Національна академія наук України
Інститут математики

КЛИМЕНКО Олена Миколаївна

УДК 517.64

ДЕФОРМАЦІЇ СИСТЕМ ФОРМ ТА ВІДОБРАЖЕНЬ

01.01.06 — алгебра та теорія чисел

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2015

Дисертацією є рукопис.
Робота виконана у Інстітуті математики НАН України.

Науковий керівник

доктор фізико–математичних наук, доцент
Сергейчук Володимир Васильович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий дослідник відділу топології

Офіційні опоненти:

доктор фізико–математичних наук, доцент
Олійник Андрій Степанович,
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка,
доцент кафедри алгебри та математичної логіки
механіко-математичного факультету

кандидат фізико–математичних наук
Дяченко Сергій Миколайович,
Національний університет «Києво-Могилянська академія»,
старший викладач кафедри математики
факультету інформатики

Захист відбудеться "27" жовтня 2015 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.03 при Інституті математики НАН України за адресою: 01601, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий "24" вересня 2015 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради
доктор фіз.-мат. наук **С. І. Максименко**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Зведення матриці до її жорданової форми — нестабільна операція: як жорданова форма так і перетворення подібності до неї залежать розривно від елементів початкової матриці. Якщо елементи матриці відомі лише приблизно, то нерозумно зводити її до жорданової форми. Кожна матриця у околі даної матриці може бути зведена до її жорданової форми, але при такій операції гладка залежність від елементів матриці втрачається.

Як альтернативу до канонічної матриці Жордана, В. І. Арнольд[1] побудував *мініверсальну деформацію* комплексної квадратної матриці A, тобто просту нормальну форму, до якої всі матриці $A+E$ близькі до A можуть бути зведені перетвореннями подібності, що гладко залежать від елементів E. Оскільки кожна квадратна матриця подібна до жорданової матриці, достатньо дослідити збурення матриць A в канонічній формі Жордана.

В дисертаційній роботі побудовано алгоритм зведення сім'ї матриць до її мініверсальної деформації, якій будує не тільки нормальну форму Арнольда для кожної матриці в околі даної матриці, але й перетворюючу матрицю, що важливо для застосувань мініверсальних деформацій.

Також одержано блочно-трикутні мініверсальні деформації матриць відносно гладких перетворень подібності та блочно-трикутні мініверсальні деформаці пучків матриць відносно гладких перетворень еквівалентності. Відмітимо, що стаття[2], в якій вперше побудовано мініверсальну деформацію пучків матриць, була відзначена призом робочої групи SIAM (Society for Industrial and Applied Mathematics) з лінійної алгебри, як найкраща стаття з прикладної лінійної алгебри за 1997–2000 рр.

Ми будуємо два орієнтовані графи, вершини яких є 2×2 або, відповідно, 3×3 канонічні матриці відносно конгруентності і існує орієнтований шлях з A у B тоді і тільки тоді, якщо A може бути перетворена як завгодно малим збуренням у матрицю, яка конгруентна B.

---

[1] В. И. Арнольд, О матрицах, зависящих от параметров // Успехи матем. наук.– 1971.– Т. 26, № 2.– С. 101–114.

[2] A. Edelman, E. Elmroth, B. Kågström, A geometric approach to perturbation theory of matrices and matrix pencils. Part I: Versal deformations // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 1997. V. 18. – P. 653–692.

Ці графи є *графами замикань* для класів конгруентності 2×2 та 3×3 матриць, бо існує орієнтований шлях з вершини A до вершини B тоді і тільки тоді, якщо клас конгруентності матриці A міститься в замиканні класа конгруентності матриці B. Граф замикання показує як класи еквівалентності відносяться один до одного у топологічному просторі матриць фіксованого розміру.

Побудовано також графи замикань для класів *конгруентності 2×2 матриць.

Описані задачі є предметом інтересу численої кількості як українських, так і іноземних науковців. Все вищезазначене свідчить про актуальність теми дисертації.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано у відділі топології Інституту математики НАН України в рамках теми наукових досліджень НАН України № III-9-11 "Алгебраїчні, геометричні та топологічні властивості многовидів з додатковими структурами", що виконувалась з 2011 по 2015 роки у відділі топології Інституту математики НАН України (номер держреєстрації 0111U000159).

Мета і завдання дослідження. *Метою* даної роботи є побудова (i) алгоритму зведення сім'ї матриць до нормальної форми Арнольда, (ii) блочно-трикутного аналога нормальної форми Арнольда для матриць і пучків матриць, (iii) графів замикань для матриць та пачок матриць малого розміру відносно конгруентності та *конгруентності.

Об'єктом дослідження є матриці, лінійні відображення та білінійні/півторалінійні форми.

Предметом дослідження є мініверсальні деформації та графи замикань.

Методи дослідження. Класифікаційні і матричні методи лінійної алгебри.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну та виносяться на захист, такі:

1. Побудовано алгоритм, який зводить кожну матрицю в околі даної квадратної комплексної матриці до нормальної форми Арнольда відносно гладких перетворень подібності $S^{-1}AS$.

2. Одержано блочно-трикутні нормальні форми матриць відносно гладких перетворень подібності та блочно-трикутні нормальні форми пучків матриць відносно гладких перетворень еквівалентності.

3. Побудовано графи замикань для класів конгруентності 2×2 та 3×3 матриць і для пачок 2×2 та 3×3 матриць.

4. Побудовано графи замикань для класів *конгруентності 2×2 матриць.

Практичне значення одержаних результатів. Мініверсальні деформації матриць відносно подібності і пучків матриць мають велике значення для застосувань. Вони дозволяють вивчати сім'ї матриць і пучків матриць спеціального вигляду, які складаються з матриць з багатьма нулями, і поширювати ці результати на довільні матриці. Вони використовуються, зокрема, в теорії стабільності, багатопараметричних лінійних динамічних системах, та в динаміці механічних систем. Застосування базуються, зокрема, на факті, що спектри матриці та її нормальної форми співпадають, але остання має більш простий вигляд.

Ми будуємо перетворення до нормальних форм у явному вигляді, що розширює можливості застосувань мініверсальних дефомацій. Знайдений нами блочно-трикутний вигляд мініверсальних деформацій матриць та матричних пучків має очевидні переваги перед звичайними деформаціями.

Побудовані графи замикань для класів конгруентності 2×2 та 3×3 матриць і для класів *конгруентності 2×2 матриць показують, як довільно мале збурення матриці може змінити її канонічну форму відносно конгруентності або *конгруентності. Це важливо знати, якщо матриця відома лише приблизно.

Особистий внесок здобувача. Результати отримані дисертанткою особисто, під загальним кервництвом В. В. Сергейчука та бразильского академіка В. Футорного.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на:

- Українському математичному конгресі—2009 (до 100-річчя від дня народження М. М. Боголюбова), 27–29 серпня 2009 р., Інститут математики НАН України, Київ.
- Сьомій міжнародній алгебраїчній конференції в Україні, 18–23 серпня 2009 р., Національний університет ім. В. Н. Карамзіна, Харків.
- LXVIII науковій конференції-професорсько викладацького складу, аспірантів, студентів та співробітників відокремлених структурних підрозділів Національного транспортного університету, 16–18 травня 2012 р., Київ.
- Міжнародній алгебраїчній конференції, присвяченій 100-річчю від дня народження Л. А. Калужніна, 3–7 липня 2014, Національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ.
- Міжнародній конференції молодих математиків, 3–6 червня 2015, Інститут математики НАН України, Київ.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у десяти роботах [1-10], з яких п'ять статей — у фахових наукових виданнях України та інших держав, що включені до переліку фахових видань, затверджених МОН України.

Структура, обсяг та зміст дисертації. Дисертація складається із вступу, п'яти розділів, висновків і списку використаних джерел, який містить 61 найменування. Повний обсяг дисертації 121 сторінка, з них 7 сторінок займає список використаних джерел.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

Основна частина роботи складається з п'яти розділів. На початку кожного розділу подається короткий зміст цього розділу.

Перший розділ присвячений побудові алгоритму зведення квадратної матриці до нормальної форми Арнольда відносно подібності.

Для кожної жорданової матриці

$$J = J_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus J_{\lambda_t}, \tag{1}$$

де

$$J_{\lambda_i} := J_{m_{i1}}(\lambda_i) \oplus \dots \oplus J_{m_{ir_i}}(\lambda_i), \qquad m_{i1} \geqslant m_{i2} \geqslant \ldots \geqslant m_{ir_i},$$

$J_{m_{ij}}(\lambda_i)$ — клітка Жордана розміру $m_{ij} \times m_{ij}$ з власним числом λ_i, $\lambda_i \neq \lambda_j$ якщо $i \neq j$, визначимо матрицю

$$J + \mathcal{D} := \bigoplus_{i=1}^{t} \begin{bmatrix} J_{m_{i1}}(\lambda_i) + 0^{\downarrow} & 0^{\downarrow} & \dots & 0^{\downarrow} \\ 0^{\leftarrow} & J_{m_{i2}}(\lambda_i) + 0^{\downarrow} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0^{\downarrow} \\ 0^{\leftarrow} & \dots & 0^{\leftarrow} & J_{m_{ir_i}}(\lambda_i) + 0^{\downarrow} \end{bmatrix} \tag{2}$$

у якій

$$0^{\leftarrow} := \begin{bmatrix} * & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{та} \quad 0^{\downarrow} := \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

— блоки, елементи яких є нулями та зірочками.

В. І. Арнольд[3] довів наступну теорему:

Нехай J — жорданова матриця (1). Тоді усі матриці $J + X$, що є достатньо близькими до J, можуть бути одночасно зведені деякими перетвореннями

$$J + X \mapsto \mathcal{S}(X)^{-1}(J + X)\mathcal{S}(X), \qquad \begin{array}{c} \mathcal{S}(X) \text{ аналітична} \\ \text{в } 0 \text{ та } \mathcal{S}(0) = I, \end{array} \tag{3}$$

до форми $J + \mathcal{D}$, яка визначена у (2), де зірочки замінюються комплексними числами, що залежать аналітично від елементів X. Кількість зірочок — мінімальна, яка може бути отримана перетвореннями форми (3), вона дорівнює корозмірності класу подібності матриці J.

Матриця (2) з незалежними параметрами замість зірочок називається *мініверсальною деформацією* матриці J.

[3] В. И. Арнольд, О матрицах, зависящих от параметров // Успехи матем. наук.– 1971.– Т. 26, № 2 (158).– С. 101–114.

Ми будуємо алгоритм зведення всіх матриць $J + X$ в околі J до нормальних форм Арнольда відносно гладких перетворень подібності (3). Цей алгоритм використовує елементарні перетворення матриць і дозволяє будувати перетворюючу матрицю $\mathcal{S}(X)$. Альтернативний алгоритм для побудови матриці $\mathcal{S}(X)$ у формі рядов Тейлора був розроблен Майлибаєвим[4].

Разом зі студентами Національного Технічного Університету України "Київський Політехнічний Інститут" Блажком І.О., Кублицьким Д.О., Ящуком С.М. створено програму для зведення сім'ї матриць до нормальної форми Арнольда відносно подібності. Програма реалізована за допомогою математичного пакету MatLab, що має зручну вбудовану мову програмування, та мови програмування C++.

Другий розділ дисертації присвячений побудові блочно-трикутних мініверсальних деформацій матриць та пучків матриць.

Г. Р. Беліцький[5] побудував алгоритм зведення матриць будь-якої системи лінійних відображень до канонічної форми. Для цього він довів, що довільна жорданова канонічна матриця J перестановочно подібна до деякої матриці $J^\#$ такої, що всі комутуючи з нею матриці є блочно-трикутними. В. В. Сергейчук запропонував називати $J^\#$ *канонічною матрицею Вейра* матриці J.

У цьому розділі ми знаходимо іншу властивість канонічних матриць Вейра: вони мають блочно-трикутні мініверсальні деформації. Тому, якщо сім'я матриць що є достатньо близькою до даної квадратної матриці і визначається з точністю до гладких перетворень подібності, тоді ми можемо взяти її у формі $J^\# + E$, де E є нижньо блочно-трикутною.

Матриця $J^\#$ визначається наступним чином. Нехай $J = J_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus J_{\lambda_t}$ — жорданова матриця (1). Для кожного i, матриця J_{λ_i} переста-

[4] A. A. Mailybaev, Transformation of families of matrices to normal forms and its application to stability theory // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 1999. – V. 21. – P. 396–417

[5] Г. Р. Белицкий, Нормальные формы в пространстве матриц // Анализ в бесконечномерных пространствах и теория операторов: сб. науч. трудов / науч. ред. В. А. Марченко. – Киев: Наукова думка. – 1983. – 152 с.

новочно подібна матриці вигляду

$$J^{\#}_{\lambda_i} = \begin{bmatrix} \lambda_i I_{s_1} & \begin{bmatrix} I_{s_2} \\ 0 \end{bmatrix} & & 0 \\ & \lambda_i I_{s_2} & \ddots & \\ & & \ddots & \begin{bmatrix} I_{s_k} \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0 & & & \lambda_i I_{s_k} \end{bmatrix},$$

де s_j — кількість жорданових кліток $J_l(\lambda_i)$ розмірності $l \geqslant j$ в $J(\lambda_i)$. Таким чином, існує матриця P_i одержана перестановкою рядків одиничної матриці така, що $P_i^{-1} J_{\lambda_i} P_i = J^{\#}_{\lambda_i}$. Матриця

$$J^{\#} =: J^{\#}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus J^{\#}_{\lambda_t} = P_i^{-1} J_{\lambda_1} P_1 \oplus \cdots \oplus P_t^{-1} J_{\lambda_t} P_t \tag{4}$$

називається *канонічною формою Вейра* матриці J.

Теорема 2.2. *Нехай J — жорданова канонічна матриця* (1), $J^{\#}$ *— її канонічна форма Вейра* (4),

$$J + \mathcal{D} = (J_{\lambda_1} + \mathcal{D}_1) \oplus \cdots \oplus (J_{\lambda_t} + \mathcal{D}_t)$$

— її мініверсальна деформація (2). *Тоді*

$$\begin{aligned} J^{\#} + \mathcal{D}^{\#} &= (J^{\#}_{\lambda_1} + \mathcal{D}^{\#}_1) \oplus \cdots \oplus (J^{\#}_{\lambda_t} + \mathcal{D}^{\#}_t) \\ &:= P_1^{-1}(J_{\lambda_1} + \mathcal{D}_1)P_1 \oplus \cdots \oplus P_t^{-1}(J_{\lambda_t} + \mathcal{D}_t)P_t \end{aligned}$$

— блочно-трикутна мініверсальна деформація матриці $J^{\#}$.

Аналогічні блочно-трикутні мініверсальні деформації одержано для пучків матриць та контраградієнтних пучків матриць.

Третій розділ присвячено вивченню поведінки при збуреннях канонічної форми 2×2 та 3×3 матриць відносно конгруентності та пачок матриць відносно конгруентності.

Ми будуємо діаграми Хассе G_2 та G_3 для впорядкування відносно включення на множинах класів конгруентності 2×2 та 3×3 комплексних матриць. Іншими словами, ми будуємо два орієнтовані графи, вершини яких є 2×2 або, відповідно, 3×3 канонічні матриці відносно конгруентності і існує орієнтований шлях з A у B тоді і тільки тоді, якщо A може бути перетворена як завгодно малим збуренням у матрицю, яка конгруентна B. Ми користуємось канонічними матрицями відносно конгруентності та *конгруентності, які були побудовані Р. Хорном та В. В. Сергейчуком[6].

Діаграми G_2 та G_3 є графами замикання в сенсі наступного означення. Нехай T — топологічний простір з відношенням еквівалентності. *Граф замикання* (або *діаграма замикання*) — це орієнтований граф, вершини якого бієктивно відповідають класам еквівалентності та для класів еквівалентності a та b є орієнтований шлях з вершини a до вершини b тоді і тільки тоді, якщо $a \subset \overline{b}$, де $\overline{b}$ позначає замикання b. Таким чином, граф замикання є діаграмою Хассе для множини класів еквівалентності з наступним частковим порядком: $a \preccurlyeq b$ тоді і тільки тоді, якщо $a \subset \overline{b}$. Граф замикання показує як класи еквівалентності відносяться один до одного у T.

Векторний простір

$$T(A) := \{X^T A + AX \mid X \in \mathbb{C}^{n\times n}\}$$

є дотичним простором до класу конгруентності матриці A в точці A. Числа

$$\dim_{\mathbb{C}} T(A), \qquad \operatorname{codim}_{\mathbb{C}} T(A) := n^2 - \dim_{\mathbb{C}} T(A)$$

називаються *розмірністю* та *корозмірністю* класу конгруентності матриці A.

Теорема 3.2. *Граф замикання G_2 для класів конгруентності 2×2 матриць наведено на рисунку 1. Кожний клас конгруентності задається його канонічною матрицею. Граф скінченний: $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{smallmatrix}\right]$ представляє скінченну множину вершин, індексованих $\lambda \in \mathbb{C} \smallsetminus \{-1, 1\}$ (за умови, що кожне ненульове λ визначене з точністю до заміни на λ^{-1}) зі стрілками $\left[\begin{smallmatrix} 1 & \\ & 0 \end{smallmatrix}\right] \to \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{smallmatrix}\right]$ до кожної з цих вершин. Класи конгруентності канонічних матриць, що знаходяться на одному горизонтальному рівні у G_2, мають однакову розмірність, що вказана праворуч.*

Наприклад, граф G_2 показує, що як завгодно малий окіл $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ містить матриці з канонічними матрицями відносно конгруентності

[6] R. A. Horn, V. V. Sergeichuk, Canonical forms for complex matrix congruence and *congruence // Linear Algebra Appl. – 2006. – V. 416. – P. 1010–1032.

$$
\begin{tikzcd}
\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} & \dim\ 3 \\
& \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix} \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & & \dim\ 2 \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \arrow[uu] & & & \dim\ 1 \\
& \begin{bmatrix} 0 & \\ & 0 \end{bmatrix} \arrow[ul] \arrow[uu] & & \dim\ 0
\end{tikzcd}
$$

Рис. 1: Граф замикання G_2 для класів конгруентності 2×2 матриць.

$\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ і $\left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, але для будь-яких інших канонічних матриць A_{can} є окіл $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ без матриць з канонічною формою A_{can}.

Теорема 3.3. *Граф замикання G_3 для класів конгруентності 3×3 матриць наведено на рисунку 2. Класи конгруентності, що відповідають вершинам, задані їх 3×3 канонічними матрицями відносно конгруентності. Граф скінченний: $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & \\ \lambda & 0 & \\ & & 0 \end{smallmatrix}\right]$ та $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & \\ \mu & 0 & \\ & & 1 \end{smallmatrix}\right]$ представляють скінченні множини вершин, індексованих $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \smallsetminus \{-1, 1\}$, причому кожне ненульове λ визначене з точністю до заміни на λ^{-1} та кожне ненульове μ визначене з точністю до заміни на μ^{-1}. Класи конгруентності з вершинами на одному горизонтальному рівні мають однакову розмірність, що вказана праворуч.*

Зауваження. Нехай M є 2×2 або 3×3 канонічна матриця відносно конгруентності.

- Нехай N — інша канонічна матриця відносно конгруентності того ж розміру. Кожний окіл M містить матрицю, канонічна форма відносно конгруентності якої є N тоді і тільки тоді, якщо існує орієнтований шлях з M в N у G_2 або G_3 (якщо $M = N$, тоді завжди існує "лінивий" шлях довжини 0 з M в M).

- Замикання класу конгруентності матриці M дорівнює об'єднанню класів конгруентності усіх канонічних матриць N, та-

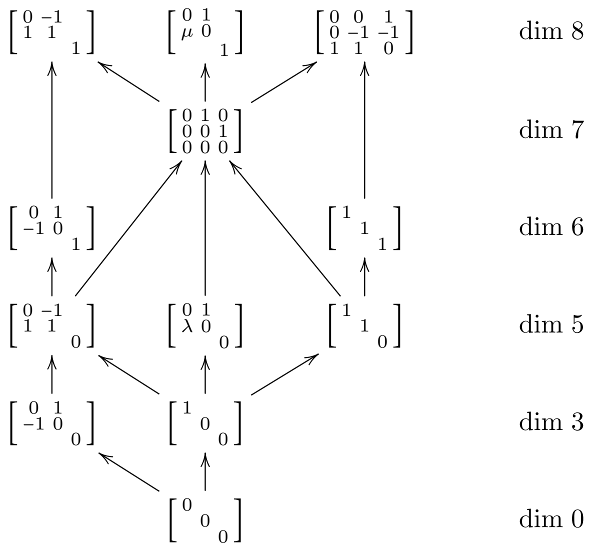

Рис. 2: Граф замикання G_3 для класів конгруентності 3×3 матриць.

ких що існує орієнтований шлях з N в M (якщо $N = M$, тоді завжди існує "лінивий" шлях).

Четвертий розділ присвячено означенню пачок матриць відносно конгруентності та побудові графів замикання для пачок конгруентності 2×2 і 3×3 матриць.

В. І. Арнольд визначає *пачку матриць відносно подібності* як множину усіх матриць, що мають однаковий жордановий тип: матриці A та B мають однаковий *жордановий тип*, якщо існує бієкція з множини різних власних значень матриці A у множину різних власних значень матриці B, що перетворює жорданову канонічну форму матриці A у жорданову канонічну форму матриці B. Наприклад, матриці

$$J_3(0) \oplus J_2(0) \oplus J_5(1), \quad J_3(2) \oplus J_2(2) \oplus J_5(-3)$$

належать до однієї пачки. Усі матриці пачки мають схожі властивості; наприклад, їх жорданові матриці J мають однакову множину

$\{X \mid JX = XJ\}$ комутуючих матриць.

Означення пачок матриць відносно конгруентності є не таким очевидним. Теран і Доріко[7] визначають пачки через канонічну форму для конгруентності, аналогічно до пачок матриць відносно подібності та пачок пучків матриць. Але на відміну від збурень канонічних матриць Жордана і Кронекера, поведінка збурення канонічної матриці відносно конгруентності залежить від значень її параметрів. Крім того, ми можемо отримати інше розбиття на пачки, використовуючи іншу канонічну форму відносно конгруентності. Тому ми визначаємо пачки відносно конгруентності наступним чином:

> Дві квадратні матриці A та B належать до однієї *пачки відносно конгруентності* тоді і тільки тоді, якщо пучки $A + \lambda A^T$ та $B + \lambda B^T$ належать до однієї пачки відносно строгої еквівалентності.

Це означення базується на важливому твердженні А. В. Ройтера: дві $n \times n$ матриці A та B конгруентні тоді і тільки тоді, якщо пучки $A+\lambda A^T$ та $B+\lambda B^T$ строго еквівалентні. Ми наводимо інші аргументи на користь цього означення і доводимо наступну теорему.

Теорема 4.2.

(a) *Граф замикання для пачок конгруентності* 2×2 *матриць поданий на рисунку 3. Вершина* $\{\left[\begin{smallmatrix}0&1\\ \lambda&0\end{smallmatrix}\right]\}_{\lambda\neq\pm1}$ *представляє пачку, що складається з усіх матриць з канонічною формою конгруентності* $\left[\begin{smallmatrix}0&1\\ \lambda&0\end{smallmatrix}\right]$ *з* $\lambda \neq \pm1$*; кожне ненульове* λ *визначене з точністю до заміни на* λ^{-1}*. Інші вершини є канонічними матрицями конгруентності; відповідні пачки співпадають з їх класами конгруентності.*

(b) *Граф замикання для пачок конгруентності* 3×3 *матриць поданий на малюнку 4.*

- *Пачка, що відповідає* $\left\{\left[\begin{smallmatrix}0&1&\\ \lambda&0&\\ &&0\end{smallmatrix}\right]\right\}_{\lambda\neq\pm1}$ *складається з усіх матриць з канонічними формами* $\left[\begin{smallmatrix}0&1&\\ \lambda&0&\\ &&0\end{smallmatrix}\right]$, $\lambda \neq \pm1$.

[7] F. De Terán, M. Dopico, The solution of the equation $XA + AX^T = 0$ and its application to the theory of orbits // Linear Algebra Appl. – 2011. – V.434, № 1. – P. 44–67.

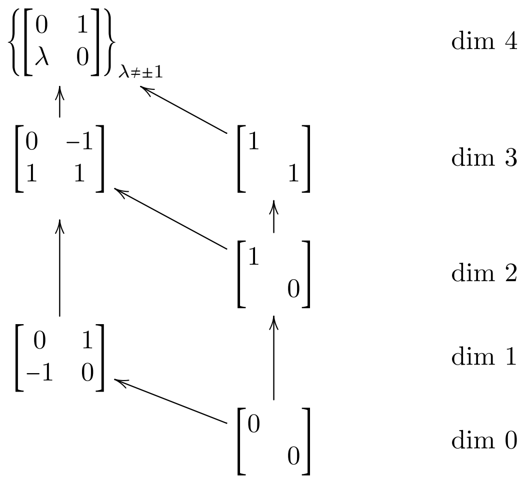

Рис. 3: Граф замикання для пачок конгруентності 2×2 матриць.

- *Пачка, що відповідає* $\left\{\begin{bmatrix}0&1&\\ \mu&0&\\ &&1\end{bmatrix}\right\}_{\mu\neq\pm1}$ *складається з усіх матриць з канонічними формами* $\begin{bmatrix}0&1&\\ \mu&0&\\ &&1\end{bmatrix}$, $\quad \mu\neq\pm1$.
- *Інші пачки співпадають з класами когруентності відповідних канонічних матриць.*

Зауваження. Оскільки кількість пачок конгруентності матриць фіксованого розміру $n\times n$ скінченна, то для довільної $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ існують пачки конгруентності $\mathcal{A}_1,\dots,\mathcal{A}_t\subset\mathbb{C}^{n\times n}$ такі, що кожний достатньо малий окіл A міститься у $\mathcal{A}_1\cup\dots\cup\mathcal{A}_t$ та має ненульовий перетин з кожною $\mathcal{A}_i$. Якщо граф замикання для пачок конгруентності $n\times n$ матриць відомий, тоді множина $\mathcal{A}_1,\dots,\mathcal{A}_t$ складається з усіх пачок конгруентності $\mathcal{A}$, таких що існує орієнтований шлях (в тому числі "лінивий" шлях довжини 0) з вершини, що представляє пачку з матрицею A, в вершину, що представляє $\mathcal{A}$. Це важливо знати, наприклад, якщо A відома тільки приблизно.

П'ятий розділ присвячений побудові графів замикання для класів *конгруентності 2×2 матриць.

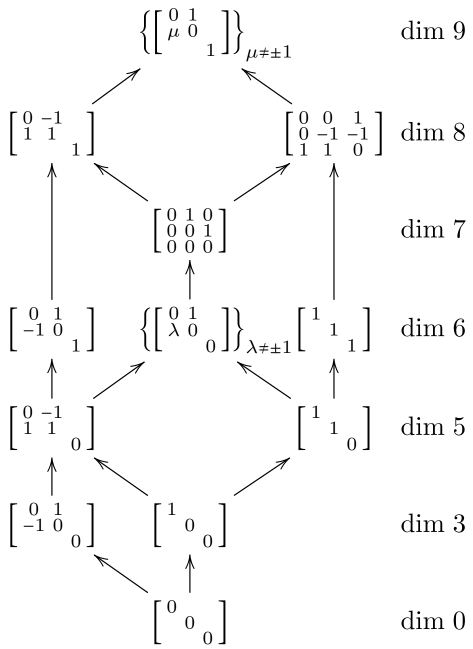

Рис. 4: *Граф замикання для пачок конгруентності* 3×3 *матриць.*

Теорема 5.1. *Граф замикання для класів *конгруентності* 2×2 *матриць поданий на рисунку 5, де* $\lambda, \mu, \nu, \sigma, \tau \in \mathbb{C}$, $\mathbb{R}_+$ *— множина невід'ємних дійсних чисел, та* $\operatorname{Im}(c)$ *— уявна частина* $c \in \mathbb{C}$. *Кожний клас *конгруентності задається його канонічною матрицею. Граф скінченний: кожна вершина, окрім* $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, *зображує скінченну множину вершин, індексованих параметрами відповідної канонічної матриці. Класи *конгруентності канонічних матриць, що лежать на одному горизонтальному рівні, мають однакову розмірність над* $\mathbb{R}$, *яка дана зправа.*

Стрілка $\left[\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] \to \left[\begin{smallmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{smallmatrix}\right]$ *існує тоді і тільки тоді, якщо* $\lambda = \mu a + \nu b$ *для деяких невіде'мних* $a, b \in \mathbb{R}$. *Стрілка* $\left[\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] \to \left[\begin{smallmatrix} 0 & \tau \\ \tau & i\tau \end{smallmatrix}\right]$ *існує тоді і тільки тоді, якщо уявна частина від* $\lambda\bar{\tau}$ *невід'ємна. Стрілка* $\left[\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{smallmatrix}\right] \to \left[\begin{smallmatrix} 0 & \tau \\ \tau & i\tau \end{smallmatrix}\right]$ *існує тоді і тільки тоді, якщо* $\tau = \pm\lambda$. *Стрілка*

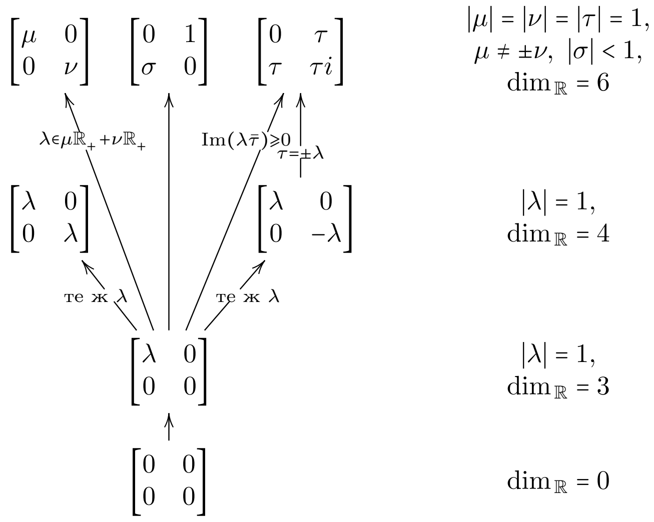

Рис. 5: *Граф замикання для класів *конгруентності* 2×2 *матриць.*

$\left[\begin{smallmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right] \to \left[\begin{smallmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \pm\lambda\end{smallmatrix}\right]$ *існує тоді і тільки тоді, якщо значення* λ *однакове для обох матриць. Інші стрілки існують при всіх значеннях параметрів їх матриць.*

Зауваження. Нехай M — 2×2 канонічна матриця відносно *конгруентності.

- Нехай N — інша 2×2 канонічна матриця відносно *конгруентності. Кожний окіл матриці M містить матрицю, *конгруентна канонічна форма якої є N, тоді і тільки тоді, якщо існує орієнтований шлях з M в N (якщо $M = N$, тоді існує "лінивий" шлях довжини 0 з M в N).

- Замикання класу *конгруентності матриці M дорівнює об'єднанню класів *конгруентності усіх канонічних матриць N таких, що існує орієнтований шлях з N в M (якщо $M = N$ тоді існує "лінивий" шлях).

Для матриць відносно подібності і відносно конгруентності завжди існують голоморфні перетворення до їх мініверсальних деформацій. Ми доводимо, що це невірно для матриць відносно *конгруентності.

У кінці основної частини дисертації наведено загальні висновки.

ВИСНОВКИ

У дисертації побудовано алгоритм, який зводить кожну матрицю в околі даної квадратної матриці до нормальної форми Арнольда відносно гладких перетворень подібності. Бажано побудувати аналогічний алгоритм для пучків матриць і знайти його область збіжності.

Побудовано графи замикань для класів конгруентності 2×2 та 3×3 матриць і для пачок 2×2 та 3×3 матриць, а також для класів *конгруентності 2×2 матриць. Для матриць відносно подібності і для пучків матриць будувати графів замикань набагато простіше, бо H. den Boer, G. Ph. A. Thijsse (1980) і, незалежно, A. S. Markus, E. È. Parilis (1980) для кожної жорданової матриці описали множину канонічних форм Жордана в її околі, а потім A. Pokrzywa (1986) поширив цей результат на канонічні форми Кронекера пучків матриць. Бажано одердати аналогічний опис для канонічних матриць відносно конгруентності і *конгруентності. Це дало б змогу розробити комп'ютерну программу, яка будує графи замикань для класів конгруентності і *конгруентності. Аналогічна програма для матриць відносно подібності і для пучків матриць має назву StratiGraph[8] і постійно вдосконалюється.

Список опублікованих праць за темою дисертації:

1 Klimenko L. Block triangular miniversal deformations of matrices and matrix pencils / L. Klimenko, V. V. Sergeichuk // Matrix Methods: Theory, Algorithms and Applications / Editors V. Olshevsky, E. Tyrtyshnikov. – Hackensack: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. – 2010. – P. 69–84.

2 Futorny V. Change of the *congruence canonical form of 2-by-2 matrices under perturbations / V. Futorny, L. Klimenko, V.V.

[8]P. Johansson, StratiGraph User's Guide, Technical Report UMINF 03.21 (ISSN-0348-0542), Department of Computing Science, Umeå University, Sweden, 2003. Available at: http://www8.cs.umu.se/ pedher/research/papers/sg-usersguide.pdf

Sergeichuk // Electr. J. Linear Algebra. – 2014. – V. 27. – P. 146–154.

3 Клименко О. М. Голоморфне перетворення до мініверсальної деформації відносно *конгруентності існує не завжди / О. М. Клименко // Укр. мат. журн. – 2014. – Т. 66, №9. – С. 1276–1279.

4 Klimenko L. An informal introduction to perturbations of matrices determined up to similarity or congruence / L. Klimenko, V. V. Sergeichuk // São Paulo J. Math. Sci. – 2014. – V. 8. – P. 1–22.

5 Futorny V. Change of the congruence canonical form of 2-by-2 and 3-by-3 matrices under perturbations and bundles of matrices under congruence / V. Futorny, L. Klimenko, V.V. Sergeichuk // Linear Algebra Appl. – 2015. – V. 469. – P. 305–334.

6 Klimenko L. Block triangular miniversal deformations of matrices and matrix pencils / L. Klimenko, V. Sergeichuk // Ukrainian Mathematical Congress [Електронний ресурс]: abstracts. – 2009. – Режим доступу: http://www.imath.kiev.ua/ congress2009/Abstracts/Klimenko.pdf.

7 Klimenko E. Classification of linear operators on a 5-dimensional unitary space / E. Klimenko // 7th Intern. Algebraic Conf. in Ukraine: abstracts.– Kharkiv. – 2009. – P. 72.

8 Клименко О. М. Алгоритм приведення до канонічного виду матриць лінійних операторів в п'ятивимірному унітарному просторі та його реалізація на мові програмування C++ / О. М. Клименко, В. В. Сергейчук // LXVIII наукова конференція професорсько викладацького складу, аспірантів, студентів та співробітників відокремлених структурних підрозділів Національного транспортного університету: тези. – Київ. – 2012. - С.355.

9 Klimenko E. A holomorphic transformation to a miniversal deformation under *congruence does not always exist // International Algebraic Conference dedicated to 100th anniversary of L. A. Kaluzhnin: Abstracts.– Kyiv. – 2014. – P. 43.

10 Клименко О.М. Голоморфні перетворення до мініверсальної деформації // International Conference of Young Mathematicians: Abstracts.– Kyiv. – 2015. – P. 37.

АНОТАЦІЯ

Клименко О. М. *Деформації систем форм та відображень.* — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук зі спеціальності 01.01.06 — алгебра та теорія чисел. — Інститут математики НАН України, Київ, 2015.

Побудовано алгоритм, який зводить кожну матрицю в околі даної квадратної комплексної матриці до нормальної форми Арнольда відносно гладких перетворень подібності.

Одержано блочно-трикутні нормальні форми матриць відносно гладких перетворень подібності та блочно-трикутні нормальні форми пучків матриць відносно гладких перетворень еквівалентності.

Побудовано графи замикань для класів конгруентності 2×2 та 3×3 матриць.

Дано нове означення пачок матриць відносно конгруентності, яке більш узгоджене з поведінкою матриць при збуреннях і побудовано графи замикань для таких пачок 2×2 та 3×3 матриць.

Побудовано графи замикань для класів *конгруентності 2×2 матриць.

Ключові слова: подібність, конгруентність і *конгруентність матриць; збурення матриць; мініверсальні деформації; графи включень.

АННОТАЦИЯ

Клименко Е. Н. *Деформации систем форм и отображений.* — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 — алгебра и теория чисел. — Институт математики НАН Украины, Киев, 2015.

Построен алгоритм, который сводит каждую матрицу в окрестности данной квадратной комплексной матрицы к нормальной форме Арнольда относительно гладких преобразований подобия.

Получены блочно-треугольные нормальные формы матриц относительно гладких преобразований подобия и блочно-треугольные

нормальные формы пучков матриц относительно гладких преобразований эквивалентности.

Построены графы замыканий для классов конгруэнтности 2×2 и 3×3 матриц.

Дано новое определение пачек матриц относительно конгруэнтности, которое более согласовано с поведением матриц при возмущениях и построены графы замыканий для таких пачек 2×2 и 3×3 матриц.

Построены графы замыканий для классов *конгруэнтности 2×2 матриц.

Ключевые слова: подобие, конгруэнтность и *конгруэнтность матриц; возмущения матриць; миниверсальные деформации; графы включений.

ABSTRACT

Klimenko O. M. *Deformation of systems of forms and mappings.* — Manuscript.

Thesis for the degree of candidate of physical and mathematical sciences by speciality 01.01.06 — Algebra and Number theory. — Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2015.

The reduction of a matrix to its Jordan form is an unstable operation: both the Jordan form and a reduction transformation depend discontinuously on the entries of the original matrix. Therefore, if the entries of a matrix are known only approximately, then it is unwise to reduce it to Jordan form. For these reasons, V. I. Arnold (1971) constructed a miniversal deformation of each Jordan matrix J; that is, a simple normal form to which all matrices A close to J can be reduced by similarity transformations that smoothly depend on the entries of A.

We construct an algorithm that reduces each matrix in an neighborhood of J to Arnold's normal form by smooth similarity transformations and calculates the transforming matrix. On each step of the algorithm, we reduce the matrix by elementary transformations. Another algorithm was constructed by A. A. Mailybaev (1999); he represents the transforming matrix in the form of Taylor series.

Arnold's normal forms are not block triangular. Using Weyr's canonical matrices under similarity instead of Jordan's canonical matrices, we

give block-triangular normal forms of matrices with respect to smooth transformations of similarity and block-triangular normal forms of matrix pencils with respect to smooth equivalence transformations.

The closure graphs for congruence classes of 2×2 and 3×3 matrices are constructed. These graphs show how the congruence classes relate to each other in the affine space of $n \times n$ matrices.

We show that the definition of bundles of matrices with respect to congruence given by F. De Terán and M. Dopico (2011) does not correlate with the behavior of matrices under perturbations. We give a new definition of bundles, which correlates with the behavior of matrices. The closure graphs of such bundles for 2×2 and 3×3 matrices are constructed.

The closure graph for *congruence classes of 2×2 is constructed.

Key words: unitary similarity, unicellular matrices, Toeplitz matrices, positive definiteness, block matrices, miniversal deformations, rigid systems of linear differential equations.

Підписано до друку 22.09.2015. Формат 60×84/16. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. . Умов. друк. арк. .
Тираж 100 пр. Зам. . Безкоштовно.