Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Міністерство освіти і науки України
Інститут математики
Національна академія наук України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ДАКХІЛ ХАЙДЖАА КХУДХАІР

УДК 517.5

ДИСЕРТАЦІЯ

ЗАДАЧІ ПРО ТІНЬ ТА ВІДОБРАЖЕННЯ ПОСТІЙНОЇ КРАТНОСТІ

Спеціальність 01.01.01 – математичний аналіз
Математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня *кандидата фізико-математичних* наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____________ *Х.К. Дакхіл*

Науковий керівник ЗЕЛІНСЬКИЙ ЮРІЙ БОРИСОВИЧ, *доктор фізико-математичних наук, професор*

Київ – 2017

АНОТАЦІЯ

Дакхіл Х. К. Задачі про тінь та відображення постійної кратності. Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз. – Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, 2017.

Дисертаційна робота присвячена вивченню геометричних та топологічних властивостей узагальнено опуклих множин та узагальнено опуклих оболонок деяких сімей множин в дійсних, комплексних та гіперкомплексних евклідових просторах, а також питання існування відображень куль постійної кратності. Класичне поняття опуклості, яке на перший погляд дуже просте і очевидне, відіграє важливу роль в різних областях фундаментальної та прикладної науки і стало основою для великого напрямку в математиці, яким є опуклий аналіз.

Основні поняття опуклого аналізу сформовані ще у вісімнадцятому столітті. Створення і подальший його розвиток опирається на роботи таких вчених як Г.Мінковський, Я.Штейнер, Е.Гелі, К.Каратеодорі, В.Бляшке, В.Фенхель, Р.Рокафеллар та інших.

Крім класичного визначення опуклості в математичному аналізі використовуються багато інших різновидів опуклості. Одним з найбільш відомих є поняття псевдоопуклості (плюрісубгармонійності) в теорії функцій багатьох комплексних змінних. Теореми існування для диференціальних операторів в частинних похідних з постійними коефіцієнтами теж пов’язані з різними умовами опуклості, які накладаються на ці оператори. Отже встановлення умов існування розв’язків диференціальних рівнянь також можна розглядати як гілку теорії опуклості.

Варто також згадати ряд теорем про відокремлення і їх зв'язок з теоремою Гана-Банаха, які знайшли своє завершення в функціональному аналізі. Опуклість відіграє важливу роль в лінійному та нелінійному функціональному аналізі, в теорії дійсних та комплексних рівнянь Монжа-Ампера, в базових нерівностях класичного аналізу та в ізопериметричних нерівностях.

Поняття опуклості тісно пов'язане і з іншими галузями математики та науки.

Все частіше в математичному аналізі, теорії диференційних включень, математичній економіці, біології, томографії знаходять багато застосувань дослідження різних аспектів узагальнено опуклих множин. Особливо корисними виявилися вони при вивченні геометричних проблем комплексного аналізу. Такі узагальнення стали можливими завдяки зовнішнім (через доповнення до множини) означенням опуклості та використанням аксіоматичних означень. Узагальнено опуклі множини та многозначні відображення, які тут виникають, пов'язують в один вузол проблеми геометрії, комплексного та опуклого аналізу. Основною метою даної роботи є дослідження властивостей узагальнено опуклих множин в дійсних і комплексних евклідових просторах та неперервних відображень.

Лінійна опуклість при $n = 2$ вперше була введена в 1935 році в роботі Генріха Беенке та Ернста Пешля. Особливо активне застосування ряду узагальнено опуклих (лінійно опуклих та сильно лінійно опуклих) множин в багатовимірному комплексному аналізі почалося з шістдесятих років минулого століття завдяки піонерським роботам А. Мартіно та Л. А. Айзенберга та їх послідовників. Мартіно та Айзенберг дали означення лінійної опуклості, які частково відрізнялися одне від одного, але, якщо не обмежуватись зв'язними компактами та областями, то з означення даного Л.Айзенбергом одержимо одну зв'язну компоненту множини, яка задовольняє означенню Мартіно.

За останні шістдесят років дослідження узагальнено опуклих множин в комплексному і гіперкомплексному аналізі, та їх застосування активно розвивалися в роботах представників красноярської школи Л. А. Айзенберга, Б.С.Зінов'єва, О.П. Южакова та В.П. Кривоколеска, Л.Я. Макарової, С.В. Знаменського , А.К.Ціха , Г. Худайберганова , та шведської школи Л. Хьормандера , Х. Кіселмана , М. Пассаре, М. Андерсона, Р. Сігурдсона та інших. В останні роки сюди добавилися дослідження вчених Ягелонського університету (Польща) В.Звонека, Л.Косинського, М. Ярніцкого та їх колег Л.Лемперта, Н.Ніколова, П.Пфлюга. Використання узагальнено опуклих множин дозволило розв'язати низку важливих задач комплексного аналізу.

В теорії відображень важливими є питання, пов'язані з побудовою теорії множин моногенності неперервних функцій в одновимірному та багатовимірному комплексному аналізі, поліноміальними наближеннями в комплексній області, застосуваннями степеня відображення до опису поведінки різних класів неперервних відображень, характеристики кратних точок відображень, питаннями існування функцій Морса на топологічних многовидах.

В дисертаційній роботі зокрема досліджено декілька нових класів узагальнено опуклих множин (слабко m-опуклі та слабко m-напівопуклі множини). Кожен з цих класів задовольняє аксіому опуклості: перетин довільного набору множин з такого класу теж належить до цього класу.

Отримано узагальнення теореми Ю.Б.Зелінського про характеристику компакта через його спряжену множину на слабко 1-опуклі компакти, досліджено характеристики слабко m-опуклих відкритих множин.

Показано, що аналогічної до відомої класифікації для напівопуклих множин з гладкою межею сподіватися не можна.

Встановлено, що слабко (n-1)-опукла відкрита множина, яка не є (n-1)-опуклою складається не менше ніж з трьох компонент. Подібні результати отримано і для інших класів узагальнено опуклих множин.

Побудовано ланцюжок послідовно вкладених класів узагальнено опуклих множин і вивчено деякі їх властивості.

Досліджено узагальнено опуклі оболонки ряду сімей множин. Повністю розв'язана задача поставлена Ю.Б.Зелінським для сім'ї куль одного радіуса в тривимірному евклідовому просторі. При цьому показано, що якщо центри цих куль знаходяться на деякій сфері, то така задача не має розв'язку. При вільному розміщенні центрів куль задача розв'язана повністю. Встановлено, що чотирьох куль фіксованого радіуса необхідно і досить для створення тіні в заданій точці тривимірного евклідового простору. Отримано точні оцінки для задач про тінь для сім'ї куль одного радіуса в комплексному та гіперкомплексному евклідових просторах. При цьому істотно покращені відомі до цього оцінки. Встановлено оцінки знизу і зверху необхідної кількості куль різного радіуса, що забезпечать тінь дотичну до сфери.

Досліджена можливість побудови власного відображення постійної непарної кратності на відкритій кулі евклідового простору $\mathbb{R}^n$ за умови, що на межі кулі відображення є гомеоморфізмом. Це продовжує дослідження Й.Міодушевського. Як частковий випадок з цих результатів випливає існування шуканого в питанні поставленому Ю.Б.Зелінським строго трикратного відображення внутрішності кулі, якщо абсолютна величина степеня відображення на сфері (межі кулі) дорівнює одиниці. Також досліджена можливість побудови неперервного гладкого відображення класу C^{∞} постійної непарної кратності відкритої кулі евклідового простору $\mathbb{R}^n$ в себе, яке є неперервним продовженням гомеоморфного відображення межі кулі.

Результати дисертаційної роботи є новими і полягають в наступному:

1. Виділено нові класи узагальнено опуклих множин (слабко m–опуклі та слабко m-напівопуклі множини) та досліджено їх властивості.

2. Розв'язано задачу про тінь для сімей куль постійного радіуса з вільно розташованими центрами в тривиміному евклідовому просторі.

3. Встановлено, що задача про тінь для сімей куль постійного радіуса з центрами на фіксованій сфері в розмірності 3 не має скінченного розв'язку.

4. Доведено, що три кулі, що попарно не перетинаються, завжди утворюють 1-опуклу множину в тривимірному евклідовому просторі (для будь якої точки простору, що лежить в доповнені до об'єднання куль, існує пряма, що проходить через цю точку і не перетинає жодної з цих куль).

5. Побудовані відображення фіксованої кратності внутрішностей куль в себе які будуть гомеоморфізмами на межі . Показано, що такі відображення можна вибрати довільного порядку гладкості.

Одержані результати мають застосування в опуклому та комплексному аналізі, теорії відображень, а також можуть бути використані в теорії апроксимації, при дослідженні екстремальних задач та у застосуваннях до суміжних галузей математики, що використовують методи аналізу, наприклад, інтегральна геометрія, в томографії і стереології.

Ключові слова: Евклідів простір, (гіпер)комплексний простір, сфера, куля, опуклість, відкрита множина, компакт, узагальнена опуклість, неперервне відображення.

ABSTRACT

Dakhil H.K. The shadows problems and mappings of fixed multiplisity. – Manuscript.

Candidate's thesis on Physics and Mathematics, speciality 01.01.01 – mathematical analysis. – Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, 2017.

The thesis is devoted to the investigation of geometric and topological properties of generalized convex sets and generalized convex hulls for some families of sets in real, complex and hypercomplex Euclidean space, and the existence of balls mappings of constant mutiplisity. The classical notion of convexity which is very simple and obvious at a first glance, plays an important part in various areas of a fundamental and applied science and is the basis for a major trend in mathematics, which is convex analysis.

Basic concepts of convex analysis formed in the eighteenth century. A creating and a further development of convex analysis are based on the works of such scientists as H. Minkowski, Ya. Steiner, E. Helly, K. Caratheodory, V. Blaschke, W. Fenchel, R. Rockafellar and others.

In addition to the classical definition of convexity in mathematical analysis many other types of convexity are used. One of the best known is the concept of pseudoconvexity in the theory of functions of several complex variables. The existence theorems for differential operators in partial derivatives with constant coefficients are also associated with various conditions of convexity which are imposed on these operators. So the establishment of conditions of the existence of solutions of differential equations can also be considered as a branch of the theory of convexity.

It is also worth mentioning a number of theorems on a separation and their connection with the Hahn-Banach theorem which found its completion in the functional analysis. Convexity is important in the linear and nonlinear functional

analysis, in the theory of real and complex Monge-Ampere equations, in basic inequalities of classical analysis and in isoperimetric inequalities.

The notion of convexity is closely connected with other branches of mathematics and science.

Increasingly, in mathematical analysis, theory of differential inclusions, mathematical economics, biology, tomography there are found many applications of a research of various aspects of generalized convex sets. Especially these applications are helpful in the study of geometric problems of complex analysis. Such generalizations were made possible by the outside (through a complement to the set) definition of convexity and by using of axiomatic definitions. Generalized convex sets and multivalued mappings that arise here, connect in one node problems of geometry, complex and convex analysis. The main purpose of this thesis is to study the properties of generalized convex sets in real and complex Euclidean spaces and continuous mappings.

Linear convexity for n = 2 was first introduced in 1935 in the work of Heinrich Behnke and Ernst Peschl. Particularly an active application of a row of generalized convex (linear convex and strongly linear convex) sets in multidimensional complex analysis began in the sixties years of the last century thanks to the pioneering works of A. Martino and L. Aisenberg and their followers. Aisenberg and Martino gave the definitions of linear convexity which partially differed from one another but when we do not restrict of the connected compact sets and domains then from the definition of L. Aisenberg we obtain a connected component of the set that satisfies the definition of A. Martino.

Over the last sixty years a research of generalized convex sets in the complex and hypercomplex analysis and its applications developed actively in the work of L. A. Aisenberg, B.S. Zinoviev, A.P. Yuzhakov, V.P. Kryvokolesko, L.Ya. Makarova, S.V. Znamenskii, A.K. Tsikh, G. Khudayberganov and representatives of Swedish school L. Hormander, C. Kisselman, M. Passare, M. Anderson, R. Sigurdsson and others. In recent years researches of scientists of Jagiellonian University (Poland) were added here. These are the works of V.

Zvonek, L. Kosinski, M. Yarnicki and their colleagues L. Lempert, N. Nikolov, P. Pflug. Using of generalized convex sets allowed to solve a number of important problems of complex analysis.

In the theory of mappings there are important the questions related to the construction of the theory of monogenic sets of continuous functions in one-dimensional and multidimensional complex analysis, polynomial approximations in a complex domain, applications of a mapping degree to a desription of a behavior of different classes of continuous mappings, a characteristic of multiple points of mappings, questions of the existence of Morse functions on topological manifolds.

Several classes of generalized convex sets are studied. Each of these classes satisfies the axiom of convexity; the intersection of arbitrary subsets of this class also belongs to this class.

A generalization of the Yu. Zelinskii theorem on weakly 1-convex compacts is received. Characteristics of weakly m-convex open sets are studied.

It is shown that a similar classification to the well known classification of the semiconvex sets with a smooth boundary doesn't exist.

It is established that a weakly (n-1)-convex open set which is not a (n-1) - convex set consists of at least three components. Similar results were also obtained for other classes of generalized convex sets.

We built a chain sequence of nested classes of generalized convex sets and study some of their properties.

We examine the convex hull of families of sets. The problem posed by Yu. Zelinskii for family balls of the same radius in three-dimensional Euclidean space was completely solved. It is shown that in the case when the centers of the balls are on some sphere, such problem doesn't have the solution. When we have a free placement of centers of balls the problem is solved completely. It is established that the four balls of fixed radius are necessary and sufficient to create a shadow in a given point of three-dimensional Euclidean space. Exact estimates for the problems of shadow for families of balls of the same radius in the complex and hypercomplex Euclidean space are obtained. This significantly improved known assessments before that. We found lower and upper estimates of the required number of balls of different radii, which provide the shadow that is tangent to the sphere.

It is studied a possibility of a constructing of the proper mapping of constant odd multiplicity on the open ball in Euclidean space $\mathbb{R}^n$ with the condition that the restriction of the mapping on the ball's boundary is a homeomorphism. These investigations continue Y.Mioduszevskii's results. As a special case of these results we obtained the partial answer to the one question of Yu. Zelinskii. It also investigated the possibility of constructing a continuous smooth mapping of class C^∞ with a constant odd multiplicity of an open ball of Euclidean space $\mathbb{R}^n$ in itself which is a continuous continuation of a homeomorphic mapping of a ball's boundary.

The results of the thesis are new and are as follows:

1. There were identified new classes of generalized convex sets (weakly m-convex and weakly m-semiconvex sets) and studied their properties.

2. There was solved the problem of shadow for families of balls of a constant radius with freely located centers in three-dimensional Euclidean space.

3. There was found that the problem of shadow for families of balls of a constant radius with centers on a fixed sphere in three-dimensional case doesn't have a finite solution.

4. There was proved that the three balls that do not itersect pairwise always form 1-convex set in three-dimensional Euclidean space (for any point of a space that lies in a complement to the union of balls, there exists the line passing through this point and does not inersect any of the balls).

5. There were built mappings of a fixed multiplicity of interiors of balls which will be homeomorphisms on the boundary. There was shown that such mappings can be choose of any order of smoothness.

Obtained results are used in convex and complex analysis, in the theory of mappings and also can be used in approximation theory, in the study of extremal problems and can be apply to the related branches can be apply to the related branches of mathematics, for example, integral geometry, tomography and stereology.

Key words: Euclidean space, (hyper)complex space, sphere, ball, open set, compact, `convexity, generalized convexity, continuous mapping.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Зелинский Ю. Б., Выговская И. Ю., Дакхил Х. К. Задача о тени и смежные задачи // Proceedings int. geometry center. – 2016, Vol. 9, № 3-4. – С. 50 – 58.
2. Зелинский Ю. Б., Выговская И. Ю., Дакхил Х. К. Задача о тени для шаров фиксированного радиуса // Український математичний вісник. 2016 – Т. 13, №4. – С.599 – 603.
3. Зелинский Ю. Б., Дакхил Х. К. Об одной задаче о тени для шаров фиксированного радиуса // Труды ИПММ НАН Украины. – 2016, Т.30. – С.75 – 81.
4. Zelinskii Yu. B., Dakhil H. K. On mappings of constant multiplicity // Advances in Analysis. – 2017. – Vol. 2, № 2. – P. 105 – 107.
5. Дакхіл Х. К. Про гладкі відображення постійної кратності // Збірник праць Інституту математики НАНУ. – 2017. – Т. 14, № 1. – С. 140 – 146.
6. Дакхіл Х. К., Зелінський Ю. Б., Кліщук Б. А. Про слабко *m*–опуклі множини // Доповіді НАНУ. – 2017. – № 4. – С. 3 – 6.
7. Zelinskii Yu. B., Dakhil H. K., Vygovskaya I. Yu. The problem of shadow for balls with fixed radius // Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – Vol. 224, № 4. – P. 603 – 606.
8. Zelinskii Yu. B., Dakhil H. K., Klishchuk B. A. On weakly m-convex sets // arXiv preprint arXiv:1703.06785. – 7 p.

Тези конференцій:

9. Виговська І. Ю., Доля Д. С., Дакхіл Х. К. Про відображення кулі постійної кратності // Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”, 24 – 27 лютого 2016 р., Ворохта: Тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2016. – С. 66 – 67.

10. Виговська І. Ю., Дакхіл Х. К. До задачі про тінь // XI літня математична школа "Алгебра, Топологія, Аналіз", 1 – 14 серпня 2016 р., Одеса: Тези доповідей. – С. 47.

11. Виговська І. Ю., Дакхіл Х. К. Про гладкі відображення постійної кратності // Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”, 22 – 25 лютого 2017 р., Ворохта: Тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2017. – С. 59 – 61.

12. Дакхіл Х. К. Задача про тінь // XV Міжнародна конференція студентів, аспірантів та молодих вчених "Шевченківська весна 2017: Математика, Статистика та Механіка", 04 – 08 квітня 2017 р. – С. 18 – 19.

13. Дакхіл Х. К. Задача про тінь для сім’ї куль сталого радіуса // Міжнар. конф. “Теорія наближення функцій та її застосування”, 28 травня – 3 червня 2017 р., м. Слов’янськ– С. 55.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел,

$\mathbb{Z}$ – множина цілих чисел,

$\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел,

$\mathbb{C}$ – множина комплексних чисел,

$\mathbb{H}$ – множина гіперкомплексних чисел,

$\mathbb{R}^n$ – n-вимірний евклідів простір, $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$,

$\mathbb{C}^n$ – n-вимірний евклідів комплексний простір, $\mathbb{C}^1 = \mathbb{C}$,

$\mathbb{H}^n$ – n-вимірний евклідів гіперкомплексний простір, $\mathbb{H}^1 = \mathbb{H}$,

$|z|$ – модуль числа $z \in \mathbb{C}$,

$\overline{z}$ – число спряжене до числа $z \in \mathbb{C}$,

$\langle z, w \rangle = z_1 w_1 + z_2 w_2 + \ldots + z_n w_n$ – скалярний добуток елементів z, $w \in \mathbb{C}^n$,

$x \in A$ ($x \notin A$) – елемент x належить (не належить) множині A,

S^n – n-вимірна сфера,

$S^n(x,r)$ – n-вимірна сфера з центром в точці x і радіусом r,

$\overline{E}$ – замикання множини E,

$Int\, E$ – внутрішність множини E,

∂E – межа множини E, $\partial E = \overline{E} \setminus Int\, E$,

$conv\, E$ – опукла оболонка множини E,

$lconv\, E$ – лінійно опукла оболонка множини E,

$conv_m\, E$ – m- опукла оболонка множини E,

$sconv_m\, E$ – m- напівопукла оболонка множини E,

$B_r(x)$ – відкрита куля з центром в точці x і радіусом r,

Δ_n – n-вимірний симплекс,

$f : M \to N$ – відображення f топологічного простору M в топологічний простір N,

$f^{-1}(E)$ – прообраз множини E при відображенні f,

$\deg f$ – степінь відображення f,

E^* – множина спряжена до множини E,

E^{**} – подвійна спряжена множина до множини E, $E^{**} = ((E^*)^*)$,

E° – поляра до множини E,

$G'(n,m)$ – грассманів многовид усіх m-вимірних площин в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$,

$G(n,m)$ – грассманів многовид усіх m-вимірних площин в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, що проходять через одну точку.

Вступ

Актуальність теми. Класичне поняття опуклості, яке на перший погляд дуже просте і очевидне, відіграє важливу роль в різних областях фундаментальної та прикладної науки і стало основою для великого напрямку в математиці, яким є опуклий аналіз.

Основні поняття опуклого аналізу сформовані ще у вісімнадцятому столітті. Створення і подальший його розвиток опирається на роботи таких вчених як Г. Мінковський, Я. Штейнер, Е. Гелі, К. Каратеодорі, В. Бляшке, В. Фенхель, Р. Рокафеллар та інших.

Крім класичного визначення опуклості в математичному аналізі використовуються багато інших різновидів опуклості. Одним з найбільш відомих є поняття псевдоопуклості (плюрісубгармонійності) в теорії функцій багатьох комплексних змінних. Теореми існування для диференціальних операторів в частинних похідних з постійними коефіцієнтами теж пов’язані з різними умовами опуклості, які накладаються на ці оператори. Отже встановлення умов існування розв’язків диференціальних рівнянь також можна розглядати як гілку теорії опуклості.

Варто також згадати ряд теорем про відокремлення і їх зв'язок з теоремою Гана-Банаха, які знайшли своє завершення в функціональному аналізі. Опуклість відіграє важливу роль в лінійному та нелінійному функціональному аналізі, в теорії дійсних та комплексних рівнянь Монжа-Ампера, в базових нерівностей класичного аналізу та в ізопериметричних нерівностях.

Поняття опуклості тісно пов’язане і з іншими галузями математики та науки.

Все частіше в математичному аналізі, теорії диференційних включень, математичній економіці, біології, томографії знаходять багато застосувань дослідження різних аспектів узагальнено опуклих множин. Особливо корисними виявилися вони при вивченні геометричних проблем комплексного аналізу. Такі узагальнення стали можливими завдяки зовнішнім (через доповнення до множини) означенням опуклості та використанням аксіоматичних означень. Узагальнено опуклі множини та многозначні відображення, які тут виникають, пов'язують в один вузол проблеми геометрії, комплексного та опуклого аналізу. Основною метою даної роботи є дослідження властивостей узагальнено опуклих множин в дійсних і комплексних евклідових просторах та неперервних відображень.

Лінійна опуклість при $n = 2$ вперше була введена в 1935 році в роботі Генріха Беенке та Ернста Пешля [72]. Особливо активне застосування ряду узагальнено опуклих (лінійно опуклих та сильно лінійно опуклих) множин в багатовимірному комплексному аналізі почалося з шістдесятих років минулого століття завдяки піонерським роботам А. Мартіно та Л. А. Айзенберга [1-4, 79, 80] та їх послідовників. Мартіно та Айзенберг дали означення лінійної опуклості, які частково відрізнялися одне від одного, але, якщо не обмежуватись зв'язними компактами та областями, то з означення даного Л.Айзенбергом одержимо одну зв'язну компоненту множини, яка задовольняє означенню Мартіно.

За останні шістдесят років дослідження узагальнено опуклих множин в комплексному і гіперкомплексному аналізі, та їх застосування активно розвивалися в роботах представників красноярської школи Л. А. Айзенберга, Б.С.Зінов'єва, О.П. Южакова та В.П. Кривоколеска, Л.Я. Макарової, С. В. Знаменського , А. К.Ціха , Г. Худайберганова, та шведської школи Л. Хьормандера , Х. Кіселмана , М. Пассаре, М. Андерсона, Р. Сігурдсона та інших [38, 39-41, 45, 46, 63-66, 70, 71,73, 75-77]. В останні роки сюди добавилися дослідження вчених Ягелонського університету (Польща) В. Звонека, Л. Косинського, М. Ярніцкого та їх колег Л. Лемперта, Н. Ніколова, П. Пфлюга [74,78, 82]. Використання узагальнено опуклих множин дозволило розв'язати низку важливих задач комплексного аналізу, на деяких з яких зупинимося нижче в огляді літератури.

Одним з центрів розвитку застосувань топологічних та геометричних методів до потреб математичного аналізу є Інститут математики Національної Академії наук України. Тут в роботах Ю.Ю. Трохимчука, П.М. Тамразова, А.В. Бондаря, Ю.Б. Зелінського, В.В. Шарка, С.І.Максименка [6, 8, 9, 13, 20-31, 33, 58, 60-62, 69] вивчалися питання, пов'язані з побудовою теорії множин моногенності неперервних функцій в одновимірному та багатовимірному комплексному аналізі, поліноміальними наближеннями в комплексній області, застосуваннями степеня відображення до опису поведінки різних класів неперервних відображень, характеристики кратних точок відображень, питаннями існування функцій Морса на топологічних многовидах.

В роботах Ю. Б. Зелінського та його учнів В. Л. Мельник, О.І. Герасіна, І. В. Момот, М. В. Ткачука, Б. А. Кліщука, М.В. Стефанчук [14, 15, 31, 33, 36, 48, 58, 59, 83-89, 94] закладено основи лінійно опуклого аналізу, який є комплексним аналогом дійсного опуклого аналізу. Фундаментом для його побудови стали лінійно опуклі множини та їх узагальнення.

Розв'язанню відкритих проблем узагальнено опуклих множин та відображень постійної кратності присвячена запропонована дисертаційна робота.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана на кафедрі математичного аналізу механіко математичного факультету Київського національного університету імені Т.Г.Шевченка згідно з темами досліджень Інституту математики НАНУ „Алгебраїчно-аналітичні та топологічні методи комплексного аналізу" (номер держреєстрації 0111U001026), „Метричні та геометричні задачі теорії аналітичних і субгармонічних функцій та множин" (номер держреєстрації 0116U003060).

Мета і задачі дослідження.

Більшість задач, що досліджуються в роботі природно повстали з намагань знайти критерії належності точки евклідового простору до узагальнено опуклої оболонки деякої сім'ї множин. Доцільно застосовувати для узагальнено опуклих множин апарат досліджень, який подібний до поляри дійсного опуклого аналізу або спряжених множин комплексного лінійного опуклого аналізу. Побудова такого апарату зв'язана з необхідністю подолання наступного ускладнення: в випадку гіперплощин грасманів многовид гіперплощин в евклідовому просторі буде многовидом тієї ж розмірності, як у дійсному, комплексному так і в гіперкомплексному випадках. Це істотно спрощує побудову двоїстості. В загальному ж випадку ми розглядаємо опуклість породжену площинами корозмірності більшої від одиниці. Тоді розмірності грассманових многовидів, які породжують ці площини, більші від розмірності вихідного простору. Для побудови двоїстості необхідно усвідомити, які підмножини загального грассманового многовиду треба прийняти за еквіваленти площин евклідового простору.

Метою роботи є

- дослідження деяких класів узагальнено опуклих множин в дійсних, комплексних та гіперкомплексних евклідових просторах,

- розв’язання ряду варіантів задачі про тінь
- вивчення відображень кулі постійної кратності.

Основними задачами дослідження є:

- вивчення властивостей узагальнено опуклих множин,
- вивчення різних узагальнено опуклих оболонок ряду сімей множин (куль, опуклих множин з непорожньою внутрішністю),
- дослідження питань існування неперервних відображень постійної кратності.

Об’єктом дослідження є:

узагальнено опуклі множини в дійсних, комплексних та гіперкомплексних евклідових просторах та неперервні відображення евклідової кулі.

Предметом дослідження є:

геометричні та топологічні властивості сімейств множин та зв’язки кратних відображень.

Методи дослідження. При розв’язанні поставлених задач в дисертаційній роботі використовуються загальні методи комплексного та опуклого аналізу, теорії відображень та топології.

Наукова новизна одержаних результатів.

Результати роботи є новими і полягають в наступному:

1. Виділено класи узагальнено опуклих множин (слабко m-опуклі та слабко m-напівопуклі множини) та досліджено їх властивості.

2. Розв’язано задачу про тінь для сімей куль постійного радіуса з вільно розташованими центрами.

3. Встановлено, що задача про тінь для сімей куль постійного радіуса з центрами на фіксованій сфері в розмірності 3 не має скінченного розв’язку.

4. Доведено, що три кулі, що попарно не перетинаються, завжди утворюють 1-опуклу множину в тривимірному евклідовому просторі.

5. Побудовані відображення фіксованої кратності внутрішностей куль в себе, які будуть гомеоморфізмами на межі .

Практичне значення одержаних результатів.

Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Результати роботи та методи їх отримання можуть бути використані при вивченні питань:

1) комплексно лінійного аналізу,
2) теорії відображень,
3) геометричних методів комплексного аналізу та у застосуваннях до суміжних галузей математики, що використовують методи аналізу та інтегральної геометрії: томографії, стереології.

Основний внесок здобувача.

Визначення напрямку дослідження і загальна постановка задач належить науковому керівникові – доктору фізико-математичних наук, професору Ю. Б. Зелінському. Всі результати, що ввійшли в дисертацію, отримані здобувачем самостійно. З робіт [10-12, 19, 34, 35, 37, 91-93], які опубліковані сумісно, в дисертацію включено лише особисті результати автора. Формулювання деяких робочих гіпотез в них належать співавторам. Доведення всіх основних результатів дисертації, які виносяться на захист, проведено особисто автором.

Апробація роботи.

Основні результати дисертації доповідались на:

- Всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу». – Ворохта, 24.02–27.02.2016.
- XI літній математичній школі "Алгебра, Топологія, Аналіз", Одеса, 1 – 14.08.2016.
- Всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу». – Ворохта, 22.02–25.02.2017.
- XV Міжнародній науково-практичній конференції студентів, аспірантів і молодих вчених «Шевченківська весна – 2017: математика, статистика та механіка» (м. Київ, 4 – 6 квітня 2017р.).
- Міжнародній конференції "Теорія наближення функцій та її застосування" (28 травня – 3 червня 2017 року, м. Слов'янськ).
- Наукових семінарах з комплексного аналізу в відділі комплексного аналізу та теорії потенціалу при Інституті математики НАН України (керівник: доктор фізико-математичних наук, професор Зелінський Ю.Б.).
- Науковому семінарі відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник: доктор фізико-математичних наук, професор Романюк А.С.).
- Науковому семінарі кафедри математичного аналізу механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівник: доктор фізико-математичних наук, професор Шевчук І.О.)

Публікації.

Основні результати дисертації опубліковані в тринадцяти роботах [10-12, 16-19, 34, 35, 37, 91-93] з яких п’ять (одна без співавторів) у фахових виданнях з переліку, що затверджений ВАК України, одна входить в науково метричну базу Scopus, в яких слід опублікувати результати дисертації, одна публікація в Працях міжнародного геометричного центру, решта - тези конференцій.

Структура та обсяг дисертації.

Дисертація складається з анотації, змісту, вступу, чотирьох розділів, висновків і списку використаної літератури (97 назв) загальним обсягом 128 сторінок машинопису.

Нумерація.

Нумерація розділів роботи одноцифрова, підрозділів — двоцифрова (наприклад 3.2 — це другий підрозділ третього розділу). Нумерація формул та тверджень трицифрова, де перша цифра вказує на номер розділу, друга на номер підрозділу, третя на порядок в підрозділі. Нумерація тверджень окрема для лем, теорем і наслідків та інш.

Список літератури подано в алфавітному порядку, спочатку україномовні або російськомовні видання, потім іншомовні.

Подяки. Користуючись нагодою, висловлюю щиру і глибоку вдячність моєму науковому керівнику Зелінському Юрію Борисовичу за постановку задач, постійну увагу, підтримку і допомогу в роботі, Виговській І.Ю. та Кліщуку Б.А. за допомогу в дослідженнях, членам семінару кафедри математичного аналізу механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка та членам семінару з комплексного аналізу Інституту математики НАН України за цінні вказівки та поради.

РОЗДІЛ 1
Допоміжні відомості, огляд літератури та основних результатів дисертації

1.1. Опуклість. Основні властивості

Нагадаємо, що можна дати два означення опуклості множини в евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, що задають близькі але водночас різні класи множин. Наведемо традиційне означення.

Означення 1.1.1. *Множина* $E \subset \mathbb{R}^n$ *називається опуклою, якщо разом з двома своїми точками вона містить і відрізок, що їх з'єднує.*

Це означення еквівалентне зв'язності перетинів підмножини з довільною дійсною прямою. Поруч із цим означенням існує поняття лінійної опуклості.

Означення 1.1.2. *Множина* $E \subset \mathbb{R}^n$ *називається лінійно опуклою, якщо через будь-яку точку доповнення до неї проходить гіперплощина, яка дану множину не перетинає.*

Інакше кажучи множина лінійно опукла, якщо доповнення до неї є об'єднанням гіперплощин. Далі ми розглянемо деякі аналоги цього означення в дійсних (комплексних або гіперкомплексних) евклідових просторах $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$ або $\mathbb{H}^n$).

Під прямими, m-площинами та гіперплощинами в евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$ або $\mathbb{H}^n$) далі ми розуміємо афінні підпростори в $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$ або $\mathbb{H}^n$) відповідних розмірностей $1, m,$ та $n-1$.

Найбільш загальний аксіоматичний підхід до визначення опуклості (кажуть, що сімейство множин складається з опуклих множин, якщо перетин довільної їх кількості належить цьому ж сімейству [56]) дозволяє назвати опуклими ряд екзотичних класів множин, які не асоціюються зі звичним поняттям опуклості, наприклад, множину всіх множин або сімейство всіх замкнутих підмножин деякого топологічного простору.

Питання аналізу часто приводять до інших сімейств множин, які задовольняють цю аксіому опуклості. Далі ми розглянемо ряд задач, вирішення яких вимагає залучення різних узагальнень поняття опуклості.

1.2. Узагальнена опуклість і задача про тінь

Наступні означення, введені Ю.Б.Зелінським [20, 27] узагальнюють означення 1.1.2.

Означення 1.2.1. *Скажемо, що множина* $E \subset \mathbb{R}^n$ *m-опукла відносно точки* $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$*, якщо знайдеться m-вимірна площина L, така що* $x \in L$ *і* $L \cap E = \varnothing$.

Означення 1.2.2. *Скажемо, що множина* $E \subset \mathbb{R}^n$ *m-опукла, якщо вона m-опукла відносно кожної точки* $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$.

Обидва наведені означення задовольняють аксіому опуклості: перетин кожної підмножини таких множин теж задовольняє означенню.

Для довільної множини $E \subset \mathbb{R}^n$ ми можемо розглянути мінімальну *m*-опуклу множину $conv_m\, E$, що містить E, і назвати її *m-оболонкою множини E*.

В роботі [31] отримано повний розв’язок наступної задачі про тінь, вперше розглянутої Г.Худайбергановим [20,27, 65].

Задача (про тінь). *Якої мінімальної кількості k замкнутих куль B_i $i=1,2,\ldots,k$, що попарно не перетинаються, з центрами на сфері S^{n-1} в евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ і радіуса меншого від радіуса сфери досить щоб будь-яка пряма, що проходить через центр сфери, перетинала хоча б одну з цих куль?*

Іншими словами цю задачу можна переформулювати так: коли центр сфери буде належати до 1-опуклої оболонки $conv_1 \cup_i B_i$ об'єднання мінімальної кількості вибраних куль?

Г.Худайберганов довів [65] при $n = 2$, що двох кругів достатньо для створення тіні в центрі кола. Наведений ним розв’язок задачі в вищих розмірностях був помилковим. В [31] отримано повний розв’язок цієї задачі. Тут показано, що для створення тіні необхідно і достатньо $(n + 1)$-ї кулі.

Теорема 1.2.1 [31]. *Для того щоб обрана точка a в n-вимірному евклідовому просторі при $n \geq 3$ належала до 1-опуклої оболонки $conv_1 \cup_i B_i$ сімейства відкритих (замкнених) куль з центрами на сфері $S^{n-1}(a,r)$, які дану точку не містять і попарно не перетинаються, необхідно і достатньо $n + 1$ кулі.*

1.3. Суміжні задачі

Розв’язок задачі про тінь індукував ряд близьких задач, вирішенням яких в останні два роки займалася група математиків в Інституті математики НАН України. Перерахуємо ці задачі.

Задача 1. Як змінитися необхідна мінімальна кількість куль, якщо центри цих куль не прив'язані до сфери?

Задача 2. Як змінитися результат задачі 1, якщо замість куль розглянути сімейство опуклих множин, отриманих з деякої опуклої множини з непорожною внутрішністю за допомогою заданої групи перетворень?

Задача 3. Якої мінімальної кількості замкнутих куль, що попарно не перетинаються, з центрами на сфері S^{n-1} і радіуса меншого від радіуса сфери досить щоб будь-який промінь, що проходить через центр сфери, перетинав хоча б одну з цих куль?

Задача 4. Розглянути аналогічні задачі в комплексному і гіперкомплексному евклідовому просторі.

Задача 5. Задача про тінь не тільки для центру сфери S^{n-1}, а для всіх точок кулі, обмежених сферою, які не належать до об'єднання обраних куль.

Задача 6. Задача про тінь для точок сфери S^{n-1}, які не належать об'єднанню обраних куль, щодо прямих дотичних до сфери.

Задача 7. Задача про тінь для куль фіксованого радіуса.

Задача 8. Дослідити задачу аналогічну задачі 2 при зміні групи перетворень.

Задача 9. Задача про тінь для сім’ї опуклих множин, які можуть попарно дотикатися або перетинатися між собою.

Задача 10. Дослідити аналогічні задачі відносно слабкої m-опуклості та її аналогів.

1.4. Огляд літератури

Розглянемо сучасний стан отриманих відповідей на перелічені задачі. Наступний результат дає повну відповідь на задачу 1.

Теорема 1.4.1 [88]. *Для того щоб обрана точка в n-вимірному евклідовому просторі при $n \geq 2$ належала до 1-опуклої оболонки $conv_1 \cup_i B_i$ сімейства відкритих (замкнених) куль, які дану точку не містять і попарно не перетинаються, необхідно і достатньо n куль.*

Варіант задачі про тінь при $n = 3$, коли центри куль розташовані на еліпсоїді обертання, розглянута в [59]. Показано, що якщо відношення більшої осі еліпса до меншої більше або дорівнює $2\sqrt{2}$, то для створення тіні досить трьох куль.

Повна відповідь на задачу 2 міститься в наступному результаті.

Теорема 1.4.2 [88]. *Для того щоб обрана точка в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 2$ належала до 1-оболонки $conv_1 \cup_i D_i$ сімейства замкнутих множин D_i, що попарно не перетинаються, отриманого з заданої опуклої множини D з непорожньою внутрішністю за допомогою групи перетворень, що складається з рухів і гомотетій, необхідно і достатньо n елементів сімейства .*

Якщо групу перетворень зменшити, то кількість елементів сімейства, необхідних для створення тіні в центрі сфери може збільшитися. Хоча в

[33] показано, що результат не зміниться, якщо з групи рухів виключити повороти.

Означення 1.4.1. *Скажемо, що множина* $E \subset \mathbb{R}^n$ *m-напівопукла щодо точки* $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$*, якщо знайдеться m-вимірна напівплощина P, така що* $x \in P$ *і* $P \cap E = \varnothing$*.*

Означення 1.4.2. *Скажемо, що множина* $E \subset \mathbb{R}^n$ *m-напівопукла, якщо вона m-напівопукла щодо кожної точки* $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$*.*

Легко переконатися, що і ці означення задовольняють аксіому опуклості, і ми теж можемо будувати *m*-напівопуклі оболонки $sconv_m\ E$ множин згідно з цими означеннями.

Для задачі 3 отримана оцінка зверху в розмірності три. Знаходження точної оцінки залишається відкритою проблемою. Невідомі навіть оцінки зверху для розмірностей більше трьох.

Теорема 1.4.3. [89]. *Для того щоб центр двовимірної сфери в тривимірному евклідовому просторі* $\mathbb{R}^3$ *належав до* 1*-напівопуклої оболонки сімейства відкритих (замкнених) куль радіуса, що не перевищує (меншого) радіуса сфери і з центрами на сфері досить десяти куль.*

Якщо об'єднати питання задач 1 і 3, то відома точна оцінка.

Теорема 1.4.4 [88]. *Для того щоб обрана точка в n-вимірному евклідовому просторі* $\mathbb{R}^n$ *при* $n \geq 2$ *належала до* 1*-напівопуклої оболонки сімейства відкритих (замкнених) куль, які дану точку не містять і попарно не перетинаються, необхідно і достатньо* $n + 1$ *кулі.*

Наступний результат показує, що в попередній теоремі можна замінити кулі опуклими тілами з непорожньою внутрішністю.

Теорема 1.4.5 [88**].** *Для того щоб обрана точка в n-вимірному евклідовому просторі* $\mathbb{R}^n$ *при* $n \geq 2$ *належала до* 1*-напіввипуклої оболонки сімейства замкнутих множин, що попарно не перетинаються, отриманого з заданої опуклої множини з непорожньою внутрішністю за допомогою групи перетворень, що складається з рухів і гомотетій, необхідно і достатньо* $n+1$ *елемента сімейства.*

Але, якщо зменшувати групу допустимих перетворень, то кількість необхідних для створення тіні множин збільшується. Критичною модельною множиною буде прямокутний паралелепіпед.

Часткову відповідь на задачу 8 дає наступний результат.

Теорема 1.4.6 [33**].** *Для того щоб обрана точка в n-вимірному евклідовому просторі* $\mathbb{R}^n$ *при* $n \geq 2$ *належала до* 1*-напіввипуклої оболонки сімейства замкнутих множин, що попарно не перетинаються, отриманого з заданої опуклої множини з непорожньою внутрішністю за допомогою групи перетворень, що складається з паралельних переносів і гомотетій, необхідно і досить* $2n$ *елементів сімейства.*

У випадку комплексного або гіперкомплексного евклідового простору можна розглянути аналогічні задачі щодо перетинів сімейств, відповідно, комплексними або гіперкомплексними площинами.

Означення 1.4.3. *Скажемо, що множина* $E \subset \mathbb{C}^n$ ($\mathbb{H}^n$) *m-комплексно (m-гіперкомплексно) опукла щодо точки* $z \in \mathbb{C}^n \setminus E$ ($\mathbb{H}^n \setminus E$)*, якщо знайдеться m-вимірна комплексна (гіперкомплексна) площина L, така що* $z \in L$ *і*

$L \cap E = \varnothing$. *Скажемо, що множина* $E \subset \mathbb{C}^n (\mathbb{H}^n)$ *m-комплексно (m-гіперкомплексно) опукла, якщо вона m-комплексно (m-гіперкомплексно) опукла щодо кожної точки* $z \in \mathbb{C}^n \setminus E (\mathbb{H}^n \setminus E)$.

Для задачі 4 з кулями, центри яких знаходяться на сфері, отримана точна оцінка при $n = 2$ і оцінка зверху при $n > 2$.

Теорема 1.4.7 [33**]**. *Для того щоб початок координат в двовимірному комплексному (гіперкомплексному) евклідовому просторі* $\mathbb{C}^2 (\mathbb{H}^2)$ *належав до* 1*-комплексної (*1*-гіперкомплексної) оболонки сімейства відкритих (замкнених) куль з центрами на одиничній сфері* $S^3 (S^7)$ *, які початок координат не містять і попарно неперетинаються, необхідно і достатньо двох куль.*

Теорема 1.4.8 [89**]**. *Для того щоб початок координат в n-вимірному комплексному (гіперкомплексному) евклідовому просторі* $\mathbb{C}^n (\mathbb{H}^n)$, *n> 2 належав до* 1*-комплексної (*1*-гіперкомплексної) оболонки сімейства відкритих (замкнених) куль з центрами на одиничній сфері* $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n (S^{4n-1} \subset \mathbb{H}^n)$, *що попарно не перетинаються і які не містять початок координат, досить* 2*n (*4*n*-1*) куль.*

Далі в розділі 3 ми покажемо, що оцінку одержану в цій теоремі можна покращити.

Також в (гіпер)комплексному випадку одержано повний аналог теореми 1.4.1, якщо центри куль не прив'язані до сфери.

Теорема 1.4.9 [90]. *Для того щоб початок координат в n-вимірному комплексному (гіперкомплексному) евклідовому просторі* $\mathbb{C}^n(\mathbb{H}^n)$, $n > 2$ *належав до* 1-*комплексної (*1-*гіперкомплексної) оболонки сімейства відкритих (замкнених) куль, що попарно не перетинаютья і які початок координат не містять, досить n куль .*

Задача 5 вельми складна. Тут крім майже очевидного факту, що при $n = 2$ досить трьох куль розміщених у вершинах рівностороннього трикутника, радіус яких дорівнює половині висоти трикутника, більше нічого невідомо.

Означення 1.4.4. *Скажемо, що сімейство множин* $\Im = \{F_\alpha\}$ *задає тінь дотичну до многовиду M в точці x∈M, якщо кожна пряма, що дотична до цього многовиду M в точці* $x \in M \setminus \bigcup_\alpha F_\alpha$, *має непорожній перетин хоча б з однією множиною, що належить до сімейства* $\Im$.

Задачу 6 при $n = 3$ можна сформулювати наступним чином. Знайти мінімальну кількість куль, що попарно не перетинаються з центрами на сфері S^2, які забезпечать тінь дотичну до сфери S^2 в усіх точках $x \in S^2 \setminus \bigcup_\alpha F_\alpha$.

Задачі 6 і 7 формулювалися Ю.Б.Зелінським в списку відкритих проблем на конференціях: XI Міжнародна математична школа "Алгебра, Топологія, Аналіз" 1 – 14.08.2016 р. в Одесі, "Сучасні досягнення в геометрії і топології" 12 – 16.09.2016 р. в Харкові і "International conference dedicated to the 120th anniversary of Kazimierz Kuratowski" 27.09 – 1.10.2016 в м. Львові [87].

В нашій роботі ми дамо деякі відповіді на ці проблеми.

Неважко показати, що задача 9 еквівалентна задачі 1 для 1-опуклості і задачі 3 для 1-напівопуклості.

Одне з важливих застосувань лінійно опуклі множини знайшли в роботах Л.Айзенберга при розкладах голоморфних функцій в ряди найпростіших дробів виду

$$f(x)=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{A_p}{\prod_{j=1}^{n}(a_{j1}^{p}z_1+\ \dots\ +a_{jn}^{p}z_n+b_j^p)},$$

де

$$\sum_{m=1}^{n}\left|a_{jm}^{p}\right|^{2}=1,\quad j=1,\dots n,\quad p=1,2,\dots,\quad \sum_{p=1}^{\infty}\left|A_p\right|<\infty \qquad [1].$$

Також він застосовував лінійно опуклі множини в задачі відокремлення особливостей голоморфних функцій [2]. Поняття лінійної опуклості виявилось істотним і дуже ефективним засобом і в інших задачах комплексного аналізу.

Наприклад, для функцій, голоморфних в регулярній лінійно опуклій області $D=\{z\in\mathbb{C}^n \,|\, \Phi(z,\bar{z})<0\}$ знайдено просте інтегральне представлення [3] (область регулярна, якщо її межа є гладким класу C^2 многовидом)

$$f(x)=\int_{\partial D}f(\xi)\frac{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\omega^k d\omega[k]\wedge d\xi}{(1-\langle z,\omega\rangle)^n},$$

де $\omega=(\omega_1,\dots,\omega_n)$,

$$d\omega[k]=d\omega_1\wedge\dots\wedge d\omega_{k-1}\wedge d\omega_{k+1}\wedge\dots\wedge d\omega_n,$$

$$\omega_i = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i}(\xi)}{\sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i}(\xi)}.$$

Узагальнено опуклі множини використовувались багатьма математиками красноярської школи при узагальненні на степеневі ряди від багатьох змінних методу підсумовування А.Бореля, при встановленні багатовимірного аналога теореми Пойа про зв'язки росту цілої функції з розташуванням особливостей функції, асоційованої з нею по Борелю, при вивченні множини розв'язків однорідного рівняння, та в деяких інших задачах [3, 63, 64].

А. Мартіно довів [79], що якщо використовувати спряжену множину як аналог зовнішності, то можна встановити двоїстість, аналогічну двоїстості Осгуда-Брауна. Фундаментальні результати були отримані ним для опуклих областей та компактів і поширені Л.А. Айзенбергом [1] на лінійно опуклі множини, що задовольняють деяким умовам регулярності межі. А. Мартіно назвав компакти і області, для яких виконується двоїстість $H(E) \approx H'(\ddot{E})$ (де $H'(E)$ – простір лінійних неперервних функціоналів на просторі $H(E)$ функцій голоморфних на E) сильно лінійно опуклими [81], зараз для них вживають термін $\mathbb{C}$–опуклі множини. Властивості сильної лінійної опуклості вивчались в працях В.М. Трутнєва [63, 64], Л.Я. Макарової [45, 46], С.В. Знаменского та Л.В. Знаменської [39-41], А.К.Ціха [66], Ю.Б.Зелінського [20, 27] і їх учнів. Важливим результатом було те, що С.В. Знаменський встановив фундаментальну геометричну властивість сильно лінійно опуклих множин: сильна лінійна опуклість по Мартіно для області еквівалентна тому, що перетин її довільною комплексною прямою є ациклічним (зв'язним та однозв'язним) [39].

В роботах Ю.Б.Зелінського отримано комплексні аналоги ряду теорем опуклого аналізу (теореми Каратеодорі, Гана-Банаха, Крейна-Мільмана), дана топологічна класифікація лінійно опуклих областей з гладкими та майже всюди гладкими межами, а також узагальнення для дійсного випадку теореми Геллі, коли відомі характеристики перетинів меншої кількості ніж $n + 1$ підмножин [20, 27, 29].

М. Андерссон і М.Пассаре застосували лінійно опуклі множини до комплексної інтерполяції функцій за Кергіном [71].

Л.Лемперт показав, що на сильно лінійно опуклих областях метрика Кобаяші є гладкою Фінслеровою метрикою.

Н.Ніколов, П.Пфлюг і В.Звонек [82] побудували приклад обмеженої сильно лінійно опуклої області, яка не є біголоморфною до опуклої області.

Нехай $G(n,m)$ – грасманів многовид m-вимірних площин в $\mathbb{R}^n$ [28, 94], що проходять через одну точку. Будемо говорити, що пара многовидів (M, M^*) породжує (n, m)-опуклість, якщо один з них є евклідовим простором $\mathbb{R}^n$, а другий – грассмановим многовидом $G'(n, m)$ усіх m-площин простору $\mathbb{R}^n$, під m-площиною в грассмановому многовиді $G'(n, m)$ розуміють компактний грассманів підмноговид m-площин в просторі $\mathbb{R}^n$, що проходять через фіксовану точку $G(n, m) \subset G'(n, m)$.

Означення 1.4.5. *Скажемо, що множина $E \subset M$, де M – один з просторів $\mathbb{R}^n$ або $G'(n, m)$, є (n, m)-опуклою, якщо для довільної точки з доповнення до цієї множини $x \in M \setminus E$ існує m-площина L така, що $x \in L$ і $L \cap E = \varnothing$.*

Означення 1.4.6. *Скажемо, що відкрита множина* $E \subset M$*, де* M *– один з просторів* $\mathbb{R}^n$ *або* $G'(n, m)$*, є слабко* (n, m)*-опуклою, якщо для довільної точки межі цієї множини* $x \in \partial E$ *існує* m*-площина* L *така, що* $x \in L$ *і* $L \cap E = \varnothing$.

Означення 1.4.7. *Скажемо, що компакт* $E \subset M$*, де* M *– один з просторів* $\mathbb{R}^n$ *або* $G'(n, m)$*, є слабко* (n, m)*-опуклим, якщо його можна апроксимувати ззовні слабко* (n, m)*-опуклими відкритими множинами.*

Означення 1.4.8. *Для довільної множини* $E \subset \mathbb{R}^n$ *множина*

$$E^o = \left\{ \begin{array}{l} y = (y_1, y_2, \ldots y_n) \left| x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n \le 1, \right. \\ \forall \quad x = (x_1, x_2, \ldots x_n) \in E \end{array} \right\}$$

називається полярою до E.

Означення 1.4.9. *Для довільної множини* $E \subset M$*, де* M *– один з просторів* $\mathbb{R}^n$ *або* $G'(n, m)$*, назвемо підмножину* $E^* \subset M^*$ *спряженою (двоїстою) до множини* E*, якщо*

$$E^* = \left\{ y \in M^* \; \left| l(y) \; - \; m - \text{площина}, \text{ яка не перетинає } E \right. \right\}$$

Зауважимо, що спряжена множина є деяким аналогом поляри в дійсному опуклому аналізі але на відміну від поляри вона більш точно характеризує опуклі множини і особливо точки межі таких множин. Якщо поляра будь-якої множини завжди є замкненою множиною, то спряжена множина реагує на належність, чи не належність точки межі до множини, що досліджується. Найбільш важливу властивість спряженої множини встановлено в наступному результаті.

Теорема 1.4.10.[28**].** *Для* (m,n)*-опуклості множини* E *необхідно та достатньо, щоб* $E^{**} = E$*, де під множиною* E^{**} *розуміють множину спряжену до* E^*.

Зауваження. Якщо розглянути для пари (M, M^*) многовидів, з яких один є евклідовим комплексним простором $\mathbb{C}^n$, а інший – комплексним грассмановим многовидом $\mathbb{C}G'(n, m)$, аналогічну відповідність лінійних підмноговидів, то аналогічно дійсному випадку задається поняття комплексної (n, m)-опуклості, яка при $m = n - 1$ співпадає з лінійною опуклістю, а з точки зору даних вище означень буде частковим випадком $(2n, 2m)$-опуклості для дійсних евклідових просторів.

Оскільки ми будемо досліджувати узагальнення (m,n)-опуклості лише в евклідових просторах, тому ми будемо користуватися спрощеним позначенням m-опуклістю.

Теорема 1.4.11. [28]. *Для слабкої m-опуклості множини E необхідно та достатньо, щоб E була компонентою множини E^{**}.*

Означення 1.4.10. *Відображення $f : X \to Y$ топологічних просторів X і Y називається власним, якщо прообраз довільного компакта з Y буде компактом в X.*

Означення 1.4.11. *Відображення області називається внутрішнім тоді і тільки тоді, коли образ кожної відкритої множини відкритий, і прообраз довільної точки складається з ізольованих точок.*

Наступну оцінку множини кратних точок отримано в роботах [22, 86].

Теорема 1.4.12. *Будь-яке власне відображення області на n-вимірного многовиду на область іншого n-вимірного многовиду степеня k, або є внутрішнім відображенням, або існує точка в образі, яка має не* *менше ніж* $|k|$ +2 *прообрази. Якщо обмеження на внутрішність області є нульвимірним відображенням, то в останньому випадку, множина точок образу, які мають не менше ніж* $|k|$ +2 *прообразів, містить підмножину повної розмірністі* n.

Ряд відкритих питань, повязаних з цією теоремою поставлено в роботах [22, 86, 87].

По тематиці зв'язаній з узагальнено опуклими множинами, яка є основним предметом дослідження даної роботи, опубліковано чотири монографії Ю.Б.Зелінського „Многозначные отображения в анализе" (1993 р.) і „Выпуклость. Избранные главы" (2012 р.), Л.Хьормандера „Notions of convexity" (1994 р. і 2007 р.), М.Андерссона, М.Пассаре і Р.Сігурдссона „Complex convexity and analytic functionals" (2005 р.). В цих монографіях висвітлено основні досягнення, одержані в цьому напряму за останні шістдесят років, а також наведено ряд нерозв'язаних проблем.

По тематиці зв'язаній з дослідженням кратності неперервних відображень опублікована монографія А.К.Бахтіна, Г.П.Бахтіної, Ю.Б.Зелінського „Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе" (2008 р.), інша інформація міститься в ряді робіт [86, 87].

1.5. Короткий огляд результатів дисертації

В цьому підрозділі розглянемо короткий перелік отриманих в дисертації результатів і їх зв'язок з відомими результатами інших авторів.

1.5.1. Узагальнено опуклі множини

Цим питанням присвячено другий розділ роботи.

Тут отримано деякі узагальнення теореми Ю.Б.Зелінського (теорема 4.1 [27]) на слабко 1-опуклі компакти, досліджено характеристики слабко m-опуклих відкритих множин.

Теорема 1.5.1. *Якщо K – слабко m-опуклий компакт і спряжена множина K* зв'язна, то для перерізу K довільною (n – m)-вимірною площиною L множина* $L \setminus K \cap L$ *зв'язна.*

В роботі [48] отримана класифікація (n-1)-опуклих множин з гладкою межею.

Теорема 1.5.2. [27, 48]. *Нехай задана* (n-1)*–опукла множина* $E \subset \mathbb{R}^n$ *з гладкою межею.*

Тоді

1) E опукла множина, або

2) E має вид декартового добутку $E = E^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$, *або*

3) E складається не більше ніж з двох необмежених компонент.

З прикладу 2.2.1. випливає, що аналогічної класифікації для напівопуклих множин з гладкою межею сподіватися не можна.

Наступна лема є опорною для встановлення теореми .1.5.3 в якій одержано характеристики слабко (n-1)-опуклих відкритих множин.

Лема 1.5.1. *Кожна слабко* (n-1)*-опукла відкрита множина E в евклідовому просторі* $\mathbb{R}^n$, *яка не є* (n-1)*-опуклою – незв'язна.*

Теорема 1.5.3. *Кожна слабко* $(n\text{-}1)$*-опукла відкрита множина* E *в евклідовому просторі* $\mathbb{R}^n$*, яка не є* $(n\text{-}1)$*-опуклою складається не менше ніж з трьох компонент.*

При допомозі наступної леми встановлено теорему 1.5.4, в якій одержано подібні характеристики слабко 1-напівопуклих відкритих множин.

Лема 1.5.2. *Кожна слабко* 1*-напівопукла відкрита множина на евклідовій площині* $\mathbb{R}^2$*, яка не є* 1*-напівопуклою – незв'язна.*

Теорема 1.5.4. *Кожна слабко* 1*-напівопукла відкрита множина на евклідовій площині* $\mathbb{R}^2$*, яка не є* 1*-напівопуклою складається не менше ніж з трьох компонент.*

1.5.2. Задачі про тінь

Цим питанням присвячено третій розділ роботи.

Тут одержано достатні, а в деяких випадках і необхідні умови, які забезпечують належність точки або групи точок до певної узагальнено опуклої оболонки наперед заданої сім'ї множин. В роботі [32] отримані точні оцінки необхідної і достатної кількості куль для задання тіні в центрі сфери, коли усі кулі різного радіуса. Якщо розглядати набори куль фіксованого радіуса, то, як побачимо нижче, задача ускладнюється. Кількість необхідних куль збільшуєть, а часом задача стає нерозв'язною.

Спочатку встанолено ряд допоміжних тверджень, які використовуються в подальших оцінках. Тінь, яку породжує кожна куля з центром на сфері задає двосторонній конус з вершиною в центрі сфери. А цей конус в свою чергу задає дві гіперплощини і смугу між ними, що не покрита тінню.

Лема 1.5.3. *Для того щоб кожна пряма, що проходить через центр сфери перетинала одну з куль з деякого набору куль з центрами на сфері* S^{n-1}*, необхідно і достатно щоби смуги, які їм відповідають, перетиналися всередині сфери.*

Лема 1.5.4. *Радіус* r_1 *сфери* S^{n-2} *, по якому площина* P_1 *перетинає сферу* S^{n-1} *дорівнює радіусу кулі* B_1.

Теорема 1.5.5. **(**$n+1$)*-ї замкнутої кулі однакового радіуса в просторі* $\mathbb{R}^n$ *з центрами на сфері* S^{n-1} *досить для створення тіні в центрі сфери, якщо кулі можуть торкатися одна одної.*

Необхідність цієї кількості куль випливає з результату отриманого в роботі Ю.Б.Зелінського, І.Ю.Виговської, М.В.Стефанчук [32]. Наступні два результати дають відповідь на питання, яке була поставлене в доповіді на конференції [87].

Теорема 1.5.6. *Не існує набору відкритих куль одинакового радіуса, що попарно не перетинаються, в тривимірному дійсному евклідовому просторі з центрами на сфері* S^2 *і радіуса, що не перевищує радіуса сфери, такого, що будь-яка пряма, яка проходить через центр сфери, перетинала б хоча один з цих куль?*

Теорема 1.5.7. *Не існує набору з* $m > 4$ *замкнутих куль* B_i *куль рівного радіусу в тривимірному дійсному евклідовому просторі з центрами на сфері* S^2 *і радіусу меншого від радіуса сфери, що попарно не перетинаються (або дотикаються), такого, що будь-яка пряма, яка проходить через центр сфери, перетинала б хоча одну з цих куль?*

Незважаючи на негативну відповідь попередніх результатів наступні твердження дають оцінки достатні для створення тіні в точці, якщо центри куль не прив'язані до деякої сфери.

Теорема 1.5.8. *Чотирьох замкнутих (відкритих) куль однакового радіуса в просторі* $\mathbb{R}^3$, *що попарно не перетинаються, досить для створення тіні в фіксованій точці.*

Теорема 1.5.9. *Довільний набір із трьох куль однакового радіуса, які попарно не перетинаються, утворює слабко* 1*-опуклу множину в тривимірному евклідовому просторі.*

Для набору з трьох куль в просторі $\mathbb{R}^n$ має місце наступне твердження.

Теорема 1.5.10. *Для довільної точки простору* $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^{3} B_i$, *де* B_1, B_2, B_3 – *набір з трьох куль однакового радіуса, які попарно не перетинаються і не проходять через цю точку, існує (n –* 2*)-вимірна площина, що містить цю точку і не перетинає жодну з куль.*

Наступний результат підсилює один з результатів Ю.Б.Зелінського [89] і переносить результат роботи [90] на комплексний і гіперкомплексний випадок.

Теорема 1.5.11. *Для того щоб початок координат в n-вимірному комплексному (гіперкомплексному) евклідовому просторі* $\mathbb{C}^n(\mathbb{H}^n)$, $n > 2$ *належав до* 1*-комплексної (*1*-гіперкомплексної) оболонки сімейства відкритих (замкнених) куль з центрами на одиничній сфері*

$S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n \, (S^{4n-1} \subset \mathbb{H}^n)$, *що попарно не перетинаються і які не містять початок координат, необхідно і досить* $n+1$ *кулі.*

Наступну оцінку ми використовували для пошуку можливого набору куль, які забезпечать тінь дотичну до кулі в точках, що не належать до об'єднання цих куль.

Лема 1.5.5. *Розглянемо рівносторонній трикутник ABC в евклідовій площині* $\mathbb{R}^2$. *Якщо ми виберемо три замкнуті круги* B_i, $i=1,2,3$, *з центрами в вершинах цього трикутника і фіксованого радіуса рівного половині висоти трикутника, то кожна пряма, що проходить через довільну точку* $x \in (\bigcup_{i=1}^{3} B_i)^* \setminus \bigcup_{i=1}^{3} B_i$, *де* $(\bigcup_{i=1}^{3} B_i)^*$ *– опукла оболонка множини* $\bigcup_{i=1}^{3} B_i$, *перетинається не менше ніж з одним із вибраних кругів.*

Ряд наступних результатів переносить твердження отримані нами в випадку дійсного евклідового простору на комплексний та гіперкомплексний випадок.

Теорема 1.5.12. *Для того щоб початок координат в двовимірному комплексному (гіперкомплексному) евклідовому просторі* $\mathbb{C}^2 \, (\mathbb{H}^2)$ *належав до* 1*-комплексної (*1*-гіперкомплексної) оболонки сімейства відкритих (замкнених) куль фіксованого радіуса з центрами на одиничній сфері* $S^3 \subset \mathbb{C}^2 \, (S^7 \subset \mathbb{H}^2)$, *що попарно не перетинаються і які не містять початок координат, необхідно і досить трьох куль.*

Теорема 1.5.13. *$n+1$-ї замкнутої кулі однакового радіуса в просторі $\mathbb{C}^n$ ($\mathbb{H}^n$) з центрами на сфері S^{2n-1} (S^{4n-1}) досить для створення тіні в центрі сфери, якщо кулі можуть доторкатися одна одної.*

Приклад 3.5.1 дає оцінку знизу мінімальної кількості куль, що може забезпечити тінь дотичну до сфери (див. означення 3.5.1). Звідси бачимо, що така кількість повинна бути більша від 14. Наступні леми підготовлюють оцінку зверху необхідної кількості куль.

Лема 1.5.6. *Якщо три кулі B_1, B_2, B_3 радіуса r з центрами на сфері S^2 в точках A,B,C відповідно, попарно дотикаються, то кожна пряма дотична до сфери в точці в якій її перетинає промінь, що виходить з центру сфери і проходить через ортоцентр трикутника ABC, перетинає принаймні одну з куль, якщо радіус куль не перевищує* 12/19 *радіуса сфери.*

Наслідок 1.5.1. *Нехай ABCK – правильний симплекс, вписаний в одиничну сферу S^2, з вершинами в точках* $A(0,\ 2\sqrt{2}/3, 1/3)$, $B(\sqrt{2/3}, -\sqrt{2}/3, 1/3)$, $C(-\sqrt{2/3}, -\sqrt{2}/3, 1/3)$, $K(0,0,-1)$ *відповідно, то існує пряма дотична до сфери в точці F* (*в якій її перетинає промінь, що виходить з центру сфери і проходить через ортоцентр T трикутника ABC*), *яка не перетинає жодної з куль B_1, B_2, B_3, B_4 радіусів $\sqrt{2/3}$, розміщених в вершинах симплекса.*

Лема 1.5.7. *Нехай в попередній ситуації добавимо три кулі B_5, B_6, B_7 радіуса r з центрами на сфері S^2 в точках D,E,F відповідно, що попарно дотикаються, крім того кожна з них дотикається до двох куль попереднього набору, то кожна пряма дотична до сфери в точці в якій її перетинає промінь, що виходить з центру сфери і проходить через ортоцентр трикутника ABC, перетинає принаймні одну з цих куль.*

Лема 1.5.8. *Впишемо в сферу* $S^2(0,1)$ *правильний тетраедр. Виберемо* 4 *кулі* B_1, B_2, B_3, B_4 *радіуса* $r = a/2$ *в вершинах тетраедра, де* $a = 2\sqrt{2/3}$ – *довжина ребра тетраедра. Далі як і в попередній лемі добавимо по три кулі радіуса* $r_1 \approx 0{,}3181$ (*всього* 12 *нових куль*) *з центрами на сфері* S^2 *і в кожній площині паралельній грані тетраедра. Кожна трійка нових куль аналогічно лемі* 1.5.7. *попарно дотикається, крім того кожна з них дотикається до двох з чотирьох куль попереднього набору. Тоді кожна пряма дотична до сфери в точці в якій її перетинає промінь, що виходить з центру сфери і проходить через середину ребра тетраедра, перетинає принаймні одну з цих* 16 *куль.*

Використовуючи оцінки отримані в попередніх лемах, одержуємо оцінку зверху необхідної кількості куль.

Теорема 1.5.14. *Існує система з 16 куль з центрами на сфері* S^2*, яка задає тінь, дотичну до сфери.*

Отже необхідна кількість куль дорівнює 15 або 16. Зауважимо, що знайдений набір куль складається з куль двох радіусів. Показано, що вибрану систему куль неможна замінити системою з одинаковими радіусами.

1.5.3. Побудова відображень постійної кратності

Цим питанням присвячено четвертий розділ роботи. В ньому ми узагальнюємо результат Й. Міодушевського [81] на відображення замкнутої кулі, крім того показуємо, що відображення з такими властивостями можна вибрати гладкими будь якого порядку гладкості.

Теорема 1.5.15. *Існує неперервне відображення n-вимірної кулі* B^n *в себе, яке є гомеоморфізмом на межі кулі і кожна внутрішня точка кулі має рівно k прообразів де k непарне число.*

Наслідок 1.5.2. *Нехай множина X має вигляд декартового добутку* $X=Y\times B^n$*, тоді на X можна задати неперервне відображення в X, яке буде гомеоморфізмом на* $X\times\partial B^n$ *а кожна точка з* $X\times IntB^n$ *має рівно k прообразів, де k непарне число.*

В роботі О.В.Чернавського [67] показано, що не існує двократного неперервного відображення *n*-вимірної кулі в себе. Ми встановили, що в випадку $n = 1$ такого відображення кулі (відрізка) в себе не існує і при інших постійних кратностях більше двох.

Твердження 1.5.1. *Не існує неперервного відображення відрізка в себе з постійною кратністю більше одиниці.*

Теорема 1.5.16. *Існує гладке неперервне відображення n-вимірної кулі* $B^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle\| |x| \le r \right\}$ *в себе, яке є гомеоморфізмом на межі кулі а кожна внутрішня точка кулі має в точності k прообрази, де k є непарним числом.*

Якщо ж розглядати відображення кулі в більш загальні множини, то з наступного результату випливає, що можна побудувати відображення довільної кратності більшої від двох.

Теорема 1.5.17. *Для будь якого* $k \ge 3$ *існує гладке неперервне відображення n-вимірної кулі*

$$B^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, 0 \le x_1 \le k-2, 0 \le x_i \le 1, i = 2,...,n \right\}$$

на циліндр $S^1 \times \underbrace{[0,1] \times ... \times [0,1]}_{(n-1)-раз}$ *для якого кожна точка образу має в точності* k *прообрази.*

Висновки

Поняття лінійної опуклості, яке в двовимірному комплексному просторі вперше було введене в 1935 році в роботі Г. Беенке та Е. Пешля дістало особливо інтенсивне використання в комплексному аналізі починаючи з шістдесятих років минулого століття завдяки роботам А. Мартіно та Л. А. Айзенберга. Опуклі множини та їх узагальнення відіграють важливу роль в різноманітних галузях математики, особливо в багатовимірному комплексному аналізі та інтегральній геометрії, а також різних напрямках прикладних застосувань (томографії, стереології). Багато важливих концепцій опуклого аналізу знайшли своє завершення в функціональному аналізі. Тому дослідження кожного такого класу має застосування в теоретичних задачах і знаходить використання в прикладних питаннях.

Узагальнено опуклі множини та неперервні відображення пов'язують в один вузол проблеми комплексного аналізу, топології, опуклого аналізу, інтегральної геометрії.

Перший розділ роботи присвячений попередньому огляду літератури в якій розглядаються близькі до досліджуваних в дисертації питань, освітленню основних ідей та допоміжних результатів необхідних для викладення результатів роботи.

Зроблено огляд результатів дисертації, що виносяться на захист.

РОЗДІЛ 2.

Узагальнено опуклі множини

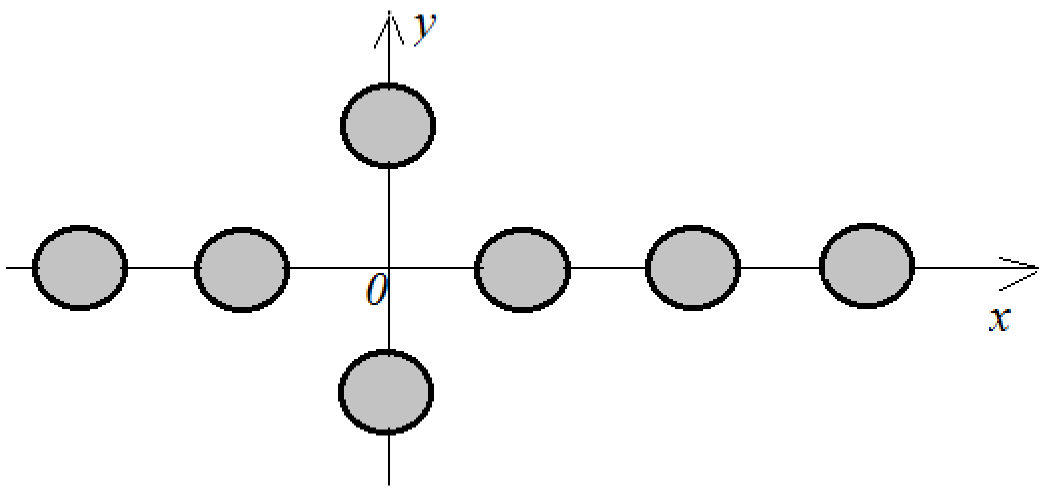
2.1. Підготовчі твердження

В даному розділі ми вивчимо деякі нові властивості узагальнено опуклих множин, які потрібні в подальших дослідженнях розділу 3. Крім цього отримані характеристики поглиблюють інформацію про різні класи узагальнено опуклих множин.

2.2. m–напівопуклі множини

В роботі [48] отримана класифікація (n-1)-опуклих множин з гладкою межею. Покажемо, що сподіватся на аналогічну класифікацію для (n-1)-напівопуклих множин з гладкою межею не можна.

Приклад 2.2.1. Нехай задана множина (див. Мал. 2.2.1) в двовимірній площині $\mathbb{R}^2$, що складається зі зчисленної множини відкритих кругів.



Мал.2.2.1

$$E=\left\{(x,y)\left|[(x\pm\left|2k+1\right|)^2+y^2<1]\vee[x^2+(y\pm\left|2k+1\right|)^2<1],\ k=1,2,...\right.\right\}$$

Легко перевірити, що наведена множина має гладку межу і є 1-напівопуклою множиною зі зчисленною множиною компонент. Аналогічний приклад можна побудувати і в *n*–вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ для (*n*-1)–опуклих множин.

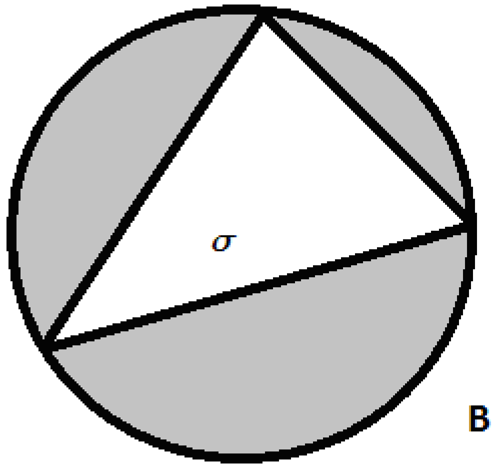
2.3. Слабко *m*–опуклі множини

В даному підрозділі ми дещо ослабимо вимоги до *m*-опуклості. Будемо вимагати існування відповідних площин лише для точок, що лежать на межі досліджуваної множини.

Означення 2.3.1. *Скажемо, що відкрита множина* $G\subset\mathbb{R}^n$ *слабко m-опукла, якщо вона m-опукла відносно кожної точки* $x\in\partial G$, *яка належить до межі множини G. Скажемо, що довільна множина* $E\subset\mathbb{R}^n$ *слабко m-опукла, якщо її можна аппроксимувати ззовні сім'єю відкритих слабко m-опуклих множин.*

Легко побудувати приклад слабко *m*-опуклої, але не *m*-опуклої множини.

Приклад 2.3.1. Нехай $B=\left\{(x,y)\left|x^2+y^2<1\right.\right\}$ – відкритий круг на площині *xOy* (див. Мал.2.3.1.). Виберемо три точки на колі $S^1=\left\{(x,y)\left|x^2+y^2=1\right.\right\}$ і розглянемо симплекс σ з вершинами в цих точках. Неважко переконатися, що множина $E=B\setminus\sigma$ слабко 1-опукла, але не 1-опукла.



Мал.2.3.1

Приклад 2.3.2. Розглянемо на площині $\mathbb{R}^2$ множину з чотирьох відкритих квадратів

$$E = \{(x, y) \mid (|x| < 1, 1 < |y| < 3) \vee (1 < |x| < 3, |y| < 1)\}.$$

Легко переконатися, що ця множина також слабко 1-опукла, але не 1-опукла.

В роботах [28, 94] досліджено деякі властивості слабко m-опуклих та m-опуклих множин.

Спряженою множиною E^* до множини E називається підмножина m-вимірних площин в $G(n,m)$, які не перетинають множину E.

Твердження 2.3.1 [28]. *Якщо E_1 і E_2 відповідно слабко k-опукла і слабко m-опукла множина $k \le m$, то $E = E_1 \cap E_2$ буде слабко k-опуклою множиною.*

Твердження 2.3.2 [28]. *Якщо E відкрита множина, то E^* замкнена множина.*

Твердження 2.3.3 [28]**.** *Якщо E компакт, то E* відкрита множина.*

Твердження 2.3.4 [28]**.** *Нехай задана послідовність компактних множин E_k k =1,2,.. така, що $E_{k+1} \subset E_k$ і $E = \cap_k E_k$, то $E^* = \cup_k E_k^*$*

Теорема 2.3.1 [28]**.** *Для того щоби множина E була m-опуклою необхідно і достатньо щоб E= E**.*

Твердження 2.3.5 [28]**.** *Нехай задана лінійно впорядкована послідовність по включенню m-опуклих множин E_α.. така, що $E_\alpha. \subset E_\beta. \Leftrightarrow$ $\alpha \leq. \beta$, тоді множина $E = \cup E_\alpha$ m-опукла.*

Твердження 2.3.6 [28]**.** *Кожна слабко m-опукла область є зв'язною компонентою деякої m-опуклої множини.*

Наслідок 2.3.1. *Кожна слабко m-опукла відкрита множина складається з зв'язних компонент деякої m-опуклої множини.*

.Дослідимо деякі нові властивості слабко *m*-опуклих множин.

Твердження 2.3.7. *Кожна слабко* (n-1)*-опукла відкрита множина E з гладкою межею буде* (n-1)*-опуклою.*

Доведення. Розглянемо подвійно спряжену множину *E***. Згідно з властивостями спряжених множин [28] це буде (n-1)-опукла відкрита множина з гладкою межею. Згідно з теоремою 1.5.2. вона буде мати один з наступних виглядів: *E*** опукла множина, або *E*** має вид декартового добутку $E^{**} = E^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$, або *E*** складається не більше ніж з двох необмежених опуклих компонент. Тоді згідно з наслідком 2.1.2 вона буде (n-1)-опуклою.

Твердження 2.3.8. *Кожна компонента слабко* (n-1)*-опуклої відкритої множини* E *опукла.*

Доведення. Якщо область (компонента) не опукла, то у неї є неопуклий переріз двовимірною площиною. Відомо, що для плоскої неопуклої області на межі є точка правильної неопуклості [20]. Очевидно, що через цю точку не можна провести (n-1)-вимірну площину, яка не перетинає область.

З попереднього випливає наступне твердження.

Наслідок 2.3.2. *Нехай задана слабко* (n-1)*–опукла множина* $E \subset \mathbb{R}^n$ *з гладкою межею.*

Тоді

1. *E опукла множина, або*
2. *E має вид декартового добутку* $E = E^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$*, або*
3. *E складається не більше ніж з двох необмежених компонент.*

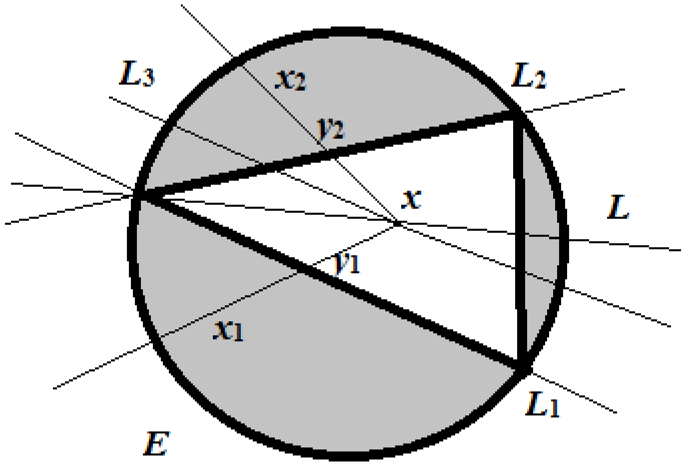
Теорема 2.3.2. *Якщо* K *– слабко* m*-опуклий компакт і множина* K^* *зв'язна, то для перерізу* K *довільною* (n – m)*-вимірною площиною* L *множина* $L \setminus K \cap L$ *зв'язна.*

Доведення. Як встановлено в твердженні 2 [20] множина K^* є відкритою множиною, тому будь які дві її точки можна з'єднати неперервною дугою в K^*. Припустимо, що існує така (n – m)-вимірна площина L, для якої множина $L \setminus K \cap L$ незв'язна. Отже переріз є носієм деякого ненульового (n – m – 1)-вимірного циклу z [56]. Нехай точка x належить обмеженій компоненті множини $L \setminus K \cap L$. Такі точки існують в силу компактності K. Не порушуючи загальності, в силу слабкої m-опуклості K, можна вважати, що через точку x можна провести m-вимірну площину l_1, яка не перетинає K. Іншу m-вимірну площину l_2 проведемо за межами деякої досить великої кулі, що містить компакт *K*. Якщо ми компактифікуємо простір $\mathbb{R}^n$ до сфери S^n нескінченно віддаленою точкою, то отримаємо два *m*-мірні цикли $w_1 = l_1 \cup (\infty)$ і $w_2 = l_2 \cup (\infty)$, з яких перший цикл зачеплений з циклом *z*, а другий ні. З одного боку, ці цикли не можна перевести гомотопією один в інший, яка не перетинала б цикл *z,* а, отже і множину $K \cap L$. З другого боку, зв'язність множини K^* забезпечує існування в K^* пари точок y_1, y_2, які задають площини l_1 і l_2 відповідно і з'єднані дугою в K^*. Точки цієї дуги задають гомотопію площини l_1 в l_2, яка не має спільних точок з множиною $K \cap L$. Отримане протиріччя доводить теорему.

Означення 2.3.2. *Скажемо, що* (n-1)*-площина L є опорною до множини* $E \subset \mathbb{R}^n$*, якщо множина E лежить в одному півпросторі на які площина L поділила простір* $\mathbb{R}^n$ *і перетин L з межею множини E непорожній.*

Лема 2.3.1. *Кожна слабко* (n-1)*-опукла відкрита множина E в евклідовому просторі* $\mathbb{R}^n$*, яка не є* (n-1)*-опуклою – незв'язна.*

Доведення. Нехай $E \subset \mathbb{R}^n$ - відкрита слабко (n-1)-опукла множина, яка не є (n-1)- опуклою.

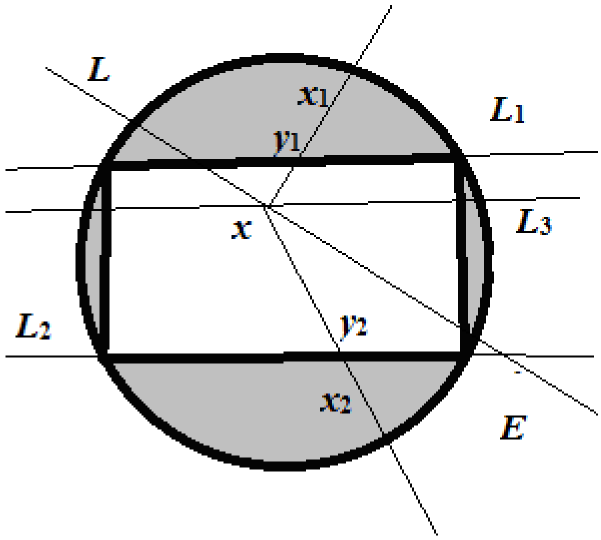


Мал. 2.3.2.

Тоді існує точка $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{E}$ така, що кожна (n-1)-площина, яка проходить через цю точку, перетинає множину E (див. Мал. 2.3.2). Нехай L одна з таких площин. Згідно з означенням 2.3.2 вона не може бути опорною площиною до множини E. Тому в кожному відкритому півпросторі L_+ і L_-, на які площина L поділила евклідів простір знаходяться точки множини E. Нехай це точки x_1 і x_2 відповідно. Проведемо два промені $[x, x_1)$ і $[x, x_2)$, які перетинають множину E.

Виберемо на кожному промені точку, яка належить до ∂E і знаходиться найближче до точки x. Нехай це точки y_1 і y_2 відповідно. В силу (n-1)-опуклості множини E існують (n-1)-площини L_1 і L_2, через ці точки відповідно, які не перетинають множину E. Отже вони не можуть проходити через точку x. Зауважимо, що точки x_1 і x знаходяться в різних півпросторах на які площина L_1 розбиває простір. Тогда площина L_3, яка паралельна площині L_1 і проходить через точку x, перетинає множину E. Звідси отримуємо незв'язність множини E.

Теорема 2.3.3. *Кожна слабко* (n-1)*-опукла відкрита множина E в евклідовому просторі* $\mathbb{R}^n$*, яка не є* (n-1)*-опуклою складається не менше ніж з трьох компонент.*



Мал. 2.3.3.

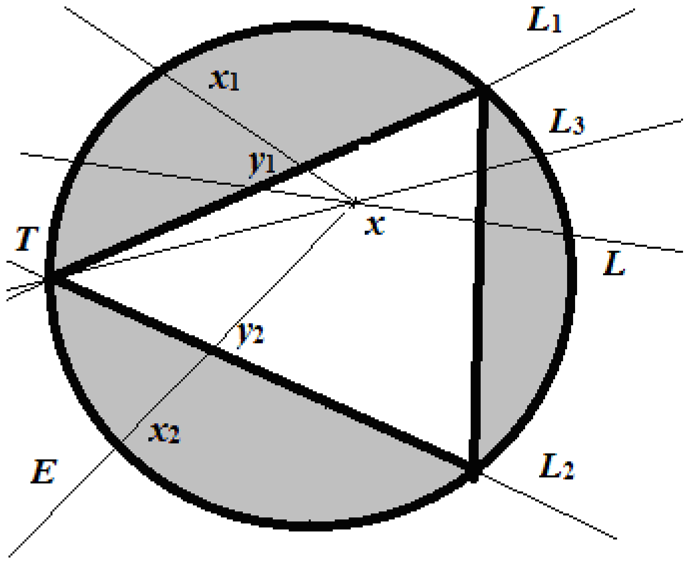
Доведення. Використаємо доведення попередньої леми 2.3.1.

1) Припустимо, що площини L_1 і L_2 не співпадають. Тоді можливі два випадки.

a) Площини L_1 і L_2 паралельні (див. Мал. 2.3.3.). Вони ділять простір на три частини.

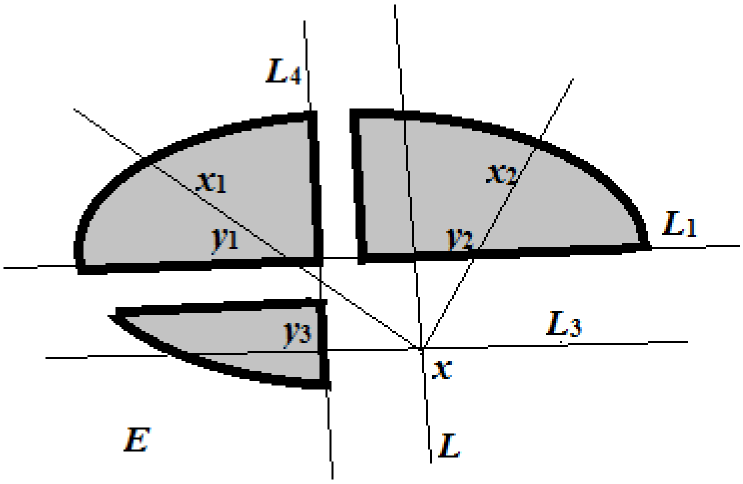
Як ми бачили при доведенні леми 2.3.1, в кожній з цих частин є фрагменти множини E. Тому множина E складається не менше ніж з трьох компонент.

b) Площини L_1 і L_2 не паралельні (див. Мал. 2.3.4.). Тоді вони перетинаються по (n-2)-вимірній площині T і ділять простір на чотири частини. Проведемо площину L_3 через площину T і точку x. Ця площина згідно з вибором точки x перетинає множину E і дві компоненти з частин поділу простору.Точки x_1 і x_2 належать множині E і двом різним компонетам простору . Тому і в цьому випадку множина E складається не менше ніж з трьох компонент.



Мал. 2.3.4.

2) Припустимо, що площини L_1 і L_2 співпадають (див. Мал. 2.3.5.). Очевидно, що вони не можуть проходити через точку x. Тогда площина L_3, яка паралельна площині L_1 і проходить через точку x, перетинає множину E. Нехай $y_3 \in \partial E$ найближча точка межі множини E до точки x.



Мал. 2.3.5.

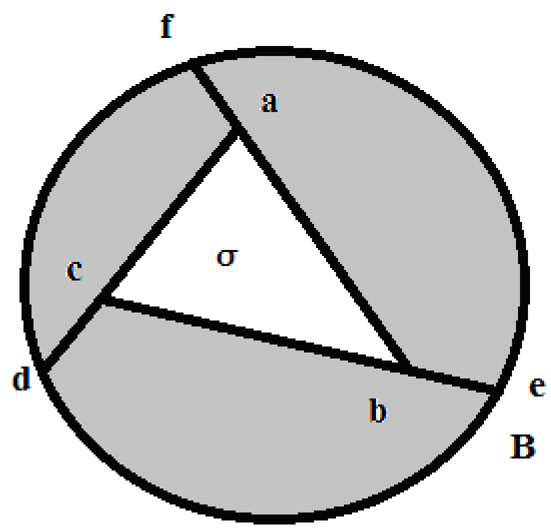
Якщо таких точок декілька , то виберемо будь яку з них. Проведемо через точку y_3 плошину L_4 , яка не перетинає множину E. Площини L_1 і L_4 ділять простір на чотири частини і принаймні в трьох з них є фрагменти множини E. Теорема доведена.

2.4. Слабко *m*–напівопуклі множини

Означення 2.4.1. *Скажемо, що відкрита множина* $G \subset \mathbb{R}^n$ *слабко m-напівопукла, якщо вона m-напівопукла відносно кожної точки* $x \in \partial G$, *яка належить до межі множини G. Скажемо, що довільна множина* $E \subset \mathbb{R}^n$ *слабко m-напівопукла, якщо її можна аппроксимувати ззовні сім'єю відкритих слабко m-напівопуклих множин.*

Побудуємо приклад слабко *m*-напівопуклої, але не *m*-напівопуклої множини.

Приклад 2.4.1. Нехай $B = \{(x,y) \,|\, x^2 + y^2 < 1\}$ – відкритий круг на площині *xOy*. Виберемо три точки a, b, c всередині круга і розглянемо симплекс σ з вершинами в цих точках. Продовжимо сторони трикутника [a,c], [c,b], [b,a] в напрямку другої координати до перетину з колом в точках *d, e, f,* відповідно. Неважко переконатися, що множина $E = B \setminus \sigma \setminus ([a,d] \cup [c,e] \cup [b,f])$ слабко 1-напівопукла, але не 1-напівопукла і не слабко 1-опукла.



Мал.2.4.1.

Зауважимо, що множини в прикладах 2.3.1 і 2.3.2 будуть 1-напівопуклими. Усі класи множин, задані означеннями цього підрозділу задовольняють аксіому опуклості.

Легко перевірити наступні імплікації (Див. Мал.2.4.2), що впорядковують ієрархію опуклостей.

Покажемо, що усі включення, індуковані імплікаціями строгі, тобто в кожному більшому класі є представники, що не належать меншому. Приклади 2.3.1 і 2.3.2 ілюструють строге включення 1, приклад 2.2.1 ілюструє строге включення 3, а приклад 2.4.1 ілюструє строгість включень 2 і 4.

Мал.2.4.2.

Лема 2.4.1. *Кожна обмежена* (n- 1)*-напівопукла множина E не розбиває простору* $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Якщо множина E розбиває простір $\mathbb{R}^n$, то в силу її обмеженості множина $\mathbb{R}^n \setminus E$ має обмежену компонету. Нехай G – така компонента. Виберемо точку $x \in G$. Тоді кожен промінь, що виходить з цієї точки, перетинає множину E, а це протирічить (n- 1)-напівопуклості множини E.

Наслідок 2.4.1. *Кожна обмежена* 1-*напівопукла множина* E *не розбиває площину* $\mathbb{R}^2$.

З включень мал. 2.4.2 випливають наступні твердження.

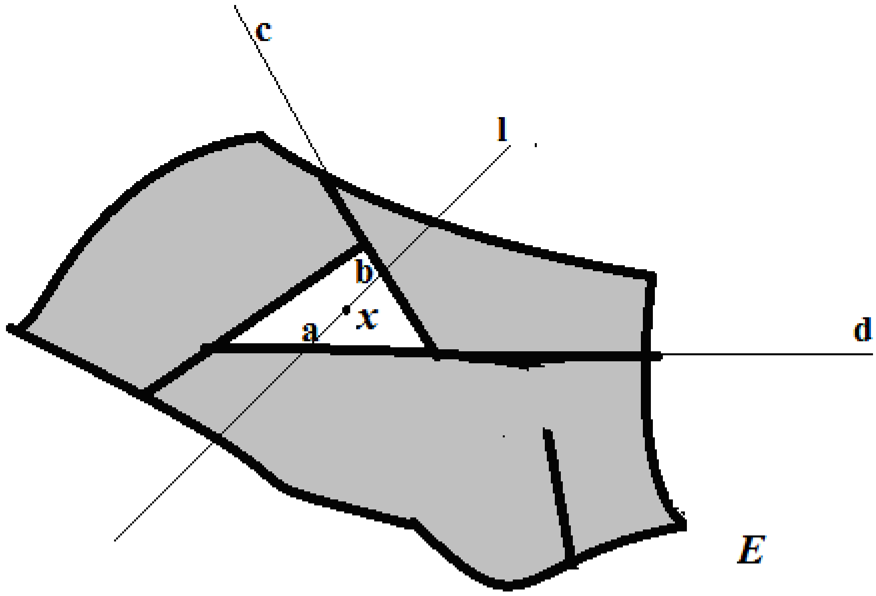
Наслідок 2.4.2. *Кожна обмежена* $(n–1)$-*опукла множина* E *не розбиває простору* $\mathbb{R}^n$.

Наслідок 2.4.3. *Кожна обмежена слабко* $(n–1)$-*опукла множина* E *не розбиває простору* $\mathbb{R}^n$.

Наслідок 2.4.4. *Кожна обмежена слабко* $(n–1)$-*напівопукла множина* E *не розбиває простору* $\mathbb{R}^n$.

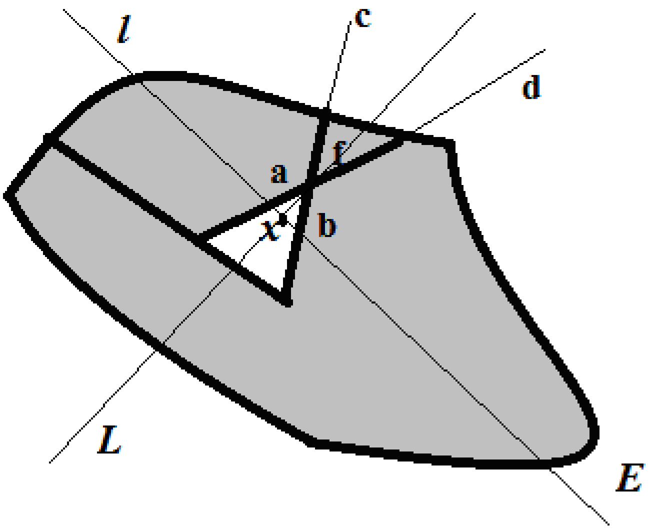
Лема 2.4.2. *Кожна слабко* 1-*напівопукла відкрита множина на евклідовій площині* $\mathbb{R}^2$, *яка не є* 1-*напівопуклою – незв'язна.*

Доведення. Нехай $E \subset \mathbb{R}^2$ – відкрита слабко 1-напівопукла множина, яка не є 1-напівопуклою. Тоді існує точка $x \in \mathbb{R}^2 \setminus E$ така, що кожна пряма, яка проходить через цю точку, перетинає множину E обома променями на які точка x її розділяє. Виберемо таку пряму l. Нехай a, b – перші точки перетину цих променів з межею множини E. В силу слабкої 1-напівопуклості множини E існують промені $[a, d)$, $[b, c)$, відповідно, які не перетинають E . Далі можливі два випадки.



Мал.2.4.3.

а) Промені [a, d) і [b, c) не перетинаються (див. Мал.2.4.3). Тоді крива $C = [a,d) \cup [a,b] \cup [b,c)$, що складається з відрізка [a, b] і променів [a, d) і [b, c), не перетинає множину E і розбиває площину $\mathbb{R}^2$ на дві частини в кожній з яких знаходиться частина множини E.



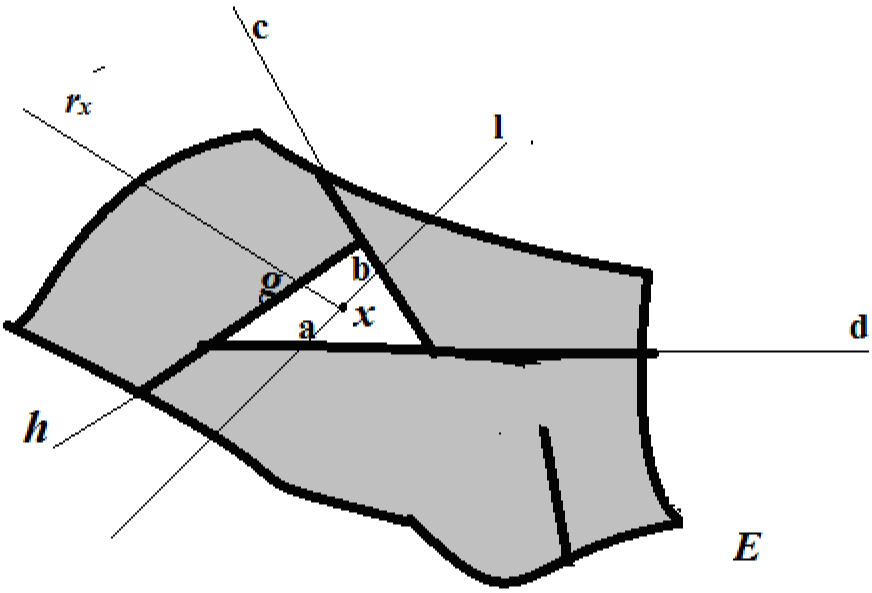
Мал.2.4.4.

b) Промені [a, d) і [b, c) перетинаються (див. Мал.2.4.4). Тоді крива $C = [a,d) \cup [a,b] \cup [b,c)$, що складається з відрізка [a, b] і променів [a, d) і [b, c), не перетинає множину E і розбиває площину $\mathbb{R}^2$ на три частини.

Згідно з вибором точки x пряма L, що проходить через пару точок x і f перетинає принаймні дві компоненти множини E. Твердження доведене.

Теорема 2.4.1. *Кожна слабко* 1*-напівопукла відкрита множина на евклідовій площині* $\mathbb{R}^2$*, яка не є* 1*-напівопуклою складається не менше ніж з трьох компонент.*

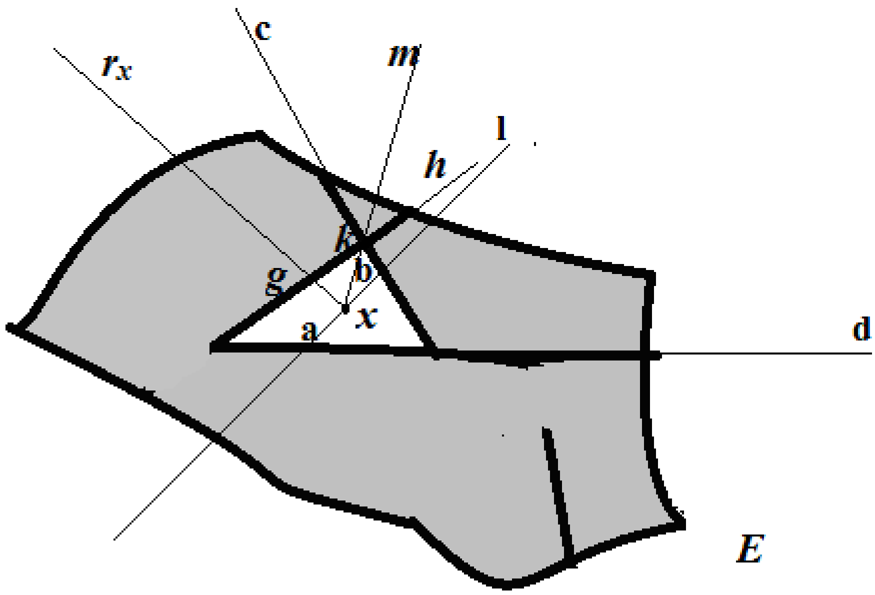
Доведення. Скористаємося лемою 2.4.2. Нехай маємо випадок а) леми. Оскільки множина E не є 1-напівопуклою, то існує промінь r_x з точки x, який не має спільних точок з прямими, що містять промені $[a,d)$ і $[b,c)$. Припустимо, що точка g є першою точкою в перетині променя r_x з межею множини E, коли рухатися вздовж променя r_x виходячи з точки x. В силу слабкої 1-напівопуклості множини E існує промінь $[g,h)$, що не перетинає множину E. Тоді можливі два випадки.



Мал.2.4.5.

1) Промінь $[g,h)$ не перетинає промені $[a,d)$ і $[b,c)$, або точка такого перетину лежить за межами замикання множини E (див. Мал.2.4.5). Тоді ламана $C=[a,d)\cup[a,b]\cup[b,c)\cup[x,g]\cup[g,h)$, що складається з відрізків $[a, b]$ і $[x, g]$ та променів $[a, d)$ $[b, c)$ і $[g, h)$, не перетинає множину

E і розбиває площину $\mathbb{R}^2$ на три частини, в кожній з яких знаходиться частина множини E.

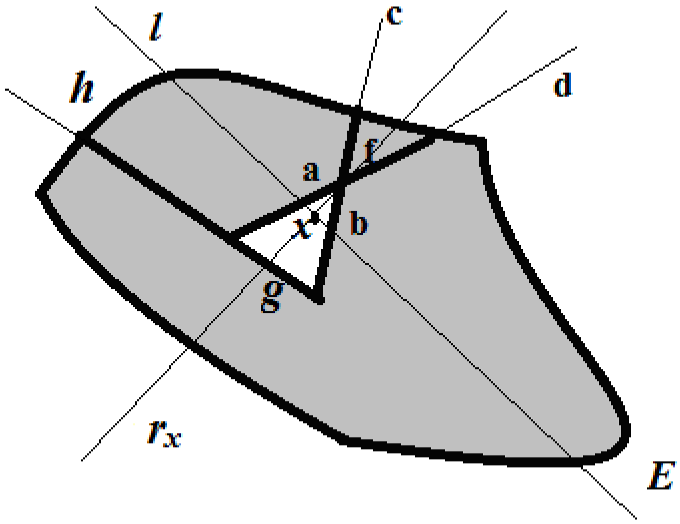


Мал.2.4.6.

2) Промінь $[g,h)$ перетинає один з променів $[a,d)$ або $[b,c)$ (див. Мал.2.4.6). Не порушуючи загальності нехай k точка перетину променів $[g,h)$ і $[b,c)$. Проведемо промінь $[x,m)$ через точку k.

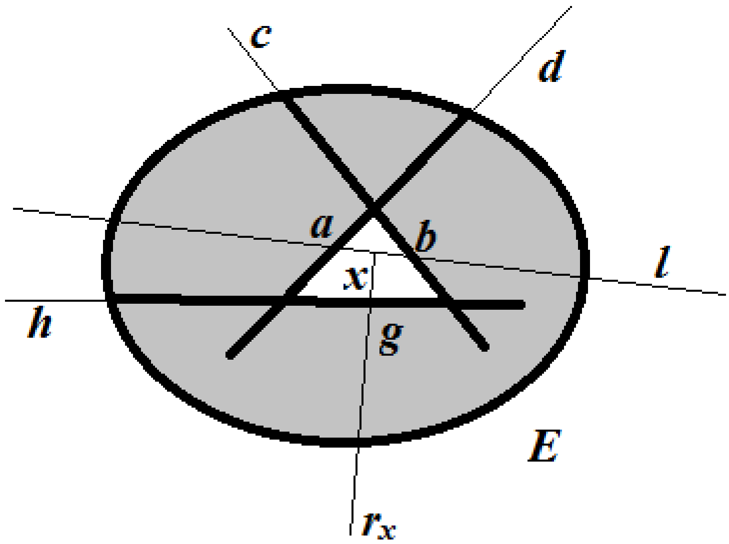
Тоді ламана $C=[a,d)\cup[a,b]\cup[b,c)\cup[x,g]\cup[g,h)$, що складається з відрізків $[a, b]$ і $[x, g]$ та променів $[a, d)$ $[b, c)$ і $[g, h)$, не перетинає множину E і розбиває площину $\mathbb{R}^2$ на чотири частини в принаймні трьох з яких знаходиться частина множини E.

Нехай маємо випадок b) леми. Оскільки множина E не є 1-напівопуклою, то існує промінь r_x з точки x, який не має спільних точок з прямими, що містять промені $[a,d)$ і $[b,c)$. Припустимо, що точка g є першою точкою в перетині променя r_x з межею множини E, коли рухатися вздовж променя r_x виходячи з точки x. В силу слабкої 1-напівопуклості множини E існує промінь $[g,h)$, що не перетинає множину E. Тоді можливі два випадки.



Мал.2.4.7.

3) Промінь [g,h) не перетинає промені [a,d) і [b,c), або точка такого перетину лежить за межами замикання множини E (див. Мал.2.4.7). Тоді ламана $C=[a,d)\cup[a,b]\cup[b,c)\cup[x,g]\cup[g,h)$, що складається з відрізків [a, b] і [x, g] та променів [a, d) [b, c) і [g, h), не перетинає множину E і розбиває площину $\mathbb{R}^2$ на чотири частини на чотири частини в принаймні трьох з яких знаходиться частина множини E.



Мал.2.4.8.

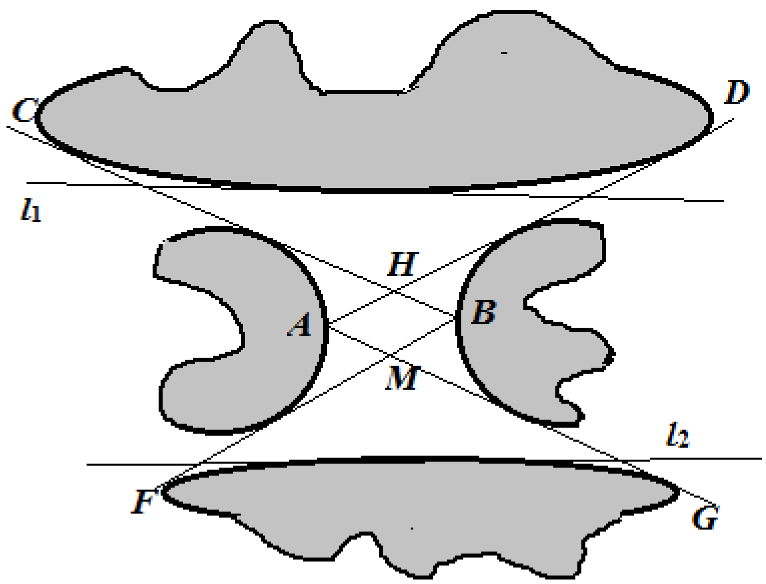
4) Промінь [g,h) перетинає один з променів [a,d) або [b,c) (див. Мал.2.4.8). Тоді ламана $C=[a,d)\cup[a,b]\cup[b,c)\cup[x,g]\cup[g,h)$, що складається з відрізків [a, b] і [x, g] та променів [a, d) [b, c) і [g, h), не

перетинає множину E і розбиває площину $\mathbb{R}^2$ на пять частин. Як і вище, легко бачити, що в принаймні трьох з них знаходяться частини множини E. Теорема доказана.

Наслідок 2.4.1. *Кожна компонента слабко* 1-*напівопуклої відкритої множини на евклідовій площині* $\mathbb{R}^2$ *є* 1-*напівопуклою множиною.*

Приклад 2.4.2. Наступний приклад (див. Мал.2.4.9) показує, що існують слабко 1-напівопуклі відкриті множини з гладкою межею, які не будуть 1-напівопуклими.

Маємо множину з чотирьох однозвязних областей. Прямі l_1 і l_2 дотикаються до верхньої та нижньої компоненти відповідно. Кожен з променів *AD, BC, AG, BF* має спільні точки з межею двох компонент множини.



Мал.2.4.9.

Легко переконатися, що побудована множина є слабко 1-напівопуклою але не 1-напівопуклою тому, що для кожної внутрішньої точки чотирикутника *AHBM* не існує променя, який не перетинає множину.

В роботі [88] досліджено різні варіанти наступної задачі, яку можна назвати задачею про тінь в точці.

Задача. *Яка мінімальна кількість опуклих множин, які попарно не перетинаються і з деякими заданими умовами, достатня для того, щоби будь яка пряма, що проходить через наперед задану точку, перетинала хоча б одну з цих множин?*

Якщо цього досягти, то кажуть, що вибрана точка належить до 1-оболонки даної сім’ї множин.

Для набору куль різного радіуса в [88] отримана оцінка.

Теорема 2.4.2. *Для того щоб вибрана точка в n-вимірному евклідовому просторі при $n \geq 2$ належала до 1-оболонки сім’ї відкритих (замкнутих) куль, які дану точку не містять і попарно не перетинаються, необхідно і достатньо n куль.*

Виявляється, що у випадку куль однакового радіуса результат відрізняється. В наступному розділі ми доведемо наступний результат, що задає 1-слабкоопуклу множину.

Теорема 2.4.3. *Довільний набір із трьох куль однакового радіуса, які попарно не перетинаються, утворює слабко 1-опуклу множину в тривимірному евклідовому просторі.*

Висновки

У другому розділі дисертаційної роботи досліджено декілька класів узагальнено опуклих множин. Кожен з цих класів задовольняє аксіому опуклості: перетин довільного набору множин з такого класу теж належить до цього класу.

Тут отримано узагальнення теореми Ю.Б.Зелінського на слабко 1-опуклі компакти, досліджено характеристики слабко m-опуклих відкритих множин.

Показано, що аналогічної до відомої класифікації для напівопуклих множин з гладкою межею сподіватися не можна.

Введені нові поняття слабкої m–опуклості та слабкої m–напівопуклості та досліджені класи множин, які володіють цими властивостями.

Встановлено, що слабко $(n$-1)-опукла відкрита множина, яка не є $(n$-1)-опуклою складається не менше ніж з трьох компонент. Подібні результати отримано і для інших класів узагальнено опуклих множин.

Побудовано ланцюжок послідовно вкладених класів узагальнено опуклих множин і вивчено деякі їх властивості.

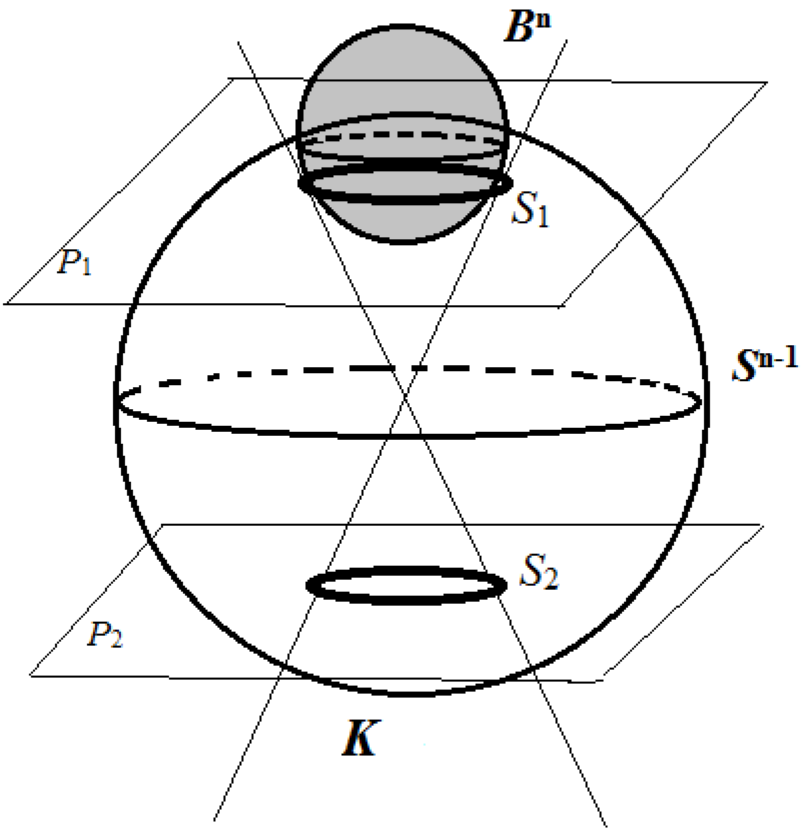
Основні результати розділу опубліковано в роботах [17-19, 92].

РОЗДІЛ 3.

Задача про тінь для куль фіксованого радіуса

3.1. Підготовчі твердження

Нехай в евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ задані сфера S^{n-1} і замкнута куля B^n з центром на сфері, радіусу меншого від радіуса сфери. Ця куля породжує круговий конус K з центром в центрі сфери такий, що кожна пряма, яка лежить всередині конуса, перетинає кулю. Цей конус перетинає сферу по двох (n-2)-вимірних сферах S_1 і S_2, які можна задати парою паралельних гіперплощин P_1, P_2, відповідно. Смуга між цими площинами вирізає зі сфери частину точок (сферичний пояс), що кожна пряма, яка проходить через центр сфери і таку точку не перетинає кулю



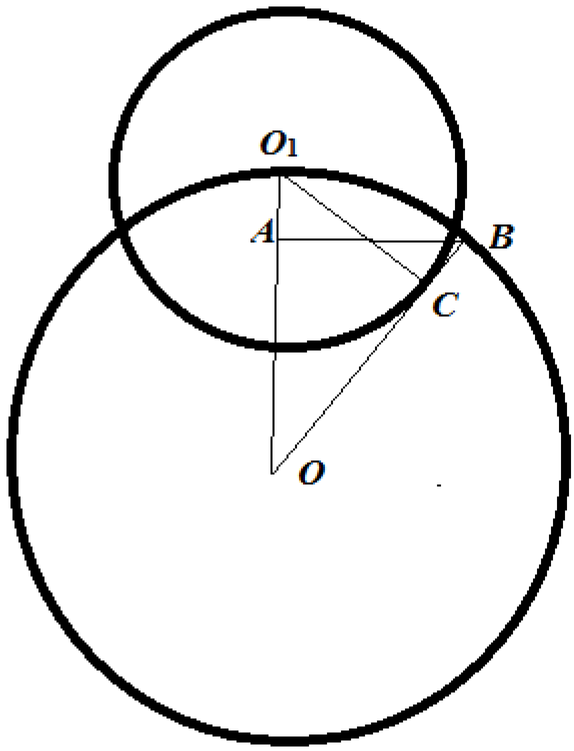
Мал.3.1.1.

Звідси випливає наступне твердження.

Лема 3.1.1. *Для того щоб кожна пряма, що проходить через центр сфери перетинала одну з куль з деякого набору куль з центрами на сфері* S^{n-1} *, необхідно і достатно щоби смуги, які їм відповідають, перетиналися всередині сфери.*

Використаємо Мал.3.1.1 і доведемо твердження, яке нам потрібне в розгляді наступних прикладів.

Лема 3.1.2. *Радіус* r_1 *сфери* S_1*, по якій площина* P_1 *перетинає сферу* S^{n-1} *дорівнює радіусу кулі* B_1.



Мал.3.1.2.

Доведення. Проведемо двовимірну площину через центри сфери S^{n-1} і кулі B_1 (Мал.3.1.2). Нехай відрізок OB – дотичний до кулі B_1 в точці C. Тоді відрізок AB дорівнює радіусу r_1 сфери S_1. Прямокутні трикутники ABO і

OO_1C рівні між собою, за рівними гіпотенузами $OO_1 = OB$ і спільними кутом BOO_1. Лема доведена.

3.2. Задача про тінь для куль фіксованого радіуса з центрами на сфері

Розглянемо в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ задачу про тінь для куль однакового радіуса.

Задача 3.2.1. *Якої мінімальної кількості замкнутих (відкритих) куль однакового радіуса, що попарно не перетинаються в n-вимірному дійсному евклідовому просторі* $\mathbb{R}^n$ *з центрами на сфері* S^{n-1} *і радіусу меншого від (що не перевищує) радіуса сфери досить, щоб будь-яка пряма, що проходить через центр сфери, перетинала хоча б одну з цих куль?*

У наступних прикладах розглянемо спробу підібрати набір куль одинакових радіусів для розв'язання задачі про тінь. З леми 3.1.2 випливає, що якщо набір куль рівного радіуса знаходиться в вершинах правильного многогранника, то для того, щоби пряма, яка проходить через центр сфери перетинала одну з куль, необхідно і достатньо щоб перетин відповідних смуг утворив правильнтй многогранник, що лежить всередині кулі. Перебиремо усі можливі варіанти для правильних многогранників в тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$.

Приклад 3.2.1. Впишемо в сферу S^2 правильний ікосаедр. Припустимо, що сфера S^2 одиничного радіуса. Тоді довжина ребра ікосаедра дорівнює $a = 2\sqrt{2/(5+\sqrt{5})} \approx 1.05146$ [95]. Виберемо 12 куль радіуса $r = a/2$ в вершинах ікосаедра. Припустимо, що цей набір куль вирішує завдання. Як показано в лемі 3.1.1, кожна така куля задає конус прямих з центру сфери, який вирізує на сфері коло радіуса $a/2 \approx 0.52573$. Якщо в одиничну сферу вписати правильний додекаедр, то довжина ребра додекаедра дорівнює $a_1 = 4/\left[\sqrt{3}(1+\sqrt{5})\right] \approx 0.7136$ [96]. Радіус кола описаного навколо правильного п'ятикутника (грані додекаедра) знайдемо з формули $t = R\sqrt{(5-\sqrt{5})/2}$, де t – довжина ребра додекаедра [97]. Отже,

$$R = 4\sqrt{2/3}/\left[(1+\sqrt{5})*\sqrt{5-\sqrt{5}}\right] \approx 0.607$$

Оскільки цей радіус більший від $a/2$, то обраних 12 куль недостатньо для створення тіні відносно променя з центру сфери.

Приклад 3.2.2. Впишемо в сферу S^2 додекаедр. Припустимо, що сфера S^2 одиничного радіуса. Тоді довжина ребра додекаедра дорівнює Тоді довжина ребра додекаедра дорівнює $a = 4/\left[\sqrt{3}(1+\sqrt{5})\right] \approx 0.7136$. Виберемо 20 куль радіуса $r = a/2$ в вершинах додекаедра. Припустимо, що цей набір куль вирішує завдання. Як показано в лемі 3.1.1, кожна така куля задає конус прямих з центру сфери, який вирізує на сфері коло радіуса $a/2 \approx 0.3568$. Якщо в одиничну сферу вписати правильний додекаедр, то довжина ребра ікосаедра дорівнює $a = 2\sqrt{2/(5+\sqrt{5})} \approx 1.05146$ [95]. Радіус кола описаного навколо правильного трикутника (грані ікосаедра) знайдемо з формули $t = R\sqrt{3}$, де t - довжина ребра ікосаедра. Отже,

$$R = 2\sqrt{2/(5+\sqrt{5})}/\sqrt{3} \approx 1.05146/1.7321 \approx 0.6071$$

Оскільки цей радіус більший від $a/2$, то обраних 20 куль недостатньо для створення тіні відносно променя з центру сфери.

Приклад 3.2.3. Впишемо в сферу S^2 куб. Припустимо, що сфера S^2 одиничного радіуса. Тоді довжина ребра куба дорівнює $a = 2/\sqrt{3}$. Виберемо 8 куль радіуса $r = a/2$ в вершинах куба. Припустимо, що цей набір куль вирішує завдання. Як показано в лемі 3.1.1, кожна така куля задає конус прямих з центру сфери, який вирізує на сфері коло радіуса $a/2 \approx 0.5774$. Якщо в одиничну сферу вписати правильний октаедр, то довжина ребра октаедра дорівнює $a_1 = \sqrt{2} \approx 1.4142$. Радіус кола описаного навколо правильного трикутника (грані октаедра)

$$R = \sqrt{2/3} \approx 0.8165$$

Оскільки цей радіус більший від $a/2$, то обраних 8 куль недостатньо для створення тіні відносно променя з центру сфери.

Приклад 3.2.4. Впишемо в сферу S^2 октаедр Припустимо, що сфера S^2 одиничного радіуса. Тоді довжина ребра октаедра дорівнює $a = \sqrt{2}$ [7]. Виберемо 6 куль радіуса $r = a/2$ в вершинах ікосаедра. Припустимо, що цей набір куль вирішує завдання. Як показано в лемі 3.1.1, кожна така куля задає конус прямих з центру сфери, який вирізує на сфері коло радіуса $a/2 \approx 0.7071$. Якщо в одиничну сферу вписати куб, то довжина ребра куба дорівнює $a_1 = 2/\sqrt{3} \approx 1.1547$. Радіус кола описаного навколо квадрата (грані куба) знайдемо з формули $t = R\sqrt{2}$, де t – довжина ребра куба. Отже,

$$R = \sqrt{2/3} \approx 0.8165$$

Оскільки цей радіус більший від $a/2$, то обраних 6 куль недостатньо для створення тіні відносно променя з центру сфери.

Приклад 3.2.5. Впишемо в сферу $S^{n-1}(0,r)$ n-вимірний правильний симплекс Δ_n і в кожній його вершині розмістимо замкнуті кулі радіуса рівного половині довжини ребра симплекса $a/2$. Кулі попарно доторкаються в середніх точках ребер симплекса. Легко перевірити обчисленнями, що довільна пряма, що проходить через центр сфери, перетинає, принаймні, одну з цих куль. Скористаємося відомими формулами для радіусів куль вписаних в правильний симплекс та описаних навколо нього [7].

Ці радіуси дорівнюють

$$r_n = \frac{a}{\sqrt{2n(n+1)}},$$

$$R_n = \frac{a\sqrt{n}}{\sqrt{2(n+1)}}$$

відповідно, де a – довжина сторони симплекса.

Нехай α – кут між віссю і твірною кругового конуса з вершиною в ортоцентрі симплекса, який містить криволінійний симплекс в основі вихідного сиплекса, що не покритий кулями.

Тоді

$$ctg\alpha = \frac{r_n}{r_{n-1}} = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}.$$

Нехай β – кут між віссю і твірною кругового конуса, що містить кулю в вершині симплекса.

Маємо

$$\sin\beta = \frac{a}{2R_n} = \sqrt{\frac{n+1}{2n}}.$$

Тоді
$$\cos\beta = \sqrt{\frac{n-1}{2n}}, \quad tg\beta = \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}.$$

Отже кути α і β рівні.

Покажемо необхідність $n+1$ кулі. Припустимо, що n куль $B_1, B_2, \ldots, B_n$ досить для створення тіні. Оскільки кулі знаходяться на одинаковій відстані від початку координат, то для будь якої пари куль B_1, B_i , $i=2,\ldots,n$

існує гіперплощина L_i, що розділяє цю пару куль і проходить через початок координат. Перетин цих n–1 гіперплощин містить пряму, яка не перетинає жодної кулі.

Якщо ж ми будемо розміщувати в вершинах симплекса відкриті кулі, то прямі, що проходять через центр сфери і середини ребер симплекса (точками дотику замкнених куль), з відкритими кулями перетинатися не будуть.

Звідси отримаємо наступне твердження.

Теорема 3.2.1. *$n+1$-єї замкнутої кулі однакового радіуса в просторі $\mathbb{R}^n$ з центрами на сфері S^{n-1} необхідно і досить для створення тіні в центрі сфери, якщо кулі можуть доторкатися одна одної.*

Досліджуємо можливість вирішити задачу про тінь для сімейства відкритих куль одинакового радіуса або сімейства замкнутих куль, що попарно не дотикаються. Далі через $\overline{A}$ позначаємо замикання множини A, а якщо $A \subset S^2$, то через A^* позначимо антиподальну до A множину (симетричну щодо центра сфери до множини A).

Покажемо спочатку, що чотирьох відкритих куль однакового радіуса в просторі з центрами на сфері S^2 недостатньо для створення тіні в центрі сфери. Припустимо, що існує сімейство з чотирьох куль, які вирішують задачу. Виберемо довільну пару куль. В силу рівності їх радіусів існує двовимірна площина L_1, що проходить через центр сфери, яка розділяє цю пару куль.

Аналогічно для іншої пари куль існує двовимірна площина L_2, що проходить через центр сфери, яка розділяє другу пару куль. Перетином площин L_1 і L_2 буде пряма l, що проходить через центр сфери і не перетинає жодного кулі. Звідси зокрема очевидно, що чотирьох замкнутих куль радіуса меншого, ніж $\sqrt{2/3} \approx 0.8165$ (половина ребра тетраедра) недостатньо для створення тіні в центрі сфери.

Тепер припустимо, що існує набір з $m > 4$ замкнутих куль B_i однакового радіуса в просторі $\mathbb{R}^3$ з центрами на сфері S^2, який забезпечує тінь в центрі сфери. Нехай спочатку існують три кулі, які попарно дотикаються одна одної. Вони вирізають на сфері відкритий криволінійний трикутник σ, не покритий кулями. Через ортоцентр цього трикутника проходить промінь, що виходить з центру сфери, який не перетинає жодної з куль набору. Отже, щоб пряма, яка містить цей промінь, перетинала одну з куль набору, антиподальний трикутник σ^* повинен бути покритим однією з куль набору. Якщо ж кулі попарно не дотикаються, то між ними існує область D більша від криволінійного трикутника, не покрита кулями. Антиподальну до неї відкриту область D^* неможливо покрити однією замкнутою кулею або набором куль, що дотикаються. Тому, якщо шуканий набір куль існує, то сусідні кулі повинні попарно дотикатися і множина $S^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{m} B_i$ складається з однакових відкритих криволінійних трикутників, що попарно не перетинаються. Антиподальна точка до ортоцентру кожного з таких трикутників в силу симетрії повинна бути центром однієї з куль сімейства. Тому центри куль повинні бути вершинами правильного многогранника вписаного в сферу з гранями з трикутників, причому на кожній прямій, що проходить через центр сфери може знаходитися не більше ніж одна вершина многогранника. Але таких правильних многогранників крім тетраедра не існує. Аналогічно зводиться до протиріччя ситуація з набором відкритих куль. Звідси отримуємо наступні твердження.

Теорема 3.2.2. *Не існує набору відкритих куль рівного радіусу, що попарно не перетинаються в тривимірному дійсному евклідовому просторі* $\mathbb{R}^3$ *з центрами на сфері* S^2 *і радіусу, що не перевищує радіуса сфери такого,* *що будь-яка пряма, що проходить через центр сфери, перетинала б хоча один з цих куль.*

Теорема 3.2.3. *Не існує набору з* $m > 4$ *замкнутих куль* B_i *рівного радіусу, що попарно не перетинаються (або дотикаються) в тривимірному дійсному евклідовому просторі* $\mathbb{R}^3$ *з центрами на сфері* S^2 *і радіусу меншого від радіуса сфери такого, що будь-яка пряма, що проходить через центр сфери, перетинала б хоча одну з цих куль?*

Досліджуємо аналогічну ситуацію в разі, коли центри набору куль не прив'язані до сфери.

Приклад 3.2.6. Розглянемо в просторі $\mathbb{R}^3$ чотири відкритих кулі B_1, B_2, B_3, B_4 одиничного радіуса с центрами в точках (0,0,1), $(\sqrt{3},0,0),(-\sqrt{3}/2,3/2,0),(-\sqrt{3}/2,-3/2,0)$ відповідно. Легко переконатися, що довільна пряма, що проходить через початок координат, перетинає, принаймні, одну з цих куль. Тут куля B_1 доторкається інших трьох куль. В силу неперервності, існує $\varepsilon > 0$ таке, що при зсуві центру кулі B_1 в точку $(0,0,1+\varepsilon)$ всі кулі вже попарно не доторкаються, але довільна пряма, що проходить через початок координат, буде перетинатися, принаймні з однією з замкнутих куль $\overline{B}_1, \overline{B}_2, \overline{B}_3, \overline{B}_4$.

Звідси отримуємо наступне твердження.

Теорема 3.2.4. *Чотирьох замкнутих (відкритих) куль однакового радіуса, що попарно не перетинаються, в просторі* $\mathbb{R}^3$ *досить для створення тіні в фіксованій точці.*

3.3. Задача про тінь для куль з вільними центрами

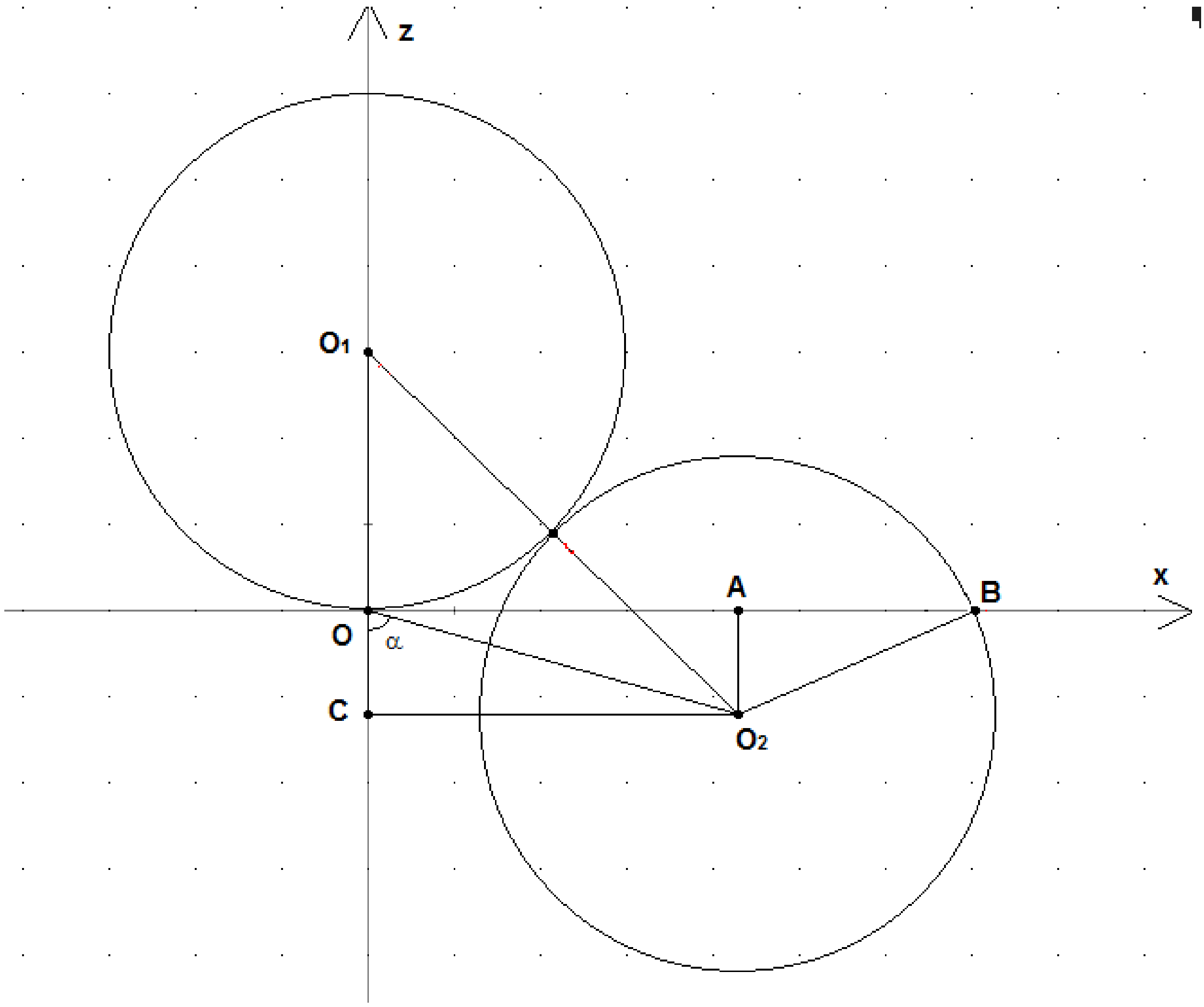
Розглянемо в тривимірному евклідовому просторі задачу про тінь для куль однакового радіуса з вільно розташованими центрами.

Задача 3.3.1. *Яку мінімальну кількість замкнутих (відкритих) куль однакового радіуса, що попарно не перетинаються в тривимірному дійсному евклідовому просторі* $\mathbb{R}^3$ *необхідно і достатньо щоб будь-яка пряма, яка проходить через фіксовану точку простору, перетинала хоча б одну з цих куль?*

Тепер сформульовану задачу можна розглядати як окремий випадок належності точки до 1-оболонки об'єднання деякого набору куль однакового радіуса.

Дослідимо, коли сімейство куль забезпечить належність обраної точки до 1-опуклої оболонки цього сімейства. Не порушуючи загальності, припустимо, що ця точка збігається з початком координат O = (0,0,0) простору, а радіуси відкритих куль дорівнюють одиниці. Покажемо, що двох куль недостатньо для створення тіні ні в одній точці. Припустимо, що двох куль B_1 і B_2 досить. В силу опуклості кожної кулі існує гіперплощина L_i, що містить обрану точку, яка не перетинає кулю B_i.

Перетин гіперплощин $l = L_1 \cap L_2$ містить шукану пряму. Точки простору будемо позначати координатами (x, y, z).



Мал.3.3.1.

Спочатку перевіримо, чи можна створити тінь для точки, що лежить на межі одноієї з куль. Виберемо першу відкриту кулю B_1 одиничного радіуса з центром в точці $O_1 = (0,0,1)$. Тепер прямі через початок координат, які не перетинають цю кулю, повинні лежати в площині xOy. Другу відкриту кулю B_2 одиничного радіуса виберемо в площині xOz з центром в точці O_2, так щоб вона доторкалася до кулі B_1. Розглянемо перетин куль B_1 і B_2 площиною xOz (див. мал.3.3.1). Позначимо відстань $/OO_2/ = a > 1$, а кут AOO_2 через α. Тоді в трикутнику O_2CO_1 маємо $O_1C=1+a \cos \alpha$, $CO_2 = a \sin \alpha$, $OO_1=2$. З теореми Піфагора отримуємо рівність

$$(1+a\cos\alpha)^2+a^2\sin^2\alpha=4$$

або $$1+2a\cos\alpha+a^2=4.$$

Оскільки нас цікавить позитивний корінь, то

$$a=-\cos\alpha+\sqrt{3+\cos^2\alpha}\ .$$

.

Відрізок AB задає радіус круга D по якому куля B_2 перетинає площину xOy. Маємо

$$AB=\sqrt{1-a^2\cos^2\alpha}\ .$$

Тепер, якщо ми позначимо через β кут під яким круг D видно з початку координат, то

$$\sin(\beta/2)=\frac{\sqrt{1-a^2\cos^2\alpha}}{a\sin\alpha}.$$

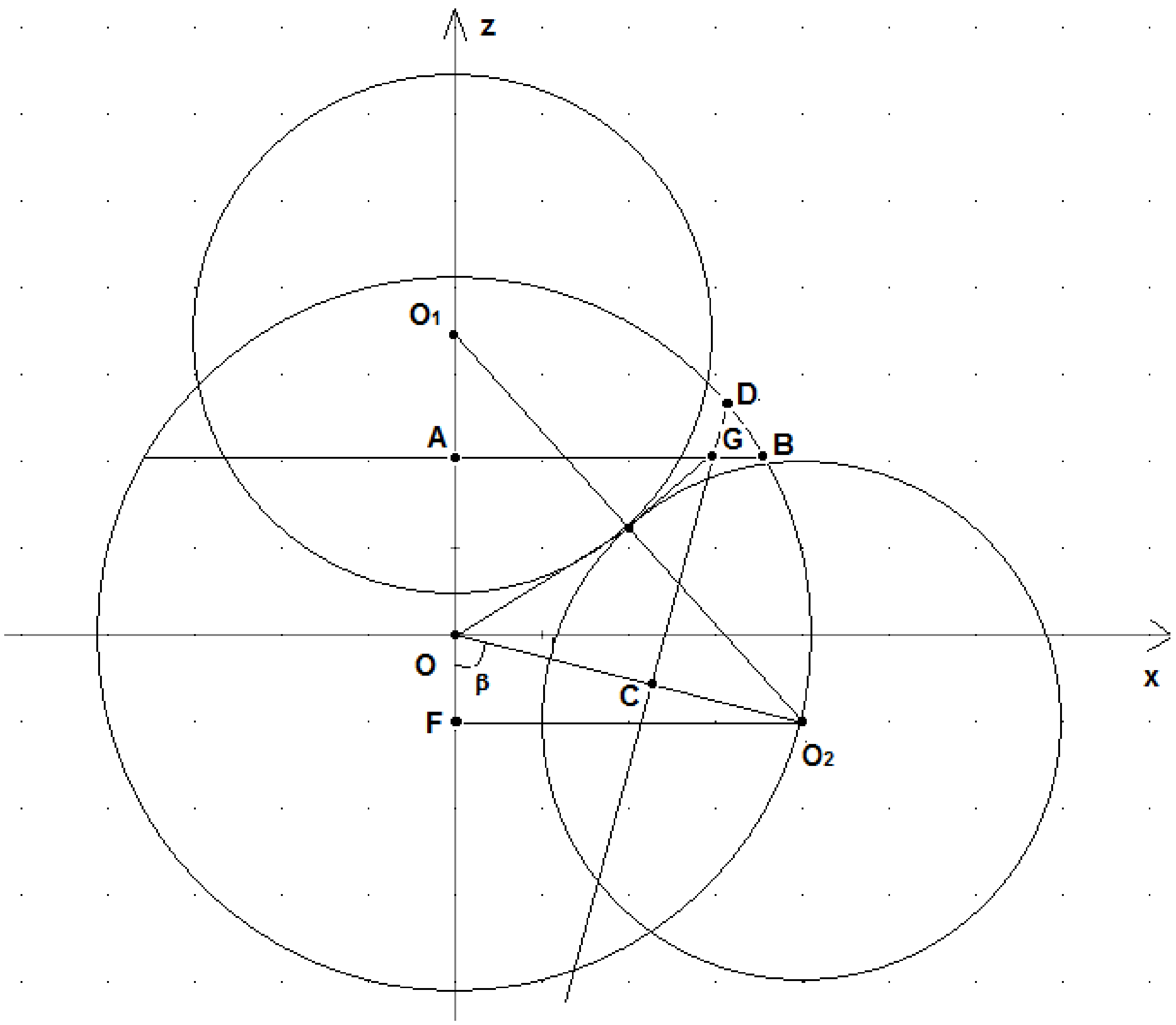
Легко переконатися, що це функція, яка зростає по α в проміжку $(0, \pi/2)$, тому на цьому інтервалі можна вибрати значення синуса як завгодно близьким до $1/a$ коли α прямує до $\pi/2$. При цьому $/OO_2/$ прямує до $\sqrt{3}$. Отже, $\sin(\beta/2)\le 1/\sqrt{3}$ тому кут $\beta<\pi/2$. Аналогічно, третю кулю теж видно з початку координат в площині xOy під кутом, що не перевищує $\pi/2$. Звідси випливає, що в площині xOy існує пряма, що проходить через точку $(0,0,0)$ і яка не перетинає жодної з трьох куль.

Звідси отримуємо наступне твердження.

Теорема 3.3.1. *Довільний набір з трьох відкритих куль однакового радіуса в просторі* $\mathbb{R}^3$*, що попарно не перетинаються, утворює слабко* 1-*опуклу множину*.

Припустимо тепер, що трьома кулями все ж таки можна забезпечити тінь в початку координат $O = (0,0,0)$, якщо точка O не лежить на межі жодної кулі. Нехай B_1, B_2, B_3 – такий набір куль, впорядкований по збільшенню відстані від точки O, а точка O_1 – центр найближчої кулі B_1 до початку координат.

Виберемо систему координат так, щоб площина xOz проходила через центри O_1, O_2 двох найближчих до точки O куль і точка O_1 перебувала на осі Oz (Див. Мал.3.3.2).



Мал.3.2.2.

Тінь, що створена кулею B_2, збільшується в міру його наближення до точки O, тому при оцінці можемо вважати, що кулі B_1, B_2 доторкаються одна однієї. Для зручності розрахунків будемо вважати, що OO_2 = 1, а радіуси куль рівні деякому r < 1. Використовуємо міркування, застосовані в [32] для оцінок тіні за допомогою куль з центрами на фіксованій сфері. Проведемо сферу одиничного радіуса з центром в початку координат. Нехай OB дотична пряма до кулі B_1 в площині xOz, а OD дотична пряма до кулі B_2 в тій же площині. Опустимо перпендикуляри: BA – з точки В на вісь Oz, DC – з точки D на відрізок OO_2. Позначимо $r_1 = |O_1O| < 1$, а кути $\angle O_1OB = \alpha$, $\angle FOO_2 = \beta$, де точка F - проекція точки O_2 на вісь Oz. Тоді $AB = \sin\alpha = r/r_1$, $OF = \cos\beta, FO_2 = \sin\beta, OO_2 = 2r$. Позначимо через G точку перетину відрізків AB і CD. Як показано в [32], для існування тіні в точці O радіус третьої кулі з центром на сфері повинен бути не меншим від довжини відрізка OG.

Оцінимо довжину цього відрізка. Відзначимо, що точка G лежить на колі, що проходить через точки O, $A(0,\sqrt{1-r^2/r_1^2}), C(\sqrt{1-r^2}\sin\beta, -\sqrt{1-r^2}\cos\beta)$. Позначимо центр цього кола точкою (x, y). Запишемо рівняння цього кола

$$(\sqrt{1-r^2}\sin\beta - x)^2 + (\sqrt{1-r^2}\cos\beta + y)^2 = x^2 + y^2.$$

Маємо $\quad y = \sqrt{1-r^2/r_1^2}\,/\,2.$

Тепер $\quad 2x = \sqrt{1-r^2}\,/\sin\beta + \sqrt{1-r^2/r_1^2}\,ctg\beta,$ де

$$r_1 = \sqrt{4r^2 - \sin^2\beta} - \cos\beta.$$

Звідси

$$OG^2 = (1-r^2)/\sin^2\beta + 2\sqrt{1-r^2}\sqrt{1-r^2/r_1^2}\cos\beta/\sin^2\beta + ctg^2\beta - r^2 ctg^2\beta/r_1^2 +$$
$$+1 - r^2/r_1^2 = (2-r^2)/\sin^2\beta - r^2/r_1^2/\sin^2\beta + 2\sqrt{1-r^2}\sqrt{1-r^2/r_1^2}\cos\beta/\sin^2\beta.$$

Нас цікавить мінімально можливе значення OG. Для оцінки цього мінімуму використовуємо Microsoft Excel. Мінімальне значення OG = 0,76 отримаємо при наступних значеннях $\sin\beta = 0.58$, $r = 0.91, r_1 = 0.9105$. Тоді куля B_3 повинна знаходитися на осі Oy на відстані не далі ніж $r/OG=1{,}195$ від початку координат. Але тоді відстань OO_3 не перевищує $\sqrt{OO_1^2 + OO_3^2} = \sqrt{0.9105^2 + 1.195^2} \approx 1.5 < 2r = 1.83$. Отже, кулі B_1 і B_3 повинні перетинатися. Звідси отримаємо більш сильне твердження.

Теорема 3.3.2. *Довільний набір з трьох відкритих куль однакового радіуса, що попарно не перетинаються в просторі* $\mathbb{R}^3$ *утворює* 1-*опуклу множину.*

З цього результату і теореми 3.2.4 отримуємо результат.

Теорема 3.3.3. *Чотирьох замкнутих (відкритих) куль однакового радіуса в просторі* $\mathbb{R}^3$, *що попарно не перетинаються необхідно і достатньо для створення тіні в фіксованій точці.*

Для набору з трьох куль в просторі $\mathbb{R}^n$ має місце твердження.

Теорема 3.3.4. *Для довільної точки простору* $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^{3} B_i$, *де* B_1, B_2, B_3 – *набір з трьох куль однакового радіуса, які попарно не перетинаються і не проходять через цю точку, існує* $(n-2)$-*вимірна площина, що містить цю точку і не перетинає жодну з куль.*

Доведення. Нехай задано набір з трьох куль B_1, B_2, B_3 однакового радіуса, які попарно не перетинаються і не проходять через деяку точку x. Проведемо тривимірну площину L через чотири точки: три центри куль і точку x. Перетини вибраних куль з площиною L задають три тривимірні кулі $B_1^{/}, B_2^{/}, B_3^{/}$ Тоді згідно з теоремою 3.2.6. в площині L існує пряма l, яка не перетинає жодної з цих куль. Тепер розглянемо ортогональне доповнення L_1 до площини в просторі $\mathbb{R}^n$. Це $(n-3)$-вимірна площина. Очевидно, що декартів добуток $l \times L_1$ буде (n–2)-вимірною площиною, яка проходить через точку x і не перетинає жодної з куль B_1, B_2, B_3. Теорему доведено.

Наслідок 3.3.1. *Довільний набір із трьох куль однакового радіуса, які попарно не перетинаються, утворює слабко* (n–2)*-опуклу множину в евклідовому просторі* $\mathbb{R}^n$.

Дослідимо, коли сімейство куль забезпечить належність обраної точки до 1-напівопуклої оболонки сімейства. Не порушуючи загальності, припустимо, що ця точка збігається з початком координат (0,0,0) простору $\mathbb{R}^3$. Точки простору будемо позначати координатами (x, y, z). Виберемо дві відкритіх кулі одиничного радіуса B_1 і B_2 в точках (0,0,1) і (0,0, –1) відповідно. Тепер промені з початку координат, які не перетинають ці дві кулі, повинні лежати в площині xOy.

Розмістимо три відкритих кулі одиничного радіуса з центрами в точках відповідно $(\sqrt{3},0,0),(-\sqrt{3}/2,3/2,0),(-\sqrt{3}/2,-3/2,0)$, на відстані $r_1=\sqrt{3}$ від початку координат. Ще три відкритих кулі одиничного радіуса розмістимо з центрами в точках

$$(-(\sqrt{3}+\sqrt{7})/2,0,0),((\sqrt{3}+\sqrt{7})/4,(3+\sqrt{21})/4,0),((\sqrt{3}+\sqrt{7})/4,-(3+\sqrt{21})/4,0)$$

на відстані $r_2=(\sqrt{3}+\sqrt{7})/2$ від початку координат. Ці перші три кулі доторкаються заданих двох куль B_1 і B_2 і їх видно з початку координат в площині xOy під кутом α, синус половини якого дорівнює $1/\sqrt{3}$. Отже, $\alpha/2=\arcsin(1/\sqrt{3})=0{,}549306$, $\alpha=1{,}098612$.

Оскільки кожна куля з другої трійки доторкається до двох сусідніх куль першої трійки, а центри їх знаходяться на різній відстані від початку координат в силу співвідношення $r_1<r_2$, то дотична до двох сусідніх куль в точці їх дотику не може проходити через початок координат.

Тому цей набір з восьми куль забезпечить належність початку координат до 1-напівопуклої оболонки їх об'єднання. Як і вище трохи зменшуючи радіуси куль, бачимо, що існує набір із восьми замкнутих куль з тими ж властивостями. Отримуємо наступне твердження.

Теорема 3.3.5. *Для того щоб точка в тривимірному евклідовому просторі належала до* 1*-напівопуклої оболонки сімейства відкритих (замкнених) куль постійного радіуса досить восьми куль.*

Питання мінімальності знайденої нами кількості куль залишається відкритим.

3.4. Задача про тінь в комплексному і гіперкомплексному просторі

Метою цього підрозділу є повне розвязання задачі про тінь в комплексному та гіперкомплексному просторі. При цьому ми узагальнюємо частковий результат [89] процитований в першому розділі (теорема 1.4.7).

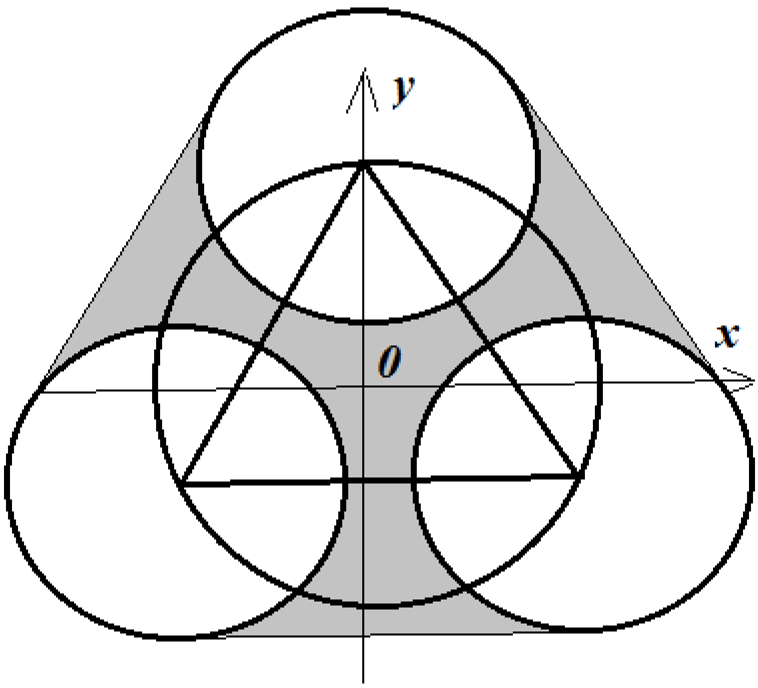
Теорема 3.4.1. *Для того щоб початок координат в n-вимірному комплексному (гіперкомплексному) евклідовому просторі* $\mathbb{C}^n(\mathbb{H}^n)$, $n > 2$ *належав до* 1*-комплексної (*1*-гіперкомплексної) оболонки сімейства відкритих (замкнених) куль з центрами на одиничній сфері* $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n (S^{4n-1} \subset \mathbb{H}^n)$, *що попарно не перетинаються і які не містять початок координат, необхідно і досить* $n+1$ *кулі.*

Доведення. Проведемо доведення в комплексному просторі, в гіперкомплексному випадку міркування аналогічні. Виберемо в просторі $\mathbb{C}^n$ n-вимірну дійсну площину L, задану рівностями

$$L = \left\{ z = (z_1, z_2, ..., z_n) \middle| \operatorname{Im} z_i = 0, \forall i = 1, 2, ...n \right\}.$$

Тоді відомо, що кожна комплексна пряма перетинає площину L по деякій дійсній прямій. Тепер досить розмістити центри куль на перетині площини зі сферою $L \cap S^{n-1}$ і застосувати до нього теорему 1.4.1.

Лема 3.4.1. *Розглянемо рівносторонній трикутник ABC (див. Мал.*3.4.1) *в евклідовій площині* $\mathbb{R}^2$. *Якщо ми виберемо три замкнуті круги* $B_i, i = 1, 2, 3$, *з центрами в вершинах цього трикутника і фіксованого радіуса рівного половині висоти трикутника, то кожна пряма, що проходить через довільну точку* $x \in (\bigcup_{i=1}^{3} B_i)^* \setminus \bigcup_{i=1}^{3} B_i$, *де* $(\bigcup_{i=1}^{3} B_i)^*$ – *опукла оболонка множини* $\bigcup_{i=1}^{3} B_i$, *перетинається не менше ніж з одним із вибраних кругів.*



Мал.3.4.1

Доведення. Не порушуючи загальності нехай задане одиничне коло з центром в початку координат. Впишемо в нього рівносторонній трикутник з вершинами в точках (0,1), $(\sqrt{3}/2,-1/2),(-\sqrt{3}/2,-1/2)$. Розмістимо в кожній вершині трикутника круг радіуса 3/4.

Відзначимо, що коло, описане навколомо цього трикутника, лежить в опуклій оболонці цих трьох кругів. Легко бачити, що будь яка пряма проведена через точку, що належить множині виділеній сірим кольором на малюнку перетинає принаймні одинг з трьох виділених кругів. Лема 3.4.1 вирішує задачу 5 при n = 2. Ледь збільшуючи радіуси вибраних кругів переконуємося, що лема справедлива і для трьох відкритих кругів фіксованого радіуса.

Дослідимо як можна використати отриманий результат в випадку комплексного і гіперкомплексного евклідового простору.

Теорема 3.4.2. *Для того щоб початок координат в двовимірному комплексному (гіперкомплексному) евклідовому просторі* $\mathbb{C}^2(\mathbb{H}^2)$ *належав до* 1*-комплексної (*1*-гіперкомплексної) оболонки сімейства відкритих (замкнених) куль фіксованого радіуса з центрами на одиничній сфері* $S^3 \subset \mathbb{C}^2(S^7 \subset \mathbb{H}^2)$, *що попарно не перетинаються і які не містять початок координат, необхідно і досить трьох куль.*

Доведення. Проведемо доведення в комплексному просторі, в гіперкомплексному випадку міркування аналогічні. Виберемо в просторі $\mathbb{C}^2$ двовимірну дійсну площину L, задану рівностями

$$L = \left\{ z = (z_1, z_2) \middle| \operatorname{Im} z_i = 0, i = 1,2 \right\}.$$

Тоді відомо, що кожна комплексна пряма перетинає площину L по деякій дійсній прямій. Тепер досить розмістити центри куль на перетині площини зі сферою $L \cap S^3$ і застосувати до нього лему 3.4.1.

Теорема 3.4.3. $n+1$*-ї замкнутої кулі однакового радіуса в просторі* $\mathbb{C}^n$ $(\mathbb{H}^n)$ *з центрами на сфері* S^{2n-1} (S^{4n-1}) *досить для створення тіні в центрі сфери, якщо кулі можуть торкатися одна одної.*

Доведення. Проведемо доведення в комплексному просторі, в гіперкомплексному випадку міркування аналогічні. Виберемо в просторі $\mathbb{C}^n$ n-вимірну дійсну площину L, задану рівностями

$$L = \left\{ z = (z_1, z_2, ..., z_n) \,\middle|\, \operatorname{Im} z_i = 0, \forall i = 1, 2, ...n \right\}.$$

Тоді відомо, що кожна комплексна пряма перетинає площину L по деякій дійсній прямій. Тепер досить розмістити центри куль на перетині площини зі сферою $L \cap S^{n-1}$ і застосувати до нього теорему 3.2.1.

3.5. Задача про тінь дотичну до многовиду

Означення 3.5.1. *Скажемо, що сім'я множин* $\Im = \{F_\alpha\}$ *задає тінь, дотичну до многовиду* M *в точці* $x \in M$, *якщо кожна пряма, дотична до многовиду* M *в точці* $x \in M \setminus \bigcup_\alpha F_\alpha$, *має непорожній перетин хоча б з однією з множин* F_α, *яка належить до сім'ї* $\Im$.

Сформульована в попередньому підрозділі лема 3.4.1 дає підхід до оцінок в задачі 6.

Цей результат показує, що в тривимірному випадку також для довільної точки сфери можна вибрати три кулі, що попарно дотикаються, які забезпечать тінь у всіх точках криволінійного трикутника, вирізаного на сфері цими кулями. Однак, як показує наступний приклад, узгодження такої конструкції для всієї сфери вимагає додаткових міркувань.

Приклад 3.5.1. Існує набір із 14 відкритих (замкнутих) куль, що попарно не перетинаються с центрами на сфері $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, який не може забезпечити тінь, дотичну до сфери S^2 в кожній точці $x \in S^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{14} B_i$.

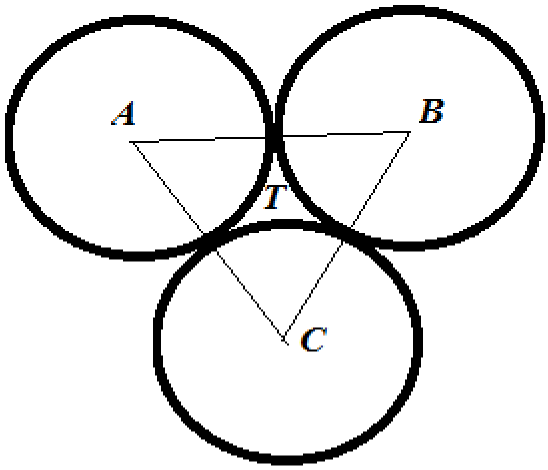
Не порушуючи загальності можна припустити, що обрана сфера $S^2(0,1)$ з центром в початку координат радіуса одиниця. Впишемо в цю сферу куб з вершинами в точках $(x = \pm 1/\sqrt{3}, y = \pm 1/\sqrt{3}, z = \pm 1/\sqrt{3})$. Довжина ребра куба дорівнює $a = 2/\sqrt{3}$. Тепер виберемо вісім відкритих куль з центрами в вершинах куба і радіуса рівного половині ребра куба $r = 1/\sqrt{3} \approx 0.577$. Додамо до цього сімейства шість нових відкритих куль з центрами в точках перетину променів, що виходять з початку координат і проходять через центр грані куба, зі сферою S^2. Радіуси цих куль дорівнюють $r_1 = \sqrt{2 - 2/\sqrt{3}} - 1/\sqrt{3}$.

Кожен з них доторкається рівно чотирьох раніше обраних куль. Виберемо двовимірну площину, задану рівнянням $z = 0$, що проходить через екваторіальне коло сфери, яка проходить через чотири центри (1,0,0), (0,1,0), (-1,0,0), (0, -1,0) куль меншого радіуса $r_1 \approx 0.342$. Оскільки $1 < \sqrt{2}/2 + r_1 \approx 1,049$, то пряма лінія, дотична до екваторіального кола в точці $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$, перетинає кулі меншого радіуса. Для площині $x + y = 2\sqrt{2}$, що дотикається до сфери в точці $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$, в перетині з системою куль отримуємо дві пари кіл, кожна пара з яких симетрична щодо точки $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$, а їх центри знаходяться на парі перпендикулярних прямих. Радіуси цих кіл легко обчислюються. Маємо два кола радіусу $r_2 \approx 0.547$. Їх центри віддалені від точки перетину прямих на відстань $l_2 \approx 0.577$. Інша пара кіл радіуса $r_3 \approx 0.1766$ має центри, віддалені від точки перетину прямих на відстань $l_3 \approx 0.707$. Підраховуючи синуси кутів, під якими їх півкола видно з точки $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ (що збігається з точкою перетину прямих), отримаємо значення 0,948 і 0,249, відповідно. Їм відповідають дуги в менше ніж arcsin 0.948 $\approx$ 71,5^{o} і arcsin 0.249 $\approx$ 14,5^{o} в градусному вимірі. Оскільки їх сума менше 90^{o}, приходимо до висновку, що існує пряма в дотичній площині, що проходить через точку $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$, яка не перетинає жодну з виділених кіл. Збережемо центри сімейства куль, а радіуси куль виберемо рівними половині відстані від вершин куба до центрів менших куль $r \approx 0.4597$. Аналогічно попереднім міркуванням в перерізі з площиною $x + y = 2\sqrt{2}$ отримаємо дві пари кіл радіусів $r_4 \approx 0.4215$ і $r_5 \approx 0.354$, відповідно. Підраховуючи синуси кутів, під якими їх півкола видно з точки $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$, отримаємо значення 0,731 і 0,5. Їм відповідають дуги виміру менше ніж arcsin 0.731 $\approx$ 47^{o} і arcsin 0.5 = 30^{o}. Оскільки їх сума менша ніж 90^{o}, то також приходимо до висновку, що існує пряма в дотичній площині, що проходить через точку $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$, яка не перетинає жодного з виділених кіл. До речі в другому випадку зазор між кулями збільшується.

Цей набір куль двох різних радіусів досить щільно заповнює сферу в тому сенсі, що неможливе збільшення кількості цих куль без взаємних перетинів, але як показують обчислення, цієї системи куль не вистачає для створення тіні, дотичної до сфери S^2 в кожній точці $x \in S^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{14} B_i$.

Побудований набір дає оцінку знизу необхідної кількості куль. Оцінка зверху залишається відкритою.

Лема 3.5.1. *Якщо три кулі B_1, B_2, B_3 радіуса r з центрами на сфері S^2 в точках A,B,C відповідно, попарно дотикаються, то кожна пряма дотична до сфери в точці в якій її перетинає промінь, що виходить з центру сфери і* *проходить через ортоцентр трикутника ABC, перетинає принаймні одну з куль, якщо радіус куль не перевищує* 12/19 *радіуса сфери.*

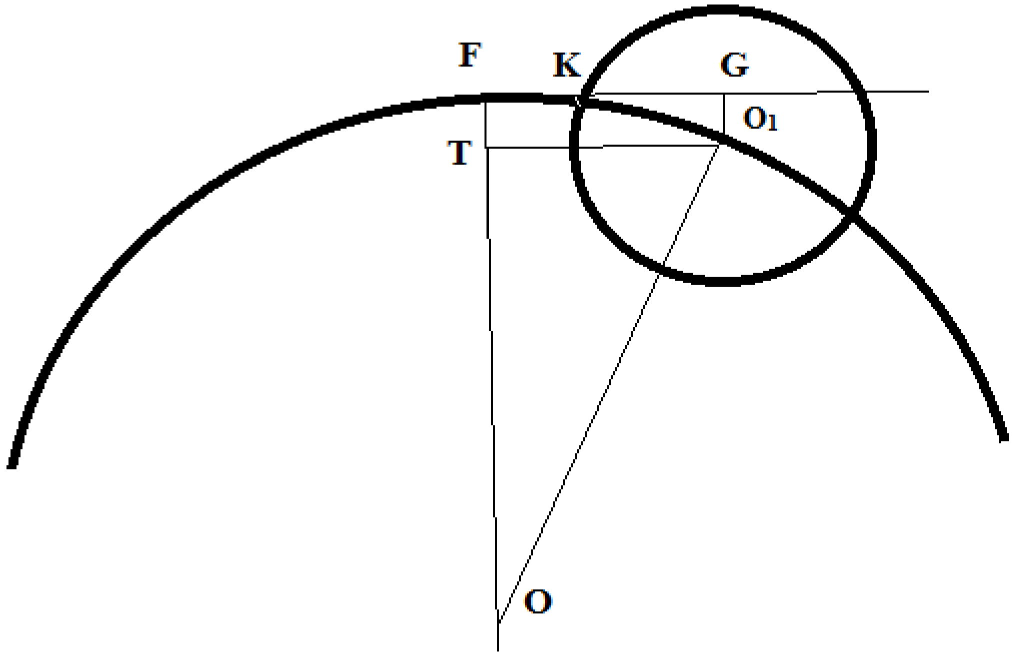


Мал.3.5.1.

Доведення. Розглянемо дотичну до сфери площину L в точці F, яка містить усі дотичні прямі згадані в лемі (див. Мал. 3.5.1). Нехай R – радіус сфери, а r – радіуси куль. Тоді $AB = 2r$, $AT = 2r/\sqrt{3}$

Висота трикутника ABC дорівнює $\sqrt{3}r$.

Припустимо, що радіус кола по якому площина L перетинає одну з куль дорівнює половині цієї висоти $GK = \sqrt{3}r/2/$. Тоді $GO_1 = r/2$.



Мал.3.5.2.

Тоді на Мал. 3.5.2 $FO = OO_1 = R$, $FT = GO_1$. З трикутника OTO_1 одержимо рівняння

$$(2\sqrt{3}r)^2 + (R - r/2)^2 = R^2.$$

Звідси

$$4r^2/3 + R^2 - Rr + r^2/4 = R^2$$

або

$$r = 12R/19.$$

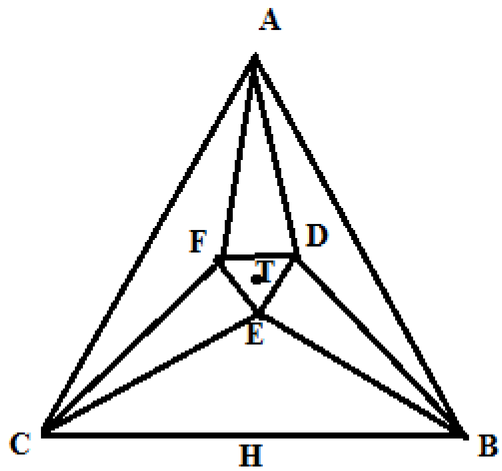
Тепер досить застосувати лему 3.5.1. Якщо радіус кулі менший, то очевидно, що тведження леми виконується.

Наслідок 3.5.1. *Нехай ABCK – правильний симплекс, вписаний в одиничну сферу* S^2, *з вершинами в точках* $A(0,\ 2\sqrt{2}/3, 1/3)$, $B(\sqrt{2/3}, -\sqrt{2}/3, 1/3)$,

$C(-\sqrt{2/3}, -\sqrt{2}/3, 1/3)$, $K(0,0,\ -1)$ *відповідно, то існує пряма дотична до сфери в точці* F (*в якій її перетинає промінь, що виходить з центру сфери і проходить через ортоцентр* T *трикутника* ABC), *яка не перетинає жодної з куль* B_1, B_2, B_3, B_4 *радіусів* $\sqrt{2/3}$, *розміщених в вершинах симплекса.*

Доведення випливає з того, що $\sqrt{2/3} > 12/19$.

Лема 3.5.2. *Нехай в попередній ситуації добавимо три кулі B_5, B_6, B_7 радіуса r з центрами на сфері S^2 в точках D,E,F відповідно, що попарно дотикаються, крім того кожна з них дотикається до двох куль попереднього набору, то кожна пряма дотична до сфери в точці в якій її перетинає промінь, що виходить з центру сфери і проходить через ортоцентр трикутника ABC, перетинає принаймні одну з цих куль.*



Мал.3.5.3.

Доведення. Зауважимо, що площина трикутника DEF паралельна площині трикутника ABC. Координати вершин A, B, C візьмемо з попереднього наслідку, а координати вершин D, E, F запишемо в наступному виді

$$D(y\sqrt{3}/2, y/2, z),\ E(0,-y,z),\ F(-y\sqrt{3}/2, y/2, z)\ ,$$

використовуючи паралельність площин і симетрію відносно ортоцентра рівностороннього трикутника DEF. З умови дотику нових куль $r = y\sqrt{3}/2$.

З того, що точка лежить на сфері, маємо

$$y^2 + z^2 = 1. \qquad (*)$$

Вектор $\overline{AF}$ запишемо через координати кінцевих точок

$$\overline{AF} = \left\{-y\sqrt{3}/2, y/2 - 2\sqrt{2}/3, z - 1/3\right\}.$$

Наступне рівняння одержимо прирівнюючи з одного боку довжину цього вектора, а з другого використаємо, що ця довжина дорівнює сумі радіусів куль B_1 і B_5 згідно з умовою дотику.

$$(y\sqrt{3}/2)^2 + (y/2 - 2\sqrt{2}/3)^2 + (z - 1/3)^2 = (\sqrt{2/3} + y\sqrt{3}/2)^2,$$

$$3y^2/4 + y^2/4 - 2\sqrt{2}y/3 + 8/9 + z^2 - 2z/3 + 1/9 =$$
$$= 2/3 + \sqrt{2}y + 3y^2/4.$$

Після спрощення маємо

$$y^2/4 - 5\sqrt{2}y/3 + z^2 - 2z/3 + 1/3 = 0.$$

Підставимо значення змінної z з рівняння (*)

$$y^2/4 - 5\sqrt{2}y/3 + 1 - y^2 - 2\sqrt{1 - y^2}/3 + 1/3 = 0.$$

Спростимо рівняння

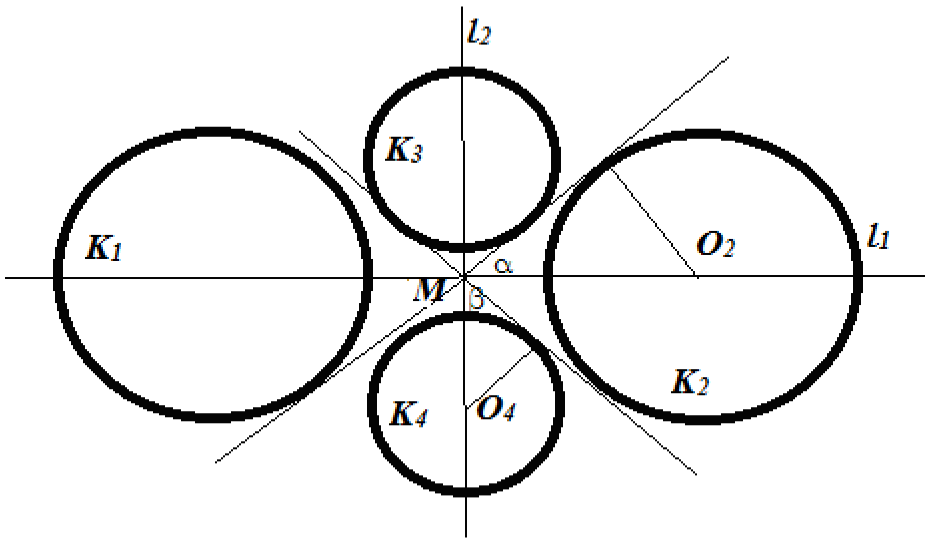
$$3y^2/4 + 5\sqrt{2}y/3 + 2\sqrt{1 - y^2}/3 - 4/3 = 0,$$

$$9y^2 + 20\sqrt{2}y + 8\sqrt{1 - y^2} - 16 = 0.$$

Розв'яжемо рівняння наближеними методами. Одержимо $y \approx 0{,}3673$. Отже $z \approx 0{,}9301$. Звідси шукане значення радіуса $r \approx 0{,}3181$. Твердження леми випливає з нерівності $0{,}3181 < 12/19$.

Лема 3.5.3. *Впишемо в сферу* $S^2(0,1)$ *правильний тетраедр. Виберемо* 4 *кулі* B_1, B_2, B_3, B_4 *радіуса* $r = a/2$ *в вершинах тетраедра, де*

$a = 2\sqrt{2/3}$ – *довжина ребра тетраедра. Далі як і в попередній лемі добавимо по три кулі радіуса* $r_1 \approx 0{,}3181$ (*всього* 12 *нових куль*) *з центрами на сфері* S^2 *і в кожній площині паралельній грані тетраедра. Кожна трійка нових куль аналогічно лемі 3.5.2 попарно дотикається, крім того кожна з них дотикається до двох з чотирьох куль попереднього набору. Тоді кожна пряма дотична до сфери в точці М в якій її перетинає промінь, що виходить з центру сфери і проходить через середину ребра тетраедра, перетинає принаймні одну з цих* 16 *куль.*



Мал.3.5.4.

Доведення. Скористаємося малюнком 3.5.4. Нехай точка *H* – середина ребра *CB*. Її координати ($0,-\sqrt{2}/3$,1/3). Знайдемо точку на сфері в якій промінь *OH*, що виходить з початку координат,перетинає сферу. Це точка *M* з координатами $(0,-\sqrt{2}/\sqrt{3},1/\sqrt{3}) \approx (0,-0.8165,0.5774)$.

Запишемо рівняння площини *L*, дотичної до сфери в цій точці

$$-\sqrt{2/3}(y+\sqrt{2/3})+1/\sqrt{3}(z-1/\sqrt{3})=0,$$

або

$$\sqrt{2}y - z + \sqrt{3} = 0.$$

Площина L перетинається з системою куль по чотирьох кругах K_1, K_2, K_3, K_4, центри яких заходяться на парі перпендикулярних прямих l_1, l_2, які проходять через точку M. Кулі розташовані симетрично відносно цієї точки.

Знайдемо відстань d від центра кулі B_2 до площини L

$$d = \frac{\left| -\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} \right|}{\sqrt{3}} \approx 0.2818.$$

Оскільки радіус кулі B_2 дорівнює $\sqrt{2/3}$, то знайдемо радіус круга K_2

$$r_2 = \sqrt{2/3 - (0.2818)^2} \approx 0.7693.$$

З того, що відстань MO_2 співпадає з радіусом кулі B_2 $\sqrt{2/3} \approx 0.8165$ ми можемо знайти синус кута α під яким видно верхній півкруг круга K_2 з точки M.

$$\sin\alpha = \frac{0.7663}{0.8165} \approx 0.9386.$$

Отже $\alpha \approx \arcsin 0.9386 \approx 69.8^o$.

Аналогічно знайдемо відстань d_1 від центра кулі B_4 до площини L

$$d_1 = \frac{\left| -\sqrt{2} * 0.3673 - 0.9301 + \sqrt{3} \right|}{\sqrt{3}} \approx 0.1631.$$

Знайдемо вектор $\overline{ME} = \{0, 0.4492, 0.3528\}$. Його довжина

$$\left|\overline{ME}\right| = \sqrt{(0.4492)^2 + (0.3528)^2} \approx 0.5711.$$

Відстань від точки M до центра круга K_4

$$MO_4 = \sqrt{(0.5711)^2 - (0.1631)^2} \approx 0.5474.$$

Оскільки радіус кулі B_4 дорівнює 0,3181, то знайдемо радіус круга K_4

$$r_4 = \sqrt{(0.3181)^2 - (0.1631)^2} \approx 0.2731.$$

Тепер ми можемо знайти синус кута β під яким видно правий півкруг круга K_4 з точки M.

$$\sin\beta = \frac{0.2731}{0.5474} \approx 0.4989.$$

Отже $\beta \approx \arcsin 0.4989 \approx 29.9^o$.

Оскільки сума кутів α і β перевищує 90^o, то кожна пряма через точку M перетинає одну з чотирьох куль B_1, B_2, B_3, B_4. Лему доведено.

В лемах 3.5.2 і 3.5.3 ми показали, що в точках сфери, найбільш віддалених від системи вибраних куль, кожна пряма дотична до сфери перетинає принаймні одну з цих куль. Якщо вибрати точку відміннув від досліджених, то вона знаходиться ближче до однієї з куль системи і тому знов отримаємо існування необхідних перетинів. Звідси випливає наступна оцінка.

Теорема 3.5.1. *Існує система з 16 куль з центрами на сфері S^2, яка задає тінь, дотичну до сфери.*

Далі дослідимо, чи можна модифікувати останній результат для куль постійного радіуса. Припустимо, що центри куль на сфері збігаються з попередніми. Радіуси цих куль ми будемо змінювати. Радіуси більших чотирьох куль зменшимо, а радіуси менших 12 куль збільшимо так щоб усі радіуси куль стали рівними.

Скористаємося мал. 3.5.4 і проведемо міркування аналогічні лемі 3.5.3. Площина трикутника *DEF* паралельна площині трикутника *ABC.* Координати вершин *A, B, C* візьмемо з леми 3.5.2 попереднього наслідку, а координати вершин *D, E, F* запишемо в наступному виді $D(y\sqrt{3}/2, y/2, z),\ E(0,-y,z),\ F(-y\sqrt{3}/2, y/2, z)$, використовуючи паралельність площин і симетрію відносно ортоцентра рівностороннього трикутника *DEF.* З умови дотику куль $r = y\sqrt{3}/2$.

З того, що точка лежить на сфері, маємо

$$y^2 + z^2 = 1. \qquad (*)$$

Вектор $\overline{AF}$ запишемо через координати кінцевих точок

$$\overline{AF} = \left\{-y\sqrt{3}/2, y/2 - 2\sqrt{2}/3, z - 1/3\right\}.$$

Наступне рівняння одержимо прирівнюючи з одного боку довжину цього вектора, а з другого використаємо, що ця довжина дорівнює подвоєному радіусові куль згідно з умовою дотику.

$$(y\sqrt{3}/2)^2 + (y/2 - 2\sqrt{2}/3)^2 + (z - 1/3)^2 = (y\sqrt{3})^2,$$

$$3y^2/4 + y^2/4 - 2\sqrt{2}y/3 + 8/9 + z^2 - 2z/3 + 1/9 = 3y^2.$$

Після спрощення маємо

$$-2y^2 - 2\sqrt{2}y/3 + z^2 - 2z/3 + 1 = 0.$$

Підставимо значення змінної *z* з рівняння (*)

$$2y^2 + 3\sqrt{2}y/3 - 1 + y^2 + 2\sqrt{1-y^2}/3 - 1 = 0.$$

Спростимо рівняння

$$9y^2 + 2\sqrt{2}y + 2\sqrt{1-y^2} - 6 = 0.$$

Розв’яжемо рівняння наближеними методами. Одержимо $y \approx 0{,}3706$.

Отже $z \approx 0{,}9288$. Звідси шукане значення радіуса $r \approx 0{,}3209$. З леми 3.2.2 випливає, що в точках рівносторонніх сферичних трикутників, *AFD*, *FDE*, які не покриті кулями набору, усі прямі, дотичні до сфери перетинають одну з цих куль, в наслідок нерівності $0{,}3209 < 12/19$.

Тепер скористаємося мал.3.5.4 (він буде аналогічним лише з іншими відстанями) і перевіримо поведінку дотичних до сфери прямих в точці M леми 3.5.3. Відстань d від центра кулі B_2 до площини L обчислена в лемі 3.5.3 і дорівнює 0,2818. Знайдемо радіус круга K_2

$$r_2 = \sqrt{(0.3209)^2 - (0.2818)^2} \approx 0.1536\,.$$

З того, що відстань $MO_2 \approx 0.8165$ ми можемо знайти синус кута α під яким видно верхній півкруг круга K_2 з точки M.

$$\sin\alpha = \frac{0.1536}{0.8165} \approx 0.1881.$$

Отже $\alpha \approx \arcsin 0.1881 \approx 10.8^o$.

Знайдемо відстань d_1 від центра кулі B_4 до площини L

$$d_1 = \frac{\left| -\sqrt{2} * 0.3706 - 0.9288 + \sqrt{3} \right|}{\sqrt{3}} \approx 0.2017\,.$$

Знайдемо вектор $\overline{ME} = \{0, 0.2459, 0.3514\}$. Його довжина

$$\left|\overline{ME}\right| = \sqrt{(0.2459)^2 + (0.3514)^2} \approx 0.4289\,.$$

Відстань від точки M до центра круга K_4

$$MO_4 = \sqrt{(0.4289)^2 - (0.2017)^2} \approx 0.3785.$$

Оскільки радіус кулі B_4 дорівнює 0,3181, то знайдемо радіус круга K_4

$$r_4 = \sqrt{(0.3209)^2 - (0.2017)^2} \approx 0.2496 .$$

Тепер ми можемо знайти синус кута β під яким видно правий півкруг круга K_4 з точки M.

$$\sin\beta = \frac{0.2496}{0.3785} \approx 0.6595.$$

Отже $\beta \approx \arcsin 0.6595 \approx 41.3^o$.

Оскільки сума кутів α і β менша 90^o, то існує пряма через точку M, яка не перетинає жодної з чотирьох куль B_1, B_2, B_3, B_4.

Наслідок 3.5.1. *Обрана система куль однакового радіуса не забезпечує тіні дотичної до кулі в усіх точках, які не покриті системою куль.*

Висновки

У третьому розділі дисертаційної роботи досліджено узагальнено опуклі оболонки ряду сімей множин. Повністю розв'язана задача поставлена Ю.Б.Зелінським для сім'ї куль одного радіуса в тривимірному евклідовому просторі. Показано, що якщо центри цих куль знаходяться на деякій сфері, то така задача не має розв'язку. При вільному розміщенні центрів куль задача розв'язана повністю. Встановлено, що чотирьох куль фіксованого радіуса необхідно і досить для створення тіні в заданій точці тривимірного евклідового простору. Отримано точні оцінки для задач про тінь для сім'ї куль одного радіуса в комплексному та гіперкомплексному евклідових просторах. При цьому істотно покращені відомі до цього оцінки. Встановлено оцінки знизу і зверху необхідної кількості куль різного радіуса, що забезпечать тінь дотичну до сфери.

Основні результати розділу опубліковані в роботах [17, 18, 34, 35, 37, 93].

РОЗДІЛ 4.

Побудова відображень постійної кратності

4.1. Підготовчі твердження

Задача побудови відображення постійної кратності дуже просто розв'язується на колі, кільці, або подібних гомотопійно до них просторах. Для цього дость розглянути степеневу функцію або її аналоги. В більш складних ситуаціях побудова таких відображень стикається з певними труднощами, або й зовсім неможлива. В роботах Ю.Б.Зелінського [24, 25] досліджено питання існування відображень обмеженої кратності проективного простору в сферу та евклідів простір тієї ж розмірності.

Різні оцінки кратності відображень областей на многовидах отримано в роботах [21-23, 86].

Означення 4.1.1. *Відображення $f : X \to Y$ топологічних просторів X і Y називається власним, якщо прообраз довільного компакта з Y буде компактом в X.*

В роботі [6] показано, що обмеження неперервного відображення замкнутої на многовиді області на її внутрішність буде власним тоді і тільки тоді, коли образи межі області і внутрішності області не перетинаються.

Метою даного розділу є дати часткову відповідь на наступне питання поставлене Ю.Б.Зелінським [87].

Питання 4.1.1. *Чи для кожного власного відображення* $f : X \to Y$ *(де* D, D_1 *є областями n-вимірних многовидів) існує власне відображення g гомотопне до* f *таке, що кожна точка образу g(D) не має більше ніж* $|\deg f| + 2$ *прообрази* (*де* $\deg f$ *є степінь відображення* f [6])?

Ми досліджуємо можливість побудови власного відображення постійної непарної кратності на відкритій кулі евклідового простору $\mathbb{R}^n$ за умови, що на межі кулі відображення є гомеоморфізмом. Як частковий випадок з результатів цього розділу буде випливати існування шуканого в питанні 4.1.1 відображення, якщо абсолютна величина степеня відображення на межі сфери дорівнює одиниці.

4.2. Відображення постійної кратності

В цьому підрозділі ми побудуємо відображення відкритої кулі в себе довільної непарної кратності.

Теорема 4.2.1. *Існує неперервне відображення n-вимірної кулі* B^n *в себе, яке є гомеоморфізмом на межі кулі і кожна внутрішня точка кулі має рівно k прообразів де k непарне число.*

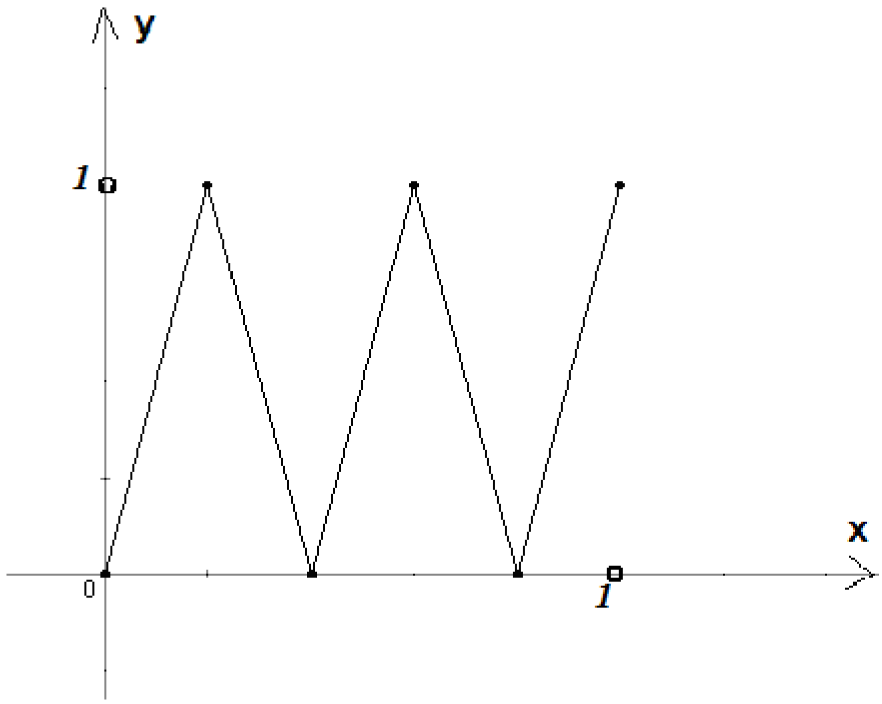
Доведення. Ми використовуємо для побудови функцію, задану на відкритому інтервалі (0,1), яку побудував Й.Міодушевський [81].
Спочатку побудуємо ряд допоміжних функцій. Насамперед розглянемо функцію p_{2r+1}, $r = 1, 2, \ldots$, на замненому відрізку $0 \leq x \leq 1$, яка приймає значення нуль і одиниця в заданих точках

$$p_{2r+1}(j/(2r+1)) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad j = 0,2,...,2r, \\ 1 & \text{для} \quad j = 1,3,...,2r+1, \end{cases}$$

а далі таким чином, що на кожному відкритому інтервалі

$$j/(2r+1) < x < (j+1)/(2r+1),\ j = 1,2,\dots,2r$$

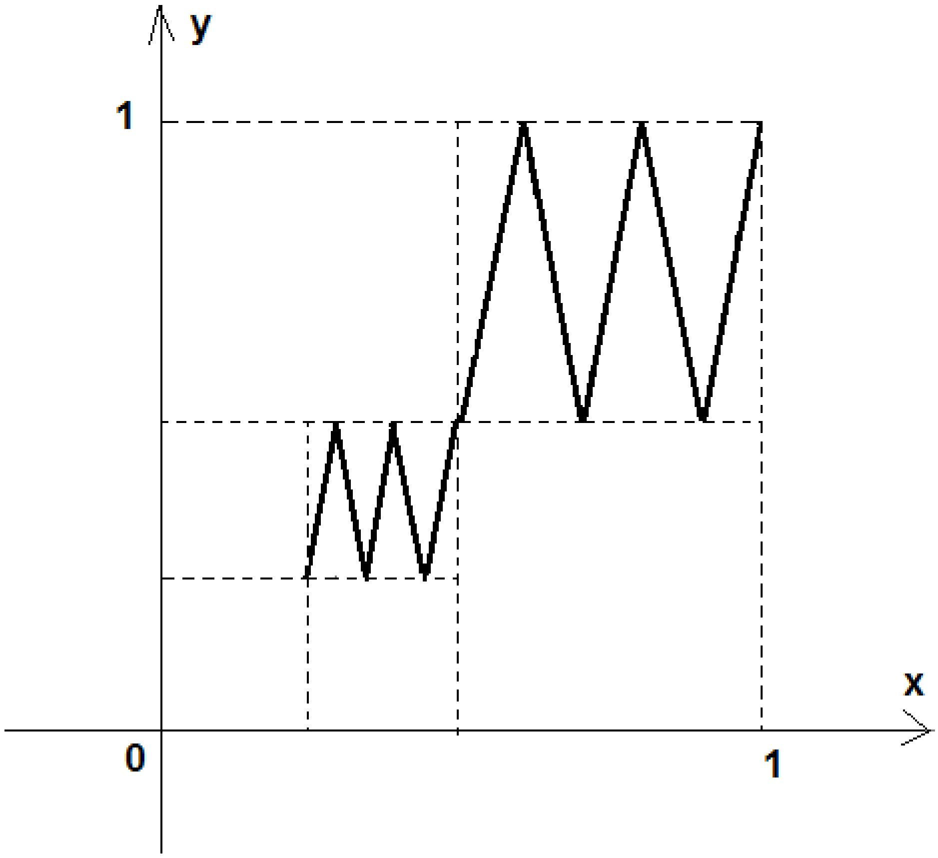
вона лінійна і з'єднує відповідно точки 0 та 1 (див. Мал.4.2.1).



Мал.4.2.1

Далі на основі цієї функції, ми визначимо нову неперервну функцію q_{2r+1} на відрізку $0 \leqslant x \leqslant 1$ таким чином, що $q_{2r+1}(0) = 0$,

$$q_{2r+1}(x) = 2^{-m}(1 + p_{2r+1}(2^m(x - 2^{-m})))$$
$$\text{для} \quad 2^{-m} \le x \le 2^{-m+1}, m = 1,2,...$$



Мал.4.2.2

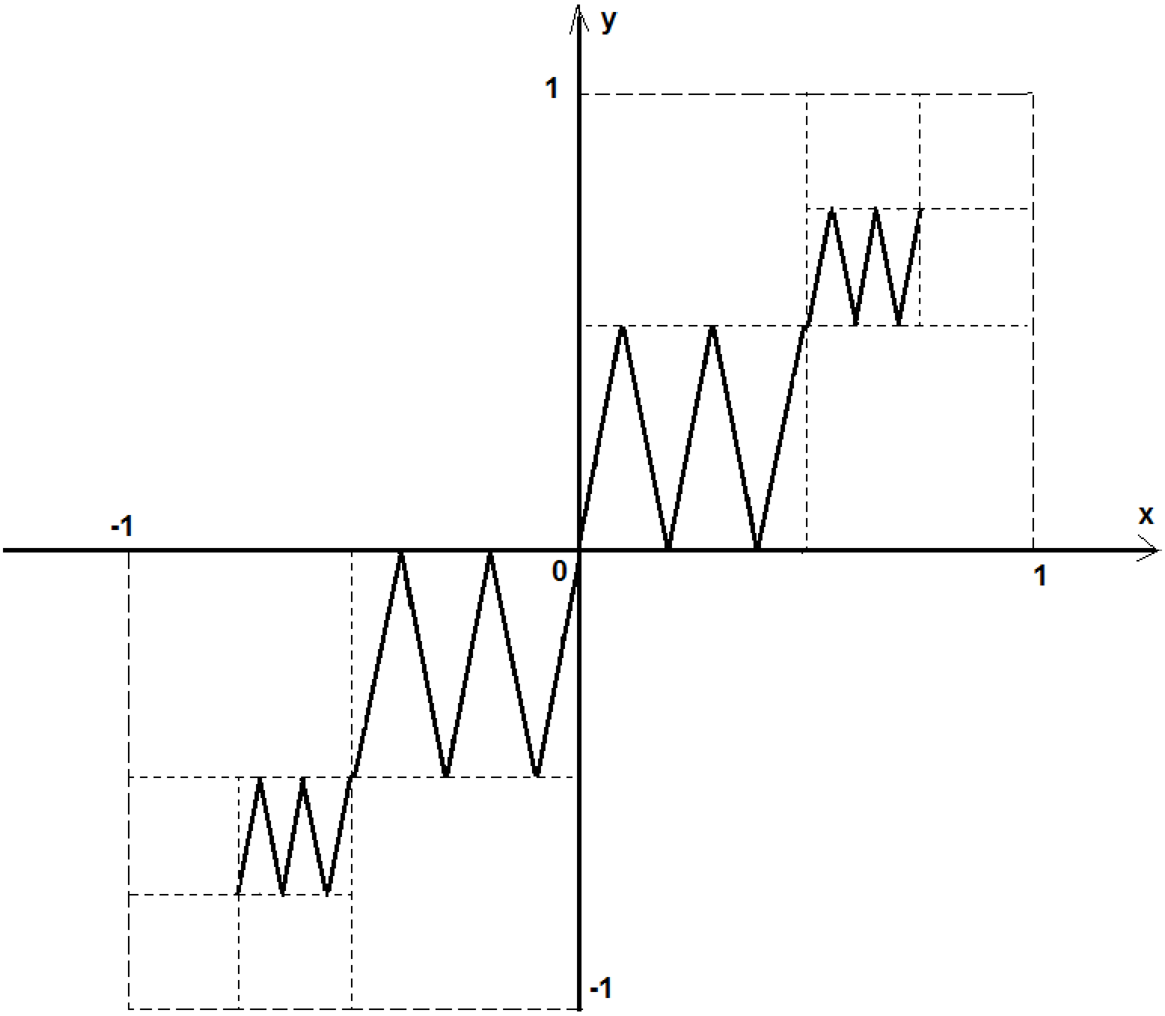
Тепер ми визначимо функцію

$$s_{2r+1}(x) = \begin{cases} q_{2r+1}(x+1) - 1 & для \quad -1 < x \le 0, \\ 1 - q_{2r+1}(1-x) & для \quad 0 \le x < 1, \quad r = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

задану на відкритому інтервалі $-1 < x < 1$ (див. Мал.4.2.3).

Додатково визначимо значення функції s_{2r+1} в точках –1 і 1 рівностями $s_{2r+1}(-1) = -1$, $s_{2r+1}(1) = 1$. Тепер ми маємо неперервну функцію на відрізку $B^1 = [-1,1]$ (одиничній кулі), яка є взаємно-однозначним відображенням на межі, і кожна внутрішня точка кулі має точно непарну кількість прообразів $k = 2r+1 \geqslant 3$.

Цим ми одержуємо твердження теореми в випадку відображення відрізка. Далі поширимо цей результат на більші розмірності, використовуючи конструкцію надбудови.



Мал.4.2.3

Надалі ми будемо розглядати n-вимірну кулю B^n у вигляді надбудови SB^{n-1} [53] над $(n-1)$-вимірною кулею B^{n-1} (наприклад, двовимірна куля

$$B^2 = SB^1 = \left\{(x, y) \middle| |x| + |y| \le 1\right\}$$

є надбудовою над відрізком). Тепер ми будемо поширювати функцію s_{2n+1} на відображення надбудов по формулі

$$s_{2r+1}(x, y) = \begin{cases} (1-|y|)s_{2r+1}(x/(1-|y|)) & для \quad y \ne -1,1, \\ 0 & для \quad y = -1,1. \end{cases}$$

Ця формула дана для відображення двовимірної кулі. Аналогічне відображення можна побудувати в кожній розмірності по індукції

$$s_{2r+1}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\begin{cases}(1-|x_n|)*\\ s_{2r+1}(x_1/(1-|x_n|),x_2/(1-|x_n|),\ldots,x_{n-1}/(1-|x_n|))\\ \qquad\qquad \text{для} \quad x_n\neq -1,1,\\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{для} \quad x_n=-1,1.\end{cases}$$

Легко бачити, що це відображення задовольняє умовам теореми для $k\geq 3$, а при $k = 1$ існує природний гомеоморфізм кулі в себе.

Наслідок 4.2.1. *Нехай множина X має вигляд декартового добутку* $X=Y\times B^n$*, тоді на X можна задати неперервне відображення в X, яке буде гомеоморфізмом на* $X\times\partial B^n$*, а кожна точка з* $X\times IntB^n$ *має рівно k прообразів, де k непарне число.*

Зауваження 4.2.1. З цього результату, зокрема, випливає, що для довільного гомеоморфізму декартового добутку $X=Y\times B^n$ на себе (множник Y може бути порожною множиною) існує непарнократне відображення внутрішності X на себе будь якої наперед заданої кратності зі збереженням гомеоморфізму на межі.

Покажемо далі, що для відображення замкнутого відрізка не існує вівдображень постійної кратності відмінних від одиниці.

Твердження 4.2.1. *Не існує неперервного відображення відрізка в себе з постійною кратністю більше одиниці*.

Доведення. Припустимо, що подібне відображення існує. Нехай його кратність більша двох. Тоді мінімальне значення функція приймає в деякій внутрішній точці відрізка, принаймні один раз. Використовуючи теорему Дарбу про проміжне значення легко бачити, що значення, близьке до мінімального приймається як мінімум на одиницю більше раз. Це протирічить постійній кратності відображення.

Якщо кратність відображення два, то з попереднього випливає, що значення функції в точках кінцях відрізка повинні збігатися і не повинні прийматися ніде у внутрішній точці. Без втрати загальності, ми припустимо, що на кінцях точок відрізка функція приймає мінімальне значення. Тоді існує єдина точка максимуму функції деякій внутрішній точці замкнутого інтервалу. Таким чином, з тієї ж теореми Дарбу випливає, що максимальне значення може прийматися тільки один раз. Отримані протиріччя доводять твердження.

Зауваження 4.2.2. Якщо не існує накладеного нами обмеження, що образ відрізка повинен належати відрізку, то відомо, що таке відображення існує при кожному $k\neq 2$ [81]. Подібні відображення з додатковою умовою гладкості ми побудуємо в наступному підрозділі.

4.3. Гладкі відображення постійної кратності

В цьому підрозділі ми дослідимо можливість побудови неперервного гладкого відображення класу C^{∞} постійної непарної кратності відкритої кулі евклідового простору $\mathbb{R}^n$ в себе, яке є неперервним продовженням гомеоморфного відображення межі кулі.

Теорема 4.3.1. *Існує гладке неперервне відображення n-вимірної кулі* $B^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \left\| x \right| \le r \right\}$ *в себе, яке є гомеоморфізмом на межі кулі а кожна внутрішня точка кулі має в точності k прообрази, де k є непарним числом.*

Доведення. Розглянемо функцію

$$g(x) = \sin(kx - 1/2)\pi, \quad 0 \le x \le 1,$$

де k непарне число. Нехай

$$p(x) = 1/2(\sin(kx - 1/2)\pi + 1), \quad 0 \le x \le 1.$$

Далі задамо функцію $q(x)$ (див. Мал.4.3.1) на замкнутому інтервалі $0 \leqslant x \leqslant 1$ так що $q(0)=0$, а

$$q(x) = 2^{-m}(1 + p(2^m(x - 2^{-m})))$$

для

$$2^{-m} \le x \le 2^{-m+1}, \quad m = 1, 2, ...$$

Згідно з побудовою очевидна гладкість побудованого відображення в усіх точках кожного відкритого інтервалу

$$2^{-m} < x < 2^{-m+1}, \quad m = 1, 2, ...$$

Для перевірки гладкості цьоого відображення в точках виду $x = 2^{-m}$ обчислимо його похідну в цих точках

$$q'(x) = \pi k \cos((k2^m(x - 2^{-m}) - 1/2)\pi),$$

$$q'(2^{-m}) = \pi k \cos(\pi/2) = \pi k \cos(k - \pi/2) = q'(2^{-m+1}) = 0.$$

Далі маємо періодичність

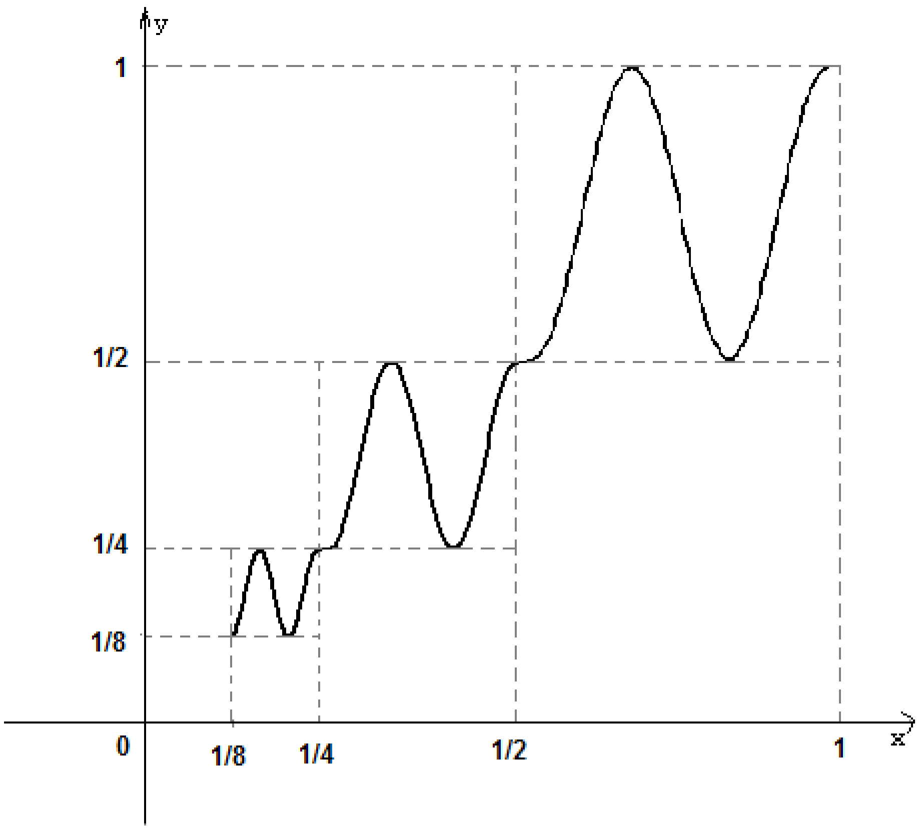
$$q^{(2r)}(x) = (\pi k)^{2r-1} \sin((k2^m(x - 2^{-m}) - 1/2)\pi),$$

$$q^{(2r)}(2^{-m}) = (\pi k)^{(2r)} \sin(\pi/2) = (-1)^r (\pi k)^{(2r)},$$

$$q^{(2r+1)}(x) = (\pi k)^{(2r+1)} \cos((k2^m(x - 2^{-m}) - 1/2)\pi),$$

$$q^{(2r+1)}(2^{-m}) = (\pi k)^{(2r+1)} \cos(\pi/2) = 0.$$

Отже побудоване відображення має неперервні похідні усіх порядків.

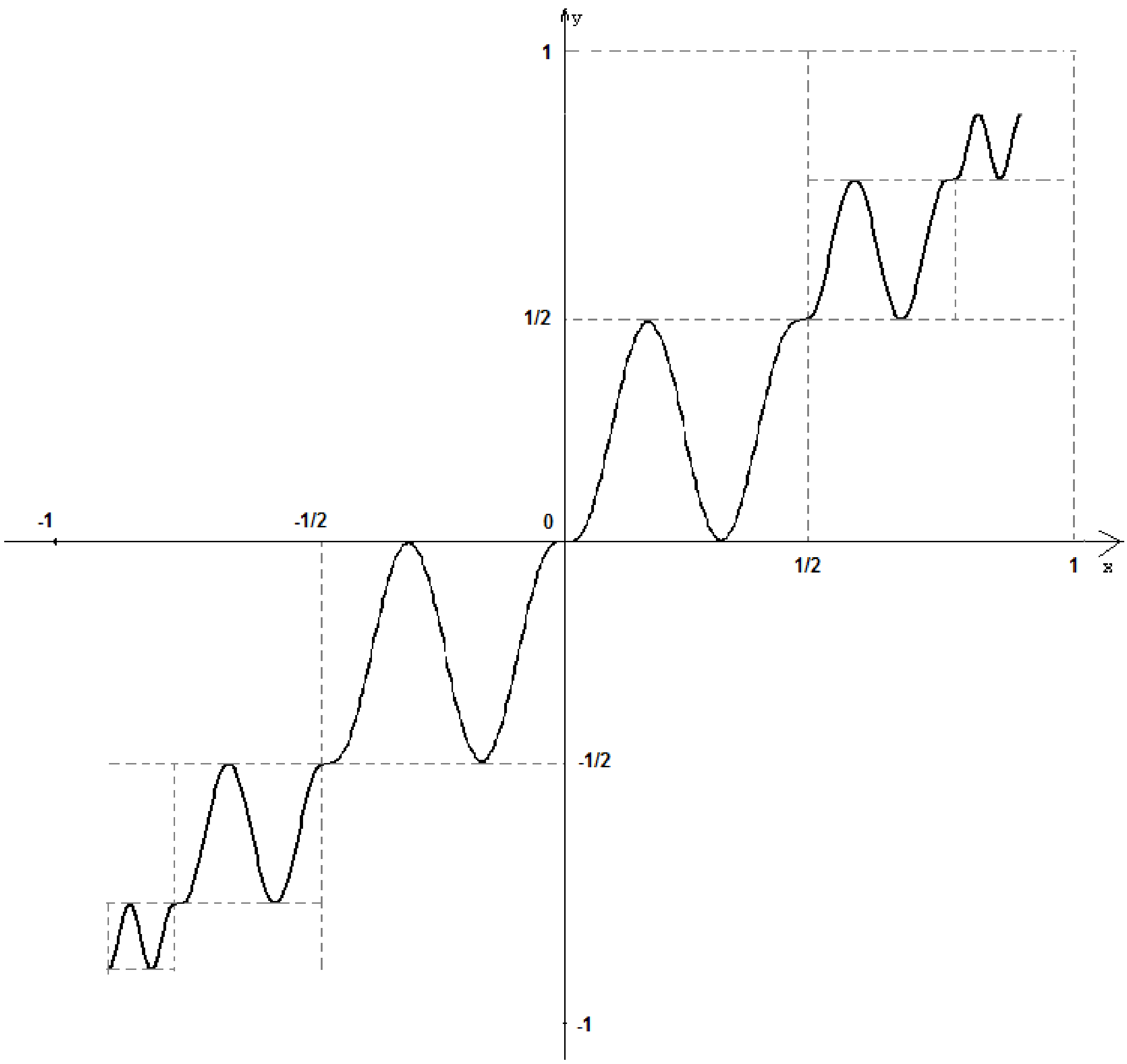


Мал.4.3.1

Далі ми задамо функцію

$$s(x)=\begin{cases}q(x+1)-1 & при \quad -1\le x\le 0,\\ 1-q(1-x) & при \quad 0\le x\le 1.\end{cases}$$

Тепер ми маємо (див. Мал.4.3.2) побудовану неперервну нескінченно диференційовну функцію на замкнутому інтервалі B^1=[-1,1] (замкнутій одновимірній кулі), яка є взаємно однозначною на межі і кожна точка внутрішності кулі має в точності k прообрази.



Мал.4.3.2

З точністю до деякого гомеоморфізму ми можемо розглядати *n*-вимірну кулю B^n як надбудову SB^{n-1} [53] над (*n*-1)-вимірною кулею B^{n-1} (наприклад, двовимірна куля $B^2 = SB^1 = \{(x,y) \| x| + |y| \le 1\}$ є надбудовою над замкненим інтервалом [-1,1]). Далі ми розповсюдимо функцію *s(x)* на відображення надбудови по формулі

$$s_2(x,y) = \begin{cases} (1-|y|)s(x/(1-|y|)) & при \quad y \neq -1;1, \\ 0 & при \quad y = -1;1. \end{cases}$$

Ця формула задає відображення двовимірної кулі. Аналогічне відображення можна побудувати в будь якій розмірності по індукції наступною формулою

$$s_n(x_1,x_2,...,x_n) = \begin{cases} (1-|x_n|) * \\ s_{n-1}(x_1/(1-|x_n|), x_2/(1-|x_n|),...,x_{n-1}/(1-|x_n|),) \\ \qquad при \quad x_n \neq -1;1, \\ 0 \qquad\qquad при \quad x_n = -1;1. \end{cases}$$

Легко бачити, що так задане відображення задовольняє умовам теореми при $k \ge 3$, а при $k = 1$ існує тотожній гомеоморфізм кулі на себе. Теорему доведено.

Наслідок 4.3.1. *Нехай множина X має форму декартового добутку* $X = Y \times B^n$*, тоді на X можна задати гладке неперервне відображення в X яке буде гомеоморфізмом на* $Y \times \partial B^n$*, а кожна точка з* $Y \times Int B^n$ *має рівно k прообразів, де k є непарним числом.*

Зауваження 4.3.1. З цього результату випливає, що для довільного гладкого гомеоморфізму декартового добутку $X = Y \times B^n$ на себе (множник *Y* може бути порожньою множиною) існує в точності *k*-кратне відображення множини $Y \times Int B^n$ на себе, яке зберігає гомеоморфізм на $Y \times \partial B^n$.

Зауваження 4.3.2. З теореми випливає часткова відповідь на поставлене вище запитання. Для довільного гладкого гомеоморфізму кулі існує в точності трикратне відображення внутрішності кулі на себе, яке гомотопне до заданого і зберігає гомеоморфізм на межі. Гомотопність випливає з того, що відображення $s(x)$ гомотопне тотожному відображенню.

Зауваження 4.3.3. В попередньому підрозділі (твердження 4.2.1.) показано, що не існує відображення відрізка в себе постійної кратності відмінної від одиниці. Покажемо, що для відображень, образ яких знаходиться в більш складних многовидах, такі відображення можна побудувати.

Далі побудуємо гладке неперервне відображення довільної кратності $k \geq 3$ відрізка на коло S^1. Задамо спочатку на відрізку $0 \leq x \leq k-2,\, k = 3, 4, \ldots$ функцію

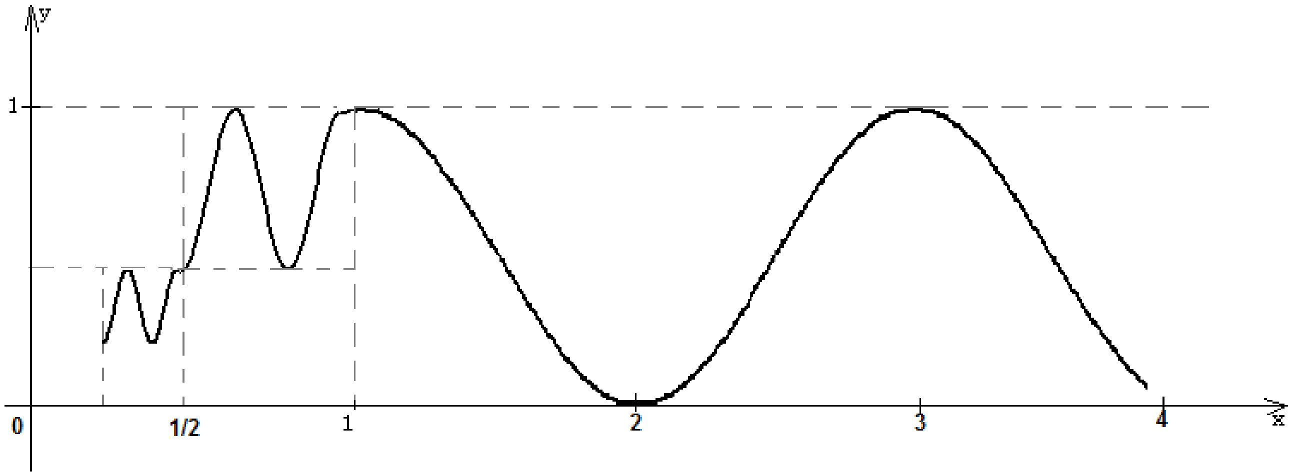
$$r(x) = \begin{cases} q(x) \quad при \quad 0 \leq x \leq 1,\, k = 3, \\ (1 + \sin \pi (x - 1/2))/2 \quad при \quad 1 \leq x \leq k - 2. \end{cases}$$

Тепер гладка функція (див..Мал.4.3.3)

$$f(x) = e^{2\pi i r(x)}$$

відображає відрізок $0 \leq x \leq k–2$ на одиничне коло $x^2 + y^2 = 1$ і є k-кратною на цьому відрізку.

Далі з точністю до деякого гомеоморфізму ми можемо розглядати n-вимірну кулю B^n, як декартовий добуток відрізка $0 \leq x \leq k-2$ на n-1 екземпляр одиничних відрізків $\underbrace{[0,1] \times \ldots \times [0,1]}_{(n-1)-раз}$. Задамо відображення n-вимірної кулі B^n на циліндр $S^1 \times \underbrace{[0,1] \times \ldots \times [0,1]}_{(n-1)-раз}$ за формулою



Мал.4.3.3

$$f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = (f(x_1), x_2, ..., x_n).$$

Звідси випливає наступне твердження.

Теорема 4.3.2. *Для будь якого* $k \geq 3$ *існує гладке неперервне відображення n-вимірної кулі*

$$B^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle| 0 \leq x_1 \leq k-2, 0 \leq x_i \leq 1, i = 2, ..., n \right\}$$

на циліндр $S^1 \times \underbrace{[0,1] \times ... \times [0,1]}_{(n-1)-раз}$ *для якого кожна точка образу має в точності* k *прообрази*.

Отримані результати можна застосувати до відображення однозв'яних областей на комплексній площині. З теореми Рімана відомо, що кожна однозв'язна область на площині конформно еквівалентна одиничному кругу. Нехай D – однозв'язна область на комплексній площині $\mathbb{C}$, а $\varphi : D \to B$ – конформне відображення області на одиничний круг. Тоді суперпозиція $\varphi^{-1}s_2\varphi : D \to D$ задає k-кратне відображення області в себе, де s_2 – k–кратне відображення круга в себе, побудоване в теоремі 4.3.1.

Наслідок 4.3.2. *Для будь-якої однозвязної області $D \subset \mathbb{C}$ на комплексній площині існує k-кратне відображення її в себе, де k довільне непарне число.*

Відкриті питання. 1. Чи існує відображення замкнутої кулі D на себе постійної кратності $k \geq 3$? Відомо, що для $k = 2$ такого відображення не існує [67].

2. Чи існує відображення n-вимірного дійсного проективного простору в n-вимірний евклідів простір таке, що кожна точка образу має не більше ніж два прообрази при $n \geq 4$? Відомо, що при $n = 2$ і 3 такі відображення існують [25].

Висновки

У четвертому розділі дисертаційної роботи ми досліджуємо можливість побудови власного відображення постійної непарної кратності на відкритій кулі евклідового простору $\mathbb{R}^n$ за умови, що на межі кулі відображення є гомеоморфізмом. Як частковий випадок з результатів цього розділу випливає існування шуканого в питанні поставленому Ю.Б.Зелінським відображення, якщо абсолютна величина степеня відображення на межі сфери дорівнює одиниці. Також досліджена можливість побудови неперервного гладкого відображення класу C^∞ постійної непарної кратності відкритої кулі евклідового простору $\mathbb{R}^n$ в себе, яке є неперервним продовженням гомеоморфного відображення межі кулі.

Основні результати розділу опубліковано в роботах [10, 12, 16, 91].

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вивчаються геометричні та топологічні властивості узагальнено опуклих множин та узагальнено опуклих оболонок деяких сімей множин в дійсних, комплексних та гіперкомплексних евклідових просторах, а також питання існування відображень куль постійної кратності. Зокрема досліджено декілька класів узагальнено опуклих множин. Кожен з цих класів задовольняє аксіому опуклості: перетин довільного набору множин з такого класу теж належить до цього класу.

Отримано узагальнення теореми Ю.Б.Зелінського на слабко 1-опуклі компакти, досліджено характеристики слабко m-опуклих відкритих множин.

Показано, що аналогічної до відомої класифікації для напівопуклих множин з гладкою межею сподіватися не можна.

Введені нові поняття слабкої m-опуклості та слабкої m-напівопуклості та досліджені класи множин, які володіють цими властивостями.

Встановлено, що слабко (n-1)-опукла відкрита множина, яка не є (n-1)-опуклою складається не менше ніж з трьох компонент. Подібні результати отримано і для інших класів узагальнено опуклих множин.

Побудовано ланцюжок послідовно вкладених класів узагальнено опуклих множин і вивчено деякі їх властивості.

Досліджено узагальнено опуклі оболонки ряду сімей множин. Повністю розв’язана задача поставлена Ю.Б.Зелінським для сім’ї куль одного радіуса в тривимірному евклідовому просторі. Показано, що якщо центри цих куль знаходяться на деякій сфері, то така задача не має розв’язку. При вільному розміщенні центрів куль задача розв’язана повністю. Встановлено, що чотирьох куль фіксованого радіуса необхідно і досить для створення тіні в заданій точці тривимірного евклідового простору. Отримано точні оцінки для задач про тінь для сім'ї куль одного радіуса в комплексному та гіперкомплексному евклідових просторах. При цьому істотно покращені відомі до цього оцінки. Встановлено оцінки знизу і зверху необхідної кількості куль різного радіуса, що забезпечать тінь дотичну до сфери.

Досліджена можливість побудови власного відображення постійної непарної кратності на відкритій кулі евклідового простору $\mathbb{R}^n$ за умови, що на межі кулі відображення є гомеоморфізмом. Це продовжує дослідження Й.Міодушевського. Як частковий випадок з цих результатів випливає існування шуканого в питанні поставленому Ю.Б.Зелінським відображення, якщо абсолютна величина степеня відображення на межі сфери дорівнює одиниці. Також досліджена можливість побудови неперервного гладкого відображення класу C^∞ постійної непарної кратності відкритої кулі евклідового простору $\mathbb{R}^n$ в себе, яке є неперервним продовженням гомеоморфного відображення межі кулі.

Одержані результати мають застосування в опуклому та комплексному аналізі, теорії відображень, а також можуть бути використані в теорії апроксимації, при дослідженні екстремальних задач та у застосуваннях до суміжних галузей математики, що використовують методи аналізу, наприклад, інтегральна геометрія, в томографії і стереології.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Айзенберг Л. А. О разложении голоморфных функций многих комплексных переменных на простейшие дроби / Л. А. Айзенберг // Сиб. мат. журн. – 1967. – Т. 8, № 5. – С. 1124 – 1142.
2. Айзенберг Л. А. Линейная выпуклость в $\mathbb{C}^n$ и разделение особенностей голоморфных функций / Л. А. Айзенберг // Бюлетень польской академии наук, Серия мат., астр. и физ. наук. – 1967. – Т. 15, № 7. – С. 487 – 495.
3. Айзенберг Л. А. Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе / Л. А. Айзенберг, А. П. Южаков // Новосибирск: Наука, 1979. – 368 с.
4. Айзенберг Л. А. Линейные функционалы в пространствах аналитических функций и линейная выпуклость в C^n / Л. А. Айзенберг // Исследования по линейным операторам в теории функций. 99 нерешенных задач линейного и комплексного анализа: Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – Ленинград: Наука, 1978. – Т. 81. – С. 29 – 32.
5. Амбарцумян Р. В. Введение в стохастическую геометрию / Р. В. Амбарцумян, Й. Мекке, Д. Штойян // М.: Наука, 1989. – 400 с.
6. Бахтин А. К. Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе / А. К. Бахтин, Г. П. Бахтина, Ю. Б. Зелинский // Праці Інституту математики НАНУ. – Т. 73. – 2008. – 308 с.
7. Берже М. Геометрия. В 2-х т. – М.: Мир, 1984. – Т. 1. – 530 с.; Т.2. – 368 с.

8. Бондарь А. В. Локальные геометрические характеристики голоморфных отображений / А. В. Бондарь // Киев: Наукова думка. – 1992. – 224 с.
9. Виговська І. Ю. Екстремальні властивості лінійних функцій на комплексних поліедрах / І. Ю. Виговська // Збірник праць Інституту математики НАН України. – Київ. – 2010. – Т. 7, № 2. – С. 332 – 338.
10. Виговська І. Ю. Про відображення кулі постійної кратності / І. Ю. Виговська, Д. С. Доля, Х. К. Дакхіл // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", 24 – 27 лютого 2016 р., Ворохта: Тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2016. – С. 66 – 67.
11. Виговська І. Ю. До задачі про тінь / І. Ю. Виговська, Х. К. Дакхіл // XI літня математична школа "Алгебра, Топологія, Аналіз", 1 – 14 серпня 2016 р., Одеса: Тези доповідей. – С. 47.
12. Виговська І. Ю. Про гладкі відображення постійної кратності / І. Ю. Виговська, Х. К. Дакхіл // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", 22 – 25 лютого 2017 р., Ворохта: Тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2017. – С. 59 – 61.
13. Власенко И. Ю. Топологиченские методы в изучении групп преобразований многообразий / И. Ю. Власенко, С. И. Максименко, Е. О. Полулях // Праці Інституту математики НАНУ. – 2006. – Т. 61. – 338 с.
14. Гарасин А. И. Об (n – 1) – выпуклых множествах / А. И. Гарасин // Некоторые вопросы анализа и дифференц. геометрии. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1988. – С. 8 – 14.
15. Гарасин А. И. Обозримость (n – 1) – выпуклых множеств / А. И. Гарасин // Комплексный анализ, алгебра и топология. Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1990. – С. 20 – 28.

16. Дакхіл Х. К. Про гладкі відображення постійної кратності / Х. К. Дакхіл // Збірник праць Інституту математики НАНУ. – 2017. – Т. 14, № 1. – С. 140 – 146.
17. Дакхіл Х. К. Задача про тінь / Х. К. Дакхіл // XV Міжнародна конференція студентів, аспірантів та молодих вчених "Шевченківська весна 2017: Математика, Статистика та Механіка", 04 – 08 квітня 2017 р. – С. 18 – 19.
18. Дакхіл Х. К. Задача про тінь для сім'ї куль сталого радіуса / Х. К. Дакхіл // Міжнар. конф. "Теорія наближення функцій та її застосування", 28 травня – 3 червня 2017 р., м. Слов'янськ. – С. 55.
19. Дакхіл Х. К. Про слабко *m*–опуклі множини / Х. К. Дакхіл, Ю. Б. Зелінський, Б. А. Кліщук // Доповіді НАНУ. – 2017. – №4. – С. 3 – 6.
20. Зелинский Ю. Б. Многозначные отображения в анализе / Ю. Б. Зелинский // К.: Наукова думка. – 1993. – 264 с.
21. Зелинский Ю. Б. О некоторых проблемах Косинского / Ю. Б. Зелинский // Укр. мат. журн. – 1975. – Т. 27, № 4. – С. 510 – 516.
22. Зелинский Ю. Б. О кратности непрерывных отображений областей / Ю. Б. Зелинский // Укр. мат. журн. – 2005. – Т. 57, № 4. – С. 554 – 558.
23. Зелинский Ю. Б. Об отображении областей на многообразиях / Ю. Б. Зелинский // Збірник праць Інституту математики НАН України. – Київ. – 2008. – Т. 5, № 1. – С. 149 – 152.
24. Зелинский Ю. Б. Открытые вопросы отображения областей на многообразиях / Ю. Б. Зелинский // Збірник праць Інституту математики НАН України. – Київ. – 2010. – Т. **7**, № 2. – С. 242 – 248.
25. Зелинский Ю. Б. Об отображении проективного пространства в сферу / Ю. Б. Зелинский // Укр. мат. журн. – 2010. – Т. 62, № 7. – С. 1037 – 1044.

26. Зелинский Ю. Б. Задача о тени для семейства множеств / Ю. Б. Зелинский // Збірник праць Інституту математики НАНУ. – 2015. – Т. 12, № 4. – С. 197 – 204.
27. Зелинский Ю. Б. Выпуклость. Избранные главы / Ю. Б. Зелинский // // Праці Інституту математики НАНУ. – 2012. – Т. 92. – 280 с.
28. Зелинский Ю. Б. О (n, m)-выпуклых множествах / Ю. Б. Зелинский, И. В. Момот // Укр. мат. журн. – 2001. – Т. 53, № 3. – С. 422 – 427.
29. Зелинский Ю. Б. О теореме Каратеодори / Ю. Б. Зелинский, И. Ю. Выговская // Збірник праць Інституту математики НАН України. – Київ. – 2005. – Т. 2, № 3. – С. 123 – 129.
30. Зелинский Ю. Б. Критерий выпуклости области евклидова пространства / Ю. Б. Зелинский, И. Ю. Выговская // Укр. мат. журн. – 2008. – Т. 60, № 5. – С. 709 – 711.
31. Зелінський Ю. Б. Про деякі критерії опуклості компактів / Ю. Б. Зелінський, І. Ю. Виговська, М. В. Ткачук // Укр. мат. журн. – 2011. – Т. 63, № 4. – С. 466 – 471.
32. Зелинский Ю. Б., Обобщённо выпуклые множества и задача о тени / Ю. Б. Зелинский, И. Ю. Выговская, М. В. Стефанчук // Укр. мат. журн. – 2015. – Т. 67, № 12. – С. 1659 – 1666.
33. Зелінський Ю. Б. Узагальнення задачі про тінь / Ю. Б. Зелінський, М. В. Стефанчук // Укр. мат. журн. – 2016. – Т. 68, № 6. – С. 657 – 662.
34. Зелинский Ю. Б. Задача о тени и смежные задачи / Ю. Б. Зелинский, И. Ю. Выговская, Х. К. Дакхил // Proceedings int. geometry center. – 2016. – Vol. 9, № 3-4. – С. 50 – 58.
35. Зелинский Ю. Б. Задача о тени для шаров фиксированного радіуса / Ю. Б. Зелинский, И. Ю. Выговская, Х. К. Дакхил // Український математичний вісник. – 2016. – Т. 13, № 4. – С.599 – 603.
36. Зелінський Ю. Б. Про деякі критерії опуклості компактів / Ю. Б. Зелінський, І. Ю. Виговська, М. В. Ткачук // Укр. мат. журн. – 2011. – Т. 63, № 4. – С. 466 –471.

37. Зелинский Ю. Б. Об одной задаче о тени для шаров фиксированного радиуса / Ю. Б. Зелинский, Х. К. Дакхил // Труды ИПММ НАН Украины. – 2016. – Т. 30. – С. 75 – 81.
38. Зиновьев Б. С. Аналитические условия и некоторые вопросы аппроксимации линейно выпуклых областей с гладкими границами в пространстве C^n / Б. С. Зиновьев // Изв. вузов. Математика. – 1971. – № 6. – С. 61 – 69.
39. Знаменский С. В. Геометрический критерий сильной линейной выпуклости / С. В. Знаменский // Функционал. анализ и его прил. – 1979. – Т. 13, № 3. – С. 83 – 84.
40. Знаменский С. В. Сильная линейная выпуклость. I. Двойственность пространств голоморфных функций / С. В. Знаменский // Сиб. мат. журн. – 1985. – Т. 26, № 3. – С. 49 – 65.
41. Знаменский С. В. Томография в пространствах аналитических функционалов / С. В. Знаменский // Докл. АН СССР. – 1990. – Т. 312, № 5. – С. 1037 – 1040.
42. Иоффе А. Д. Теория экстремальных задач / А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров // М.: Наука. – 1974. – 480 с.
43. Куратовский К. Топология. В 2-х т. / К. Куратовский // М.: Мир, 1966. – Т. 1. – 596 с.; 1969. – Т. 2. – 624 с.
44. Лейхтвейс К. Выпуклые множества: Пер. с нем. / К. Лейхтвейс // М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. – 1985. – 336 с.
45. Макарова Л. Я. Достаточные условия сильной линейной выпуклости областей с почти гладкой границей / Л. Я. Макарова // О голоморфных функциях многих комплексных переменных. – Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР. – 1976. – С. 87 – 96.
46. Макарова Л. Я. Достаточные условия сильной линейной выпуклости для полиэдров / Л. Я. Макарова // Некоторые вопросы многомерного

комплексного анализа. – Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР. – 1980. – С. 89 – 94.
47. Матерон Ж. Случайные множества и интегральная геометрия / Ж. Матерон // М.: Мир. – 1978. – 320 с.
48. Мельник В. Л. Топологічна класифікація (n–1)-опуклих множин / В. Л. Мельник // Укр. мат. журн. – 1998. – Т. 50, № 9. – С. 1236 – 1243.
49. Мкртчян Г. А. О сильной гиперкомплексной выпуклости // Г. А. Мкртчян // Укр. мат. журн. – 1990. – Т. 42, № 2. – С. 182 – 187.
50. Момот И. В. О линейно выпуклых множествах с гладкой границей / И. В. Момот // Intern. Conf. on complex analysis and potential theory, 7 – 12 August 2001, Kiev, Inst. of Math. NAS of Ukraine. – 2001. – P. 78 – 79.
51. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи / Б. Н. Пшеничный // М.: Наука, 1980. – 320 с.
52. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ / Р. Рокафеллар // М.: Мир, 1973. – 470 с.
53. Рохлин В. А. Начальный курс топологии / В. А. Рохлин, Д. Б. Фукс // М.: Наука, 1977. – 488 с.
54. Сантало Л. Интегральная геометрия и геометрические вероятности / Л. Сантало. – М.: Наука, 1983. – 360 с.
55. Солтан В. Введение в аксиоматическую теорию выпуклости / В. Солтан. – Кишинев: Штиинца, 1984. – 224 с.
56. Спеньер Э. Алгебраическая топология / Э. Спеньер // М.: Издательство “Мир”, 1971. – 680 с.
57. Тамразов П. М. Гладкости и полиномиальные приближения / П.М. Тамразов. – К:. Наук. думка, 1975. – 270 с.
58. Ткачук М. В. Характеризація кола типу Безиковича-Данцера / М. В. Ткачук // Доповіді НАН України. – 2006. – № 10. – С.40 – 41.

59. Ткачук М. В. Задача о тени для эллипсоида вращения / М. В. Ткачук, Т. М. Осипчук // Збірник праць Інституту математики НАНУ. – 2015. – Т. 12. № 3. – С. 243 – 250.
60. Трохимчук Ю. Ю. Устранимые особенности аналитических функций / Ю. Ю. Трохимчук – К.: Наук. думка, 1992. – 224 с.
61. Трохимчук Ю. Ю. Дифференцирование, внутренние отображения и критерии аналитичности / Ю. Ю. Трохимчук. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2008. – 530 с.
62. Трохимчук Ю. Ю. О некоторых результатах в топологии многообразий, теории многозначных отображений и теории Морса / Ю. Ю. Трохимчук, Зелинский Ю. Б., Шарко В. В. // Труды мат. ин-та АН СССР. – 1983. – **154.** – С.222 – 230.
63. Трутнев В. М. Некоторые свойства функций, голоморфных на сильно линейно выпуклых множествах / В. М. Трутнев // Успехи мат. наук. – 1972. – Т. **27**, № 5. – С. 253 – 254.
64. Трутнев В. М. О свойствах функций, голоморфных на сильно линейно выпуклых множествах / В. М. Трутнев // Голоморфные функции многих комплексных переменных. – Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР. – 1973. – С. 139 – 155.
65. Худайберганов Г. Об однородно-полиномиально выпуклой оболочке объединения шаров / Г. Худайберганов // Рукопись деп. в ВИНИТИ 21.02.1982 г., № 1772 – 85 Деп.
66. Цих А. К. Один случай распространения теоремы о разложении Фруассара и его применение к вычетам некоторых рациональных функций / А. К. Цих // Некоторые свойства голоморфных функций многих комплексных переменных. – Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР, 1973. – С. 167 – 180.
67. Чернавский А. В. Конечнократные открытые отображения многообразий / А. В. Чернавский // Мат. сб. – 1964. – Т. 65 (107), № 3. – С. 356 – 369.

68. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ / Б. В. Шабат // М.: Наука. – 1969. – 567 с.
69. Шарко В. В. Функции на многообразиях (алгебраические и топологические аспекты) / В. В. Шарко. – К.: Наук. думка, 1990. – 196 с.
70. Южаков А. П. Некоторые свойства линейно выпуклых областей с гладкими границами в $\mathbb{C}^n$ / А. П. Южаков, В. П. Кривоколеско // Сиб. мат. журн. – 1971. – Т. 12, №2. – С . 452 – 458.
71. Andersson M. Complex convexity and analytic functionals / M. Andersson, M. Passare, R. Sigurdsson // Basel - Boston - Berlin: Birkhäuser Verlag. – 2005. – 160 p.
72. Behnke H. Zur der Theorie der Functionen mehrer komplexer Veranderlichen / H. Behnke, E. Peschl // Math. Ann. – 1935. – Vol. 111, № 2. – S. 158 – 177.
73. Hörmander L. Notions of convexity / L. Hörmander // Boston-Basel-Berlin: Birkhäuser Verlag. – 1994. – 416 p.
74. Jarnitzki M., Pflug P. On automorphism of the symmetrized bidisc / M. Jarnitzki, P. Pflug // Arch. Math. – 2004. – **83**. – P. 264 – 266.
75. Kiselman Ch. O. Duality of functions defined in lineally convex sets / Ch. O. Kiselman // Universitatis Iagellonicae Acta Math.– **35**. – 1997. – P. 7 – 36.
76. Kiselman Ch. O. Lineally convex Hartogs domains / Ch. O. Kiselman // Acta Math. Vietnamica. – **21** . – 1996. – P. 69 – 94.
77. Kiselman Ch. O. Sur la convexité linéele / Ch. O. Kiselman // Ann. Acad. Brasil. Ciênc. – 1978. – Vol. 50, № 4. – P. 453 – 458.
78. Kosinski L. Serre problem for unbounded pseudoconvex domains in $\mathbb{C}^n$/ L. Kosinski // Journal of Geometric Analysis. – 2011. – Vol. 21, № 4. – P. 902 – 919.

79. Martineau A. Indicatrices des fonctions analytiques et invertion de la transformation de Laplace / A. Martineau // C. r. Acad. Sci. – 1962. – Vol. 255, № 22. – P. 2888 – 2890.
80. Martineau A. Sur la topologie des espaces de fonctions holomorphes convexité linéele / A. Martineau // Math. Ann. – 1966. – Vol. 163, № 1. – P. 62 – 88.
81. Mioduszewski J. Funkcje ciagle o stalej krotnosci skonczonej na odcinku i prostej / J. Mioduszewski // Prace matematyczne. – 1961. – Vol. 5. P. 79 – 93.
82. Nikolov N. An example of a bounded $\mathbb{C}$-convex domain which is not biholomorphic to a convex domain / N. Nikolov, P.Pflug, W.Zwonek // Math. Scand. – 2008. – Vol. 102, № 1. – P. 149 – 155.
83. Zelinskij Yu. B. On connection between properties of compact set in $\mathbb{C}^n$ and its conjugate set / Yu. B. Zelinskij // Lect. Notes Math. – 1980. – Vol. 798. – P. 465 – 476.
84. Zelinskij Yu. B. On the geometric criteria of strong linear convexity / Yu. B. Zelinskij // Complex analysis and application. – Sofia: Bulg. Acad. Sci. – 1984. – P. 533 – 537.
85. Zelinskii Yu. B. Caratheodory theorem for linearly convex sets / Yu. B. Zelinskii // Classical Analysis. Proceedings of the 6th Intern. Symposium. – London: World Scientific. – 1992. – P. 122 – 124.
86. Zelinskii Yu. Continuous mappings between domains of manifolds // Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź Sér. Rech. Déform. – 2010. – Vol. 60, № 2. – P. 11 – 14.
87. Zelinskii Yu. B. Open topological and geometrical problems in analysis // https://www.academia.edu/29063888/Open_topological_and_geometrical_problems_in_analysis.

88. Zelinskii Yu. B. Generalized Convex Envelopes of Sets and the Problem of Shadow // Journal of Mathematical Sciences. – 2015. – Vol. 211, № 5. – P. 710 – 717.
89. Zelinskii Yu. B. Problem of shadow (complex case) // Advances in Mathematics: Scientific Journal. – 2016. – Vol. 5, № 1. – P. 1 – 5.
90. Zelinskii Yu. B. The problem of the shadows // Bulletin de la societé des sci. et letters de Łódź. Sér. Rech. Déform. – 2016. – Vol. 66, № 1. – P. 34 – 42.
91. Zelinskii Yu. B. On mappings of constant multiplicity / Yu. B. Zelinskii, H. K. Dakhil // Advances in Analysis. – 2017. – Vol. 2, № 2, P. 105 – 107.
92. Zelinskii Yu. B. On weakly m-convex sets / Yu. B. Zelinskii, H. K. Dakhil, B. A. Klishchuk // arXiv preprint arXiv:1703.06785. – 7 p.
93. Zelinskii Yu. B. The problem of shadow for balls with fixed radius / Yu. B. Zelinskii, H. K. Dakhil, I. Yu. Vygovskaya // Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – Vol. 224, № 4. – P. 603 – 606.
94. Zelinskii Yu. B. Some results on generalized convex sets / Yu. B. Zelinskii, A. S. Gretsky, I. V. Momot // Classical analysis, Proceedings of 10-th intern. sympos. Poland, 1999. – Warsaw, 2001. – P. 113 – 124.
95. http://ru.wikipedia.org/wiki/ Икосаэдр.
96. http://ru.wikipedia.org/wiki/ Додекаэдр.
97. http://ru.wikipedia.org/wiki/ Правильный пятиугольник.