НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Козак Валентина Іванівна

УДК 517.9

Матриці типу Якобі відповідні двовимірній проблемі моментів

01.01.01 – математичний аналіз

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2017

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у Національному технічному університеті України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського".

Науковий керівник

доктор фізико-математичних наук, професор
ДУДКІН Микола Євгенович,
Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут
імені Ігоря Сікорського",
в. о. зав. кафедри диференціальних рівнянь
фізико-математичного факультету.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
МОГІЛЕВСЬКИЙ Вадим Йосипович,
Полтавський національний педагогічний
університет імені В. Г. Короленка,
доцент кафедри математичного аналізу та
інформатики;

кандидат фізико-математичних наук
РАБАНОВИЧ Вячеслав Іванович,
Інститут математики НАН України,
старший науковий співробітник відділу
функціонального аналізу.

Захист відбудеться " 17 " жовтня 2017 р. о 15:00 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України

Автореферат розісланий " 15 " вересня 2017 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради **Романюк А.С.**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дослідження, пов'язані із класичною проблемою моментів Г. Гамбургера (Т. Стільтьєса) логічно приводять до нескінченних матриць Якобі та відповідних систем поліномів, ортогональних відносно борелівської міри на дійсній вісі. У зв'язку із проблемою моментів матриці Якобі розглядали Н. І. Ахієзер, Г. Вейль, М. Г. Крейн, М. Ріс, Р. Неванлінна та багато інших. Такі матриці виникають у багатьох і фізичних, і математичних задачах, наприклад, у механічних – при розгляді моделей із зв'язних маятників, в алгебраїчних – при дослідженні неперервних дробів; у математичному аналізі – апроксимації Паде.

Значна частина наукової діяльності Ю. М. Березанського присвячена дослідженню питань, стосовно матриць Якобі, та їх узагальнень на випадок блочних матриць (якобієвих полів). Найбільш плідним підходом до вивчення властивостей матриць Якобі є теорія розкладу за узагальненими власними векторами самоспряжених операторів Ю. М. Березанського [1]. Одним із наслідків цієї теорії є пряма і обернена спектральні задачі для мір і відповідних матриць. Пряма задача полягає у розв'язанні системи різницевих рівнянь за заданою матрицею Якобі та отриманні поліномів ортогональних відносно борелівської міри, а, отже, і, власне, отриманні міри (у такому розумінні). Обернена задача полягає у побудові матриці Якобі та відповідних поліномів за заданою борелівською мірою.

На сьогодні відомі узагальнення класичних матриць Якобі на випадок матриць, які названі блочними типу Якобі. Так із тригонометричною проблемою моментів пов'язана CMV-матриця (М. Дж. Кантеро, Л. Морал, Л. Веласкес), яка у звичайній формі є п'ятидіагональною. Такі матриці та відповідні ортогональні поліноми Якобі–Лорана досліджувалися у роботах Л. Б. Галінського, Б. Саймона, Е. Р. Цекановського.

Блочні матриці типу Якобі, відповідні двовимірній дійсній проблемі моментів, вперше з'явились у роботах М. І. Гехтмана та А. А. Калюжного[2]. Майже одночасно у численних роботах Ян Ху розглядаються абстрактні матриці (без з'ясування їх внутрішньої структу-

---

[1]Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю. М. Березанский // – К.: Наук. думка, 1965. – 450 с. English transl., Amer. Math., Soc., Providence, R.I., 1968. – 450 p.

[2]Гехтман М. И. Спектральная теория ортогональных полиномов нескольких переменных / Гехтман М. И., Калюжний А. А. // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, 10. – С. 1437-1440.

ри), відповідні багатовимірним проблемам моментів, як, наприклад, узагальнення теореми Дж. Фаварда.

Блочні матриці типу Якобі, відповідні сильній одновимірній дійсній проблемі моментів та комплексній проблемі моментів у степеневій та експоненційній формах досліджувалися у роботах Ю. М. Березанського і М. Є. Дудкіна, де суттєво використано теорію розкладу за узагальненими власними векторами[1].

Встановлення та вивчення матриць, відповідних сильній двовимірній дійсній степеневій проблемі моментів разом із формулюванням та розв'язанням прямої і оберненої спектральних задач, записом ортонормованих поліномів у просторах з мірою, відповідною таким матрицям, дозволить розв'язувати нові прикладні задачі.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана у відповідності до планів, передбачених у Національному технічному університеті України "Київський політехнічний інститут", Інституті математики НАН України та у рамках проекту "Дослідження якісних та спектральних характеристик динамічних систем" (номер держ. реєстрації 0113U004540).

Мета і завдання дослідження. Основною метою роботи є: перенесення та розвиток відомих результатів стосовно проблеми моментів Гамбургера на випадок двовимірної сильної дійсної проблеми моментів, побудова відповідних матриць Якобі та дослідження задач, пов'язаних із ними. Задачами є:

- розв'язати обернену спектральну задачу: побудувати матриці типу Якобі (відповідні двовимірній дійсній проблемі моментів) за заданою мірою на дійсній площині;

- записати ортогональні поліноми, відповідні сильній двовимірній дійсній проблемі моментів;

- описати внутрішню структуру знайдених матриць;

- розв'язати пряму спектральну задачу: за заданими матрицями типу Якобі (відповідними сильній двовимірній дійсній проблемі моментів) скласти систему різницевих рівнянь і розв'язати її;

- з'ясувати вигляд відповідних аналогів поліномів другого роду та функції типу Вейля для двовимірної проблеми моментів.

Об'єкти дослідження. Блочні матриці типу Якобі та відповідні їм симетричні формально комутуючі оператори, системи ортогональних поліномів, відповідна борелівська міра на дійсній площині.

Предмет дослідження. Матриці, відповідні сильній двовимірній дійсній проблемі моментів та відповідні ортогональні поліноми.

Методи дослідження. Основні методи – методи функціонального аналізу, зокрема, теорії лінійних операторів та гільбертових просторів; метод розкладу за узагальненими власними векторами для скінченного набору комутуючих самоспряжених операторів.

Наукова новизна одержаних результатів.

1) Розв'язана обернена спектральна задача для блочних матриць типу Якобі, відповідних сильній двовимірній дійсній проблемі моментів – побудовані блочні матриці типу Якобі за заданою ймовірнісною мірою з носієм на компакті, у якої існують всі моменти.

2) Розв'язана пряма спектральна задача: за заданими блочними матрицями типу Якобі, відповідними сильній (і не сильній) двовимірним проблемам моментів, складена і розв'язана система різницевих рівнянь і відновлена міра (у сенсі рівності Парсеваля), яка однозначно відповідає заданим блочним матрицям.

3) Дано опис внутрішньої структури блочних матриць типу Якобі, відповідних сильній двовимірній дійсній проблемі моментів, та досліджено комутативні властивості матриць, відповідних не сильній двовимірній проблемі моментів.

4) Записано відповідні (сильній і не сильній) двовимірній дійсній проблемі моментів поліноми першого і другого роду, функція типу Вейля та доведені їх основні властивості.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертації носять теоретичний характер. Зокрема, результати, які стосуються блочних матриць Якобі, можна використовувати у задачах механіки стосовних зв'язних маятників. Дослідження з цих питань ведуться в Інституті математики НАН України, Київському національному університет ім. Тараса Шевченка, Харківському національному університеті ім. В. Н. Каразіна.

Особистий внесок здобувача. Викладені у дисертації основні результати отримані автором самостійно. На захист виносяться лише ті результати із виконаних у співавторстві робіт, які отримані автором особисто. У спільних роботах [2,3,5,7,9] М. Є. Дудкіну належить постановка задачі, а автору – розв'язання, у спільній роботі [6] автору належать формулювання і доведення теорем 2.4.10 та 2.4.15, у спільній роботі [9] автору належить доведення теореми.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи доповідалися і обговорювалися на:

– Міжнародній науковій конференції ім. акад. М. Кравчука, XV, Київ, 15–17 травня 2014 року;

– Четвертій всеукраїнській науковій конференції молодих вчених з математики та фізики, Київ, 23–25 квітня 2015 року;

– Міжнародній конференції молодих математиків, Київ, 3–6 червня 2015 року;

– Сьомій міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації", Кам'янець-Подільський, 21–22 квітня 2016 року;

– Всеукраїнській науково-методичній конференції "Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі", присвяченій пам'яті професора С. С. Левіщенка, Київ, 7-8 жовтня 2016 року;

– семінарі кафедри диференціальних рівнянь (фізико-математичний факультет НТУУ "КПІ"; керівник семінару – доктор фіз.-мат. наук, професор М. Є. Дудкін);

– семінарі відділу математичної фізики (Інститут математики НАН України, керівники семінару – професор О. Л. Ребенко, професор В. Д. Кошманенко);

– Київському семінарі з функціонального аналізу (Інститут математики НАН України, керівники семінару – академік НАН України Ю. М. Березанський, академік НАН України Ю. С. Самойленко, член-кореспондент НАН України $\boxed{\text{М. Л. Горбачук}}$).

Публікації. Основні положення дисертації, опубліковані у провідних фахових виданнях [1-9] та у тезах доповідей [10-15]. Зокрема, [3,6] у виданнях, які включені до наукометричних баз Web of Science, Scopus, MathSciNet.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, 4-х розділів та списку використаних джерел, що містить 74 найменування. Повний обсяг дисертації складає 145 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтована актуальність теми дисертації, сформульовані мета і задачі дослідження, наукова новизна результатів, практичне значення, особистий внесок здобувача та огляд основних відомих результатів.

Перший розділ роботи містить розв'язок сильної (не сильної) двовимірної дійсної проблеми моментів. Ця проблема полягає у знаходженні умов для заданої двоіндексної послідовності $\{s_{m,n}\}$, $m,n \in \mathbb{Z}$ $(m,n \in \mathbb{N}_0)$ дійсних чисел $s_{m,n} \in \mathbb{R}$, для яких існує міра Бореля $d\rho(x,y)$ на дійсній площині $\mathbb{R}^2$ і для якої

$$s_{m,n} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} x^m y^n \, d\rho(x,y), \quad m,n \in \mathbb{Z} \ (m,n \in \mathbb{N}_0). \tag{1}$$

Теорема 1.4.1 *Якщо для заданої двоіндексної послідовності дійсних чисел* $\{s_{m,n}\}$ $m,n \in \mathbb{Z}$ *(*$m,n \in \mathbb{N}_0$*), існує зображення (1), то послідовність є додатно визначеною, тобто*

$$\sum_{j,k,m,n \in \mathbb{Z}} f_{j,k} \bar{f}_{m,n} s_{j+m,k+n} \geq 0 \ \left(\sum_{j,k,m,n=0}^{\infty} f_{j,k} \bar{f}_{m,n} s_{j+m,k+n} \geq 0 \right) \tag{2}$$

для всіх скінченних наборів $(f_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}}$ *(*$(f_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$*),* $f_{j,k} \in \mathbb{C}$.

Зображення (1) існує і є єдиним для заданої двоіндексної послідовності дійсних чисел $\{s_{m,n}\}$*,* $m,n \in \mathbb{Z}$ *(*$m,n \in \mathbb{N}_0$*), якщо крім позитивної визначеності (2) розбігається один із рядів*

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{p} C_p^k \sqrt{s_{\epsilon(4p-4k),\iota(4k)}} \right)^{-1/p},$$

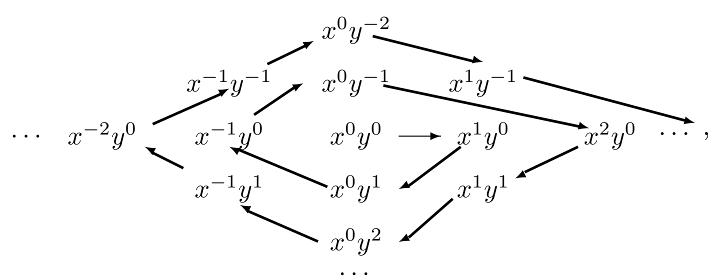
де $\epsilon, \iota = \pm 1$*; і для не сильної проблеми моментів розбігається ряд*

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{p} C_p^k \sqrt{s_{4p-4k,4k}} \right)^{-1/p}.$$

Інтегральне зображення (1) та його єдиність встановлюється завдяки теоремі про розклад за узагальненими власними векторами для скінченного набору комутуючих самоспряжених операторів. Єдиність є наслідком квазіаналітичного критерія самоспряженості.

Другий розділ присвячено розв'язанню оберненої спектральної задачі, пов'язаної із сильною (і не сильною) двовимірною дійсною проблемою моментів. На початку розділу наведено детальний розв'язок оберненої спектральної задачі, пов'язаної із випадком не сильної проблеми моментів, і побудовані відповідні матриці[2]. Далі наведено розв'язок оберненої спектральної задачі, пов'язаної із сильною двовимірною дійсною проблемою моментів.

Розглядається ймовірнісна борелева міра $d\rho(x,y)$ на компакті на дійсній площині. Не втрачаючи загальності дослідження, припускається, що ця міра має всі моменти і множина поліномів вигляду $x^m y^n$, $m,n \in \mathbb{Z}$ є лінійно незалежною і утворює тотальну множину в просторі $L_2 = L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y))$. Використовуючи порядок



тобто

$$\begin{aligned}
&1 = x^0y^0;\\
&x^1y^0, x^0y^1, x^{-1}y^0, x^0y^{-1};\\
&x^2y^0, x^1y^1, x^0y^2, x^{-1}y^1, x^{-2}y^0, x^{-1}y^{-1}, x^0y^{-2}, x^1y^{-1}; \ldots;\\
&x^ny^0, x^{n-1}y^1, \ldots, x^1y^{n-1}, x^0y^n, x^{-1}y^{n-1}, \ldots, x^{-(n-1)}y^1,\\
&\qquad x^{-n}y^0, x^{-(n-1)}y^{-1}, \ldots, x^{-1}y^{-(n-1)}, x^0y^{-n}, x^1y^{-(n-1)}; \ldots
\end{aligned} \tag{3}$$

ортогоналізується за Шмідтом і нормується послідовність x^my^n, $m,n \in \mathbb{Z}$ відносно скалярного добутку в L_2. Результатом дії є система поліномів

$$\begin{aligned}
&1 = P_{0,0}(x,y);\\
&P_{1,0}(x,y), P_{1,1}(x,y), P_{1,2}(x,y), P_{1,3}(x,y);\\
&P_{2,0}(x,y), P_{2,1}(x,y), P_{2,2}(x,y), P_{2,3}(x,y),\\
&\qquad P_{2,4}(x,y), P_{2,5}(x,y), P_{2,6}(x,y); \ldots;\\
&P_{n,0}(x,y), P_{n,1}(x,y), P_{n,2}(x,y), \ldots, P_{n,4n-1}(x,y);
\end{aligned} \tag{4}$$

Розглядаються два оператори множення на відповідні незалежні змінні та їх обернені для $f(x,y) \in L_2$:

$$
\begin{aligned}
&Af(x,y) = xf(x,y), && Bf(x,y) = yf(x,y),\\
&A^{-1}f(x,y) = x^{-1}f(x,y), && B^{-1}f(x,y) = y^{-1}f(x,y),
\end{aligned}
$$

які на поліномах (3) є операторами зсуву. При переході до базису (4) в L_2, образи операторів A і B та A^{-1} і B^{-1} стають блочними тридіагональними типу Якобі матрицями, що діють у просторі

$$
\mathbf{l}_2 = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \cdots, \quad \mathcal{H}_n = \mathbb{C}^{4n}, \quad \mathcal{H}_0 = \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}. \tag{5}
$$

Подальші теореми дають опис таких матриць.

Теорема 2.4.5 *Обмежений самоспряжений оператор із циклічним вектором множення на незалежну змінну “x” у просторі $L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y))$ в ортонормованому базисі (4) має вигляд блочної тридіагональної матриці типу Якобі J_x, що діє у просторі (5):*

$$
J_x = \begin{bmatrix} b_0 & c_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_0 & b_1 & c_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_1 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} &a_n : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_{n+1},\\ &b_n : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_n,\\ &c_n : \mathcal{H}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{H}_n, \end{aligned} \tag{6}
$$

$n \in \mathbb{N}_0$, де $c_0 = \begin{bmatrix} c_{0;0,0} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

$$
c_n = \underbrace{\left.\begin{bmatrix}
c_{n;0,0} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & & 0 & \cdots & 0 & 0\\
* & c_{n;1,1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & & 0 & \cdots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
* & * & \cdots & c_{n;n,n} & \cdots & 0 & & 0 & \cdots & 0 & 0\\
* & * & \cdots & c_{n;n+1,n} & \cdots & 0 & & 0 & \cdots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
* & * & \cdots & c_{n;3n-1,n} & \cdots & c_{n;3n-1,3n+3} & & 0 & \cdots & 0 & 0\\
* & * & \cdots & * & \cdots & * & c_{n;3n,3n+4} & & \cdots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
* & * & \cdots & * & \cdots & * & & * & \cdots & c_{n;4n,4n+2} & 0\\
* & * & \cdots & * & \cdots & * & & * & \cdots & * & c_{n;4n-1,4n+3}
\end{bmatrix}\right\}4n}_{4n+4};
$$

b_n – симетрична $(4n \times 4n)$-матриця, $n \in \mathbb{N}$ (b_0 –скаляр). В $(4n+4) \times (4n)$-матриці c_n нульові елементи позначені “0”; додатні елементи – $c_{\cdot;\cdot,\cdot}$, (крім $c_{n;3n-1,n}$); “$*$” – елементи, які можуть бути і

нульовими, і ненульовими. Матриця a_n – транспонована матриця c_n, $n \in \mathbb{N}_0$.

Матриця J_x діє на векторах $f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \in (\mathbf{l}_2)$ за правилом:

$$(J_x f)_n = a_{n-1} f_{n-1} + b_n f_n + c_n f_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{7}$$

де покладаємо $a_{-1} := 0$, $f_{-1} := 0$.

Теорема 2.4.10 *Обмежений самоспряжений оператор із циклічним вектором множення на незалежну змінну "y" у просторі $L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y))$ в ортонормованому базисі (4) має вигляд блочної тридіагональної матриці типу Якобі, що діє у просторі (5):*

$$J_y = \begin{bmatrix} w_0 & u_0 & 0 & 0 & \cdots \\ v_0 & w_1 & u_1 & 0 & \cdots \\ 0 & v_1 & w_2 & u_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \qquad \begin{array}{l} v_n : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}, \\ w_n : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_n, \\ u_n : \mathcal{H}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{H}_n, \end{array} \tag{8}$$

$n \in \mathbb{N}_0$, де $u_0 = \begin{bmatrix} * & u_{0;0,1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

$$u_n = \underbrace{\left.\begin{bmatrix} u_{n;0,0} & u_{n;0,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \cdots 0 \\ * & * & u_{n;1,2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \ddots \vdots \\ * & * & * & u_{n;2n-2,2n} & \vdots & 0 & 0 \vdots\ 0 \\ * & * & * & * & \vdots & u_{n;2n-1,2n+1} & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \ddots \vdots \\ * & * & * & * & \vdots & u_{n;4n-1,2n+1} & 0 \cdots 0 \end{bmatrix}\right\}_{4n}}_{4n+4},$$

u_n – $(4n+4) \times (4n)$-матриця, де нульові елементи позначені "0"; додатні елементи – $u_{\cdot;\cdot,\cdot}$ (крім $u_{n;0,0}$); "$*$" – елементи, які можуть бути і нульовими, і ненульовими; w_n – симетрична $(4n \times 4n)$-матриця, $n \in \mathbb{N}$ (w_0 – скаляр). Матриця v_n – транспонована матриця u_n, $n \in \mathbb{N}_0$.

Матриця J_y діє на векторах $f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \in (\mathbf{l}_2)$ за правилом:

$$(J_y f)_n = v_{n-1} f_{n-1} + w_n f_n + u_n f_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{9}$$

де покладаємо $v_{-1} := 0$, $f_{-1} := 0$.

Теорема 2.4.15 *Обмежений самоспряжений оператор із циклічним вектором множення на незалежну змінну "x^{-1}" у просторі $L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y))$ в ортонормованому базисі (4) має вигляд блочної тридіагональної матриці типу Якобі $J_{x^{-1}}$, що діє у просторі (5):*

$$J_{x^{-1}} = \begin{bmatrix} r_0 & q_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ p_0 & r_1 & q_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & p_1 & r_2 & q_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \qquad \begin{array}{l} p_n : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}, \\ r_n : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_n, \\ q_n : \mathcal{H}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{H}_n, \end{array} \tag{10}$$

$n \in \mathbb{N}_0$, *де* $r_0 = [r_{0;0,0}]$ – *скаляр;*

$$r_n = \left.\underbrace{\begin{bmatrix} * & * \cdots 0 & * & \cdots r_{n;0,3n-1} & 0 \cdots 0 \\ * & * \cdots 0 & * & \cdots r_{n;1,3n-1} & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots \ddots \vdots & \vdots & \ddots \vdots & \vdots \ddots \vdots \\ * & * \cdots 0 & * & \cdots r_{n;n-1,3n-1} & 0 \cdots 0 \\ * & * \cdots 0 & * & \cdots * & * \cdots r_{n;n,4n-1} \\ \vdots & \vdots \ddots \vdots & \vdots & \ddots \vdots & \vdots \ddots \vdots \\ r_{n;3n-1,0} & * \cdots 0 & * & \cdots * & * \cdots * \\ 0 & 0 \cdots 0 & r_{n;3n,n} & \cdots * & * \cdots * \\ \vdots & \vdots \ddots \vdots & \vdots & \ddots \vdots & \vdots \ddots \vdots \\ 0 & 0 \cdots 0 & r_{n;4n-1,n} & \cdots * & * \cdots * \end{bmatrix}}_{4n}\right\} 4n;$$

r_n – *симетрична* $(4n \times 4n)$*-матриця, де нульові елементи позначені "0"; додатні елементи –* $r_{\cdot;\cdot,\cdot}$ *(крім* $r_{n;n,4n-1}$, $r_{n;3n-1,0}$*); "$*$" – елементи, які можуть бути і нульовими, і ненульовими;*

$q_0 = \begin{bmatrix} * & * & q_{0;0,2} & 0 \end{bmatrix}$,

$$q_n = \left.\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots 0 & 0 & \cdots 0 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots \vdots & \vdots & \ddots \vdots & \vdots \ddots \vdots \\ q_{n;n,0} & q_{n;n,1} & \cdots q_{n;n,n+2} & 0 & \cdots 0 & 0 \cdots 0 \\ * & * & \cdots * & q_{n;n+1,n+3} & \cdots 0 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots \vdots & \vdots & \ddots \vdots & \vdots \ddots \vdots \\ * & * & \cdots * & * & \cdots q_{n;3n,3n+2} & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots \vdots & \vdots & \ddots \vdots & \vdots \ddots \vdots \\ * & * & \cdots * & * & \cdots q_{n;4n-1,3n+2} & 0 \cdots 0 \end{bmatrix}}_{4n+4}\right\} 4n;$$

q_n – $(4n+4)\times(4n)$-матриця, де нульові елементи позначені "0"; додатні елементи – $q_{\cdot;\cdot,\cdot}$ (крім $q_{n;n,0}$, $q_{n;n,1}$); "$*$" – елементи, які можуть бути і нульовими, і ненульовими. Матриця p_n – транспонована матриця q_n, $n\in\mathbb{N}_0$.

Матриця $J_{x^{-1}}$ діє на векторах $f=(f_n)_{n=0}^{\infty}\in(\mathbf{l}_2)$ за правилом:

$$(J_{x^{-1}}f)_n = p_{n-1}f_{n-1} + r_nf_n + q_nf_{n+1}, \quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{11}$$

де покладаємо $p_{-1}:=0$, $f_{-1}:=0$.

Теорема 2.4.18 *Обмежений самоспряжений оператор із циклічним вектором множення на незалежну змінну "y^{-1}" у просторі $L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y))$ в ортонормованому базисі (4) має вигляд блочної тридіагональної матриці типу Якобі $J_{y^{-1}}$, що діє у просторі (5)*

$$J_{y^{-1}} = \begin{bmatrix} \omega_0 & \phi_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \psi_0 & \omega_1 & \phi_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \psi_1 & \omega_2 & \phi_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \qquad \begin{array}{l} \phi_n : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}, \\ \omega_n : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_n, \\ \psi_n : \mathcal{H}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{H}_n, \end{array} \tag{12}$$

$n\in\mathbb{N}_0$, де ω_n – симетрична $(4n\times4n)$-матриця, $n\in\mathbb{N}$ (ω_0 – скаляр); ψ_n – $(4n\times(4n+4))$ -матриця, в якій елементи можуть бути і нульовими, і ненульовими. ϕ_n – $((4n+4)\times4n)$-матриця. Матриця ϕ_n – транспонована матриця ψ_n, $n\in\mathbb{N}_0$.

Матриця $J_{y^{-1}}$ діє на векторах $f=(f_n)_{n=0}^{\infty}\in(\mathbf{l}_2)$ за правилом:

$$(J_{y^{-1}}f)_n = \psi_{n-1}f_{n-1} + \omega_nf_n + \phi_nf_{n+1}, \quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{13}$$

де покладаємо $\psi_{-1}:=0$, $f_{-1}:=0$.

У **третьому розділі** надано розв'язок прямої спектральної задачі, відповідної до оберненої, розв'язаної у попередньому розділі. Результати розділу підсумовані у такій теоремі.

Теорема 3.6.2 *Нехай у просторі (5) визначені лінійні оператори A, B, A^{-1}, B^{-1} на фінітних векторах $\mathbf{l}_{\mathrm{fin}}$ блочними тридіагональними матрицями типу Якобі J_x, J_y, $J_{x^{-1}}$, $J_{y^{-1}}$ вигляду (6), (10), (8), (12), що діють за правилами (7), (11), (9), (13). Припускається, що всі блоки-коефіцієнти a_n, b_n, c_n, u_n, v_n, w_n, p_n, q_n, r_n, ω_n, ϕ_n, ψ_n, $n\in\mathbb{N}_0$ є рівномірно обмеженими та мають нульові і додатні елементи згідно теорем 2.4.5, 2.4.10, 2.4.15, 2.4.18, а замикання A і B та A^{-1} і B^{-1} за неперервністю є обмеженими комутуючими самоспряженими операторами у цьому просторі.*

Розклад за узагальненими власними векторами операторів A і B та A^{-1} і B^{-1}, відповідних блочним тридіагональним матрицям *типу Якобі J_x, J_y, $J_{x^{-1}}$, $J_{y^{-1}}$ має такий вигляд. Для заданого початкового значення $\varphi_0(x,y)=\varphi_0\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ система рівнянь*

$$\begin{gathered}(J_x\varphi(x,y))_n = x\varphi_n(x,y), \quad (J_{x^{-1}}\varphi(x,y))_n = x^{-1}\varphi_n(x,y),\\ (J_y\varphi(x,y))_n = y\varphi_n(x,y), \quad (J_{y^{-1}}\varphi(x,y))_n = y^{-1}\varphi_n(x,y),\\ n\in\mathbb{N}_0,\ \varphi_{-1}(x,y)=:0,\end{gathered} \tag{14}$$

має розв'язок $\varphi(x,y)=(\varphi_n(x,y))_{n=0}^{\infty}$, $\varphi_n(x,y)$ зі значеннями в $\mathcal{H}_n$, у вигляді

$$\varphi_n(x,y)=P_n(x,y)\varphi_0=(P_{n;0},P_{n;1},\dots,P_{n;4n-1},)\varphi_0,$$

який є узагальненим власним вектором пари операторів A і B (A^{-1} і B^{-1}) згідно з проекційною спектральною теоремою[1]. $P_{n;\gamma}(x,y)$, $\gamma=0,1,\dots,4n-1$ – поліноми від x і y та x^{-1} і y^{-1}.

З розкладу за узагальненими власними векторами для операторів A і B та A^{-1} і B^{-1} отримуємо перетворення Фур'є у вигляді

$$\begin{aligned}\mathbf{l}_2\supset\mathbf{l}_{\mathrm{fin}}\ni f=(f_n)_{n=0}^{\infty}\longmapsto \hat{f}(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n^*(x,y)f_n\\ =P_{0;0}(x,y)f_{0;0}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\gamma=0}^{4n-1}\overline{P_{n;\gamma}(x,y)}f_{n;\gamma}\in L_2(\mathbb{R}^2,d\rho(x,y)),\end{aligned} \tag{15}$$

де $P_n^*(x,y):\mathcal{H}_n\longrightarrow\mathcal{H}_0$ – оператор, спряжений до $P_n(x,y):\mathcal{H}_0\longrightarrow\mathcal{H}_n$, $d\rho(x,y)$ – відповідна спектральна міра A і B (A^{-1} і B^{-1}).

Рівність Парсеваля має вигляд: $\forall f,g\in\mathbf{l}_{\mathrm{fin}}$

$$\begin{gathered}(f,g)_{\mathbf{l}_2}=\int\limits_{\mathbb{R}^2}\hat{f}\overline{\hat{g}}\,d\rho(x,y), \quad \hat{f}=\hat{f}(x,y),\ \hat{g}=\hat{g}(x,y),\\ (J_xf,g)_{\mathbf{l}_2}=\int\limits_{\mathbb{R}^2}x\hat{f}\overline{\hat{g}}\,d\rho(x,y), \quad (J_{x^{-1}}f,g)_{\mathbf{l}_2}=\int\limits_{\mathbb{R}^2}x^{-1}\hat{f}\overline{\hat{g}}\,d\rho(x,y),\\ (J_yf,g)_{\mathbf{l}_2}=\int\limits_{\mathbb{R}^2}y\hat{f}\overline{\hat{g}}\,d\rho(x,y), \quad (J_{y^{-1}}f,g)_{\mathbf{l}_2}=\int\limits_{\mathbb{R}^2}y^{-1}\hat{f}\overline{\hat{g}}\,d\rho(x,y).\end{gathered} \tag{16}$$

Перетворення (15) і тотожності (16) розширюються за неперервністю на $\forall f,g\in\mathbf{l}_2$ так, що оператор (15) є унітарним і відображає весь $\mathbf{l}_2$ у весь $L_2(\mathbb{R}^2,d\rho(x,y))$.

Поліноми $P_{n;\gamma}(x,y)$, $n\in\mathbb{N}$, $\gamma=0,...,4n-1$ *і* $P_{0;0}=1$ *утворюють ортонормовану систему в* $L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y))$ *у сенсі:*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2}\sum_{i=1}^{j}\overline{P_{j;i}(x,y)}f_{j;i}\sum_{i=l}^{k}P_{k;l}(x,y)\overline{f_{k;l}}=\delta_{j,k}(f_j,g_k)_{\mathcal{H}_j}.$$

де $\forall f_j\in\mathcal{H}_j$, $\forall g_k\in\mathcal{H}_k$, $j,k\in\mathbb{N}_0$. *Коефіцієнти матриць*

$$\begin{aligned}
J_x=&(\tau_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}, \quad \tau_{j,k}=(\tau_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{4j-1,4j+3},\\
J_y=&(\theta_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}, \quad \theta_{j,k}=(\theta_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{4j-1,4j+3},\\
J_{x^{-1}}=&(\eta_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}, \quad \eta_{j,k}=(\eta_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{4j-1,4j+3},\\
J_{y^{-1}}=&(\vartheta_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}, \quad \vartheta_{j,k}=(\vartheta_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{4j-1,4j+3},
\end{aligned}$$

відновлюються за формулами:

$$\begin{aligned}
\tau_{j,k;\alpha,\beta}=&(J_x\delta_{k,\beta},\delta_{j,\alpha})_{\mathbf{l}_2}=\int\limits_{\mathbb{R}^2}x\overline{P_{k;\beta}(x,y)}P_{j;\alpha}(x,y)d\rho(x,y),\\
\theta_{j,k;\alpha,\beta}=&(J_y\delta_{k,\beta},\delta_{j,\alpha})_{\mathbf{l}_2}=\int\limits_{\mathbb{R}^2}y\overline{P_{k;\beta}(x,y)}P_{j;\alpha}(x,y)d\rho(x,y),\\
\eta_{j,k;\alpha,\beta}=&(J_{x^{-1}}\delta_{k,\beta},\delta_{j,\alpha})_{\mathbf{l}_2}=\int\limits_{\mathbb{R}^2}x^{-1}\overline{P_{k;\beta}(x,y)}P_{j;\alpha}(x,y)d\rho(x,y),\\
\vartheta_{j,k;\alpha,\beta}=&(J_{y^{-1}}\delta_{k,\beta},\delta_{j,\alpha})_{\mathbf{l}_2}=\int\limits_{\mathbb{R}^2}y^{-1}\overline{P_{k;\beta}(x,y)}P_{j;\alpha}(x,y)d\rho(x,y).\\
&j,k\in\mathbb{N}_0,\quad \alpha,\beta=0,1,\ldots,4n-1,
\end{aligned}$$

де перепозначено:

$$\begin{array}{lllll}
b_j=\tau_{j,j}, & w_j=\theta_{j,j}, & \tau_j=\eta_{j,j}, & \omega_j=\vartheta_{j,j}, & \\
c_j=\tau_{j,j+1}, & u_j=\theta_{j,j+1}, & q_j=\eta_{j,j+1}, & \phi_j=\vartheta_{j+1,j}, & \\
a_j=\tau_{j,j}, & v_j=\theta_{j,j+1}, & p_j=\eta_{j+1,j}, & \psi_j=\vartheta_{j+1,j}, & j\in\mathbb{N}_0.
\end{array}$$

У **четвертому розділі** дисертації розглядаються питання, суміжні із дослідженнями попереднього розділу, зокрема поліноми другого роду та аналог функції Вейля.

Поліноми другого роду $Q_n(z_1z_2)$ визначені виразом, який узагальнює відомий вираз для поліномів другого роду у класичному випадку, а саме:

$$Q_n(z_1,z_2) := \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{P_n(\lambda,\mu) - P_n(\lambda,z_2) - P_n(z_1,\mu) + P_n(z_1,z_2)}{(\lambda - z_1)(\mu - z_2)}\, d\rho(\lambda,\mu), \tag{17}$$

де $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0$ і $d\rho(\lambda,\mu)$ – міра на $\mathbb{R}^2$ із компактним носієм, відповідна парі обмежених самоспряжених комутуючих операторів A і B (які можуть мати обернені A^{-1} і B^{-1}).

Аналогічно до того, як поліноми другого роду у класичній проблемі моментів Гамбургера є розв'язками відповідного різницевого рівняння, так і введені у (17) поліноми також задовольняють рівняння (7), (11), (9) та (13), про що свідчить така теорема.

Теорема 4.3.1 *Послідовність многочленів* $Q(z_1,z_2) = (Q_n(z_1,z_2))_{n=0}^{\infty}$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, *де* $Q_n(z_1,z_2)$, *задана формулою (17), є розв'язком системи різницевих рівнянь, породжених блочними тридіагональними типу Якобі матрицями, відповідними двовимірній дійсній проблемі моментів:*

$$\begin{aligned}
&a_{n-1}Q_{n-1}(z_1,z_2) + b_nQ_n(z_1,z_2) + c_nQ_{n+1}(z_1,z_2) = z_1Q_n(z_1,z_2),\\
&u_{n-1}Q_{n-1}(z_1,z_2) + w_nQ_n(z_1,z_2) + v_nQ_{n+1}(z_1,z_2) = z_2Q_n(z_1,z_2),\\
&p_{n-1}Q_{n-1}(z_1,z_2) + r_nQ_n(z_1,z_2) + q_nQ_{n+1}(z_1,z_2) = z_1^{-1}Q_n(z_1,z_2),\\
&\psi_{n-1}Q_{n-1}(z_1,z_2) + \omega_nQ_n(z_1,z_2) + \phi_nQ_{n+1}(z_1,z_2) = z_2^{-1}Q_n(z_1,z_2),\\
&\qquad n \in \mathbb{N}, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C},
\end{aligned}$$

із початковими даними $Q_{0;0}(z_1,z_2) = 0$.

Також у цьому розділі сформульована та доведена теорема, аналогічна до теореми 4.3.1, для випадку не сильної двовимірної проблеми моментів.

У підрозділі (4.2) введена функція типу Вейля для двовимірної дійсної проблеми моментів:

$$M(z_1,z_2) = (R_{z_1}(A)\delta_0, R_{\bar{z}_2}(B)\delta_0)_{\mathbf{l}_2} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(\lambda - z_1)(\mu - z_2)}\, d\rho(\lambda,\mu). \tag{18}$$

$z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, де δ_0 – циклічний вектор для пари обмежених операторів A і B (які можуть мати обернені A^{-1} і B^{-1}). Аналогічно, як у класичній проблемі моментів Гамбургера, введену функцію (18) характеризує така теорема.

Теорема 4.4.1 *Нехай* J_x *і* J_y ($J_{x^{-1}}$ *і* $J_{y^{-1}}$) *– блочні тридіагональні типу Якобі матриці (6), (10), (8), (12), які породжують в*

l_2 *обмежені комутуючі самоспряжені оператори, відповідні сильній (або не сильній) двовимірній дійсній проблемі моментів. Нехай* $R_{z_1}(A)$ *і* $R_{z_2}(B)$ *– їх резольвенти* ($\mathrm{Im} z_i \neq 0$, $i = 1, 2$)*. Тоді функція* $M(z_1, z_2) = (R_{z_1}(A)\delta_0, R_{\bar{z}_2}(B)\delta_0)_{\mathrm{l}_2}$ *однозначно визначає спектральну міру цих операторів.*

Наприкінці досліджені комутативні властивості матриць, відповідних двовимірній дійсній (не сильній) проблемі моментів, та проінтегровані диференціально-різницеві ланцюжки типу Тоди, породжені системою рівнянь Лакса утворених блочними матрицями, відповідними двовимірній проблемі моментів.

Нехай L_x та L_y – симетричні матриці, що породжують обмежені комутуючі самоспряжені оператори, відповідні дійсній двовимірній (не сильній) проблемі моментів, та A і B – матриці із внутрішньою структурою типу L_x та L_y. Припускається, що елементи цих матриць – неперервно диференційовні функції змінної $t \in [0, T]$, $T \leq \infty$. Матриці мають таку внутрішню структуру:

$$
\begin{gathered}
L_x = \{\alpha_{n,m}(t)\}_{n,m=0}^{\infty},\ L_y = \{\beta_{n,m}(t)\}_{n,m=0}^{\infty}, \\
A = \{a_{n,m}(t)\}_{n,m=0}^{\infty},\ B = \{b_{n,m}(t)\}_{n,m=0}^{\infty}, \\
\alpha_{n,m} = \beta_{n,m} = a_{n,m} = b_{n,m} = 0, \mid n - m \mid > 1.
\end{gathered}
\tag{19}
$$

Для блоків та для елементів блоків покладається:

$$
\begin{gathered}
\alpha_{n,n+1;i,j} = a_{n,n+1;i,j} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1, \quad j = i+2, \ldots, n+2, \\
\beta_{n,n+1;i,j} = b_{n,n+1;i,j} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1, \quad j = i+1, \ldots, n+2, \\
(\alpha_{n,n+1,i,j} = \alpha_{n+1,n,j,i}, \quad \beta_{n,n+1,i,j} = \beta_{n+1,n,j,i}).
\end{gathered}
\tag{20}
$$

Розглядається система рівнянь типу Лакса:

$$
L'_x = L_x A - A L_x, \quad L'_y = L_y B - B L_y, \tag{21}
$$

де A та B – задані, а L_x та L_y – шукані матриці.

Теорема 4.7.4 *Система (21) є розв'язною (інтегровною), якщо коефіцієнти матриць разом з (19) і (20) задовольняють умови:*

$$
\begin{gathered}
\alpha_{1,1;0,1} = \alpha_{0,1;0,0} = \alpha_{1,2;0,0} = \alpha_{1,2;1,0} = \alpha_{1,2;1,1} = 0, \\
\beta_{1,1;0,1} = \beta_{1,2;1,2} = 0; \quad \beta_{0,0;0,0} = \beta_{1,1;0,0}; \\
\beta_{1,1;0,0} \neq \beta_{1,1;1,1}; \quad a_{0,1;0,1} = a_{1,0;1,0} = 0; \quad a_{0,1;0,0} \neq a_{1,0;0,0},
\end{gathered}
\tag{22}
$$

та оператори A *та* B *такі, що* $A = -B^*$.

Якщо існує розв'язок системи (21) при $t = 0$, то загальний розв'язок відновлюється однозначно, використовуючи аналог функції Вейля типу (18) шляхом розв'язання рівняння:

$$M_t'(z_1, z_2; t) = 2a_{0,1;0,0}(1 - (\alpha_{0,0;0,0} - z_1)(\beta_{0,0;0,0} - z_2))M(z_1, z_2; t). \tag{23}$$

ВИСНОВКИ

1) Побудовано блочні матриці типу Якобі за заданою ймовірнісною мірою з носієм на компакті на дійсній площині. Вважається, що у міри існують всі моменти та система поліномів $x^n y^m$, $n, m \in \mathbb{Z}$ є лінійно незалежною і тотальною у відповідному просторі L_2. Тобто, розв'язано обернену спектральну задачу для блочних матриць типу Якобі, відповідних сильній двовимірній дійсній проблемі моментів.

2) За заданими блочними матрицями типу Якобі складено і розв'язано систему різницевих рівнянь. Розв'язками є двовимірні поліноми на дійсній площині. За поліномами відновлено міру (у сенсі рівності Парсеваля). Поліноми є лінійно незалежними і утворюють тотальну множину відносно відновленої міри, яка однозначно відповідає заданим блочним матрицям. Тобто розв'язано пряму спектральну задачу.

3) Дано опис внутрішньої структури блочних матриць типу Якобі, відповідних сильній двовимірній дійсній проблемі моментів: вказано обов'язково нульові та додатні елементи. Досліджено комутативні властивості блочних матриць, відповідних не сильній проблемі моментів, та на основі цих матриць наведено алгоритми побудови численних прикладів.

4) Використовуючи поліноми першого роду введено поліноми другого роду та функцію типу Вейля, відповідні двовимірній сильній (та не сильній) дійсній проблемі моментів та доведено їх основні властивості, які узагальнюють відповідні властивості поліномів другого роду і аналог функції Вейля для класичної проблеми моментів Гамбургера.

5) Проінтегровано диференціально-різницеві ланцюжки типу Тоди, породжені системою двох рівнянь Лакса, утворених блочними

матрицями, відповідними (не сильній) двовимірній проблемі моментів.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Козак В. І.* Обернена спектральна задача для блочних матриць типу Якобі, відповідних дійсній двовимірній проблемі моментів / В. І. Козак // Наукові Вісті НТУУ "КПІ". – 2013. – № 4. – С. 73-76.

2. *Дудкін М. Є.* Пряма задача для блочних матриць типу Якобі, відповідних двовимірній дійсній проблемі моментів/ М. Є. Дудкін, В. І. Козак //Наукові Вісті НТУУ "КПІ". – 2014. – № 4. – С. 41-47.

3. *Dudkin M. E.* Direct and inverse spectral problems for block Jacobi type bounded symmetric matrices related to the two dimensional real moment problem/ M. E. Dudkin, V. I. Kozak// Methods Funct. Anal. Topology. – 2014. – **20**, 3. – C. 219–251.

4. *Козак В. І.* Побудова блочних матриць типу Якобі, відповідних строгій двовимірній дійсній проблемі моментів / В. І. Козак // Наукові записки НаУКМА. Фізико-математичні науки. – 2015. – **165**. – С. 19-26.

5. *Дудкін М. Є.* Поліноми другого роду у двовимірній проблемі моментів / М. Є. Дудкін, В. І. Козак // Наукові Вісті НТУУ КПІ. – 2015. – № 4. – С. 41–46.

6. *Дудкін М. Є.* Блочні матриці типу Якобі, відповідні двовимірній проблемі моментів: поліноми другого роду та функція Вейля / М. Є. Дудкін, В. І. Козак // Український математичний журнал. – 2016. – **68**, 4. – С. 495–505.

7. *Дудкін М. Є.* Умови єдиності міри, відповідної двовимірній проблемі моментів / М. Є. Дудкін, В. І. Козак // Наукові Вісті НТУУ КПІ. – 2016. – № 4. – С. 32–37.

8. *Козак В. І.* Інтегрування диференціально-різницевих нелінійних рівнянь за допомогою спектральної теорії блочних матриць, відповідних двовимірній проблемі моментів / В. І. Козак // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2016. – № 2. – С. 41-48.

9. *Дудкін М. Є.* Пряма спектральна задача з блочними матрицями типу Якобі, що відповідають сильній двовимірній проблемі моментів / М. Є. Дудкін, В. І. Козак // Наукові записки НаУКМА. Фізико-математичні науки. – 2016. – **178**. – С. 16–22.

10. *Козак В. І.* Обернена спектральна задача для блочних матриць типу Якобі, відповідних дійсній двовимірній проблемі моментів/

В. І. Козак // Матеріали конференції “П'ятнадцята міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука” (Київ, 15–17 травня 2014 р.). – К.: Нац. техн. ун-т України “КПІ”, 2014. – С. 117-118.

11. *Dudkin M. E.* Direct spectral problems for the block Jacobi type bounded symmetric matrices related to the two dimensional real moment problem/ M. E. Dudkin, V. I. Kozak// Матеріали конференції “П'ятнадцята міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука” (Київ, 15–17 травня 2014 р.). – Київ: Нац. техн. ун-т України “КПІ”, 2014. – С. 13.

12. *Козак В. І.* Поліноми другого роду у двовимірній проблемі моментів / В. І. Козак // Тези доповідей. “Четверта всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики” (Київ, 23–25 квітня 2015 р.). – К.: Нац. техн. ун-т України “КПІ” , 2015. – С. 19.

13. *Козак В. І.* Аналог функції Вейля, відповідної двовимірній дійсній проблемі моментів / В. І. Козак // Тези доповідей. “Міжнародна конференція молодих математиків” (Київ, 3–6 червня 2015 р.). – К.: Ін-т математики НАН України, 2015. – С. 76.

14. *Козак В. І.* Нескінченна двовимірна система зв'язних тягарців / В. І. Козак // Тези доповідей. Сьома міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації” (Кам'янець-Подільський, 21–22 квітня 2016 р.). – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський нац. ун-т ім. І. Огієнка , 2016. – С. 103.

15. *Козак В. І.* Умова єдиності міри, відповідної блочним матрицям типу Якобі у двовимірній проблемі моментів / В. І. Козак // Тези доповідей. Всеукраїнська науково-методична конференція “Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі” присвячена пам'яті професора С. С. Левіщенка (Київ, 7-8 жовтня 2016 р.) – К.: Нац. пед. ун-т ім. М.Драгоманова,, 2016. – С. 48.

АНОТАЦІЇ

Козак В. І. Матриці типу Якобі відповідні двовимірній проблемі моментів. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз. Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, Київ, 2017.

Дисертація присвячена дослідженню кола питань, пов'язаних із дійсною сильною (і не сильною) двовимірною проблемою моментів.

Базуючись на розкладі за узагальненими власними векторами, встановлено необхідні та достатні умови розв'язності такої проблеми та умови її однозначної розв'язності. Для розв'язку сильної двовимірної дійсної проблеми моментів (ймовірнісної борелівської міри на дійсній площині із компактним носієм) побудовані блочні тридіагональні типу Якобі матриці та система ортонормованих поліномів (першого роду), тобто розв'язана обернена спектральна задача, описана внутрішня структура таких матриць, а саме: визначені завжди нульові та додатні елементи блоків матриць. І навпаки, за заданими блочними тридіагональними типу Якобі матрицями складена система різницевих рівнянь, яка розв'язана. Так отримана система поліномів (першого роду), за якою відновлена ймовірнісна борелівська міра на дійсній площині із компактним носієм (у розумінні рівності Парсеваля). Тобто розв'язана пряма спектральна задача завдяки розкладу за узагальненими власними векторами. Записана система поліномів другого роду та двовимірний аналог функції типу Вейля. Наведені алгоритми побудови прикладів отриманих матриць. Проінтегровані диференціально-різницеві ланцюжки типу Тоди, породжені системою рівнянь Лакса, утворених блочними матрицями, відповідними двовимірній проблемі моментів.

Ключові слова: двовимірна проблема моментів, блочні тридіагональні типу Якобі матриці, ортогональні поліноми на дійсній площині, пряма та обернена спектральні задачі, функція Вейля, поліноми першого і другого роду.

Козак В. И. Матрицы типа Якоби соответствующие двумерной проблеме моментов. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – математический анализ. Национальный технический университет Украины "Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского", Киев, 2017.

Диссертация посвящена исследованию круга вопросов, связанных с действительной сильной (и не сильной) двумерной проблемой моментов. Основываясь на разложении по обобщенным собственным векторам, установлены необходимые и достаточные условия разрешимости такой проблемы и условия ее однозначной разрешимости. Для решения двумерной действительной проблемы моментов (вероятностной борелевской меры на действительной плоскости с компактным носителем) построены блочные тридиагональные типа Якоби матрицы, и система ортонормированных полиномов (первого ро-

да). Для построения выбирается порядок ортогонализации двухиндексной последовательности полиномов $x^n y^m$, $n, m \in \mathbb{Z}$ для сильной проблемы и $n, m \in \mathbb{N}_0$ для не сильной. В результате ортогонализации по Шмидту относительно скалярного произведения в L_2 с борелевской вероятносной мерой на компакте получается также двухиндексная последовательность полиномов $P_{n,k}(x, y)$, $n \in \mathbb{N}_0$, $k = 0, 1, ..., n$. Тогда операторы умножения на независимые переменные x, y и x^{-1}, y^{-1}, являющиеся операторами сдвига по соответствующим переменным, в новом базисе будут иметь вид блочных тридиагональных матриц типа Якоби. Таким образом решена обратная спектральная задача. Описана внутренняя структура таких матриц. И наоборот, по заданным блочным тридиагональным типа Якоби матрицам составлена и решена система разностных уравнений. Так получена система полиномов (первого рода), по которой восстановлена вероятностная борелевская мера на действительной плоскости с компактным носителем (в смысле равенства Парсеваля). В результате исследований было установлено, что полученная система полиномов является линейно независимой в пространстве L_2 по восстановленной мере и образует в нем тотальное множество. Более того, построение блочных матриц типа Якоби по этой восстановленной мере приводит к заданным блочным тридиагональным матрицам типа Якоби. В доказательстве существенную роль играет использование разложения по обобщенным собственным векторам пары самосопряженных коммутирующих операторов. То есть решена прямая спектральная задача. Записана система полиномов второго рода и двумерный аналог функции Вейля. Приведены алгоритмы построения примеров полученных матриц. Проинтегрированы дифференциально-разностные цепочки типа Тоды, образованные системой двух уравнений Лакса по блочным матрицам, соответствующим (не сильной) двумерной проблеме моментов.

Ключевые слова: двумерная проблема моментов, блочные тридиагональные типа Якоби матрицы, ортогональные полиномы на действительной плоскости, прямая и обратная спектральные задачи, функция Вейля, полиномы первого и второго рода.

Kozak V. I. Jacobi matrices corresponding to two dimensional moment problem. – Manuscript.

Thesis of the dissertation for obtaining of the degree of candidate of sciences in Physics and Mathematics, speciality 01.01.01 – mathematical analysis. National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv

Polytechnic institute", Kyiv, 2017.

This research focuses on range of issues related to the real strong (and non strong) two-dimensional moment problem. Based on the theory of the generalized eigenfunction expansion the necessary and sufficient conditions for the solvability of such problems was found and conditions of the unique of the solvability also. For the result of the solution of real two-dimensional moment problem (the Borel probability measure on the real plane with compact support) a three-diagonal block Jacobi matrix type and polynomials orthonormal system (first order) built. That is the inverse spectral problem is solved. The internal structure of these matrices is described. Conversely, for a given block three-diagonal Jacobi type matrices there is composed a system of difference equations, which is solved. So the resulting system polynomial (first order) by which restored Borel probability measure on the real plane with compact support (within the meaning of Parseval equality) is solved. That it is solved the direct spectral problem.

The analog of the second order polynomials and two-dimensional analogue of Weyl functions are presented. The algorithms for constructions of examples such sort matrices is also given. Differential-difference type Toda chains are integrated, that was generated by the system of two Lax equations constructed by two block Jacobi type matrices corresponding to the (non strong) two dimensional moment problem.

Keywords: two-dimensional moment problem, three-diagonal block Jacobi type matrices, orthogonal polynomials on the real plane, direct and inverse spectral problem, Weyl function, polynomials of the first and the second kind.