + K_4\Big) \leq K_5\frac{\eta(\psi,t)-t}{\psi(t)}. \tag{6.158}$$

Об'єднуючи співвідношення (6.156) і (6.158), робимо висновок, що дійсно має місце оцінка (6.154).

Покажемо тепер, що для довільної функції ψ, яка задовольняє умови теореми 6.6.2, справджується оцінка

$$\psi(s_\nu) \asymp \psi(\nu) \quad \text{при} \quad \nu \to \infty. \tag{6.159}$$

Для цього, як вже зазначалось при доведенні теореми 6.6.1, достатньо показати, що існує стала $K_6 > 0$, для якої

$$\psi(\nu) \leq K_6\psi(s_\nu). \tag{6.160}$$

Із співвідношення (6.154) випливає, що існує стала $K_7 > 0$ така, що при всіх достатньо великих ν буде виконуватися нерівність

$$\int\limits_1^\nu \frac{dt}{\psi(t)} \leq K_7\frac{\eta(\psi;\nu)-\nu}{\psi(\nu)}. \tag{6.161}$$

Виберемо число $k_0 = k_0(K_7) \in \mathbb{N}$ так, щоб

$$\frac{2^{k_0}-3}{K_7} \geq 1, \tag{6.162}$$

і аналогічно до доведення теореми 6.6.1 покажемо, що $s_\nu \leq \nu_{k_0}$, де $\nu_k = \eta(\psi;\nu_{k-1}),\ k \in \mathbb{N}$, $\nu_0 = \nu$. Звідси буде випливати, що

$$\psi(s_\nu) \geq \psi(\nu_{k_0}) = \psi(\nu)/2^{k_0},$$

і отже, будуть справджуватися співвідношення (6.160) і (6.159).

Розглянемо функцію $\Phi(s)$, яка означається рівністю (6.149). Покажемо, що при достатньо великих ν виконується нерівність

$$\int\limits_1^\nu \psi(t)dt \leq \Phi(\nu_{k_0}),$$

із якої буде випливати, що $s_\nu \le \nu_{k_0}$.

Внаслідок (6.149), (6.161) та (6.162)

$$\Phi(\nu_{k_0}) \ge \int\limits_{\nu}^{\nu_{k_0}} \Big(\frac{1}{\psi(\nu_{k_0})} - \frac{1}{\psi(t)}\Big) dt \ge (2^{k_0} - 3)\frac{\eta(\nu) - \nu}{\psi(\nu)} \ge \frac{2^{k_0} - 3}{K_7} \int\limits_{1}^{\nu} \frac{dt}{\psi(t)} \ge \int\limits_{1}^{\nu} \frac{dt}{\psi(t)}.$$

Тому дійсно $s_\nu \le \nu_{k_0}$ і $\psi(s_\nu) \asymp \psi(\nu)$ при $\nu \to \infty$.

Якщо $p = 1$, то

$$H_\sigma(\psi; p) = \sup_{s \ge \nu} \widetilde{H}_\nu(s) = \widetilde{H}_\nu(s_\nu) = p\,\psi(s_\nu) \asymp \psi(\nu) = \psi(\sigma + 1),$$

і співвідношення (6.140) в такому випадку доведено.

Якщо ж $p \in (0, 1)$, то для доведення співвідношення (6.140) залишається показати, що

$$\int\limits_{1}^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)} \asymp \frac{\eta(\psi; \nu) - \nu}{\psi(\nu)} \quad \text{при } \nu \to \infty. \tag{6.163}$$

На підставі (6.154) і того, що $s_\nu > \nu$, маємо

$$\int\limits_{1}^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)} \ge \int\limits_{1}^{\nu} \frac{dt}{\psi(t)} \ge K_8 \frac{\eta(\nu) - \nu}{\psi(\nu)}. \tag{6.164}$$

З іншого боку $s_\nu \le \nu_{k_0}$, і отже, з врахуванням (6.161)

$$\int\limits_{1}^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)} \le \int\limits_{1}^{\nu_{k_0}} \frac{dt}{\psi(t)} = \int\limits_{1}^{\nu} \frac{dt}{\psi(t)} + \int\limits_{\nu}^{\nu_{k_0}} \frac{dt}{\psi(t)} \le K_7 \frac{\eta(\nu) - \nu}{\psi(\nu)} + \frac{\nu_{k_0} - \nu}{\psi(\nu_{k_0})}. \tag{6.165}$$

Функція ψ належить множині $\mathfrak{M}_\infty^+ \subset F$. Тому в силу співвідношення (6.34) має місце оцінка

$$\frac{\nu_{k_0} - \nu}{\psi(\nu_{k_0})} \le 2^{k_0} \frac{(\eta(\nu) - \nu)(K^{k_0 - 1} + K^{k_0 - 2} + \ldots + 1)}{\psi(\nu)} = K_9 \frac{\eta(\nu) - \nu}{\psi(\nu)}.$$

Підставляючи цю оцінку в (6.165), отримуємо нерівність

$$\int\limits_{1}^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)} \le K_7 \frac{\eta(\nu) - \nu}{\psi(\nu)} + K_9 \frac{\eta(\nu) - \nu}{\psi(\nu)} = K_{10} \frac{\eta(\nu) - \nu}{\psi(\nu)},$$

яка разом із співвідношенням (6.164) дає (6.163).

Таким чином, при $\nu = \sigma + 1 \to \infty$ і $s = t + 1 \geq \nu$ будемо мати

$$H_\sigma(\psi; p) = \sup_{t\geq\sigma} \widetilde{H}_{\sigma+1}(t+1) = \sup_{s\geq\nu} \widetilde{H}_\nu(s) = \widetilde{H}_\nu(s_\nu) = p\,\psi(s_\nu)\Big(\int\limits_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)}\Big)^{1-\frac{1}{p}} \asymp$$

$$\asymp \psi(\nu)\Big(\frac{\eta(\nu)-\nu}{\psi(\nu)}\Big)^{1-\frac{1}{p}} = \frac{\psi^{\frac{1}{p}}(\nu)}{(\eta(\nu)-\nu)^{\frac{1}{p}-1}} = \frac{\psi^{\frac{1}{p}}(\sigma+1)}{(\eta(\sigma+1)-\sigma-1)^{\frac{1}{p}-1}}.$$

Теорему доведено.

6.6.4. Доведення теореми 6.6.3 про порядкові оцінки величин $H_\sigma(\psi; p)$ у випадку, коли $\psi \in \mathfrak{M}_C$ і $p \in (1, \infty)$. При будь-яких $\nu > 1$ і $s > \nu$ розглянемо функцію $\widetilde{H}_\nu(s)$, яка означається рівністю

$$\widetilde{H}_\nu(s) = \frac{s-\nu}{\int\limits_1^s \frac{dt}{\psi^p(t)}}. \tag{6.166}$$

Її похідна для довільного $\nu > 1$ має вигляд

$$H'_\nu(s) = \frac{\int\limits_1^s \frac{dt}{\psi^p(t)} - (s-\nu)\psi^{-p}(s)}{\int\limits_1^s \frac{dt}{\psi^p(t)}}.$$

Нехай тепер s_ν — найбільше на проміжку (ν, ∞) число таке, що при всіх $s \in (\nu, s_\nu)$ виконується нерівність

$$s - \nu \leq \psi^p(s) \int\limits_1^s \frac{dt}{\psi^p(t)}. \tag{6.167}$$

Бачимо, що функція $H'(s)$ при переході аргумента s через число s_ν змінює знак з плюса на мінус. Тому точка s_ν є точкою максимуму функції $\widetilde{H}_\nu(s)$, і справджується рівність $H'_\nu(s_\nu) = 0$, із якої випливає, що

$$\widetilde{H}_\nu(s_\nu) = \frac{s_\nu - \nu}{\int\limits_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi^p(t)}} = \psi^p(s_\nu). \tag{6.168}$$

Покажемо, що, як і в теоремах 6.6.1 і 6.6.2, у даному випадку

$$\psi(s_\nu) \asymp \psi(\nu) \quad \text{при } \nu \to \infty. \tag{6.169}$$

Із співвідношення (6.168) випливає:

$$\int\limits_1^{\nu} \frac{dt}{\psi^p(t)} = \Phi(s_\nu),$$

де

$$\Phi(s) = \int\limits_{\nu}^{s} \Big(\frac{1}{\psi^p(s)} - \frac{1}{\psi^p(t)}\Big) dt. \tag{6.170}$$

Функція $\Phi(s)$ зростає при всіх $s > \nu$. Тому якщо при деякому s справджується нерівність

$$\int\limits_1^{\nu} \frac{dt}{\psi^p(t)} dt \le \Phi(s), \tag{6.171}$$

то буде виконуватися і співвідношення $s_\nu \le s$.

Розглянемо зростаючу послідовність чисел $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$ таких, що при будь-якому $k \in \mathbb{N}$ $\nu_k = \eta(\psi; \nu_{k-1})$, а $\nu_0 := \nu$. Оскільки функція ψ належить множині $\mathfrak{M}_C$, то внаслідок (6.7) для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ і $\nu \ge 1$ маємо

$$(K_1+1)^k - 1 \le \frac{\nu_k - \nu}{\nu} = \frac{\nu_k}{\nu_{k-1}} \cdot \frac{\nu_{k-1}}{\nu_{k-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{\nu_1}{\nu} - 1 \le (K_2+1)^k - 1, \tag{6.172}$$

і тому починаючи з деякого номера $k_0 \ge 1$ будемо мати $\nu_{k_0} - \nu > \nu$. Переконаємось, що при $s = \nu_{k_0+1}$ справджується співвідношення (6.171).

Згідно з означенням послідовності $\{\nu_k\}$

$$\frac{1}{\psi^p(\nu_{k_0+1})} - \frac{1}{\psi^p(\nu_{k_0})} = \frac{2^p - 1}{\psi^p(\nu_{k_0})} = \frac{2^{k_0}(2^p-1)}{\psi^p(\nu)} \ge \frac{1}{\psi^p(\nu)}.$$

Звідси, враховуючи монотонність функції ψ, отримуємо

$$\Phi(\nu_{k_0+1}) \ge \int\limits_{\nu}^{\nu_{k_0+1}} \Big(\frac{1}{\psi^p(\nu_{k_0+1})} - \frac{1}{\psi^p(t)}\Big) dt \ge$$

$$\ge \Big(\frac{1}{\psi^p(\nu_{k_0+1})} - \frac{1}{\psi^p(\nu_{k_0})}\Big)(\nu_{k_0} - \nu) \ge \frac{\nu}{\psi^p(\nu)} \ge \int\limits_1^{\nu} \frac{dt}{\psi^p(t)}.$$

Тобто, нерівність (6.171) при $s = \nu_{k_0+1}$ виконується, і отже, $s_\nu \le \nu_{k_0+1}$.

Тому із врахуванням монотонності функції ψ, маємо

$$\psi(\nu) \ge \psi(s_\nu) \ge \psi(\nu_{k+1}) = \psi(\nu)/2^{k_0+1},$$

тобто, дійсно співвідношення (6.169) виконується.

Покажемо тепер, що при $\nu \to \infty$

$$\int\limits_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi^p(t)} \asymp \frac{\nu-1}{\psi^p(\nu)}. \tag{6.173}$$

Маємо

$$\int\limits_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi^p(t)} = \int\limits_0^{s_\nu-1} \frac{dt}{\psi^p(t+1)} = \frac{s_\nu-1}{\psi^p(s_\nu)} - p\int\limits_0^{s_\nu-1} \frac{t|\psi'(t+1)|}{\psi^{p+1}(t+1)}dt \geq$$

$$\geq \frac{s_\nu-1}{\psi(s_\nu)} - p\int\limits_0^{s_\nu-1} \frac{dt}{\alpha(t+1)\psi^p(t+1)},$$

де $\alpha(t) = \alpha(\psi;t)$.

Оскільки $\psi \in \mathfrak{M}_C$, то внаслідок твердження 6.1.1, для будь-якого $t \geq 1$ справджується співвідношення

$$0 < K_3 \leq \alpha(\psi;t) = \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|} \leq K_4, \tag{6.174}$$

враховуючи яке отримуємо оцінки

$$\int\limits_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi^p(t)} \geq \frac{s_\nu-1}{\psi^p(s_\nu)} - \frac{p}{K_3}\int\limits_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi^p(t)}$$

і

$$\int\limits_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi^p(t)} \geq \frac{K_3}{K_3+p} \cdot \frac{s_\nu-1}{\psi^p(s_\nu)}.$$

З іншого боку, так як функція ψ спадає на $[1,\infty)$, то

$$\int\limits_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi^p(t)} \leq \frac{s_\nu-1}{\psi^p(s_\nu)},$$

тому

$$\int\limits_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi^p(t)} \asymp \frac{s_\nu-1}{\psi^p(s_\nu)}. \tag{6.175}$$

Оскільки $s_\nu \leq \nu_{k_0+1}$, то на підставі (6.172) робимо висновок, що

$$\nu - 1 \leq s_\nu - 1 \leq \nu_{k_0+1} - 1 \leq (K_2+1)^{k_0+1}\nu - 1,$$

і тому

$$s_\nu - 1 \asymp \nu - 1 \quad \text{при} \quad \nu \to \infty. \tag{6.176}$$

Об'єднуючи це співвідношення із співвідношеннями (6.169) і (6.175), отримуємо (6.173).

Для завершення доведення теореми переконаємось, що при $\nu \to \infty$

$$\int\limits_{s_\nu}^{\infty} \psi^{\,q}(t)\,dt \asymp (\nu - 1)\psi^{\,q}(\nu). \tag{6.177}$$

Для цього покажемо, що при $s \to \infty$

$$\int\limits_{s}^{\infty} \psi^{\,q}(t)\,dt \asymp (s - 1)\psi^{\,q}(s). \tag{6.178}$$

Внаслідок (6.174) існує стала $K_5 > 0$ така, що для будь-якого $t \geq 1$

$$\frac{\psi^q(t)}{t|(\psi^q(t))'|} \geq K_5.$$

Звідси випливає, що для будь-якого $s \geq 1$

$$\int\limits_{s}^{\infty} \psi^{\,q}(t)\,dt \geq -K_5 \int\limits_{s}^{\infty} t(\psi^q(t))'\,dt \geq -K_5 s \int\limits_{s}^{\infty} (\psi^q(t))'\,dt = K_5 s \psi^q(s). \tag{6.179}$$

Для оцінки останнього інтегралу зверху покладемо $s_0 = s$ і $s_k = \eta(\psi; s_{k-1})$, $k \in \mathbb{N}$. Тоді з огляду на монотонність функції ψ

$$\int\limits_{s}^{\infty} \psi^{\,q}(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \psi^{\,q}(t)\,dt \leq \sum_{k=0}^{\infty} \psi^{\,q}(s_k)(s_{k+1} - s_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi^{\,q}(s)}{2^{qk}}(s_{k+1} - s_k). \tag{6.180}$$

Далі, оскільки дана функція ψ задовольняє умови теореми 6.1.3, то при всіх $t \geq t_0$ справджується нерівність: $\eta'(\psi; t) \leq 2$. Тоді

$$\eta(\psi; \eta(\psi; t)) - \eta(\psi; t) = \int\limits_{t}^{\eta(\psi;t)} \eta'(\psi; \tau) d\tau \leq 2(\eta(\psi; t) - t).$$

Підставляючи цю оцінку в (6.180) і враховуючи (6.7), отримаємо

$$\int\limits_{s}^{\infty} \psi^{\,q}(t)\,dt \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi^{\,q}(s)}{2^{qk}}(s_{k+1} - s_k) \leq \psi^{\,q}(s)(\eta(\psi; s) - s) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{2^{qk}} \leq K_1 s \psi^{\,q}(s) \frac{2^{q-1}}{2^{q-1} - 1}.$$

Об'єднуючи цю оцінку з оцінкою (6.179), отримуємо (6.178). Покладаючи в (6.178) $s = s_\nu$ і враховуючи (6.169) та (6.176), бачимо, що дійсно при $\nu \to \infty$ справджується співвідношення (6.177).

Таким чином, на підставі (6.169), (6.173) і (6.177) при $\nu = \sigma + 1 \to \infty$ будемо мати

$$H_\sigma(\psi, p) = \Big((s^* - \sigma)^q \Big(\int\limits_1^{s^*+1} \frac{dt}{\psi^p(t)} \Big)^{-\frac{q}{p}} + \int\limits_{s^*+1}^{\infty} \psi^{\,q}(t)\, dt \Big)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \Big((s_\nu - \nu)^q \Big(\int\limits_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi^p(t)} \Big)^{-\frac{q}{p}} + \int\limits_{s_\nu}^{\infty} \psi^{\,q}(t)\, dt \Big)^{\frac{1}{q}} \asymp \Big(\psi^q(\nu)(\nu - 1) \Big)^{\frac{1}{q}} \asymp \psi(\sigma+1)\sigma^{\frac{1}{q}}$$

і співвідношення (6.142) доведено.

6.6.5. Доведення теореми 6.6.4 про порядкові оцінки величин $H_\sigma(\psi; p)$ у випадку, коли $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$ і $p \in (1, \infty)$. Доведення теореми 6.6.4 аналогічне доведенням теорем 6.6.1–6.6.3, тому відмітимо тільки його основні моменти.

Перед усім, повторюючи міркування доведення співвідношення (6.154), переконуємося, що для довільної функції ψ, яка задовольняє умови теореми 6.6.4, справджується точна порядкова при $s \to \infty$ оцінка

$$\int\limits_1^s \frac{dt}{\psi^p(t)} \asymp \frac{\eta(\psi; s) - s}{\psi^p(s)}. \tag{6.181}$$

Далі, розглянемо функцію $\widetilde{H}_\nu(s)$, яка означається рівністю (6.166), і зазначимо, що коли s_ν — найбільше на проміжку (ν, ∞) число таке, що при всіх $s \in (\nu, s_\nu)$ має місце нерівність (6.167), то точка $s = s_\nu$ є точкою максимуму функції $\widetilde{H}_\nu(s)$, і виконується рівність (6.168).

Покажемо, що, як і в усіх попередніх теоремах, в даному випадку

$$\psi(s_\nu) \asymp \psi(\nu) \ \text{ при } \nu \to \infty. \tag{6.182}$$

Із співвідношення (6.181) випливає, що для довільної функції ψ, яка задовольняє умови теореми, існує стала $K > 0$ така, що при всіх достатньо великих ν буде

$$\int\limits_1^\nu \frac{dt}{\psi^p(t)} \le K \frac{\eta(\psi; \nu) - \nu}{\psi^p(\nu)}. \tag{6.183}$$

Візьмемо число $k_0 = k_0(K) \in \mathbb{N}$ таке, що

$$\frac{2^{k_0} - 3}{K} \ge 1, \tag{6.184}$$

і розглянемо функцію $\Phi(s)$, яка задається рівністю (6.170). Покажемо, що при достатньо великих ν справджується нерівність

$$\int\limits_1^{\nu} \psi^p(t)dt \le \Phi(\nu_{k_0}), \quad \nu_k = \eta(\psi^p;\nu_{k-1}),\ k \in \mathbb{N},\ \nu_0 = \nu,$$

із якої буде випливати, що $s_\nu \le \nu_{k_0}$.

Внаслідок (6.183) та (6.184) маємо

$$\Phi(\nu_{k_0}) = \int\limits_{\nu}^{\nu_{k_0}} \Big(\frac{1}{\psi^p(\nu_{k_0})} - \frac{1}{\psi^p(t)}\Big)dt \ge (2^{k_0}-3)\frac{\eta(\nu)-\nu}{\psi^p(\nu)} \ge \frac{2^{k_0}-3}{K}\int\limits_1^{\nu}\frac{dt}{\psi^p(t)} \ge \int\limits_1^{\nu}\frac{dt}{\psi^p(t)}.$$

Тому дійсно $s_\nu \le \nu_{k_0}$ і отже,

$$\psi(\nu) \ge \psi(s_\nu) \ge \psi(\nu_{k_0}) = \frac{\psi(\nu)}{2^{k_0 p}},$$

тобто, $\psi(s_\nu) \asymp \psi(\nu)$.

Далі, аналогічно до доведення співвідношення (6.163), переконуємося, що при $\nu \to \infty$ справджується оцінка

$$\int\limits_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi^p(t)} \asymp \frac{\eta(\psi;\nu)-\nu}{\psi^p(\nu)}. \tag{6.185}$$

Для завершення доведення даної теореми покажемо, що при $\nu \to \infty$

$$\int\limits_{s_\nu}^{\infty} \psi^{\,q}(t)\,dt \asymp \psi^{\,q}(\nu)(\eta(\psi;\nu)-\nu). \tag{6.186}$$

Використовуючи формулу інтегрування частинами із врахуванням (6.20) і твердження 6.1.2 маємо

$$\int\limits_s^{\infty} \psi^{\,q}(t)\,dt = -s\psi(s) + q\int\limits_s^{\infty} t|\psi'(t)|\psi^{q-1}(t)dt \ge -s\psi(s) + \frac{q}{2}\int\limits_s^{\infty}\mu(\psi,t)\psi^q(t)dt, \tag{6.187}$$

звідки з огляду на монотонне зростання функції $\mu(\psi,t)$ отримуємо

$$\int\limits_s^{\infty} \psi^{\,q}(t)\,dt \le \frac{s\psi^q(s)}{\frac{q}{2}\mu(\psi,s)-1} \ge K_1\psi^{\,q}(s)(\eta(\psi;s)-s). \tag{6.188}$$

З іншого боку, оскільки ψ додатна і спадає, то

$$\int\limits_s^{\infty} \psi^{\,q}(t)\,dt \geq \int\limits_s^{\eta(\psi,s)} \psi^{\,q}(t)\,dt \geq \psi^{\,q}(\eta(\psi,s))(\eta(\psi,s)-s) = \frac{1}{2^q}\psi^{\,q}(s)(\eta(\psi,s)-s). \quad (6.189)$$

Об'єднуючи співвідношення (6.188) і (6.189), бачимо, що

$$\int\limits_s^{\infty} \psi^{\,q}(t)\,dt \asymp \psi^{\,q}(s)(\eta(\psi;s)-s), \quad s\to\infty. \quad (6.190)$$

Звідси внаслідок того, що $s_\nu > \nu$ маємо

$$\int\limits_{s_\nu}^{\infty} \psi^{\,q}(t)\,dt \leq \int\limits_{\nu}^{\infty} \psi^{\,q}(t)\,dt \asymp \psi^{\,q}(\nu)(\eta(\psi;\nu)-\nu). \quad (6.191)$$

З іншого боку $s_\nu \leq \nu_{k_0}$. Тому, враховуючи (6.28) і, як наслідок, співвідношення що

$$\eta(\psi;\eta(\psi;t))-\eta(\psi;t) = \int\limits_t^{\eta(\psi;t)} \eta'(\psi;\tau)d\tau \geq \frac{1}{2}(\eta(\psi;t)-t),$$

при $\nu\to\infty$ отримуємо

$$\int\limits_{s_\nu}^{\infty} \psi^{\,q}(t)\,dt \geq \int\limits_{\nu_{k_0}}^{\infty} \psi^{\,q}(t)\,dt \asymp \psi^{\,q}(\nu_{k_0})(\eta(\psi;\nu_{k_0})-\nu_{k_0}) \geq \frac{1}{2^{2k_0}}\psi^{\,q}(\nu)(\eta(\psi;\nu)-\nu). \quad (6.192)$$

Об'єднуючи (6.191) і (6.192), переконуємося, що дійсно справджується при $\nu\to\infty$ точна порядкова оцінка (6.186).

Таким чином, на підставі (6.182), (6.185) і (6.186) бачимо, що при $\nu=\sigma+1\to\infty$

$$H_\sigma(\psi;p) = \Big((s^*-\sigma)^q\Big(\int\limits_1^{s^*+1}\frac{dt}{\psi^p(t)}\Big)^{-\frac{q}{p}} + \int\limits_{s^*+1}^{\infty}\psi^{\,q}(t)\,dt\Big)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \Big((s_\nu-\nu)^q\Big(\int\limits_1^{s_\nu}\frac{dt}{\psi^p(t)}\Big)^{-\frac{q}{p}} + \int\limits_{s_\nu}^{\infty}\psi^{\,q}(t)\,dt\Big)^{\frac{1}{q}} \asymp$$

$$\asymp \Big(\psi^q(\nu)(\eta(\psi;\nu)-\nu)\Big)^{\frac{1}{q}} \asymp \psi(\sigma+1)(\eta(\psi;\sigma+1)-\sigma-1)^{\frac{1}{q}}$$

і співвідношення (6.142) доведено.

6.7 Оцінки величин, в термінах яких виражаються найкращі n-членні тригонометричні наближення

6.7.1. Нехай $\Psi = \Psi(k)$, $k = 1, 2, \ldots,$ — довільна незростаюча додатна числова послідовність, для якої

$$\lim_{k \to +\infty} \Psi(k) = 0. \tag{6.193}$$

В даному підрозділі вивчається поведінка при $n \to \infty$ величин $H_n(\Psi, s)$, котрі при $s \in (0, 1]$ задаються рівністю

$$H_n(\Psi; s) = \sup_{l > n} (l - n) \Big(\sum_{k=1}^{l} \Psi^{-s}(k) \Big)^{-\frac{1}{s}}, \tag{6.194}$$

а при $s \in (1, \infty)$ — рівністю

$$H_n(\Psi; s) = \Big((l_n - n)^{s'} \Big(\sum_{j=1}^{l} \Psi^{-s}(j) \Big)^{-s'/s} + \sum_{j=l_n+1}^{\infty} \Psi^{s'}(j) \Big)^{1/s'}, \tag{6.195}$$

в якій $1/s + 1/s' = 1$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \Psi^{s'}(j) < \infty, \tag{6.196}$$

а число l_n для кожного $n \in \mathbb{N}$ однозначно визначається співвідношенням

$$\Psi^{-s}(l_n) \leq \frac{1}{l_n - n} \sum_{j=1}^{l_n} \Psi^{-s}(j) < \Psi^{-s}(l_n + 1). \tag{6.197}$$

Величини $H_n(\Psi; s)$ є дискретними аналогами величин $H_\sigma(\psi, p)$, які досліджено в підрозділі 6.6. В їх термінах в підрозділі 1.2 даються точні значення найкращих n-членних наближень класів $\mathcal{F}^{\psi}_{q,r}$ в просторах $S^p(\mathbb{T}^d)$.

В даному підрозділі величини $H_n(\Psi; s)$ досліджуються у випадку, коли послідовності Ψ є східчастими, а впорядковані множини їх значень є слідами на множині натуральних чисел деяких додатних спадних до нуля функцій. Вибір саме таких послідовностей Ψ обумовлений подальшими застосуваннями отриманих результатів до оцінок вище згаданих величин.

Отже, нехай $d \in \mathbb{N}$; M, c_1 і c_2 — деякі додатні числа; $\nu = \{\nu_i\}_{i=0}^{\infty}$ — довільна зростаюча послідовність цілих невід'ємних чисел таких, що $\nu_0 := 0$, а при всіх m, більших ніж деяке число k_0, виконується умова

$$M(m - c_1)^d < V_m := \sum_{i=0}^{m} \nu_i \leq M(m + c_2)^d. \tag{6.198}$$

Тоді через $S_d(\nu, M) = S_d(\nu, M, c_1, c_2)$ позначимо множину всіх додатних незростаючих послідовностей $\Psi = \Psi(k)$, $k = 1, 2, \ldots$, які задовольняють умову (6.193) і зображуються у вигляді

$$\Psi(k) = \psi(m), \quad k \in (V_{m-1}, V_m], \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{6.199}$$

де ψ — спадна послідовність значень послідовності Ψ.

Будемо вважати послідовності ψ слідом на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$ деяких спадних додатних функцій $\psi(t)$ від неперервного аргументу $t \in [1, \infty)$. При цьому функції ψ будемо вибирати із множин B, $\mathfrak{M}'_\infty$, $\mathfrak{M}^c_\infty$ та $\mathfrak{M}''_\infty$, означення та деякі властивості яких наведено в підрозділі 6.2.

Нагадаємо, що множині B належать, зокрема, функції t^{-r}, $r > 0$; $t^{-r} \ln^\varepsilon(t + e)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$; $\ln^\varepsilon(t+e)$ при $\varepsilon < 0$, а множинам $\mathfrak{M}'_\infty$, $\mathfrak{M}^c_\infty$ і $\mathfrak{M}''_\infty$ — функції $\exp(-\alpha t^s)$, $\alpha > 0$, у випадках, коли $s \in (0, 1)$, $s = 1$ та $s > 1$ відповідно.

Мають місце наступні твердження.

Теорема 6.7.1 . *Нехай $s \in (0, \infty)$, послідовність Ψ належить множині $S_d(M_0)$, а послідовність її різних значень є слідом на множині натуральних чисел деякої функції ψ з множини B, а у випадку, коли $s \in (1, \infty)$, крім цього, при всіх t, більших ніж деяке число t_0, є опуклою і задовольняє умову*

$$\alpha(\psi, t) \le K_0 < s'/d, \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1, \ K_0 \equiv \text{const} \tag{6.200}$$

де величина $\alpha(\psi, t)$ визначається рівністю (6.10). *Тоді має місце точна порядкова оцінка*

$$H_n(\Psi; s) \asymp \frac{\psi(n^{\frac{1}{d}})}{n^{\frac{1}{s}-1}}. \tag{6.201}$$

Зазначимо, що для довільної функції $\Psi \in S_d(M_0)$ виконання умови (6.200) гарантує збіжність ряду в (6.196). Дійсно, в такому випадку при всіх $\tau \ge t_0$ маємо

$$\frac{|\psi'(\tau)|}{\psi(\tau)} \ge \frac{1}{K_0 \tau} > \frac{d}{s'\tau}.$$

Після інтегрування кожної частини даного співвідношення в межах від t_0 до t отримуємо співвідношення $\psi(t) \ll t^{-1/K_0} \ll t^{-d/s'}$, $t > t_0$, і тому із врахуванням співвідношення

$$\nu_k = V_k - V_{k-1} \asymp k^{d-1}, \tag{6.202}$$

яке випливає із (6.198), приходимо до висновку, що

$$\sum_{j=1}^{\infty}\Psi^{s'}(j)=\sum_{k=1}^{\infty}\nu_k\psi^{s'}(k)\ll\sum_{k=1}^{\infty}k^{d-1}\psi^{s'}(k)\ll\int\limits_{1}^{\infty}t^{d-1}\cdot t^{-s'/K_0}dt<\infty.$$

Теорема 6.7.2 . *Нехай $s\in(0,\infty)$, функція Ψ належить множині $S_d(\nu,M)$, а послідовність її значень є слідом на множині натуральних чисел деякої функції ψ з множини $\mathfrak{M}'_\infty$ або $\mathfrak{M}^c_\infty$. Тоді*

$$H_n(\Psi;s)\asymp\frac{\psi(m_n)}{(n\alpha(\psi,m_n))^{\frac{1}{s}-1}},\tag{6.203}$$

де величина $\alpha(\psi,t)$ визначається рівністю (6.10), а

$$m_n:=(n/M)^{\frac{1}{d}}.\tag{6.204}$$

Теорема 6.7.3 . *Нехай $s\in(1,\infty)$, $m\in\mathbb{N}$, функція Ψ належить множині $S_d(\nu,M)$, а послідовність її значень є слідом на множині натуральних чисел деякої функції ψ з множини $\mathfrak{M}''_\infty$, яка при $\alpha=1$ задовольняє умову*

$$k^{(d-1)/\alpha}\psi(k+1)/\psi(k)\to 0,\quad k\to\infty.\tag{6.205}$$

Тоді при всіх $n\in[V_{m-1},V_m)$ має місце оцінка

$$H_n(\Psi,s)\asymp\psi(m)\frac{V_m-n}{n^{\frac{d-1}{sd}}}.\tag{6.206}$$

Зазначимо, що у випадку, коли для послідовності $\Psi\in S_d(M)$ послідовність її різних значень є слідом на множині натуральних чисел деякої функції ψ, що задовольняє умову (6.37), ряд в (6.196) збігається. Дійсно, в такому випадку внаслідок теореми 6.1.2 для довільного $\beta>0$ маємо $\psi(t)\ll t^{-\beta}$ і тому

$$\sum_{j=1}^{\infty}\Psi^{s'}(j)=\sum_{k=1}^{\infty}\nu_k\psi^{s'}(k)\ll\sum_{k=1}^{\infty}k^{d-1}\psi^{s'}(k)\ll\sum_{k=1}^{\infty}k^{d-1}k^{-s'\beta}<\infty.$$

Зауваження 6.7.1 . Якщо виконуються умови теореми 6.7.3 і $n\in[V_{m-1},V_m)$, то внаслідок (6.198) маємо

$$(V_m-V_{m-1})\asymp m^{d-1}\asymp n^{\frac{d-1}{d}}.\tag{6.207}$$

Тому при всіх $n \in [V_{m-1}, V_m)$ виконується співвідношення

$$\frac{\psi(m)}{n^{\frac{d-1}{sd}}} \ll H_n(\Psi, s) \ll \psi(m) n^{\frac{d-1}{d}(1-\frac{1}{s})}. \tag{6.208}$$

У випадку, коли $s \in (0, 1]$, має місце наступне твердження.

Теорема 6.7.4 . *Нехай $s \in (0, 1]$, $m \in \mathbb{N}$, функція Ψ належить множині $S_d(\nu, M)$, а послідовність її значень є слідом на множині натуральних чисел деякої функції ψ з множини $\mathfrak{M}''_\infty$, яка задовольняє умову* (6.205) *при $\alpha = s$. Тоді*

1) при $n = V_{m-1}$ справджується оцінка

$$H_n(\Psi, s) \asymp \psi(m); \tag{6.209}$$

2) для всіх $n \in (V_{m-1}, V_m)$ таких, що

$$s(V_m - V_{m-1}) \geq V_m - n, \tag{6.210}$$

справджується оцінка (6.206)*;*

3) для всіх $n \in (V_{m-1}, V_m)$, що не задовольняють умову (6.210),

$$H_n(\Psi, s) \asymp \frac{\psi(m)}{(n - V_{m-1})^{\frac{1}{s}-1}}. \tag{6.211}$$

6.7.2. Доведення теореми 6.7.1 про порядкові оцінки величин $H_n(\Psi; s)$ у випадку, коли множина значень послідовності Ψ є слідом на множині $\mathbb{N}$ функції $\psi \in B$. Нехай спочатку $s \in (0, 1]$. Для довільного $l \in \mathbb{N}$ через k_l позначимо номер такий, що

$$V_{k_l - 1} < l \leq V_{k_l}. \tag{6.212}$$

Тоді внаслідок (6.199) величини $H_n(\Psi; s)$ можна подати у вигляді

$$H_n(\Psi; s) = \sup_{l>n} (l - n) \Big(\sum_{j=1}^{l} \frac{1}{\Psi^s(j)} \Big)^{-\frac{1}{s}} =$$

$$= \sup_{l>n} (l - n) \Big(\sum_{k=1}^{k_l - 1} \frac{\nu_k}{\psi^s(k)} + \frac{l - \sum\limits_{k=1}^{k_l-1} \nu_k}{\psi^s(k_l)} \Big)^{-\frac{1}{s}} =: \widetilde{H}_n(\Psi; s). \tag{6.213}$$

Внаслідок (6.198) при всіх $l > n \geq k_0$ маємо

$$(l/M_0)^{\frac{1}{d}} - c_2 \leq k_l < (l/M_0)^{\frac{1}{d}} + c_1 + 1. \tag{6.214}$$

Із співвідношення (6.202) випливає

$$\sum_{k=1}^{l}\frac{\nu_k}{\psi^s(k)}\asymp\sum_{k=1}^{l}\frac{k^{d-1}}{\psi^s(k)} \tag{6.215}$$

Далі, якщо $\psi\in B$, то для довільного $l=2,3,\ldots$ маємо

$$\frac{l^d}{\psi^s(l)}\ll\frac{(l/2)^d}{\psi^s(l/2)}\ll\sum_{l/2\le k\le l}\frac{k^{d-1}}{\psi^s(k)}\le\sum_{k=1}^{l}\frac{k^{d-1}}{\psi^s(k)}\le\frac{l^d}{\psi^s(l)},$$

тому із врахуванням (6.215)

$$\sum_{k=1}^{l}\frac{\nu_k}{\psi^s(k)}\asymp\frac{l^d}{\psi^s(l)}. \tag{6.216}$$

У співвідношенні (6.213) число k_l задовольняє умову (6.212). Тому на підставі (6.214) та означення множини B робимо висновок, що

$$\psi(k_l)\asymp\psi((l/M_0)^{\frac{1}{d}})\asymp\psi(l^{\frac{1}{d}}).$$

і з огляду на (6.216),

$$\widetilde{H}_n(\psi;s)\asymp\sup_{l>n}(l-n)\Big(\frac{k_l^d}{\psi^s(k_l)}\Big)^{-\frac{1}{s}}\asymp\sup_{l>n}\Big(\psi(l^{\frac{1}{d}})\frac{l-n}{l^{1/s}}\Big). \tag{6.217}$$

Внаслідок монотонного спадання функції ψ маємо

$$\widetilde{H}_n(\psi;s)\ll\psi(n^{\frac{1}{d}})\sup_{l>n}\frac{l-n}{l^{1/s}}. \tag{6.218}$$

Функція $h(x)=h(x,s)=\dfrac{x-n}{x^{1/s}}$ при $x>0$, $n\in\mathbb{N}$ та $s\in(0,1)$ набуває свого найбільшого значення в точці $x_0=n/(1-s)$ і

$$h(x_0,s)=s\Big(\frac{1-s}{n}\Big)^{\frac{1-s}{s}}. \tag{6.219}$$

Якщо ж $r=1$, то функція $h(x)=h(x;1)$, не спадаючи, прямує до 1 при $x\to+\infty$. Звідси

$$\sup_{x>0}h(x;1)=\sup_{x>0}\frac{x-n}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-n}{x}=1. \tag{6.220}$$

Об'єднуючи співвідношення (6.218)–(6.220), отримуємо необхідну оцінку зверху для величин $H_n(\Psi;s)$:

$$H_n(\Psi;s)=\widetilde{H}_n(\psi;s)\ll\frac{\psi(n^{\frac{1}{d}})}{n^{\frac{1}{s}-1}}.$$

На підставі (6.217) і того, що $\psi \in B$, ми отримуємо також і оцінку знизу:

$$H_n(\Psi; s) = \widetilde{H}_n(\psi; s) \asymp \sup_{l>n} \left(\psi(l^{\frac{1}{d}}) \frac{l-n}{l^{1/s}} \right) \geq$$

$$\geq \psi((2n)^{\frac{1}{d}}) \frac{2n-n}{(2n)^{1/s}} \asymp \frac{\psi(n^{\frac{1}{d}})}{n^{\frac{1}{s}-1}}.$$

Розглянемо тепер випадок $s \in (1, \infty)$. Для спрощення записів покладемо

$$Q_n(\Psi, l) := (l-n) \Big(\sum_{j=1}^{l} \Psi^{-s}(j) \Big)^{-1}, \ \ l \geq n, \ l \in \mathbb{N}.$$

Оскільки для довільного $l > n$ виконуються співвідношення

$$Q_n(\Psi, l+1) - Q_n(\Psi, l) = \Big(\Psi^s(l+1) - Q_n(\Psi, l) \Big) \Psi^{-s}(l+1) \Big(\sum_{i=1}^{l+1} \Psi^{-s}(i) \Big)^{-1}$$

і

$$\Psi^s(l+1) - Q_n(\Psi, l+1) = \Big(\Psi^s(l+1) - Q_n(\Psi, l) \Big) \sum_{j=1}^{l} \Psi^{-s}(j) \Big(\sum_{i=1}^{l+1} \Psi^{-s}(i) \Big)^{-1},$$

то враховуючи монотонність функції Ψ та означення числа l_n (співвідношення (6.197)), приходимо до висновку, що при всіх $l \geq l_n$

$$Q_n(\Psi, l) > Q_n(\Psi, l+1) > \Psi^s(l+1),$$

а при всіх $l \in [n, l_n)$ —

$$Q_n(\Psi, l) \leq Q_n(\Psi, l+1) \leq \Psi^s(l+1).$$

Звідси випливає, що

$$Q_n(\Psi, l_n) = \sup_{l>n} Q_n(\Psi, l). \tag{6.221}$$

Крім того, внаслідок (6.197) маємо $\Psi(l_n + 1) > \Psi(l_n)$, і тому, якщо функція $\Psi(t)$ задається у вигляді (6.199), то при деякому $k_{l_n} \in \mathbb{N}$ справджується рівність

$$l_n = V_{k_{l_n}} = \sum_{i=0}^{k_{l_n}} \nu_i. \tag{6.222}$$

В такому випадку величини $H_n(\Psi; s)$, $s \in (1, \infty)$, можна подати у вигляді

$$H_n(\Psi; s) = \Big((l_n - n)^{s'} \Big(\sum_{k=1}^{k_{l_n}} \frac{\nu_k}{\psi^s(k)} \Big)^{-s'/s} + \sum_{k=k_{l_n}+1}^{\infty} \nu_k \psi^{s'}(k) \Big)^{1/s'} := \widetilde{H}_n(\psi; s), \tag{6.223}$$

де число l_n визначається співвідношенням

$$\psi^{-s}(k_{l_n}) \leq \frac{1}{l_n - n} \sum_{j=1}^{k_{l_n}} \frac{\nu_k}{\psi^s(k)} < \psi^{-s}(k_{l_n}+1). \tag{6.224}$$

При цьому функція

$$\widetilde{Q}_n(\psi, l) := (l-n)\Big(\sum_{k=1}^{k_l-1} \frac{\nu_k}{\psi^s(k)} + \frac{l - V_{k_l-1}}{\psi^s(k_l)}\Big)^{-1}, \tag{6.225}$$

де число k_l визначається співвідношенням (6.212), внаслідок (6.221) задовольняє співвідношення

$$\sup_{l>n} \widetilde{Q}_n(\psi, l) = \widetilde{Q}_n(\psi, l_n) = (l_n - n)\Big(\sum_{k=1}^{k_{l_n}} \frac{\nu_k}{\psi^s(k)}\Big)^{-1}. \tag{6.226}$$

Далі, якщо $\psi \in B$, то аналогічно до випадку $s \in (0,1]$ переконуємось, що

$$\sum_{k=1}^{l} \frac{\nu_k}{\psi^s(k)} \asymp \frac{l^d}{\psi^s(l)} \tag{6.227}$$

і

$$\widetilde{Q}_n(\psi, l_n) = \sup_{l>n} \widetilde{Q}_n(\psi, l) \asymp \psi^s(n^{\frac{1}{d}}), \tag{6.228}$$

звідки внаслідок (6.224) отримуємо

$$\psi(k_{l_n}) \asymp \psi(n^{\frac{1}{d}}). \tag{6.229}$$

Із співвідношення (6.200) випливає, що при всіх $t > t_0$

$$\frac{1}{t} \leq K_0 \frac{|\psi'(t)|}{\psi(t)}.$$

Інтегруючи ліву і праву частину цієї нерівності в межах від деякого числа m_0 до k_{l_n}, $t_0 < m_0 < k_{l_n}$, отримуємо

$$\ln \frac{k_{l_n}}{m_0} \leq K_0 \ln \frac{\psi(m_0)}{\psi(k_{l_n})}. \tag{6.230}$$

Покладаючи $m_0 = (n/M_0)^{\frac{1}{d}} - c_2$, внаслідок (6.222) та (6.214) приходимо до висновку, що $m_0 < k_{l_n}$. Тому на підставі означення множини B, співвідношень (6.230) та (6.229) отримуємо, що

$$k_{l_n} \asymp n^{\frac{1}{d}}. \tag{6.231}$$

Внаслідок (6.202) і того, що $\psi \in B$, для довільного натурального l одержуємо

$$\sum_{k=l+1}^{\infty} \nu_k \psi^s(k) \gg \sum_{k=l+1}^{2l} k^{d-1}\psi^s(k) \gg l^d \psi^s(l). \tag{6.232}$$

Похідна функції $h(t) = t^{d-1}\psi^{s'}(t)$ при $t > t_0$ має вигляд

$$h'(t) = s'\psi^{s'}(t)t^{d-2}\Big(\frac{d-1}{s'} - \frac{t|\psi'(t)|}{\psi(t)}\Big).$$

Звідси враховуючи (6.200), бачимо, що функція $h(t)$ при $t > t_0$ спадає і тому з огляду на (6.202) отримуємо

$$\sum_{k=l+1}^{\infty} \nu_k \psi^{s'}(k) \ll \sum_{k=l+1}^{\infty} k^{d-1}\psi^{s'}(k) \ll \int\limits_{l}^{\infty} t^{d-1}\psi^{s'}(t)dt. \tag{6.233}$$

Внаслідок (6.199), (6.202) та (6.196)

$$\sum_{j=1}^{\infty} \Psi^{s'}(j) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \psi^{s'}(k) \asymp \sum_{k=1}^{\infty} k^{d-1}\psi^{s'}(k) < \infty. \tag{6.234}$$

Тому звідси оскільки функція $h(t)$ монотонна, випливає, що $\dfrac{k^{d-1}\psi^{s'}(k)}{1/k} = k^d\psi^{s'}(k) \to 0$ при $k \to \infty$.

Далі, використовуючи (6.200) і метод інтегрування частинами, будемо мати

$$\int\limits_{l}^{\infty} t^{d-1}\psi^{s'}(t)dt \le K_0 \int\limits_{l}^{\infty} t^d \psi^{s'-1}(t)|\psi'(t)|dt =$$

$$= \frac{K_0}{s'} t^d \psi^{s'}(t) + \frac{K_0 d}{s'} \int\limits_{l}^{\infty} t^{d-1}\psi^{s'}(t)dt. \tag{6.235}$$

Враховуючи (6.200), із співвідношень (6.235) та (6.275) отримуємо оцінку

$$\sum_{k=l+1}^{\infty} \nu_k \psi^{s'}(k) \ll l^d \psi^{s'}(l), \tag{6.236}$$

яка разом із (6.232) доводить співвідношення

$$\sum_{k=l+1}^{\infty} \nu_k \psi^{s'}(k) \asymp \sum_{k=l+1}^{\infty} k^{d-1}\psi^{s'}(k) \asymp l^d \psi^{s'}(l). \tag{6.237}$$

Таким чином, об'єднуючи співвідношення (6.223), (6.227)–(6.229), (6.237) та (6.231) отримуємо оцінку (6.201):

$$H_n(\Psi; s) = \widetilde{H}_n(\psi; s) \asymp \left(\psi^{rs'}(n^{\frac{1}{d}}) \cdot \left(n/\psi^s(n^{\frac{1}{d}})\right)^{(1-\frac{1}{s})s'} + n\psi^{s'}(n^{\frac{1}{d}})\right)^{1/s'} \asymp$$

$$\asymp \psi(n^{\frac{1}{d}})n^{\frac{1}{s'}} \asymp \psi(n^{\frac{1}{d}})n^{1-\frac{1}{s}}.$$

6.7.3. Доведення теореми 6.7.2 про порядкові оцінки величин $H_n(\Psi; s)$ у випадку, коли множина значень послідовності Ψ є слідом на множині $\mathbb{N}$ функції ψ з множини $\mathfrak{M}'_\infty$ або $\mathfrak{M}^c_\infty$. Розглянемо випадок, коли $s \in (0, 1]$. Як і при доведенні теореми 6.7.1, внаслідок (6.199) величини $H_n(\Psi; s)$ можна подати у вигляді (6.213). При цьому мають місце співвідношення (6.212)–(6.215).

Оскільки функція

$$f(t) = f(\psi, t) := \frac{\psi^s(t)}{t^{d-1}}, \quad t \geq 1, \tag{6.238}$$

монотонно спадає, то для довільного $l \in \mathbb{N}$,

$$\int\limits_1^l \frac{t^{d-1}dt}{\psi^s(t)} \leq \sum_{k=1}^{l} \frac{k^{d-1}}{\psi^s(k)} \leq \int\limits_1^{l+1} \frac{t^{d-1}dt}{\psi^s(t)}. \tag{6.239}$$

Спочатку покажемо, що для довільної функції ψ з множин $\mathfrak{M}'_\infty$ чи $\mathfrak{M}^c_\infty$ має місце співвідношення

$$\sum_{k=1}^{l} \frac{k^{d-1}}{\psi^s(k)} \asymp \int\limits_1^l \frac{t^{d-1}dt}{\psi^s(t)} \asymp \frac{l^d\alpha(\psi, l)}{\psi^s(l)}. \tag{6.240}$$

Для будь-якого $t \geq 1$ маємо

$$f'(t) = \left(\frac{\psi^s(t)}{t^{d-1}}\right)' = -\frac{\psi^s(t)}{t^{d-1}}\left(s\frac{|\psi'(t)|}{\psi(t)} + \frac{d-1}{t}\right), \tag{6.241}$$

і

$$\frac{|f'(t)|}{f(t)} = s\frac{|\psi'(t)|}{\psi(t)} + \frac{d-1}{t}. \tag{6.242}$$

Звідси випливає, що для довільної функції $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty$ функція $f(t)=f(\psi, t)$ також належить множині $\mathfrak{M}'_\infty$.

Оскільки для довільного $l > 1$,

$$\int\limits_1^l \frac{t^{d-1}dt}{\psi^s(t)} = \int\limits_1^l \frac{dt}{f(t)} = \frac{l}{f(l)} - \frac{1}{f(1)} - \int\limits_1^l \frac{dt}{\alpha(f; t)f(t)}, \tag{6.243}$$

то, враховуючи монотонне спадання до нуля величини $\alpha(f;t)=f(t)/(t|f'(t)|)$, отримуємо

$$\int\limits_1^l \frac{dt}{f(t)} \geq \frac{\alpha(f;l)}{1+\alpha(f;l)}\Big(\frac{l}{f(l)} - \frac{1}{f(1)}\Big) \gg \frac{l\alpha(f,l)}{f(l)}. \qquad (6.244)$$

З іншого боку, оскільки $f \in \mathfrak{M}'_\infty$, то функція $f(t)/|f'(t)|$ зростає. Тому

$$\int\limits_1^l \frac{dt}{f(t)} = \int\limits_1^l \Big(\frac{|f'(t)|}{f^2(t)} \cdot \frac{f(t)}{|f'(t)|}\Big)dt \leq$$

$$\leq \frac{f(l)}{|f'(l)|}\int\limits_1^l \frac{|f'(t)|}{f^2(t)}dt \asymp \frac{1}{|f\,'(l)|} = \frac{l\alpha(f,l)}{f(l)}. \qquad (6.245)$$

Крім того, внаслідок означення множини $\mathfrak{M}'_\infty$ та (6.242),

$$\frac{1}{\alpha(f,l)} = \frac{l|f'(l)|}{f(l)} = s\frac{l|\psi'(l)|}{\psi(l)} + d - 1 \asymp \frac{l|\psi'(l)|}{\psi(l)} \asymp \frac{1}{\alpha(\psi,l)}. \qquad (6.246)$$

На підставі (6.244)–(6.246) бачимо, що

$$\int\limits_1^l \frac{t^{d-1}dt}{\psi_1^s(t)} = \int\limits_1^l \frac{dt}{f(t)} \asymp \frac{l\alpha(f,l)}{f(l)} \asymp \frac{l^d\alpha(\psi,l)}{\psi^s(l)}. \qquad (6.247)$$

Об'єднуючи співвідношення (6.247) та (6.239) і враховуючи твердження 6.2.4 та 6.2.5, робимо висновок, що у випадку, коли $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty$, дійсно має місце співвідношення (6.240).

Нехай тепер $\psi \in \mathfrak{M}^c_\infty$. В силу означення множини $\mathfrak{M}^c_\infty$ для функції $f(t) = f(\psi,t)$, вигляду (6.238) величина $\alpha(f;t) = f(t)/(t|f'(t)|)$ монотонно спадає до нуля при $t \to \infty$ і

$$K_7 \leq \frac{|f'(t)|}{f(t)} \leq K_8.$$

Звідси випливає

$$\int\limits_1^l \frac{t^{d-1}dt}{\psi^s(t)} = \int\limits_1^l \frac{dt}{f(t)} \leq \frac{1}{K_7}\int\limits_1^l \frac{|f'(t)|}{f^2(t)}dt \asymp \frac{1}{f(l)} = \frac{l^{d-1}}{\psi^s(l)} \qquad (6.248)$$

З іншого боку внаслідок (6.239) маємо

$$\int\limits_1^{l+1} \frac{t^{d-1}dt}{\psi^s(t)} \geq \sum_{k=1}^{l} \frac{k^{d-1}}{\psi^s(k)} \geq \frac{l^{d-1}}{\psi^s(l)}. \qquad (6.249)$$

Об'єднуючи співвідношення (6.239), (6.248) та (6.249) і враховуючи твердження 6.2.4, отримуємо

$$\sum_{k=1}^{l}\frac{k^{d-1}}{\psi^s(k)} \asymp \int\limits_1^l \frac{t^{d-1}dt}{\psi^s(t)} \asymp \frac{l^{d-1}}{\psi^s(l)}. \tag{6.250}$$

Звідки внаслідок означення множини $\mathfrak{M}_\infty^c$ робимо висновок, що і в цьому випадку має місце співвідношення (6.240).

Далі, для довільного фіксованого $c>0$, достатньо великих $n\in\mathbb{N}$ і $l\ge n$, розглянемо функцію

$$W_n(l,c) := (l-n)\Big(\int\limits_1^{k(l)} \frac{t^{d-1}dt}{\psi^s(t)}\Big)^{-\frac{1}{s}}. \tag{6.251}$$

де

$$k(l)=k(l,c) := (l/M)^{\frac{1}{d}}+c. \tag{6.252}$$

В силу (6.239), (6.213)–(6.215), маємо

$$\sup_{l>n,\, l\in\mathbb{N}} W_n(l,c_1+2) \ll \widetilde{H}_n(\Psi;s) \ll \sup_{l\ge n} W_n(l,-c_2-1). \tag{6.253}$$

Функція $W_n(l,c)$ є неперервно диференційовною, $W_n(n,c)=0$ і $W_n(l,c)>0$ при $l>n$. Крім того, внаслідок монотонного спадання до нуля функції $f(\psi,t)$ бачимо, що

$$W_n(l,c)\le l\Big(\int\limits_{k(l)/2}^{k(l)} \frac{t^{d-1}dt}{\psi^s(t)}\Big)^{-\frac{1}{s}} \le \frac{l}{(\frac{k(l)}{2})^{\frac{d}{s}}}\psi\Big(\frac{k(l)}{2}\Big)\underset{l\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Тому існує принаймні одна точка l_n, $l_n>n$, яка є точкою максимуму функції $W_n(l,c)$.

При всіх $l>n$ похідна функції $W_n(l,c)$ існує і має вигляд

$$W_n'(l,c)=\Big(\int\limits_1^{k(l)} \frac{t^{d-1}dt}{\psi^s(t)} - \frac{k^{d-1}(l)}{s\psi^s(k(l))}\cdot\frac{l-n}{dM^{\frac{1}{d}}l^{1-\frac{1}{d}}}\Big)\Big(\int\limits_1^{k(l)} \frac{t^{d-1}dt}{\psi^s(t)}\Big)^{\frac{-s-1}{s}}, \tag{6.254}$$

де

$$\lim_{l\to\infty}\frac{k^{d-1}(l)}{l^{1-\frac{1}{d}}} = \lim_{l\to\infty}\Big(\frac{(l/M)^{\frac{1}{d}}+c}{l^{\frac{1}{d}}}\Big)^{d-1} = M^{\frac{1-d}{d}}.$$

При цьому оскільки в точці максимуму l_n $W_n'(l_n,c)=0$, то із співвідношення (6.254) випливає

$$(l_n-n)\Big(\int\limits_1^{k(l_n)} \frac{t^{d-1}dt}{\psi^s(t)}\Big)^{-1} = dsM^{\frac{1}{d}}\frac{\psi^s(k(l_n))l_n^{1-\frac{1}{d}}}{k^{d-1}(l_n)} \asymp \psi^s(k(l_n)). \tag{6.255}$$

Таким чином, на підставі (6.247) та (6.255) отримуємо

$$\sup_{l\geq n} W_n(l,c) = W_n(l_n,c) = \frac{l_n - n}{\int_1^{k(l_n)} \frac{t^{d-1}dt}{\psi^s(t)}} \cdot \Big(\int\limits_1^{k(l_n)} \frac{t^{d-1}dt}{\psi^s(t)} \Big)^{1-\frac{1}{s}} \asymp$$

$$\asymp \psi^s(k(l_n)) \Big(\frac{k^d(l_n)\alpha(\psi;k(l_n))}{\psi^s(k(l_n))} \Big)^{1-\frac{1}{s}} = \frac{\psi(k(l_n))}{(k^d(l_n)\alpha(\psi;k(l_n)))^{\frac{1}{s}-1}}. \tag{6.256}$$

У цьому співвідношенні внаслідок того, що $l_n \geq n$ маємо

$$\frac{\psi(k(l_n))}{(k^d(l_n)\alpha(\psi;k(l_n)))^{\frac{1}{s}-1}} \leq \sup_{l\geq n} \frac{\psi(k(l))}{(k^d(l)\alpha(\psi;k(l)))^{\frac{1}{s}-1}}. \tag{6.257}$$

Далі, якщо функція ψ належить множині $\mathfrak{M}'_\infty$, то величина

$$\frac{\psi(k(l))}{(k^d(l)\alpha(\psi;k(l)))^{\frac{1}{s}-1}} = \psi(k(l)) \Big(k^{d-1}(l) \frac{\psi(k(l))}{|\psi'(k(l))|} \Big)^{-(\frac{1}{s}-1)}$$

монотонно спадає до нуля при $l \to \infty$. Звідси, враховуючи твердження 6.2.4 та 6.2.5 і позначення (6.252) та (6.204), отримуємо

$$\sup_{l\geq n} \frac{\psi(k(l))}{(k^d(l)\alpha(\psi;k(l)))^{\frac{1}{s}-1}} = \frac{\psi(k(n))}{(k^{d-1}(n)\frac{\psi(k(n))}{|\psi'(k(n))|})^{\frac{1}{s}-1}} \asymp \frac{\psi(m_n)}{(n\alpha(\psi;m_n))^{\frac{1}{s}-1}} \tag{6.258}$$

Якщо ж $\psi \in \mathfrak{M}^c_\infty$, то із врахуванням тверджень 6.2.4 та 6.2.5 і позначень (6.252) та (6.204), отримуємо

$$\sup_{l\geq n} \frac{\psi(k(l))}{(k^d(l)\alpha(\psi;k(l)))^{\frac{1}{s}-1}} \asymp \sup_{l\geq n} \frac{\psi(k(l))}{(k^{d-1}(l))^{\frac{1}{s}-1}} =$$

$$= \frac{\psi(k(n))}{(k^{d-1}(n))^{\frac{1}{s}-1}} \asymp \frac{\psi(m_n)}{(n\alpha(\psi;m_n))^{\frac{1}{s}-1}} \tag{6.259}$$

Таким чином, якщо функція ψ належить одній із множин $\mathfrak{M}'_\infty$ або $\mathfrak{M}^c_\infty$, то внаслідок (6.256)–(6.259) для довільного фіксованого $c \in \mathbb{R}$

$$\sup_{l\geq n} W_n(l,c) \ll \frac{\psi(m_n)}{(n\alpha(\psi;m_n))^{\frac{1}{s}-1}}. \tag{6.260}$$

і з огляду на (6.253), отримуємо необхідну оцінку зверху в співвідношенні (6.201)

$$H_n(\Psi;s) = \widetilde{H}_n(\psi;s) \leq \sup_{l\geq n} W_n(l,-c_2-1) \ll \frac{\psi(m_n)}{(n\alpha(\psi;m_n))^{\frac{1}{s}-1}} \tag{6.261}$$

Знайдемо також оцінку знизу для величин $\widetilde{H}_n(\Psi;s)$. Внаслідок (6.240) та (6.247) маємо

$$W_n(l,c) \gg (l-n)\Big(\frac{k^d(l)\alpha(\psi;k(l))}{\psi^s(k(l))}\Big)^{-\frac{1}{s}} \asymp \frac{\psi(k(l))(l-n)}{\big(k^d(l)\alpha(\psi;k(l))\big)^{\frac{1}{s}}}, \tag{6.262}$$

де число $k(l)$ визначається співвідношенням (6.252).

З огляду на твердження 6.2.4 та 6.2.5 звідси випливає, що для довільного $c \in \mathbb{R}$,

$$W_n(l,c) \gg \frac{\psi((l/M)^{\frac{1}{d}})(l-n)}{\Big(l\alpha(\psi;(l/M)^{\frac{1}{d}})\Big)^{\frac{1}{s}}} =: R_n(l). \tag{6.263}$$

Внаслідок (6.253) та (6.263)

$$\widetilde{H}_n(\psi;s) \geq \sup_{l>n,\, l\in\mathbb{N}} W_n(l,c_1+2) \gg \sup_{l\in\mathbb{N},\, l>n} R_n(l) \geq R_n(l_*), \tag{6.264}$$

де l_* — довільне натуральне число, $l_* > n$.

Розглянемо функцію

$$g(t) = g(\psi;t) := \psi((t/M)^{\frac{1}{d}}), \quad (t/M)^{\frac{1}{d}} \geq 1. \tag{6.265}$$

Легко бачити, що для довільної функції ψ з множини $\mathfrak{M}'_\infty$ або $\mathfrak{M}^c_\infty$ функція $g(\psi;t)$ належить множині $\mathfrak{M}^+_\infty$. На підставі зауваження 6.2.1

$$\eta(g;t) - t \asymp \frac{g(t)}{|g'(t)|} = dM^{\frac{1}{d}} \frac{\psi((t/M)^{\frac{1}{d}})}{|\psi'((t/M)^{\frac{1}{d}})|} \cdot t^{1-\frac{1}{d}} \asymp t\alpha(\psi;(t/M)^{\frac{1}{d}}). \tag{6.266}$$

Покладемо $l_* = ([\eta(g;n)]+1) \in \mathbb{N}$. Внаслідок тверджень 6.2.4 та 6.2.5

$$R_n(l_*) \gg \frac{\psi((\eta(g;n)/M)^{\frac{1}{d}})(\eta(g;n)-n)}{(\eta(g;n)\alpha(\psi;(\eta(g;n)/M)^{\frac{1}{d}}))^{\frac{1}{s}}}.$$

Враховуючи співвідношення (6.265),(6.266), зауваження 6.2.1 і означення величин $g(\psi;t)$, $\eta(g;t)$ та m_n, отримуємо

$$R_n(l_*) \gg \frac{g(n)(\eta(g;n)-n)}{(\,\eta(g;\eta(g;n)) - \eta(g;n))\,)^{\frac{1}{s}}} \gg$$

$$\gg \frac{g(n)}{(\eta(g;n)-n))^{\frac{1}{s}-1}} \gg \frac{\psi(m_n)}{(n\alpha(\psi;m_n)\,)^{\frac{1}{s}-1}}. \tag{6.267}$$

Об'єднуючи співвідношення (6.264) та (6.267), отримуємо необхідну оцінку знизу:

$$H_n(\Psi;s) = \widetilde{H}_n(\psi;s) \gg \frac{\psi(m_n)}{(n\alpha(\psi;m_n)\,)^{\frac{1}{s}-1}}. \tag{6.268}$$

Розглянемо тепер випадок, коли $s \in (1, \infty)$. При доведенні теореми 6.7.1 в аналогічному випадку умова $\psi \in B$ застосовувалась лише починаючи з оцінок (6.227). Тому всі викладені до цього міркування (включаючи співвідношення (6.221)–(6.226)) мають місце для довільних функцій Ψ, які зображуються у вигляді (6.199).

Далі, якщо ψ належить множині $\mathfrak{M}'_\infty$ або $\mathfrak{M}^c_\infty$, то аналогічно до доведеного вище випадку $s \in (0, 1]$ переконуємось, що

$$\sum_{k=1}^{l} \frac{\nu_k}{\psi^s(k)} \asymp \frac{l^d \alpha(\psi, l)}{\psi^s(l)}, \tag{6.269}$$

$$\widetilde{Q}_n(\psi, l_n) = \sup_{l>n} \widetilde{Q}_n(\psi, l) \asymp \psi^s(m_n), \tag{6.270}$$

Звідси на підставі (6.224) і тверджень 6.2.4, 6.2.5 та 6.2.7 отримуємо

$$\psi(k_{l_n}) \asymp \psi(m_n) \tag{6.271}$$

і

$$k_{l_n} \asymp m_n. \tag{6.272}$$

Далі, внаслідок (6.202) та монотонності функції ψ маємо

$$\sum_{k=l+1}^{\infty} \nu_k \psi^{s'}(k) \gg \sum_{k=l+1}^{\infty} k^{d-1} \psi^{s'}(k) \gg \sum_{k=l+1}^{\eta(\psi,l+1)} k^{d-1} \psi^{s'}(k) \gg$$

$$\gg (l+1)^{d-1} \psi^{s'}(\eta(\psi, l+1))(\eta(\psi, l+1) - (l+1)), \tag{6.273}$$

звідки внаслідок означення величини $\eta(\psi, t)$, зауваження 6.2.1 і тверджень 6.2.4 та 6.2.5 випливає

$$\sum_{k=l+1}^{\infty} \nu_k \psi^{s'}(k) \gg \sum_{k=l+1}^{\infty} k^{d-1} \psi^{s'}(k) \gg l^d \psi^{s'}(l) \alpha(\psi, l) \tag{6.274}$$

З іншого боку, похідна функції $h(t) := t^{d-1} \psi^{s'}(t)$ при $t > 1$ має вигляд

$$h'(t) = s' \psi^{s'}(t) t^{d-2} \Big(\frac{d-1}{s'} - \frac{t|\psi'(t)|}{\psi(t)} \Big).$$

Звідси враховуючи (6.37), бачимо, що функція $h(t)$ при достатньо великих t спадає і тому з огляду на (6.202) отримуємо

$$\sum_{k=l+1}^{\infty} \nu_k \psi^{s'}(k) \ll \sum_{k=l+1}^{\infty} k^{d-1} \psi^{s'}(k) \ll \int_{l}^{\infty} t^{d-1} \psi^{s'}(t) dt. \tag{6.275}$$

Крім цього, як зазначено вище, довільного $d>0$ величина $k^d\psi^{s'}(k)\to 0$ при $k\to\infty$.

Далі, використовуючи (6.37) і метод інтегрування частинами, отримаємо

$$\int\limits_l^\infty t^{d-1}\psi^{s'}(t)dt = -\frac{l^d\psi^{s'}(l)}{d} + \frac{s'}{d}\int\limits_l^\infty \frac{t^{d-1}\psi^{s'}(t)}{\alpha(\psi,t)}dt \gg$$

$$\gg -l^d\psi^{s'}(l) + \frac{1}{\alpha(\psi,l)}\int\limits_l^\infty t^{d-1}\psi^{s'}(t)dt.$$

Звідси достатньо великих l отримуємо оцінку зверху

$$\int\limits_l^\infty t^{d-1}\psi^{s'}(t)dt \ll \frac{\alpha(\psi,t)}{1-\alpha(\psi,t)}l^d\psi^{s'}(l) \ll l^d\psi^{s'}(l)\alpha(\psi,l). \tag{6.276}$$

Із співвідношень (6.274)–(6.276) випливає, що

$$\sum_{k=l+1}^\infty \nu_k\psi^{s'}(k) \asymp \sum_{k=l+1}^\infty k^{d-1}\psi^{s'}(k) \asymp l^d\psi^{s'}(l)\alpha(\psi,l). \tag{6.277}$$

Об'єднуючи співвідношення (6.269)–(6.272), (6.277) із врахуванням тверджень 6.2.4 та 6.2.5 отримуємо необхідну оцінку величини $H_n(\Psi,r)$:

$$H_n(\Psi;s) = \widetilde{H}_n(\psi;s) \asymp \Big(\psi^{s's}(m_n)\cdot(m_n^d\alpha(\psi,m_n)\psi^s(m_n))^{(1-\frac{1}{s})s'} +$$

$$+m_n^d\psi^{s'}(m_n)\alpha(\psi,m_n)\Big)^{1/s'} \asymp \psi(m_n)(n\alpha(\psi,m_n))^{\frac{1}{s'}}.$$

Теорему доведено.

6.7.4. Доведення теореми 6.7.4 про порядкові оцінки величин $H_n(\Psi;s)$ у випадку, коли множина значень послідовності Ψ є слідом на множині $\mathbb{N}$ функції $\psi\in\mathfrak{M}''_\infty$ і $s\in(0,1]$. Як і при доведенні попередніх теорем величини $H_n(\Psi;s)$ подаємо у вигляді (6.213). При цьому мають місце співвідношення (6.212)–(6.215).

Оскільки функція ψ належить множині $\mathfrak{M}''_\infty$, то при всіх $t\geq 1$

$$\psi^s(t)\leq K_1|(\psi^s(t))'|.$$

Тому при всіх $l\in\mathbb{N}$

$$\frac{l^{d-1}}{\psi^s(l)} \leq \sum_{k=1}^l \frac{k^{d-1}}{\psi^s(k)} \leq \frac{l^{d-1}}{\psi^s(l)} + \int\limits_1^l \frac{t^{d-1}dt}{\psi^s(t)} \leq \frac{l^{d-1}}{\psi^s(l)} +$$

$$+K_1 l^{d-1}\int\limits_1^l \frac{|(\psi^s(t))'|dt}{\psi^{2r}(t)} \asymp \frac{l^{d-1}}{\psi^s(l)} + K_1 l^{d-1}\Big(\frac{1}{\psi^s(l)} - \frac{1}{\psi^s(1)}\Big) \ll \frac{l^{d-1}}{\psi^s(l)}.$$

Отже, для довільного $s>0$

$$\sum_{k=1}^{l}\frac{\nu_k}{\psi^s(k)} \asymp \sum_{k=1}^{l}\frac{k^{d-1}}{\psi^s(k)} \asymp \frac{l^{d-1}}{\psi^s(l)}. \tag{6.278}$$

Підставивши оцінку (6.278) у співвідношення (6.213), отримуємо

$$\widetilde{H}_n(\psi,s) \asymp \sup_{l\in\mathbb{N},\, l>n}(l-n)\Big(\frac{(k_l-1)^{d-1}}{\psi^s(k_l-1)} + \frac{l-V_{k_l-1}}{\psi^s(k_l)}\Big)^{-\frac{1}{s}}.$$

Оскільки функція ψ задовольняє умову (6.205) з $\alpha=s$, то

$$\widetilde{H}_n(\psi,s) \asymp \sup_{l\in\mathbb{N},\, l>n}\frac{\psi(k_l)(l-n)}{(l-V_{k_l-1})^{\frac{1}{s}}}. \tag{6.279}$$

Далі, якщо $n\in[V_{m-1},V_m)$, то внаслідок виконання умови (6.205) та (6.202) робимо висновок, що при відшуканні точної верхньої межі в (6.279) достатньо обмежитися множиною натуральних чисел $l>n$ з проміжку $(V_{m-1},V_m]$. Таким чином, з урахуванням (6.199) та (6.212) отримуємо

$$\sup_{l\in\mathbb{N},\, l>n}\frac{\psi(k_l)(l-n)}{(l-V_{k_l-1})^{\frac{1}{s}}} \asymp \psi(m)\sup_{l\in\mathbb{N},\, l\in[n+1,V_m]}\frac{l-n}{(l-V_{m-1})^{\frac{1}{s}}} \asymp$$

$$\asymp \psi(m)\sup_{l\in[n+1,V_m]}\frac{l-n}{(l-V_{m-1})^{\frac{1}{s}}}. \tag{6.280}$$

Далі, якщо $n=V_{m-1}$, то функція

$$\frac{l-n}{(l-V_{m-1})^{\frac{1}{s}}} = (l-n)^{1-\frac{1}{s}}$$

не зростає при довільних $l>n$, тому в цьому випадку (внаслідок (6.279) та (6.280)) справджується співвідношення (6.209).

Нехай тепер $n>V_{m-1}$. Якщо $s=1$, то функція

$$h(l,s) := \frac{l-n}{(l-V_{m-1})^{\frac{1}{s}}}$$

при $l>n$ не спадає і тому

$$\sup_{l\in[n+1,V_m]} h(l,1) = h(V_m,1) = \frac{V_m-n}{V_m-V_{m-1}}. \tag{6.281}$$

Об'єднуючи співвідношення (6.213), (6.279)–(6.281), з урахуванням (6.207) робимо висновок, що

$$H_n(\Psi, s) \asymp \psi(m)\frac{V_m - n}{V_m - V_{m-1}} \asymp \psi(m)\frac{V_m - n}{n^{\frac{d-1}{d}}}.$$

Якщо $s \in (0,1)$, то функція $h(l,s)$ має при $l > n$ єдину критичну точку

$$l^* = \frac{n - sV_{m-1}}{1-s},$$

яка є її точкою максимуму. Функція $h(l,s)$ не спадає при $l \in (n, l^*)$ і не зростає при $l > l^*$.

Звідси випливає, що коли $l^* \geq V_m$, що рівносильно умові (6.210), то

$$\sup_{l\in[n+1,V_m]} h(l,s) = h(V_m, s) = \frac{V_m - n}{(V_m - V_{m-1})^{\frac{1}{s}}} \asymp \frac{V_m - n}{n^{\frac{d-1}{sd}}}. \quad (6.282)$$

Якщо ж $l^* < V_m$, тобто, умова (6.210) не виконується, то

$$\sup_{l\in[n+1,V_m]} h(l,s) = h(l^*, s) = \frac{s(1-s)^{\frac{1}{s}-1}}{(n - V_{m-1})^{\frac{1}{s}-1}} \asymp \frac{1}{(n - V_{m-1})^{\frac{1}{s}-1}}.$$

Об'єднуючи співвідношення (6.213), (6.279), (6.280) та (6.282), робимо висновок, що коли при даному $s \in (0,1)$ виконується умова (6.210), то має місце оцінка (6.206). Якщо ж умова (6.210) не виконується, то аналогічно справджується оцінка (6.211).

6.7.5. Доведення теореми 6.7.3 про порядкові оцінки величин $H_n(\Psi; s)$ у випадку, коли множина значень послідовності Ψ є слідом на множині $\mathbb{N}$ функції $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$ і $s \in (1,\infty)$. Внаслідок (6.197) маємо $\Psi(l^*+1) > \Psi(l^*)$. Тому якщо функція $\Psi(t)$ задається у вигляді (6.199), а $n \in [V_{m-1}, V_m)$, то з огляду на монотонність функції ψ та (6.212) отримуємо $l^* = V_{k_{l^*}} \geq V_m$. При цьому умова (6.197) має вигляд

$$\psi^{-s}(k_{l^*}) \leq \frac{1}{l^* - n}\sum_{j=1}^{k_{l^*}} \frac{\nu_j}{\psi^s(j)} < \psi^{-s}(k_{l^*}+1). \quad (6.283)$$

Внаслідок (6.278) та умови (6.205) при достатньо великих n

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\nu_j}{\psi^s(j)} \asymp \frac{m^{d-1}}{\psi^s(m)} < \psi^{-s}(m+1). \quad (6.284)$$

Звідси робимо висновок, що $l^* = V_m$.

Таким чином, при достатньо великих $n \in [V_{m-1}, V_m)$ величини $H_n(\Psi, s)$, $s \in (1, \infty)$ можна подати у вигляді

$$H_n(\Psi, s) = \Big((V_m - n)^{s'}\Big(\sum_{k=1}^{m} \frac{\nu_k}{\psi^s(k)}\Big)^{-s'/s} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \nu_k \psi^{s'}(k)\Big)^{1/s'} := \widetilde{H}_n(\psi, s), \quad (6.285)$$

де $s \in (1, \infty)$, $1/s + 1/s' = 1$.

Покажемо тепер, що для функцій $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$ і будь-яких $s' \in (1, \infty)$ має місце співвідношення

$$\sum_{k=l+1}^{\infty} \nu_k \psi^{s'}(k) \asymp \sum_{k=l+1}^{\infty} k^{d-1}\psi^{s'}(k) \asymp (l+1)^{d-1}\psi^{s'}(l+1). \quad (6.286)$$

Внаслідок (6.202) маємо

$$\sum_{k=l+1}^{\infty} \nu_k \psi^{s'}(k) \gg \sum_{k=l+1}^{\infty} k^{d-1}\psi^{s'}(k) \gg (l+1)^{d-1}\psi^{s'}(l+1). \quad (6.287)$$

З іншого боку, похідна функції

$$h(t) := t^{d-1}\psi^{s'}(t), \quad t \geq 1,$$

має вигляд

$$h'(t) = s'\psi^{s'}(t)t^{d-2}\Big(\frac{d-1}{s'} - \frac{t|\psi'(t)|}{\psi(t)}\Big).$$

Тому при достатньо великих t функція $h(t)$ спадає і виконується співвідношення

$$h(t) \leq K|h'(t)|.$$

Звідси з урахуванням (6.202) отримуємо

$$\sum_{k=l+1}^{\infty} \nu_k \psi^{s'}(k) \ll \sum_{k=l+1}^{\infty} k^{d-1}\psi^{s'}(k) \ll (l+1)^{d-1}\psi^{s'}(l+1) + \int\limits_{l+1}^{\infty} t^{d-1}\psi^{s'}(t)dt \ll$$

$$\ll (l+1)^{d-1}\psi^{s'}(l+1) + K\int\limits_{l+1}^{\infty} |h'(t)|dt \asymp (l+1)^{d-1}\psi^{s'}(l+1). \quad (6.288)$$

Із співвідношень (6.287) та (6.288) випливає (6.286).

Об'єднуючи співвідношення (6.284)–(6.286), робимо висновок, що

$$H_n(\Psi, s) \asymp \Big(\psi^{s'}(m)(V_m - n)^{s'} m^{-\frac{s'(d-1)}{s}} + m^{d-1}\psi^{s'}(m+1)\Big)^{\frac{1}{s'}}, \quad (6.289)$$

звідки з урахуванням умови (6.205) та (6.207) отримуємо (6.206):

$$H_n(\Psi, s) \asymp \psi(m)\frac{V_m - n}{m^{\frac{d-1}{s}}} \asymp \psi(m)\frac{V_m - n}{n^{\frac{d-1}{sd}}}.$$

6.7.6. Точні порядкові оцінки величин $H_n(\Psi, s)$ у випадку, коли послідовності Ψ є строго монотонними

Сформулюємо наслідки із отриманих вище теорем 6.7.1–6.7.4 для випадку, коли самі послідовності $\Psi(k)$ є строго монотонними, тобто, коли у співвідношенні (6.198) число $d = 1$ і $\Psi(k)$ збігаються з послідовностями $\psi(k)$. В цьому випадку покладаємо $H(\Psi; s) =: H(\psi; s)$

Наслідок 6.7.1 . *Нехай $s \in (0, \infty)$, послідовність ψ належить множині B, а у випадку, коли $s \in (1, \infty)$, крім цього, при всіх t, більших ніж деяке число t_0, є опуклою і задовольняє умову*

$$\alpha(\psi, t) \leq K_0 < s', \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1, \ K_0 \equiv \mathrm{const}, \tag{6.200$'$}$$

де величина $\alpha(\psi, t)$ визначається рівністю (6.10). *Тоді має місце точна порядкова оцінка*

$$H_n(\psi; s) \asymp \frac{\psi(n)}{n^{\frac{1}{s}-1}}. \tag{6.201$'$}$$

З теореми 6.7.2, враховуючи зауваження 6.2.1, отримуємо такий наслідок.

Наслідок 6.7.2 . *Нехай $s \in (0, \infty)$, функція ψ належить множині $\mathfrak{M}'_\infty$ або $\mathfrak{M}^c_\infty$. Тоді*

$$H_n(\psi; s) \asymp \frac{\psi(n)}{(n\alpha(\psi, n))^{\frac{1}{s}-1}} \asymp \frac{\psi(n)}{(\eta(\psi, n) - n))^{\frac{1}{s}-1}}, \tag{6.203$'$}$$

де величина $\alpha(\psi, t)$ визначається рівністю (6.10).

У даному випадку в теоремах 6.7.4 та 6.7.3 умова (6.205) внаслідок твердження 6.2.6 виконується автоматично з будь-яким $\alpha \neq 0$, а якщо $n \in [V_{m-1}, V_m)$, то $m = n+1$. Тому виконується таке твердження.

Наслідок 6.7.3 . *Нехай $s \in (0, \infty)$, функція ψ належить множині $\mathfrak{M}''_\infty$. Тоді*

$$H_n(\psi, s) \asymp \psi(n + 1). \tag{6.206$'$}$$

6.7.7. В доповнення до підрозділу 5.4 наведено ще одне застосування результатів даного підрозділу. Нехай H — дійсний гільбертів простір з ортонормованим базисом $\varphi_1,\ \varphi_2, \dots \varphi_k, \dots$; $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна послідовність дійсних чисел. Октаедром O_α називається опукла оболонка векторів $\pm\alpha_1\varphi_1,\ \pm\alpha_2\varphi_2, \dots, \pm\alpha_k\varphi_k, \dots$

В 1973 році Л.Б. Софман в роботі [127] (див. також [126, 102 (гл. VI)]) показав, що коли послідовність α задовольняє умову $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = 0$, то поперечник за Колмогоровим $d_n(O_\alpha, H)$ множини O_α в просторі H (означення див. с.59) при кожному $n \in \mathbb{N}$ обчислюється за формулою

$$d_n(O_\alpha, H) = \sup_{l>n} \sqrt{\frac{l-n}{\sum\limits_{i=1}^{l} \bar{\alpha}_i^{-2}}},$$

де $\bar{\alpha} = \{\bar{\alpha}_k\}_{k=1}^{\infty}$ спадна перестановка послідовності $|\alpha_k|$.

Враховуючи прийняті вище позначення цю рівність можна записати у вигляді:

$$d_n(O_\alpha, H) = \sqrt{H_n(\psi, 1)}, \quad \text{де } \psi(k) = \bar{\alpha}_k^2,$$

і на основі наслідків 6.7.1–6.7.3 сформулювати таке твердження

Твердження 6.7.1 . *Нехай послідовність* $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ *така, що при довільному* $k \in \mathbb{N}$ $\bar{\alpha}_k^2 = \psi(k)$, *де* ψ *— деяка функція з множини* B, $\mathfrak{M}'_\infty$, $\mathfrak{M}^c_\infty$ *або* $\mathfrak{M}''_\infty$. *Тоді має місце порядкова при* $n \to \infty$ *рівність*

$$d_n(O_\alpha, H) \asymp \bar{\alpha}_{n+1},$$

де $\bar{\alpha} = \{\bar{\alpha}_k\}_{k=1}^{\infty}$ *спадна перестановка послідовності* $|\alpha_k|$.

6.8 Висновки до розділу 6

Встановлено низку нових асимптотичних властивостей опуклих функцій.

Знайдено точні порядкові оцінки деяких важливих величин, в термінах яких, зокрема, виражаються найкращі n-членні наближення важливих класів функцій багатьох та їх інтегральні аналоги.

Описано множину $\mathcal{D}^\infty$ нескінченно диференційовних періодичних функцій в термінах узагальнених $\bar{\psi}$-похідних, які означаються парою $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ послідовностей ψ_1 та ψ_2. Показано, що кожна функція f з множини $\mathcal{D}^\infty$ має принаймні одну узагальнену $\bar{\psi}$-похідну, параметри ψ_1 та ψ_2 якої спадають швидше довільної степеневої функції, і в той же час для довільної функції $f \in \mathcal{D}^\infty$, відмінної від тригонометричного полінома, знайдеться пара $\bar{\psi}$, параметри ψ_1 та ψ_2 якої мають таку ж швидкість спадання, і для якої $\bar{\psi}$-похідна не існує. Встановлено нові критерії належності 2π-періодичних дійснозначних на дійсній осі функцій множинам аналітичних та цілих функцій.

Описано зв'язок між класами $(\psi, \bar{\beta})$-диференційовних функцій і відомими класами Жевре $\mathcal{J}_\alpha$. В термінах таких похідних встановлено критерій належності періодичних функцій класам $\mathcal{J}_\alpha$.

Список використаних джерел

1. **Aiyub M.** On some seminormed sequence spaces defined by Orlicz function / M. Aiyub // Proyecciones Journal of Mathematics. — 2013. — V. 32, № 3. — P. 267–280.

2. **Alexets G.** Sur l'otdre de grandeur de l'approximation d'une fonction par les moyennes de sa serie de Fourier / G. Alexets // Mat. es Fis. lapok. — 1941. — V. 48. — P. 410–433.

3. **Андреев К. А.** Несколько слов по поводу теорем П.Л. Чебышева и В.Г. Имшенецкого об определенных интегралах от произведения функций / К. А. Андреев // Сообщ. и протоколы заседаний Матем. общества при Харьковском Имп. Унив. — 1882. — Сер.1, Т.2. — С. 110–123.

4. **Ахиезер Н. И.** Лекции по теории аппроксимации / Н. И. Ахиезер / Москва: Наука, 1970. — 303 с.

5. **Бари Н. К.** Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций / Н. К. Бари, С. Б. Стечкин // Тр. московского мат. об-ва. — 1956. — Т. 5. — С. 483–522.

6. **Бари Н.К.** Тригонометрические ряды / Н.К. Бари. – М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.

7. **Белинский Э. С.** Приближение периодических функций "плавающей" системой экспонент и тригонометрические поперечники / Э. С. Белинский // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. Ярославль, 1984. С. 10—24.

8. **Белинский Э. С.** Приближение периодических функций многих переменных "плавающей" системой экспонент и тригонометрические поперечники / Э. С. Белинский // Докл. АН СССР. — 1985. — Т. 284, №6. — С. 1294–1297.

9. **Белинский Э. С.** Приближение "плавающей" системой экспонент на классах периодических гладких функций / Э. С. Белинский // Мат. сб. — 1987. — Т. 180. — С. 46–47.

10. **Белинский Э. С.** Приближение периодических функций "плавающей" системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной / Э. С. Белинский // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. — Ярославль: Ярослав. ун-т, 1988. — С. 16—33.

11. **Biernacki M.** Sur le 2 theoreme de la moyenne et sur l'integralite de Tschebycheff / M. Biernacki // Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska. — 1950. — Sect. A, №4. — P. 123–129.

12. **Бернштейн С. Н.** О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени / С. Н. Бернштейн // Сообщ. Харьк. матем. об-ва. — 1912. — Серия 2, Т. 13. — С. 49–194.

13. **Бернштейн С. Н.** Об абсолютной сходимости тригонометрических рядов / С. Н. Бернштейн // Сообщ. Харьк. матем. об-ва. — 1914. — Серия 2, Т. 14. — С. 139–144.

14. **Бернштейн С. Н.** Добавление к статье "Об абсолютной сходимости тригонометрических рядов" / С. Н. Бернштейн // Сообщ. Харьк. матем. об-ва. — 1915. — Серия 2, Т. 14. — С. 200–201.

15. **Bernstein S. N.** Sur la convergence absolue des séries trigonométriques / S. N. Bernstein // Comptes rendus, Paris. — 1934. — V. 199. — P. 397–400.

16. **Бугров Я. С.** Неравенства типа Бернштейна и их применение к исследованию дифференциальных свойств решений дифференциальных уравнений высшего порядка / Я. С. Бугров // Mathematica (Cluj). — 1963. — V. 5 (28). — С. 5–25.

17. **Бугров Я. С.** Свойства решений дифференциальных уравнений высшего порядка в терминах весовых классов / Я. С. Бугров // Труды Мат. ин-та АН СССР. — 1972. — Т. 117. — С. 47–61.

18. **Butzer P. L.** Approximation theorems for semi-groups of bounded linear transformations / Butzer P. L., Tillmann H. G. // Math. Ann. — 1960. — V. 140. — P. 256–262.

19. **Butzer P. L.** Beziehungen zwischen den Riemannschen, Taylorschen und gewohnlichen Ableitungen reellwertiger Funktionen / Butzer P. L. // Math. Ann. 1961. — V. 144. — P. 275–298.

20. **Butzer P. L.** Approximation theorems for the solution of Fourier's problem and Dirichlet's problem / Butzer P. L.; Sunouchi G. // Math. Ann. — 1964. — V. 155. P. 316–330.

21. **Butzer P.** Fourier Analysis and Approximation. One–Dimentional Theory. / P. Butzer, R. Nessel. — Basel–New York, 1971. — 554 p.

22. **Вакарчук С. Б.** K-функционалы и точные значения n- поперечников некоторых классов из L_2 / С. Б. Вакарчук // Матем. заметки. — 1999. — Т. 66, № 4. — С. 494-–499.

23. **Вакарчук С. Б.** О наилучших полиномиальных приближениях некоторых классов 2π -периодических функций и точных значениях n -поперечников / С. Б. Вакарчук // Мат. заметки. — 2001. — Т. 70, № 3. — С. 334–345.

24. **Вакарчук С. Б.** Неравенства типа Джексона и точные значения поперечников классов функций в пространствах S^p, $1 \leq p < \infty$ / С. Б. Вакарчук // Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56, № 5. — С. 595–605.

25. **Вакарчук С. Б.** Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 / С. Б. Вакарчук // Матем. заметки. — 2006. — Т. 80, № 1. — С. 11–19

26. **Вакарчук С. Б.** Неравенства типа Джексона для специальных модулей непрерывности на всей вещественной оси и точные значения средних v-поперечников классов функций в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ / С. Б. Вакарчук // Укр. мат. журн. — 2014. — Т. 66, № 6. — С. 740–766.

27. **Вакарчук С. Б.** Неравенства типа Джексона с обобщенным модулем непрерывности и точные значения n-поперечников классов (ψ, β)-дифференцируемых функций в L_2. I / С. Б. Вакарчук // Укр. мат. журн. — 2016. — Т. 68, № 6. — С. 723–745.

28. **Вакарчук С. Б.** Неравенства типа Джексона с обобщенным модулем непрерывности и точные значения n-поперечников классов (ψ, β)-дифференцируемых

функций в L_2. II / С. Б. Вакарчук // Укр. мат. журн. — 2016. — Т. 68, № 8. — С. 1021–1036.

29. **Вакарчук С. Б.** Неравенства типа Джексона с обобщенным модулем непрерывности и точные значения n-поперечников классов (ψ, β)-дифференцируемых функций в L_2. III / С. Б. Вакарчук // Укр. мат. журн. — 2016. — Т. 68, № 10. — С. 1299–1319.

30. **La Vallé Poussin Ch.** Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle. / Ch. La Vallé Poussin. — Paris.: Gautier – Villars. – 1919.– 150 p.

31. **Gao F.** Exact value of the n-term approximation of a diagonal operator / F. Gao // J. Approx. Theory. — 2010. — V. 162, № 4. — P. 646–652.

32. **Гаврилюк В. Т.** Вопросы насыщения линейных методов / В. Т. Гаврилюк, А. И. Степанец // Укр. мат. журн. — 1991. — Т. 43, №3. — С. 291–308.

33. **Горбачук В. И.** Операторный подход к задачам аппроксимации / В.,И. Горбачук, М. Л. Горбачук // Алгебра и анализ. — 1997. — Т. 9, № 3. — С. 90–108.

34. **Горбачук М. Л.** Прямі й обернені теореми в теорії наближень методом Рітца / М. Л. Горбачук, Я. І. Грушка, С. М. Торба // Укр. мат. журн. — 2005. — Т. 57, № 5. — С. 633–643.

35. **Грибанов Ю. И.** Нелинейные операторы в пространствах Орліча / Ю. И. Грибанов // Уч. зап. Казанского ун-та. — 1955. — Т. 115, Кн. 7. — С. 5–13.

36. **Грибанов Ю. И.** К теории пространств l_M / Ю. И. Грибанов // Уч. зап. Казанского ун-та. — 1957. — Т. 117, Кн. 2. — С. 62–65.

37. **Грибанов Ю. И.** К теории матричных операторов в пространствах Орліча / Ю. И. Грибанов // Изв. вузов. Матем. — 1958. — № 4 (5). — С. 41–53.

38. **Grochenig K.** Nonlinear approximation with local Fourier bases / K. Grochenig, S. Samarah //. Constr. Approx. — 2000. — V. 16, № 3. — P. 317–331.

39. **DeVore R. A.** Constructive approximation / R. A. DeVore, G. G. Lorentz // Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, V. 303. Springer–Verlag, Berlin. — 1993. — 449 p.

40. **DeVore R. A.** Nonlinear approximation by trigonometric sums / R. A. DeVore, V. N. Temlyakov // J. Fourier Anal. Appl. — 1995. — V. 2, № 1. — P. 29–48.

41. **DeVore R. A.** Some remarks on greedy algorithms / R. A. DeVore, V. N. Temlyakov // Adv. Comput. Math. — 1996. — V. 5, № 2-3. — P. 173–187.

42. **DeVore R. A.** Nonlinear approximation / R. A. DeVore // Acta Numer. — 1998. — V. 7. – P. 51-150.

43. **DeVore R.** A.Multiscale, Nonlinear and Adaptive Approximation / R. DeVore, A. Kunoth. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009. — 659 p.

44. **DeVore R.** A.Multiscale, Nonlinear and Adaptive Approximation / R. DeVore, A. Cohen // Acta Numer. — 2015. — V. 24. — P. 1-159.

45. **Jackson D.** On approximation by trigonometric sums and polynomials / D. Jackson // Trans. Amer. Math. Soc. — 1912. — V. 13, № 4. — P. 491–515.

46. **Дзядык В. К.** Аппроксимационная характеристика классов Липшица W^rH^1, $r = 0, 1, 2, \dots$ / В. К. Дзядык // Analysis mathematica. — 1975. — № 1. — С. 19–30.

47. **Дзядык В. К.** Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В. К. Дзядык. Москва: Наука, 1977. — 511 с.

48. **Dzyadyk V. K.** Theory of uniform approximation of functions by polynomials / V. K. Dzyadyk, I. A. Shevchuk. Berlin: Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, 2008. — 480 p.

49. **Diening L.** Calderon-Zigmund operators on generelized Lebesgue spaces $L^{p(x)}$ and problems releted to fluid dynamics / L. Diening, M. Růžička // J. Reine Angew. Math. 2003. — V. 563. — P. 197–220.

50. **Diening L.** Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents / Diening L., Harjulehto P., P. Hästö, M. Růžička // Lecture Notes in Mathematics, 2017. Springer, Heidelberg, 2011. — 509 p.

51. **Dũng D.** Hyperbolic Cross Approximation / D. Dũng, V. N. Temlyakov, T. Ullrich // arXiv:1601.03978v1. — 154 p.

52. **Duren P.** Theory of H^p spaces / P. Duren.– New York: Academic Press, 1970. – 258 P.

53. **Djakov P. B.** Multipliers between Orlicz Sequence Spaces / P. B. Djakov, M. S. Ramanujan // Turk. J. Math. — 2000. — V. 24, №3. — P. 313–319.

54. **Edmunds D. E.** Averaging operators on $l^{\{p_n\}}$ and $L^{p(x)}$ / D. E. Edmunds, A. Nekvinda // Math. Inequal. Appl. — 2002. — V. 5, №2. — P. 235–246.

55. **Заставный В. П.** Приближение классов сверток линейными операторами специального вида / В. П. Заставный, В. В. Савчук // Матем. заметки. — 2011. — Т. 90, № 3. — С. 351–361.

56. **Zygmund A.** The approximation functions by typical of their Fourier series / A. Zygmund // Duke. Math. J. — 1945. — V. 12, № 4. — P. 695–704.

57. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды: В 2-х т. / А. Зигмунд. – Москва: Мир, 1965. – Т.1. – 615 с.

58. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды: В 2-х т. / А. Зигмунд. – М.: Мир, 1965. – Т.2. – 538 с.

59. **Жук В. В.** Аппроксимация периодических функций / В. В. Жук. – Ленинград: Из-во Ленинград. ун–та. 1982. — 368 с.

60. **Исмагилов Р. С.** Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами / Р. С. Исмагилов // Успехи мат. наук. — 1974. — Т. 29, №3. — С. 161–178.

61. **Кахан Ж.-П.** Абсолютно сходящиеся ряды Фурье / Ж.-П. Кахан. — Москва: Мир, 1976. — 204 с.

62. **Кашин Б. С.** Об экстремальных свойствах полных ортонормированных систем / Б. С. Кашин // Тр. МИАН СССР. — 1985. — Т. 172. — С. 187–191.

63. **Кашин Б. С.** О наилучших m- членных приближениях и энтропии множеств в пространстве L_1 / Б. С. Кашин, В. Н. Темляков // Матем. заметки. — 1994. — Т. 56, №5. — С. 57–86

64. **Кашин Б. С.** О нижних оценках для n-членных приближений / Б. С. Кашин // Матем. заметки. — 2001. — Т. 70, №4. — С. 636–638.

65. **Kolyada V. I.** Mixed norms and Sobolev type inequalities / V. I. Kolyada // Banach Center Publ. — 2006. — V. 72: Approximation and Probability. — P. 141-160.

66. **Copson E. T.** Notes on series of positive terms / E. T. Copson // Journ. London Math. Soc. — 1928. — V.3. — P. 49–51.

67. **Корнейчук Н. П.** Экстремальные задачи теории приближений / Н. П. Корнейчук. — Москва: Наука, — 1970. — 320 с.

68. **Корнейчук Н. П.** Замечание о теореме Джексона для дифференцируемых функций / Н. П. Корнейчук // Матем. заметки. — 1972. — Т. 12, № 5. — С. 517–522.

69. **Leis R.** Approximationssätze für stetige Operatoren. / Leis, R. // Arch. Math. — 1963. V. 14. — P. 120–129.

70. **Леонтьев А. Ф.** Обобщения рядов экспонет / А. Ф. Леонтьев — Москва: Наука, 1981. – 320 с.

71. **Лигун А. А.** Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 / А. А. Лигун //Мат. заметки. — 1978. — Т. 24, № 6. — С. 785–792.

72. **Li R. S.** Best m-term One-sided Trigonometric Approximation of Some Function Classes Defined by a Kind of Multipliers / R. S. Li, Y. P. Liu // Acta Mathematica Sinica, English Series. — 2010. — V. 26, № 5. — P. 975–984.

73. **Lindenstrauss J.** On Orlicz sequence spaces / J. Lindenstrauss, L. Tzafriri // Israel J. Math. — 1971. — № 10. — P. 379–390.

74. **Lindenstrauss J.** Classical Banach spaces I. / J. Lindenstrauss, L. Tzafriri // Sequence spaces. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, V. 92. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 1977. — 188 p.

75. **Lorentz G. G.** Fourier–Koeffizienten und Funktionenklassen / G. G. Lorentz // Math. Z. – 1948. – V. 51. – P. 135 – 149.

76. **Luxemburg W. A. J.** Banach function spaces / W. A. J. Luxemburg. PhD thesis, Technische Hogeschool te Delft, 1955. 70 p.

77. **Майоров В. Е.** О линейных поперечниках соболевских классов / В. Е. Майоров // Докл. АН СССР. — 1978. — Т. 243, №5. — С. 1127–1130.

78. **Майоров В. Е.** О линейных поперечниках соболевских классов и цепочках экстремальных подпространств / В. Е. Майоров // Мат. сб. — 1980. — Т. 113 (155), №3(11). — С. 437–463.

79. **Мандельбройт С.** Примыкающие ряды, регуляризация последовательностей, применения / С. Мандельбройт. — Москва: Издательство иностранной литературы, 1955. — 268 с.

80. **Mitrinovič D. S.** History, variations and generalisations of the Čebyšev inequality and the question of some priorities / D. S. Mitrinovič, P. M. Vasič // Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. — 1974. — № 461–497. — P. 1–30.

81. **Mitrinovič D. S.** History, variations and generalisations of the Čebyšev inequality and the question of some priorities II / D. S. Mitrinovič, J. E. Pečarič // Rad JAZU (Zagreb). — 1990. — V. 450, № 9. — P. 139–156.

82. **Mitrinovič D. S.** Classical and new inequalities in analysis / D. S. Mitrinovič, J. E. Pečarič, A. M. Fink. — Kluwer, 1993. — 740 p.

83. **Móricz F.** Absolutely convergent Fourier series and function classes / F. Móricz // J. Math. Anal. Appl. — 2006. — V. 324, № 2. — P. 1168–1177.

84. **Móricz F.** Absolutely convergent Fourier series and generalized Lipschitz classes of functions / F. Móricz // Colloq. Math. — 2008. — V. 113, № 1. — P. 105–117.

85. **Móricz F.** Absolutely convergent Fourier series and function classes. II / F. Móricz // J. Math. Anal. Appl. — 2008. — V. 342, № 2. — P. 1246–1249.

86. **Móricz F.** Higher order Lipschitz classes of functions and absolutely convergent Fourier series / F. Móricz // Acta Math. Hungar. — 2008. — V. 120, № 4. — P. 355–366.

87. **Móricz F.** Absolutely convergent multiple Fourier series and multiplicative Lipschitz classes of functions / F. Móricz // Acta Math. Hungar. — 2008. — V. 121, № 1–2. — P. 1–19.

88. **Móricz F.** Absolutely convergent Fourier series, classical function classes and Paley's theorem / F. Móricz // Anal. Math. — 2008. — V. 34, № 4. — P. 261–276.

89. **Móricz F.** Absolutely convergent Fourier series, enlarged Lipschitz and Zygmund classes of functions / F. Móricz // East J. Approx. — 2009. — V. 15, № 1. — P. 71–85.

90. **Móricz F.** Absolutely convergent double Fourier series, enlarged Lipschitz and Zygmund classes of functions of two variables / F. Móricz, Z. Sáfár // East J. Approx. — 2010. — V. 16, № 1. — P. 1–24.

91. **Sz-Nagy B.** Sur l'ordre de l'approximation d'une fonction par son integrale de Poisson / B. Sz-Nagy // Acta Math. Acad. Hungar. — 1950. — **1.** — P. 183 — 188.

92. **Натансон И.П.** О порядке приближения непрерывной 2π — периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона / И.П. Натансон // Докл. АН СССР. — 1950. — **72**, № 1. — С. 11 – 14.

93. **Nekvinda A.** Equivalence of l^{p_n} norms and shift operators / A. Nekvinda // Math. Inequal. Appl. — 2002. — V. 5, № 4. — P. 711–723.

94. **Nekvinda A.** A note on maximal operator on l^{p_n} and $L^{p(x)}(R_n)$ / A. Nekvinda // J. Funct. Spaces Appl. — 2007. — V. 5, № 1. — P. 49-–88.

95. **Nekvinda A.** Embeddings between discrete weighted Lebesgue spaces with variable exponents / A. Nekvinda // Math. Inequal. Appl. — 2007. — V. 10, № 1. — P. 165-–172.

96. **Никольский С. М.** Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных / С. М. Никольский // Тр. МИАН СССР: Изд-во АН СССР, Москва. — 1951. — Т. 38. — С. 244-–278.

97. **Nitsche P.-A.** Best N-term approximation spaces for sparse grids / P.-A. Nitsche // Research Report No. 2003-11, Seminar für Angewandte Mathematik, ETH Zürich. — 25 p.

98. **Novak E.** Optimal Linear Randomized Methods for Linear Operators in Hilbert Spaces / E. Novak // Journal of Complexity. — 1991. — V. 8, № 1. — P. 22-–36.

99. **Orlicz W.** Über konjugierte Exponentenfolgen / W. Orlicz // Studia Math. 1931. — V. 3. — P. 200-212.

100. **Orlicz W.** Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B / W. Orlicz // Bull. Int. Acad. Polon. Sci. A. — 1932. — P 207–220.

101. **Orlicz W.** Über Räume (L^M). / W. Orlicz // Bull. Int. Acad. Polon. Sci. A. — 1936. — P. 93–107.

102. **Pinkus A.** n-widths in approximation theory / A. Pinkus // Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, V. 3 (7). Springer–Verlag Berlin Heidelberg. – 1985. – 291 p.

103. **Поссе К. А.** дополнительном члене в формуле П.Л. Чебышева для приближенного выраженияодного определенного интеграла через другие, взатые в тех же пределах / К. А. Поссе // Сообщ. и протоколы заседаний Матем. общества при Харьковском Имп. Унив. — 1883. — Сер. 1, Т. 1. — С. 5–17.

104. **Prestin J.** Direct and inverse approximation theorems of 2π-periodic functions by Taylor–Abel–Poisson means / J. Prestin, V. V. Savchuk, A. L. Shidlich // arXiv.org: arXiv:1609.09615. – 2016. — 14 p.

105. **Prestin J.** Approximation of 2π-periodic functions by Taylor–Abel–Poisson operators in the integral metric / J. Prestin, V. V. Savchuk, A. L. Shidlich // Доповіді НАН України. – 2017. — №1. — С. 17–20.

106. **Радзиевская Е. И.** Об одной экстремальной задаче для полунормы на пространстве l_1 с весом / Е. И. Радзиевская, Г. В. Радзиевский // Укр. мат. журн. — 2005. — Т. 57, № 7. — С. 1002–1006.

107. **Романюк А. С.** Наилучшие тригонометрические и билинейные приближения функций многих переменных из классов $B^r_{p,\theta}$. I / А. С. Романюк // Укр. мат. журн. — 1992. — Т. 44, №11. — С. 1535–1547.

108. **Романюк А. С.** Наилучшие тригонометрические и билинейные приближения функций многих переменных из классов $B^r_{p,\theta}$. II / А. С. Романюк // Укр. мат. журн. — 1993. — Т. 45, №10. — С. 1411–1423.

109. **Романюк А. С.** О наилучшей тригонометрической и билинейной аппроксимации классов Бесова функций многих переменных / А. С. Романюк // Укр. мат. журн. — 1995. — Т. 47, №8. — С. 1097–1111.

110. **Романюк А. С.** Приближение классов функций многих переменных их ортогональными проекциями на подпространства тригонометрических полиномов / А. С. Романюк // Укр. мат. журн. — 1996. — Т. 48, № 1. — С. 80–89.

111. **Романюк А. С.** Приближение классов периодических функций многих переменных / А. С. Романюк // Мат. заметки. — 2002. — Т. 71, №1 . — С. 109–121.

112. **Романюк А. С.** Наилучшие M-членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных / А. С. Романюк // Изв. РАН. Сер. матем. — 2003. — Т. 67, №2. — С. 61–100.

113. **Романюк А. С.** Билинейные и тригонометрические приближения классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных / А. С. Романюк // Изв. РАН. Сер. мат. — 2006. — Т. 70, № 2. — С. 69–98.

114. **Романюк А. С.** Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных / А. С. Романюк. Киев: Ин-т математики НАН Украины. — 2012. — 352 с. (Праці Інституту математики НАН України; Т.93).

115. **Романюк В. С.** Нелінійне наближення функцій багатьох змінних зі швидко спадними коефіцієнтами Фур'є / В. С. Романюк // Тези доповідей Міжнародної наукової конференції "Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 70-річчя з дня народження академіка А.М. Самойленка. — Київ: Ін-т математики. — 2008. — С. 95–96.

116. **Романюк В. С.** Нелинейная аппроксимация функций многих переменных из классов Бесова / В. С. Романюк // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2010. — Т 10, № 1. — С. 199–220.

117. **Рудин У.** Теория функций в поликруге / У. Рудин. – М. : Мир, 1974. – 160 С.

118. **Ruzicka M.** Electroreological fluids: Modeling and mathematical theory / M Ruzicka // Lect. Notes Math. Springer-Verlag, Berlin, 2000. — V. 1748. — 176 p.

119. **Рукасов В. И.** Наилучшие n-членные приближения в пространствах с несимметричной метрикой / В. И. Рукасов // Укр. мат. журн. — 2003. — Т. 55, № 6. — С. 806–816.

120. **Савчук В.В.** Наближення голоморфних функцій середніми Тейлора–Абеля–Пуассона / В.В. Савчук // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 9. – С. 1253 – 1260.

121. **Савчук В. В.** Наближення функцій багатьох змінних лінійними методами в просторах S^p / В. В. Савчук, А. Л. Шидліч // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2007. — Т 4, № 1. — С. 302–317.

122. **Савчук В.В.** Наближення 2π–періодичних функцій і голоморфних функцій деякими лінійними методами / В.В. Савчук // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. пр. Ін-ту математики НАН України. Т. 5, № 1 – Київ: Ін-т математики НАН України, 2008. – С. 309– 323.

123. **Savchuk V. V.** Approximation of functions of several variables by linear methods in the space S^p / V. V. Savchuk, A. L. Shidlich // Acta Sci. Math. (Szeged). — 2014. — V. 80, № 3–4. — P. 477-–489.

124. **Samko S. G.** On a progress in the theory of Lebesgue spaces whith variable exponent: Maximal and Singular operators / S. G. Samko // Integral Transforms Spec. Funct. — 2005. — V. 16, № 5 – 6. — P. 461–482.

125. **Сонин Н. Я.** О некоторых неравенствах, относящихся к определенным интегралам / Н. Я. Сонин // Зап. Имп. Акад. наук по физико-матем. отд. — 1898. — Т. 6. — С. 1–54.

126. **Софман Л. Б.** Поперечники октаэдров / Л. Б. Софман // Матем. заметки. — 1969. — Т. 5, №4. — С. 429–436.

127. **Софман Л. Б.** Поперечники бесконечного октаэдра / Л. Б. Софман // Вестник московского университета. — 1973. — №5. — С. 54–56.

128. **Стасюк С. А.** Найкращі M-членні ортогональні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних / С. А. Стасюк // Укр. мат. журн. — 2008. — Т. 60, № 5. — С. 647–656.

129. **Стейн И.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах / И. Стейн, Г. Вейс. — Москва: Мир, 1974. — 333 с.

130. **Стечкин С. Б.** О порядке наилучших приближений непрерывных функций / С. Б. Стечкин // Изв. АН СССР: Сер. матем. — 1951. — Т. 15, №3. — С. 219–242.

131. **Стечкин С. Б.** Об абсолютной сходимости ортогональных рядов. I / С. Б. Стечкин // Матем. сб. — 1951. — Т. 29 (71), №1. — С. 225–232.

132. **Стечкин С. Б.** Об абсолютной сходимости ортогональных рядов Фурье / С. Б. Стечкин // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1953. — Т. 17. — С. 87–98.

133. **Стечкин С. Б.** Об абсолютной сходимости ортогональных рядов Фурье (второе сообщение) / С. Б. Стечкин // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1955. — Т. 19. — С. 221–246.

134. **Стечкин С. Б.** Об абсолютной сходимости ортогональных рядов / С. Б. Стечкин // Докл. АН СССР. — 1955. — Т. 102, № 1. — С. 37–40.

135. **Стечкин С. Б.** Об абсолютной сходимости ортогональных рядов Фурье (третье сообщение) / С. Б. Стечкин // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1956. — Т. 20. — С. 385–412.

136. **Степанец А. И.** Классификация и приближение периодических функций / А. И. Степанец. — Киев: Наук. думка, 1987. — 268 с.

137. **Степанец А. И.** Скорость сходимости рядов Фурье на классах $\bar{\psi}$-интегралов / А. И. Степанец // Укр. мат. журн. — 1997. — Т. 49, №8. — С. 1069–1113.

138. **Степанец А. И.** Приближение $\bar{\psi}$-интегралов периодических функций суммами Фурье (небольшая гладкость) I. / А. И. Степанец // Укр. мат. журн. — 1998. — Т. 50, №2. — С. 274–291.

139. **Степанец А. И.** Приближение $\bar{\psi}$-интегралов периодических функций суммами Фурье (небольшая гладкость) II. / А. И. Степанец // Укр. мат. журн. — 1998. — Т. 50, №3. — С. 388–400.

140. **Степанец А. И.** Несколько утверждений для выпуклых функций / А. И. Степанец // Укр. мат. журн. — 1999. — Т. 51, № 5. — С. 688–702.

141. **Степанец А. И.** Аппроксимационные характеристики пространств S^p_φ / А. И. Степанец // Укр. мат. журн. — 2001.— Т. 53, № 3. — С. 392–416.

142. **Степанец А. И.** Аппроксимационные характеристики пространств S^p_φ в разных метриках / А. И. Степанец // Укр. мат. журн. — 2001.— Т. 53, № 8. — С. 1121–1146.

143. **Степанец А. И.** Методы теории приближений: В 2 ч. / А. И. Степанец. Киев: Ин–т математики НАН Украины, 2002. — Ч.1. — 427 с. (Труды Ин–та математики НАН Украины; Т. 40).

144. **Степанец А. И.** Методы теории приближений: В 2 ч. / А. И. Степанец. Киев: Ин–т математики НАН Украины, 2002. — Ч.2. —468 с. (Труды Ин–та математики НАН Украины; Т. 40).

145. **Степанец А. И.** Прямые и обратные теоремы приближения функций в пространстве S^p / А. И. Степанец, А. С. Сердюк // Укр. мат. журн. — 2002. — Т. 54, №1. — С. 106–124.

146. **Степанец А. И.** Пространства S^p с несимметричной метрикой / А. И. Степанец, В. И. Рукасов // Укр. мат. журн. — 2003. — Т. 55, № 2. — С. 264–277.

147. **Степанец А. И.** Экстремальные задачи теории приближений в линейных пространствах / А. И. Степанец // Укр. мат. журн. — 2003. — Т. 55, № 10. — С. 1378–1410.

148. **Степанец А. И.** Задачи теории приближений в линейных пространствах / А. И. Степанец // Укр. мат. журн. — 2006. — Т. 58, № 1. — С. 47–92.

149. **Степанець О. І.** Про деякі нові критерії нескінченної диференційовності періодичних функцій / О. І. Степанець, А. С. Сердюк, А. Л. Шидліч // Укр. мат. журн. — 2007. — Т. 59, №10. — С. 1399–1409.

150. **Степанец А. И.** Классификация бесконечно дифференцируемых периодических функций / А. И. Степанец, А. С. Сердюк, А. Л. Шидлич // Укр. мат. журн. — 2008. — Т. 60, №12. — С. 1686–1708.

151. **Степанец А. И.** О связи классов $(\psi, \bar{\beta})$-диффе-ренцируемых функций с классами Жевре / А. И. Степанец, А. С. Сердюк, А. Л. Шидлич // Укр. мат. журн. — 2009. — Т. 61, №1. — С. 140–145.

152. **Степанець О. I.** Найкращі n-членні наближення Λ-методами в просторах S^p_φ / О. I. Степанець, А. Л. Шидліч // Укр. мат. журн. — 2003. — Т. 55, № 8. — С. 1107–1126.

153. **Степанець О. I.** Про одну екстремальну задачу для додатних рядів / О. I. Степанець, А. Л. Шидліч // Укр. мат. журн. — 2005. — Т. 57, № 12. — С. 1677–1683.

154. **Степанец А. И.** Экстремальные задачи для интегралов от неотрицательных функций / А. И. Степанец, А. Л. Шидлич. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007. — 103 с. (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 2007.2).

155. **Степанець О. I.** Про деякі властивості опуклих функцій / О. I. Степанець, А. Л. Шидліч // Укр. мат. журн. — 2007. — Т. 59, № 7. — С. 920–938.

156. **Степанець О. I.** Про один критерій для опуклих функцій / О. I. Степанець, А. Л. Шидліч // Доповіді НАН України. — 2007, № 8. — С. 31–36.

157. **Степанец А. И.** О порядках наилучших приближений интегралов функций при помощи интегралов ранга σ / А. И. Степанец, А. Л. Шидлич // Нелін. колив. — 2007. — Т. 10, № 4. — С. 528–559.

158. **Stepanets A. I.** Best approximations of integrals by integrals of finite rank / A. I. Stepanets, A. L. Shidlich // J. Approx. Theory. — 2010. — V. 162, № 2, P. 323–348.

159. **Степанец А. И.** Экстремальные задачи для интегралов от неотрицательных функций / А. И. Степанец, А. Л. Шидлич // Изв. РАН. Сер. матем. — 2010. — Т. 74, № 3. — С.169—224.

160. **Стерлин М. Д.** Точные постоянные в обратных теоремах теории приближений / М. Д. Стерлин // Докл. АН СССР. — 1972. — Т. 202, №3. — С. 545–547.

161. **Steffensen J. F.** En Ulighted mellem Middelve edier / J. F. Steffensen // Mat. Tidsskrift. — 1920. — B. — P. 49–53.

162. **Тайков Л. В.** Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 / Л. В. Тайков // Мат. заметки. — 1976. — Т. 20, № 3. — С. 433–438.

163. **Тайков Л. В.** Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 / Л. В. Тайков // Мат. заметки. — 1979. — Т. 25, № 2. — С. 217–223.

164. **Темляков В. Н.** О приближении периодических функций многих переменных / В. Н. Темляков // Докл. АН СССР. — 1984. — Т. 279, №2. — С. 301–305.

165. **Темляков В. Н.** Приближение функций с ограниченной смешанной производной / В. Н. Темляков // Тр. МИАН СССР. — 1986. — Т. 178. — 112 с.

166. **Temlyakov V. N.** Greedy Algorithm and m-Term Trigonometric Approximation / V. N. Temlyakov // Constr. Approx. — 1998. — V. 14, № 4. — p. 569–587.

167. **Temlyakov V. N.** Approximation of Periodic Functions / V. N. Temlyakov // Computational Mathematics and Analysis Series. — Commack, New York: Nova Science Publ., 1993. — 419 p.

168. **Temlyakov V. N.** Greedy approximation / V. N. Temlyakov // Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, 20. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. — 418 p.

169. **Temlyakov V. N.** Sparse approximation with bases / V. N. Temlyakov // Advanced Courses in Mathematics. Edited by S. Tikhonov. — CRM Barcelona. Birkhauser / Springer, Basel, 2015. — 261 p.

170. **Тихонов С. Ю.** Об эквивалентности некоторых условий для выпуклых функций / С. Ю. Тихонов // Укр. мат. журн. — 2005. — Т. 57, № 3. — С. 427–431.

171. **Тиман А. Ф.** Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона / А. Ф. Тиман // Докл. АН СССР. — 1950. — Т. 74, № 1. — С. 17 – 20.

172. **Тиман А. Ф.** Усиление теоремы Джексона о наилучшем приближении непрерывных функций многочленами на конечном отрезке вещественной оси / А. Ф. Тиман // Докл. АН СССР. — 1951. — Т. 78, № 1. — С. 17 – 20.

173. **Тиман А. Ф.** Теория приближения функций действительного переменного / А. Ф. Тиман. — Москва: Физматгиз, 1960. — 624 с.

174. **Тиман М. Ф.** Обратные теоремы конструктивной теории функций в пространствах L_p / М. Ф. Тиман // Матем. сб. — 1958. — Т. 46, № 1. — С. 125–132.

175. **Тригуб Р. М.** Конструктивные характеристики некоторых классов функций / Р. М. Тригуб // Изв. АН СССР: Сер. матем. — 1965. — Т. 29, № 3. — С. 615–630.

176. **Trigub R. M.** Fourier analysis and approximation of functions / R. M. Trigub, E. S. Bellinsky. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004. — 585 p.

177. **Ульянов П. Л.** О классах бесконечно дифференцируемых функций / П. Л. Ульянов // Матем. сборник. — 1990. — Т. 181, № 5. — С. 589–609.

178. **Favard J.** Sur l'approximation des fonctions d'une variable reelle / J. Favard // Anal. Harmon. Colloq. Int. Cent. nat. Rech. Sci. — 1949. — V. 15. — P. 97–100.

179. **Favard J.** Sur la saturation des procedes de sommation / J. Favard // J. Math. Pur. Appl. — 1957. — V. 36, №4 — P. 359–372.

180. **Fang G.** Approximation Characteristics for Diagonal Operators in Different Computational Settings / G. Fang, L. Qian // Journal of Approximation Theory. — 2006. — V. 140, № 2. — P. 178–190.

181. **Fang G.** Optimal algorithms for diagonal operators on n-widths in different computational setting / G. Fang, L. Qian // Anal. Theory Appl. — 2007. — V. 23, № 2. — P. 180–187.

182. **Hardy G.** Some properties of fractional integrals. II / G. H. Hardy, J. E. Littlewood // Math. Zeitschr. — 1932. — V 34, № 1. — P. 403 – 439.

183. **Харди Г. Г.** Неравенства / Г. Г. Харди, Д. Е. Литтльвуд, Г. Полиа. — Москва: Изд-во иностр. лит., 1948. — 456 с.

184. **Heinig H. P.** Chebyshev inequality in function spaces / H. P. Heinig, L. Maligranda // Real Anal. Exchange. — 1991/92. — V. 17, № 1. — P 211–247.

185. **Чебышев П. Л.** О приближенных выражениях одних интегралов через другие, взятых в тех же пределах / П. Л. Чебышев // Сообщ. и протоколы заседаний Матем. общества при Харьковском Имп. Унив. — 1882. — № 2. — С. 93–98 (Полное собрание сочинений П.Л. Чебышева. — Москва–Ленинград. — 1978. — Т. 3. — С. 128–131.

186. **Чебышев П. Л.** Об одном ряде, доставляющем предельные величины интегралов при разложении подинтегральной функции на множители / П. Л. Чебышев

// Приложение к 57 тому Записок Имп. Акад. наук. — 1883. — № 4 (Полное собрание сочинений П.Л. Чебышева. — Москва–Ленинград. — 1978. — Т. 3. — С. 157–169.

187. **Черных Н. И.** О неравенстве Джексона в L_2 / Н. И. Черных // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1967. — Т. 88. — С. 71–74.

188. **Черных Н. И.** О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 / Н. И. Черных // Мат. заметки. — 1967. — Т. 2, № 2. — С. 513–522.

189. **Черных Н. И.** Неравенство Джексона в $L_p(0, 2\pi)$ $(1 \leq p < 2)$ с точной константой / Н. И. Черных // Тр. Мат. ин-та РАН. — 1992. — Т. 198. — С. 232–241.

190. **Шидліч А. Л.** Насичення лінійних методів підсумовування рядів Фур'є в просторах S^p_φ / А. Л. Шидліч // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. — Т. 35. — С. 215–232.

191. **Шидліч А. Л.** Найкращі n-членні наближення Λ-методами в просторах S^p_φ / А. Л. Шидліч // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Праці ІМ НАН України. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2003. — Т. 46. — С. 283–306.

192. **Шидліч А. Л.** Про насичення лінійних методів підсумовування рядів Фур'є в просторах S^p_φ / А. Л. Шидліч // Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56, № 1. — С. 133–138.

193. **Шидліч А. Л.** Насичення лінійних методів підсумовування рядів Фур'є в просторах S^p_φ / А. Л. Шидліч // Укр. мат. журн. — 2008. — Т. 60, № 6. — С. 815–828.

194. **Шидліч А. Л.** Апроксимативні характеристики просторів S^p_Φ / А. Л. Шидліч // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Інституту математики НАН України. — 2008. — Т. 5, №1. — С.404–430.

195. **Шидліч А. Л.** Порядкові рівності для деяких функціоналів та їх застосування до оцінок найкращих n-членних наближень і поперечників / А. Л. Шидліч // Укр. мат. журн. — 2009. — Т. 61, № 10. — С. 1403–1423.

196. **Shidlich A. L.** On necessary and sufficient for validity of some Chebyshev-Type inequalities / A. L. Shidlich // Journal of Mathematical Inequalities. — 2011. — V. 5, № 1. — P. 71–85.

197. **Шидліч А. Л.** Порядкові оцінки найкращих n-членних ортогональних тригонометричних наближень класів функцій $\mathcal{F}^{\psi}_{q,\infty}$ в просторах $L_p(\mathbb{T}^d)$ / А. Л. Шидліч // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2011. — Т. 8, № 1. — С. 302–317.

198. **Шидліч А. Л.** Порядкові оцінки для деяких апроксимаційних характеристик / А. Л. Шидліч // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — Т 10, № 1. — С. 304–337.

199. **Шидліч А. Л.** Деякі екстремальні задачі в просторах Орліча / А. Л. Шидліч, С. О. Чайченко // Матем. студії. — 2014. — Т. 42, № 1. — С. 21–32.

200. **Шидліч А. Л.** Порядкові оцінки функціоналів, в термінах яких виражаються найкращі n-членні наближення класів $\mathcal{F}^{\psi}_{q,r}$ / А. Л. Шидліч // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — Т. 11, № 3. — С. 287–314.

201. **Шидліч А. Л.** Апроксимаційні характеристики діагональних операторів в просторах $l_{\mathbf{p}}$ / А. Л. Шидліч, С. О. Чайченко // Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — Т. 11, № 2. — С. 399–412.

202. **Shidlich A. L.** On some inequalities of Chebyshev type. / A. L. Shidlich, S. O. Chaichenko // Math. Inequal. Appl. — 2015. — V. 18, № 4. — P. 1313–1320.

203. **Shidlich A. L.** Approximative properties of diagonal operators in Orlicz spaces / A. L. Shidlich, S. O. Chaichenko // Numer. Funct. Anal. Optim. — 2015. — V. 36, №10. — P. 1339–1352.

204. **Schmidt E.** Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I / E. Schmidt // Math. Annalen. — 1906. — V. 63. — P. 433–476.