НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Дакхіл Хайджаа Кхудхаір

УДК 517.5

ЗАДАЧІ ПРО ТІНЬ ТА ВІДОБРАЖЕННЯ ПОСТІЙНОЇ КРАТНОСТІ

01.01.01 – математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2017

Дисертацією є рукопис.
Робота виконана в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка.

Науковий керівник

доктор фізико-математичних наук, професор
ЗЕЛІНСЬКИЙ Юрій Борисович,
Інститут математики НАН України,
завідувач відділу комплексного аналізу
і теорії потенціалу.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
ЗАДЕРЕЙ Петро Васильович,
Київський національний університет технологій і дизайну,
завідувач кафедри вищої математики;

кандидат фізико-математичних наук, доцент
ГЕРУС Олег Федорович,
Житомирський державний університет імені Івана Франка,
завідувач кафедри математичного аналізу.

Захист відбудеться «29» вересня 2017 р. о 15 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий «28» серпня 2017 р.

Вчений секретар

спеціалізованої вченої ради А. С. РОМАНЮК

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Класичне поняття опуклості, яке на перший погляд дуже просте і очевидне, відіграє важливу роль в різних областях фундаментальної та прикладної науки і стало основою для великого напрямку в математиці, яким є опуклий аналіз.

Основні поняття опуклого аналізу сформовані ще у вісімнадцятому столітті. Створення і подальший його розвиток опирається на роботи таких вчених як Г. Мінковський, Я. Штейнер, Е. Гелі, К. Каратеодорі, В. Бляшке, В. Фенхель, Р. Рокафеллар та інших.

Крім класичного визначення опуклості в математичному аналізі використовуються багато інших різновидів опуклості. Одним з найбільш відомих є поняття псевдоопуклості (плюрісубгармонійності) в теорії функцій багатьох комплексних змінних. Теореми існування для диференціальних операторів в частинних похідних з постійними коефіцієнтами теж пов'язані з різними умовами опуклості, які накладаються на ці оператори. Отже встановлення умов існування розв'язків диференціальних рівнянь також можна розглядати як гілку теорії опуклості.

Варто також згадати ряд теорем про відокремлення і їх зв'язок з теоремою Гана-Банаха, які знайшли своє завершення в функціональному аналізі. Опуклість відіграє важливу роль в лінійному та нелінійному функціональному аналізі, в теорії дійсних та комплексних рівнянь Монжа-Ампера, в базових нерівностях класичного аналізу та в ізопериметричних нерівностях.

Поняття опуклості тісно пов'язане і з іншими галузями математики та науки. Все частіше в математичному аналізі, теорії диференційних включень, математичній економіці, біології, томографії знаходять багато застосувань дослідження різних аспектів узагальнено опуклих множин. Особливо корисними виявилися вони при вивченні геометричних проблем комплексного аналізу. Такі узагальнення стали можливими завдяки зовнішнім (через доповнення до множини) означенням опуклості та використанням аксіоматичних означень. Узагальнено опуклі множини та многозначні відображення, які тут виникають, пов'язують в один вузол проблеми геометрії, комплексного та опуклого аналізу. Основною метою даної роботи є дослідження властивостей узагальнено опуклих множин в дійсних і комплексних евклідових просторах та неперервних відображень.

Лінійна опуклість при $n = 2$ вперше була введена в 1935 році в роботі Генріха Беенке та Ернста Пешля. Особливо активне застосування ряду узагальнено опуклих (лінійно опуклих та сильно лінійно опуклих) множин в багатовимірному комплексному аналізі почалося з шістдесятих років минулого століття завдяки піонерським роботам А. Мартіно та Л. А. Айзенберга та їх послідовників. Мартіно та Айзенберг дали означення лінійної опуклості, які частково відрізнялися одне від одного, але, якщо не обмежуватись зв'язними компактами та областями, то з означення даного Л.Айзенбергом одержимо одну зв'язну компоненту множини, яка задовольняє означенню Мартіно.

За останні шістдесят років дослідження узагальнено опуклих множин в комплексному і гіперкомплексному аналізі, та їх застосування активно розвивалися в роботах представників красноярської школи Л. А. Айзенберга, Б.С.Зінов'єва, О.П. Южакова та В.П. Кривоколеска, Л.Я. Макарової, С. В. Знаменського , А. К.Ціха , Г. Худайберганова, та шведської школи Л. Хьормандера , Х. Кіселмана , М. Пассаре, М. Андерсона, Р. Сігурдсона та інших. В останні роки сюди добавилися дослідження вчених Ягелонського університету (Польща) В. Звонека, Л. Косинського, М. Ярніцкого та їх колег Л. Лемперта, Н. Ніколова, П. Пфлюга. Використання узагальнено опуклих множин дозволило розв'язати низку важливих задач комплексного аналізу, на деяких з яких зупинимося нижче в огляді літератури.

Одним з центрів розвитку застосувань топологічних та геометричних методів до потреб математичного аналізу є Інститут математики Національної Академії наук України. Тут в роботах Ю.Ю. Трохимчука, П.М. Тамразова, А.В. Бондаря, Ю.Б. Зелінського, В.В. Шарка, С.І.Максименка вивчалися питання, пов'язані з побудовою теорії множин моногенності неперервних функцій в одновимірному та багатовимірному комплексному аналізі, поліноміальними наближеннями в комплексній області, застосуваннями степеня відображення до опису поведінки різних класів неперервних відображень, характеристики кратних точок відображень, питаннями існування функцій Морса на топологічних многовидах.

В роботах Ю. Б. Зелінського [1], [2] та його учнів В. Л. Мельник,

[1] Зелинский Ю. Б. Многозначные отображения в анализе / Ю. Б. Зелинский. – К:. Наукова думка, 1993. – 264 с.

[2] Зелинский Ю. Б. Выпуклость. Избранные главы // Праці Інституту математики НАНУ. – 2012. – Т. 92. – 280 с.

О.І. Герасіна, І. В. Момот, М. В. Ткачука, Б. А. Кліщука, М.В. Стефанчук закладено основи лінійно опуклого аналізу, який є комплексним аналогом дійсного опуклого аналізу. Фундаментом для його побудови стали лінійно опуклі множини та їх узагальнення.

Розв'язанню відкритих проблем узагальнено опуклих множин та відображень постійної кратності присвячена запропонована дисертаційна робота.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана на кафедрі математичного аналізу механіко математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка згідно з темами досліджень Інституту математики НАН України „Алгебраїчно-аналітичні та топологічні методи комплексного аналізу" (номер держреєстрації 0111U001026), „Метричні та геометричні задачі теорії аналітичних і субгармонічних функцій та множин" (номер держреєстрації 0116U003060).

Мета і завдання дослідження. *Метою дисертаційної роботи є* дослідження деяких класів узагальнено опуклих множин в дійсних, комплексних та гіперкомплексних евклідових просторах, розв'язання ряду варіантів задачі про тінь та вивчення відображень кулі постійної кратності.

Об'єктом дослідження є узагальнено опуклі множини в дійсних, комплексних та гіперкомплексних евклідових просторах та неперервні відображення евклідової кулі. *Предметом дослідження є* геометричні та топологічні властивості сімей множин та зв'язки кратних відображень.

Для досягнення зазначеної *мети* в роботі було поставлено такі задачі:

1. Вивчити властивості узагальнено опуклих множин та різні узагальнено опуклі оболонки ряду сімей множин (куль, опуклих множин з непорожньою внутрішністю).

2. Дослідити задачу про тінь для сімей куль постійного радіуса з вільно розташованими центрами та задачу про тінь для сімей куль постійного радіуса з центрами на фіксованій сфері в розмірності 3.

3. Побудувати відображення фіксованої кратності внутрішностей куль в себе, які будуть гомеоморфізмами на межі.

При розв'язанні цих задач застосовуються методи опуклого та комплексного аналізу, теорії відображень та топології.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи є новими і полягають у наступному:

1. Виділено класи узагальнено опуклих множин (слабко *m*-опуклі та

слабко m-напівопуклі множини) та досліджено їх властивості.

2. Розв'язано задачу про тінь для сімей куль постійного радіуса з вільно розташованими центрами.

3. Встановлено, що задача про тінь для сімей куль постійного радіуса з центрами на фіксованій сфері в розмірності 3 не має скінченного розв'язку.

4. Доведено, що три кулі, що попарно не перетинаються, завжди утворюють 1-опуклу множину в тривимірному евклідовому просторі.

5. Побудовано відображення фіксованої кратності внутрішностей куль в себе, які будуть гомеоморфізмами на межі .

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Результати роботи та методи їх отримання можуть бути використані при вивченні питань:

1) комплексно лінійного аналізу,
2) теорії відображень,
3) геометричних методів комплексного аналізу та у застосуваннях до суміжних галузей математики, що використовують методи аналізу та інтегральної геометрії: томографії, стереології.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямку дослідження і загальна постановка задач належить науковому керівникові – доктору фізико-математичних наук, професору Ю. Б. Зелінському. Всі результати, що ввійшли в дисертацію, отримані здобувачем самостійно. З робіт, які опубліковані сумісно, в дисертацію включено лише особисті результати автора. Формулювання деяких робочих гіпотез в них належать співавторам. Доведення всіх основних результатів дисертації, які виносяться на захист, проведено особисто автором.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи доповідалися та обговорювалися на 5 міжнародних наукових конференціях: Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу (Україна, Ворохта, 24 – 27 лютого 2016 року); XI літній математичній школі "Алгебра, Топологія, Аналіз" (м. Одеса 1 – 14 серпня 2016 року); Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 22 – 25 лютого 2017р.); XV Міжнародній конференції студентів, аспірантів та молодих вчених "Шевченківська весна 2017: Математика, Статистика та Механіка" (м. Київ, 4 – 8 квітня, 2017р.); Міжнародній конференції "Теорія наближення функцій та її застосування" (м. Слов'янськ, 28 травня — 3 червня 2017р.), а також: на семінарах відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор Ю. Б. Зелінський), на семінарі кафедри математичного аналізу Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор І. О. Шевчук).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в статтях [1 – 8] в наукових спеціалізованих виданнях і в збірниках тез конференцій [9 – 13].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, загальних висновків та списку літератури. Повний обсяг дисертації складає 128 сторінок. Список використаної літератури займає 10 сторінок і налічує 97 найменувань.

Подяки. Користуючись нагодою, висловлюю щиру і глибоку вдячність моєму науковому керівнику Зелінському Юрію Борисовичу за постановку задач, постійну увагу, підтримку і допомогу в роботі, Виговській І.Ю та Кліщуку Б.А за допомогу в дослідженнях, членам семінару кафедри математичного аналізу Київського національного університету імені Тараса Шевченка та членам семінару відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України за цінні вказівки та поради.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету дослідження, коротко викладено зміст основної частини роботи та показано наукову новизну одержаних результатів.

В **першому розділі** дається огляд наукових праць, проблематика яких тісно пов'язана з дослідженнями, які містяться в дисертаційній роботі, а також робиться короткий огляд результатів дисертації.

У **другому розділі** дисертації досліджено декілька класів узагальнено опуклих множин та отримано узагальнення теореми Ю. Б. Зелінського на слабко 1-опуклі компакти.

Скажемо, що множина $E \subset \mathbb{R}^n$ *m-опукла* відносно точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$, якщо знайдеться m-вимірна площина L, така що $x \in L$ і $L \cap E = \varnothing$.

Будемо говорити, що відкрита множина $G \subset \mathbb{R}^n$ *слабко m-опукла*, якщо вона m-опукла відносно кожної точки $x \in \partial G$, яка належить до межі множини G. Скажемо, що довільна множина $E \subset \mathbb{R}^n$ *слабко m-опукла*, якщо її можна апроксимувати ззовні сім'єю відкритих слабко m-опуклих множин.

Теорема 2.3.1. *Якщо K – слабко m-опуклий компакт і спряжена множина K* зв'язна, то для перерізу K довільною (n – m)-вимірною площиною L множина* $L \setminus K \cap L$ *зв'язна.*

Отримана класифікація (n-1)-опуклих множин з гладкою межею.

Теорема 2.3.2. *Нехай задана (n-1)–опукла множина* $E \subset \mathbb{R}^n$ *з гладкою межею.*

Тоді

1) *E опукла множина, або*
2) *E має вид декартового добутку* $E = E^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$*, або*
3) *E складається не більше ніж з двох необмежених компонент.*

Встановлено, що аналогічної класифікації для напівопуклих множин з гладкою межею сподіватися не можна.

Теорема 2.3.3. *Кожна слабко* $(n\text{-}1)$*-опукла відкрита множина E в евклідовому просторі* $\mathbb{R}^n$*, яка не є* $(n\text{-}1)$*-опуклою, складається не менше ніж з трьох компонент.*

Одержано характеристики слабко 1-напівопуклих відкритих множин.

Теорема 2.4.1. *Кожна слабко* 1*-напівопукла відкрита множина на евклідовій площині* $\mathbb{R}^2$*, яка не є* 1*-напівопуклою, складається не менше ніж з трьох компонент.*

У **третьому розділі** дисертаційної роботи досліджуються узагальнено опуклі оболонки низки сімей множин. Повністю розв'язана задача, поставлена Ю. Б. Зелінським, для сім'ї куль одного радіуса в тривимірному евклідовому просторі. Отримано точні оцінки для задач про тінь для сім'ї куль одного радіуса в комплексному та гіперкомплексному евклідових просторах. При цьому істотно покращені відомі до цього оцінки. Встановлено оцінки знизу і зверху необхідної кількості куль різного радіуса, що забезпечують тінь дотичну до сфери.

Класична задача про тінь була поставлена Г. Худайбергановим [3] у 1982 році.

Задача про тінь. *Знайти мінімальну кількість попарно неперетинних замкнених (відкритих) куль у просторі* $\mathbb{R}^n$ *з центрами на сфері* S^{n-1} *та радіусами, меншими від радіуса сфери, таких, щоб довільна пряма, яка проходить через центр сфери, перетинала хоча б одну з цих куль.*

Наступна теорема дає оцінку, достатню для створення тіні в точці, у випадку куль рівного радіуса.

Теорема 3.2.1. *$n + 1$-ї замкнутої кулі однакового радіуса в просторі* $\mathbb{R}^n$ *з центрами на сфері* S^{n-1} *досить для створення тіні в центрі сфери, якщо кулі можуть торкатися одна одної.*

Необхідність цієї кількості куль випливає з результату отриманого в роботі Ю.Б.Зелінського, І.Ю.Виговської, М.В.Стефанчук [4] .

Теорема 3.2.2. *Не існує набору з відкритих куль однакового радіуса, що попарно не перетинаються, в тривимірному дійсному евклідовому просторі з центрами на сфері* S^2 *і радіуса, що не перевищує радіуса сфери, такого, що будь-яка пряма, яка проходить через центр сфери, перетинала б хоча одну з цих куль.*

Теорема 3.2.3. *Не існує набору з замкнутих куль однакового радіуса, що попарно не перетинаються (або дотикаються) в тривимірному дійсному евклідовому просторі з центрами на сфері* S^2 *і радіусу меншого від радіуса сфери, , такого, що будь-яка пряма, яка проходить через центр сфери, перетинала б хоча одну з цих куль.*

[3] Худайберганов Г. Об однородно-полиномиально выпуклой оболочке объединения шаров / Г. Худайберганов // Рукопись деп. в ВИНИТИ 21.02.1982 г. № 1772 --- 85 Деп.

[4] Зелинский Ю. Б., Выговская И. Ю., Стефанчук М. В. Обобщённо выпуклые множества и задача о тени // Укр. мат. журн. – 2015. – Т. 67, № 12. – С. 1659 – 1666.

Незважаючи на негативну відповідь попередніх результатів, наступні твердження дають оцінки, достатні для створення тіні в точці, якщо центри куль не прив'язані до деякої сфери.

Теорема 3.2.4. *Чотирьох замкнутих (відкритих) куль однакового радіуса в просторі $\mathbb{R}^3$, що попарно не перетинаються, досить для створення тіні в фіксованій точці.*

Скажемо, що множина $E \subset \mathbb{R}^n$ *m-опукла* відносно точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$, якщо знайдеться m-вимірна площина L, така що $x \in L$ і $L \cap E = \varnothing$. Для довільної множини $E \subset \mathbb{R}^n$ ми можемо розглядати мінімальну m-опуклу множину, яка містить *E*, і називати її *m-опуклою оболонкою множини E*.

Будемо говорити, що відкрита множина $G \subset \mathbb{R}^n$ *слабко m-опукла*, якщо вона m-опукла відносно кожної точки $x \in \partial G$, яка належить до межі множини G. Скажемо, що довільна множина $E \subset \mathbb{R}^n$ *слабко m-опукла*, якщо її можна апроксимувати ззовні сім'єю відкритих слабко m-опуклих множин.

Теорема 3.3.1. *Довільний набір із трьох куль однакового радіуса, які попарно не перетинаються, утворює слабко 1-опуклу множину в тривимірному евклідовому просторі.*

Для набору з трьох куль у просторі $\mathbb{R}^n$ має місце наступне твердження.

Теорема 3.3.4. *Для довільної точки простору* $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^{3} B_i$, *де B_1, B_2, B_3 – набір з трьох куль однакового радіуса, які попарно не перетинаються і не проходять через цю точку, існує (n – 2)-вимірна площина, що містить цю точку і не перетинає жодну з куль.*

Наступні теореми підсилюють результати Ю. Б. Зелінського [5] і переносять твердження, отримані для випадку дійсного евклідового простору, на комплексний і гіперкомплексний випадок.

Теорема 3.4.1. *Для того щоб початок координат в n-вимірному комплексному (гіперкомплексному) евклідовому просторі* $\mathbb{C}^n$ ($\mathbb{H}^n$), *n > 2, належав до* 1*-комплексної (*1*-гіперкомплексної) оболонки сімейства відкритих (замкнених) куль, що попарно не перетинаються, з центрами на одиничній сфері* $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n (S^{4n-1} \subset \mathbb{H}^n)$, *і які не містять початку координат, необхідно і досить* $n+1$ *кулі.*

Теорема 3.4.2. *Для того щоб початок координат в двовимірному комплексному (гіперкомплексному) евклідовому просторі* $\mathbb{C}^2$ ($\mathbb{H}^2$) *належав до* 1*-комплексної (*1*-гіперкомплексної) оболонки сімейства відкритих (замкнених) куль фіксованого радіуса, що попарно не перетинаються, з центрами на одиничній сфері* $S^3 \subset \mathbb{C}^2 (S^7 \subset \mathbb{H}^2)$, *і які не містять початку координат, необхідно і досить трьох куль.*

Теорема 3.4.3. *n* + 1*-ї замкнутої кулі однакового радіуса в просторі* $\mathbb{C}^n$ ($\mathbb{H}^n$) *з центрами на сфері* S^{2n-1} (S^{4n-1}) *досить для створення тіні в центрі сфери, якщо кулі можуть доторкатися одна одної.*

У **четвертому розділі** дисертаційної роботи досліджено можливість побудови власного відображення постійної непарної кратності на відкритій кулі евклідового простору $\mathbb{R}^n$ за умови, що на межі кулі відображення є гомеоморфізмом.

---

[5] Зелинский Ю. Б. Задача о тени для семейства множеств // Збірник праць Інституту математики НАНУ. – 2015. – Т. 12, № 4. – С. 197 – 204.

Як частковий випадок з результатів цього розділу випливає існування шуканого в питанні, поставленому Ю. Б. Зелінським, відображення, якщо абсолютна величина степеня відображення на межі сфери дорівнює одиниці.

Узагальнено результат Й. Міодушевського [6] на відображення замкнутої кулі. Показано, що відображення з такими властивостями можна вибрати гладкими будь якого порядку гладкості.

Теорема 4.2.1. *Існує неперервне відображення n-вимірної кулі B^n в себе, яке є гомеоморфізмом на межі кулі і кожна внутрішня точка кулі має рівно k прообразів, де k – непарне число.*

Наслідок 4.2.1. *Нехай множина X має вигляд декартового добутку $X=Y\times B^n$, тоді на X можна задати неперервне відображення в X, яке буде гомеоморфізмом на $X\times\partial B^n$, а кожна точка з $X\times IntB^n$ має рівно k прообразів, де k – непарне число.*

В роботі О.В.Чернавського [7] показано, що не існує двократного неперервного відображення *n*-вимірної кулі в себе. В дисертаційній роботі встановлено, що у випадку $n = 1$ такого відображення кулі (відрізка) в себе не існує і при інших постійних кратностях більше двох.

Твердження 4.2.1. *Не існує неперервного відображення відрізка в себе з постійною кратністю більшою одиниці.*

Теорема 4.3.1. *Існує гладке неперервне відображення n-вимірної кулі* $B^n=\left\{x\in\mathbb{R}^n \,\middle\|\, |x|\le r\right\}$ *в себе, яке є гомеоморфізмом на межі кулі а кожна внутрішня точка кулі має в точності k прообразів, де k є непарним числом.*

---

[6] Mioduszewski J. Funkcje ciagle o stalej krotnosci skonczonej na odcinku i prostej // Prace matematyczne. – 1961. – Vol. 5. – P. 79 – 93.

---

[7] Чернавский А. В. Конечнократные открытые отображения // Мат. сб. – 1964. – Т. 65 (107), № 3. – С. 356 – 369.

Якщо ж розглядати відображення кулі в більш загальні множини, то з наступного результату випливає, що можна побудувати відображення довільної кратності більшої від двох.

Теорема 4.3.2. *Для будь якого* $k \geq 3$ *існує гладке неперервне відображення n-вимірної кулі*

$$B^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, 0 \leq x_1 \leq k-2, 0 \leq x_i \leq 1, i = 2,...,n \right\}$$

на циліндр $S^1 \times \underbrace{[0,1] \times ... \times [0,1]}_{(n-1)-раз}$, *для якого кожна точка образу має в точності k прообразів.*

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вивчаються геометричні та топологічні властивості узагальнено опуклих множин та узагальнено опуклих оболонок деяких сімей множин в дійсних, комплексних та гіперкомплексних евклідових просторах, а також питання існування відображень куль постійної кратності. Зокрема досліджено декілька класів узагальнено опуклих множин. Кожен з цих класів задовольняє аксіому опуклості: перетин довільного набору множин з такого класу теж належить до цього класу.

Отримано узагальнення теореми Ю.Б.Зелінського на слабко 1-опуклі компакти, досліджено характеристики слабко *m*-опуклих відкритих множин.

Показано, що аналогічної до відомої класифікації для напівопуклих множин з гладкою межею сподіватися не можна.

Введено нові поняття слабкої *m*–опуклості та слабкої *m*–напівопуклості та досліджено класи множин, які володіють цими властивостями.

Встановлено, що слабко (*n*-1)-опукла відкрита множина, яка не є (*n*-1)-опуклою складається не менше ніж з трьох компонент. Подібні результати отримано і для інших класів узагальнено опуклих множин.

Побудовано ланцюжок послідовно вкладених класів узагальнено опуклих множин і вивчено деякі їх властивості.

Досліджено узагальнено опуклі оболонки низки сімей множин. Повністю розв’язана задача, поставлена Ю.Б.Зелінським, для сім’ї куль однакового радіуса в тривимірному евклідовому просторі. Показано, що якщо центри цих куль знаходяться на деякій сфері, то така задача не має розв'язку. При вільному розміщенні центрів куль задача розв'язана повністю. Встановлено, що чотирьох куль фіксованого радіуса необхідно і досить для створення тіні в заданій точці тривимірного евклідового простору. Отримано точні оцінки для задач про тінь для сім'ї куль одного радіуса в комплексному та гіперкомплексному евклідових просторах. При цьому істотно покращені відомі до цього оцінки. Встановлено оцінки знизу і зверху необхідної кількості куль різного радіуса, що забезпечать тінь дотичну до сфери.

Досліджена можливість побудови власного відображення постійної непарної кратності на відкритій кулі евклідового простору $\mathbb{R}^n$ за умови, що на межі кулі відображення є гомеоморфізмом. Це продовжує дослідження Й.Міодушевського. Як частковий випадок з цих результатів випливає існування шуканого в питанні, поставленому Ю.Б.Зелінським, відображення, якщо абсолютна величина степеня відображення на межі сфери дорівнює одиниці. Також досліджена можливість побудови неперервного гладкого відображення класу C^∞ постійної непарної кратності відкритої кулі евклідового простору $\mathbb{R}^n$ в себе, яке є неперервним продовженням гомеоморфного відображення межі кулі.

Одержані результати мають застосування в опуклому та комплексному аналізі, теорії відображень, а також можуть бути використані в теорії апроксимації, при дослідженні екстремальних задач та у застосуваннях до суміжних галузей математики, що використовують методи аналізу, наприклад в інтегральній геометрії, томографії та стереології.

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. Зелинский Ю. Б., Выговская И. Ю., Дакхил Х. К. Задача о тени и смежные задачи // Proceedings int. geometry center. – 2016, Vol. 9, № 3-4. – С. 50 – 58.

2. Зелинский Ю. Б., Выговская И. Ю., Дакхил Х. К. Задача о тени для шаров фиксированного радиуса // Український математичний вісник. 2016 – Т. 13, № 4. – С.599 – 603.

3. Зелинский Ю. Б., Дакхил Х. К. Об одной задаче о тени для шаров фиксированного радиуса // Труды ИПММ НАН Украины. – 2016, Т.30. – С.75 – 81.

4. Zelinskii Yu. B., Dakhil H. K. On mappings of constant multiplicity // Advances in Analysis. – 2017. – Vol. 2, № 2. – P. 105 – 107.

5. Дакхіл Х. К. Про гладкі відображення постійної кратності // Збірник праць Інституту математики НАНУ. – 2017. – Т. 14, № 1. – С. 140 –146.

6. Дакхіл Х. К., Зелінський Ю. Б., Кліщук Б. А. Про слабко *m*–опуклі множини // Доповіді НАНУ. – 2017. – № 4. – С. 3 – 6.

7. Zelinskii Yu. B., Dakhil H. K., Vygovskaya I. Yu. The problem of shadow for balls with fixed radius // Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – Vol. 224, № 4. – P. 603 – 606.

8. Zelinskii Yu. B., Dakhil H. K., Klishchuk B. A. On weakly m-convex sets // arXiv preprint arXiv:1703.06785. – 7 p.

9. Виговська І. Ю., Доля Д. С., Дакхіл Х. К. Про відображення кулі постійної кратності // Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”, 24 – 27 лютого 2016 р., Ворохта: Тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2016. – С. 66 – 67.

10. Виговська І. Ю., Дакхіл Х. К. До задачі про тінь // XI літня математична школа "Алгебра, Топологія, Аналіз", 1 – 14 серпня 2016 р., Одеса: Тези доповідей. – С. 47.

11. Виговська І. Ю., Дакхіл Х. К. Про гладкі відображення постійної кратності // Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”, 22 – 25 лютого 2017 р., Ворохта: Тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2017. – С. 59 – 61.

12. Дакхіл Х. К. Задача про тінь // XV Міжнародна конференція студентів, аспірантів та молодих вчених "Шевченківська весна 2017: Математика, Статистика та Механіка", 04 – 08 квітня 2017 р. – С. 18 – 19.

13. Дакхіл Х. К. Задача про тінь для сім’ї куль сталого радіуса // Міжнар. конф. “Теорія наближення функцій та її застосування”, 28 травня – 3 червня 2017 р., м. Слов’янськ. – С. 55.

АНОТАЦІЇ

Дакхіл Х.К. Задачі про тінь та відображення постійної кратності. – Рукопис. – Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз. – Інститут математики НАН України, Київ, 2017.

Дисертаційна робота присвячена вивченню геометричних та топологічних властивостей узагальнено опуклих множин та узагальнено опуклих оболонок деяких сімей множин в дійсних, комплексних та гіперкомплексних евклідових просторах, а також питанням існування відображень куль постійної кратності. Важливі результати в цих напрямках були отримані Г. Мінковським, К. Каратеодорі, Е. Хеллі, А. Мартіно, Л. Айзенбергом, Ю. Зелінським, Х. Кісельманом, Л. Хермандером, Г. Мкртчяном, М. Шапіро, А. Садбері, О. Герусом, М. Ткачуком, Т. Осіпчук, І. Виговською, Б. Кліщуком, М. Стефанчук та іншими.

В дисертаційній роботі виділено нові класи узагальнено опуклих множин (слабко m-опуклі та слабко m-напівопуклі множини) та досліджено їх властивості, розв'язано задачу про тінь для сімей куль постійного радіуса з вільно розташованими центрами в тривимірному евклідовому просторі, встановлено, що задача про тінь для сімей куль постійного радіуса з центрами на фіксованій сфері в розмірності 3 не має скінченного розв'язку, доведено, що три кулі, що попарно не перетинаються, завжди утворюють 1-опуклу множину в тривимірному евклідовому просторі (для будь якої точки простору, що лежить в доповненні до об'єднання куль, існує пряма, що проходить через цю точку і не перетинає жодної з цих куль), побудовано відображення фіксованої кратності внутрішностей куль в себе, які будуть гомеоморфізмами на межі . Показано, що такі відображення можна вибрати довільного порядку гладкості.

Ключові слова: евклідів простір, (гіпер)комплексний простір, сфера, куля, опуклість, відкрита множина, компакт, узагальнена опуклість, неперервне відображення.

Дакхил Х.К. Задачи о тени и отображения постоянной кратности. – Рукопись. – Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – математический анализ. – Институт математики НАН Украины, Киев, 2017.

Диссертационная работа посвящена изучению геометрических и топологических свойств обобщенно выпуклых множеств и обобщенно выпуклых оболочек некоторых семейств множеств в действительных, комплексных и гиперкомплексных евклидовых пространствах, а также вопро-

сам существования отображений шаров постоянной кратности. Существенные результаты в этих направлениях были получены Г. Минковским, К. Каратеодори, Е. Хелли, А. Мартино, Л. Айзенбергом, Ю. Зелинским, Х. Киселманом, Л. Хермандером, Г. Мкртчяном, М. Шапиро, А. Садбери, О. Герусом, М. Ткачуком, Т. Осипчук, И. Выговской, Б. Клищуком, М. Стефанчук и другими.

В диссертационной работе выделены новые классы обобщенно выпуклых множеств (слабо m-выпуклые и слабо m-полувыпуклые множества) и исследованы их свойства.

Теорема 2.3.3. *Каждое слабо* $(n\text{-}1)$*-выпуклое открытое множество E в евклидовом пространстве* $\mathbb{R}^n$*, которое не является* $(n\text{-}1)$*-выпуклым, состоит не менее чем из трех компонент.*

Теорема 2.4.1. *Каждое слабо 1-полувыпуклое открытое множество на евклидовой плоскости* $\mathbb{R}^2$*, которое не является 1-полувыпуклым состоит не менее чем з трех компонент.*

Установлено, что задача о тени для семейств шаров постоянного радиуса с центрами на фиксированной сфере размерности 3 не имеет конечного решения.

Теорема 3.2.2. *Не существует набора попарно не пересекающихся открытых шаров одинакового радиуса в трехмерном действительном евклидовом пространстве с центрами на сфере* S^2 *и радиуса, не превышающего радиуса сферы, такого, что любая прямая, проходящая через центр сферы, пересекала хотя бы один из этих шаров.*

Решена задача о тени для семейств шаров постоянного радиуса со свободно расположенными центрами в трехмерном евклидовом пространстве.

Теорема 3.2.4. *Четырех замкнутых (открытых) попарно не пересекающихся шаров одинакового радиуса в пространстве* $\mathbb{R}^3$ *достаточно для создания тени в фиксированной точке.*

Доказано, что три шара, которые попарно не пересекаются, всегда образуют 1-выпуклое множество в трехмерном евклидовом пространстве (для любой точки пространства, лежащего в дополнении к объединению шаров, существует прямая, проходящая через эту точку и не пересекающая ни одного из этих шаров).

Теорема 3.3.1. *Произвольный набор из трех попарно не пересекающихся шаров одинакового радиуса образует слабо 1-выпуклое множество в трехмерном евклидовом пространстве.*

Построено отображение фиксированной кратности внутренностей шаров в себя, которые будут гомеоморфизмами на границе. Показано, что такие отображения можно выбрать произвольного порядка гладкости.

Теорема 4.2.1. *Существует непрерывное отображение n-мерного шара B^n в себя, которое является гомеоморфизмом на границе шара и каждая внутренная точка шара имеет ровно k прообразов, где k – нечетное число.*

Ключевые слова: евклидово пространство, (гипер)комплексное пространство, сфера, шар, выпуклость, открытое множество, компакт, обобщенная выпуклость, непрерывное отображение.

Dakhil H.K. The shadows problems and mappings of fixed multiplisity. – Manuscript. – The thesis is presented for the scientific degree of the candidate of physics and mathematics by speciality 01.01.01 – mathematical analysis. – Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2017.

The thesis is devoted to the investigation of geometric and topological properties of generalized convex sets and generalized convex hulls for some families of sets in real, complex and hypercomplex Euclidean space, and the existence of balls mappings of constant mutiplisity. The significant results in these directions were obtained by H. Minkowski, C. Carathéodory, A. Martino, L. Aisenberg, Yu. Zelinskii, Ch. Kiselman and others.

In the thesis there was identified new classes of generalized convex sets (weakly m-convex and weakly m-semiconvex sets) and studied their properties, there was solved the problem of shadow for families of balls of a constant radius with freely located centers in three-dimensional Euclidean space, there was found that the problem of shadow for families of balls of a constant radius with centers on a fixed sphere in three-dimensional case doesn't have a finite solution, there was proved that the three balls that do not itersect pairwise always form 1-convex set in three-dimensional Euclidean space (for any point of a space that lies in a complement to the union of balls, there exists the line passing through this point and does not inersect any of the balls), there were built mappings of a fixed multiplicity of interiors of balls which will be homeomorphisms on the boundary. There was shown that such mappings can be choose of any order of smoothness.

Key words: Euclidean space, (hyper)complex space, sphere, ball, open set, compact, convexity, generalized convexity, continuous mapping.

Підписано до друку 25.08.2017. Формат 60×84/16. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 2,0. Ум. друк. арк. 1,8.
Тираж 120 пр. Зам. 45.

Інститут математики НАН України,
01004, м. Київ-4, вул. Терещенківська, 3.