

Національна академія наук України  
Інститут математики

На правах рукопису

**Клименко Олена Миколаївна**

УДК 517.64

## **Деформації систем форм та відображень**

01.01.06 — алгебра та теорія чисел

Дисертація

на здобуття наукового ступеня  
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник  
доктор фіз.-мат. наук, доцент  
**Сергейчук Володимир  
Васильович**

Київ — 2015

# ЗМІСТ

<b>В С Т У П</b>	<b>4</b>
<b>РОЗДІЛ 1</b>	
Алгоритм зведення матриці до нормальної форми Арнольда відносно подібності	<b>22</b>
<b>РОЗДІЛ 2</b>	
Блочно-трикутні мініверсальні деформації матриць та пучків матриць	<b>28</b>
2.1. Мініверсальні деформації матриць . . . . .	29
2.2. Мініверсальні деформації пучків матриць . . . . .	37
2.3. Мініверсальні деформації контраградієнтних пучків матриць	41
<b>РОЗДІЛ 3</b>	
Як змінюється при збуреннях канонічна форма $2 \times 2$ та $3 \times 3$ матриць відносно конгруентності	<b>49</b>
3.1. Вступ . . . . .	49
3.1.1 Граф замикання для класів подібності . . . . .	50
3.2. Графи замикання для класів конгруентності . . . . .	55
3.3. Допоміжні твердження . . . . .	59
3.3.1 Твердження Ройтера . . . . .	59
3.3.2 Мініверсальні деформації . . . . .	60
3.3.3 Характеристичний поліном . . . . .	62
3.4. Доведення теорем . . . . .	63
3.4.1 Доведення теореми 3.2 . . . . .	63
3.4.2 Доведення теореми 3.3 . . . . .	65

## РОЗДІЛ 4

<b>Пачки <math>2 \times 2</math> та <math>3 \times 3</math> матриць відносно конгруентності</b>	<b>73</b>
4.1. Вступ . . . . .	73
4.2. Графи замикання для пачок конгруентності . . . . .	76
4.3. Допоміжні твердження . . . . .	80
4.3.1 Твердження Ройтера . . . . .	81
4.3.2 Мініверсальні деформації . . . . .	82
4.3.3 Характеристичний поліном . . . . .	84
4.4. Доведення теорем . . . . .	85
4.4.1 Доведення теореми 4.1 . . . . .	85
4.4.2 Доведення теореми 4.2 . . . . .	87
4.5. Обговорення означення пачок конгруентності . . . . .	89
4.5.1 Аргументи в підтримку нашого означення пачок конгруентності . . . . .	90
4.5.2 Причина не означати пачку конгруентності як множини матриць, що мають канонічні форми конгруентності однакового типу . . . . .	92
4.6. Групи ізометрій $2 \times 2$ та $3 \times 3$ матриць . . . . .	93
4.6.1 Причина не визначати пачку конгруентності як множини матриць, канонічні форми конгруентності яких мають ту ж саму групу ізометрій . . . . .	96

## РОЗДІЛ 5

<b>Збурення матриць відносно *конгруентності</b>	<b>98</b>
5.1. Вступ . . . . .	98
5.2. Граф замикання для класів *конгруентності $2 \times 2$ матриць . . . . .	99
5.3. Доведення теореми 3.2 . . . . .	103
5.4. Не кожна матриця зводиться голоморфно до її мініверсальної деформації відносно *конгруентності . . . . .	109

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** Зведення матриці до її жорданової форми — не-стабільна операція: як жорданова форма так і перетворення подібності до неї залежать розривно від елементів початкової матриці. Якщо елементи матриці відомі лише приблизно, то нерозумно зводити її до жорданової форми. Кожна матриця у околі даної матриці може бути зведена до її жорданової форми, але при такій операції гладка залежність від елементів матриці втрачається.

Як альтернативу до канонічної матриці Жордана, В. І. Арнольд [1] побудував *мініверсальну деформацію* комплексної квадратної матриці  $A$ , тобто просту нормальну форму, до якої всі матриці  $A + E$  близькі до  $A$  можуть бути зведені перетвореннями подібності, що гладко залежать від елементів  $E$ . Оскільки кожна квадратна матриця подібна до жорданової матриці, достатньо дослідити збурення матриць  $A$  в канонічній формі Жордана.

В дисертаційній роботі побудовано алгоритм зведення сім'ї матриць до її мініверсальної деформації, якій буде не тільки нормальну форму Арнольда для кожної матриці в околі даної матриці, але й перетворюючу матрицю, що важливо для застосувань мініверсальних деформацій.

Також одержано блочно-трикутні мініверсальні деформації матриць відносно гладких перетворень подібності та блочно-трикутні мініверсальні деформації пучків матриць відносно гладких перетворень еквівалентності. Відмітимо, що стаття [26], в якій вперше побудовано мініверсальну деформацію пучків матриць, була відзначена призом робочої групи SIAM (Society for Industrial and Applied Mathematics) з лінійної алгебри, як найкраща стаття з прикладної лінійної алгебри за 1997–2000 рр.

Ми будуємо два орієнтовані графи, вершини яких є  $2 \times 2$  або, відповідно,  $3 \times 3$  канонічні матриці відносно конгруентності і існує орієнтований шлях з  $A$  у  $B$  тоді і тільки тоді, якщо  $A$  може бути перетворена як завгодно малим збуренням у матрицю, яка конгруентна  $B$ .

Ці графи є *графами замикань* для класів конгруентності  $2 \times 2$  та  $3 \times 3$  матриць, бо існує орієнтований шлях з вершини  $A$  до вершини  $B$  тоді і тільки тоді, якщо клас конгруентності матриці  $A$  міститься в замиканні класа конгруентності матриці  $B$ . Граф замикання показує як класи еквівалентності відносяться один до одного у топологічному просторі матриць фіксованого розміру.

Побудовано також графи замикань для класів \*конгруентності  $2 \times 2$  матриць.

Описані задачі є предметом інтересу численної кількості як українських, так і іноземних науковців. Все вищезазначене свідчить про актуальність теми дисертації.

### **Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.**

Дисертацію виконано у відділі топології Інституту математики НАН України в рамках теми наукових досліджень НАН України № III-9-11 “Алгебраїчні, геометричні та топологічні властивості многовидів з додатковими структурами”, що виконувалась з 2011 по 2015 роки у відділі топології Інституту математики НАН України (номер держреєстрації 0111U000159).

**Мета і завдання дослідження.** *Метою* даної роботи є побудова (i) алгоритму зведення матриці до нормальної форми Арнольда, (ii) блочно-трикутного аналога нормальної форми Арнольда для матриць і пучків матриць, (iii) графів замикань для матриць та пачок матриць малого розміру відносно конгруентності та \*конгруентності.

*Об'єктом дослідження* є матриці, лінійні відображення та білінійні/півторалінійні форми.

*Предметом дослідження* є мініверсальні деформації та графи замикань.

*Методи дослідження.* Класифікаційні і матричні методи лінійної алгебри.

**Наукова новизна одержаних результатів.** Основні результати, які визначають наукову новизну та виносяться на захист, такі:

1. Побудовано алгоритм, який зводить кожну матрицю в околі даної квадратної комплексної матриці до нормальної форми Арнольда відносно гладких перетворень подібності  $S^{-1}AS$ .
2. Одержано блочно-трикутні нормальні форми матриць відносно гладких перетворень подібності та блочно-трикутні нормальні форми пучків матриць відносно гладких перетворень еквівалентності.
3. Побудовано графи замикань для класів конгруентності  $2 \times 2$  та  $3 \times 3$  матриць і для пачок  $2 \times 2$  та  $3 \times 3$  матриць.
4. Побудовано графи замикань для класів \*конгруентності  $2 \times 2$  матриць.

**Практичне значення одержаних результатів.** Мініверсальні деформації матриць відносно подібності і пучків матриць мають велике значення для застосувань. Вони дозволяють вивчати сім'ї матриць і пучків матриць спеціального вигляду, які складаються з матриць з багатьма нулями, і поширювати ці результати на довільні матриці. Вони використовуються, зокрема, в теорії стабільності, багатопараметричних лінійних динамічних системах, та в динаміці механічних систем. Застосування базуються, зокрема, на факті, що спектри матриці та її нормальної форми співпадають, але остання має більш простий вигляд.

Ми будемо перетворення до нормальних форм у явному вигляді, що розширює можливості застосувань мініверсальних деформацій. Знайдений нами блочно-трикутний вигляд мініверсальних деформацій матриць та матричних пучків має очевидні переваги перед звичайними деформаціями.

Побудовані графи замикань для класів конгруентності  $2 \times 2$  та  $3 \times 3$  матриць і для класів \*конгруентності  $2 \times 2$  матриць показують, як довільно мале збурення матриці може змінити її канонічну форму відносно

конгруентності або \*конгруентності. Це важливо знати, якщо матриця відома лише приблизно.

**Особистий внесок здобувача.** Результати отримані дисертанткою особисто, під загальним керівництвом В. В. Сергейчука та бразильського академіка В. Футорного.

**Апробація результатів дисертації.** Результати дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на:

- Українському математичному конгресі—2009 (до 100-річчя від дня народження М. М. Боголюбова), 27–29 серпня 2009 р., Інститут математики НАН України, Київ.
- Сьомою міжнародній алгебраїчній конференції в Україні, 18–23 серпня 2009 р., Національний університет ім. В. Н. Карамзіна, Харків.
- 68-й науковій конференції професорсько викладацького складу, аспірантів, студентів та співробітників відокремлених структурних підрозділів Національного транспортного університету, 16–18 травня 2012 р., Київ.
- Міжнародній алгебраїчній конференції, присвяченій 100-річчю від дня народження Л. А. Калужніна, 3–7 липня 2014, Національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ.
- Міжнародній конференції молодих математиків, 3–6 червня 2015, Інститут математики НАН України, Київ.

**Публікації.** Основні результати дисертації опубліковано у десяти роботах [7, 8, 9, 24, 32, 44, 45, 46, 47, 48], з яких п'ять статей — у фахових наукових виданнях України та інших держав, що включені до переліку фахових видань, затверджених МОН України.

**Структура, обсяг та зміст дисертації.** Дисертація складається із вступу, п'яти розділів, висновків і списку використаних джерел, який містить 61 найменування. Повний обсяг дисертації 121 сторінка, з них 7 сторінок займає список використаних джерел.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

Основна частина роботи складається з п'яти розділів. На початку кожного розділу подається короткий зміст цього розділу.

**Перший розділ** присвячений побудові алгоритму зведення квадратної матриці до нормальної форми Арнольда відносно подібності.

Для кожної жорданової матриці

$$J = J_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus J_{\lambda_t}, \quad (0.1)$$

де

$$J_{\lambda_i} := J_{m_{i1}}(\lambda_i) \oplus \dots \oplus J_{m_{ir_i}}(\lambda_i), \quad m_{i1} \geq m_{i2} \geq \dots \geq m_{ir_i},$$

$J_{m_{ij}}(\lambda_i)$  — клітка Жордана розміру  $m_{ij} \times m_{ij}$  з власним числом  $\lambda_i$ ,  $\lambda_i \neq \lambda_j$  якщо  $i \neq j$ , визначимо матрицю

$$J + \mathcal{D} := \bigoplus_{i=1}^t \begin{bmatrix} J_{m_{i1}}(\lambda_i) + 0^\downarrow & 0^\downarrow & \dots & 0^\downarrow \\ 0^\leftarrow & J_{m_{i2}}(\lambda_i) + 0^\downarrow & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & 0^\downarrow \\ 0^\leftarrow & \dots & 0^\leftarrow & J_{m_{ir_i}}(\lambda_i) + 0^\downarrow \end{bmatrix} \quad (0.2)$$

у якій

$$0^\leftarrow := \begin{bmatrix} * & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{та} \quad 0^\downarrow := \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ * & \dots & * \end{bmatrix}$$

— блоки, елементи яких є нулями та зірочками.

В. І. Арнольд [1] довів наступну теорему:



Нехай  $J$  — жорданова матриця (0.1). Тоді усі матриці  $J + X$ , що є достатньо близькими до  $J$ , можуть бути одночасно зведені деякими перетвореннями

$$J + X \mapsto \mathcal{S}(X)^{-1}(J + X)\mathcal{S}(X), \quad \begin{array}{l} \mathcal{S}(X) \text{ аналітична} \\ \text{в } 0 \text{ та } \mathcal{S}(0) = I, \end{array} \quad (0.3)$$

до форми  $J + \mathcal{D}$ , яка визначена у (0.2), де зірочки замінюються комплексними числами, що залежать аналітично від елементів  $X$ . Кількість зірочок — мінімальна, яка може бути отримана перетвореннями форми (0.3), вона дорівнює розмірності класу подібності матриці  $J$ .

Матриця (0.2) з незалежними параметрами замість зірочок називається *мініверсальною деформацією* матриці  $J$ .

Ми будемо алгоритм зведення всіх матриць  $J + X$  в околі  $J$  до нормальних форм Арнольда відносно гладких перетворень подібності (0.3). Цей алгоритм використовує елементарні перетворення матриць і дозволяє будувати перетворюючу матрицю  $\mathcal{S}(X)$ . Альтернативний алгоритм для побудови матриці  $\mathcal{S}(X)$  у формі рядов Тейлора був розроблен Майлибаєвим [49].

Опишемо схематично наш алгоритм. Розглянемо блочно-діагональну матрицю

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix},$$

діагональні квадратні блоки  $J_1, J_2$  якої не мають спільних власних чисел.

Нехай

$$J + X = \begin{bmatrix} J_1 + X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & J_2 + X_{22} \end{bmatrix} \quad (0.4)$$

— близька до неї матриця. Оскільки матриця  $X$  мала, то  $J_1 + X_{11}$  та  $J_2 + X_{22}$  не мають спільних власних чисел і тому існує мала матриця  $Y$

така, що

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I & -Y \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 + X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & J_2 + X_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \cdot & X_{12} + (J_1 + X_{11})Y - Y(J_2 + X_{22}) - YX_{21}Y \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ми одержали матрицю виду (0.4) з  $X_{12} = 0$ . Наступним кроком робимо  $X_{21} = 0$ .

Застосовуючи ці перетворення, ми для кожної жорданової матриці виду (0.1) будемо гладке перетворення подібності, яке перетворює всі матриці  $J + X$  близькі до  $J$  у блочно-діагональну матрицю

$$J + Y = (J_1 + Y_1) \oplus \cdots \oplus (J_t + Y_t),$$

де  $J_1, \dots, J_t$  мають нерівні спільні числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ .

Залишилось розглянути випадок матриці Жордана  $J$  з єдиним власним числом. Наприклад,  $J$  — нільпотентна клітка Жордана, тоді

$$J + X = \begin{bmatrix} x_{11} & 1 + x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 + x_{n-1,n} \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

Спочатку ми ділимо другий стовпчик на  $1 + x_{12}$  і множимо другий рядок на  $1 + x_{12}$  (оскільки перетворення подібності), одержимо матрицю з  $1 + x_{12} = 1$ . Потім ми робимо

$$x_{11} = x_{13} = x_{14} = \cdots = x_{1n} = 0$$

додаваннями другого стовпця до інших; обернені перетворення змінюють тільки другий рядок. Ми одержали матрицю з першим рядком виду  $(0, 1, 0, \dots, 0)$ . Аналогічним чином ми приводимо рядки  $2, 3, \dots, n - 1$  і

одержимо матрицю

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ * & * & \dots & * \end{bmatrix},$$

в якій зірочками позначено малі елементи. Ми одержали нормальну форму Арнольда матриць, близьких до  $J$ .

Разом зі студентами Національного Технічного Університету України “Київський Політехнічний Інститут” Блажком І.О., Кублицьким Д.О., Ящук С.М. створено програму для зведення сім’ї матриць до нормальної форми Арнольда відносно подібності. Програма реалізована за допомогою математичного пакету MatLab, що має зручну вбудовану мову програмування, та мови програмування C++.

**Другий розділ** дисертації присвячений побудові блочно-трикутних мініверсальних деформацій матриць та пучків матриць.

Г. Р. Беліцький [4] побудував алгоритм зведення матриць будь-якої системи лінійних відображень до канонічної форми. Для цього він довів, що довільна жорданова канонічна матриця  $J$  перестановочно подібна до деякої матриці  $J^\#$  такої, що всі комутуючі з нею матриці є блочно-трикутними. В. В. Сергейчук запропонував називати  $J^\#$  *канонічною матрицею Вейра* матриці  $J$ .

У цьому розділі ми знаходимо іншу властивість канонічних матриць Вейра: вони мають блочно-трикутні мініверсальні деформації. Тому, якщо сім’я матриць що є достатньо близькою до даної квадратної матриці і визначається з точністю до гладких перетворень подібності, тоді ми можемо взяти її у формі  $J^\# + E$ , де  $E$  є нижньо блочно-трикутною.

Матриця  $J^\#$  визначається наступним чином Нехай  $J = J_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus J_{\lambda_t}$  — жорданова матриця (0.1). Для кожного  $i$ , матриця  $J_{\lambda_i}$  перестановочно

подібна матриці вигляду

$$J_{\lambda_i}^{\#} = \begin{bmatrix} \lambda_i I_{s_1} & \begin{bmatrix} I_{s_2} \\ 0 \end{bmatrix} & & 0 \\ & \lambda_i I_{s_2} & \ddots & \\ & & \ddots & \begin{bmatrix} I_{s_k} \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0 & & & \lambda_i I_{s_k} \end{bmatrix},$$

де  $s_j$  — кількість жорданових кліток  $J_l(\lambda_i)$  розмірності  $l \geq j$  в  $J(\lambda_i)$ . Таким чином, існує матриця  $P_i$  одержана перестановкою рядків одиничної матриці така, що  $P_i^{-1} J_{\lambda_i} P_i = J_{\lambda_i}^{\#}$ . Матриця

$$J^{\#} =: J_{\lambda_1}^{\#} \oplus \cdots \oplus J_{\lambda_t}^{\#} = P_i^{-1} J_{\lambda_1} P_i \oplus \cdots \oplus P_t^{-1} J_{\lambda_t} P_t \quad (0.5)$$

називається *канонічною формою Вейра* матриці  $J$ .

Наприклад, матриця

$$J_{\lambda} = \underbrace{J_4(\lambda) \oplus \cdots \oplus J_4(\lambda)}_p \oplus \underbrace{J_2(\lambda) \oplus \cdots \oplus J_2(\lambda)}_q,$$

перестановочно подібна матриці

$$J_{\lambda}^+ = J_4(\lambda I_p) \oplus J_2(\lambda I_q) = \begin{bmatrix} \begin{array}{cccc|cc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (2,1) & (2,2) \\ \lambda I_p & I_p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda I_p & I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda I_p & I_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda I_p & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda I_q & I_q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda I_q \end{array} \end{bmatrix} \begin{matrix} (1,1) \\ (1,2) \\ (1,3) \\ (1,4) \\ (2,1) \\ (2,2) \end{matrix}$$

яка перестановочно подібна канонічній матриці Вейра

$$J_{\lambda}^{\#} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc|cc|cc} (1,1) & (2,1) & (1,2) & (2,2) & (1,3) & (1,4) \\ \hline \lambda I_p & 0 & I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda I_q & 0 & I_q & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda I_p & 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda I_q & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda I_p & I_p \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda I_p \end{array} \\ \begin{array}{l} (1,1) \\ (2,1) \\ (1,2) \\ (2,2) \\ (1,3) \\ (1,4) \end{array} \end{array}$$

**Теорема 2.2.** Нехай  $J$  — жорданова канонічна матриця (0.1),  $J^{\#}$  — її канонічна форма Вейра (0.5),

$$J + \mathcal{D} = (J_{\lambda_1} + \mathcal{D}_1) \oplus \cdots \oplus (J_{\lambda_t} + \mathcal{D}_t)$$

— її мініверсальна деформація (0.2). Тоді

$$\begin{aligned} J^{\#} + \mathcal{D}^{\#} &= (J_{\lambda_1}^{\#} + \mathcal{D}_1^{\#}) \oplus \cdots \oplus (J_{\lambda_t}^{\#} + \mathcal{D}_t^{\#}) \\ &:= P_1^{-1}(J_{\lambda_1} + \mathcal{D}_1)P_1 \oplus \cdots \oplus P_t^{-1}(J_{\lambda_t} + \mathcal{D}_t)P_t \end{aligned}$$

— блочно-трикутна мініверсальна деформація матриці  $J^{\#}$ .

Аналогічні блочно-трикутні мініверсальні деформації одержано для пучків матриць та контраградієнтних пучків матриць.

**Третій розділ** присвячено вивченню поведінки при збуреннях канонічної форми  $2 \times 2$  та  $3 \times 3$  матриць відносно конгруентності та пачок матриць відносно конгруентності.

Ми будемо діаграми Хассе  $G_2$  та  $G_3$  для впорядкування відносно включення на множинах класів конгруентності  $2 \times 2$  та  $3 \times 3$  комплексних матриць. Іншими словами, ми будемо два орієнтовані графи, вершини яких є  $2 \times 2$  або, відповідно,  $3 \times 3$  канонічні матриці відносно конгруентності і існує орієнтований шлях з  $A$  у  $B$  тоді і тільки тоді, якщо  $A$  може бути перетворена як завгодно малим збуренням у матрицю, яка

конгруентна  $B$ . Ми користуємось канонічними матрицями відносно конгруентності та  $*$ конгруентності, які були побудовані Р. Хорном та В. В. Сергейчуком [40].

Діаграми  $G_2$  та  $G_3$  є графами замикання в сенсі наступного означення: Нехай  $T$  — топологічний простір з відношенням еквівалентності. *Граф замикання* (або *діаграма замикання*) — це орієнтований граф, вершини якого бієктивно відповідають класам еквівалентності та для класів еквівалентності  $a$  та  $b$  є орієнтований шлях з вершини  $a$  до вершини  $b$  тоді і тільки тоді, якщо  $a \subset \bar{b}$ , де  $\bar{b}$  позначає замикання  $b$ . Таким чином, граф замикання є діаграмою Хассе для множини класів еквівалентності з наступним частковим порядком:  $a \preceq b$  тоді і тільки тоді, якщо  $a \subset \bar{b}$ . Граф замикання показує як класи еквівалентності відносяться один до одного у  $T$ .

Векторний простір

$$T(A) := \{X^T A + AX \mid X \in \mathbb{C}^{n \times n}\}$$

є дотичним простором до класу конгруентності матриці  $A$  в точці  $A$ . Числа

$$\dim_{\mathbb{C}} T(A), \quad \text{codim}_{\mathbb{C}} T(A) := n^2 - \dim_{\mathbb{C}} T(A)$$

називаються *розмірністю* та *корозмірністю* класу конгруентності матриці  $A$ .

**Теорема 3.2.** *Граф замикання  $G_2$  для класів конгруентності  $2 \times 2$  матриць наведено на рисунку 1. Кожний клас конгруентності задається його канонічною матрицею. Граф скінченний:  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}$  представляє скінченну множину вершин, індексованих  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$  (за умови, що кожне ненульове  $\lambda$  визначене з точністю до заміни на  $\lambda^{-1}$ ) зі стрілками  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}$  до кожної з цих вершин. Класи конгруентності канонічних матриць, що знаходяться на одному горизонтальному рівні у  $G_2$ , мають однакову розмірність, що вказана праворуч.*

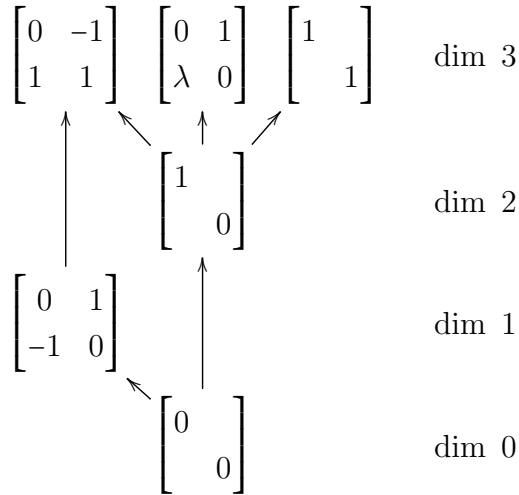


Рис. 1: Граф замикання  $G_2$  для класів конгруентності  $2 \times 2$  матриць.

Наприклад, граф  $G_2$  показує, що як завгодно малий окіл  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  містить матриці з канонічними матрицями відносно конгруентності  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  і  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ , але для будь-яких інших канонічних матриць  $A_{\text{can}}$  є окіл  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  без матриць з канонічною формою  $A_{\text{can}}$ .

**Теорема 3.3.** *Граф замикання  $G_3$  для класів конгруентності  $3 \times 3$  матриць наведено на рисунку 2. Класи конгруентності, що відповідають вершинам, задані їх  $3 \times 3$  канонічними матрицями відносно конгруентності. Граф скінченний:  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \end{bmatrix}$  та  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \mu & 0 & 1 \end{bmatrix}$  представляють скінченні множини вершин, індексованих  $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ , причому кожне ненульове  $\lambda$  визначене з точністю до заміни на  $\lambda^{-1}$  та кожне ненульове  $\mu$  визначене з точністю до заміни на  $\mu^{-1}$ . Класи конгруентності з вершинами на одному горизонтальному рівні мають однакову розмірність, що вказана праворуч.*

**Зауваження.** Нехай  $M \in 2 \times 2$  або  $3 \times 3$  канонічна матриця відносно конгруентності.

- Нехай  $N$  — інша канонічна матриця відносно конгруентності того ж розміру. Кожний окіл  $M$  містить матрицю, канонічна форма відносно конгруентності якої є  $N$  тоді і тільки тоді, якщо існує ори-

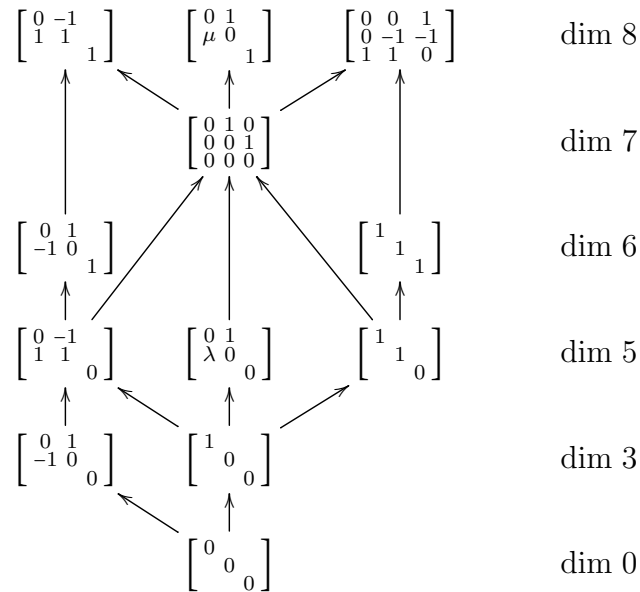


Рис. 2: Граф замикання  $G_3$  для класів конгруентності  $3 \times 3$  матриць.

єнтований шлях з  $M$  в  $N$  у  $G_2$  або  $G_3$  (якщо  $M = N$ , тоді завжди існує “лінивий” шлях довжини 0 з  $M$  в  $M$ ).

- Замикання класу конгруентності матриці  $M$  дорівнює об’єднанню класів конгруентності усіх канонічних матриць  $N$ , таких що існує орієнтований шлях з  $N$  в  $M$  (якщо  $N = M$ , тоді завжди існує “лінивий” шлях).

**Четвертий розділ** присвячено означенню пачок матриць відносно конгруентності та побудові графів замикання для пачок конгруентності  $2 \times 2$  і  $3 \times 3$  матриць.

В. І. Арнольд визначає *пачку матриць відносно подібності* як множину усіх матриць, що мають однаковий жордановий тип: матриці  $A$  та  $B$  мають однаковий *жордановий тип*, якщо існує бієкція з множини різних власних значень матриці  $A$  у множину різних власних значень матриці  $B$ , що перетворює жорданову канонічну форму матриці  $A$  у жорданову канонічну форму матриці  $B$ . Наприклад, матриці

$$J_3(0) \oplus J_2(0) \oplus J_5(1), \quad J_3(2) \oplus J_2(2) \oplus J_5(-3)$$



належать до однієї пачки. Усі матриці пачки мають схожі властивості; наприклад, їх жорданові матриці  $J$  мають однакову множину  $\{X \mid JX = XJ\}$  комутуючих матриць.

Означення пачок матриць відносно конгруентності є не таким очевидним. Теран і Доріко [16] визначають пачки через канонічну форму для конгруентності, аналогічно до пачок матриць відносно подібності та пачок пучків матриць. Але на відміну від збурень канонічних матриць Жордана і Кронекера, поведінка збурення канонічної матриці відносно конгруентності залежить від значень її параметрів. Крім того, ми можемо отримати інше розбиття на пачки, використовуючи іншу канонічну форму відносно конгруентності. Тому ми визначаємо пачки відносно конгруентності наступним чином:

Дві квадратні матриці  $A$  та  $B$  належать до однієї пачки відносно конгруентності тоді і тільки тоді, якщо пучки  $A + \lambda A^T$  та  $B + \lambda B^T$  належать до однієї пачки відносно строгої еквівалентності.

Це означення базується на важливому твердженні А. В. Ройтера: дві  $n \times n$  матриці  $A$  та  $B$  конгруентні тоді і тільки тоді, якщо пучки  $A + \lambda A^T$  та  $B + \lambda B^T$  строго еквівалентні. Ми наводимо інші аргументи на користь цього означення і доводимо наступну теорему.

#### **Теорема 4.2.**

- (а) Граф замикання для пачок конгруентності  $2 \times 2$  матриць поданий на рисунку 3. Вершина  $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix} \right\}_{\lambda \neq \pm 1}$  представляє пачку, що складається з усіх матриць з канонічною формою конгруентності  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}$  з  $\lambda \neq \pm 1$ ; кожне ненульове  $\lambda$  визначене з точністю до заміни на  $\lambda^{-1}$ . Інші вершини є канонічними матрицями конгруентності; відповідні пачки співпадають з їх класами конгруентності.
- (б) Граф замикання для пачок конгруентності  $3 \times 3$  матриць поданий на малюнку 4.

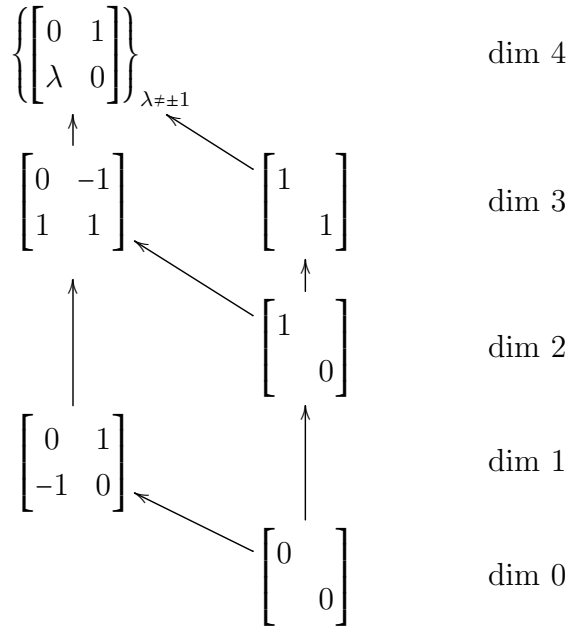


Рис. 3: Граф замикання для пачок конгруентності  $2 \times 2$  матриць.

- Пачка, що відповідає  $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}_{\lambda \neq \pm 1}$  складається з усіх матриць з канонічними формами  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\lambda \neq \pm 1$ .
- Пачка, що відповідає  $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \mu & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}_{\mu \neq \pm 1}$  складається з усіх матриць з канонічними формами  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \mu & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mu \neq \pm 1$ .
- Інші пачки співпадають з класами конгруентності відповідних канонічних матриць.

**Зауваження.** Оскільки кількість пачок конгруентності матриць фіксованого розміру  $n \times n$  скінченна, то для довільної  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  існують пачки конгруентності  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_t \subset \mathbb{C}^{n \times n}$  такі, що кожний достатньо малий окіл  $A$  міститься у  $\mathcal{A}_1 \cup \dots \cup \mathcal{A}_t$  та має ненульовий перетин з кожною  $\mathcal{A}_i$ . Якщо граф замикання для пачок конгруентності  $n \times n$  матриць відомий, тоді множина  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_t$  складається з усіх пачок конгруентності  $\mathcal{A}$ , таких що існує орієнтований шлях (в тому числі “лінійний” шлях довжини 0) з вершини, що представляє пачку з матрицею  $A$ , в вершину, що представляє

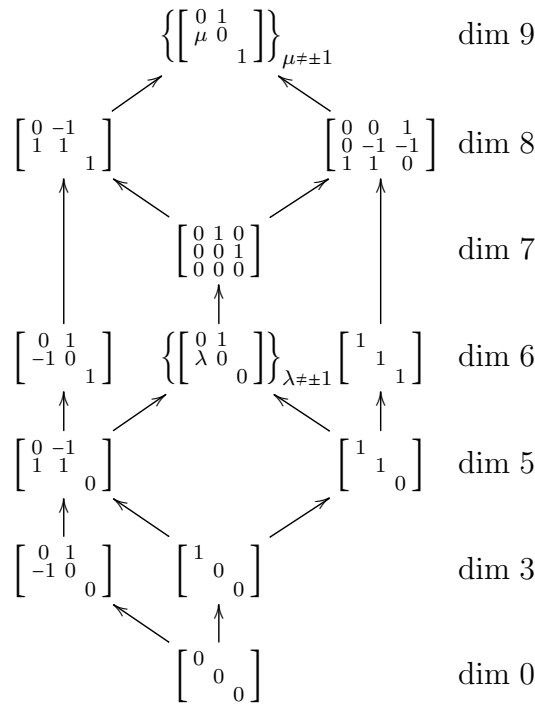


Рис. 4: Граф замикання для пачок конгруентності  $3 \times 3$  матриць.

А. Це важливо знати, наприклад, якщо  $A$  відома тільки приблизно.

**П'ятий розділ** присвячений побудові графів замикання для класів \*конгруентності  $2 \times 2$  матриць.

**Теорема 5.1.** *Граф замикання для класів \*конгруентності  $2 \times 2$  матриць поданий на рисунку 5, де  $\lambda, \mu, \nu, \sigma, \tau \in \mathbb{C}, \mathbb{R}_+$  — множина невід'ємних дійсних чисел, та  $\text{Im}(c)$  — уявна частина  $c \in \mathbb{C}$ . Кожний клас \*конгруентності задається його канонічною матрицею. Граф скінченний: кожна вершина, окрім  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , зображує скінченну множину вершин, індексованих параметрами відповідної канонічної матриці. Класи \*конгруентності канонічних матриць, що лежать на одному горизонтальному рівні, мають однакову розмірність над  $\mathbb{R}$ , яка дана зправа.*

*Стрілка  $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{bmatrix}$  існує тоді і тільки тоді, якщо  $\lambda = \mu a + \nu b$  для деяких невід'ємних  $a, b \in \mathbb{R}$ . Стрілка  $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & \tau \\ \tau & i\tau \end{bmatrix}$  існує тоді і тільки тоді, якщо уявна частина від  $\lambda\bar{\tau}$  невід'ємна. Стрілка  $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & \tau \\ \tau & i\tau \end{bmatrix}$*

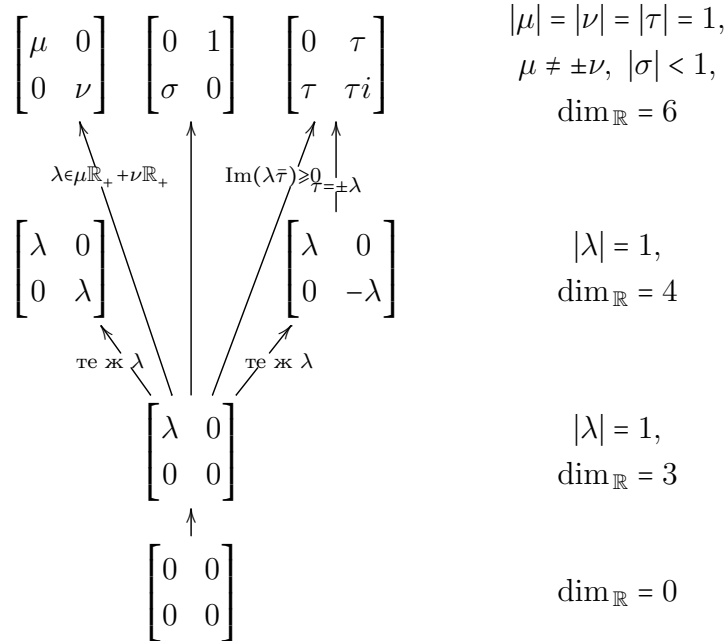


Рис. 5: Граф замикання для класів \*конгруентності  $2 \times 2$  матриць.

існує тоді і тільки тоді, якщо  $\tau = \pm\lambda$ . Стрілка  $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \pm\lambda \end{bmatrix}$  існує тоді і тільки тоді, якщо значення  $\lambda$  однакове для обох матриць. Інші стрілки існують при всіх значеннях параметрів їх матриць.

**Зауваження.** Нехай  $M$  —  $2 \times 2$  канонічна матриця відносно \*конгруентності.

- Нехай  $N$  — інша  $2 \times 2$  канонічна матриця відносно \*конгруентності. Кожний окіл матриці  $M$  містить матрицю, \*конгруентна канонічна форма якої є  $N$ , тоді і тільки тоді, якщо існує орієнтований шлях з  $M$  в  $N$  (якщо  $M = N$ , тоді існує “лінивий” шлях довжини 0 з  $M$  в  $N$ ).
- Замикання класу \*конгруентності матриці  $M$  дорівнює об’єднанню класів \*конгруентності усіх канонічних матриць  $N$  таких, що існує орієнтований шлях з  $N$  в  $M$  (якщо  $M = N$  тоді існує “лінивий” шлях).

Для матриць відносно подібності і відносно конгруентності завжди існують голоморфні перетворення до їх мініверсальних деформацій. Ми доводимо, що це невірно для матриць відносно \*конгруентності.

У кінці основної частини дисертації наведено загальні висновки.

## РОЗДІЛ 1

# Алгоритм зведення матриці до нормальної форми Арнольда відносно подібності

Нехай

$$J = J_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus J_{\lambda_t}, \quad (1.1)$$

— матриця Жордана, в якій

$$J_{\lambda_i} := J_{m_{i1}}(\lambda_i) \oplus \cdots \oplus J_{m_{ir_i}}(\lambda_i), \quad m_{i1} \geq m_{i2} \geq \dots \geq m_{ir_i}$$

і  $\lambda_i \neq \lambda_j$  якщо  $i \neq j$ . Дамо схему, як усі матриці, близькі до  $J$ , можуть бути зведені до форми (0.2) майже тотожними перетвореннями подібності; це пояснює структуру матриці (0.2).

**Лема 1.1.** *Дві матриці є подібними тоді і тільки тоді, якщо одна з них може бути перетворена в іншу послідовністю наступних перетворень (які називаються елементарними перетвореннями подібності; див. [14, розділ 1.40]):*

- (i) Множення стовбчика  $i$  на ненульовий  $a \in \mathbb{C}$ , потім ділення рядка  $i$  на  $a$ .
- (ii) Додавання стовбчика  $i$  домноженого на  $b \in \mathbb{C}$  до стовбчика  $j$ , потім віднімання рядка  $j$  домноженого на  $b$  від рядка  $i$ .
- (iii) Заміна місцями стовбчиків  $i$  та  $j$ , потім заміна місцями рядків  $i$  та  $j$ .

*Доведення.* Нехай  $A$  та  $B$  подібні, тобто  $S^{-1}AS = B$ . Запишемо  $S$  як добуток елементарних матриць:

$$S = E_1 E_2 \cdots E_t.$$

Тоді

$$\begin{aligned} A &\mapsto E_1^{-1} A E_1 \mapsto E_2^{-1} E_1^{-1} A E_1 E_2 \mapsto \dots \\ &\mapsto E_t^{-1} \dots E_2^{-1} E_1^{-1} A E_1 E_2 \cdots E_t = B \end{aligned}$$

є шуканою послідовністю елементарних перетворень подібності.  $\square$

*Схема доведення теореми 2.1.* Можливі два випадки.

*Випадок 1:*  $t = 1$ . Припустимо спочатку, що  $J = J_3(0) \oplus J_2(0)$ . Тоді

$$J + E = [b_{ij}]_{i,j=1}^5 := \left[ \begin{array}{ccc|cc} \varepsilon_{11} & 1 + \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} & \varepsilon_{14} & \varepsilon_{15} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 1 + \varepsilon_{23} & \varepsilon_{24} & \varepsilon_{25} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} & \varepsilon_{34} & \varepsilon_{35} \\ \hline \varepsilon_{41} & \varepsilon_{42} & \varepsilon_{43} & \varepsilon_{44} & 1 + \varepsilon_{45} \\ \varepsilon_{51} & \varepsilon_{52} & \varepsilon_{53} & \varepsilon_{54} & \varepsilon_{55} \end{array} \right] \quad (1.2)$$

є деякою матрицею біля  $J$  (тобто, всі  $\varepsilon_{ij}$  є малими). Ми маємо звести її до форми

$$\left[ \begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * \\ \hline * & 0 & 0 & 0 & 1 \\ * & 0 & 0 & * & * \end{array} \right], \quad (1.3)$$

де  $*$  — малі комплексні числа, за допомогою тих перетворень з леми 1.1 що є близькими до тотожного перетворення.

Діленням стовбчика 2 з (1.2) на  $1 + \varepsilon_{12}$  та множенням рядка 2 на  $1 + \varepsilon_{12}$  (перетворення (i)), ми робимо  $b_{12} = 1$ . Оскільки  $\varepsilon_{12}$  мала, то перетворення є майже тотожним та отримана матриця близька до  $J$ . Деякі  $b_{ij}$  та  $\varepsilon_{ij}$  були змінені, але ми використовуємо такі самі позначення для них.

Віднімання стовбчика 2 (з  $\varepsilon_{12} = 0$ ), домноженого на  $\varepsilon_{11}$ , від стовбчика 1, ми отримуємо  $b_{11} = 0$ ; обернене перетворення рядків (яке має бути виконане за означенням перетворення (ii)) злегка змінює рядок 2. Аналогічно, ми робимо  $b_{13} = b_{14} = b_{15} = 0$  віднімаючи стовбчик 2; обернене перетворення рядків злегка змінює рядок 2.

Ми отримуємо

$$[b_{ij}]_{i,j=1}^5 = \left[ \begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 1 + \varepsilon_{23} & \varepsilon_{24} & \varepsilon_{25} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} & \varepsilon_{34} & \varepsilon_{35} \\ \hline \varepsilon_{41} & \varepsilon_{42} & \varepsilon_{43} & \varepsilon_{44} & 1 + \varepsilon_{45} \\ \varepsilon_{51} & \varepsilon_{52} & \varepsilon_{53} & \varepsilon_{54} & \varepsilon_{55} \end{array} \right]$$

з рядком 1 як у (1.3). Аналогічно робимо  $b_{23} = 1$  ділячи стовбчик 3 на  $1 + \varepsilon_{23}$ , і далі  $b_{21} = b_{22} = b_{24} = b_{25} = 0$  віднімаючи стовбчик 3 (перетворення (i) та (ii)); обернене перетворення рядків злегка міняє рядок 3. В отриманій матриці робимо  $b_{45} = 1$ , далі  $b_{41} = b_{42} = b_{43} = b_{44} = 0$ ; обернене перетворення рядків незначно змінює рядок 5.

Ми отримали матрицю вигляду

$$\left[ \begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ * & * & * & * & * \end{array} \right] \quad (* \text{ — малі числа})$$

використовуючи майже тотожні перетворення подібності з (1.2).

Для того, щоб зменшити кількість зірочок, ми віднімаємо рядок 2 помножений на  $b_{53}$  від рядка 5, отримуючи  $b_{53} = 0$ . Обернене перетворення стовбчиків додає стовбчик 5 домножений на  $b_{53}$  до стовбчика 2. Далі ми робимо  $b_{42} = b_{52} = 0$  використовуючи рядок 1; обернене перетворення стовбчиків злегка змінює  $b_{31}$ ,  $b_{41}$  та  $b_{51}$ .

Ми одночасно звели усі матриці (1.2) близькі до  $J$  до форми (1.3)



перетвореннями подібності, що аналітично залежать від усіх  $\varepsilon_{ij}$  та є тотожним, якщо усі  $\varepsilon_{ij} = 0$ .

Таким же методом усі матриці  $J(0) + E$ , близькі до нільпотентної жорданової матриці

$$J(0) := J_{m_1}(0) \oplus \cdots \oplus J_{m_r}(0), \quad m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_r,$$

можуть бути зведені спочатку до матриць вигляду

$$\begin{bmatrix} J_{m_1}(0) + 0^\downarrow & \cdots & 0^\downarrow \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0^\downarrow & \cdots & J_{m_r}(0) + 0^\downarrow \end{bmatrix}$$

і потім до матриць вигляду (0.2), де  $t = 1$ ,  $\lambda_1 = 0$  та  $m_1, \dots, m_r$  замість  $m_{11}, \dots, m_{1r_1}$ .

Це доводить теорему для кожної жорданової матриці

$$J(\lambda) = J(0) + \lambda I$$

з єдиним власним значенням  $\lambda$ , оскільки

$$S(E)^{-1}(J(\lambda) + E)S(E) = S(E)^{-1}(J(0) + E)S(E) + \lambda I.$$

*Випадок 2:*  $t \geq 2$ . У цьому випадку (1.1) має різні власні значення. Запишемо (1.1) у вигляді  $J = J_1 \oplus \cdots \oplus J_t$ , де кожна

$$J_i := J_{m_{i1}}(\lambda_i) \oplus \cdots \oplus J_{m_{ir_i}}(\lambda_i)$$

має розмір  $n_i \times n_i$  та єдине власне значення  $\lambda_i$ . Нехай

$$J + E = \begin{bmatrix} J_1 + E_{11} & \cdots & E_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{t1} & \cdots & J_t + E_{tt} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

є довільна матриця близька до  $J$  (тобто, усі  $E_{ij}$  є малими). Ми робимо  $E_{ij} = 0$  для усіх  $i \neq j$  майже тотожними перетвореннями подібності наступним чином.

Представимо (1.4) у вигляді  $J + E^{\not\leftarrow} + E^{\not\rightarrow}$  де

$$J + E^{\not\leftarrow} := \begin{bmatrix} J_1 & & & 0 \\ E_{21} & J_2 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ E_{t1} & \dots & E_{t,t-1} & J_t \end{bmatrix},$$

$$E^{\not\rightarrow} := \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & \dots & E_{1t} \\ & E_{22} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & E_{t-1,t} \\ 0 & & & E_{tt} \end{bmatrix}.$$

Будемо приводити  $J + E^{\not\leftarrow}$ . Додаємо до її першої вертикальної смуги другу смугу домножену на довільну  $n_2 \times n_1$  матрицю  $M$  справа. Робимо обратне перетворення рядків: віднімаємо від другої горизонтальної смуги першу смугу помножену на  $M$  зліва. Це перетворення подібності замінює  $E_{21}$  на  $E_{21} + J_2 M - M J_1$ . Оскільки  $J_1$  та  $J_2$  мають відмінні власні значення, то існує  $M$  для якої

$$E_{21} + J_2 M - M J_1 = 0$$

(див [5, розділ VIII, § 3]). Крім того,  $M$  — мала матриця, оскільки  $E_{21}$  мала.

Таким же методом ми послідовно робимо нулі у інших блоках першої піддіагоналі

$$E_{21}, E_{32}, \dots, E_{t,t-1}$$

з  $J + E^{\not\leftarrow}$ , потім блоки другої піддіагоналі

$$E_{31}, \dots, E_{t,t-2},$$

і так далі. Таким чином, існують майже одиничні матриці  $S_1$  такі, що

$$S_1^{-1}(J + E^{\not\leftarrow})S_1 = J_1 \oplus \dots \oplus J_t.$$

Ми робимо такі самі перетворення подібності з усією матрицею

$$J + E = J + E^{\not\leftarrow} + E^{\not\rightarrow}$$

та отримуємо матрицю

$$J + E' := S_1^{-1}(J + E)S_1.$$

Її піддіагональні блоки  $E'_{ij}$  ( $i > j$ ) співпадають з піддіагональними блоками з  $S_1^{-1}E S_1$ , які є дуже малими оскільки усі  $E_{ij}$  є малими і перетворення є майже тотожними.

Ми застосовуємо такі самі перетворення до  $J + E'$  та отримуємо матрицю

$$J + E'' = S_2^{-1}(J + E')S_2,$$

у якій піддіагональні блоки  $E''_{ij}$  ( $i > j$ ) дуже-дуже малі, і так далі.

Нескінченний добуток  $S_1 S_2 \dots$  сходиться до майже одиничної матриці  $S$  такої, що усі піддіагональні блоки

$$J + \tilde{E} := S^{-1}(J + E)S$$

є нульовими.

За допомогою майже тотожних перетворень подібності, ми послідовно отримуємо нулі у першій наддіагоналі

$$\tilde{E}_{12}, \tilde{E}_{23}, \dots, \tilde{E}_{t-1,t}$$

матриці  $J + \tilde{E}$ , і потім у її другій наддіагоналі

$$\tilde{E}_{13}, \dots, \tilde{E}_{t-2,t},$$

і так далі.

Ми звели (1.4) до блочно-діагональної форми

$$(J_1 + F_1) \oplus \dots \oplus (J_t + F_t),$$

де усі  $F_i$  є малими. Зводячи кожний доданок  $J_i + F_i$  як у випадку 1, ми отримуємо матрицю вигляду (0.2).  $\square$

**Зауваження 1.1.** У доведенні, поданому вище, ми описали головні ідеї як побудувати перетворення (0.3). Алгоритми побудови цього перетворення обговорюються у [49, 50].

## РОЗДІЛ 2

# Блочно-трикутні мініверсальні деформації матриць та пучків матриць

Для довільної квадратної комплексної матриці  $A$ , Арнольд [1] побудував нормальну форму з мінімальною кількістю параметрів, до якої може бути зведена сім'я всіх матриць  $B$ , які є близькими до цієї матриці  $A$ , перетвореннями подібності, що гладко залежать від елементів матриць  $B$ . Edelman, Elmroth, Kågström [26] побудували подібні нормальні форми для сімей пучків комплексних матриць. Garcia-Planas і Sergeichuk [33] побудували більш прості нормальні форми для сімей пучків матриць і контраградієнтних пучків матриць (тобто, матричних пар з точністю до перетворень  $(A, B) \mapsto (S^{-1}AR, R^{-1}BS)$ ). Ми побудуємо інші нормальні форми для сімей матриць, пучків матриць, та контраградієнтних пучків матриць; наші нормальні форми блочно-трикутні.

Belitskii [4] довів, що довільна жорданова канонічна матриця  $J$  є перестановочно подібна до деякої матриці  $J^\#$ , яка називається *канонічною матрицею Вейра* та має властивість: усі матриці, що комутують з  $J^\#$  є блочно-трикутними. Згідно до цієї властивості,  $J^\#$  відіграє центральну роль у алгоритмі Беліцького зведення матриць будь-якої системи лінійних відображень до канонічної форми, див [15, 57].

У цьому розділі ми знайдемо іншу властивість канонічних матриць Вейра: вони мають блочно-трикутні мініверсальні деформації (у сенсі означення 2.2). Тому, якщо сім'я матриць що є достатньо близькою до даної квадратної матриці і визначається з точністю до гладких перетворень

подібності, тоді ми можемо взяти її у формі  $J^\# + E$ , де  $E$  є блочно-трикутною.

Ми також даємо блочно-трикутні мініверсальні деформації пучків та контраградієнтних пучків.

Усі матриці, що ми розглядатимемо є комплексними матрицями.

## 2.1. Мініверсальні деформації матриць

**Означення 2.1** (див. [1, 2, 3]). *Деформація*  $n \times n$  матриці  $A$  — матрична функція  $\mathcal{A}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  (її аргументи  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  називаються *параметрами*) в околі  $\vec{0} = (0, \dots, 0)$ , яка є голоморфною в  $\vec{0}$  та дорівнює  $A$  в  $\vec{0}$ . Дві деформації  $\mathcal{A}$  ототожнюються, якщо вони співпадають в околі  $\vec{0}$ .

Деформація  $\mathcal{A}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  матриці  $A$  є *версальною*, якщо усі матриці  $A + E$  в деякому околі  $A$  зводяться до форми

$$\mathcal{A}(h_1(E), \dots, h_k(E)) = \mathcal{S}(E)^{-1}(A + E)\mathcal{S}(E), \quad \mathcal{S}(0) = I_n,$$

у якій  $\mathcal{S}(E)$  є голоморфною в нулі матричною функцією від елементів  $E$ .

Версальна деформація з мінімальною кількістю параметрів називається *мініверсальною*.

**Означення 2.2.** Нехай деформація  $\mathcal{A}$  матриці  $A$  задається у формі  $A + \mathcal{B}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ .

- Якщо  $k$  елементів  $\mathcal{B}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  є незалежними параметрами  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  та інші є нулями, тоді деформація  $\mathcal{A}$  називається *простою*<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Мініверсальні деформації Арнольда є простими. Більше того, за [33, Наслідок 2.1] для матриць будь-якого зображення сагайдака (тобто, будь-якої скінченної системи лінійних відображень) над  $\mathbb{C}$  або  $\mathbb{R}$  можна побудувати просту мініверсальну деформацію.

- Проста деформація називається *блочно-трикутною* відносно деякого розбиття матриці  $A$  на блоки, якщо  $\mathcal{B}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  є блочно-трикутною відносно цього ж розбиття та кожний з її блоків є  $0$  або усі його елементи є незалежними параметрами.

Якщо  $\mathcal{A}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  — мініверсальна деформація матриці  $A$  та  $S^{-1}AS = B$  для деякої невинродженої  $S$ , тоді  $S^{-1}\mathcal{A}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)S$  — мініверсальна деформація матриці  $B$ . Тому достатньо побудувати мініверсальні деформації канонічних матриць відносно подібності.

Нехай

$$J(\lambda) := J_{n_1}(\lambda) \oplus \dots \oplus J_{n_l}(\lambda), \quad n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_l, \quad (2.1)$$

жорданова канонічна матриця з єдиним власним значенням, що дорівнює  $\lambda$ ; одиниці жорданових блоків пишемо по діагоналі:

$$J_{n_i}(\lambda) := \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix} \quad (n_i \times n_i).$$

Для довільних натуральних чисел  $p$  та  $q$ , визначимо  $p \times q$  матрицю

$$\mathcal{T}_{pq} := \begin{cases} \begin{bmatrix} * & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} & \text{якщо } p < q, \\ \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ * & \dots & * \end{bmatrix} & \text{якщо } p \geq q, \end{cases} \quad (2.2)$$

в якій зірочками позначені незалежні параметри.

**Теорема 2.1** ([3, §30, теорема 2]). (i) *Нехай  $J(\lambda)$  — жорданова канонічна матриця (2.1) з єдиним власним значенням, що дорівнює  $\lambda$ . Нехай*

$\mathcal{H} := [\mathcal{T}_{n_i, n_j}]$  — параметрична блочна матриця, поділена на блоки як  $J(\lambda)$ , її блоки  $\mathcal{T}_{n_i, n_j}$  визначені у (2.2). Тоді

$$J(\lambda) + \mathcal{H} \quad (2.3)$$

є простою мініверсальною деформацією  $J(\lambda)$ .

(ii) Нехай

$$J := J(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus J(\lambda_\tau), \quad \lambda_i \neq \lambda_j \text{ якщо } i \neq j, \quad (2.4)$$

є жордановою канонічною матрицею у якій кожний  $J(\lambda_i)$  має вигляд (2.1), та нехай  $J(\lambda_i) + \mathcal{H}_i$  — її мініверсальна деформація (2.3). Тоді

$$J + \mathcal{K} := (J(\lambda_1) + \mathcal{H}_1) \oplus \cdots \oplus (J(\lambda_\tau) + \mathcal{H}_\tau) \quad (2.5)$$

є простою мініверсальною деформацією  $J$ .

**Означення 2.3** ([61]). Канонічна форма Вейра  $J^\#$  жорданової канонічної матриці  $J$  (та будь-якої матриці, що є подібною до  $J$ ) визначена наступним чином.

(i) Нехай  $J$  має єдине власне значення. Запишемо її у вигляді (2.1). Переставимо перші стовбчики блоків  $J_{n_1}(\lambda)$ ,  $J_{n_2}(\lambda)$ ,  $\dots$ , та  $J_{n_l}(\lambda)$  на місця перших  $l$  стовбчиків всієї матриці, потім переставимо відповідні рядки. Наступним кроком переставимо другі стовбчики усіх блоків розміру не меншого  $2 \times 2$  у наступні стовбчики всієї матриці та переставимо відповідні рядки, і так далі. Отримана матриця є канонічною формою Вейра  $J(\lambda)^\#$  матриці  $J(\lambda)$ .

(ii) Якщо  $J$  має різні власні значення, тоді ми запишемо їх у вигляді (2.4). Канонічна форма Вейра для  $J$  є

$$J^\# := J(\lambda_1)^\# \oplus \cdots \oplus J(\lambda_\tau)^\#. \quad (2.6)$$

Кожний прямий доданок з (2.6) має вигляд

$$J(\lambda)^\# = \begin{bmatrix} \lambda I_{s_1} & \begin{bmatrix} I_{s_2} \\ 0 \end{bmatrix} & & 0 \\ & \lambda I_{s_2} & \ddots & \\ & & \ddots & \begin{bmatrix} I_{s_k} \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0 & & & \lambda I_{s_k} \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

де  $s_i$  — кількість жорданових блоків  $J_l(\lambda)$  розмірності  $l \geq i$  в  $J(\lambda)$ . Послідовність  $(s_1, s_2, \dots, s_k)$  називається *характеристикою Вейра* для матриці  $J$  (і для будь-якої матриці подібної до  $J$ ) та її власного значення  $\lambda$ , див [58]. За [4] або [57, теорема 1.2], усі матриці, що комутують з  $J^\#$  є блочно трикутними.

У наступній лемі ми будемо мініверсальну деформацію для  $J^\#$ , яка є блочно-трикутною відносно найбільш грубого розбиття  $J^\#$ , для якого усі діагональні блоки мають вигляд  $\lambda_i I$  та всі недіагональні блоки є 0 або  $I$ . Це означає, що розміри діагональних блоків для (2.7) відносно цього розбиття утворюють послідовність, отриману з

$$\begin{aligned} & s_k, s_{k-1} - s_k, \dots, s_2 - s_3, s_1 - s_2, \\ & s_k, s_{k-1} - s_k, \dots, s_2 - s_3, \\ & \dots \dots \dots \\ & s_k, s_{k-1} - s_k, \\ & s_k \end{aligned}$$

виключенням нульових членів.

**Теорема 2.2.** (i) *Нехай  $J(\lambda)$  — жорданова канонічна матриця вигляду (2.1) з єдиним власним значенням, що дорівнює  $\lambda$ . Нехай  $J(\lambda) + \mathcal{H}$  — її мініверсальна деформація (2.3). Позначимо через*

$$J(\lambda)^\# + \mathcal{H}^\# \quad (2.8)$$



параметричну матрицю, отриману з  $J(\lambda) + \mathcal{H}$  перестановками описаними в означенні 2.3(i). Тоді  $J(\lambda)^\# + \mathcal{H}^\#$  — мініверсальна деформація матриці  $J(\lambda)^\#$  і її матриця  $\mathcal{H}^\#$  нижньо блочно-трикутна.

(ii) Нехай  $J$  — жорданова канонічна матриця представлена у вигляді (2.4) та нехай  $J^\#$  — її канонічна форма Вейра. Застосуємо перестановки, описані в (i), до кожного з прямих доданків мініверсальної деформації (2.5) для  $J$ . Тоді отримана матриця

$$J^\# + \mathcal{K}^\# := (J(\lambda_1)^\# + \mathcal{H}_1^\#) \oplus \cdots \oplus (J(\lambda_\tau)^\# + \mathcal{H}_\tau^\#) \quad (2.9)$$

є мініверсальною деформацією для  $J^\#$ , яка є простою та блочно-трикутною (у сенсі означення 2.2).

Доведемо цю теорему. Вигляд  $J(\lambda)^\# + \mathcal{H}^\#$  та блочна трикутність  $\mathcal{H}^\#$  стають більш зрозумілими якщо ми здійснимо перестановки з означення 2.3(i) в два кроки.

*Перший крок.* Запишемо послідовність  $n_1, n_2, \dots, n_l$  з (2.1) у вигляді

$$\underbrace{m_1, \dots, m_1}_{r_1 \text{ разів}} \quad \underbrace{m_2, \dots, m_2}_{r_2 \text{ разів}} \quad \dots \quad \underbrace{m_t, \dots, m_t}_{r_t \text{ разів}}$$

де

$$m_1 > m_2 > \cdots > m_t. \quad (2.10)$$

Розіб'ємо  $J(\lambda)$  у  $t$  горизонтальних та  $t$  вертикальних смуг розміру

$$r_1 m_1, r_2 m_2, \dots, r_t m_t$$

(кожна з них містить жорданові блоки однакового розміру), зробимо описані перестановки у кожній з цих смуг, і отримуємо

$$J(\lambda)^+ := J_{m_1}(\lambda I_{r_1}) \oplus \cdots \oplus J_{m_t}(\lambda I_{r_t}), \quad (2.11)$$

де

$$J_{m_i}(\lambda I_{r_i}) := \begin{bmatrix} \lambda I_{r_i} & I_{r_i} & & 0 \\ & \lambda I_{r_i} & \ddots & \\ & & \ddots & I_{r_i} \\ 0 & & & \lambda I_{r_i} \end{bmatrix} \quad (m_i \text{ діагональних блоків}).$$

Такими самими перестановками рядків та стовбчиків у  $J(\lambda) + \mathcal{H}$  зведемо  $\mathcal{H}$  до

$$\mathcal{H}^+ := [\tilde{\mathcal{T}}_{m_i, m_j}(r_i, r_j)],$$

де кожна  $\tilde{\mathcal{T}}_{m_i, m_j}(r_i, r_j)$  отримується з матриці  $\mathcal{T}_{m_i, m_j}$ , визначеної у (2.2), заміною кожного нульового елемента блоком нулів розміру  $r_i \times r_j$  та кожного елемента  $*$  —  $r_i \times r_j$  блоком

$$* := \begin{bmatrix} * & \dots & * \\ \vdots & & \vdots \\ * & \dots & * \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Наприклад, якщо

$$J(\lambda) = \underbrace{J_4(\lambda) \oplus \dots \oplus J_4(\lambda)}_p \oplus \underbrace{J_2(\lambda) \oplus \dots \oplus J_2(\lambda)}_q, \quad (2.13)$$

тоді

$$J(\lambda)^+ = J_4(\lambda I_p) \oplus J_2(\lambda I_q) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|cc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (2,1) & (2,2) \\ \lambda I_p & I_p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda I_p & I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda I_p & I_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda I_p & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda I_q & I_q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda I_q \end{array} \end{array} \begin{array}{l} (1,1) \\ (1,2) \\ (1,3) \\ (1,4) \\ (2,1) \\ (2,2) \end{array} \quad (2.14)$$

Смуга індексується парою  $(i, j)$ , якщо вона містить  $j$ -ту смугу з  $J_{m_i}(\lambda I_{r_i})$ . Відповідно,

$$\mathcal{H}^+ = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|cc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (2,1) & (2,2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * \\ \hline * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & * & * \end{array} \end{array} \begin{array}{l} (1,1) \\ (1,2) \\ (1,3) \\ (1,4) \\ (2,1) \\ (2,2) \end{array} \quad (2.15)$$

*Другий крок.* Ми переставляємо в  $J(\lambda)^+$  перші вертикальні смуги з

$$J_{m_1}(\lambda I_{r_1}), J_{m_2}(\lambda I_{r_2}), \dots, J_{m_t}(\lambda I_{r_t})$$

у перші  $t$  вертикальні смуги та переставляємо відповідні горизонтальні смуги, потім переставляємо другі вертикальні смуги у наступні вертикальні смуги та переставляємо відповідні горизонтальні смуги; продовжуємо процес поки не отримаємо  $J(\lambda)^\#$ . Такі самі перестановки перетворюють  $\mathcal{H}^+$  у  $\mathcal{H}^\#$ .

Наприклад, застосовуючи ці перестановки до (2.14) та (2.15), ми отримуємо

$$J(\lambda)^\# = \begin{array}{c} \begin{array}{cc|cc|cc} (1,1) & (2,1) & (1,2) & (2,2) & (1,3) & (1,4) \\ \lambda I_p & 0 & I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda I_q & 0 & I_q & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda I_p & 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda I_q & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda I_p & I_p \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda I_p \end{array} \\ (1,1) \\ (2,1) \\ (1,2) \\ (2,2) \\ (1,3) \\ (1,4) \end{array} \quad (2.16)$$

та

$$\mathcal{H}^\# = \begin{array}{c} \begin{array}{cc|cc|cc} (1,1) & (2,1) & (1,2) & (2,2) & (1,3) & (1,4) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & * & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline * & * & * & * & * & * \end{array} \\ (1,1) \\ (2,1) \\ (1,2) \\ (2,2) \\ (1,3) \\ (1,4) \end{array} \quad (2.17)$$

Доведення теореми 2.2. (i) Як у (2.14), ми індексуємо вертикальні (горизонтальні) смуги в  $J(\lambda)^+$  з (2.11) парами натуральних чисел наступним чином: смуга індексується парою  $(i, j)$ , якщо вона містить  $j$ -ту смугу  $J_{m_i}(\lambda I_{r_i})$ . Пари, що індексують смуги в  $J(\lambda)^+$  утворюють послі-

довність

$$\begin{aligned}
 & (1, 1), (1, 2), \dots, (1, m_t), \dots, (1, m_2), \dots, (1, m_1), \\
 & (2, 1), (2, 2), \dots, (2, m_t), \dots, (2, m_2), \\
 & \dots\dots\dots \\
 & (t, 1), (t, 2), \dots, (t, m_t),
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

яка лексикографічно впорядкована. Переставимо пари по стовпчикам з (2.18):

$$(1, 1), (2, 1), \dots, (t, 1); \dots; (1, m_t), (2, m_t), \dots, (t, m_t); \dots; (1, m_1) \tag{2.19}$$

і зробимо такі самі перестановки відповідних смуг в  $J(\lambda)^{\#}$  та  $\mathcal{H}^{\#}$ . Ми отримуємо  $J(\lambda)^{\#}$  та  $\mathcal{H}^{\#}$ ; див приклади (2.16) та (2.17).

Елемент  $((i, j), (i', j'))$  в  $\mathcal{H}^{\#}$  — зірочка тоді і тільки тоді, якщо

$$\text{або } i \leq i' \text{ та } j = m_i, \text{ або } i > i' \text{ та } j' = 1. \tag{2.20}$$

За (2.10), у цих випадках  $j \geq j'$ , та якщо  $j = j'$ , тоді або  $j = j' = m_i$  та  $i = i'$ , або  $j = j' = 1$  та  $i > i'$ . Отже,  $\mathcal{H}^{\#}$  є нижньо блочно-трикутною.

(ii) Це твердження випливає з (i) та теореми 2.1(ii).

**Зауваження 2.1.** *Нехай  $J(\lambda)$  — жорданова матриця з єдиним власним значенням, нехай  $m_1 > m_2 > \dots > m_t$  — різні розміри її жорданових блоків, та нехай  $r_i$  — кількість жорданових блоків розміру  $m_i$ . Тоді деформація  $J(\lambda)^{\#} + \mathcal{H}^{\#}$  з теореми 2.2 може бути формально побудована наступним чином:*

- $J(\lambda)^{\#}$  та  $\mathcal{H}^{\#}$  — матриці однакового розміру; вони однаковим чином розбиваються на горизонтальні та вертикальні смуги, які індексовані парами (2.19).
- $((i, j), (i, j))$ -ий діагональний блок у  $J(\lambda)^{\#}$  є  $\lambda I_{r_i}$ , її  $((i, j), (i, j+1))$ -ий блок є  $I_{r_i}$ , та її інші блоки нульові.
- $((i, j), (i', j'))$ -ий блок у  $\mathcal{H}^{\#}$  має вигляд (2.12) тоді і тільки тоді, якщо (2.20) виконується; її інші блоки нульові.

## 2.2. Мініверсальні деформації пучків матриць

За теоремою Кронекера про пучки матриць (див [5, розділ XII, §4]), кожна пара  $m \times n$  матриць зводиться перетвореннями еквівалентності

$$(A, B) \mapsto (S^{-1}AR, S^{-1}BR), \quad S \text{ та } R \text{ невироджені,}$$

до канонічної пари Кронекера  $(A_{\text{кр}}, B_{\text{кр}})$ , яка є прямою сумою, однозначно визначеною з точністю до перестановки доданків, пар вигляду

$$(I_r, J_r(\lambda)), (J_r(0), I_r), (F_r, G_r), (F_r^T, G_r^T),$$

де  $\lambda \in \mathbb{C}$  та

$$F_r := \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}, \quad G_r := \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ & \ddots & 0 \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

є матрицями розміру  $r \times (r - 1)$ ,  $r \geq 1$ .

Означення 2.1 та 2.2 поширюються на матричні пари природним чином.

Мініверсальні деформації для  $(A_{\text{кр}}, B_{\text{кр}})$  отримано у [26, 33]. Деформації з [33] є простими; у цьому розділі ми зводимо її до блочно-трикутного вигляду перестановками рядків та стовбчиків. Задля цього, ми замінюємо у  $(A_{\text{кр}}, B_{\text{кр}})$

- пряму суму  $(I, J)$  усіх пар вигляду  $(I_r, J_r(\lambda))$  — парою  $(I, J^\#)$ , та
- пряму суму  $(J(0), I)$  усіх пар вигляду  $(J_r(0), I_r)$  — парою  $(J(0)^\#, I)$ ,

де  $J^\#$  та  $J(0)^\#$  — матриці Вейра з означення 2.3. Ми отримуємо канонічну пару матриць вигляду

$$\bigoplus_{i=1}^l (F_{p_i}^T, G_{p_i}^T) \oplus (I, J^\#) \oplus (J(0)^\#, I) \oplus \bigoplus_{i=1}^r (F_{q_i}, G_{q_i}); \quad (2.22)$$

де ми вважаємо, що

$$p_1 \leq \dots \leq p_l, \quad q_1 \geq \dots \geq q_r. \quad (2.23)$$

(Цей особливий порядок прямих доданків у (2.22) дозволяє побудувати її блочно-трикутну мініверсальну деформацію)

Позначимо через

$$0^\uparrow := \begin{bmatrix} * & \cdots & * \\ & 0 & \end{bmatrix}, \quad 0^\downarrow := \begin{bmatrix} & 0 & \\ * & \cdots & * \end{bmatrix},$$

$$0^\leftarrow := \begin{bmatrix} * \\ \vdots \\ * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & \\ & 0 \end{bmatrix}, \quad 0^\rightarrow := \begin{bmatrix} & * \\ 0 & \vdots \\ & * \end{bmatrix}$$

матриці, у яких елементи першого рядку, останнього рядку, першої колонки, та останньої колонки, відповідно, є зірочками та всі інші елементи — нулями, та позначимо

$$\mathcal{Z} := \begin{bmatrix} * & \cdots & * & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & 0 & & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

(кількість нулів у першому рядку  $\mathcal{Z}$  дорівнює кількості рядків). Зірочками позначаються незалежні параметри.

У наступній теоремі ми наводимо просту мініверсальну деформацію для (2.22), яка є блочно трикутною відповідно розбиття (2.22), де  $J^\#$  та  $J(0)^\#$  розбиті як у теоремі 2.2, та усі блоки з  $(F_{p_i}^T, G_{p_i}^T)$  та  $(F_{q_i}, G_{q_i})$  мають розмір  $1 \times 1$ .

**Теорема 2.3.** *Нехай  $(A, B)$  — канонічна пара матриць вигляду (2.22), що задовольняє (2.23). Одна з блочно-трикутних простих мініверсаль-*







ми можемо об'єднати пари однакового розміру у (2.22) та отримати пару вигляду

$$\bigoplus_{i=1}^{l'} (\hat{F}_{p'_i}^T, \hat{G}_{p'_i}^T) \oplus (I, J^\#) \oplus (J(0)^\#, I) \oplus \bigoplus_{i=1}^{r'} (\hat{F}_{q'_i}, \hat{G}_{q'_i}), \quad (2.26)$$

де  $p'_1 < \dots < p'_{l'}$ , та  $q'_1 > \dots > q'_{r'}$ . Ця пара перестановочно еквівалентна парі (2.22). Тими ж перестановками рядків та стовбчиків у (2.24) та (2.25) ми об'єднаємо усі

$$F_p^T, G_p^T, F_q, G_q$$

у

$$\hat{F}_p^T, \hat{G}_p^T, \hat{F}_q, \hat{G}_q$$

та

$$0, 0^\uparrow, 0^\downarrow, 0^\leftarrow, 0^\rightarrow, \mathcal{Z}$$

у

$$\hat{0}, \hat{0}^\uparrow, \hat{0}^\downarrow, \hat{0}^\leftarrow, \hat{0}^\rightarrow, \hat{\mathcal{Z}}$$

які складаються з блоків  $0$  та  $\star$  визначених у (2.12); отримана пара є блочно-трикутною мініверсальною деформацією для (2.26).

### 2.3. Мініверсальні деформації контраградієнтних пучків матриць

Кожна пара  $m \times n$  та  $n \times m$  матриць зводиться перетвореннями контраградієнтної еквівалентності

$$(A, B) \mapsto (S^{-1}AR, R^{-1}BS), \quad S \text{ та } R \text{ — невироджені,}$$

до канонічної форми, побудованої у [6] (див також [36]), яка є прямою сумою, однозначно визначеною з точністю до перестановки доданків, пар вигляду

$$(I_r, J_r(\lambda)), (J_r(0), I_r), (F_r, G_r^T), (F_r^T, G_r), \quad (2.27)$$

де  $\lambda \in \mathbb{C}$  та матриці  $F_r$  та  $G_r$  визначені у (2.21).

Для довільної матриці  $M$ , визначимо матриці

$$M_{\Delta} := \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ & & M \end{bmatrix}, \quad M_{\triangleright} := \begin{bmatrix} & 0 \\ M & \vdots \\ & 0 \end{bmatrix}$$

які отримуються дописуванням нульового рядка зверху та нульового стовбчика з правого боку, відповідно. Кожна блочна матриця, блоки якої мають вигляд  $\mathcal{T}_{\Delta}$  (де  $\mathcal{T}$  визначена у (2.2)) позначається як  $\mathcal{H}_{\Delta}$ . Кожна блочна матриця, блоки якої мають вигляд  $\mathcal{T}_{\triangleright}$ , позначається як  $\mathcal{H}_{\triangleright}$ .

**Теорема 2.4.** *Нехай*

$$(I, J) \oplus (A, B) \tag{2.28}$$

*канонічна пара матриць відносно конраградієнтної еквівалентності, де  $J$  — невироджена жорданова матриця,*

$$(A, B) := \bigoplus_{i=1}^l (F_{p_i}, G_{p_i}^T) \oplus (I, J(0)) \oplus (J'(0), I) \oplus \bigoplus_{i=1}^r (F_{q_i}^T, G_{q_i}),$$

*$J(0)$  та  $J'(0)$  — жорданові матриці з єдиним власним значенням 0, та*

$$p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_l, \quad q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_r.$$

*Тоді одна з простих мініверсальних деформацій пари (2.28) має вигляд*

$$(I, J + \mathcal{K}) \oplus (\mathcal{A}, \mathcal{B}), \tag{2.29}$$

*де  $J + \mathcal{K}$  — деформація (2.5) для  $J$  та  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  є наступною деформацією*



де  $J + \mathcal{K}$  з (2.5),

$$\mathcal{A}' := \left[ \begin{array}{cccc|c|c|c} F_{p_1} + \mathcal{T} & \mathcal{T} & \dots & \mathcal{T} & & & \\ & F_{p_2} + \mathcal{T} & \ddots & \vdots & 0 & \mathcal{H} & \mathcal{H} \\ & & & \ddots & & & \\ 0 & & & F_{p_l} + \mathcal{T} & & & \\ \hline & 0 & & & I & 0 & 0 \\ \hline & \mathcal{H} & & & 0 & J'(0) + \mathcal{H} & \mathcal{H} \\ \hline & & & & & & G_{q_1}^T & \mathcal{T} & \dots & \mathcal{T} \\ & & & & & & & G_{q_2}^T & \ddots & \vdots \\ & & & & & & & & \ddots & \mathcal{T} \\ 0 & & & & 0 & \mathcal{H} & & & & G_{q_r}^T \\ \hline & & & & & & & & & 0 \end{array} \right],$$

та

$$\mathcal{B}' := \left[ \begin{array}{cccc|c|c|c} G_{p_1}^T & & & 0 & & & \\ \mathcal{T} & G_{p_2}^T & & & \mathcal{H} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \\ \mathcal{T} & \dots & \mathcal{T} & G_{p_l}^T & & & \\ \hline & \mathcal{H} & & & J(0) + \mathcal{H} & \mathcal{H} & \mathcal{H} \\ \hline & 0 & & & \mathcal{H} & I & 0 \\ \hline & & & & & & F_{q_1} + \mathcal{T} & & & 0 \\ & & & & & & \mathcal{T} & F_{q_2} + \mathcal{T} & & \\ & & & & & & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \mathcal{H} & & & & \mathcal{H} & 0 & \mathcal{T} & \dots & \mathcal{T} & F_{q_r} + \mathcal{T} \\ \hline & & & & & & & & & \end{array} \right];$$

Нехай  $(C, D)$  — канонічна пара (2.28), та нехай  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$  — довільна пара матриць того ж розміру, у якої кожний елемент дорівнює 0 або  $*$ . За [33, теорема 2.1] (дивись також початок доведення теореми 5.1 в [33]),  $(C + \mathcal{P}, D + \mathcal{Q})$  є версальною (відповідно, мініверсальною) деформацією  $(C, D)$  тоді і тільки тоді, коли для кожної пари  $(M, N)$  того ж розміру, як і  $(C, D)$ , існують квадратні матриці  $S$  та  $R$  та пара (відповідно, єдина пара)  $(P, Q)$  отримана з  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$  заміною її зірочок комплексними

числами, такі що

$$(M, N) + (CR - SC, DS - RD) = (P, Q). \quad (2.31)$$

Матриці  $(C, D)$  блочно діагональні:

$$C = C_1 \oplus C_2 \oplus \cdots \oplus C_t,$$

$$D = D_1 \oplus D_2 \oplus \cdots \oplus D_t,$$

де  $(C_i, D_i)$  мають вигляд (2.27). Відповідно розбиваючи матриці  $(M, N)$  та  $(P, Q)$  та прирівнюючи відповідні блоки у (2.31), ми знаходимо, що  $(C + P, D + Q)$  — версальна деформація  $(C, D)$  тоді і тільки тоді, коли

для кожної пари індексів  $(i, j)$  та кожної пари  $(M_{ij}, N_{ij})$  розміру  $(P_{ij}, Q_{ij})$  існують матриці  $S_{ij}$  та  $R_{ij}$  та пара  $(P_{ij}, Q_{ij})$  отримана з  $(P_{ij}, Q_{ij})$  заміною її зірочок комплексними числами, такі що

$$(M_{ij}, N_{ij}) + (C_i R_{ij} - S_{ij} C_j, D_i S_{ij} - R_{ij} D_j) = (P_{ij}, Q_{ij}). \quad (2.32)$$

Нехай  $(C + P', D + Q')$  — деформація (2.30) пари  $(C, D)$ . Оскільки вона версальна,

для кожної пари індексів  $(i, j)$  та кожної пари  $(M_{ij}, N_{ij})$  розміру  $(P'_{ij}, Q'_{ij})$  існують матриці  $S_{ij}$  та  $R_{ij}$  та пара  $(P'_{ij}, Q'_{ij})$  отримана з  $(P'_{ij}, Q'_{ij})$  заміною її зірочок комплексними числами, такі що

$$(M_{ij}, N_{ij}) + (C_i R_{ij} - S_{ij} C_j, D_i S_{ij} - R_{ij} D_j) = (P'_{ij}, Q'_{ij}). \quad (2.33)$$

Нехай  $(C + P, D + Q)$  — деформація (2.29). Для того, щоб довести її версальність, перевіримо умову (2.32). Якщо  $(P_{ij}, Q_{ij}) = (P'_{ij}, Q'_{ij})$  тоді (2.32) виконується за (2.33).

Нехай  $(P_{ij}, Q_{ij}) \neq (P'_{ij}, Q'_{ij})$  для деяких  $(i, j)$ . Оскільки умова (2.33) виконується, достатньо перевірити, що для кожної  $(P'_{ij}, Q'_{ij})$  отриманої з

$(\mathcal{P}'_{ij}, \mathcal{Q}'_{ij})$  заміною її зірочок комплексними числами, існують матриці  $S$  та  $R$  та пара  $(P_{ij}, Q_{ij})$  отримана з  $(\mathcal{P}_{ij}, \mathcal{Q}_{ij})$  заміною її зірочок комплексними числами, такі що

$$(P'_{ij}, Q'_{ij}) + (C_i R - S C_j, D_i S - R D_j) = (P_{ij}, Q_{ij}). \quad (2.34)$$

Можливі 5 випадків.

*Випадок 1:*  $(C_i, D_i) = (F_p, G_p^T)$  та  $i = j$ . Тоді

$$(P'_{ii}, Q'_{ii}) = (T, 0) = \left( \left[ \begin{array}{ccc} 0 & & \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_{p-1} \end{array} \right], 0 \right)$$

(ми позначаємо через  $T$  будь-яку матрицю, отриману з  $\mathcal{T}$  заміною її зірочок комплексними числами). Беручи

$$S := \left[ \begin{array}{cccccc} 0 & & & & & 0 \\ \alpha_{p-1} & \ddots & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \\ \alpha_2 & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ddots & \alpha_{p-1} & 0 & \end{array} \right],$$

$$R := \left[ \begin{array}{cccccc} 0 & & & & & 0 \\ \alpha_{p-1} & \ddots & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \\ \alpha_3 & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \ddots & \alpha_{p-1} & 0 & \end{array} \right]$$

у (2.34), ми отримаємо

$$(P_{ii}, Q_{ii}) = \left( 0, \left[ \begin{array}{cc} \alpha_{p-1} & \\ \vdots & 0 \\ \alpha_1 & \end{array} \right] \right) = (0, T).$$

*Випадок 2:*  $(C_i, D_i) = (F_p, G_p^T)$  та  $(C_j, D_j) = (I_m, J_m(0))$ .

Тоді

$(P'_{ij}, Q'_{ij}) = (0, T)$ . Беручи  $S := -T_\Delta$  та  $R := 0$  у (2.34), ми отримаємо

$$(P_{ij}, Q_{ij}) = (T_\Delta, 0).$$

*Випадок 3:*  $(C_i, D_i) = (I_m, J_m(0))$  та  $(C_j, D_j) = (J_n(0), I_n)$ . Тоді  $(P'_{ij}, Q'_{ij}) = (0, T)$ . Беручи  $S := 0$  та  $R := T$  у (2.34), ми отримуємо  $(P_{ij}, Q_{ij}) = (T, 0)$ .

*Випадок 4:*  $(C_i, D_i) = (I_m, J_m(0))$  та  $(G_j, D_j) = (G_q^T, F_q)$ . Тоді  $(P'_{ij}, Q'_{ij}) = (0, T)$ . Беручи  $S := 0$  та  $R := T_{\triangleright}$  у (2.34), ми отримуємо  $(P_{ij}, Q_{ij}) = (T_{\triangleright}, 0)$ .

*Випадок 5:*  $(C_i, D_i) = (J_n(0), I_n)$  та  $(G_j, D_j) = (F_p, G_p^T)$ . Тоді  $(P'_{ij}, Q'_{ij}) = (T, 0)$ . Беручи  $S := T_{\triangleright}$  та  $R := 0$  у (2.34), ми отримуємо  $(P_{ij}, Q_{ij}) = (0, T_{\triangleright})$ .

Ми довели, що деформація (2.29) версальна. Вона мініверсальна, оскільки має таку ж саму кількість параметрів як і мініверсальна деформація (2.30).  $\square$

**Зауваження 2.3.** Деформація  $(I, J + K) \oplus (\mathcal{A}, \mathcal{B})$  з теореми 2.4 може бути перетворена у блочно-трикутну наступними перестановками її рядків та стовбчиків, які є перетвореннями контраградієнтної еквівалентності:

- Ми зводимо  $(I, J + K)$  до вигляду  $(I, J^{\#} + K^{\#})$ , де  $J^{\#} + K^{\#}$  визначена у (2.9).
- Ми зводимо діагональний блок  $J(0) + \mathcal{H}$  у  $\mathcal{B}$  до вигляду  $J(0)^{\#} + \mathcal{H}^{\#}$  (визначеному у (2.8)) перестановками рядків та стовбчиків  $\mathcal{B}$ , описаними у означенні 2.3. Потім ми робимо контраградієнтні перестановки рядків та стовбчиків  $\mathcal{A}$ .
- Нарешті, ми зводимо діагональний блок  $J'(0) + \mathcal{H}$  у  $\mathcal{A}$  до вигляду  $J'(0)^{\#} + \mathcal{H}^{\#}$  (визначеному у (2.8)) перестановками рядків та стовбчиків  $\mathcal{A}$  описаними в означенні 2.3, і робимо контраградієнтні перестановки рядків та стовбчиків  $\mathcal{B}$ . Отримана деформація  $J'(0)^{\#} + \mathcal{H}^{\#}$  нижньо блочно-трикутна, ми робимо її верхньо

блочно-трикутною перетвореннями

$$P(J'(0)^\# + \mathcal{H}^\#)P, \quad P := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \cdot & \cdot \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(тобто ми переставляємо у зворотньому порядку рядки та стовбчики  $\mathcal{A}$ , що перетинають  $J'(0)^\# + \mathcal{H}^\#$ , і робимо контраградієнтні перестановки рядків та стовбчиків  $\mathcal{B}$ ).



## РОЗДІЛ 3

# Як змінюється при збуреннях канонічна форма $2 \times 2$ та $3 \times 3$ матриць відносно конгруентності

Ми будемо діаграми Хассе  $G_2$  та  $G_3$  для впорядкування відносно включення на множинах класів конгруентності  $2 \times 2$  та  $3 \times 3$  комплексних матриць. Іншими словами, ми будемо два орієнтовані графи, вершини яких є  $2 \times 2$  або, відповідно,  $3 \times 3$  канонічні матриці відносно конгруентності і існує орієнтований шлях з  $A$  у  $B$  тоді і тільки тоді, якщо  $A$  може бути перетворена як завгодно малим збуренням у матрицю, яка конгруентна  $B$ .

### 3.1. Вступ

Ми досліджуємо, як малі збурення  $2 \times 2$  або  $3 \times 3$  комплексної матриці можуть змінити її канонічну форму відносно конгруентності.

Дві комплексні матриці  $A$  та  $B$  називаються *конгруентними*, якщо  $S^T A S = B$  для невиродженої  $S$ . Це відношення еквівалентності; класи еквівалентності називаються *класами конгруентності*. У §2.1 ми будемо графи замикання  $G_2$  та  $G_3$ , які визначені для довільного натурального  $n$  наступним чином.

**Означення 3.1.** *Граф замикання  $G_n$  для класів конгруентності  $n \times n$  комплексних матриць – це орієнтований граф, в якому кожна вершина  $v$  однозначно представляє клас конгруентності  $C_v$   $n \times n$  матриць, та існує*

орієнтований шлях з вершини  $v$  вершину  $w$  тоді і тільки тоді, якщо одна (і тому кожна) матриця з  $C_v$  може бути перетворена у матрицю з  $C_w$  як завгодно малим збуренням.

Граф  $G_n$  є діаграмою Хассе для множини класів конгруентності  $n \times n$  матриць з наступним частковим порядком:  $a \preceq b$  якщо  $a$  міститься у замиканні елемента  $b$ . Тому граф  $G_n$  показує, як класи конгруентності відносяться один до одного у афінному просторі  $n \times n$  матриць.

Оскільки кожному  $n \times n$  матрицю можна єдиним чином записати у вигляді  $P + Q$ , де  $P$  симетрична та  $Q$  кососиметрична,  $G_n$  також є графом замикання для класів конгруентності  $n \times n$  симетричних/кососиметричних матричних пучків  $P + \lambda Q$ .

Кожний клас конгруентності містить в точності одну канонічну матрицю відносно конгруентності, і тому зручно представляти класи конгруентності їх канонічними матрицями. Ми використовуємо канонічні матриці відносно конгруентності  $A_{\text{can}}$ , які побудовані у [39]. Ми також використовуємо *мініверсальні деформації* матриці  $A_{\text{can}}$ , які побудовані у [23], тобто нормальну форму, до якої усі матриці близькі до  $A_{\text{can}}$  можуть бути зведені перетвореннями конгруентності, що перервно залежать від їх елементів.

Термін “орбіта відносно конгруентності” часто використовується замість “клас конгруентних матриць” [16, 20]. Задача, яку ми розглядаємо, може бути названа “стратифікацією орбіт матриць відносно конгруентності” по аналогії до стратифікації орбіт та пачок матриць відносно подібності та пучків матриць [27, 29, 42, 41].

**3.1.1. Граф замикання для класів подібності** На відміну від деформацій класів конгруентності матриць, деформації класів подібності матриць та класів еквівалентності пучків матриць добре вивчені. Ми будемо теорію деформацій матриць відносно конгруентності по аналогії з добре розвинутою теорією деформацій матриць відносно подібності. Для

зручності читача, в цьому параграфі ми нагадаємо деякі факти теорії деформацій матриць відносно подібності, базуючись на статті [47].

Нехай  $J$  — жорданова матриця і нехай  $\lambda$  — її власне значення. Позначимо через  $w_{\lambda_j}$  кількість жорданових блоків  $J_m(\lambda)$  розміру  $m \geq j$  у  $J$ ; послідовність  $(w_{\lambda_1}, w_{\lambda_2}, \dots)$  називається *характеристикою Вейра* матриці  $J$  (і довільної матриці, що є подібною до  $J$ ) для власного числа  $\lambda$ .

Наступна теорема була доведена у [18] і, незалежно, у [51]; інше доведення було дано у [27, Theorem 2.2].

**Теорема 3.1** ([18, 51]). *Нехай  $J$  та  $J'$  — жорданові матриці однакового розміру. Тоді  $J$  може бути перетворена довільними малими збуреннями у матрицю, яка є подібною до  $J'$ , тоді і тільки тоді, якщо  $J$  та  $J'$  мають однакову множину власних значень з однаковими кратностями та їх характеристика Вейра задовольняє*

$$\begin{aligned} w_{\lambda_1} &\geq w'_{\lambda_1}, \\ w_{\lambda_1} + w_{\lambda_2} &\geq w'_{\lambda_1} + w'_{\lambda_2}, \\ w_{\lambda_1} + w_{\lambda_2} + w_{\lambda_3} &\geq w'_{\lambda_1} + w'_{\lambda_2} + w'_{\lambda_3}, \\ &\dots \end{aligned}$$

для кожного власного значення  $\lambda$ .

Рокрзува [54] поширив теорему 3.1 на канонічні форми Кронекера пучків матриць.

**Означення 3.2.** Нехай  $T$  — топологічний простір з відношенням еквівалентності. *Граф замикання* (або *діаграма замикання*) — це орієнтований граф, вершини якого бієктивно відповідають класам еквівалентності та для класів еквівалентності  $a$  та  $b \in$  орієнтований шлях з вершини  $a$  до вершини  $b$  тоді і тільки тоді, якщо  $a \in \bar{b}$ , де  $\bar{b}$  позначає замикання  $b$ .

Таким чином, граф замикання є діаграмою Хассе для множини класів еквівалентності з наступним частковим порядком:  $a \leq b$  тоді і тільки

тоді, якщо  $a \in \bar{b}$ . Граф замикання показує як класи еквівалентності відносяться один до одного у  $T$ .

У цьому параграфі  $T = \mathbb{C}^{n \times n}$  і відношення еквівалентності є подібністю матриць. Оскільки кожний клас подібності містить тільки одну жорданову матрицю визначену з точністю до перестановки жорданових блоків, ми отожднюємо вершини з матрицями Жордана, визначеними з точністю до перестановки жорданових блоків.

Теорема 3.1 дозволяє побудувати граф замикання згідно з наступною лемою.

**Лема 3.1.** *Граф замикання для класів подібності  $n \times n$  матриць містить орієнтований шлях від жорданової матриці  $J$  до жорданової матриці  $J'$  тоді і тільки тоді, якщо  $J$  може бути перетворена за допомогою довільно малих збурень у матрицю, що є подібною до  $J'$ .*

*Доведення.* Позначимо через  $[M]$  клас подібності квадратної матриці  $M$ .

“ $\longleftarrow$ ” Нехай  $J$  може бути перетворена за допомогою довільно малих збурень у матрицю, що є подібною до  $J'$ . Тоді існує послідовність матриць

$$J + E_1, J + E_2, J + E_3, \dots$$

у  $[J']$  що збігається до  $J$ . Це означає, що  $J \in \overline{[J']}$ . Нехай  $A \in [J]$ , тобто  $A = S^{-1}JS$  для деякої  $S$ . Тоді послідовність матриць

$$S^{-1}(J + E_i)S = A + S^{-1}E_iS \quad (i = 1, 2, \dots)$$

у  $[J']$  збігається до  $A$ , і тоді  $A \in \overline{[J']}$ . Тому  $[J] \subset \overline{[J']}$  і є орієнтований шлях з  $J$  у  $J'$ .  $\square$

**Наслідок 3.1.** *За теоремою 3.1, стрілки є тільки між жордановими матрицями з однаковими множинами власних значень. Нехай  $J$  — жорданова матриця.*

- *Нехай  $J'$  — жорданова матриця такого самого розміру. Кожний окіл матриці  $J$  містить матрицю, для якої жорданова канонічна*

форма є  $J'$  тоді і тільки тоді, коли є орієнтований шлях з  $J$  у  $J'$  (якщо  $J = J'$ , то завжди існує “лінійний” шлях довжини 0 з  $J$  у  $J'$ ).

- Замикання класу подібності матриці  $J$  дорівнює об'єднанню класів подібності усіх жорданових матриць  $J'$  таких, що є орієнтований шлях з  $J'$  у  $J$  (якщо  $J = J'$ , то завжди існує “лінійний” шлях).

**Приклад 3.1.** Побудуємо граф замикання для класів подібності  $4 \times 4$  матриць. Кожна жорданова матриця є прямою сумою жорданових блоків  $J_m(\lambda)$ . Заміняючи їх на  $\lambda^m$  і видаляючи символи  $\oplus$ , ми отримуємо компактне позначення жорданових матриць, які були використані Арнольдом [1]. Наприклад,

$$\lambda^2\lambda\mu \quad \text{це} \quad J_2(\lambda) \oplus J_1(\lambda) \oplus J_1(\mu) \quad (3.1)$$

(ми пишемо  $\lambda, \mu$  замість  $\lambda^1, \mu^1$ ).

Для всіх жорданових матриць розміру  $4 \times 4$  з власним числом 0, ми маємо

жорданова матриця	її характеристика Вейра $(w_1, w_2, w_3, w_4)$	послідовність $(w_1, w_1 + w_2, w_1 + w_2 + w_3, w_1 + w_2 + w_3 + w_4)$
0000	(4,0,0,0)	(4,4,4,4)
0 <sup>2</sup> 00	(3,1,0,0)	(3,4,4,4)
0 <sup>2</sup> 0 <sup>2</sup>	(2,2,0,0)	(2,4,4,4)
0 <sup>3</sup> 0	(2,1,1,0)	(2,3,4,4)
0 <sup>4</sup>	(1,1,1,1)	(1,2,3,4)

Використовуючи цю таблицю, теорему 3.1, і лему 3.1, легко побудувати наступний граф замикання для класів подібності нільпотентних  $4 \times 4$  матриць:

$$0000 \rightarrow 0^200 \rightarrow 0^20^2 \rightarrow 0^30 \rightarrow 0^4$$

Таким же методом ми можемо побудувати граф замикання для класів подібності усіх  $4 \times 4$  матриць, який показано у рисунку 3.1. Граф нескін-

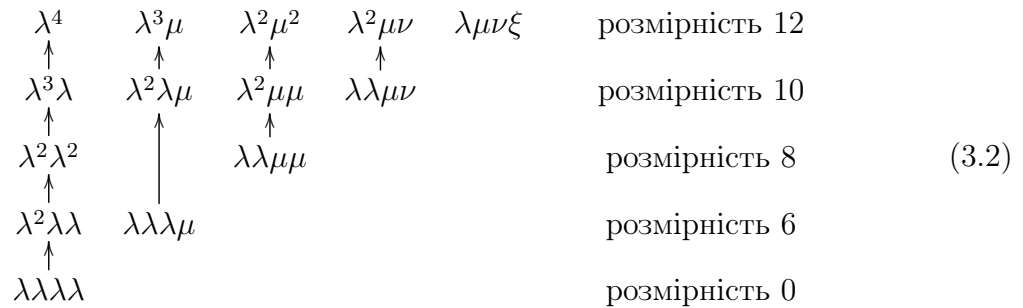


Рис. 3.1: Граф замикання для класів подібності  $4 \times 4$  матриць

ченний:  $\lambda, \mu, \nu, \xi$  — довільні різні комплексні числа. Класи подібності для  $4 \times 4$  жорданових матриць  $J$ , що розміщені на одному горизонтальному рівні у (3.2), мають однакову розмірність, яку наведено справа на цьому рівні і яка обчислюється наступним чином: вона дорівнює

$$16 - \text{codim}_{\mathbb{C}} T(J),$$

де  $\text{codim}_{\mathbb{C}} T(J)$  — кількість зірочок у (0.2) (див. теорему 2.1). Наприклад, якщо  $J \in$  (3.1) з  $\lambda \neq \mu$ , тоді (0.2) є

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ * & \lambda + * & * & 0 \\ \hline * & 0 & \lambda + * & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \mu + * \end{array} \right]$$

і тому

$$\dim_{\mathbb{C}}(J) = 16 - \text{codim}_{\mathbb{C}} T(J) = 16 - 6 = 10.$$

Наступний приклад показує, що структура графу замикання для матриць більшого розміру не така проста як у (3.2).

**Приклад 3.2.** Граф замикання для класів подібності  $6 \times 6$  нільпотентних матриць показаний на рисунку 3.2. Цей граф був взятий з [41, фігури 3 і 22], де описано StratiGraph, який є програмним засобом для побудови графів замикання для класів подібності матриць, для класів строгої еквівалентності пучків матриць і для пачок матриць та пучків (див. вебсторінку

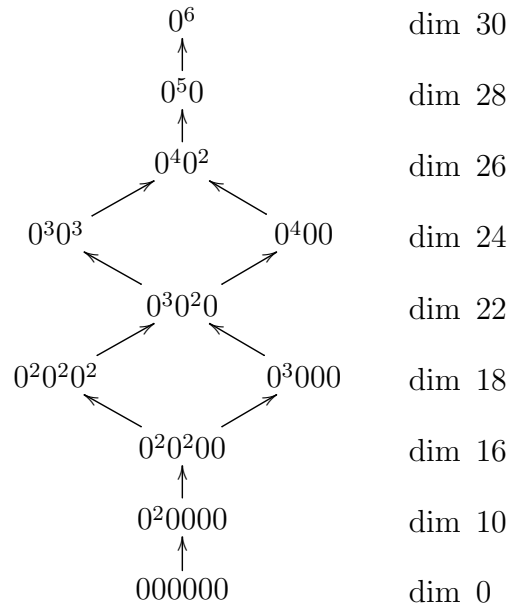


Рис. 3.2: Граф замикання для класів подібності  $6 \times 6$  нільпотентних матриць.

<http://www.cs.umu.se/english/research/groups/matrix-computations/stratigraph/>

про StratiGraph).

## 3.2. Графи замикання для класів конгруентності

В цьому параграфі ми будемо діаграми Хассе  $G_2$  та  $G_3$  для впорядкування відносно включення на множинах класів конгруентності  $2 \times 2$  та  $3 \times 3$  комплексних матриць. Нажаль, ми не маємо аналога теореми 3.1, і тому будувати такі графи набагато складніше, ніж для матриць відносно подібності.

Ми використовуємо наступну канонічну форму відносно конгруентності, яка була побудована Р. Хорном та В.В. Сергейчуком.

**Твердження 3.1** ([35, теорема 4.5.25]). *Кожна квадратна комплексна матриця конгруентна прямій сумі, визначеній однозначно, з точністю*

до перестановки доданків, матриць вигляду

$$H_{2m}(\lambda) := \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ J_m(\lambda) & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_n := \begin{bmatrix} 0 & & & \ddots \\ & & -1 & \ddots \\ & 1 & 1 & \\ & -1 & -1 & \\ 1 & 1 & & 0 \end{bmatrix}, \quad J_k(0), \quad (3.3)$$

де  $\lambda$  – ненульове комплексне число, що визначене з точністю до заміни на  $\lambda^{-1}$  та задовольняє  $\lambda \neq (-1)^{m+1}$ , та  $\Gamma_n$  має розмір  $n$ -на- $n$ .

Ця канонічна форма, та аналогічна канонічна форма для \*конгруентності, були отримані у [39], базуючись на [13, Theorem 3] (див. також [37]); пряме доведення, що ці форми є канонічними дане у [38, 40].

Для довільної  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  та матриці  $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$  з малими елементами,

$$(I + X)^T A (I + X) = A + \underbrace{X^T A + AX}_{\text{малі}} + \underbrace{X^T AX}_{\text{дуже малі}}$$

і тому клас конгруентності матриці  $A$  у малому околі  $A$  може бути отриманий дуже малою деформацією афінного матричного простору

$$\{A + X^T A + AX \mid X \in \mathbb{C}^{n \times n}\}.$$

(За властивістю Ліпшиця [56], якщо  $A$  та  $B$  близькі одна до одної та  $B = S^T A S$  з невідродженою  $S$ , тоді  $S$  можна взяти близько до  $I_n$ .) Векторний простір

$$T(A) := \{X^T A + AX \mid X \in \mathbb{C}^{n \times n}\} \quad (3.4)$$

є дотичним простором до класу конгруентності матриці  $A$  у точці  $A$ . Числа

$$\dim_{\mathbb{C}} T(A), \quad \text{codim}_{\mathbb{C}} T(A) := n^2 - \dim_{\mathbb{C}} T(A)$$

називаються *розмірністю* та, відповідно, *корозмірністю* класу конгруентності матриці  $A$ .



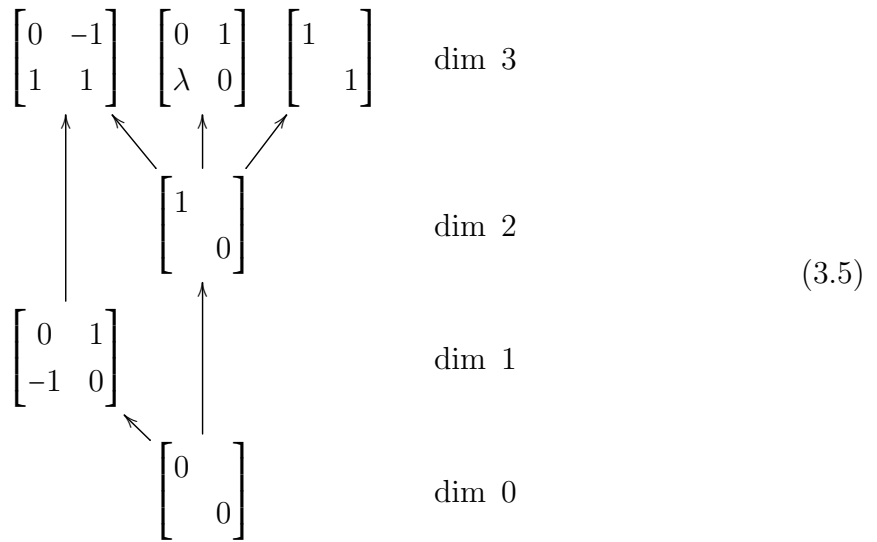


Рис. 3.3: Граф замикання  $G_2$  для класів конгруентності  $2 \times 2$  матриць, де  $\lambda \neq \pm 1$  та кожне ненульове  $\lambda$  визначене з точністю до заміни на  $\lambda^{-1}$ .

**Теорема 3.2** (доведена у §3.4.1). *Граф замикання  $G_2$  для класів конгруентності  $2 \times 2$  матриць наведено на рисунку 3.3. Кожний клас конгруентності задається його канонічною матрицею, яка є прямою сумою блоків вигляду (3.3) (нульові елементи зовні цих блоків не показані). Граф скінченний:  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}$  представляє скінченну множину вершин, індексованих  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$  (за умови, що кожне ненульове  $\lambda$  визначене з точністю до заміни на  $\lambda^{-1}$ ) зі стрілками*

$$\begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}$$

*до кожної з цих вершин. Класи конгруентності канонічних матриць, що знаходяться на одному горизонтальному рівні у  $G_2$ , мають однакову розмірність, що вказана праворуч.*

Наприклад, граф  $G_2$  у (3.5) показує, що як завгодно малий окіл  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  містить матриці з канонічними матрицями відносно конгруентності  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  і  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ , але для будь-яких інших канонічних матриць  $A_{\text{can}} \in$  окіл  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  без матриць з канонічною формою  $A_{\text{can}}$ .

**Теорема 3.3** (доведена у §3.4.2). *Граф замикання  $G_3$  для класів конгруентності  $3 \times 3$  матриць наведено на рисунку 3.4. Класи конгруентності*

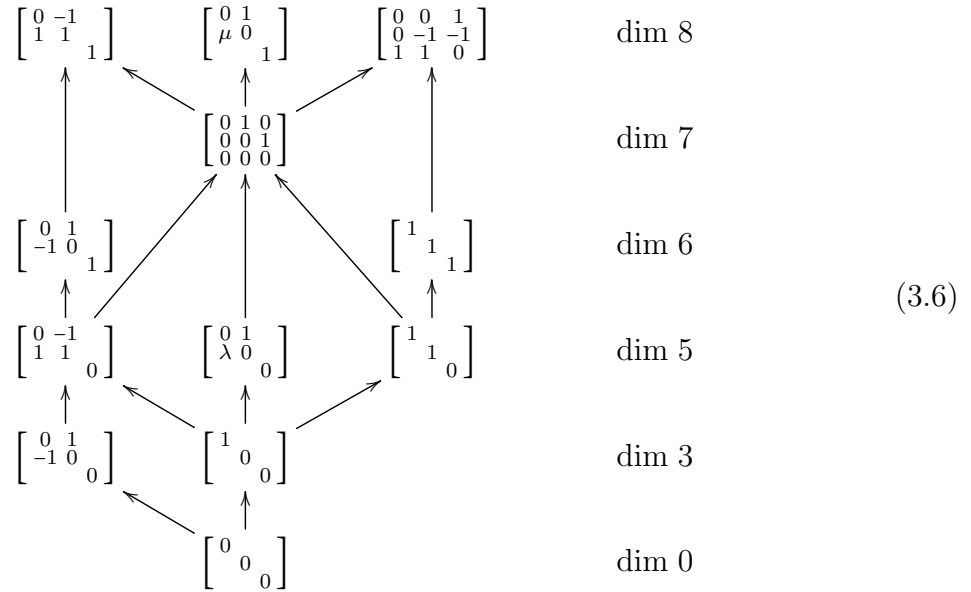


Рис. 3.4: Граф замикання  $G_3$  для класів конгруентності  $3 \times 3$  матриць, у якому  $\lambda, \mu \neq \pm 1$ , та ненульові  $\lambda$  та  $\mu$  визначені з точністю до заміни на  $\lambda^{-1}$  та  $\mu^{-1}$ .

сті, що відповідають вершинам, задані їх  $3 \times 3$  канонічними матрицями відносно конгруентності. Граф скінченний:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix} \quad \text{та} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \mu & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

представляють скінченні множини вершин, індексованих  $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ , причому кожне ненульове  $\lambda$  визначене з точністю до заміни на  $\lambda^{-1}$  та кожне ненульове  $\mu$  визначене з точністю до заміни на  $\mu^{-1}$ . Класи конгруентності з вершинами на одному горизонтальному рівні мають однакову розмірність, що вказана праворуч.

**Зауваження 3.1.** Нехай  $M \in 2 \times 2$  або  $3 \times 3$  канонічна матриця відносно конгруентності.

- Нехай  $N$  — інша канонічна матриця відносно конгруентності того ж розміру. Кожний окіл  $M$  містить матрицю, канонічна форма

відносно конгруентності якої  $\in N$  тоді і тільки тоді, якщо існує орієнтований шлях з  $M$  в  $N$  у  $G_2$  або  $G_3$  (якщо  $M = N$ , тоді завжди існує “лінійний” шлях довжини 0 з  $M$  в  $M$ ).

- Замикання класу конгруентності матриці  $M$  дорівнює об’єднанню класів конгруентності усіх канонічних матриць  $N$ , таких що існує орієнтований шлях з  $N$  в  $M$  (якщо  $N = M$ , тоді завжди існує “лінійний” шлях).

### 3.3. Допоміжні твердження

У цьому параграфі ми наведемо декілька лем, які використовуються у доведеннях теорем.

**3.3.1. Твердження Ройтера** Замість пучків матриць  $A + \lambda B$  зручно розглядати пари матриць  $(A, B)$ , в яких обидві матриці мають однаковий розмір. Пари матриць  $(A, B)$  та  $(A', B')$  є *еквівалентними* якщо існують невідроджені  $R$  та  $S$  такі, що  $RAS = A'$  та  $RBS = B'$  (див. [5]; це відповідає строгій еквівалентності пучків  $A + \lambda B$  та  $A' + \lambda B'$ ). Для довільної невідродженої матриці  $A$ , матриця  $A^{-T}A := (A^{-1})^T A$  називається *кокватратом* матриці  $A$ .

Твердження (а) у наступній лемі належить А. В. Ройтеру [12]; воно було поширено на довільні системи лінійних відображень та білінійних форм у [12, 13]. Це зводить проблему класифікації матриць з точністю до конгруентності до проблеми класифікації пар матриць вигляду  $(A, A^T)$  з точністю до еквівалентності.

**Лема 3.2.** (а) *Дві квадратні матриці  $A$  та  $B$  конгруентні тоді і тільки тоді, якщо пари матриць  $(A, A^T)$  та  $(B, B^T)$  еквівалентні.*

(б) *Дві невідроджені матриці  $A$  та  $B$  конгруентні тоді і тільки тоді, якщо їх кокватрати  $A^{-T}A$  та  $B^{-T}B$  подібні.*

*Доведення.* (а) Нехай  $A$  та  $B$  — дві  $n \times n$  матриці. Зобразимо їх у вигляді  $A = A_s + A_c$  та  $B = B_s + B_c$ , де  $A_s, B_s$  симетричні та  $A_c, B_c$  кососиметричні. Матриці  $A$  та  $B$  конгруентні тоді і лише тоді, коли виконується одна з трьох еквівалентних умов:

- $(A_s, A_c)$  та  $(B_s, B_c)$  конгруентні;
- $(A_s, A_c)$  та  $(B_s, B_c)$  еквівалентні (див. [11, § 95, теорема 3] або [31, лема 2.2]);
- $(A, A^T)$  та  $(B, B^T)$  еквівалентні.

(b) Це твердження випливає з (а); воно також доведене у [40, лема 2.1] (або див. [35, теорема 4.5.27]).  $\square$

Зазначимо, що лема 3.2(а) також легко виводиться з канонічної форми конгруентності, яка наведена у твердженні 3.1. І навпаки, твердження 3.1 випливає з леми 3.2(а) та кронекерівської канонічної форми пучків матриць.

**3.3.2. Мініверсальні деформації** Ми використовуємо *мініверсальну деформацію* квадратної матриці  $A$  відносно конгруентності, тобто нормальну форму з мінімальною кількістю незалежних параметрів, до якої всі матриці  $A + X$ , близькі до  $A$ , можуть бути зведені перетвореннями

$$A + X \mapsto \mathcal{S}(X)^T(A + X)\mathcal{S}(X), \quad \mathcal{S}(0) = I,$$

де  $\mathcal{S}(X)$  залежить голоморфно від елементів  $X$ . Поняття мініверсальної деформації належить В. І. Арнольду [1]; він побудував мініверсальні деформації жорданових канонічних матриць.

Мініверсальна деформація  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  відносно конгруентності була побудована у [23, теорема 2.1] наступним чином. Нехай  $\mathcal{D}$  — довільна матриця з елементами 0 та  $*$ , що задовольняє умові

$$\mathbb{C}^{n \times n} = T(A) \oplus \mathcal{D}(\mathbb{C}),$$

де  $T(A)$  визначене у (3.4) та  $\mathcal{D}(\mathbb{C})$  — векторний простір усіх матриць, отриманих з  $\mathcal{D}$  заміною їх зірочок комплексними числами. Тоді усі матриці з  $A + \mathcal{D}(\mathbb{C})$ , що є достатньо близькими до  $A$ , складають мініверсальну деформацію  $A$ . Число

$$n^2 - \dim T(A) = \dim \mathcal{D}(\mathbb{C})$$

є корозмірністю класу конгруентності матриці  $A$ ; воно дорівнює кількості зірочок у  $\mathcal{D}$ .

За [60, розділ III, теорема 1.7], межа кожного класу конгруентності є об'єднанням класів конгруентності строго меншої розмірності, що доводить наступну лему.

**Лема 3.3.** *Якщо  $v \rightarrow w$  — стрілка у графі замикання  $G_n$ , тоді клас конгруентності  $C_v$ , що відповідає  $v$ , міститься у замиканні класу конгруентності  $C_w$ , і тому розмірність  $C_v$  менша за розмірність  $C_w$ .*

Мініверсальні деформації  $2 \times 2$  та  $3 \times 3$  матриць відносно конгруентності наведені у наступній лемі.

**Лема 3.4** ([23, приклад 2.1]). *Нехай  $A$  — довільна  $2 \times 2$  або  $3 \times 3$  матриця. Тоді усі матриці  $A + X$ , що є достатньо близькими до  $A$ , можуть бути одночасно зведені деяким перетворенням*

$$\mathcal{S}(X)^T(A + X)\mathcal{S}(X), \quad \mathcal{S}(X) \text{ — невироджена та голоморфна у } 0, \quad (3.7)$$

до однієї з наступних форм, де  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$  та кожне ненульове  $\lambda$  визначене з точністю до заміни на  $\lambda^{-1}$ :

(i) якщо  $A$  має розмір  $2 \times 2$ ,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & \\ & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ * & * \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ * & 0 \end{bmatrix}, \\ & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} * & 0 \\ * & * \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ * & 0 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

(ii) якщо  $A$  має розмір  $3 \times 3$ ,

$$\begin{array}{l}
\begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * \\ * & 0 & * \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix} \quad (\lambda \neq 0), \\
\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * \end{bmatrix}
\end{array}$$

Кожна з цих матриць має вигляд  $A_{\text{can}} + \mathcal{D}$ , де  $A_{\text{can}}$  — канонічна матриця відносно конгруентності та зірочки у  $\mathcal{D}$  є комплексними числами, що прямують до нуля, коли  $X$  прямує до нуля. Кількість зірочок є найменшою, що може бути одержана перетвореннями (3.7); вона дорівнює корозмірності класу конгруентності матриці  $A$ .

### 3.3.3. Характеристичний поліном

**Лема 3.5.** *Нехай  $A$  та  $B$  — невироджені матриці. Якщо існує як завгодно мале збурення матриці  $A$ , яке конгруентне матриці  $B$ , тоді коквадрати  $A^{-T}A$  та  $B^{-T}B$  мають однаковий характеристичний многочлен і тому*

$$\det(A^T x - A) = c \cdot \det(B^T x - B)$$

для ненульового  $c \in \mathbb{C}$ .

*Доведення.* Існує послідовність невироджених матриць  $A_1, A_2, \dots$ , що збіжна до  $A$ , де усі  $A_i$  конгруентні  $B$ . За лемою 3.2(b), усі  $A_i^{-T}A_i$  подібні до  $B^{-T}B$  і тому вони мають однаковий характеристичний поліном  $\chi(x)$ . Оскільки  $A_1^{-T}A_1, A_2^{-T}A_2, \dots$  збігається до  $A^{-T}A$ , то  $\chi(x)$  — характеристичний поліном для  $A^{-T}A$ .  $\square$

### 3.4. Доведення теорем

**3.4.1. Доведення теореми 3.2** Для кожної канонічної  $2 \times 2$  матриці  $M$  відносно конгруентності, розмірність  $d_M$  її класу конгруентності дана у (3.5). Вона була обчислена наступним чином:  $d_M = 4 - c_M$ , де  $c_M$  — корозмірність класу конгруентності матриці  $M$ ;  $c_M$  дорівнює кількості зірочок у  $M + \mathcal{D}$  з леми 3.4(i).

Доведення теореми 3.2 розбито на два кроки.

*Крок 1:* доведемо, що кожна стрілка  $M \rightarrow N$  у (3.5) є коректною, тобто існує як завгодно мале збурення матриці  $M$ , яке конгруентне матриці  $N$ .

Ми пишемо  $A \cong B$ , якщо  $A$  конгруентна  $B$ , тобто  $S^T A S = B$  для деякої невиродженої  $S$ . Розклавши  $S$  в добуток елементарних матриць, ми отримаємо, що

$$\begin{aligned} A \cong B \text{ тоді і тільки тоді, якщо } A \text{ може бути зведе-} \\ \text{на до } B \text{ послідовністю елементарних перетворень} \quad (3.8) \\ \text{рядків та цих же перетворень стовбчиків.} \end{aligned}$$

Ми позначаємо через  $\varepsilon$ ,  $\delta$ , та  $\zeta$  як завгодно малі комплексні числа.

- $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  та  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  оскільки

$$\begin{bmatrix} 0 & \varepsilon \\ -\varepsilon & 0 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{та} \quad \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  оскільки

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ , бо

$$\begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \\ -\varepsilon & 0 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{та} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  і  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow I_2$ , бо

$$\begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{та} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}$  для кожного  $\lambda \notin \{-1, 0, 1\}$ ; достатньо знайти як завгодно малі  $\delta \neq 0$  та  $\varepsilon$  для яких

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon & \delta \end{bmatrix} \quad \text{конгруентна} \quad H_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

тобто  $A^{-T}A$  подібна до

$$H_2(\lambda)^{-T}H_2(\lambda) = \text{diag}(\lambda, \lambda^{-1})$$

(див. лему 3.2(b)), тобто власними значеннями  $A^{-T}A$  є  $\lambda$  та  $\lambda^{-1}$ , тобто коренями поліному

$$\det(A^T x - A) = \begin{vmatrix} x - 1 & \varepsilon x \\ -\varepsilon & \delta x - \delta \end{vmatrix} = \delta[x^2 + (\varepsilon^2/\delta - 2)x + 1]$$

є  $\lambda$  та  $\lambda^{-1}$ . Цей поліном еквівалентний

$$\delta(x - \lambda)(x - \lambda^{-1}),$$



якщо

$$\varepsilon^2/\delta - 2 = -\lambda - \lambda^{-1}, \quad (3.10)$$

що виконується для деяких як завгодно малих  $\varepsilon$  та  $\delta$ .

*Крок 2:* доведемо, що ми не пропустили жодної стрілки у (3.5).

Ми пишемо  $M \nrightarrow N$ , якщо граф замикання не має стрілок  $M \rightarrow N$ , тобто якщо кожна матриця, отримана з  $M$  як завгодно малим збуренням, не конгруентна матриці  $N$ . Очевидне твердження “якщо  $M \rightarrow N$  та  $M \nrightarrow P$ , тоді  $N \nrightarrow P$ ” та лема 3.3 гарантують, що ми маємо довести тільки відсутність стрілок

$$H_2(-1) \rightarrow H_2(\lambda), \quad H_2(-1) \rightarrow I_2.$$

- $H_2(-1) \nrightarrow H_2(0)$ , оскільки кожне як завгодно мале збурення  $H_2(-1)$  має ранг 2 та  $H_2(0)$  має ранг 1.
- $H_2(-1) \nrightarrow H_2(\lambda)$  ( $\lambda \neq 0, 1, -1$ ) за лемою 3.5, оскільки

$$\det(H_2(-1)^T x - H_2(-1)) = (x + 1)^2$$

та

$$\det(H_2(\lambda)^T x - H_2(\lambda)) = -(x - \lambda)(\lambda x - 1).$$

- $H_2(-1) \nrightarrow I_2$ . Кожне як завгодно мале збурення  $H_2(-1)$  не є конгруентним  $I_2$ , оскільки їх кососиметричні частини не конгруентні.  $\square$

**3.4.2. Доведення теореми 3.3** Кожна канонічна матриця відносно конгруентності є прямою сумою матриць вигляду  $H_{2m}(\lambda)$ ,  $\Gamma_n$ , та  $J_k(0)$  (див. (3.3)). Замінюючи їх на  $[\lambda]^{2m}$ ,  $1^n$ , та  $0^k$ , відповідно, та видаляючи символи  $\oplus$ , ми отримуємо компактне позначення канонічної матриці. Наприклад,

$$[1]^4[3]^21^61^610^20$$

— це

$$H_4(1) \oplus H_2(3) \oplus \Gamma_6 \oplus \Gamma_6 \oplus \Gamma_1 \oplus J_2(0) \oplus J_1(0)$$

(ми пишемо 1 та 0 замість  $1^1$  and  $0^1$ ).

Усі  $3 \times 3$  канонічні матриці відносно конгруентності записуються у цих позначеннях наступним чином:

$$\begin{aligned}
 000 &= \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}, & [-1]^2 0 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ -1 & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}, & 100 &= \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}, \\
 1^2 0 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & \\ 1 & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}, & [\lambda]^2 0 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ \lambda & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}, & 110 &= \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}, \\
 [-1]^2 1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ -1 & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, & 111 &= \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, & 0^3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 1^2 1 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & \\ 1 & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, & [\mu]^2 1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ \mu & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, & 1^3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Вони є прямою сумою блоків вигляду (3.3); нульові елементи зовні цих блоків не показані.

Для кожної  $3 \times 3$  канонічної матриці  $M$ , розмірність  $d_M$  її класу конгруентності наведена у (3.6). Її було обчислено наступним чином:  $d_M = 9 - c_M$  де  $c_M$  — корозмірність класу конгруентності матриці  $M$ ;  $c_M$  дорівнює кількості зірочок у  $M + \mathcal{D}$  з леми 3.4(ii).

*Крок 1:* доведемо, що кожна стрілка у (3.6) коректна.

Для всіх  $2 \times 2$  матриць  $A$  та  $B$  та довільного  $c \in \mathbb{C}$ , якщо кожний окіл матриці  $A$  містить матрицю, що конгруентна матриці  $B$ , тоді кожний окіл  $A \oplus [c]$  містить матрицю, що конгруентна  $B \oplus [c]$ . Таким чином, стрілки (3.5) забезпечують коректність наступних стрілок у (3.6):

$$\begin{aligned}
 000 &\rightarrow [-1]^2 0, \text{ оскільки } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\
 100 &\rightarrow 110, \text{ оскільки } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow I_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
000 &\rightarrow 100, \text{ оскільки } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
[-1]^2 0 &\rightarrow 1^2 0, \text{ оскільки } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
110 &\rightarrow 111, \text{ оскільки } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow I_2 \\
100 &\rightarrow 1^2 0, \text{ оскільки } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
[-1]^2 1 &\rightarrow 1^2 1, \text{ оскільки } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
100 &\rightarrow [\lambda]^2 0, \text{ оскільки } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Коректність інших стрілок у (3.6) доводиться наступним чином.

- $1^2 0 \rightarrow [-1]^2 1$ , оскільки

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/\varepsilon \\ 1 & 0 & 1/\varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2\varepsilon & \varepsilon^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/\varepsilon & 1/\varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- $1^2 0 \rightarrow 0^3$ , оскільки ми можемо звести

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{до} \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

перетвореннями (3.8): ми додаємо останній стовбчик, домножений на  $-\varepsilon^{-1}$ , до першого та другого стовбчиків; такі самі перетворення рядків не змінюють матрицю.

- $\{[\lambda]^2 0, 110\} \rightarrow 0^3$  (тобто  $[\lambda]^2 0 \rightarrow 0^3$  та  $110 \rightarrow 0^3$ ), оскільки

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

та

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -i\varepsilon \\ 0 & 1 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 1 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

як у (3.12).

- $111 \rightarrow 1^3$ , оскільки

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

за лемою 3.2(b), та

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -\varepsilon \\ 1 & \varepsilon & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- $0^3 \rightarrow \{1^2 1, [\mu]^2 1, 1^3\}$ . Для збурення

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 & \delta \end{bmatrix}$$

матриці  $0^3$ , ми маємо

$$\begin{aligned} \det(A^T x - A) &= \begin{vmatrix} 0 & -1 & \varepsilon x \\ x & 0 & -1 \\ -\varepsilon & x & \delta x - \delta \end{vmatrix} = \varepsilon x^3 - \varepsilon + x(\delta x - \delta) \\ &= \varepsilon(x^3 + \delta \varepsilon^{-1} x^2 - \delta \varepsilon^{-1} x - 1) \\ &= \varepsilon(x-1)(x^2 + (\delta \varepsilon^{-1} + 1)x + 1). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Щоб перевірити  $0^3 \rightarrow 1^2 1$ , ми покладемо  $\delta = \varepsilon$  та отримаємо

$$\det(A^T x - A) = \varepsilon(x-1)(x+1)^2.$$

Таким чином, власними значеннями  $A^{-T}A \in 1, -1, -1$ . Тільки коквадрати  $[-1]^2 1$  та  $1^2 1$  серед коквадратів не вироджених матриць у (3.11) мають такі власні значення; зокрема, тому що коквадрат  $1^3$  — це

$$\Gamma_3^{-T} \Gamma_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.14}$$

Лема 3.2(b) забезпечує, що  $A$  конгруентна до однієї з цих матриць, тобто  $0^3 \rightarrow [-1]^2 1$  або  $0^3 \rightarrow 1^2 1$ . Але  $0^3 \not\rightarrow [-1]^2 1$  за лемою 3.3.

Переконаємося, що  $0^3 \rightarrow [\mu]^2 1$ . Кожне комплексне число представляється у формі  $\delta\varepsilon^{-1}$  з як завгодно малими  $\delta$  та  $\varepsilon$ , і тому для кожного ненульового  $\mu$  існують як завгодно малі  $\delta$  та  $\varepsilon$  такі, що

$$x^2 + (\delta\varepsilon^{-1} + 1)x + 1 = (x - \mu)(x - \mu^{-1}).$$

За (3.13), власними значеннями  $A^{-T}A \in 1, \mu, \mu^{-1}$ . У списку (3.11) тільки коквадрат матриці  $[\mu]^2 1$  має такі власні значення. За лемою 3.2(b),  $0^3 \rightarrow [\mu]^2 1$  при  $\mu \neq 0$ . Стрілка  $0^3 \rightarrow [0]^2 1$  існує, тому що

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \delta \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \delta \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Щоб переконатися, що  $0^3 \rightarrow 1^3$ , ми покладемо  $\delta = -3\varepsilon$ . Тоді

$$\det(A^T x - A) = \varepsilon(x - 1)^3.$$

За (3.14) та лемою 3.2(b) маємо, що  $A$  конгруентна  $111$  або  $1^3$  з (3.11). Але  $0^3 \not\rightarrow 111$  за лемою 3.3.

*Крок 2:* доведемо, що ми не пропустили жодної стрілки у (3.6).

За лемою 3.3, достатньо переконатися, що

$$\begin{aligned} [-1]^2 0 &\not\rightarrow \{[\lambda]^2 0, 111\} \\ \{[\lambda]^2 0, 110\} &\not\rightarrow [-1]^2 1 \\ [\lambda]^2 0 &\not\rightarrow 111 \\ [-1]^2 1 &\not\rightarrow \{[\mu]^2 1, 1^3\} \\ 111 &\not\rightarrow \{1^2 1, [\mu]^2 1\} \end{aligned}$$

для всіх  $\lambda \neq \pm 1$  та  $\mu \neq \pm 1$ .

•  $[-1]^2 0 \not\rightarrow [\lambda]^2 0$  ( $\lambda \neq \pm 1$ ). Від супротивного, припустимо, що є як завгодно мале збурення  $A$  для  $[-1]^2 0$ , що є конгруентним  $[\lambda]^2 0$  для деякого

$\lambda \neq \pm 1$ . Ми можемо припустити, що це збурення має вигляд з леми 3.4(ii), тобто

$$A := \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ -1 + \beta & \gamma & 0 \\ \varepsilon & \zeta & \eta \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

для деяких як завгодно малих  $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \zeta, \eta$ . Тоді  $\text{rank } A = 2$ , і тому  $\eta = 0$ .

Якщо  $\varepsilon = \zeta = 0$ , тоді з конгруентності (3.15) з  $\eta = 0$  випливає

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ -1 + \beta & \gamma \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}$$

завдяки однозначності у твердженні 3.1; це є неможливим, оскільки  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \not\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}$  у (3.5).

Нехай  $\zeta \neq 0$  та  $|\varepsilon| \leq |\zeta|$ . Додаючи другий стовбчик  $A$  до першого, ми отримуємо  $\varepsilon = 0$ ; потім повторимо це перетворення з рядками. Елементи  $\alpha$  та  $\beta$  замінюються деякими елементами  $\alpha'$  та  $\beta'$ , які теж є як завгодно малими. Додаючи останній рядок, ми робимо елементи над  $\zeta$  рівними нулю. Таким чином,

$$A \cong \begin{bmatrix} \alpha' & 0 & 0 \\ -1 + \beta' & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} \alpha' & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Якщо  $\alpha' = 0$ , тоді остання матриця конгруентна  $0^3$ , яка не конгруентна  $[\lambda]^2 0$ . Якщо  $\alpha' \neq 0$ , тоді

$$A \cong \begin{bmatrix} \alpha' & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} \alpha' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

яка конгруентна  $[0]^2 1$  і тому вона не конгруентна  $[\lambda]^2 0$ .

Нехай  $|\varepsilon| > |\zeta|$ . Ми переставляємо перші два рядки і перші два стовпчики у  $A$  і міркуємо як у попередньому випадку.

•  $[-1]^2 0 \rightarrow 111$ , оскільки якщо збурення  $[-1]^2 0$  конгруентне  $111$ , тоді їх кососиметричні частини мають бути конгруентними.

- $\{[\lambda]^2 0, 110\} \rightarrow [-1]^2 1$ , тобто

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + E \neq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

та

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + E \neq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

для  $\lambda \neq \pm 1$  та кожної достатньо малої матриці  $E$ . Це виконується, бо кососиметричні частини відповідних матриць мають різні ранги.

- $[\lambda]^2 0 \rightarrow 111$ , тобто

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + E \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

для  $\lambda \neq \pm 1$  та кожної достатньо малої матриці  $E$ . Це виконується, бо кососиметричні частини відповідних матриць мають різні ранги.

- $[-1]^2 1 \rightarrow \{[\mu]^2 1, 1^3\}$ , тобто

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + E \neq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

та

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + E \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

для  $\mu \neq \pm 1$  та кожної достатньо малої матриці  $E$ . Це виконується за лемою 3.5, оскільки характеристичними поліномами коквадратів

$$[-1]^2 1, \quad [\mu]^2 1, \quad 1^3$$

є

$$(x+1)^2(x-1), \quad (x-\mu)(x-\mu^{-1})(x-1), \quad (x-1)^3$$

(див. (3.14)), відповідно.

- $111 \rightarrow \{1^21, [\mu]^21\}$ , тобто

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + E \not\equiv \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

та

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + E \not\equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

для  $\mu \neq \pm 1$  та кожної достатньо малої матриці  $E$ . Це виконується за лемою 3.5, оскільки характеристичними поліномами коквадратів

$$111, \quad 1^21, \quad [\mu]^21$$

є

$$(x-1)^3, \quad (x+1)^2(x-1), \quad (x-\mu)(x-\mu^{-1})(x-1),$$

відповідно. □



## РОЗДІЛ 4

### Пачки $2 \times 2$ та $3 \times 3$ матриць відносно конгруентності

Пачка матриць відносно конгруентності визначається як множина квадратних матриць  $A$  таких, що пучки  $A + \lambda A^T$  належать до однієї пачки відносно строгої еквівалентності. У підтримку цього означення ми покажемо, що усі матриці у пачці конгруентності  $2 \times 2$  або  $3 \times 3$  матриць мають однакові властивості по відношенню до збурень. Ми будемо діаграми Хассе  $G_2^B$  та  $G_3^B$  для впорядкування відносно включення на множинах пачок конгруентності  $2 \times 2$  та, відповідно,  $3 \times 3$  матриць. Ми знаходимо групи ізометрій  $2 \times 2$  та  $3 \times 3$  канонічних матриць відносно конгруентності.

#### 4.1. Вступ

Арнольд [1, § 5.3] визначає *пачку матриць відносно подібності* як множину усіх матриць, що мають однаковий жордановий тип: матриці  $A$  та  $B$  мають однаковий *жордановий тип*, якщо існує бієкція з множини різних власних значень матриці  $A$  у множину різних власних значень матриці  $B$ , що перетворює жорданову канонічну форму матриці  $A$  у жорданову канонічну форму матриці  $B$ . Наприклад, матриці

$$J_3(0) \oplus J_2(0) \oplus J_5(1), \quad J_3(2) \oplus J_2(2) \oplus J_5(-3) \quad (4.1)$$

належать до однієї пачки (через  $J_n(\lambda)$  ми позначаємо верхньо-трикутну жорданову клітину розміру  $n \times n$  з власним значенням  $\lambda$ ). Усі матриці пачки мають схожі властивості; наприклад, їх жорданові матриці  $J$  мають однакову множину  $\{X \mid JX = XJ\}$  комутуючих матриць.

Не кожна збіжна послідовність  $n \times n$  матриць

$$B_1, B_2, \dots \rightarrow A, \quad (4.2)$$

у якій усі  $B_i$  не подібні до  $A$ , дає орієнтований шлях у графі замикання для класів подібності. Але кожна послідовність (4.2), у якій усі  $B_i$ , що не належать до пачки  $\mathcal{A}$ , що містить  $A$ , дає принаймні один орієнтований шлях у графі замикання для пачок подібності. Дійсно, кількість пачок  $n \times n$  матриць скінченна, і тому є скінченна підпослідовність

$$B_{n_1}, B_{n_2}, \dots \rightarrow A,$$

де усі  $B_{n_i}$  належать до однієї пачки  $\mathcal{B}$ . Звідси  $A \in \overline{\mathcal{B}}$ , що доводить  $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{B}}$ .

**Приклад 4.1.** Граф замикання для пачок подібності  $4 \times 4$  матриць показана на рисунку 4.1 (він даний у іншому вигляді у [41, фігура 24]).

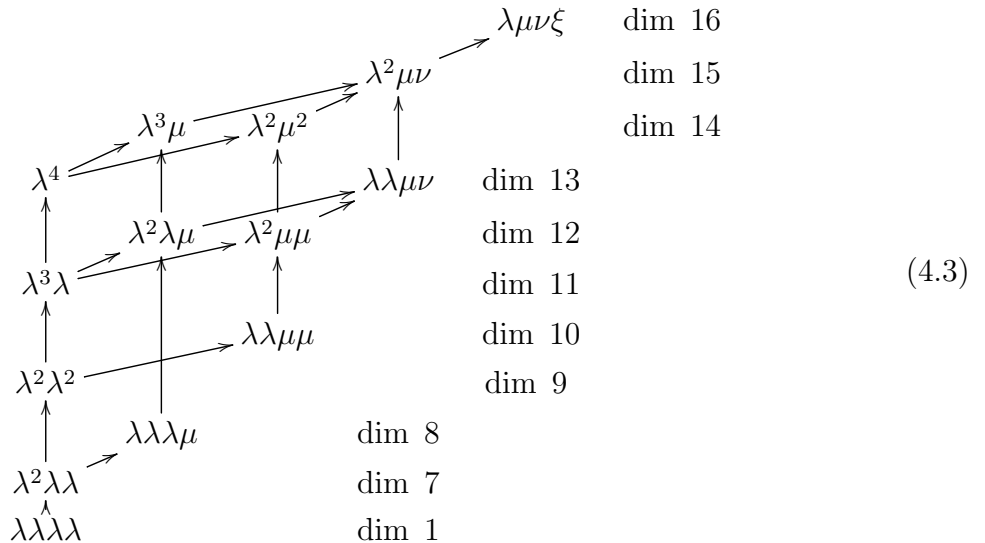


Рис. 4.1: Граф замикання для пачок подібності  $4 \times 4$  матриць

Порівняємо (3.2) та (4.3). Граф (3.2) скінченний; він є безперетинним

об'єднання лінійних підграфів, отриманих з

$$\begin{aligned} \lambda\lambda\lambda\lambda &\rightarrow \lambda^2\lambda\lambda \rightarrow \dots \rightarrow \lambda^4, \\ \lambda\lambda\lambda\mu &\rightarrow \lambda^2\lambda\mu \rightarrow \lambda^3\mu, \\ &\dots, \\ &\lambda\mu\nu\xi \end{aligned} \tag{4.4}$$

заміною їх параметрів на нерівні комплексні числа (кількість параметрів у вершинах лінійних підграфів (4.4) дорівнює 1, 2, 2, 3, 4, відповідно). Таким чином, не зважаючи на те, що послідовність грецьких літер у вершинах (3.2) та (4.3) однакова, кожна вершина (3.2) представляє нескінченну множину класів подібності, матриці яких мають однаковий жорданів тип (і тому ці класи подібності мають однакову розмірність), оскільки відповідна вершина у (4.3) представляє лише одну пачку, яка є об'єднанням цих класів подібності; її розмірність дорівнює розмірності будь-якого з її класів подібності плюс кількість параметрів. Зазначимо, що кожна стрілка у (3.2) відповідає стрілці у (4.3), але (4.3) має додаткові стрілки.

Означення пачок матриць відносно конгруентності є не таким очевидним. Ми можемо визначити ці пачки через канонічну форму для конгруентності (див. означення 4.6), аналогічно до пачок матриць відносно подібності та пачок пучків матриць. Але на відміну від збурень жорданової та кронекерівської канонічних форм, поведінка збурення канонічної матриці відносно конгруентності залежить від значень її параметрів (див. зауваження 4.1). Крім того, ми можемо отримати інше розбиття на пачки, використовуючи іншу канонічну форму відносно конгруентності (скажемо, тридіагональну канонічну форму [31, теорема 1.1]). Тому ми визначаємо пачки відносно конгруентності наступним чином.

**Означення 4.1.** Дві квадратні матриці  $A$  та  $B$  належать до однієї пачки відносно конгруентності тоді і тільки тоді, якщо пучки  $A + \lambda A^T$  та  $B + \lambda B^T$  належать до однієї пачки відносно строгої еквівалентності.

Це означення базується на важливому твердженні: дві  $n \times n$  матриці  $A$  та  $B$  конгруентні тоді і тільки тоді, якщо пучки  $A + \lambda A^T$  та  $B + \lambda B^T$  строго еквівалентні (див. лема 3.2).

Розділ організовано наступним чином. У §2.2 ми будуємо графи замикання  $G_2^B$  та  $G_3^B$  для пачок конгруентності  $2 \times 2$  та  $3 \times 3$  матриць. У §3.4 ми доводимо основні теореми.

У §4.5 ми наводимо аргументи на користь означення 4.1. Ми покажемо, що кожна пачка конгруентних  $2 \times 2$  або  $3 \times 3$  матриць може бути описана як множина усіх матриць, які мають схожі властивості відносно збурень та однакову кількість нерозкладних прямих доданків (це невірно для пачок, визначених через канонічні матриці відносно конгруентності; див означення 4.6). Таким чином, ці ж самі графи замикання  $G_2^B$  та  $G_3^B$  будуть отримані, якщо використовується будь-яке інше *хороше* означення пачок конгруентності. У §4.6 ми наводимо список груп ізометрій білінійних просторів  $(\mathbb{C}^n, \mathcal{A})$ , у яких  $\mathcal{A}$  — білінійна форма на  $\mathbb{C}^n$ , яка задана канонічною матрицею відносно конгруентності, та  $n = 2$  або  $n = 3$ .

## 4.2. Графи замикання для пачок конгруентності

Наступна лема, яка є іншою версією твердження 3.1, буде використана для побудови графів замикання відносно конгруентності.

**Лема 4.1.** *Кожна квадратна комплексна матриця конгруентна прямій сумі, визначеній однозначно з точністю до перестановки доданків, матриць вигляду*

$$H_{2m}(\lambda), \quad \Gamma_n, \quad J_{2r-1}(0), \quad (4.5)$$

де  $(-1)^{m+1} \neq \lambda \in \mathbb{C}$ , кожне ненульове  $\lambda$  визначене з точністю до заміни на  $\lambda^{-1}$ , та  $m, n, r = 1, 2, \dots$ .

*Доведення.* Лема випливає з твердження 3.1 оскільки за [37, с. 213] або [13, с. 492]  $J_k(0)$  конгруентна до

$$\begin{bmatrix} 0 & R_r^T \\ L_r & 0 \end{bmatrix} \text{ якщо } k = 2r - 1, \quad H_{2r}(0) = \begin{bmatrix} 0 & I_r \\ J_r(0) & 0 \end{bmatrix} \text{ якщо } k = 2r, \quad (4.6)$$

де

$$L_r := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_r := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

є  $(r - 1) \times r$  матрицями (таким чином,  $L_1 = R_1 \in 0 \times 1$  матрицею).  $\square$

Пачки матриць (див означення 4.1) описано у наступній теоремі. За лемою 4.1, кожна квадратна матриця  $A$  конгруентна прямій сумі

$$\mathcal{G} \oplus \mathcal{H}_1(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_t(\lambda_t), \quad \lambda_i \neq \lambda_j, 1/\lambda_j \text{ якщо } i \neq j, \text{ усі } \lambda_i \in \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}, \quad (4.8)$$

де  $\mathcal{G}$  — пряма сума матриць вигляду  $H_{2m}((-1)^m)$ ,  $\Gamma_n$ ,  $J_{2r-1}(0)$ , та кожна  $\mathcal{H}_i(\lambda_i)$  є прямою сумою матриць вигляду  $H_{2m}(\lambda_i)$  з  $\lambda_i \neq \pm 1$ . (Очевидно, умова  $\lambda_i \neq 1/\lambda_j$  у (4.8) задовольняється, якщо  $\lambda_j = 0$ .)

**Теорема 4.1** (доведена у §4.4.1). *Нехай квадратна матриця  $A$  конгруентна до (4.8). Тоді пачка відносно конгруентності для матриці  $A$  складається з усіх матриць, що є конгруентними до матриць*

$$\mathcal{G} \oplus \mathcal{H}_1(\mu_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_t(\mu_t), \quad \mu_i \neq \mu_j, 1/\mu_j \text{ якщо } i \neq j, \text{ усі } \mu_i \in \mathbb{C} \setminus \{1, -1\} \quad (4.9)$$

з однаковими  $\mathcal{G}, \mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_t$ .

**Наслідок 4.1.** *Пачки відносно конгруентності, що містять канонічні клітини (3.3), є наступні:*

- класи конгруентності матриць  $H_{2m}((-1)^m)$ ,  $\Gamma_n$ , та  $J_{2r-1}(0)$ ,
- об'єднання класу конгруентності матриці  $J_{2m}(0)$  та класів конгруентності усіх матриць  $H_{2m}(\lambda)$ , де  $\lambda \neq 0, \pm 1$  та  $\lambda$  визначена з точністю до заміни на  $\lambda^{-1}$

для довільних  $m, n, r = 1, 2, \dots$ .

**Зауваження 4.1.** Матриці  $H_{2m}((-1)^m)$  та  $H_{2m}(\lambda)$  з  $\lambda \neq 0, \pm 1$  правильно належать до різних пачок тому, що  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  та  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}$  з  $\lambda \neq \pm 1$  мають різні властивості відносно збурень, що проілюстровано графом замикання  $G_2$  у (3.5).

Подібно до графу замикання  $G_n$  для класів конгруентності, ми позначаємо через  $G_n^B$  граф замикання для пачок конгруентності.

**Теорема 4.2** (доведена у §4.4.2). (а) Граф замикання  $G_2^B$  для пачок конгруентності  $2 \times 2$  матриць поданий на рисунку 4.2. Вершина

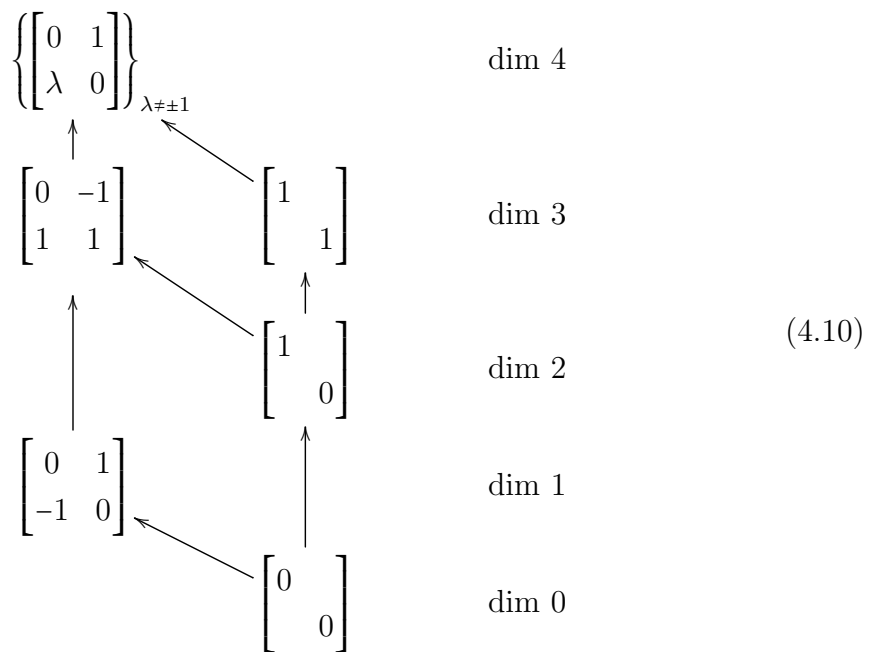


Рис. 4.2: Граф замикання  $G_2^B$  для пачок конгруентності  $2 \times 2$  матриць.

$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix} \right\}_{\lambda \neq \pm 1}$  представляє пачку, що складається з усіх матриць з канонічною формою конгруентності  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}$  з  $\lambda \neq \pm 1$ ; кожне ненульове  $\lambda$  визначене з точністю до заміни на  $\lambda^{-1}$ . Інші вершини є канонічними матрицями конгруентності; відповідні пачки співпадають з їх класами конгруентності.

(b) Граф замикання  $G_3^B$  для пачок конгруентності  $3 \times 3$  матриць поданий на рисунку 4.3.

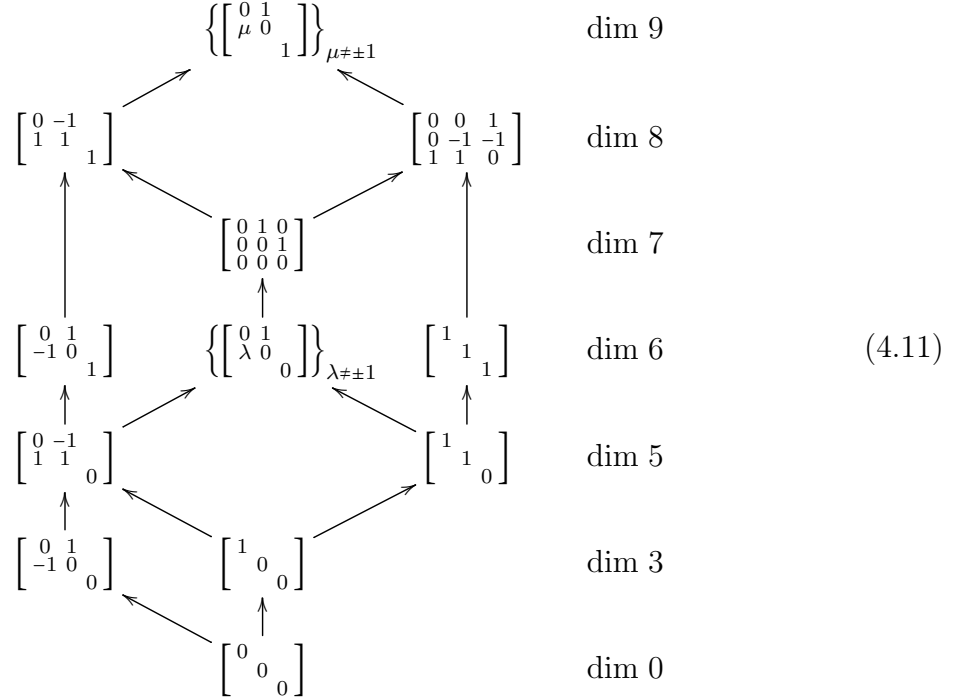


Рис. 4.3: Граф замикання  $G_3^B$  для пачок конгруентності  $3 \times 3$  матриць, де  $\lambda, \mu \neq \pm 1$  і ненульові  $\lambda$  та  $\mu$  визначені з точністю до заміни на  $\lambda^{-1}$  та  $\mu^{-1}$ .

– Пачка, що відповідає

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \\ & 0 \end{bmatrix} \right\}_{\lambda \neq \pm 1}$$

складається з усіх матриць з канонічними формами конгруентності

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \\ & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda \neq \pm 1.$$

– Пачка, що відповідає

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \mu & 0 \\ & 1 \end{bmatrix} \right\}_{\mu \neq \pm 1}$$

складається з усіх матриць з канонічними формами конгруентності

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \mu & 0 \\ & 1 \end{bmatrix}, \quad \mu \neq \pm 1.$$

– Інші пачки співпадають з класами конгруентності відповідних канонічних матриць.

**Зауваження 4.2.** Оскільки кількість пачок конгруентності матриць фіксованого розміру  $n \times n$  скінченна, то для довільної  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  існують пачки конгруентності  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_t \subset \mathbb{C}^{n \times n}$  такі, що кожен достатньо малий окіл  $A$  міститься у  $\mathcal{A}_1 \cup \dots \cup \mathcal{A}_t$  та має ненульовий перетин з кожною  $\mathcal{A}_i$ . Якщо граф замикання для пачок конгруентності  $n \times n$  матриць відомий, тоді множина  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_t$  складається з усіх пачок конгруентності  $\mathcal{A}$ , таких що існує орієнтований шлях (в тому числі “лінійний” шлях довжини 0) з вершини, що представляє пачку з матрицею  $A$ , в вершину, що представляє  $\mathcal{A}$ . Це важливо знати, наприклад, якщо  $A$  відома тільки приблизно.

Наприклад, граф замикання  $G_3^{\mathbb{B}}$  показує, що кожен достатньо малий окіл матриці  $I_3$  містить матриці з канонічною формою конгруентності

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

для деякого  $\mu \neq \pm 1$ , і не містить матриць з жодною іншою канонічною формою конгруентності.

В. І. Арнольд [3, § 30E] вказав на можливі використання розбиття на пачки: якщо при дослідженні деякого процесу ми отримаємо інше розбиття, тоді в його ідеалізації щось важливе було втрачено, або були якісь особливі причини для додаткових параметрів.

### 4.3. Допоміжні твердження

У цьому параграфі ми наведемо декілька лем, які використовуються у доведеннях теорем.



**4.3.1. Твердження Ройтера** Замість пучків матриць  $A + \lambda B$  зручно розглядати пари матриць  $(A, B)$ , в яких обидві матриці мають однаковий розмір. Пари матриць  $(A, B)$  та  $(A', B')$  є *еквівалентними* якщо існують невироджені  $R$  та  $S$  такі, що  $RAS = A'$  та  $RBS = B'$  (див. [5]; це відповідає строгій еквівалентності пучків  $A + \lambda B$  та  $A' + \lambda B'$ ). Для довільної невиродженої матриці  $A$ , матриця  $A^{-T}A := (A^{-1})^T A$  називається *кокватратом* матриці  $A$ .

Твердження (а) у наступній лемі належить А. В. Ройтеру [12]; воно було поширено на довільні системи лінійних відображень та білінійних форм у [12, 13]. Це зводить проблему класифікації матриць з точністю до конгруентності до проблеми класифікації пар матриць вигляду  $(A, A^T)$  з точністю до еквівалентності.

**Лема 4.2.** (а) *Дві квадратні матриці  $A$  та  $B$  конгруентні тоді і тільки тоді, якщо пари матриць  $(A, A^T)$  та  $(B, B^T)$  еквівалентні.*

(б) *Дві невироджені матриці  $A$  та  $B$  конгруентні тоді і тільки тоді, якщо їх кокватрати  $A^{-T}A$  та  $B^{-T}B$  подібні.*

*Доведення.* (а) Нехай  $A$  та  $B$  — дві  $n \times n$  матриці. Зобразимо їх у вигляді  $A = A_s + A_c$  та  $B = B_s + B_c$ , де  $A_s, B_s$  симетричні та  $A_c, B_c$  кососиметричні. Матриці  $A$  та  $B$  конгруентні тоді і лише тоді, коли виконується одна з трьох еквівалентних умов:

- $(A_s, A_c)$  та  $(B_s, B_c)$  конгруентні;
- $(A_s, A_c)$  та  $(B_s, B_c)$  еквівалентні (див. [11, § 95, теорема 3] або [31, лема 2.2]);
- $(A, A^T)$  та  $(B, B^T)$  еквівалентні.

(б) Це твердження випливає з (а); воно також доведене у [40, лема 2.1] (або див. [35, теорема 4.5.27]). □

Зазначимо, що лема 4.2(a) також легко виводиться з канонічної форми конгруентності, яка наведена у твердженні 3.1. І навпаки, твердження 3.1 випливає з леми 4.2(a) та кронекерівської канонічної форми пучків матриць.

**4.3.2. Мініверсальні деформації** Ми використовуємо *мініверсальну деформацію* квадратної матриці  $A$  відносно конгруентності, тобто нормальну форму з мінімальною кількістю незалежних параметрів, до якої всі матриці  $A + X$ , близькі до  $A$ , можуть бути зведені перетвореннями

$$A + X \mapsto \mathcal{S}(X)^T(A + X)\mathcal{S}(X), \quad \mathcal{S}(0) = I,$$

де  $\mathcal{S}(X)$  залежить голоморфно від елементів  $X$ . Поняття мініверсальної деформації належить В.І. Арнольду [1]; він побудував мініверсальні деформації жорданових канонічних матриць.

Мініверсальна деформація  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  відносно конгруентності була побудована у [23, теорема 2.1] наступним чином. Нехай  $\mathcal{D}$  — довільна матриця з елементами 0 та  $*$ , що задовольняє умові

$$\mathbb{C}^{n \times n} = T(A) \oplus \mathcal{D}(\mathbb{C}),$$

де  $T(A)$  визначене у (3.4) та  $\mathcal{D}(\mathbb{C})$  — векторний простір усіх матриць, отриманих з  $\mathcal{D}$  заміною їх зірочок комплексними числами. Тоді усі матриці з  $A + \mathcal{D}(\mathbb{C})$ , що є достатньо близькими до  $A$ , складають мініверсальну деформацію  $A$ . Число

$$n^2 - \dim T(A) = \dim \mathcal{D}(\mathbb{C})$$

є корозмірністю класу конгруентності матриці  $A$ ; воно дорівнює кількості зірочок у  $\mathcal{D}$ .

За [60, розділ III, теорема 1.7], межа кожного класу конгруентності є об'єднанням класів конгруентності строго меншої розмірності, що доводить наступну лему.

**Лема 4.3.** Якщо  $v \rightarrow w$  — стрілка у графі замикання  $G_n$ , тоді клас конгруентності  $C_v$ , що відповідає  $v$ , міститься у замиканні класу конгруентності  $C_w$ , і тому розмірність  $C_v$  менша за розмірність  $C_w$ .

Мініверсальні деформації  $2 \times 2$  та  $3 \times 3$  матриць відносно конгруентності наведені у наступній лемі.

**Лема 4.4** ([23, приклад 2.1]). Нехай  $A$  — довільна  $2 \times 2$  або  $3 \times 3$  матриця. Тоді усі матриці  $A+X$ , що є достатньо близькими до  $A$ , можуть бути одночасно зведені деяким перетворенням

$$\mathcal{S}(X)^T(A+X)\mathcal{S}(X), \quad \mathcal{S}(X) \text{ — невідроджена та голоморфна у } 0, \quad (4.12)$$

до однієї з наступних форм, де  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$  та кожне ненульове  $\lambda$  визначене з точністю до заміни на  $\lambda^{-1}$ :

(i) якщо  $A$  має розмір  $2 \times 2$ ,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & \\ & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ * & * \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ * & 0 \end{bmatrix}, \\ & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} * & 0 \\ * & * \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ * & 0 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

(ii) якщо  $A$  має розмір  $3 \times 3$ ,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}, \\ & \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix}, \\ & \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ -1 & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ \lambda & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix} \quad (\lambda \neq 0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * \\ * & 0 & * \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 0 & -1 & \\ 1 & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix}, \\
& \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ -1 & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ \lambda & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
& \begin{bmatrix} 0 & -1 & \\ 1 & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * \end{bmatrix}, \\
& \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Кожна з цих матриць має вигляд  $A_{\text{can}} + \mathcal{D}$ , де  $A_{\text{can}}$  — канонічна матриця відносно конгруентності та зірочки у  $\mathcal{D}$  є комплексними числами, що прямують до нуля, коли  $X$  прямує до нуля. Кількість зірочок є найменшою, що може бути одержана перетвореннями (4.12); вона дорівнює корозмірності класу конгруентності матриці  $A$ .

### 4.3.3. Характеристичний поліном

**Лема 4.5.** *Нехай  $A$  та  $B$  — невироджені матриці. Якщо існує як завгодно мале збурення матриці  $A$ , яке конгруентне матриці  $B$ , тоді коквдрати  $A^{-T}A$  та  $B^{-T}B$  мають однаковий характеристичний многочлен і тому*

$$\det(A^T x - A) = c \cdot \det(B^T x - B)$$

для ненульового  $c \in \mathbb{C}$ .

*Доведення.* Існує послідовність невироджених матриць  $A_1, A_2, \dots$ , що збіжна до  $A$ , де усі  $A_i$  конгруентні  $B$ . За лемою 4.2(b), усі  $A_i^{-T}A_i$  подібні до  $B^{-T}B$  і тому вони мають однаковий характеристичний поліном  $\chi(x)$ .

Оскільки  $A_1^{-T}A_1, A_2^{-T}A_2, \dots$  збігається до  $A^{-T}A$ , то  $\chi(x)$  — характеристичний поліном для  $A^{-T}A$ .  $\square$

## 4.4. Доведення теорем

**4.4.1. Доведення теореми 4.1** Кронекерівська канонічна форма для пучків матриць забезпечує те, що кожна пара матриць еквівалентна прямій сумі, визначеній однозначно з точністю до перестановки доданків, пар вигляду

$$(L_r, R_r), \quad (L_r^T, R_r^T), \quad P_r(\lambda) := \begin{cases} (I_r, J_r(\lambda)), & \text{якщо } \lambda \in \mathbb{C}, \\ (J_r(0), I_r), & \text{якщо } \lambda = \infty, \end{cases}$$

де  $L_r$  та  $R_r$  визначені у (4.7),  $r = 1, 2, \dots$ , та  $\lambda \in \mathbb{C} \cup \infty$ . Ця сума називається *кронекерівською канонічною формою* для  $(A, B)$  та позначається  $(A, B)_{\text{can}}$ .

Наступне означення у термінах пучків було дане у [27, розділ 3.1].

**Означення 4.2.** Нехай  $(A, B)$  — довільна пара матриць однакового розміру. Запишемо їх кронекерівську канонічну форму наступним чином:

$$(A, B)_{\text{can}} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{P}_1(\lambda_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{P}_t(\lambda_t), \quad (4.13)$$

$$\lambda_i \neq \lambda_j \text{ якщо } i \neq j, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_t \in \mathbb{C} \cup \infty,$$

де  $\mathcal{K}$  — пряма сума пар вигляду  $(L_k, R_k)$  та  $(L_k^T, R_k^T)$ , та кожна  $\mathcal{P}_i(\lambda_i)$  — це пряма сума пар вигляду  $P_k(\lambda_i)$ . Тоді *пачка еквівалентності* для  $(A, B)$  складається з усіх пар матриць з кронекерівською канонічною формою

$$\mathcal{K} \oplus \mathcal{P}_1(\mu_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{P}_t(\mu_t), \quad (4.14)$$

$$\mu_i \neq \mu_j \text{ якщо } i \neq j, \quad \mu_1, \dots, \mu_t \in \mathbb{C} \cup \infty$$

з однаковими  $\mathcal{K}, \mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_t$ .

Означення 4.1 пачок конгруентності може бути переформульовано наступним чином.

**Означення 4.3.** Пачка конгруентності квадратної матриці  $A$  складається з усіх матриць  $B$  таких, що пари  $(A, A^T)$  та  $(B, B^T)$  належать до однієї пачки еквівалентності.

*Доведення теореми 4.1.* Нехай

$$B = B_1 \oplus \cdots \oplus B_s$$

— пряма сума матриць вигляду  $H_{2m}(\lambda)$ ,  $\Gamma_n$ , та  $J_{2r-1}(0)$ ; див. (4.5). Тоді  $(B, B^T)_{\text{can}}$  може бути отримана заміною у

$$B_1 \oplus \cdots \oplus B_s$$

кожного доданка  $B_i$  на  $(B_i, B_i^T)_{\text{can}}$ , що обчислюється наступним чином:

- $(H_{2m}(\lambda), H_{2m}(\lambda)^T)_{\text{can}} = P_m(\lambda) \oplus P_m(\lambda^{-1})$  (покладемо  $0^{-1} := \infty$ );
- $(\Gamma_n, \Gamma_n^T)_{\text{can}} = P_n((-1)^{n+1})$  оскільки  $(\Gamma_n, \Gamma_n^T)$  еквівалентно  $(\Gamma_n^{-T} \Gamma_n, I_n)$ , що еквівалентно  $(J_n((-1)^{n+1}), I_n)$  тому, що

$$\Gamma_n^{-1} = (-1)^{n+1} \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \\ 1 & 1 & 1 & & \\ -1 & -1 & & & \\ 1 & & & & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_n^{-T} \Gamma_n = (-1)^{n+1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & * \\ & 1 & \ddots \\ & & \ddots & 2 \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix};$$

- $(J_k(0), J_k(0)^T)_{\text{can}} = \begin{cases} (L_r, R_r) \oplus (L_r^T, R_r^T) & \text{якщо } k = 2r - 1 \\ P_r(0) \oplus P_r(\infty) & \text{якщо } k = 2r \end{cases}$

оскільки  $J_k(0)$  перестановочно подібна (4.6).

Нехай  $B'$  — інша пряма сума матриць вигляду (4.5). Тоді є три еквівалентні умови того, що матриці  $B$  та  $B'$  лежать у одній пачці конгруентності:

- $(B, B^T)$  та  $(B', B'^T)$  лежать у одній пачці еквівалентності;
- $(B', B'^T)_{\text{can}}$  може бути отримана з  $(B, B^T)_{\text{can}}$  як (4.14) з (4.13);
- $B'$  може бути отримана з  $B$  як (4.9) з (4.8).  $\square$

**4.4.2. Доведення теореми 4.2** (а) Вершини графу (4.10) відповідають пачкам конгруентності  $2 \times 2$  матриць, які описані у теоремі 4.1. Видаляючи вершини  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}$  ( $\lambda \neq \pm 1$ ) та стрілки  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}$  у графі замикання  $G_2$ , побудованому у (3.5), ми отримуємо підграф графу (4.10). Це доводить, що усі стрілки у (4.10) коректні з можливим винятком

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix} \}_{\lambda \neq \pm 1} \quad \text{та} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix} \}_{\lambda \neq \pm 1}.$$

Ці дві стрілки також коректні, оскільки для кожної малої  $\varepsilon \neq 0$  ми маємо

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 + \varepsilon \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0 & -1 + \varepsilon \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 + \varepsilon & 0 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

та

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon & 1 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix} \quad \text{якщо} \quad 2 - \varepsilon^2 = \lambda + \lambda^{-1} \quad (\text{див. (3.9) та (3.10)}).$$

(b) Вершини графа (4.11) зображують пачки конгруентності  $3 \times 3$  матриць, які описані в теоремі 4.1. Зі структури графу  $G_3$  у (3.6) випливає, що треба тільки перевірити, що кожна стрілка з вершини  $\{[\lambda]^2 0\}_{\lambda \neq \pm 1}$  або  $\{[\mu]^2 1\}_{\mu \neq \pm 1}$  у (4.11) є коректною і що ми не упустили жодної стрілки з цих вершин.

Наявність стрілок

$$1^2 0 \rightarrow \{[\lambda]^2 0\}_{\lambda \neq \pm 1}, \quad 110 \rightarrow \{[\lambda]^2 0\}_{\lambda \neq \pm 1}, \quad 1^2 1 \rightarrow \{[\mu]^2 1\}_{\mu \neq \pm 1}$$

випливає зі стрілок

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \{[\lambda^0 \ 1]\}_{\lambda \neq \pm 1}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \{[\lambda^0 \ 0]\}_{\lambda \neq \pm 1}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \{[\lambda^0 \ 1]\}_{\lambda \neq \pm 1}$$

у (4.10).

Наявність стрілки

$$\{[\lambda]^2 0\}_{\lambda \neq \pm 1} \rightarrow 0^3$$

випливає зі стрілки

$$[\lambda]^2 0 \rightarrow 0^3$$

у графі  $G_3$  побудованому у (3.6).

Доведемо

$$1^3 \rightarrow \{[\mu]^2 1\}_{\mu \neq \pm 1}.$$

Розглянемо наступне збурення  $1^3$ :

$$B_c := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ c & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad c \neq 1,$$

де  $c$  — як завгодно близьке до 1. Матриця  $B_c$  конгруентна матриці з (3.11). Симетрична частина матриці  $B_c$  невироджена та її кососиметрична частина ненульова; єдиними матрицями у (3.11) з такими властивостями є  $[\mu]^2 1$  та  $1^3$ . Власними значеннями коквадрату  $\Gamma_3^{-T} \Gamma_3$  для  $1^3$  є  $1, 1, 1$  (див. (3.14)), та власними значеннями коквадрату  $B_c^{-T} B_c$  є  $c, 1, c^{-1}$ . Таким чином,  $B_c \not\cong 1^3$  за твердженням 4.2(b), і тому  $B_c \cong [\mu]^2 1$  для деякого  $\mu$ .

Немає стрілок

$$\{[\lambda]^2 0\}_{\lambda \neq \pm 1} \rightarrow [-1]^2 1$$

та

$$\{[\lambda]^2 0\}_{\lambda \neq \pm 1} \rightarrow 111$$

оскільки немає орієнтованих шляхів з  $[\lambda]^2 0$  в  $[-1]^2 1$  та з  $[\lambda]^2 0$  в  $111$  у  $G_3$  (див. (3.6)). Немає стрілок

$$[-1]^2 1 \rightarrow \{[\lambda]^2 0\}_{\lambda \neq \pm 1}$$



та

$$111 \rightarrow \{[\lambda]^2 0\}_{\lambda \neq \pm 1}$$

оскільки  $[-1]^2 1$  та  $111$  не вироджені, в той час як усі  $[\lambda]^2 0$  вироджені.  $\square$

## 4.5. Обговорення означення пачок конгруентності

Дехто міг би стверджувати, що теорема 4.2 про графи замикання  $G_2^B$  та  $G_3^B$  має сумнівну цінність, оскільки ці графи можуть змінитися, якщо використати інше означення пачок конгруентності. Крім того, ми визначаємо пачки конгруентності матриць через пачки пучків (див. означення 4.1), що може виглядати неприродно, оскільки пачки подібності матриць та пачки пучків матриць визначені через їх канонічні форми.

Тим не менш, твердження Ройтера, з леми 4.1 частково виправдовує означення 4.1. Ми надаємо інший аргумент у підтримку означення 4.1. Ми виходимо від припущення, що розбиття  $\mathbb{C}^{n \times n}$  на пачки має задовільняти щонайменше наступним двом умовам:

- (i) кожна пачка є об'єднанням класів конгруентності, матриці яких мають однакові властивості по відношенню до збурень (що означає, що вершини, які зображують ці класи конгруентності у графі замикання  $G_n$ , є нерозрізненими у  $G_n$ ), і
- (ii) кожна пачка складається з матриць, що мають однакову кількість нерозкладних прямих доданків (4.5) у канонічній формі конгруентності.

У §4.5.1 ми доводимо, що розбиття  $\mathbb{C}^{n \times n}$  ( $n = 2$  або  $3$ ) на пачки, у сенсі означення 4.1, задовольняє (i) та (ii); крім того, воно є найгрубішим розбиттям, що задовольняє їм. Тому  $G_2^B$  та  $G_3^B$  коректно використовуються як графи замикання. (Насправді, ми спочатку побудували графи замикання  $G_2^B$  та  $G_3^B$  використовуючи (i) та (ii), а вже потім ми визначили пачки конгруентності так, щоб отримати побудовані  $G_2^B$  та  $G_3^B$ .)

У §4.5.2 ми показуємо, що пачки конгруентності не задовольняють (i), якщо вони визначені як множини матриць, канонічні форми конгруентності яких мають однаковий тип (тобто, їх канонічні форми відрізняються тільки множинами параметрів, як у (4.1)). У §4.6 ми знаходимо групи ізометрій  $2 \times 2$  та  $3 \times 3$  канонічних матриць відносно конгруентності. У §4.6.1 ми пояснюємо, чому не можна визначати пачку конгруентності як множину матриць, канонічні форми відносно конгруентності яких мають однакову групу ізометрій.

**4.5.1. Аргументи в підтримку нашого означення пачок конгруентності** Покажемо, що наше означення пачок конгруентності узгоджується з описаною вище умовою (i), якщо  $n = 2$  або  $3$ . Це означає, що розбиття множини  $2 \times 2$  або  $3 \times 3$  матриць на пачки конгруентності є потоншенням розбиття на класи граф-еквівалентності матриць у сенсі наступного означення.

**Означення 4.4.** (a) Дві вершини  $v$  та  $w$  графа замикання  $G_n$  називаються *граф-еквівалентними*, якщо  $v$  та  $w$  знаходяться на одному горизонтальному рівні у  $G_n$  і для кожної вершини  $x$

$$v \rightarrow x \iff w \rightarrow x, \quad v \leftarrow x \iff w \leftarrow x.$$

(b) Дві  $n \times n$  матриці називаються *граф-еквівалентними*, якщо вершини, що відповідають їх класам конгруентності, граф-еквівалентні.

Таким чином, дві вершини  $v$  та  $w$  графу  $G_n$  є граф-еквівалентними тоді і тільки тоді, якщо відповідні класи конгруентності мають однакову розмірність та заміна місцями  $v$  та  $w$  є автоморфізмом орієнтованого графу  $G_n$ .

**Твердження 4.1.** (a) *Розбиття  $\mathbb{C}^{2 \times 2}$  на пачки конгруентності є потоншенням розбиття на класи граф-еквівалентності. Граф замикання для класів граф-еквівалентності  $2 \times 2$  матриць поданий на рисунку 4.4. Вершина*

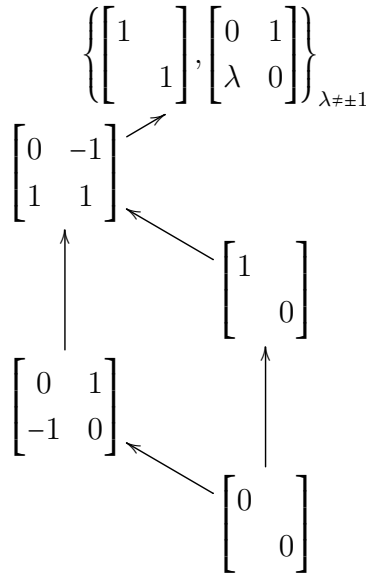


Рис. 4.4: Граф замикання для класів граф-еквівалентності  $2 \times 2$  матриць (порівняйте з графом замикання на рисунку 4.2 для пачок конгруентності  $2 \times 2$  матриць).

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix} \right\}_{\lambda \neq \pm 1}$$

представляє клас граф-еквівалентності, що складається з усіх матриць, канонічні форми конгруентності яких є

$$\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \text{ або } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix} \text{ з } \lambda \neq \pm 1.$$

Інші вершини відповідають канонічним матрицям відносно конгруентності; їх класи граф-еквівалентності співпадають з класами конгруентності.

- (b) Розбиття  $\mathbb{C}^{3 \times 3}$  на пачки конгруентності співпадає з розбиттям на класи граф-еквівалентності.  $\square$

Класи граф-еквівалентності  $2 \times 2$  матриць співпадають з пачками конгруентності, окрім одного класу граф-еквівалентності, який є об'єднанням двох пачок: пачки, що містить  $\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$ , та пачки, що містить усі  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}$  з  $\lambda \neq \pm 1$ . Однак ми можемо накласти додаткову умову на розклад у пряму суму та отримати розбиття множин  $2 \times 2$  та  $3 \times 3$  матриць, що співпадатимуть з їх розбиттями на пачки конгруентності:

**Означення 4.5.** Дві  $n \times n$  матриці  $A$  та  $B$  називаються *строго граф-еквівалентними*, якщо

- (i)  $A$  та  $B$  граф-еквівалентні та
- (ii) якщо  $A$  та  $B$  конгруентні до

$$A_1 \oplus \cdots \oplus A_k \quad \text{та} \quad B_1 \oplus \cdots \oplus B_l, \quad (4.16)$$

відповідно, де кожний доданок — квадратна матриця, яка не є конгруентною прямій сумі квадратних матриць менших розмірів, то  $k = l$ .

**Твердження 4.2.** Для  $2 \times 2$  і  $3 \times 3$  матриць, пачки матриць співпадають з класами строгої граф-еквівалентності.  $\square$

Твердження 4.2 показує, що означення пачок конгруентності для  $2 \times 2$  та  $3 \times 3$  матриць є природнім. Невідомо, чи виконується твердження 4.2 для  $n \times n$  матриць з  $n > 3$ , навіть якщо ми замінімо (ii) у означенні 4.5 наступною умовою: існує відповідна перенумерація доданків у (4.16), така що кожна  $A_i$  має такий самий розмір як  $B_i$  і вони граф-еквівалентні у множині матриць цього розміру.

**4.5.2. Причина не означати пачку конгруентності як множину матриць, що мають канонічні форми конгруентності однакового типу** Пачки матриць відносно подібності та пучки матриць відносно прямої еквівалентності означаються через жорданову та кронекерівську канонічні форми: кожна пачка складається з усіх матриць або пучків, що мають ту ж саму канонічну форму, але з неуточненими параметрами, див. (4.1). Аналогічним чином можна було б визначити пачки матриць відносно конгруентності як класи відносно параметр-еквівалентності у сенсі наступного означення.

**Означення 4.6.** Нехай  $A$  — квадратна матриця. Запишемо її канонічну форму конгруентності з твердження 3.1 наступним чином:

$$C \oplus \mathcal{D}_1(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{D}_t(\lambda_t),$$

$$\lambda_i \neq \lambda_j, 1/\lambda_j \text{ якщо } i \neq j, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_t \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

де  $\mathcal{C}$  — пряма сума матриць вигляду  $\Gamma_n$  і  $J_k(0)$ , та кожна  $\mathcal{D}_i(\lambda_i)$  — пряма сума матриць вигляду  $H_{2m}(\lambda_i)$  з  $m$  таким, що  $\lambda_i \neq (-1)^{m+1}$ . Тоді *клас параметр-еквівалентності* матриці  $A$  складається з усіх матриць з канонічною формою конгруентності

$$\mathcal{C} \oplus \mathcal{D}_1(\mu_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{D}_t(\mu_t),$$

$$\mu_i \neq \mu_j, 1/\mu_j \text{ якщо } i \neq j, \quad \mu_1, \dots, \mu_t \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

з тими же  $\mathcal{C}, \mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_t$ , де  $\mu_i \neq (-1)^{m+1}$  для кожного прямого доданка  $H_{2m}(\mu_i)$  від  $\mathcal{D}_i(\mu_i)$ .

Ми не визначаємо пачки конгруентності як класи параметр-еквівалентності (за аналогією з пачками матриць відносно подібності та пачками пучків) оскільки матриці

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda \neq 0, \pm 1, \quad (4.17)$$

параметр-еквівалентні, але вони не граф-еквівалентні; див. зауваження 4.1. Таким чином, матриці (4.17) мають різні властивості по відношенню до збурень та наступне твердження виконується.

**Твердження 4.3.** *Розбиття  $\mathbb{C}^{2 \times 2}$  на класи параметр-еквівалентності не є потоншенням розбиття цього простору у класи граф-еквівалентності.*  $\square$

Зазначимо, що матриці (4.17) належать до різних пачок відносно конгруентності, що проілюстровано на рисунку 4.2.

## 4.6. Групи ізометрій $2 \times 2$ та $3 \times 3$ матриць

*Група ізометрій  $n \times n$  матриці  $A$*  — це мультиплікативна матрична група

$$\text{ig } A := \{S \in \mathbb{C}^{n \times n} \text{ невідроджена} \mid S^T A S = A\}$$

(яка є групою ізометрій білінійного простору  $(\mathbb{C}^n, \mathcal{A})$ , де  $\mathcal{A}$  — білінійна форма  $(u, v) \mapsto u^T A v$  на  $\mathbb{C}^n$ ).

Структуру  $\text{ig } A$  для довільної  $A$  описано у [25, 59]. Група  $\text{ig } A$  добре досліджена, коли  $A$  симетрична або кососиметрична (див. посилання у [25]); теорія таких груп близька до теорії класичних груп Лі. Наступні класичні групи Лі є групами ізометрій:

- загальна лінійна група

$$\text{GL}_n(\mathbb{C}) = \text{ig } 0_n = \{S \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid \det S \neq 0\},$$

- ортогональна група

$$\text{O}_n(\mathbb{C}) = \text{ig } I_n = \{S \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid S^T S = I_n\},$$

- симплектична група

$$\text{Sp}_{2n}(\mathbb{C}) = \text{ig } \Omega_n = \{S \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid S^T \Omega_n S = \Omega_n\},$$

де

$$\Omega_n := \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}.$$

Зазначимо, що

$$\text{Sp}_2(\mathbb{C}) = \text{SL}_2(\mathbb{C}) := \{S \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \mid \det S = 1\}.$$

У наступній теоремі ми даємо групи ізометрій усіх  $2 \times 2$  і  $3 \times 3$  канонічних матриць відносно конгруентності (що відповідають вершинам графів  $G_2$  та  $G_3$  у (3.5) та (3.6)). Група ізометрій довільних  $2 \times 2$  та  $3 \times 3$  матриць може бути отримана з групи ізометрій її канонічної матриці відносно конгруентності завдяки наступному твердженню:

$$B = R^T A R \quad (R \text{ невідроджена}) \quad \implies \quad \text{ig } B = R^{-1}(\text{ig } A)R.$$

Це твердження виконується, оскільки для кожної  $S \in \text{ig } A$  ми маємо  $A = S^T A S$ ,

$$R^T A R = R^T S^T R^{-T} \cdot R^T A R \cdot R^{-1} S R,$$

$$B = (R^{-1}SR)^T B (R^{-1}SR),$$

і тому  $R^{-1}SR \in \text{ig } B$ .

**Теорема 4.3.** (i)  $2 \times 2$  канонічні матриці відносно конгруентності мають наступні групи ізометрій:

$$\text{ig} \begin{bmatrix} 0 & \\ & 0 \end{bmatrix} = \text{GL}_2(\mathbb{C}),$$

$$\text{ig} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ * & c \end{bmatrix} \mid c \neq 0 \right\},$$

$$\text{ig} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} = \text{O}_2(\mathbb{C}),$$

$$\text{ig} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \text{SL}_2(\mathbb{C}),$$

$$\text{ig} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1/c \end{bmatrix} \mid c \neq 0 \right\}, \quad \lambda \neq \pm 1,$$

$$\text{ig} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \left\{ \pm \begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

де зірочками позначаються довільні комплексні числа.

(ii)  $3 \times 3$  канонічні матриці відносно конгруентності мають наступні групи ізометрій:

$$\text{ig} \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix} = \text{GL}_3(\mathbb{C}),$$

$$\text{ig} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ * & B & \\ * & & \end{bmatrix} \mid \det B \neq 0 \right\},$$

$$\text{ig} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ * & * \\ * & * & c \end{bmatrix} \mid A^T A = I_2, c \neq 0 \right\},$$

$$\text{ig} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} = \text{O}_3(\mathbb{C}),$$

$$\text{ig} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ -1 & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ * & * \\ * & * & c \end{bmatrix} \mid \det A = 1, c \neq 0 \right\},$$

$$\text{ig} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ -1 & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix} \mid \det A = 1 \right\},$$

$$\text{ig} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ \lambda & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 1/c & 0 \\ * & * & c' \end{bmatrix} \mid c, c' \neq 0 \right\}, \quad \lambda \neq \pm 1,$$

$$\text{ig} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ \lambda & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 1/c & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix} \mid c \neq 0 \right\}, \quad \lambda \neq \pm 1,$$

$$\text{ig} \begin{bmatrix} 0 & -1 & \\ 1 & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \delta & * & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ * & * & c \end{bmatrix} \mid \delta = \pm 1, c \neq 0 \right\},$$

$$\text{ig} \begin{bmatrix} 0 & -1 & \\ 1 & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \delta & * & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix} \mid \delta = \pm 1 \right\},$$

$$\text{ig} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} c & a & 0 \\ 0 & 1/c & 0 \\ 0 & -a & c \end{bmatrix} \mid c \neq 0, a \text{ довільне} \right\},$$

$$\operatorname{ig} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \left\{ \pm \begin{bmatrix} 1 & a & a^2/2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a \text{ довільне} \right\}.$$

Це твердження доводиться безпосереднім обчисленням.

**4.6.1. Причина не визначати пачку конгруентності як множину матриць, канонічні форми конгруентності яких мають ту ж саму групу ізометрій** Стаціонарна підгрупа  $n \times n$  матриці  $A$  по відношенню до дії подібності є мультиплікативною матричною групою

$$G_A := \{S \in \mathbb{C}^{n \times n} \text{ невинроджена} \mid S^{-1}AS = A\}.$$

Дві матриці  $A$  та  $B$  належать до однієї пачки подібності тоді і тільки тоді, якщо жорданові блоки їх жорданових канонічних форм  $J(A)$  та  $J(B)$  можуть бути розташовані так, що  $G_{J(A)} = G_{J(B)}$ ; це впливає з опису множини матриць, що комутують з жордановою матрицею (див. (4.1) та [5, розділ VIII, § 2]).

Розвиваючи цей підхід, Patera, Rousseau, Schlomiuk [53] (див. також посилання 1–3 у [53]) розглядають розбиття комплексних та дійсних класичних алгебр Лі  $\Lambda$  на страти: вони визначають *страту* як множину матриць, стаціонарні підгрупи яких спряжені (див. [53, с. 494]). Вони стверджують, що розбиття  $\Lambda = \mathbb{C}^{n \times n}$  на пачки подібності співпадає з розбиттям на страти та розглядають взаємини цих розбиттів для інших класичних алгебр Лі (див. [53, с. 492]).

**Означення 4.7.** Дві  $n \times n$  матриці  $A$  та  $B$  назвемо *груп-еквівалентними*, якщо прямі доданки їх канонічних форм конгруентності  $A_{\text{can}}$  та  $B_{\text{can}}$  можуть бути розташовані так, що їх групи ізометрій співпадають:  $\operatorname{ig} A_{\text{can}} = \operatorname{ig} B_{\text{can}}$ .

**Твердження 4.4.** (а) Для  $2 \times 2$  та  $3 \times 3$  матриць пачки конгруентності співпадають з класами груп-еквівалентності.

(б) Існує нескінченно багато класів груп-еквівалентності для  $5 \times 5$  матриць.



*Доведення.* (а) Пачки  $2 \times 2$  та  $3 \times 3$  матриць були знайдені у теоремі 4.2; вони відповідають вершинам графів замикань  $G_2^B$  та  $G_3^B$ . За теоремою 4.3, усі канонічні матриці конгруентності у пачці мають ту ж саму групу ізометрій; довільні дві канонічні матриці з різних пачок мають різні групи ізометрій.

(b) Матриці

$$A_\lambda := \left[ \begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

з різними  $\lambda \in \mathbb{C}$  не є груп-еквівалентними, оскільки для

$$S_\mu := \left[ \begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\mu & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

ми маємо

$$S_\mu^T A_\lambda S_\mu = A_\lambda \quad (\text{тобто, } S_\mu \in \text{ig}(A_\lambda)) \quad \iff \quad \lambda = \mu. \quad \square$$

За твердженням 4.4(b), було б нерозумно визначати пачки конгруентності як класи груп-еквівалентності.

## РОЗДІЛ 5

### Збурення матриць відносно \*конгруентності

Ми будемо діаграму Хассе для впорядкованої за включенням множини всіх класів \*конгруентності  $2 \times 2$  матриць. Іншими словами, ми будемо орієнтований граф, вершинами якого є  $2 \times 2$  комплексні канонічні матриці відносно \*конгруентності та є орієнтований шлях з  $A$  у  $B$  тоді і тільки тоді, якщо  $A$  може бути перетворена як завгодно малими збуреннями у матрицю, яка \*конгруентна матриці  $B$ .

Ми також доводимо, що не кожна матриця зводиться голоморфно до її мініверсальної деформації відносно \*конгруентності.

#### 5.1. Вступ

Ми вивчаємо, як довільно малі збурення  $2 \times 2$  комплексної матриці можуть змінювати її канонічну форму відносно \*конгруентності (матриці  $A$  та  $B$  називаються \*конгруентними, якщо  $S^*AS = B$  для невиродженої  $S$ ). Ми будемо граф замикання  $G_2$ , який визначається для довільного натурального  $n$  наступним чином.

**Означення 5.1.** Граф замикання  $G_n$  для класів \*конгруентності  $n \times n$  комплексних матриць — це орієнтований граф, у якому кожна вершина  $v$  однозначно представляє клас \*конгруентності  $C_v$  для  $n \times n$  матриць, та існує орієнтований шлях з вершини  $v$  у вершину  $w$  тоді і тільки тоді, якщо одна (і, отже, кожна) матриця з  $C_v$  може бути перетворена у матрицю з  $C_w$  як завгодно малими збуреннями.

Граф  $G_n$  — це діаграма Хассе класів  $*$ конгруентності для  $n \times n$  матриць з наступним частковим порядком:  $a \preceq b$ , якщо  $a$  міститься у замиканні  $b$ . Таким чином, граф  $G_n$  показує, як класи  $*$ конгруентності відносяться один до одного у афінному просторі  $n \times n$  матриць.

Оскільки кожна  $n \times n$  матриця єдиним чином представляється у формі  $P + iQ$ , де  $P$  та  $Q$  — ермітові матриці,  $G_n$  є також графом замикання для класів  $*$ конгруентності ермітових матричних пучків  $P + \lambda Q$ .

Зауважимо, що граф замикання  $G_2$  для  $*$ конгруентності, який ми будемо в теоремі 3.2, більш складний, ніж графи замикання для класів конгруентності 2-на-2 та 3-на-3 матриць, які були побудовані у [24], оскільки стрілка між класами  $*$ конгруентності у  $G_2$  може залежати від параметрів їх матриць.

## 5.2. Граф замикання для класів $*$ конгруентності $2 \times 2$ матриць

Визначимо  $n \times n$  матриці

$$J_n(\lambda) := \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}, \quad \Delta_n := \begin{bmatrix} 0 & & & 1 \\ & & \ddots & i \\ & 1 & \ddots & \\ 1 & i & & 0 \end{bmatrix}.$$

Ми використовуємо наступну канонічну форму відносно  $*$ конгруентності, одержану Р. Хорном і В.В. Сергейчуком.

**Твердження 5.1** (див. [39, 40]). *Кожна квадратна комплексна матриця  $*$ конгруентна прямій сумі, однозначно визначеній з точністю до перестановки доданків, матриць вигляду*

$$\begin{bmatrix} 0 & I_m \\ J_m(\lambda) & 0 \end{bmatrix} \quad (0 \neq \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| < 1), \quad \mu \Delta_n \quad (\mu \in \mathbb{C}, |\mu| = 1), \quad J_k(0). \quad (5.1)$$

Ця канонічна форма була одержана у [39]; вона базувалась на [13, теорема 3] та була узагальнена для інших полів у [37]. Незалежне доведення того, що ця форма є канонічною, дано у [38, 40].

Вершини графа  $G_n$  можна ототожнити з  $n \times n$  канонічними матрицями відносно  $*$ конгруентності, оскільки кожний клас  $*$ конгруентності містить лише одну канонічну матрицю.

Для кожної  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  та малої матриці  $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , маємо

$$(I + X)^* A (I + X) = A + \underbrace{X^* A + AX}_{\text{мала}} + \underbrace{X^* AX}_{\text{дуже мала}}$$

і тому клас  $*$ конгруентності матриці  $A$  у малому околі матриці  $A$  може бути отриманий дуже малими деформаціями дійсного афінного матричного простору  $\{A + X^* A + AX \mid X \in \mathbb{C}^{n \times n}\}$ . (За локальною властивістю Ліпшиця [56], якщо  $A$  та  $B$  близькі одна до одної та  $B = S^* A S$  з невідродженою  $S$ , то  $S$  може бути взята близько до  $I_n$ .) Дійсний векторний простір

$$T(A) := \{X^* A + AX \mid X \in \mathbb{C}^{n \times n}\}$$

є дотичним простором до класу  $*$ конгруентності матриці  $A$  у точці  $A$ . Числа

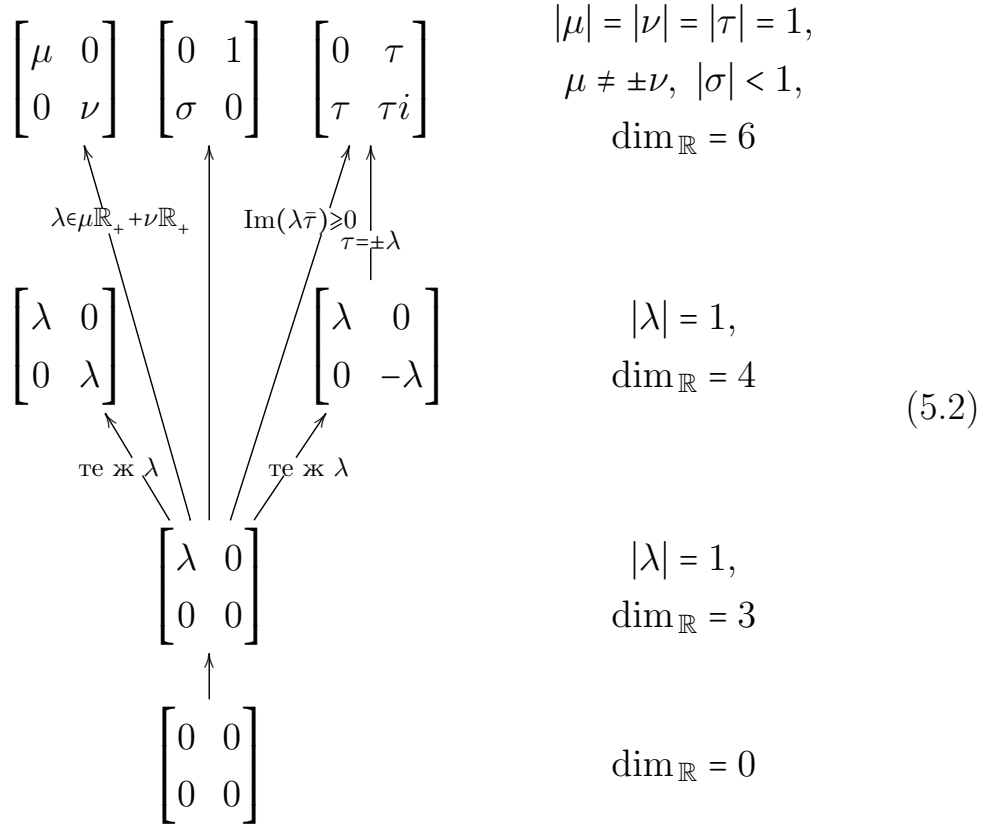
$$\dim_{\mathbb{R}} T(A), \quad \text{codim}_{\mathbb{R}} T(A) := 2n^2 - \dim_{\mathbb{R}} T(A)$$

називаються *розмірністю* та, відповідно, *корозмірністю* над  $\mathbb{R}$  класу  $*$ конгруентності матриці  $A$ .

Наступна теорема, яка доведена у § 3.4, є головним результатом розділу.

**Теорема 5.1.** *Граф замикання для класів  $*$ конгруентності  $2 \times 2$  ма-*

триць:



де  $\lambda, \mu, \nu, \sigma, \tau \in \mathbb{C}$ ,  $\mathbb{R}_+$  є множина невід’ємних дійсних чисел, та  $\text{Im}(c)$  — уявна частина  $c \in \mathbb{C}$ . Кожний клас \*конгруентності задається його канонічною матрицею, яка є прямою сумою блоків (5.1). Граф скінченний: кожна вершина, окрім  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , зображує скінченну множину вершин, індексованих параметрами відповідної канонічної матриці. Класи \*конгруентності канонічних матриць, що лежать на одному горизонтальному рівні у (5.2), мають однакову розмірність над  $\mathbb{R}$ , яка дана зправа.

Стрілка

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{bmatrix}$$

існує тоді і тільки тоді, якщо  $\lambda = \mu a + \nu b$  для деяких невід’ємних  $a, b \in \mathbb{R}$ . Стрілка

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & \tau \\ \tau & i\tau \end{bmatrix}$$

існує тоді і тільки тоді, якщо уявна частина від  $\lambda\bar{\tau}$  невід’ємна. Стрілка

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & \tau \\ \tau & i\tau \end{bmatrix}$$

існує тоді і тільки тоді, якщо  $\tau = \pm\lambda$ . Стрілка

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \pm\lambda \end{bmatrix}$$

існує тоді і тільки тоді, якщо значення  $\lambda$  однакове для обох матриць. Інші стрілки існують при всіх значеннях параметрів їх матриць.

**Зауваження 5.1.** Нехай  $M$  —  $2 \times 2$  канонічна матриця відносно  $*$ конгруентності.

- Нехай  $N$  — інша  $2 \times 2$  канонічна матриця відносно  $*$ конгруентності. Кожний окіл матриці  $M$  містить матрицю,  $*$ конгруентна канонічна форма якої є  $N$ , тоді і тільки тоді, якщо існує орієнтований шлях з  $M$  в  $N$  у (5.2) (якщо  $M = N$ , тоді існує “лінивий” шлях довжини 0 з  $M$  в  $N$ ).
- Замикання класу  $*$ конгруентності матриці  $M$  дорівнює об’єднанню класів  $*$ конгруентності усіх канонічних матриць  $N$  таких, що існує орієнтований шлях з  $N$  в  $M$  (якщо  $M = N$  тоді існує “лінивий” шлях).

**Зауваження 5.2.** Не дивно, що

$$\text{diag}(\lambda, \pm\lambda), \quad \text{diag}(\mu, \nu)$$

( $|\lambda| = |\mu| = |\nu| = 1$  та  $\mu \neq \pm\nu$ ) мають різну поведінку відносно збурень: багато властивостей невід’ємної матриці  $A$  відносно  $*$ конгруентності визначаються її  $*$ кокватратом  $(A^*)^{-1}A$  (див. [40, 37, 55]),  $*$ кокватрат матриці  $\text{diag}(\lambda, \pm\lambda)$  має кратні власні значення, а  $*$ кокватрат матриці  $\text{diag}(\mu, \nu)$  має два різних власних значень.

### 5.3. Доведення теореми 3.2

Наступна лема випливає з [19, приклад 2.1] (він є частковим випадком [19, теорема 2.2] про  $n \times n$  матриці).

**Лема 5.1.** *Нехай  $A$  — довільна  $2 \times 2$  матриця. Тоді усі матриці  $A + X$ , що є достатньо близькими до  $A$ , можуть бути одночасно зведені деякими перетвореннями*

$$\mathcal{S}(X)^*(A + X)\mathcal{S}(X), \quad \mathcal{S}(X) \text{ невиврождена та неперервна у околі нуля,}$$

до однієї з наступних матриць:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_\lambda & 0 \\ * & * \end{bmatrix} \quad (|\lambda| = 1), \\ & \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \pm\lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_\lambda & 0 \\ * & \delta_\lambda \end{bmatrix} \quad (|\lambda| = 1), & \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_\lambda & 0 \\ 0 & \delta_\mu \end{bmatrix} \quad (\lambda \neq \pm\mu, \\ & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ * & 0 \end{bmatrix} \quad (|\lambda| < 1), & \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (|\lambda| = 1). \end{aligned}$$

Кожна з цих матриць має вигляд  $A_{\text{can}} + \mathcal{D}$ , де  $A_{\text{can}}$  є прямою сумою блоків вигляду (5.1), зірочки у  $\mathcal{D}$  — комплексні числа, усі  $\varepsilon_\lambda, \delta_\lambda, \delta_\mu$  — або дійсні числа при  $\lambda, \mu \notin \mathbb{R}$ , або чисто уявні числа при  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . (Очевидно,  $\mathcal{D}$  прямує до нуля, коли  $X$  прямує до нуля.) Для кожної  $A_{\text{can}} + \mathcal{D}$ , подвоєна кількість її зірочок плюс кількість її елементів вигляду  $\varepsilon_\lambda, \delta_\lambda, \delta_\mu$  дорівнює корозмірності над  $\mathbb{R}$  класу  $*$ конгруентності матриці  $A_{\text{can}}$ .

Корозмірності класів конгруентності та  $*$ конгруентності були обчислені у [16, 23] та [17, 19], відповідно.

За [60, розділ III, теорема 1.7], межа кожного класу  $*$ конгруентності є об'єднанням всіх класів  $*$ конгруентності строго меншлі розмірності, що доводить наступну лему.

**Лема 5.2.** *Якщо  $M \rightarrow N$  — стрілка у графі замикання  $G_2$ , то клас \*конгруентності  $C_M$  матриці  $M$  міститься у замиканні класу \*конгруентності  $C_N$  матриці  $N$ , і тому розмірність  $C_M$  менше ніж розмірність  $C_N$ .*

Для кожної вершини  $M$  у (5.2), розмірність  $d_M$  над  $\mathbb{R}$  класу \*конгруентності матриці  $M$  наведена у (5.2). Вона була обчислена наступним чином:  $d_M = 8 - c_M$  де  $c_M$  — корозмірність класу \*конгруентності  $M$ ;  $c_M$  взята з леми 5.1.

Доведення теореми 3.2 розіб'ємо на два кроки.

**Крок 1: Доведемо, що кожна стрілка у (5.2) коректна** Для того, щоб впевнитись, що стрілка  $M \rightarrow N$  коректна, ми маємо довести, що канонічна матриця  $M$  може бути перетворена як завгодно малими збуреннями у матрицю, канонічна форма \*конгруентності якої є  $N$ . Розглянемо кожну з стрілок (5.2).

- *Стрілки*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & \tau \\ \tau & \tau i \end{bmatrix}$$

коректні.

Нехай

$$A := \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{або} \quad \begin{bmatrix} 0 & \tau \\ \tau & \tau i \end{bmatrix}.$$

Тоді  $A$  \*конгруентна до  $\varepsilon A$ , де  $\varepsilon$  — довільне додатне дійсне число, та кожний окіл матриці  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  містить  $\varepsilon A$  з достатньо малим  $\varepsilon$ .

- *Стрілка*

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{bmatrix}$$

(з  $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}$  такими, що  $|\lambda| = |\mu| = |\nu| = 1$ ) існує тоді і тільки тоді, якщо  $\lambda \in \mu\mathbb{R}_+ + \nu\mathbb{R}_+ = \{\mu a + \nu b \mid a, b \in \mathbb{R}, a \geq 0, b \geq 0\}$  (зокрема,

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix}$$



існують).

Стрілка

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{bmatrix}$$

існує тоді і тільки тоді, якщо існує як завгодно мале збурення

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + E := \begin{bmatrix} \lambda + \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \quad \text{матриці} \quad \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

яке є  $*$ конгруентним до  $\begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{bmatrix}$ . Це означає, що існує  $S = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$  така, що

$$\begin{bmatrix} \bar{x} & \bar{z} \\ \bar{y} & \bar{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + E,$$

тобто,

$$\begin{aligned} \bar{x}x\mu + \bar{z}z\nu &= \lambda + \varepsilon_{11} & \bar{x}y\mu + \bar{z}t\nu &= \varepsilon_{12} \\ \bar{y}x\mu + \bar{t}z\nu &= \varepsilon_{21} & \bar{y}y\mu + \bar{t}t\nu &= \varepsilon_{22}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Для фіксованих  $\lambda, \mu, \nu$  та як завгодно малого  $\varepsilon_{11}$ , перше рівняння з невідомими  $x$  та  $z$  має розв'язок тільки для  $\lambda \in \mu\mathbb{R}_+ + \nu\mathbb{R}_+$ .

І навпаки, нехай  $\lambda \in \mu\mathbb{R}_+ + \nu\mathbb{R}_+$ . Візьмемо  $\varepsilon_{11} = 0$  та виберемо  $x$  та  $z$ , для яких перша рівність у (5.4) виконується. Тоді візьмемо як завгодно малі  $y, t$ , для яких  $S$  невироджена, та візьмемо як завгодно малі  $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}$ , для яких інші рівності у (5.4) виконуються.

• *Стрілка*

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sigma & 0 \end{bmatrix}$$

( $|\lambda| = 1, |\sigma| < 1$ ) існує для всіх  $\lambda$  та  $\sigma$ .

Стрілка

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sigma & 0 \end{bmatrix}$$

існує тоді і тільки тоді, якщо існує як завгодно мале збурення (5.3), яке  $*$ конгруентне до  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sigma & 0 \end{bmatrix}$ . Це означає, що існує невироджена  $S = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$  така, що

$$\begin{bmatrix} \bar{x} & \bar{z} \\ \bar{y} & \bar{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sigma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + E,$$

тобто,

$$\begin{aligned} \bar{x}z + \bar{z}x\sigma &= \lambda + \varepsilon_{11} & \bar{x}t + \bar{z}y\sigma &= \varepsilon_{12} \\ \bar{y}z + \bar{t}x\sigma &= \varepsilon_{21} & \bar{y}t + \bar{t}y\sigma &= \varepsilon_{22}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Нехай  $\bar{z}x = u + iv$ ,  $\sigma = \alpha + \beta i$ , та  $\lambda + \varepsilon_{11} = a + bi$ , де  $u, v, \alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}$ . Тоді перше рівняння у (5.5) приймає вигляд

$$(u - vi) + (u + vi)(\alpha + \beta i) = a + bi,$$

що дає систему

$$\begin{aligned} (1 + \alpha)u - \beta v &= a \\ \beta u + (\alpha - 1)v &= b. \end{aligned}$$

Її визначник  $\alpha^2 + \beta^2 - 1$  ненульовий, оскільки  $|\sigma| < 1$ . Тому перше рівняння у (5.5) виконується для деяких  $x$  та  $z$ . Беручи як завгодно малі  $y, t$  для яких  $S$  невироджена, ми отримуємо як завгодно малі  $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}$ , для яких інші рівності у (5.5) виконуються.

- *Стрілка*

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & \tau \\ \tau & \tau i \end{bmatrix}$$

( $|\lambda| = |\tau| = 1$ ) існує тоді і тільки тоді, якщо  $\text{Im}(\lambda\bar{\tau}) \geq 0$ .

Стрілка

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \tau \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$$

існує тоді і тільки тоді, якщо існує як завгодно мале збурення (5.3), яке є \*конгруентним до  $\tau \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$ . Це означає, що існує невироджена  $S = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$  така, що

$$\begin{bmatrix} \bar{x} & \bar{z} \\ \bar{y} & \bar{t} \end{bmatrix} \tau \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + E,$$

тобто,

$$\begin{aligned} \bar{z}x + \bar{x}z + \bar{z}zi &= \bar{\tau}(\lambda + \varepsilon_{11}) & \bar{z}y + \bar{x}t + \bar{z}ti &= \bar{\tau}\varepsilon_{12} \\ \bar{t}x + \bar{y}z + \bar{t}z &= \bar{\tau}\varepsilon_{21} & \bar{t}y + \bar{y}t + \bar{t}ti &= \bar{\tau}\varepsilon_{22}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Розглянемо перше рівняння у (5.6). Оскільки  $\bar{\tau}(\lambda + \varepsilon_{11}) \neq 0$ , маємо  $z \neq 0$ . Таким чином,

$$\operatorname{Im}(\bar{\tau}(\lambda + \varepsilon_{11})) = \operatorname{Im}(\bar{z}x + \bar{x}z + \bar{z}zi) = \bar{z}z > 0$$

і тому  $\operatorname{Im}(\bar{\tau}\lambda) \geq 0$ .

Навпаки, якщо  $\operatorname{Im}(\bar{\tau}\lambda) \geq 0$ , тоді ми покладемо  $\varepsilon_{11} = 0$  і візьмемо  $x, z$  такі, що перша рівність у (5.6) виконується. Беручи як завгодно малі  $y, t$  для яких  $S$  невироджена, ми отримуємо як завгодно малі  $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}$  для яких інші рівності у (5.6) виконуються.

• *Стрілка*

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & \tau \\ \tau & \tau i \end{bmatrix}$$

( $|\lambda| = |\tau| = 1$ ) існує тоді і тільки тоді, коли  $\lambda = \pm\tau$ .

Стрілка

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} \rightarrow \tau \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$$

існує тоді і тільки тоді, якщо існує як завгодно мале збурення  $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} + E$  of  $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix}$ , яке є \*конгруентним до  $\tau \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$ . Це означає, що існує невироджена  $S$  така, що

$$S^* \tau \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix} S = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} + E$$

Прирівнюючи визначники обох сторін, ми знаходимо, що число  $-\tau^2 \det(S^* S)$  як завгодно близьке до  $-\lambda^2$ . Оскільки

$$\det(S^* S) = \overline{\det S} \det S$$

— дійсне додатне число,  $|\tau^2| \det(S^* S)$  як завгодно близьке до  $|\lambda^2|$ . Оскільки  $|\lambda| = |\tau| = 1$ , то  $\det(S^* S)$  як завгодно близьке до 1. Отже,  $-\tau^2 = -\lambda^2$ , і тому  $\lambda = \pm\tau$ .

Навпаки, нехай  $\lambda = \pm\tau$ . Оскільки

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

та

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

то  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in$  \*конгруентною до  $\pm \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Її як завгодно мале збурення  $\pm \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \varepsilon i \end{bmatrix}$  ( $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$ )  $\in$  \*конгруентним до  $\pm \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$  через  $\text{diag}(\sqrt{\varepsilon}, 1/\sqrt{\varepsilon})$ . Тому

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \pm \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} \rightarrow \tau \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}.$$

**Крок 2: Доведемо, що ми не упустили жодної стрілки у (5.2)** Ми пишемо  $M \nrightarrow N$ , якщо граф замикання  $G_2$  не містить стрілку  $M \rightarrow N$ , тобто якщо кожна матриця, отримана з  $M$  як завгодно малими збуреннями, не  $\in$  \*конгруентною до  $N$ . За лемою 5.2, ми маємо довести тільки відсутність стрілок

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \pm\lambda \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \pm\lambda \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sigma & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & \tau \\ \tau & \tau i \end{bmatrix}.$$

Доведемо їх відсутність.

• Доведемо

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \pm\lambda \end{bmatrix} \nrightarrow \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \pm\lambda \end{bmatrix} \nrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sigma & 0 \end{bmatrix}$$

( $|\lambda| = |\mu| = |\nu| = 1$ ,  $\mu \neq \pm\nu$ ,  $|\sigma| < 1$ ).

Припустимо, що існує як завгодно мале збурення

$$A := \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \pm\lambda \end{bmatrix} + E$$

матриці  $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \pm\lambda \end{bmatrix}$ , яке  $\in$  \*конгруентним до  $B := \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{bmatrix}$  або  $C := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sigma & 0 \end{bmatrix}$ . Тоді  $A^{-*}A := (A^{-1})^*A \in$  подібною до  $B^{-*}B$  або  $C^{-*}C$ , що неможливо, оскільки власні значення  $A^{-*}A$  як завгодно близьки до  $\bar{\lambda}^{-1}\lambda = \lambda^2$ , тоді як  $B^{-*}B = \text{diag}(\mu^2, \nu^2)$  та  $C^{-*}C = \text{diag}(\sigma, \bar{\sigma}^{-1})$ .

• Доведемо

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \nrightarrow \begin{bmatrix} 0 & \tau \\ \tau & \tau i \end{bmatrix}$$

( $|\lambda| = |\tau| = 1$ ).

Нехай

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \rightarrow \tau \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix},$$

тобто існує як завгодно мале збурення

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + E$$

матриці  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , яке є  $*$ конгруентним до  $B := \lambda^{-1}\tau \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$ . Це означає, що існує невироджена  $S$  така, що

$$S^* \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + E \right) S = \lambda^{-1}\tau \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$$

Прирівнюючи визначники обох сторін, ми знаходимо, що

$$r(1 + \varepsilon) = -(\lambda^{-1}\tau)^2, \quad r := \det(S^*S) > 0,$$

де  $\varepsilon$  як завгодно мале. Оскільки  $-(\lambda^{-1}\tau)^2$  фіксоване і  $|\lambda^{-1}\tau| = 1$ , ми маємо  $(\lambda^{-1}\tau)^2 = -1$ , і тому  $\lambda^{-1}\tau = \pm i$ . Тоді  $\text{rank}(B + B^*) = 1$ , що неможливо, оскільки  $A + A^*$   $*$ конгруентна до  $B + B^*$  і  $\text{rank}(A + A^*) = 2$ .

#### 5.4. Не кожна матриця зводиться голоморфно до її мініверсальної деформації відносно $*$ конгруентності

В. І. Арнольд у 1971 році побудував мініверсальні деформації квадратних комплексних матриць відносно перетворень подібності. Аналогічні мініверсальні деформації були побудовані для матриць відносно конгруентності і відносно  $*$ конгруентності. Для матриць відносно подібності і відносно конгруентності завжди існують голоморфні перетворення до їх мініверсальних деформацій. Ми доводимо, що це невірно для матриць відносно  $*$ конгруентності.

Зведення матриці до жорданової нормальної форми — нестійка операція: як жорданова форма так і перетворення подібності залежать розривно від елементів початкової матриці. Тому якщо елементи матриці відомі лише приблизно, то зводити її до жорданової форми нерозумно. Також

нерозумно зводити до жорданової форми матриці, які гладко залежать від параметрів, бо гладка залежність від параметрів втрачається.

З цих причин В. І. Арнольд [1] побудував мініверсальні деформації матриць відносно перетворень подібності, тобто нормальну форму, до якої не тільки задана квадратна матриця  $A$  але й всі близькі до неї матриці  $B$  можуть бути зведені перетвореннями подібності, що гладко залежать від елементів  $B$ . Ці мініверсальні деформації також гладко залежать від елементів  $B$ . Мініверсальні деформації також побудовані для пучків матриць [26, 33, 46], матриць відносно конгруентності [23], і матриць відносно \*конгруентності [19]. Для всіх матриць відносно подібності або конгруентності та для всіх пучків матриць існують голоморфні перетворення до їх мініверсальних деформацій. Ми доводимо, що не існують голоморфні перетворення до мініверсальної деформації відносно \*конгруентності навіть якщо обмежитись  $1 \times 1$  матрицями. Всі матриці, які ми розглядаємо, є комплексними.

Нехай  $[a]$  — довільна ненульова  $1 \times 1$  матриця,  $a = re^{i\varphi}$ ,  $r > 0$ . Тоді  $[a]$  \*конгруентна матриці  $[b] := [e^{i\varphi}]$ , яка є канонічною формою  $[a]$  для \*конгруентності. Всі матриці  $[a + \varepsilon]$ , які є достатньо близькими до  $[a]$ , можуть бути одночасно зведені деяким перетворенням

$$[s(\varepsilon)]^*[a + \varepsilon][s(\varepsilon)], \quad s(\varepsilon) \text{ неперервне, } s(0) = \sqrt{r}, \quad (5.7)$$

до форми

$$[\varphi(\varepsilon)] = \begin{cases} [b + \alpha(\varepsilon)] & \text{якщо } a \notin \mathbb{R}, \\ [b + \alpha(\varepsilon)i] & \text{якщо } a \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad \text{де } \alpha(\varepsilon) \text{ дійснозначна,} \quad (5.8)$$

яка є мініверсальною деформацією  $[a]$  відносно \*конгруентності (див [19]).

Наша мета — довести, що комплексні функції  $s(\varepsilon)$  і  $\varphi(\varepsilon)$  в (5.7) і (5.8) не можуть бути голоморфними в нулі.

Нагадаємо, що якщо комплекснозначна функція  $f(z)$  голоморфна в

нулі, то вона голоморфна і в деякому околі  $U$  нуля і умови Коші–Рімана

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \quad (5.9)$$

виконуються для всіх  $x_0 + iy_0 \in U$ , де  $u(x, y)$  і  $v(x, y)$  — дійсна та уявна частини  $f(z)$ :

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y), \quad x, y, u(x, y), v(x, y) \in \mathbb{R}.$$

Нехай  $a = b$ ; для спрощення ми будемо вважати, що  $b = 1$ .

**Теорема 5.2.** *Якщо  $a = b = 1$ , тоді комплексні функції  $s(\varepsilon)$  і  $\varphi(\varepsilon) = 1 + \alpha(\varepsilon)i$  в (5.7) і (5.8) не є голоморфними в нулі.*

Запишемо  $\varepsilon$  у вигляді  $\varepsilon = -1 + x + iy$ , де  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  в околі  $(1, 0)$ . Тоді  $[a + \varepsilon] = [x + iy]$  зводиться деяким перетворенням (5.7) вигляду

$$[x + iy] \mapsto [|s(\varepsilon)|^2(x + iy)]$$

до мініверсальної деформації  $[1 + \alpha(\varepsilon)i]$  з  $\alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ . Отже,

$$|s(\varepsilon)|^2(x + iy) = 1 + \alpha(\varepsilon)i,$$

і тому

$$|s(\varepsilon)|^2 x = 1, \quad |s(\varepsilon)|^2 y = \alpha(\varepsilon). \quad (5.10)$$

З цих рівностей випливає, що

$$\varphi(\varepsilon) = 1 + \alpha(\varepsilon)i = 1 + |s(\varepsilon)|^2 y i = 1 + \frac{y}{x} i.$$

Функція  $\varphi(\varepsilon)$  має дійсну частину 1 і уявну частину  $y/x$ , вони не задовільняють (4.15), і тому  $\varphi(\varepsilon)$  не є голоморфною.

Зауважимо, що голоморфність  $[s(\varepsilon)]$  не гарантує голоморфності  $[s(\varepsilon)]^*$ , і тому негломорфність  $\varphi(\varepsilon)$  не гарантує негломорфності  $s(\varepsilon)$ .

Представимо першу рівність в (5.10) у вигляді

$$u(x, y)^2 + v(x, y)^2 = \frac{1}{x}, \quad (5.11)$$

де  $u(x, y)$  і  $v(x, y)$  — дійсна та уявна частини  $s(\varepsilon)$ .

Функція  $s(\varepsilon)$  не може бути голоморфною в 0 за наступною леммою.

**Лема 5.3.** *Не існують дійсні функції  $u(x, y)$  і  $v(x, y)$  в околі  $(1, 0)$  такі, що (5.11) виконується та  $u(x, y) + iv(x, y)$  є голоморфною.*

*Доведення.* Від супротивного, нехай такі  $u(x, y)$  та  $v(x, y)$  існують. Тоді вони мають задовольняти умовам Коші–Рімана

$$u'_x = v'_y, \quad u'_y = -v'_x. \quad (5.12)$$

За (5.11),

$$uu'_x + vv'_x = -\frac{1}{2x^2}, \quad uu'_y + vv'_y = 0. \quad (5.13)$$

*Крок 1.* Підставляючи (5.12) у друге рівняння з (5.13), ми одержуємо таку систему лінійних рівнянь відносно  $u'_x$  та  $v'_x$ :

$$\begin{aligned} uu'_x + vv'_x &= -\frac{1}{2x^2}, \\ -vu'_x + uv'_x &= 0. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Її визначником є (5.11). За правилом Крамера,

$$u'_x = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{1}{2x^2} & v \\ 0 & u \end{vmatrix}}{\frac{1}{x}} = -\frac{u}{2x}, \quad v'_x = \frac{\begin{vmatrix} u & -\frac{1}{2x^2} \\ -v & 0 \end{vmatrix}}{\frac{1}{x}} = -\frac{v}{2x}. \quad (5.15)$$

З першого рівняння маємо  $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u}{2x}$ , тому  $\frac{\partial u}{u} = -\frac{\partial x}{2x}$ ,

$$\ln u = -\frac{1}{2} \ln x + \ln C(y) = \ln x^{-\frac{1}{2}} C(y), \quad u = C(y)x^{-\frac{1}{2}}.$$

З другого рівняння в (5.15) маємо  $v = D(y)x^{-\frac{1}{2}}$ . Таким чином, всі розв'язки системи (5.14) мають вигляд

$$u = \frac{C(y)}{\sqrt{x}}, \quad v = \frac{D(y)}{\sqrt{x}} \quad (5.16)$$

(див [34, розділ IV]).



Крок 2. Підставляючи (5.12) у перше рівняння з (5.13), ми отримуємо наступну систему лінійних рівнянь відносно  $u'_y$  та  $v'_y$ :

$$\begin{aligned}vu'_y - uv'_y &= \frac{1}{2x^2} \\uu'_y + vv'_y &= 0\end{aligned}$$

Її визначником є (5.11). За правилом Крамера,

$$u'_y = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{2x^2} & -u \\ 0 & v \end{vmatrix}}{\frac{1}{x}} = \frac{v}{2x}, \quad v'_y = \frac{\begin{vmatrix} v & \frac{1}{2x^2} \\ u & 0 \end{vmatrix}}{\frac{1}{x}} = -\frac{u}{2x}.$$

Ми маємо

$$u''_{yy} = \frac{v'_y}{2x} = -\frac{u}{4x^2}, \quad v''_{yy} = -\frac{u'_y}{2x} = -\frac{u}{4x^2}.$$

Загальними розв'язками рівнянь  $u''_{yy} + \frac{1}{4x^2}u = 0$  та  $v''_{yy} + \frac{1}{4x^2}v = 0$  є функції

$$u = A(x) \cos \frac{y}{2x} + B(x) \sin \frac{y}{2x}, \quad v = A_1(x) \cos \frac{y}{2x} + B_1(x) \sin \frac{y}{2x}. \quad (5.17)$$

Згідно (5.16), функції  $u\sqrt{x}$  та  $v\sqrt{x}$  не залежать від  $x$ . Згідно (5.17), вони не залежать від  $x$  тільки якщо  $u$  та  $v$  тотожно рівні 0, що суперечить (5.11).  $\square$

## ВИСНОВКИ

У дисертації побудовано алгоритм, який зводить кожен матрицю в околі даної квадратної матриці до нормальної форми Арнольда відносно гладких перетворень подібності. Бажано побудувати аналогічний алгоритм для пучків матриць і знайти його область збіжності.

Побудовано графи замикань для класів конгруентності  $2 \times 2$  та  $3 \times 3$  матриць і для пачок  $2 \times 2$  та  $3 \times 3$  матриць, а також для класів \*конгруентності  $2 \times 2$  матриць. Для матриць відносно подібності і для пучків матриць будувати графів замикань набагато простіше, бо Н. den Boer, G. Ph. A. Thijssse [18] і, незалежно, А. S. Markus, Е. Ё. Parilis [51] для кожної жорданової матриці описали множину канонічних форм Жордана

в її околі, а потім А. Rokrzywa [54] поширив цей результат на канонічні форми Кронекера пучків матриць. Бажано одержати аналогічний опис для канонічних матриць відносно конгруентності і \*конгруентності. Це дало б змогу розробити комп'ютерну програму, яка будує графи замикань для класів конгруентності і \*конгруентності. Аналогічна програма для матриць відносно подібності і для пучків матриць має назву Strati-Graph [41] і постійно вдосконалюється.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Арнольд В. И. О матрицах, зависящих от параметров / В. И. Арнольд // Успехи матем. наук.– 1971.– Т. 26, № 2 (158).– С. 101–114.
- [2] Арнольд В. И. Лекции о бифуркациях и версальных семействах / В. И. Арнольд // Успехи матем. наук. – 1972. – Т. 27, № 5. – С. 54–123.
- [3] Арнольд В. И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений / В. И. Арнольд. – Ижевск: Ижевская республиканская типография. – 2000. – 400 с.
- [4] Белицкий Г. Р. Нормальные формы в пространстве матриц / Г. Р. Белицкий // Анализ в бесконечномерных пространствах и теория операторов: сб. науч. трудов / науч. ред. В.А. Марченко. – Киев: Наукова думка. – 1983. – 152 с.
- [5] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – Москва: Наука. – 1966. – 576 с.
- [6] Добровольская Н. М. Пара встречных операторов / Н. М. Добровольская, В. А. Пономарев // Успехи матем. наук. – 1965. – Т. 20, № 6 (126). – С. 81–86.
- [7] Клименко О. М. Алгоритм приведения до канонічного виду матриць лінійних операторів в п'ятивимірному унітарному просторі та його реалізація на мові програмування C++ / О. М. Клименко, В. В. Сергейчук // LXVIII наукова конференція професорсько-викладацького складу, аспірантів, студентів та співробітників відокремлених структурних підрозділів Національного транспортного університету, 16–18 травня 2012 р.: тези доп. – Київ, 2012. - С.355.
- [8] Клименко О. М. Голоморфне перетворення до мініверсальної деформації відносно \*конгруентності існує не завжди / О. М. Клименко // Укр. мат. журн. – 2014. – Т. 66, №9. – С. 1276–1279.

- [9] Клименко О.М. Голоморфні перетворення до мініверсальної деформації // Міжнародна конференція молодих математиків, 3–6 червня 2015 р.: тези доп.– Київ, 2015. – С. 37.
- [10] Майлыбаев А. А. Приведение семейств матриц к нормальным формам и приложение к теории устойчивости / А. А. Майлыбаев // *Фундамент. и прикл. матем.* – 1999. – Т. 5. – С. 1111–1133.
- [11] Мальцев А. И. Основы линейной алгебры / А. И. Мальцев. – Москва: Наука, 1970. – 400 с.
- [12] Ройтер А.В. БОКСы с инволюцией / А.В. Ройтер // *Представления и квадратичные формы: сборник научных трудов, АН УССР, Ин-т матем.* – 1979. – С. 124–126.
- [13] Сергейчук В. В. Классификационные задачи для систем форм и линейных отображений / В. В. Сергейчук // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* – 1987. – Т. 51, № 2. – С. 1170–1190.
- [14] Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений / Дж. Х. Уилкинсон. – Москва: Наука, 1970. – 564 с.
- [15] Belitskii G. R. Normal forms in matrix spaces / G. R. Belitskii // *Integral Equations Operator Theory.* – 2000. – № 38. – P. 251–283.
- [16] De Terán F. The solution of the equation  $XA + AX^T = 0$  and its application to the theory of orbits / F. De Terán, M. Dopico // *Linear Algebra Appl.* – 2011. – V.434, № 1. – P. 44–67.
- [17] De Terán F. The equation  $XA + AX^* = 0$  and the dimension of \*congruence orbits / F. De Terán, F.M. Dopico // *Electr. J. Linear Algebra.* – 2011. – V. 22. – P. 448–465.
- [18] den Boer H. Semi-stability of sums of partial multiplicities under additive perturbation / H. den Boer, G.Ph.A. Thijsse // *Integral Equations Operator Theory.* – 1980. – V. 3. – P. 23–42.
- [19] Dmytryshyn A.R. Miniversal deformations of matrices under \*congruence and reducing transformations / A.R. Dmytryshyn, V.

- Futoryny, V.V. Sergeichuk // *Linear Algebra Appl.* – 2014. – V. 446. – P. 388–420.
- [20] Dmytryshyn A. Codimension computations of congruence orbits of matrices, symmetric and skew-symmetric matrix pencils using Matlab / A. Dmytryshyn, S. Johansson, B. Kågström // Report UMINF-13.18, Department of Computing Science, Umeå University, Sweden. – 2013.
- [21] Dmytryshyn A. Orbit closure hierarchies of skew-symmetric matrix pencils / A. Dmytryshyn, B. Kågström // *SIAM. J. Matrix Anal. Appl.* – 2014. – V. 35. – P. 1429–1443.
- [22] Dmytryshyn A. Skew-symmetric matrix pencils: Codimension counts and the solution of a pair of matrix equations / A. Dmytryshyn, B. Kågström, V.V. Sergeichuk // *Linear Algebra Appl.* – 2013. – V. 438. – P. 3375–3396.
- [23] Dmytryshyn A.R. Miniversal deformations of matrices of bilinear forms / A.R. Dmytryshyn, V. Futorny, V.V. Sergeichuk // *Linear Algebra Appl.* – 2012. – V. 436. – P. 2670–2700.
- [24] Dmytryshyn A.R. Change of the congruence canonical form of 2-by-2 and 3-by-3 matrices under perturbations and bundles of matrices under congruence / A.R. Dmytryshyn, V. Futorny, B. Kågström, L. Klimenko, V.V. Sergeichuk // *Linear Algebra Appl.* – 2015. – V. 469. – P. 305–334.
- [25] Doković D.Ž. Structure of isometry group of bilinear spaces / D.Ž. Doković // *Linear Algebra Appl.* – 2006. – V. 416. – P. 414–436.
- [26] Edelman A. A geometric approach to perturbation theory of matrices and matrix pencils. Part I: Versal deformations / A. Edelman, E. Elmroth, B. Kågström // *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* – 1997. V. 18. – P. 653–692.
- [27] Edelman A. A geometric approach to perturbation theory of matrices and matrix pencils. Part II: A stratification-enhanced staircase algorithm / A. Edelman, E. Elmroth, B. Kågström // *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* – 1999. – V. 20. – P. 667–699.

- [28] Elmroth E. Computation and presentation of graphs displaying closure hierarchies of Jordan and Kronecker structures / E. Elmroth, P. Johansson, B. Kågström // Numer. Linear Algebra Appl. – 2001. – V. 8. – P. 381–399.
- [29] Elmroth E. Stratification of controllability and observability pairs— theory and use in applications / E. Elmroth, S. Johansson, B. Kågström // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2009. – V. 31. – P. 203–226.
- [30] Elmroth E. The set of 2-by-3 matrix pencils—Kronecker structures and their transitions under perturbations / E. Elmroth, B. Kågström // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 1996. V. 17. – P. 1–34.
- [31] Futorny V. Tridiagonal canonical matrices of bilinear or sesquilinear forms and of pairs of symmetric, skew-symmetric, or Hermitian forms / V. Futorny, R.A. Horn, V.V. Sergeichuk // J. Algebra. – 2008. – V. 319. – P. 2351–2371.
- [32] +Futorny V. Change of the  $*$ -congruence canonical form of 2-by-2 matrices under perturbations / V. Futorny, L. Klimenko, V.V. Sergeichuk // Electr. J. Linear Algebra. – 2014. – V. 27. – P. 146–154.
- [33] +Garcia-Planas M. I. Simplest miniversal deformations of matrices, matrix pencils, and contragredient matrix pencils / M. I. Garcia-Planas, V. V. Sergeichuk // Linear Algebra Appl. – 1999. – V. 302–303. – P. 45–61.
- [34] Hartman P. Ordinary differential equations / P. Hartman. – New York: Wiley, 1964. – 351 p.
- [35] Horn R. A. Matrix Analysis / R. A. Horn, C. R. Johnson. – Cambridge: Cambridge U. P., 2013. – 609 p.
- [36] +Horn R. A. Contragredient equivalence: a canonical form and some applications / R. A. Horn, D. I. Merino // Linear Algebra Appl. – 1995. – V. 214. – P. 43–92.

- [37] Horn R. A. Canonical matrices of bilinear and sesquilinear forms / R. A. Horn, V. V. Sergeichuk // *Linear Algebra Appl.* – 2008. – V. 428. – P. 193–223.
- [38] Horn R. A. A regularization algorithm for matrices of bilinear and sesquilinear forms / R. A. Horn, V. V. Sergeichuk // *Linear Algebra Appl.* – 2006. – V. 412. – P. 380–395.
- [39] Horn R. A. Congruence of a square matrix and its transpose / R. A. Horn, V. V. Sergeichuk // *Linear Algebra Appl.* – 2004. – V. 389. – P. 347–353.
- [40] Horn R. A. Canonical forms for complex matrix congruence and \*-congruence / R. A. Horn, V. V. Sergeichuk // *Linear Algebra Appl.* – 2006. – V. 416. – P. 1010–1032.
- [41] Johansson P. StratiGraph User's Guide / P. Johansson // Technical Report UMINF 03.21 (ISSN-0348-0542), Department of Computing Science, Umeå University, Sweden. – 2003. – Available at: <http://www8.cs.umu.se/pedher/research/papers/sg-usersguide.pdf>
- [42] Johansson S. Canonical forms and stratification of orbits and bundles of system pencils / S. Johansson // Report UMINF-05.16, Department of Computing Science, Umeå University, Sweden. – 2005.
- [43] Johansson S. Stratification of full rank polynomial matrices / S. Johansson, B. Kågström, P. Van Dooren // *Linear Algebra Appl.* – 2013. – V. 439. – P. 1062–1090.
- [44] Klimenko L. Block triangular miniversal deformations of matrices and matrix pencils / L. Klimenko, V. Sergeichuk // Ukrainian Mathematical Congress, August 27–29, 2009: abstracts. – Kyiv, 2009. – Available at: <http://www.imath.kiev.ua/congress2009/Abstracts/Klimenko.pdf>.
- [45] Klimenko E. Classification of linear operators on a 5-dimensional unitary space / E. Klimenko // 7th Intern. Algebraic Conf. in Ukraine, 18–23 August 2009: abstracts.– Kharkiv, 2009. – P. 72.

- [46] Klimenko L. Block triangular miniversal deformations of matrices and matrix pencils / L. Klimenko, V. V. Sergeichuk // *Matrix Methods: Theory, Algorithms and Applications* / editors V. Olshevsky, E. Tyrtyshnikov. – Hackensack: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. – 2010. – P. 69–84.
- [47] Klimenko L. An informal introduction to perturbations of matrices determined up to similarity or congruence / L. Klimenko, V. V. Sergeichuk // *São Paulo J. Math. Sci.* – 2014. – V. 8. – P. 1–22.
- [48] Klimenko E. A holomorphic transformation to a miniversal deformation under  $*$ -congruence does not always exist // *International Algebraic Conference dedicated to 100th anniversary of L. A. Kaluzhnin, 7-12 July, 2014: Abstracts.* – Kyiv. – 2014. – P. 43.
- [49] Mailybaev A. A. Transformation of families of matrices to normal forms and its application to stability theory / A. A. Mailybaev // *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* – 1999. – V. 21. – P. 396–417.
- [50] Mailybaev A. A. Transformation to versal deformations of matrices / A. A. Mailybaev // *Linear Algebra Appl.* – 2001. – V. 337. – P. 87–108.
- [51] Markus A.S. The change of the Jordan structure of a matrix under small perturbations / A.S. Markus, E.È. Parilis // *Mat. Issled.* – 1980. – V. 54. – P. 98–109. / English translation: *Linear Algebra Appl.* – 1983. – V. 54. – P. 139–152.
- [52] O’Meara K. C. *Advanced Topics in Linear Algebra: Weaving Matrix Problems through the Weyr Form* / O’Meara K. C., J. Clark, C. I. Vinsonhaler. – Oxford: Oxford University Press, 2011. – 400 p.
- [53] Patera J. Dimensions of orbits and strata in complex and real classical Lie algebras / J. Patera, C. Rousseau, D. Schlomiuk // *J. Math. Phys.* – 1982. – V. 23. – P. 490–494.
- [54] Pokrzywa A. On perturbations and the equivalence orbit of a matrix pencil / A. Pokrzywa // *Linear Algebra Appl.* – 1986. – V. 82. P. 99–121.



- [55] Riehm C. The equivalence of sesquilinear forms / C. Riehm, M. Shrader-Frechette // *J. Algebra.* – 1976. – V. 42. – P. 495–530.
- [56] Rodman L. Remarks on Lipschitz properties of matrix groups actions / L. Rodman // *Linear Algebra Appl.* – 2011. – V. 434. – P. 1513–1524.
- [57] Sergeichuk V. V. Canonical matrices for linear matrix problems / V. V. Sergeichuk // *Linear Algebra Appl.* – 2000. – V. 317. – P. 53–102.
- [58] Shapiro H. The Weyr characteristic / H. Shapiro // *Amer. Math. Monthly.* – 1996. – V. 106. – P. 919–929.
- [59] Szechtman F. Structure of the group preserving a bilinear form / F. Szechtman // *Electr. J. Linear Algebra.* – 2005. – V. 13. – P. 197–239.
- [60] Tannenbaum A. Invariance and System Theory: Algebraic and Geometric Aspects / A. Tannenbaum // *Lecture Notes in Math.* – 1981. – V. 845. – 158 p.
- [61] Weyr E. Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces / E. Weyr // *C. R. Acad. Sci. Paris.* – 1885. – V. 100. – P. 966–969.