Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"

Національна академія наук України
Інститут математики

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

КОЗАК Валентина Іванівна

УДК 517.9

ДИСЕРТАЦІЯ

МАТРИЦІ ТИПУ ЯКОБІ ВІДПОВІДНІ ДВОВИМІРНІЙ ПРОБЛЕМІ МОМЕНТІВ

01.01.01 — математичний аналіз

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук.

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

Науковий керівник: Дудкін Микола Євгенович, проф., д. ф.-м.н.

Київ–2017

АНОТАЦІЯ

Козак В.І. "Матриці типу Якобі відповідні двовимірній проблемі моментів". – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.01 «Математичний аналіз». - Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", Київ, 2017.

Дослідження, пов'язані із класичною проблемою моментів Г. Гамбургера (Т. Стільтьєса) логічно приводять до нескінчених матриць Якобі та відповідних систем поліномів, ортогональних відносно борелівської міри на дійсній вісі. У зв'язку із проблемою моментів матриці Якобі розглядали Н.І.Ахієзер, Г.Вейль, М.Г.Крейн, М.Ріс, Р.Неванлінна та багато інших. Такі матриці виникають в багатьох і фізичних і математичних задачах, наприклад, в механічних – при розгляді моделей із зв'язних маятників, в алгебраїчних – при дослідженні неперервних дробів; в математичному аналізі – апроксимації Паде.

Значна частина наукової діяльності Ю.М.Березанського присвячена дослідженню питань, стосовних матриць Якобі, та їх узагальнень на випадок блочних матриць (Якобієвих полів). Найбільш плідним підходом до вивчення властивостей матриць Якобі є теорія розкладу за узагальненими власними векторами самоспряжених операторів Ю.М.Березанського. Одним із наслідків цієї теорії є пряма і обернена спектральні задачі для мір і відповідних матриць.

На сьогодні відомі узагальнення класичних матриць Якобі на випадок матриць, які названі блочними типу Якобі. Так із тригонометричною проблемою моментів пов'язана CMV-матриця (M.J.Cantero, L.Moral, L.Velázquez), яка у звичайній формі є п'ятидіагональною. Такі матриці та відповідні ортогональні поліноми Якобі–

Лорана досліджувалися в роботах Л.Б.Галінського, Б.Саймона, Е.Р.Цекановського.

Блочні матриці типу Якобі відповідні двовимірній дійсній проблемі моментів вперше з'явились в роботах М.І.Гехтмана та А.А.Калюжного. Майже одночасно в чисельних роботах Yuan Xu розглядаються абстрактні матриці (без з'ясування їх внутрішньої структури) відповідні багатовимірним проблемам моментів, як узагальнення теореми Favard J.

Блочні матриці типу Якобі відповідні сильній одновимірній дійсній проблемі моментів та комплексній проблемі моментів в степеневій та експоненційній формах досліджувалися в роботах Ю.М.Березанського і М.Є.Дудкіна, де суттєво використано теорію розкладу за узагальненими власними векторами.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню кола питань, пов'язаних з дійсною степеневою двовимірною проблемою моментів. Розглядається паралельно варіант не сильної проблеми моментів, і цей варіант узагальнюється на більш складний і об'ємний – сильна проблема моментів. Цей варіант є основним в роботі. Проблема розв'язується, використовуючи розклад за узагальненими власними векторами для пари комутуючих обмежених самоспряжених операторів (і, що характерно для сильної проблеми моментів, до двох зазначених операторів до розгляду додаються і їх обернені, які у випадку сильної проблеми моментів обов'язково існують). Так, записане узагальнене перетворення Фур'є і рівність Парсеваля, яка безпосередньо веде до моментного зображення. Встановлені окремо необхідні та достатні умови розв'язності обох проблем (сильної та не сильної).

При встановленні однозначності розв'язку проблеми моментів використаний квазіаналітичний критерій самоспряженості оператора.

Використовуючи вже розв'язану проблему моментів, або довільну (не вироджену) міру із носієм на компакті на дійсній площині, побудовані блочні тридіагональні матриці типу Якобі і система ортогональних поліномів від двох змінних першого роду, що є узагальненням поліномів першого роду у випадку класичної проблеми моментів Гамбургера.

Для побудови вибирається порядок ортогоналізації двоіндексної послідовності поліномів $x^n y^m$, $n, m \in \mathbb{Z}$ у випадку сильної проблеми моментів і $n \in \mathbb{N}_0$ для випадку несильної проблеми.

В результаті ортогоналізації за Шмідтом зазначеної послідовності відносно скалярного добутку в $L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y))$ з борелівською ймовірнісною мірою $d\rho(x,y)$ з носієм на компакті утворюється двоіндексна послідовність поліномів $P_{n,k}(x,y)$, $n \in \mathbb{N}_0$, $k = 0, 1, ..., n$. Міра $d\rho(x,y)$ є або розв'язком деякої відповідної проблеми моментів або є взятою наперед такою, в якої існують всі моменти і яка має в носії непорожню відкриту підмножину. Тоді оператор множення на незалежні змінні x, y (та x^{-1}, y^{-1} у випадку сильної проблеми моментів), є оператором зсуву по відповідних змінних, а у новому базисі $P_{n,k}(x,y)$ мають вигляд тридіагональних типу Якобі блочних матриць. Таким чином розв'язана обернена спектральна задача для двовимірної степеневої сильної (і не сильної) проблеми моментів.

При цьому описана внутрішня структура таких матриць, тобто вказані обов'язково нульові елементи та додатні елементи блоків матриць. Враховуючи складну структуру таких матриць, наведені приклади загального характеру, які є інструментом для побудови простих прикладів.

Використовуючи отримані блочні матриці відповідні сильній і не сильній проблемі моментів, розв'язується така задача. За заданими матрицями складається система відповідних різницевих рівнянь, коєфіцієнтами в якій вже є блочні матриці а не окремі числа, як у класичному одновимірному випадку.

Розв'язками складених систем є поліноми першого роду, які співпадають із отриманими раніше при ортогоналізації. Ці поліноми тепер використовують для відновлення міри на дійсній площині. Після встановлення взаємно однозначної відповідності між отриманими поліномами і мірою, встановлюється рівність Парсеваля, використовуючи перетворення Фур'є за узагальненими власними векторами пари обмежених самоспряжених операторів породжених блочними матрицями. Складність випадку сильної проблеми моментів полягає в тому, що крім двох обмежених самоспряжених операторів, ще беруться до уваги і їх обернені. В результаті досліджень встановлено, що отримана система поліномів є лінійно незалежною у просторі

$L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x, y))$ і утворює в ньому тотальну множину. Крім того, побудова блочних матриць типу Якобі за цією відновленою (в сенсі рівності Парсеваля) мірою приводить до блочних тридіагональних типу Якобі матриць, які були задані, якщо використовувати зазначену вище процедуру ортогоналізації. У доведені цього факту вдруге істотню роль відіграє розклад за узагальненими власними векторами для пари комутуючих обмежених самоспряжених операторів, які мають обернені у випадку сильної проблеми моентів. Тобто, таким чином розв'язана пряма спектральна задача, обернена до якої зазначена раніше.

Попередні основні дослідження доповнені такими: за аналогією із одновимірним класичним випадком запропонований варіант поліномів другого роду та двовимірний аналог функції Вейля. Показано, що поліноми другого роду також є розв'язками системи блочних різницевих рівнянь, які розглядалися у прямій спектральній задачі. Відповідні поняття і об'єкти введені окремо для двох випадків, тобто сильної і не сильної проблеми моментів.

Використовуючи блочні матриці типу Якобі відповідні не сильній проблемі моментів, складена система рівнянь типу Лакса та аналог диференційно-різницевих ланцюжків типу Тоди. При певних обмеженнях на коефіцієнти блочних матриць такі ланцюжки проінтегровані.

Ключові слова: двовимірна проблема моментів, блочні тридіагональні матриці типу Якобі, ортогональні поліноми на дійсній площині, пряма і обернена спектральні задачі, функція Вейля, поліноми першого і другого роду.

Список публікацій здобувача

1. *Козак В. І.* Обернена спектральна задача для блочних матриць типу Якобі відповідних дійсній двовимірній проблемі моментів / В. І. Козак // Наукові Вісті НТУУ "КПІ". – 2013. – № 4. – С. 73-76.

2. *Дудкін М. Є.* Пряма задача для блочних матриць типу Якобі відповідних двовимірній дійсній проблемі моментів/ М. Є. Дудкін, В. І. Козак //Наукові Вісті

НТУУ “КПІ”. – 2014. – № 4. – С. 41-47.

3. *Dudkin M .E.* Direct and inverse spectral problems for block Jacobi type bounded symmetric matrices related to the two dimensional real moment problem/ M. E. Dudkin, V .I. Kozak// Methods Funct. Anal. Topology. – 2014. – т.20, № 3. – С. 219–251.

4. *Козак В. І.* Побудова блочних матриць типу Якобі, відповідних строгій двовимірній дійсній проблемі моментів / В. І. Козак // Наукові записки НаУКМА, Фізико-математичні науки. – 2015. – т.165. – С. 19-25.

5. *Дудкін М. Є.* Поліноми другого роду у двовимірній проблемі моментів / М. Є. Дудкін,В. І. Козак // Наукові Вісті НТУУ КПІ. –2015. – № 4. – С. 41–46.

6. *Дудкін М. Є.*, Блочні матриці типу Якобі відповідні двовимірній проблемі моментів: поліноми другого роду та функція Вейля /, М. Є. Дудкін, В. І. Козак // Український математичний журнал. – 2016. – т.68, № 4. – С. 495–505.

7. *Дудкін М. Є.* Умови єдиності міри відповідної двовимірній проблемі моментів / М. Є. Дудкін, В. І. Козак // Наукові Вісті НТУУ КПІ. – 2016. – № 4. – С. 32–37.

8. *Козак В. І.* Інтегрування диференціально-різницевих нелінійних рівнянь за допомогою спектральної теорії блочних матриць відповідних двовимірній проблемі моментів / В. І. Козак // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія: фізико-математичні науки. – 2016. – № 2. – С. 41-48.

9. *Дудкін М. Є.* Пряма спектральна задача з блочними матрицями типу Якобі, що відповідають сильній двовимірній проблемі моментів / М. Є. Дудкін,В. І. Козак // Наукові записки НаУКМА Фізико-математичні науки. – 2016. – т.178, С. 16–22.

10. *Козак В. І.* Обернена спектральна задача для блочних матриць типу Якобі відповідних дійсній двовимірній проблемі моментів/ В. І. Козак // Матеріали конференції “П’ятнадцята міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука”, (Київ, 15–17, травень, 2014). – Київ: Нац. техн. ун-т України “КПІ”. – 2014. – С. 117-118.

11. *Dudkin M .E.* Direct spectral problems for the block Jacobi type bounded symmetric matrices related to the two dimensional real moment problem/ M. E. Dudkin, V .I. Kozak// Матеріали конференції “П’ятнадцята міжнародна наукова конференція ім. академіка

М. Кравчука” (Київ, 15–17, травень, 2014). – Київ: Нац. техн. ун-т України “КПІ”. – 2014. – С. 13.

12. *Козак В. І.* Поліноми другого роду у двовимірній проблемі моментів / В. І. Козак // Тези доповідей. “Четверта всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики”, (Київ, 23–25, квітень, 2015). – Київ: Нац. техн. ун-т України “КПІ” . – 2015. – С. 19.

13. *Козак В. І.* Аналог функції Вейля відповідної двовимірній дійсній проблемі моментів / В. І. Козак // Тези доповідей. “Міжнародна конференція молодих математиків”, (Київ, 3–6, червень, 2015). – Київ: Ін-т математики НАН України. – 2015. – С. 76.

14. *Козак В. І.* Нескінченна двовимірна система зв’язних тягарців / В. І. Козак // Тези доповідей. Сьома міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації”, (Кам’янець-Подільський, 21–22, квітень, 2016). – Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський нац. ун-т ім. І. Огієнка . – 2016. – С. 103-104.

15. *Козак В. І.* Умова єдиності міри відповідної блочним матрицям типу Якобі у двовимірній проблемі моментів / В. І. Козак // Тези доповідей. Всеукраїнська науково-методична конференція “Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі” присвячена пам’яті професора С.С.Левіщенка (Київ, 7-8 жовтня 2016). – Київ: Нац. пед. ун-т ім. М.Драгоманова. – 2016. – С. 48.

ANNOTATION

Kozak V.I. "Jacobi matrices corresponding to two dimensional moment problem". – Manuscript.

Thesis of the dissertation for obtaining of the degree of candidate of sciences in physics and mathematics, speciality 01.01.01 – mathematical analysis. National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic institute", Kyiv, 2017.

Researches related to a classical Hamburger moment problem lead logically to infinite Jacobi matrices and corresponding orthogonal polynomials with respect to Borel measures on the real axis. In connection with the moment problem Jacobi matrices are considered in works N.I.Ahiyezer, H.Weyl, M.H. Crane, M. Riesz, R.Nevanlinna and many others. These matrices arise in many physical and mathematical tasks, such as mechanical one – where it is considered models connected with pendulums and in algebraic one – by the study of continued fractions; in mathematical analysis – Pade approximations.

Much of the Yu.M.Berezansky works activities devoted to research problem relating to the Jacobi matrices and their generalizations on the case of block matrices (Jacobi fields). The most fruitful approach for the study of the properties of the Jacobi matrices is the Yu.M.Berezansky theory generalized eigenvectors expansion of self-adjoint operators. The direct and inverse spectral problems is one of corollary of this theory.

Nowadays generalizations of classic Jacob's matrices are known in case of block matrices, named Jacobi typed. The last time there are known classical Jacobi matrix generalized to the case of block matrices, named Jacobi type. So, with the trigonometric moment problem there is connected the CMV matrix (M.J.Cantero, L.Moral, L.Velazquez) which is the five-diagonal matrix in usual form. Such matrices and related Jacobi- Laurent orthogonal polynomials are studied by L.B.Halinsky, B.Simon, E.R.Tsekanovsky.

The Block Jacobi type bounded matrices related to the two-dimensional real moment

problem appeared for the first time in M.I.Hehtman and A.A.Kalyuzhny works. Almost simultaneously, in numerical works of Yuan Xu are considered abstract matrices (without clarification of their inner structure) related multidimensional moment problem, as a generalization of J. Favard theorem.

Block Jacobi type bounded matrices related to the strong one-dimensional real problem and complex moment problem in polynomial and in exponential forms were researched in Yu.M.Berezansky and M.Ye.Dudkin works, where significantly the theory of generalized eigenvectors expansion were used.

Dissertation work is devoted to research of some questions, related to the real polynomial two-dimensional moment problem. Simultaneously, there is considered a case of the non strong moment problem and it is generalized on more lange case, namely of the strong moment problem. This case is the main in the work. The problem is solved, using generalized eigenvectors expansion for the pair of commuting bounded self-adjoint operators (and what is a typical for the strong moment problem: for two considered operators there is added the pair of converse operators, which in case of strong moment problem are necessarily exist). The written generalized Fourier transform and a Parseval equality leads directly to the moment representation. Necessary and sufficient conditions of solvability both of problems (strong and non-strong), are also given.

By establishing the uniqueness of solution of the moment problem quasi-analytical criterion of self-adjoint operator is used.

Using either already solved moment problem or an arbitrary (not degenerate) measure with a subset on a compact on the real plane, there were built block three-diagonal Jacobi matrices and system of the first-order orthogonal polynomials, depending on two variables, that is a generalization of the first-order polynomials is case of classic Hamburger moment problem.

For the construction there is selected an order of the orthogonalization of two indexed polynomials $x^n y^m$, $n, m \in \mathbb{Z}$ in the case of strong moment problem, and $n \in \mathbb{N}_0$ in the case of the non-strong problem.

As the result of the Schmidt orthogonalization of the specified sequence with respect to the scalar product in $L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y))$ with the Borel probability measure $d\rho(x,y)$ on the real plane with compact support there is formed two indexed sequence of polynomials $P_{n,k}(x,y)$, $n \in \mathbb{N}_0$, $k = 0,1,...,n$. The measure $d\rho(x,y)$ is a solution of either some moment problems or it is taken so that it has all the moments and not empty open subset in the support. Then, the multiplication operator on the independent variable x, y (and x^{-1}, y^{-1} in case of strong moment problem) is the shift operator of correspondence variable and in new basis $P_{n,k}(x,y)$ it have a form of three-diagonal block Jacobi type matrices. Thus, the inverse spectral problem for a polynomial two-dimensional strong (and non-strong) moment problem is solved.

With this connections the inner structure of such matrices is described, namely the null and positive elements are specified. Taking into account of the complicated structure of such matrices, there are presented examples of general character, which are the tool for the construction of various simple examples.

Using obtained block matrices corresponding to the strong and non strong moment problem, there is solved the following task. By given matrices there is constructed the system of corresponding difference equations. The coefficients of constructed blocks are matrices but not a numbers as in the classical case.

The solution of constructed systems are polynomials of first order, that coincide with obtained earlier by the orthogonalization procedure. These polynomials now used for the recovering of the measure on the real plane. After establishing the one-to-one correspondence between recovered polynomials and the measure, a Parceval equality being proved, using Fourie transform by generalized eigenfunction expansion for the pair of bounded self-adjoint operators generated by block matrices. The complexity of the problem in case of the strong moment problem is that in addition to two bounded self-adjoint operators there are taken into account their inverse. As a result of the study it is founded that the obtained system of linearly independent polynomial in space $L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y))$ creates total set there. In addition, the construction of block Jacobi type matrix by this recovered (in the sense of the Parseval equality) measure causes to three-diagonal Jacobi block matrices that have been defined, if we use the above mentioned orthogonalization procedure. In the prove of this fact there plays an important role again the generalized eigenfunction expansion for a couple commuting bounded self-adjoint operators, that have the inverses in the case of the strong moment problem. That is, the direct spectral problem is solved that an inverse one was indicated previously.

The previous basic research have such additionally observations: similar to the one-dimensional version of the classic case there is proposed the second order polynomials and the two-dimensional analogue of Weyl function. It is shown that the second order polynomials are the solutions of the system of block difference equations, considered in the direct spectral problem. Corresponding concepts and objects are introduced separately for two cases, that is for the strong and for the non-strong moment problem.

Using Jacobi block matrices, corresponding to the non-strong moment problem, there is composed the system of Lax equations and an analogue of the differential-difference Toda chains. Under certain conditions on the coefficients of block matrices, such chain is integrated.

Keywords: two-dimensional moment problem, three-diagonal block Jacobi type matrices, orthogonal polynomials on the real plane, direct and inverse spectral problem, Weyl function, polynomials of the first and the second kind.

List of publications of the researcher

1. *Kozak V. I.* Inverse spectral problems for block Jacobi type bounded matrices related to the two dimensional real moment problem / V. I. Kozak // Naukovi Visti NTUU “KPI”. – 2013. – № 4. – C. 73-76.

2. *Dudkin M. E.* Direct spectral problems for block Jacobi type bounded matrices related to the two dimensional real moment problem/ M. E. Dudkin, V. I. Kozak //Naukovi Visti NTUU “KPI”. – 2014. – № 4. – C. 41-47.

3. *Dudkin M .E.* Direct and inverse spectral problems for block Jacobi type bounded symmetric matrices related to the two dimensional real moment problem/ M. E. Dudkin, V .I. Kozak// Methods Funct. Anal. Topology. – 2014. – V.20, № 3. – C. 219–251.

4. *Kozak V. I.* The Building block Jacobi type bounded matrices related to the strong two dimensional real moment problem / V. I. Kozak // Naukovi zapysky NaUKMA Fizyko-matematychni nauky. – 2015. – V.165, C. 19-25.

5. *Dudkin M .E.* The Polynomials of the second order of two-dimensional moment problem / M. E. Dudkin, V. I. Kozak // Naukovi Visti NTUU “KPI”.– 2015. – № 4. – C. 41–46.

6. *Dudkin M .E.*, The block Jacobi type bounded matrices related to the two dimensional real moment problem: The Polynomials of the second order and the Weyl function / M. E. Dudkin, V. I. Kozak // Ukrayinsky matematychny zhurnal.– 2016. – V. 68, № 4. – C. 495–505.

7. *Dudkin M .E.* Terms uniqueness extent appropriate in the two-dimensional moment problem / M. E. Dudkin, V. I. Kozak // Naukovi Visti NTUU “KPI”. – 2016. – № 4. – C. 32–37.

8. *Kozak V. I.* The integration of nonlinear differential-difference equations spectral theory of block matrices respective two-dimensional moment problem / V. I. Kozak // Visnyk Kyyivskoho natsionalnoho universytetu imeni Tarasa Shevchenka Seriya: fizyko-matematychni nauky. – 2016. – № 2. – C. 41-48.

9. *Dudkin M .E.* Direct spectral problem with the block matrix type Jacobi corresponding to the strong two-dimensional moment problem / M. E. Dudkin, V. I. Kozak // Naukovi zapysky NaUKMA Fizyko-matematychni nauky. – 2016. – T.178, C. 16–22.

10. *Kozak V. I.* Inverse spectral problems for block Jacobi type bounded matrices related to the two dimensional real moment problem/ V. I. Kozak // Abstracts “15 International Scientific Conference of Academician M.Kravchuk” (Kyiv, 15-17, May, 2014): Kyiv: Nat. Sc. University of Ukraine “ KPI”, 2014. – C. 117-118.

11. *Dudkin M .E.* Direct spectral problems for the block Jacobi type bounded symmetric matrices related to the two dimensional real moment problem/ M. E. Dudkin, V. I. Kozak: Abstracts “15 International Scientific Conference of Academician M.Kravchuk” (Kyiv, 15-17, May, 2014): Kyiv: Nat. Sc. University of Ukraine “ KPI”, 2014. – C. 13.

12. *Kozak V. I.* The Polynomials of the second order of two-dimensional moment

problem / V. I. Kozak // Abstracts “Fourth National Conference of Young Scientists of Mathematics and Physics” (Kyiv, 23-25 April 2015): Kyiv: Nat. Sc. University of Ukraine “ KPI”, 2015. – C. 19.

13. *Kozak V. I.* Analog Weyl functions corresponding two-dimensional real moment problem / V. I. Kozak // Abstracts “nternational Conference of Young Mathematicians” (Kyiv, 3-6 June 2015): Kyiv: Institute of Mathematics NAS of Ukraine, 2015. – C. 76.

14. *Kozak V. I.* Infinite two-dimensional system connected weight / V. I. Kozak // Abstracts Seventh International Conference “ Modern Problems of mathematical modeling, forecasting and optimization” (Kamyanets-Podilsky, 21-22 April, 2016). – Kamyanets-Podilsky: Kamyanets-Podilsky Nat. Sc. University of I. Ogienko , 2016. – C. 103-104.

15. *Kozak V. I.* Conditions uniqueness extent corresponding block matrix type Jacobi in the two-dimensional moment problem / V. I. Kozak // Abstracts Ukrainian Scientific Conference “ Modern scientific and methodical problems in mathematics High School ” is dedicated to the memory of Professor S.S.Levischenko (Kyiv, 7-8 October 2016) – Kiev: Nat. ped. University of them. M.Dragomanov, 2016. – C. 48.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

ВСТУП

Історія виникнення блочних матриць Якобі є порівняно новою. Блочні матриці відповідні двовимірній степеневій проблемі моментів з'явилися на початку 90-х років минулого сторіччя в роботах [11] та багатовимірні випадки досліджувалися в численних роботах Yuan Xu. Зазначені публікації спричинили ряд досліджень блочних матриць, де блоки – нескінченновимірні оператори. Такі матриці називаються Якобієвими полями [5]. Повернення до блочних матриць типу Якобі було ініційовано появою п'ятидіагональних CMV-матриць (M. J. Cantero, L. Moral, L. Velazquez [43]) відповідних тригонометричній проблемі моментів. Переформатування п'ятидіагональної матриці в блочну дозволило повною мірою застосовувати метод розкладу за узагальненими власними векторами Ю. М. Березанського [3, 4, 5, 6, 7, 8, 41], чого не було раніше. Далі метод був узагальнений на випадок блочних матриць відповідних нормальним операторам та матриць відповідних сильній проблемі моментів. Ці узагальнення виникають тому, що звичайні тридіагональні матриці Якобі, якщо вони є унітарними або нормальними операторами, ведуть до тривіального випадку (тобто такий оператор є лінійною комбінацією самоспряженого оператора з одиничним).

Отже, розглянемо більш детально.

Блочні матриці типу Якобі відповідні двовимірній дійсній проблемі моментів вперше з'явились в роботах М. І. Гехтмана та А. А. Калюжного [11]. Майже одночасно в числених роботах Yuan Xu [73, 74] розглядаються абстрактні матриці (без з'ясування їх внутрішньої структури) відповідні багатовимірним проблемам моментів, як узагальнення теореми Favard J. Взагалі, багатовимірними проблемами моментів та відповідними їм матрицями типу Якобі і поліномами займалися А.Г. Костюченко [28], М.Г. Крейн [29], T.M. Bisgaard [42], A. Devinatz [46, 47], L.C. Petersen [63], B. Simon [69, 70], К.К. Симонов [32, 33, 71], G. Teschl [72].

Спектральна теорія блочних якобієвих нормальних матриць. Класична спектральна теорія самоспряжених якобієвих матриць [9] будується в просторі l_2 послідовностей $f = (f_n)_{n=0}^{\infty}$, $f_n \in \mathbb{C}$. Оператор задається тридіагональною (якобієвою) матрицею J з елементами $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ на головній діагоналі і $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ на двох суміжних: $b_n \in \mathbb{R}$, $a_n > 0$. Відповідний оператор (позначається $\mathbf{J}$) будується як замикання в l_2 відображення $l_2 \ni l_{\mathrm{fin}} \ni f \longmapsto Jf \in l_2$. Цей оператор буде ермітовим і при певній поведінці при $n \to \infty$ елементів a_n, b_n – самоспряженим (якщо a_n, b_n – рівномірно обмежені, то $\mathbf{J}$ – обмежений самоспряжений оператор). Розклад за узагальненими власними векторами $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ оператора $\mathbf{J}$ ($P_n(x) \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$) будується таким чином. Розглянемо різницеве рівняння на півосі $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$:

$$(Jf)_n = a_{n-1}f_{n-1} + b_n f_n + a_n f_{n+1} = \lambda f_n, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad f_{-1} := 0, \tag{1}$$

де $\lambda \in \mathbb{R}$ – спектральний параметр. Завдяки умові $a_n > 0$ завжди існує розв'язок $f_n = P_n(\lambda)$ рівняння (1) (поліном степені n від λ). Тоді послідовність $P(\lambda) = (P_n(\lambda))_{n=0}^{\infty}$ буде у відомому сенсі узагальненим власним вектором оператора $\mathbf{J}$, що відповідає власному значенню λ: $\mathbf{J}P(\lambda) = \lambda P(\lambda)$. Відповідне перетворення Фур'є має вигляд:

$$l_2 \supset l_{\mathrm{fin}} \ni f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \longmapsto \hat{f}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\lambda) f_n \in L^2(\mathbb{R}, d\rho(\lambda)) =: L^2. \tag{2}$$

Після замикання за неперервністю відображення (2) буде унітарним оператором, що переводить l_2 в простір L^2 сумовних із квадратом функцій відносно спектральної міри $d\rho(\lambda)$ оператора $\mathbf{J}$ (деякої борелівської ймовірнісної міри з нескінченною кількістю точок росту). При перетворенні Фурє (2) оператор $\mathbf{J}$ переходить в оператор множення на λ в L^2. Ця конструкція тісно повязана з теорією ортогональних поліномів від λ на дійсній вісі відносно спектральної міри. Саме з (2) випливає, що $(P_n(\lambda))_{n=0}^{\infty}$ утворюють ортонормований поліноміальний базис в L^2. Ввважаючи спектральну міру $d\rho(\lambda)$ заданою, цей базис можна побудувати безпосередньо: потрібно застосувати класичну процедуру ортогоналізації Шмідта в просторі L^2 до послідовності лінійно незалежних функцій

$$1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^n, \dots; \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

(вважається, що система (3) лінійно незалежна і повна в L^2). В результаті ортогоналізації отримується послідовність $P(\lambda) = (P_n(\lambda))_{n=0}^{\infty}$ – узагальнена власна функція оператора $\mathbf{J}$, спектральною мірою якої є задана міра $d\rho(\lambda)$. Для елементів a_n, b_n матриці J виписуються прості формули. В цьому полягає найпростіша обернена задача спектрального аналізу: яким чином за заданою спектральною мірою $d\rho(\lambda)$ відновити оператор $\mathbf{J}$, спектральною мірою якого буде задана міра $d\rho(\lambda)$.

2. Спектральна теорія блочних якобієвих нормальних матриць [37, 39] будується аналогічно до описаної вище класичної теорії. Тепер замість простору l_2 розглядається гільбертів простір

$$\mathbf{l}_2 = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \cdots, \quad \mathcal{H}_n = \mathbb{C}^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$
$$l_2 \ni f = (f_n)_{n=0}^{\infty}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\mathcal{H}_n}^2 < \infty.$$

Вектори x_n з простору $\mathcal{H}_n = \mathbb{C}^{n+1}$ зручно позначати $x_n = (x_{n;0}, \dots, x_{n;n})$. Для будь-якого $\alpha \in \{0, \dots, n\}$ число $x_{n,\alpha} \in \mathbb{C}$ є координатою при базисному векторі

$$\delta_{n;\alpha} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathcal{H}_2 \subset \mathbf{l}_2$$

(одиниця стоїть на α-му місці), $\delta_0 = (1)$. Узагальнення якобієвої матриці виглядає таким чином ($n \in \mathbb{N}_0$):

$$J = \begin{bmatrix} b_0 & c_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_0 & b_1 & c_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_1 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \qquad \begin{array}{lll} a_n & : & \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}, \\ b_n & : & \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_n, \\ c_n & : & \mathcal{H}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{H}_n, \quad n \in \mathbb{N}_0. \end{array} \tag{4}$$

Така матриця (4) на фінітних векторах $\mathbf{l}_{fin} \subset \mathbf{l}_2$ індукує оператор

$$\begin{gathered} \mathbf{l}_2 \supset \mathbf{l}_{\text{fin}} \ni f \longmapsto Jf = ((Jf)_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbf{l}_2, \\ (Jf)_n = a_{n-1} f_{n-1} + b_n f_n + c_n f_{n+1}. \end{gathered} \tag{5}$$

Тут покладено $f_{-1} = 0$. Припускається, що цей оператор допускає замикання, яке буде позначатися $\mathbf{J}$.

Як легко бачити, формально спряжена до J матриця J^+ має ту саму структуру (4), але з елементами c_n^+, b_n^+ і a_n^+ на нижній, середній і верхній діагоналях; матриця J^+ однозначно визначається по J відношенням: $(Jf, g)_{\mathbf{l}_2} = (f, J^+g)_{\mathbf{l}_2}$, $f, g \in \mathbf{l}_{fin}$ (для числових матриць $+$ означає звичайне спряження). Для простоти припускається, що норми всіх матриць a_n, b_n і c_n рівномірно обмежені; тоді оператор (5) обмежений. Його замикання позначається через $\mathbf{J}$. Таким самим буде аналогічно побудований $\mathbf{J}^+$ (по J^+). Матриця J є формально нормальною: $JJ^+ = J^+J$ (не важко написати відношення на коефіцієнти a_n, b_n і c_n, що забезпечують таку нормальність). У випадку рівномірно обмежених елементів матриці J оператор $\mathbf{J}$ буде нормальним: $\mathbf{J}^*\mathbf{J} = \mathbf{J}\mathbf{J}^*$. Роль додатності a_n в звичайній теорії якобієвих матриць будуть виконувати більш громіздкі умови, які забезпечуватимуть розв'язність рівнянь типу (1) для даного випадку. А саме, припускається справедливість умови: навколодіагональні матриці мають вигляд

$$a_n = \underbrace{\left.\begin{bmatrix} a_{n;0,0} & a_{n;0,1} & a_{n;0,2} & \dots & a_{n;0,n-1} & a_{n;0,n} \\ 0 & a_{n;1,1} & a_{n;1,2} & \dots & a_{n;1,n-1} & a_{n;1,n} \\ 0 & 0 & a_{n;2,2} & \dots & a_{n;2,n-1} & a_{n;2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n;n-1,n-1} & a_{n;n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n;n,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}}_{n+1} {\scriptstyle n+2}, \tag{6}$$

$$c_n = \underbrace{\left.\begin{bmatrix} c_{n;0,0} & c_{n;0,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_{n;1,0} & c_{n;1,1} & c_{n;1,2} & \dots & 0 & 0 \\ c_{n;2,0} & c_{n;2,1} & c_{n;2,2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n;n-1,0} & c_{n;n-1,1} & c_{n;n-1,2} & \dots & c_{n;n-1,n} & 0 \\ c_{n;n,0} & c_{n;n,1} & c_{n;n,2} & \dots & c_{n;n,n} & c_{n;n,n+1} \end{bmatrix}\right\}}_{n+2} {\scriptstyle n+1},$$

$a_{n;0,0}, a_{n;1,1}, a_{n;2,2}, \dots, a_{n;n-1,n-1}, a_{n;n,n} > 0$, $c_{n;0,1}, c_{n;1,2}, \dots, c_{n;n-1,n}, c_{n;n,n+1} > 0$.

Роль узагальненого власного вектора $P(\lambda) = (P_n(\lambda))_{n=0}^{\infty}$ зараз виконує послідовність $P(z) = (P_n(z))_{n=0}^{\infty}$, де $\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$, $P_n(z) \in \mathcal{H}_n$ – векторнозначний поліном від $z, \bar{z}$ порядку n. А саме,

$$P_n(z) = (\overline{P_{n;0}(z)}, \overline{P_{n;1}(z)}, \cdots, \overline{P_{n;n}(z)}), \tag{7}$$

де $P_{n;\alpha}(z)$, $\alpha = 0, \dots, n$ – деяка лінійна комбінація з комплексними коефіцієнтами функцій

$$\{1; \quad z^1\bar{z}^0, z^0\bar{z}^1; \quad \dots ; \quad z^n\bar{z}^0, z^{n-1}\bar{z}^1, \dots, z^{n-\alpha}\bar{z}^{\alpha}\}$$

(коефіцієнт при $z^{n-\alpha}\bar{z}^{\alpha}$ додатній). Поліноми (7) є, подібно до (1), розв'язками двох різницевих рівнянь: $\forall z \in \mathbb{C}$

$$JP(z) = zP(z), \quad J^+P(z) = \bar{z}P(z), \tag{8}$$

де J^+ – спряжена матриця.

Варто відмітити, що на відміну від (1), тут з'являються два рівняння, оскільки для нормального оператора z і $\bar{z}$ одночасно будуть власними значеннями відповідно для J і J^+. Умови (6) є, подібно $a_n > 0$, умовами розв'язності рівнянь (8). Як і в класичному випадку, для побудови $P_n(z)$ можна використовувати процедуру класичної ортогоналізації Шмідта в просторі $L^2 =: L^2(\mathbb{C}, d\rho(z))$ відносно заданої борелівської ймовірнісної міри $d\rho(z)$, ортогоналізуючи замість простої послідовності

(3) більш складну:

$$z^0\bar{z}^0; \quad z^1\bar{z}^0, z^0\bar{z}^1; \quad z^2\bar{z}^0, z^1\bar{z}^1, z^0\bar{z}^2; \dots ; \quad z^n\bar{z}^0, z^{n-1}\bar{z}^1, \dots, z^0\bar{z}^n; \dots, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{9}$$

Як і раніше, припускається що система (9) лінійно незалежна і повна в L^2 (наприклад, це буде тоді, коли носій міри $d\rho(z)$ є замиканням обмеженої відкритої множини з $\mathbb{C}$). Результат ортогоналізації зручно записати у вигляді такої схеми у відповідності з послідовністю (9):

$$\begin{array}{llll} P_{0;0}(x,y) \equiv 1; & P_{1;0}(x,y), & P_{2;0}(x,y), \dots & P_{n;0}(x,y), \dots \\ & P_{1;1}(x,y); & P_{2;1}(x,y), \dots & P_{n;1}(x,y), \dots \\ & & P_{2;2}(x,y); \dots & P_{n;2}(x,y), \dots \\ & & \dots & \dots \quad \dots \\ & & \dots & P_{n;n}(x,y); \dots \end{array} \tag{10}$$

Тоді, за означенням, кожен стовпчик в (10), взятий з комплексною рискою, утворює вектор $P_n(z)$ згідно (7). Роль добутку $f_n P_n(\lambda)$ в перетворенні Фур'є (2) буде виконувати скалярний добуток: $\forall f_n \in \mathcal{H}_n$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$

$$(f_n, P_n(z))_{\mathcal{H}_n} = f_{n;0}\overline{P_{n;0}(z)} + f_{n;1}\overline{P_{n;1}(z)} + \dots + f_{n;n}\overline{P_{n;n}(z)}, \tag{11}$$

де $f_{n;\alpha}$ – координати вектора f_n у відповідності з (3).

3. Спектральна теорема для нормального (обмеженого) оператора $\mathbf{J}$, породженого в просторі $\mathbf{l}_2$ матрицею (4), буде виглядати таким чином:

Теорема 1 *[38] Нехай J – нескінченна блочна нормальна якобієва матриця (4), норми всіх елементів якої рівномірно обмежені і виконується умова (6). Вона породжує в просторі $\mathbf{l}_2$ обмежений нормальний оператор як замикання за неперервністю відображення (3). Перетворення Фур'є за узагальненими власними функціями оператора $\mathbf{J}$ має вигляд:*

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_2 \supset \mathbf{l}_{\mathrm{fin}} \ni f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \longmapsto \hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n, P_n(z))_{\mathcal{H}_n} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha=0}^{n} f_{n;\alpha}\overline{P_{n;\alpha}(z)} \in L^2(\mathbb{C}, d\rho(z)) =: L^2, \end{aligned} \tag{12}$$

де $d\rho(z)$ *– спектральна міра оператора* $\mathbf{J}$, *яка є борелівською ймовірнісною мірою на* $\mathbb{C}$ *з компактним носієм. В (12)* $P(z) = (P_n(z))_{n=0}^{\infty}$ *є узагальненим власним вектором оператора* $\mathbf{J}$, *який відповідає* $z \in \mathbb{C}$. *Тут* $P_n(z) \in \mathcal{H}_n$ *– векторнозначні поліноми від* z *і* $\bar{z}$ *вказаного в (7) вигляду. Після замикання за неперервністю відображення (12) є унітарним оператором між просторами* $\mathbf{l}_2$ *і* L^2. *Образом оператора* $\mathbf{J}$ $(\mathbf{J}^* = J^+)$ *при цьому відображенні буде оператор множення на* z $(\bar{z})$ *в просторі* L^2. *Рівність Парсеваля має вигляд:* $\forall f, g \in \mathbf{l}_2$

$$(f,g)_{\mathbf{l}_2} = \int\limits_{\mathbb{C}} \hat{f}(z)\overline{\hat{g}(z)}\, d\rho(z), \quad (\mathbf{J}f,g)_{\mathbf{l}_2} = \int\limits_{\mathbb{C}} z\hat{f}(z)\overline{\hat{g}(z)}\, d\rho(z). \tag{13}$$

Поліноми $P_{n;\alpha}(z)$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha = 0,\dots,n$ *і* $P_{0;0}(z) \equiv 1$ *утворюють в просторі* L^2 *повну ортонормовану систему в такому сенсі:* $\forall f_j \in \mathcal{H}_j$, $\forall g_k \in \mathcal{H}_k$, $j,k \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{C}} (\overline{P_{j;0}(z)} f_{j,0} + \dots + \overline{P_{j;j}(z)} f_{j,j})(P_{k;0}(z)\overline{g_{k,0}} + \dots + P_{k;k}(z)\overline{g_{k,k}}) d\rho(z) \\ = \delta_{j,k}(f_j, g_k)_{\mathcal{H}_j}.\end{aligned} \tag{14}$$

Елементи матриці $J = (a_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$, $a_{j,k} = (a_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{j,k}$ *відновлюються за формулою:*

$$a_{j,k;\alpha,\beta} = (J\delta_{k,\beta}\delta_{j,\alpha})_{\mathbf{l}_2} = \int\limits_{\mathbb{C}} z\overline{P_{k;\beta}(z)} P_{j;\alpha}(z) d\rho(z). \tag{15}$$

Таким чином, пряма спектральна задача для оператора $\mathbf{J}$ полягає в знаходженні його спектральної міри $d\rho(z)$ і узагальнених власних векторів $P(z) = (P_n(z))_{n=0}^{\infty}$, $z \in \mathbb{C}$, які шукаються як розв'язки рівнянь (8) вказаного в (7) вигляду. Обернена спектральна задача полягає у знаходженні оператора $\mathbf{J}$, тобто матриці (4) з умовами (6) за заданою спектральною мірою $d\rho(z)$ в $\mathbb{C}$. Для обмеженого нормального оператора $\mathbf{J}$ вона полягає в наступному [39].

Теорема 2 *[38] Нехай* $d\rho(z)$ *– задана борелівська ймовірнісна міра на* $\mathbb{C}$ *з компактним носієм, для якої система функцій (9) лінійно незалежна і повна в просторі* $L^2(\mathbb{C}, d\rho(z))$ *(наприклад, нехай носій* $d\rho(z)$ *містить відкриту в* $\mathbb{C}$ *область* *або розташований на одномірному многовиді з $\mathbb{C}$ і не зводиться до скінченного числа точок). Тоді ця міра $d\rho(z)$ обов'язково є спектральною для деякого обмеженого нормального оператора $\mathbf{J}$, породженого блочною якобієвою нормальною матрицею J (4) з умовою (6).*

Її елементи відновлюються за формулою (15), де $P_{n,\alpha}(z)$, $\alpha = 0, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}_0$, будуються за системою (9) описаною вище класичною процедурою ортогоналізації за Шмідтом. Якщо початкова міра $d\rho(z)$ була спектральною для деякого оператора $\mathbf{J}$, породженого блочною якобієвою нормальною матрицею J з рівномірно обмеженими нормами елементів, то відновлена по $d\rho(z)$ матриця буде співпадати з J.

Комплексна проблема моментів в експоненційній формі для блочних тридіагональних матриць Якобі [50]. Наступне питання, яке стосується теми дисертаційної роботи: яким чином можна отримати узагальнення згаданої вище класичної теорії для ортонормованих поліномів на комплексній площині $\mathbb{C}$ (або на деякій підмножині $\mathbb{C}$) у зв'язку з комплексною проблемою моментів у експоненційній формі? Для цього необхідно перейти від самоспряженого оператора в l_2 до пари комутуючих самоспряженого і операторів, що діють в певному просторі так само, як в l_2.

Точніше кажучи, замість простору $l_2 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \cdots$ необхідно взяти простір

$$\mathbf{l}_2 = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \ldots, \quad \text{де} \quad \mathcal{H}_n = \mathbb{C}^{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{16}$$

а замість скалярної матриці необхідно розглянути наступні матриці Якобі блочного типу.

Перша матриця має елементи a_n, b_n і c_n, які є скінченновимірними операторами (матрицями) і діють між відповідними просторами $\mathcal{H}_n = \mathbb{C}^{2n+1}$, а саме:

$$J_A = \begin{bmatrix} b_0 & c_0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_0 & b_1 & c_1 & 0 & \cdots \\ 0 & a_1 & b_2 & c_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{rcrcl} a_n & : & \mathcal{H}_n & \longrightarrow & \mathcal{H}_{n+1}, \\ b_n & : & \mathcal{H}_n & \longrightarrow & \mathcal{H}_n, \\ c_n & : & \mathcal{H}_{n+1} & \longrightarrow & \mathcal{H}_n, \quad n \in \mathbb{N}_0. \end{array} \tag{17}$$

Така матриця на фінітних векторах $\mathbf{l}_{\text{fin}} \subset \mathbf{l}_2$ природним чином породжує оператор A в $\mathbf{l}_2$. Для зручності також вимагається, щоб норми всіх матриць a_n, b_n і c_n були рівномірно обмеженими а оператор A був обмеженим в $\mathbf{l}_2$.

Для самоспряженого оператора елементи a_n, b_n і c_n мають такий вигляд (з певними умовами):

$$a_n = \left[\left.\underbrace{\begin{array}{lllll} * & * & * & \ldots & * \\ a_{n;1,0} & * & * & \ldots & * \\ 0 & a_{n;2,1} & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n;2n+1,2n} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array}}_{2n+1}\right]\right\}{\scriptstyle 2n+3}, \tag{18}$$

$$c_n = \left[\left.\underbrace{\begin{array}{lllllll} * & c_{n;0,1} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ * & * & c_{n;1,2} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \ldots & * & c_{n;2n,2n+1} & 0 \end{array}}_{2n+3}\right]\right\}{\scriptstyle 2n+1}, \tag{19}$$

$$\begin{gathered} a_{n;1,0}, a_{n;2,1}, \ldots, a_{n;2n+1,2n} > 0, \quad c_{n;0,1}, c_{n;1,2}, \ldots, c_{n;2n,2n+1} > 0, \\ a_{n;i,j} = c_{n;j,i}, \quad n, i, j \in \mathbb{N}_0; \end{gathered} \tag{20}$$

а матриця b_n має певну структуру, таку, що J_A – ермітів оператор. Тут і надалі “$*$” означає можливо ненульовий елемент в матриці.

Друга матриця має елементи u_n, w_n і v_n, які також є скінченновимірними операторами (матрицями) і які діють між відповідними просторами $\mathcal{H}_n = \mathbb{C}^{2n+1}$, а саме:

$$J_U = \begin{bmatrix} w_0 & v_0 & 0 & 0 & \cdots \\ u_0 & w_1 & v_1 & 0 & \cdots \\ 0 & u_1 & w_2 & v_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{rcrcl} u_n & : & \mathcal{H}_n & \longrightarrow & \mathcal{H}_{n+1}, \\ w_n & : & \mathcal{H}_n & \longrightarrow & \mathcal{H}_n, \\ v_n & : & \mathcal{H}_{n+1} & \longrightarrow & \mathcal{H}_n, \quad n \in \mathbb{N}_0. \end{array} \tag{21}$$

Така матриця на фінітних векторах $\mathbf{l}_{\mathrm{fin}} \subset \mathbf{l}_2$ природним чином породжує унітарний оператор U в $\mathbf{l}_2$. Цілком очевидно, що норми всіх матриць u_n, w_n і v_n рівномірно обмежені а, отже, оператор U обмежений в $\mathbf{l}_2$.

Для унітарного оператора елементи u_n, w_n і v_n мають такий вигляд (з певними умовами):

$$u_n = \left[\begin{array}{cc} \underbrace{\begin{matrix} u_{n;0,0} & * & \dots & * & * \\ 0 & u_{n;1,1} & \dots & * & * \\ 0 & 0 & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & u_{n;n,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{matrix}}_{n+1} & \underbrace{\begin{matrix} * & \dots & * \\ * & \dots & * \\ * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{matrix}}_{n} \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix} a\\a\\a\\a\\a \end{matrix}}\right\} n+1 \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} a\\a\\a \end{matrix}}\right\} n+2 \end{array}, \tag{22}$$

$$v_n = \left[\begin{array}{cc} \underbrace{\begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & * \\ * & \dots & * \\ * & \dots & * \end{matrix}}_{n+2} & \underbrace{\begin{matrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ v_{n;n,n+2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & \dots & 0 & 0 \\ * & \dots & v_{n;2n-1,2n+1} & 0 \\ * & \dots & * & v_{n;2n,2n+2} \end{matrix}}_{n+1} \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix} a\\a\\a \end{matrix}}\right\} n \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} a\\a\\a\\a\\a \end{matrix}}\right\} n+1 \end{array}, \tag{23}$$

$$\begin{gathered} u_{n;0,0}, u_{n;1,1}, \dots, u_{n;n,n} > 0, \\ v_{n;n,n+2}, v_{n;n+1,n+3}, \dots, v_{n;2n,2n+2} > 0, \quad n \in \mathbb{N}_0; \end{gathered} \tag{24}$$

а матриця w_n має певну структуру так, що матриця J_U є унітарним оператором.

За деяких умов на a_n, b_n, c_n і u_n, w_n, v_n, $n \in \mathbb{N}_0$ матриця J_U є унітарною і комутує з J_A.

Нехай $z \in \mathbb{C}$ належить до спільної резольвентної множини операторів A та U, тобто $z \in S(A) \cap S(U)$ і $P(z) = (P_{t,j}(z))$, $t \in \mathbb{N}_0, j \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{C}$ – відповідні узагальнені власні вектори A і U. Тут $P_n(z) \in \mathcal{H}_n$, $(z = re^{i\theta})$ є векторнозначними поліномами за r і $e^{i\theta}$, тобто їх координати – деякі лінійні комбінації $r^t e^{i\theta j}$, $t \in \mathbb{N}_0, j \in \mathbb{Z}$. Згідно з теоремою про розклад за узагальненими власними векторами вони є розв'язком трьох рівнянь (але з матричними коефіцієнтами):

$$AP(z) = rP(z), \quad UP(z) = e^{i\theta}P(z), \quad (U^*P(z) = e^{-i\theta}P(z)). \tag{25}$$

Перетворення Фур'є $\widehat{\ }$ для операторів A і U має вигляд:

$$\mathbf{l}_2 \supset \mathbf{l}_{\mathrm{fin}} \ni f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \longmapsto \hat{f}(z) = \sum_{\substack{t \in \mathbb{N}_0 \\ j \in \mathbb{Z}}} (f_{t,j}, P_{t,j}(z))_{\mathcal{H}_n} \in L^2(\mathbb{C}, d\rho(z) = L^2, \tag{26}$$

де $d\rho(z) = d\rho(r, \theta)$ – спектральна міра A і U в комплексній площині $\mathbb{C}$. Оператор (26) є унітарним оператором (після замикання) і відображає весь $\mathbf{l}_2$ на весь L_2. Поліноми $P_{t,j}(\lambda)$ є ортонормованими відносно $d\rho(r, \theta)$ і утворюють базис в просторі L^2. Їх загальний вигляд такий:

$$\begin{aligned} P_n(z) = (P_{n;0}(z), P_{n;1}(z), \ldots, P_{n;2n}(z)) =& (\overline{Q_{n;0}(z)}, \overline{Q_{n;1}(z)}, \ldots, \overline{Q_{n;2n}(z)}) = \\ =& (Q_{n;2n}(z), Q_{n;2n-1}(z), \ldots, Q_{n;0}(z)). \end{aligned}$$

Таким чином, описані вище результати є прямою спектральною задачею для A і U вигляду (17) з (18), (19), (20) і (21) з (22), (23), (24).

Обернена спектральна задача формулюється в такий спосіб [50]. Нехай задана борелівська міра $d\rho(z) = d\rho(r, \theta)$, $z = re^{i\theta}$ з компактним носієм на $\mathbb{C}$. Припускається, що всі комплексні моменти

$$c_{t,j} = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} r^t e^{ij\theta} d\rho(r, \theta), \quad t \in \mathbb{N}_0, j \in \mathbb{Z}, \tag{27}$$

існують і відповідають мірі $d\rho(z)$ так, що усі функції $r^t e^{ij\theta}$, $t \in \mathbb{N}_0, j \in \mathbb{Z}$ належать L^2 і лінійно незалежні відносно $d\rho(z)$ в цьому просторі (містяться в деякій відкритій підмножині $\mathbb{C}$) і є повні в L^2. Необхідно побудувати блочні матриці типу Якобі (17) і (21) з властивостями (18), (19), (20) і (22), (23), (24) відповідно таким чином, щоб комутували самоспряжений оператор A і унітарний оператор U, а спектральна міра дорівнювала початковій мірі.

Як і в класичному випадку, необхідно застосовувати стандартну процедуру ортогоналізації Шмідта до послідовності функцій

$$r^t e^{ij\theta} \in L^2, \quad t \in \mathbb{N}_0, j \in \mathbb{Z}. \tag{28}$$

Але послідовність (28) є двоіндексною, тому необхідно вибрати зручний загальний порядок для (28).

$$\begin{gathered} 1; \quad e^{i\theta}, r^1, e^{-i\theta}; \quad e^{i2\theta}, r^1 e^{i\theta}, r^2, r^1 e^{-i\theta}, e^{-i2\theta}; \quad \dots\ ; \\ e^{in\theta}, r^1 e^{i(n-1)\theta}, \dots, r^{n-1} e^{i\theta}, r^n, r^{n-1} e^{-i\theta} \dots, r^1 e^{-i(n-1)\theta}, e^{-in\theta}; \quad \dots, \end{gathered} \tag{29}$$

Після такої ортогоналізації отримується послідовність поліномів

$$P_n(z) = (P_{n;0}(z), P_{n;1}(z), \dots, P_{n;2n}(z)), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

а матриці (17) з внутрішньою структурою (18), (19), (20) і матриці (21) з внутрішньою структурою (22), (23), (24) відновлюються за допомогою формул, аналогічних до (15).

Зауваження 1. Дуже цікаво розвивати спектральну теорію блочних матриць типу Якобі (17) і (21) у просторі $\mathbf{l}_2$ (16) у випадку необмеженого самоспряженого оператора A (що комутує з деяким унітарним оператором U).

Розглянемо випадок, коли A є унітарним оператором в $\mathbf{l}_2$. Його спектр знаходиться на одиничному колі $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ і, таким чином [4], простір $L^2(\mathbb{C}, d\rho(z))$ замінюється на $L^2 = L^2(\mathbb{T}, d\rho(z))$, де $d\rho(z)$ – спектральна міра A. В просторі $L^2 = L^2(\mathbb{T}, d\rho(z))$ розглядається система:

$$z^n, \quad \bar{z}^n = \frac{1}{z^n}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad z \in \mathbb{T}, \tag{30}$$

замість довільної $z^j \bar{z}^k, \quad j, k \in \mathbb{N}_0$.

Враховується, що $z^j \bar{z}^k = 1$, якщо $j, k = 0$. Цей порядок має вигляд:

$$z^0 = 1; \quad z^1, \bar{z}^1; \quad z^2, \bar{z}^2; \quad \dots \quad z^n, \bar{z}^n; \quad \dots, \quad z \in \mathbb{T}, \quad z = e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi). \tag{31}$$

Подальші кроки такі ж, як і для нормального оператора з тією різницею, що замість $\mathbf{l}_2$ розглядається модифікований простір $\mathbf{l}_2$:

$$\mathbf{l}_2 = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \cdots, \quad \mathcal{H}_0 = \mathbb{C}, \quad \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \cdots = \mathbb{C}^2. \tag{32}$$

Таким чином, для унітарного оператора будується відповідна блочна тридіагональна матриця $J = (a_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$, де $a_{j,k}$ діють на $\mathcal{H}_k \longrightarrow \mathcal{H}_j$. Кожен блок 2×2 – матриця, $j, k \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ і $a_{0,0}$ – скаляр, а $a_{0,1}$ і $a_{1,0}$ – (1×2) і (2×1) матриці відповідно.

Ці результати тісно пов'язані з тригонометричною проблемою моментів, тобто зображенням заданої послідовності комплексних чисел $(t_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ у вигляді

$$t_n = \int\limits_{\mathbb{T}} z^n d\rho(z), \quad n \in \mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}.$$

За допомогою певних результатів з [68] можна встановити зв'язок між послідовністю $(t_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ і елементами унітарної блочної матриці J аналогічно з класичною проблемою моментів.

Дисертаційна робота пов'язана з новою книгою [69, 70] і багатьма роботами про ортогональні поліноми на одиничному колі $\mathbb{T}$ з [69, 70]. Вперше була використана ортогоналізація системи (31) в [43]. Така ортогоналізація має декілька застосувань в [69]. Але роботи [43, 69] не використовували тридіагональну блочну структуру унітарного оператора A, який діє у просторі (32). Оператор A вважається в [69] звичайним в просторі l_2 і зображений п'ятидіагональною матрицею зі спеціальною структурою. Новим, в порівнянні з [43, 69], є пряма спектральна задача для блочної тридіагональної матриці-оператора, що діє в (32). Рівняння (1) для узагальнених власних векторів $\varphi = \varphi(z) = (\varphi_n(z))_{n=0}^{\infty}$, $\varphi(z) \in \mathcal{H}_n$ з відповідними власними значеннями $z \in \mathbb{C}$ такого оператора має тепер вигляд:

$$a_{n-1}\varphi_{n-1} + b_n\varphi_n + c_n\varphi_{n+1} = z\varphi, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{33}$$

де $a_n : \mathcal{H}_{n-1} \longrightarrow \mathcal{H}_n$, $b_n : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_n$, $c_n : \mathcal{H}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\varphi_{-1} = 0$.

Розв'язується це рівняння крок за кроком, враховуючи початкову умову $\varphi_0 \in \mathcal{H}_0 = \mathbb{C}$. Для такого способу розв'язання оператор c_n, $\forall n \in \mathbb{N}_0$ повинен мати обернений (в класичному випадку передбачається, що $c_n = a_n > 0$). Але $c_n : \mathcal{H}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{H}_n$, тобто, c_n діє з $n+2$-вимірного простору в $n+1$-вимірний і має обернений. Оператор c_0 з (33) діє з двовимірного простору $\mathcal{H}_1$ в одновимірний $\mathcal{H}_0$ і має обернений.

Теорія блочних матриць Якобі, які є ермітовими і самоспряженими операторами, що діють в просторах $l_2(\mathcal{H}) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \cdots$, де $\mathcal{H}$ - довільний гільбертів простір, досліджувалася спочатку в [29, 30, 57, 58] для $\dim\mathcal{H} < \infty$ і в [3, 4] потім в $\dim\mathcal{H} = \infty$. Сім'я комутуючих самоспряжених операторів, що діють в симетричному просторі Фока, розглядається в [35]. Простір Фока має вигляд:

$$\mathbf{l}_2 = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \cdots, \quad \dim\mathcal{H}_n = n+1,$$

де $\mathcal{H}_n$ для $n > 0$ – n-та частина нескінченновимірного гільбертового простору.

Мета і завдання дослідження. Основною метою роботи є: перенесення та розвиток відомих результатів стосовних проблеми моментів Гамбургера на випадок двовимірної сильної дійсної проблеми моментів, побудова відповідних матриць Якобі та дослідження задач пов'язаних із ними. Задачами є:

– розв'язати обернену спектральну задачу: побудувати матриці типу Якобі (відповідні двовимірній дійсній проблемі моментів) за заданою мірою на дійсній площині;

– записати ортогональні поліноми відповідні сильній двовимірній дійсній проблемі моментів;

– описати внутрішню структуру знайдених матриць;

– розв'язати пряму спектральну задачу: за заданими матрицями типу Якобі (відповідними сильній двовимірній дійсній проблемі моментів) скласти систему різницевих рівнянь і розв'язати її; – з'ясувати вигляд відповідних аналогів поліномів другого роду та функції типу Вейля для двовимірної проблеми моментів.

Об'єкти дослідження. Блочні матриці типу Якобі та відповідні їм симетричні формально комутуючі оператори, системи ортогональних поліномів, відповідна борелівська міра на дійсній площині.

Предмет дослідження. Матриці відповідні сильній двовимірній дійсній проблемі моментів та відповідні ортогональні поліноми.

Методи дослідження. Основні методи – методи функціонального аналізу, зокрема, теорії лінійних операторів та гільбертових просторів; метод розкладу за узагальненими власними векторами для скінченного набору комутуючих самоспряжених операторів.

Наукова новизна одержаних результатів

1) Розв'язана обернена спектральна задача для блочних матриць типу Якобі відповідних сильній двовимірній дійсній проблемі моментів: побудовані блочні матриці типу Якобі за заданою ймовірнісною мірою з носієм на компакті, у якої існують всі моменти.

2) Розв'язана пряма спектральна задача: за заданими блочними матрицями типу Якобі відповідними сильній (і не сильній) двовимірним проблемам моментів, складена і розв'язана система різницевих рівнянь і відновлена міра (в сенсі рівності Парсеваля), яка однозначно відповідає заданим блочним матрицям.

3) Дано опис внутрішньої структури блочних матриць типу Якобі відповідних сильній двовимірній дійсній проблемі моментів та досліджені комутативні властивості матриць відповідних не сильній двовимірній проблемі моментів.

4) Записані відповідні (сильній і не сильній) двовимірній дійсній проблемі моментів, поліноми першого і другого роду, функція типу Вейля, та доведені їх основні властивості.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертації носять теоретичний характер. Зокрема, результати, які стосуються блочних матриць Якобі, можна використовувати в задачах механіки стосовних зв'язних маятників. Дослідження з цих питань ведуться в Інституті математики НАН України, Київському національному університет ім. Тараса Шевченка, Харківському національному університеті ім. В.Н. Каразіна.

Особистий внесок здобувача. Викладені в дисертації основні результати отримані автором самостійно. На захист виносяться лише ті результати із виконаних у співавторстві робіт, які отримані автором особисто. У спільних роботах [12, 51, 13, 15, 16] М. Є. Дудкіну належить постановка задачі, а автору розв'язання, в спільній роботі [14] автору належать формулювання і доведення теорем 3 та 4. У спільній роботі [16] автору належить доведення теореми.

Апробація результатів дисертації.

Міжнародні наукові конференції ім. акад. М. Кравчука, Київ, Інститут математики НАН України, Київський Національний Університет ім. Тараса Шевченка, Нац. пед. ун-т ім. М.Драгоманова, Нац. тех. ун-т України "КПІ", XV, 15–17, травень, 2014;

Четверта всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, Нац. техн. ун-т України "КПІ", Нац. пед. ун-т ім. М. Драгоманова, Нац. ун-т "Києво-Могилянська академія", 23–25, квітень, 2015.

Міжнародна конференція молодих математиків, Київ, Ін-т математики НАН України, Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Фізико-технічний ін-т низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України, 3–6, червень, 2015.

Сьома міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації", Кам'янець-Подільський, Кам'янець-Подільський нац. ун-т ім. І. Огієнка, Нац. техн. ун-т України "КПІ", Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова НАН України, Київський Національний Університет ім. Тараса Шевченка, Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, OKAN UNIVERSITY (Istanbul, Turkish), Ташкентський університет інформаційних технологій (Узбекистан), Державний університет Люблінська політехніка (Польща), Університет Вітаутаса Великого (Каунас, Литва), Віденський університет (Австрія), 21–22, квітень, 2016.

Всеукраїнська науково-методична конференція "Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі" присвячена пам'яті професора С.С.Левіщенка, Нац. пед. ун-т ім. М. Драгоманова, Київ, 7-8 жовтня 2016.

Семінар кафедри диференціальних рівнянь фізико-математичного факультету НТУУ "КПІ" керівник професор М.Є. Дудкін.

Семінар відділу математичної фізики Інститут математики НАН України, керівники: професор О.Л. Ребенко, професор В.Д. Кошманенко, 2013.

Київський семінар з функціонального аналізу, Інститут математики НАН України, керівники: академік НАН України Ю.М. Березанський, академік НАН України Ю.С. Самойленко, член-кореспондент НАН України М.Л. Горбачук, 2016.

Публікації. Основні положення дисертації опубліковані у провідних фахових виданнях [12, 13, 14, 15, 16, 19, 22, 27, 51] та в тезах доповідей [20, 21, 23, 24, 25, 26].

РОЗДІЛ 1

Двовимірні проблеми моментів

В цьому розділі для повноти досліджень наведено детальний розв'язок степеневої двовимірної проблеми моментів та двовивірної сильної проблеми моментів. Розв'язки записані за допомогою рівності Парсеваля, використовуючи розклад за відповідними узагальненими власними векторами. Отже, далі слідуємо згідно роботи [51].

1.1. Попередні відомості до не сильної проблеми моментів

Введемо основні поняття і позначення, необхідні для формулювання результатів розділу. Нехай $\mathcal{H}$ – сепарабельний гільбертів простір і нехай A і B – комутуючі самоспряжені оператори, визначені на $\mathrm{Dom}(A)$ і $\mathrm{Dom}(B)$ в $\mathcal{H}$. Розглянемо оснащення $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H}_- \supset \mathcal{H} \supset \mathcal{H}_+ \supset \mathcal{D}, \tag{1.1}$$

де $\mathcal{H}_+$ – гільбертів простір топологічно і квазіядерно вкладений в $\mathcal{H}$ (топологічно означає щільно і неперервно; квазіядерно означає, що оператор вкладення є типу Гільберта-Шмідта); $\mathcal{H}_-$ є дуальним до $\mathcal{H}_+$ відносно простору $\mathcal{H}$; $\mathcal{D}$ – лінійний топологічний простір, топологічно вкладений в $\mathcal{H}_+$.

Оператори A і B називаються стандартно пов'язаними з оснащенням (1.1) [4], якщо $\mathcal{D} \subset \mathrm{Dom}(A)$, $\mathcal{D} \subset \mathrm{Dom}(B)$ і звуження $A \restriction \mathcal{D}$, $B \restriction \mathcal{D}$ діють з $\mathcal{D}$ в $\mathcal{H}_+$

неперервно.

Нагадаємо, що вектор $\Omega \in \mathcal{D}$ називається строго циклічним для операторів A і B, якщо для будь-яких $p, q \in \mathbb{N}$ виконується $\Omega \in \mathrm{Dom}(A^p) \cap \mathrm{Dom}(B^q)$, $A^p B^q \Omega \in \mathcal{D}$ і множина всіх цих векторів і Ω, $p, q = \mathbb{N}_0$, є тотальною в просторі $\mathcal{H}_+$ (і, отже, також в $\mathcal{H}$).

Якщо припустити, що строго циклічний вектор існує, то можна сформулювати спрощений варіант проекційної спектральної теореми. Повну версію і відповідні доведення можна знайти в (див. [8], Розділ 3, Теорема 2.7, або [4] Розділ 5, [10], Розділ 15, [64]).

Теорема 1.1.1 *Для комутуючих самоспряжених операторів A і B зі строго циклічним вектором в сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ існує невід'ємна скінченна борелівська міра $d\rho(x, y)$, задана таким чином, що для ρ-майже кожної точки $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ існує узагальнений спільний власний вектор $\xi_{x,y} \in \mathcal{H}_-$, тобто,*

$$(\xi_{x,y}, Af)_{\mathcal{H}} = x(\xi_{x,y}, f)_{\mathcal{H}}, \quad (\xi_{x,y}, Bf)_{\mathcal{H}} = y(\xi_{x,y}, f)_{\mathcal{H}}, \quad f \in \mathcal{D};\ \xi_{x,y} \neq 0. \tag{1.2}$$

Відповідне перетворення Фур'є F, що діє за правилом:

$$\mathcal{H} \supset \mathcal{H}_+ \ni f \mapsto (Ff)(x, y) = \hat{f}(x, y) = (f, \xi_{x,y})_{\mathcal{H}} \in L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x, y)) := L_2, \tag{1.3}$$

є унітарним оператором (після замикання), який діє з $\mathcal{H}$ в L_2. Образи операторів A і B в F є операторами множення на x і y відповідно в L_2.

Нагадаємо також, що для самоспряженого оператора T, визначеного на $\mathrm{Dom}(T)$ в $\mathcal{H}$, вектор $f \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathrm{Dom}(T^n)$ називається квазіаналітичним [61, 62], якщо клас $\mathrm{C}\{m_n\}$, в нашому випадку $m_n = \sqrt{\|T^n f\|_{\mathcal{H}}}$, є квазіаналітичним. Нагадаємо, що цей клас функцій на $[a, b] \subset \mathbb{R}$ визначається так:

$$\mathrm{C}\{m_n\} = \{f \in C^{\infty}([a, b])\ \exists K = K_f > 0,\ |f^{(n)}(t)| \leq K^n m_n,\ t \in [a, b],\ n \in \mathbb{N}_0,$$

або

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\|T^n f\|_{\mathcal{H}}}} = \infty. \tag{1.4}$$

Будемо використовувати умову квазіаналітичності, яка отримана за допомогою критерію самоспряжености і комутативності [4, 8, 10, 61, 62] (див. також [67]). Далі використаємо наступні дві теореми з [8], Розділ 5, §1, або [10], Розділ 13, §9, і з [60] (див. також [65]).

Теорема 1.1.2 *Замкнений ермітів оператор T в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ є самоспряженим тоді і тільки тоді, коли існує для нього повна в $\mathcal{H}$ множина квазіаналітичних векторів.*

Наступна теорема дає важливий критерій для двох операторів, які є істотно самоспряженими і комутуючими після замикання.

Теорема 1.1.3 *[60] Нехай A і B – два ермітових оператори визначені на $\mathrm{Dom}(A)$ і $\mathrm{Dom}(B)$ в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ і на щільній в $\mathcal{H}$ лінійній області $\mathcal{D}$ визначені оператори A, B, A^2, AB, BA, і B^2 та $ABf = BAf$ для всіх $f \in \mathcal{D}$.*

Якщо звуження $A^2 + B^2$ на $\mathcal{D}$ є суттєво самоспряженим оператором, то замикання A і B є самоспряженими операторами, які комутують в строгому резольвентному сенсі.

1.2. Розв'язання двовимірної степеневої проблеми моментів

Двовимірна дійсна степенева проблема моментів полягає в знаходженні умов для заданої двоіндексної послідовності $\{s_{m,n}\}$, $m, n \in \mathbb{N}_0$, дійсних чисел так, щоб існувала міра Бореля $d\rho(x, y)$ на дійсній площині $\mathbb{R}^2$, для якої виконується рівність (див. [1, 2, 28]):

$$s_{m,n} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} x^m y^n d\rho(x, y), \qquad m, n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.5}$$

Теорема 1.2.1 *Якщо для заданої двоіндексної послідовності дійсних чисел $\{s_{m,n}\}_{m,n\in\mathbb{N}_0}$ існує зображення (1.5), то послідовність є додатно визначеною, тобто*

$$\sum_{j,k,m,n\in\mathbb{N}_0}^{\infty} f_{j,k}\bar{f}_{m,n}s_{j+m,k+n} \geq 0, \tag{1.6}$$

для всіх скінченних наборів $\{f_{j,k}\}_{j,k=0}^{\infty}$, $f_{j,k} \in \mathbb{C}$.

Зображення (1.5) для заданої послідовності дійсних чисел $\{s_{m,n}\}_{m,n=0}^{\infty}$ *існує і єдине, якщо воно додатно визначене і*

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[p]{\sum\limits_{k=0}^{p} C_p^k \sqrt{s_{4p-4k,4k}}}} = \infty. \tag{1.7}$$

Нагадаємо, що умова (1.6) є необхідною для зображення (1.5). Умови, визначені в (1.6) і (1.7), разом гарантують не тільки існування але і єдиність зображення (1.5) для даної послідовності $\{s_{m,n}\}_{m,n=0}^{\infty}$.

Доведення. Необхідність умови(1.6) доводиться не складно. Якщо послідовність $\{s_{m,n}\}_{m,n=0}^{\infty}$ має зображення (1.5), то для довільної скінченної послідовності $f = (f_{m,n})_{m,n=0}^{\infty}$, $f_{m,n} \in \mathbb{C}$ виконується:

$$\sum_{j,k,m,n=0}^{\infty} f_{j,k}\bar{f}_{m,n}s_{j+m,k+n} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \left| \sum_{m,n=0}^{\infty} f_{m,n}x^m y^n \right|^2 d\rho(x,y) \geq 0. \tag{1.8}$$

Позначимо через l лінійний простір $\mathbb{C}^{\infty}$ послідовностей $f = (f_{m,n})_{m,n=0}^{\infty}$, $f_{m,n} \in \mathbb{C}$, а через l_{fin} – його лінійну множину, що складається зі скінченних послідовностей $f = (f_{m,n})_{m,n=0}^{\infty}$, тобто послідовностей, де $f_{m,n} \neq 0$ тільки для скінченної кількості індексів n і m. Нехай $\delta_{m,n}$, $m, n \in \mathbb{N}_0$ – це δ-послідовність, визначена таким чином, що кожен $f \in l_{\text{fin}}$ зображається так: $f = \sum_{n,m=0}^{\infty} f_{m,n}\delta_{m,n}$.

Розглянемо лінійні оператори l_{fin}:

$$(J_A f)_{j,k} = f_{j-1,k}, \quad (J_B f)_{j,k} = f_{j,k-1}, \; j,k \in \mathbb{N}_0, \tag{1.9}$$

де завжди $f_{j,-1} = f_{-1,k} \equiv 0$. Оператори J_A і J_B є операторами типу "народження". Для δ-послідовностей маємо

$$J_A \delta_{j,k} = \delta_{j+1,k}, \quad J_B \delta_{j,k} = \delta_{j,k+1}. \tag{1.10}$$

Оператори J_A і J_B симетричні на фінітних векторах відносно (квазі)скалярного добутку

$$(f,g)_S = \sum_{j,k,m,n=0}^{\infty} f_{j,k}\bar{g}_{m,n}s_{j+m,k+n}, \; f,g \in l_{\text{fin}}. \tag{1.11}$$

Дійсно,

$$
\begin{aligned}
(J_A f, g)_S &= \sum_{j,k,m,n=0}^{\infty} (J_A f)_{j,k} \bar{g}_{m,n} s_{j+m,k+n} = \sum_{j,k,m,n=0}^{\infty} f_{j-1,k} \bar{g}_{m,n} s_{j+m,k+n} \\
&= \sum_{j,k,m,n=0}^{\infty} f_{j,k} \bar{g}_{m,n} s_{j+m+1,k+n} = \sum_{j,k,m,n=0}^{\infty} f_{j,k} \bar{g}_{m-1,n} s_{j+m,k+n} \\
&= \sum_{j,k,m,n=0}^{\infty} f_{j,k} \overline{(J_A g)}_{m,n} s_{j+m,k+n} = (f, J_A g)_S;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(J_B f, g)_S &= \sum_{j,k,m,n=0}^{\infty} (J_B f)_{j,k} \bar{g}_{m,n} s_{j+m,k+n} = \sum_{j,k,m,n=0}^{\infty} f_{j,k-1} \bar{g}_{m,n} s_{j+m,k+n} \\
&= \sum_{j,k,m,n=0}^{\infty} f_{j,k} \bar{g}_{m,n} s_{j+n+1,k+m} = \sum_{j,k,m,n=0}^{\infty} f_{j,k} \bar{g}_{m-1,n} s_{j+n,k+m} \\
&= \sum_{j,k,m,n=0}^{\infty} f_{j,k} \overline{(J_B g)}_{m,n} s_{j+m,k+n} = (f, J_B g)_S.
\end{aligned}
$$

Оператор J_A комутує з оператором J_B на l_{fin}:

$$(J_B J_A f)_{j,k} = f_{j-1,k-1} = (J_A J_B f)_{j,k}.$$

Нехай S – гільбертів простір, отриманий як фактор-простір

$$\dot{l}_{\text{fin}} = l_{\text{fin}} / \{h \in l_{\text{fin}} \mid (h,h)_S = 0\}.$$

Елемент f з S відповідає елементу $\dot{f}$ з простору еквівалентних елементів $\dot{l}_{\text{fin}}$. Отже, оператори $\dot{J}_A$ і $\dot{J}_B$ коректно визначені в S. Цей факт описаний детально в [4], Розділ 8, §1, п. 4 і [8], Розділ 5, §5, п. 2. Аналогічно до цього випадку отримуємо:

$$\dot{J}_A \dot{f} = (J_A f)^{\cdot},\ f \in \operatorname{Dom}(\dot{J}_A) = \dot{l}_{\text{fin}};\quad \dot{J}_B \dot{f} = (J_B f)^{\cdot},\ f \in \operatorname{Dom}(\dot{J}_B) = \dot{l}_{\text{fin}}. \tag{1.12}$$

Позначимо для наступних міркувань A і B замикання $\sim$ $\dot{J}_A$ і $\dot{J}_B$ в S.

Для простоти будемо вважати, що послідовність $\{s_{m,n}\}$ є невиродженою, тобто якщо $(f,f)_S = 0$ для $f \in l_{\text{fin}}$, тоді $f = 0$, і тепер $\dot{f} = f$ і $\tilde{\dot{J}}_A = A$ і $\tilde{\dot{J}}_A = B$. Дослідження в загальному випадку є більш складним, див., наприклад, в [4], Розділ 8, §1, Підрозділ 4 і [8], Розділ 5, §5, Підрозділ 1-3.

Припустимо також, що оператори A і B самоспряжені. Пізніше буде доведено, що A і B самоспряжені і комутуючі у строгому резольвентному сенсі за умови (1.7). В цілому, умова для ермітових операторів, які мають комутуючі розширення, описана в [18].

Побудуємо оснащення простору S:

$$(l_2(p))_{-,S} \supset S \supset l_2(p) \supset l_{\text{fin}}, \tag{1.13}$$

де $l_2(p)$ є зваженим l_2-простором з вагою $p = (p_{m,n})_{m,n=0}^{\infty}$, $p_n \geq 1$. Норма в $l_2(p)$ визначається формулою: $\|f\|^2_{l_2(p)} = \sum_{m,n=0}^{\infty} |f_{m,n}|^2 p_{m,n}$, де $(l_2(p))_{-,S} = \mathcal{H}_-$ є від'ємним простором відносно додатного простору $l_2(p) = \mathcal{H}_+$ і нульового простору $S = \mathcal{H}$.

Лема 1.2.2 *Для простору S існує достатньо швидко зростаюча послідовність $p_{m,n}$, така, що вкладення $l_2(p) \hookrightarrow S$ є квазіядерним.*

Доведення. Зауважимо, що нерівність (1.6) також означає, що мульти-матриця $(K_{j,k;m,n})_{j,k,m,n=0}^{\infty}$ з коефіцієнтами $K_{j,k;m,n} = s_{j+m,k+n}$ є невід'ємно визначеною і, отже,

$$|s_{j+n,k+m}|^2 = |K_{j,k;m,n}|^2 \leq K_{j,k;j,k} K_{m,n;m,n} = s_{j+k,j+k} s_{n+m,n+m}, \ \ j,k,m,n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.14}$$

Нехай вага $q = (q_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$, $q_{j,k} \geq 1$, така, що $\sum_{j,k=0}^{\infty} s_{j+k,j+k} q_{j,k}^{-1} < \infty$. Далі, з (1.14) отримуємо, що

$$\|f\|_S^2 = \sum_{j,k,m,n=0}^{\infty} f_{j,k} \bar{f}_{m,n} s_{j+m,k+n} \leq \left(\sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{s_{j+k,j+k}}{q_{j,k}} \right) \|f\|^2_{l_2(q)}, \ \ f \in l_{\text{fin}}.$$

Таким чином вкладення $l_2(q) \hookrightarrow S$ є топологічним. І, якщо $\sum_{j,k=0}^{\infty} q_{j,k} p_{j,k}^{-1} < \infty$, тоді $l_2(p) \hookrightarrow l_2(q)$ – квазіядерне. Композиція $l_2(p) \hookrightarrow S$ квазіядерного і топологічного вкладень є також квазіядерним.

На наступному кроці використаємо оснащення (1.13) для побудови узагальнених власних векторів. Внутрішня структура простору $(l_2(p))_{-,S}$ складна, тому що складна структура S. Це є причиною ввести нове оснащення

$$l = (l_{\text{fin}})' \supset (l_2(p^{-1})) \supset l_2 \supset l_2(p) \supset l_{\text{fin}}, \tag{1.15}$$

де $l_2(p^{-1})$, $p^{-1} = (p^{-1}_{m,n})^{\infty}_{m,n=0}$ є від'ємним простором відносно додатного простору $l_2(p)$ і нульового простору l_2. Ланцюги (1.13) і (1.15) мають один і той самий додатній простір $l_2(p)$. Наступна загальна лема [36] встановлює, що простір $(l_2(p))_{-,S}$ є ізометричним до простору $l_2(p^{-1})$.

Лема 1.2.3 *Розглянемо два оснащення*

$$\mathcal{K}_- \supset \mathcal{K} \supset \mathcal{K}_+, \quad \mathcal{F}_- \supset \mathcal{F} \supset \mathcal{F}_+ = \mathcal{K}_+, \tag{1.16}$$

з однаковими позитивними просторами. Тоді існує унітарний оператор $U : \mathcal{K}_- \to \mathcal{F}_-$, $U\mathcal{K}_- = \mathcal{F}_-$ такий, що

$$(U\xi, f)_{\mathcal{F}} = (\xi, f)_{\mathcal{K}}, \quad \xi \in \mathcal{K}_-, \ f \in \mathcal{K}_+ = \mathcal{F}_+. \tag{1.17}$$

Цей оператор може бути отриманий наступним чином: $U = \mathbb{I}_{\mathcal{F}}^{-1}\mathbb{I}_{\mathcal{K}}$, де $\mathbb{I}_{\mathcal{F}}$ і $\mathbb{I}_{\mathcal{K}}$ – стандартні канонічні ізоморфізми Ю. М. Березанського у відповідних ланцюгах $(\mathbb{I}_{\mathcal{F}}\mathcal{F}_- = \mathcal{F}_+, \ \mathbb{I}_{\mathcal{K}}\mathcal{K}_- = \mathcal{K}_+)$.

Роль оснащень (1.16) будуть виконувати в подальшому (1.13) і (1.15).

Очевидно, що оператори A і B стандартно пов'язані із ланцюгом (1.15), а вектор $\Omega = \delta_{0,0} \in l_{\mathrm{fin}}$ є строго циклічним для операторів A і B, тому можемо застосувати теорему 1.1.1. Нехай $\xi_{x,y} \in (l_2(p))_{-,S}$ є узагальненим власним вектором операторів A і B. Отже, в цьому випадку, за теоремою 1.1.1 маємо:

$$(\xi_{x,y}, Af)_S = x(\xi_{x,y}, f)_S, \ \ (\xi_{x,y}, Bf)_S = y(\xi_{x,y}, f)_S, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ f \in l_{\mathrm{fin}}. \tag{1.18}$$

Позначимо:

$$P(x,y) = U\xi_{x,y} \in l_2(p^{-1}) \subset l, \quad P(x,y) = (P_{m,n}(x,y))^{\infty}_{m,n=0}, \ P_{m,n}(x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Використовуючи (1.17), можемо переписати (1.18) у вигляді:

$$(P(x,y), Af)_{l_2} = x(P(x,y), f)_{l_2}, \quad (P(x,y), Bf)_{l_2} = y(P(x,y), f)_{l_2},$$
$$(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ f \in l_{\mathrm{fin}}. \tag{1.19}$$

Відповідне перетворення Фур'є має вигляд:

$$S \supset l_{\text{fin}} \ni f \to (Ff)(x,y) = \hat{f}(x,y) = (f, P(x,y))_{l_2} \in L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y)). \tag{1.20}$$

Підрахуємо $P(x,y)$. Оператор A визначається за правилом (1.9) і тому (1.19) дає:

$$\begin{aligned}\sum_{m,n=0}^{\infty} xP_{m,n}(x,y)\bar{f}_{m,n} &= x(P(x,y),f)_{l_2} \\ &= (P(x,y),Af)_{l_2} = \sum_{m,n=0}^{\infty} P_{m+1,n}(x,y)\bar{f}_{m,n},\ \forall f \in l_{\text{fin}}.\end{aligned} \tag{1.21}$$

Аналогічно, використовуючи (1.9) і (1.19), маємо:

$$\begin{aligned}\sum_{m,n=0}^{\infty} yP_{m,n}(x,y)\bar{f}_{m,n} &= y(P(x,y),f)_{l_2} \\ &= (P(x,y),Bf)_{l_2} = \sum_{m,n=0}^{\infty} P_{m,n+1}(x,y)\bar{f}_{m,n},\ \forall f \in l_{\text{fin}}.\end{aligned} \tag{1.22}$$

Отже, остаточно маємо:

$$xP_{m,n}(x,y) = P_{m+1,n}(x,y), \quad yP_{m,n}(x,y) = P_{m,n+1}(x,y), \quad m,n \in \mathbb{N}_0.$$

Без втрати загальності, покладемо $P_{0,0}(x,y) = 1,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Тоді останні дві рівності дають

$$P_{m,n}(x,y) = x^m y^n, \quad m,n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.23}$$

Таким чином, перетворення Фур'є (1.20) має вигляд

$$S \supset l_{\text{fin}} \ni f \to (Ff)(x,y) = \hat{f}(x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} f_{m,n}x^m y^n \in L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y)), \tag{1.24}$$

і

$$(f,g)_S = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(x,y)\overline{\hat{g}(x,y)}d\rho(x,y),\ f,g \in l_{\text{fin}}. \tag{1.25}$$

Щоб побудувати перетворення Фур'є (1.20) і використати формули (1.21)-(1.25) необхідно ще перевірити, що для наших операторів A і B вектор $\Omega = \delta_{0,0} \in l_{\text{fin}}$ є строго циклічним у розумінні оснащення (1.13). Але це, очевидно, вірно, тому що завдяки (1.10) маємо: $A^pB^q\Omega = J_A^pJ_B^q\delta_{0,0} = \delta_{p,q}$.

Рівність Парсеваля (1.25) відразу ж приводить до зображення (1.5) згідно з (1.23), (1.24): $\hat{\delta}_{m,n} = x^my^n$ і $\hat{\delta}_{0,0} = 1$; з (1.11) отримаємо:

$$s_{m,n} = (\delta_{m,n}, \delta_{0,0})_S = (\hat{\delta}_{m,n}, \hat{\delta}_{0,0})_{L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y))} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} x^my^n d\rho(x,y), \; m,n \in \mathbb{N}_0. \qquad (1.26)$$

Однозначність зображення (1.5) випливає з самоспряженості і комутативності операторів A і B ([4], Розділ 8). Отже, для завершення доведення теореми 1.1.1 треба тільки перевірити, що умова (1.7) забезпечує самоспряженість та комутативність A і B. На наступному кроці використаємо теорему 1.1.3. Але для цього (див. теореми 1.1.2 і 1.1.3) потрібно тільки перевірити, чи має оператор $A^2 + B^2$ щільну в $\mathcal{D}$ множину квазіаналітичних векторів.

Завдяки (1.9) оператор $\mathcal{A} = A^2 + B^2$ діє на $\delta_{m,n} \in \mathcal{D}$ таким чином:

$$\mathcal{A}\delta_{m,n} = (A^2 + B^2)\delta_{m,n} = \delta_{m+2,n} + \delta_{m,n+2}. \qquad (1.27)$$

Очевидно $\mathcal{A} \geq 0$. Для $p \geq 1$ маємо: $\mathcal{A}^p\delta_{m,n} = \sum\limits_{k=0}^{p} C_p^k \delta_{m+2p-k,n+2k}$. Згідно з (1.11) норма $\|f\|_S = \sqrt{(f,f)_S}$ в S. Отже, $\forall \delta_{m,n} \in \mathcal{D}$ отримуємо:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}^p\delta_{m,n}\|_S = \|\sum_{k=0}^{p} C_p^k \delta_{m+2p-k,n+2k}\|_S &\leq \sum C_p^k \|\delta_{m+2p-k,n+2k}\| \\ &= \sum C_p^k \sqrt{s_{2m+4p-2k,2m+4p-2k}}. \end{aligned} \qquad (1.28)$$

Оскільки

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[p]{\|\mathcal{A}^p\delta_{m,n}\|}} \geq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[p]{\sum\limits_{k=0}^{p} C_p^k \sqrt{s_{2m+4p-4k,2n+4k}}}} = \infty, \; m,n \in \mathbb{N}_0,$$

то доведено, що квазіаналітичність класу $\mathrm{C}\{\|\mathcal{A}^p\delta_{m,n}\|\}$, випливає з квазіаналітичності класу $\mathrm{C}\{\sqrt{\sum\limits_{k=0}^{p} C_p^k \sqrt{s_{2m+4p-4k,2n+4k}}}\}$ завдяки властивостям квазіаналітичності з [44, 59]. А це еквівалентно квазіаналітічності класу $\mathrm{C}\{\sqrt{\sum\limits_{k=0}^{p} C_p^k \sqrt{s_{4p-4k,4k}}}\}$. Але ця квазіаналітичність дає умову (1.7), беручи до уваги (1.28). Це завершує доведення теореми 1.2.1. □

Зауваження 1.1. Для зображення (1.5) недостатньо мати умову (1.6). Умова (1.6) є необхідною тільки в теоремі 1.2.1. Для ясності пропонуємо простий контрприклад. Нехай A і B – два самоспряжені оператори комутуючі на лінійній множині $\mathcal{D}$ щільній в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, де $\mathcal{D}$ інварінтна відносно дії A і B. Припустимо, що A і B є суттєво самоспряженими в $\mathcal{D}$, тобто $A = (A \upharpoonright \mathcal{D})^{\sim}$, $B = (B \upharpoonright \mathcal{D})^{\sim}$, але A і B не комутують в строгому резольвентному сенсі. Існування таких операторів гарантує приклад Нельсона [60] (див. також [10], Розділ 13, §9).

Зауваження 1.2. Формула-умова (1.7) є новою, але відомі інші умови типу (1.7), які гарантують єдиність міри в теоремі 1.2.1, наприклад [8], дивіться також [17, 18, 47, 52, 55, 56].

Зауваження 1.3. Для отримання зображення (1.5) використано метод розкладу за узагальненими власними векторами Ю. М. Березанського. Можна сказати, що відновлена міра $d\rho(x, y)$. Але тут не пишеться деяка функція розподілу. Насправді, нам потрібна міра для обчислення відповідних інтегралів. І вираз (1.26) дає нам таку можливість. Якщо потрібно обчислити інтеграл, як в (1.25) для деяких $\hat{f}(x, y)$ і $\hat{g}(x, y)$, то необхідно розкласти $\hat{f}(x, y)$ і $\hat{g}(x, y)$ в ряд за поліномами $x^n y^m$ і за заданими $s_{m,n}$ і (1.26) написати в (1.25) відповідний ряд. Правильність останнього висновку гаранується методом Ю. М. Березанського (див. [3, 4, 10, 35, 36] та інші публікації).

1.3. Попередні відомості до сильної проблеми моментів

Нехай $\mathcal{H}$ – сепарабельний гільбертів простір, і нехай A та B – комутуючі самоспряжені оператори, визначені на $\mathrm{Dom}(A)$ і $\mathrm{Dom}(B)$ в $\mathcal{H}$ і A^{-1} та B^{-1} – їх відповідні обернені. Розглянемо оснащення $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H}_{-} \supset \mathcal{H} \supset \mathcal{H}_{+} \supset \mathcal{D}, \tag{1.29}$$

де $\mathcal{H}_+$ – гільбертів простір топологічно і квазіядерно вкладений в $\mathcal{H}$; $\mathcal{H}_-$ є дуальним до $\mathcal{H}_+$ відносно простору $\mathcal{H}$; $\mathcal{D}$ – лінійний топологічний простір, топологічно вкладений в $\mathcal{H}_+$.

Оператори A і B та A^{-1} і B^{-1} називаються стандартно пов'язаними з (1.29), якщо $\mathcal{D} \subset \mathrm{Dom}(A)$, $\mathcal{D} \subset \mathrm{Dom}(B)$, $\mathcal{D} \subset \mathrm{Dom}(A^{-1})$, $\mathcal{D} \subset \mathrm{Dom}(B^{-1})$ і звуження $A \upharpoonright \mathcal{D}$, $B \upharpoonright \mathcal{D}$, $A^{-1} \upharpoonright \mathcal{D}$, $B^{-1} \upharpoonright \mathcal{D}$ діють з $\mathcal{D}$ в $\mathcal{H}_+$ неперервно.

Якщо припустити, що строго циклічний вектор існує, то також можна сформулювати спрощений варіант проекційної спектральної теореми. Повну версію і відповідні доведення можна знайти в (див. [8], Розділ 3, Теорема 2.7, або [4] Розділ 5, [10], Розділ 15, [64]).

Теорема 1.3.1 *Для комутуючих самоспряжених операторів A і B та їх обернених A^{-1} і B^{-1} зі строго циклічним вектором в сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ існує скінченна борелівська міра $d\rho(x, y)$, задана таким чином, що для ρ-майже кожної точки $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ існує узагальнений спільний власний вектор $0 \neq \xi_{x,y} \in \mathcal{H}_-$, тобто, $\forall f \in \mathcal{D}$,*

$$\begin{aligned} (\xi_{x,y}, Af)_{\mathcal{H}} &= x(\xi_{x,y}, f)_{\mathcal{H}}, & (\xi_{x,y}, Bf)_{\mathcal{H}} &= y(\xi_{x,y}, f)_{\mathcal{H}}, \\ (\xi_{x,y}, A^{-1}f)_{\mathcal{H}} &= x^{-1}(\xi_{x,y}, f)_{\mathcal{H}}, & (\xi_{x,y}, B^{-1}f)_{\mathcal{H}} &= y^{-1}(\xi_{x,y}, f)_{\mathcal{H}}, \end{aligned} \tag{1.30}$$

Відповідне перетворення Фур'є F, що діє за правилом:

$$\mathcal{H} \supset \mathcal{H}_+ \ni f \mapsto (Ff)(x, y) = \hat{f}(x, y) = (f, \xi_{x,y})_{\mathcal{H}} \in L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x, y)) := L_2 \tag{1.31}$$

є унітарним оператором (після замикання), який діє з $\mathcal{H}$ в L_2. Образи операторів A і B та A^{-1} і B^{-1} в F є операторами множення на x і y та x^{-1} і y^{-1} відповідно в L_2.

1.4. Розв'язання двовимірної сильної степеневої проблеми моментів

Двовимірна дійсна степенева проблема моментів полягає в знаходженні умов для заданої двоіндексної послідовності $\{s_{m,n}\}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, дійсних чисел так, щоб існувала міра Бореля $d\rho(x,y)$ на дійсній площині $\mathbb{R}^2$, для якої виконується рівність (див. [1, 2, 28]):

$$s_{m,n} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} x^m y^n d\rho(x,y), \qquad m,n \in \mathbb{Z}. \tag{1.32}$$

Теорема 1.4.1 *Якщо для заданої двоіндексної послідовності дійсних чисел $\{s_{m,n}\}$ $m,n \in \mathbb{Z}$ ($m,n \in \mathbb{N}_0$), існує зображення (1.32), то послідовність є додатно визначеною, тобто*

$$\sum_{j,k,m,n\in\mathbb{Z}} f_{j,k}\bar{f}_{m,n}s_{j+m,k+n} \geq 0 \quad \left(\sum_{j,k,m,n=0}^{\infty} f_{j,k}\bar{f}_{m,n}s_{j+m,k+n} \geq 0\right) \tag{1.33}$$

для всіх скінченних наборів $(f_{j,k})_{j,k\in\mathbb{Z}}$ ($(f_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$), $f_{j,k} \in \mathbb{C}$.

Зображення (1.32) існує і є единим для заданої двоіндексної послідовності дійсних чисел $\{s_{m,n}\}$, $m,n \in \mathbb{Z}$ ($m,n \in \mathbb{N}_0$), якщо крім позитивної визначеності (1.33) розбігаеться один із рядів

$$\sum_{p=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{p} C_p^k \sqrt{s_{\epsilon(4p-4k),\iota(4k)}}\right)^{-1/p} \left(\sum_{p=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{p} C_p^k \sqrt{s_{4p-4k,4k}}\right)^{-1/p}\right), \tag{1.34}$$

де $\epsilon, \iota = \pm 1$.

Доведення. Доведемо випадок сильної проблеми моментів. Якщо послідовність $\{s_{m,n}\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ має зображення (1.32), то для довільної скінченної послідовності $f = (f_{m,n})_{m,n\in\mathbb{Z}}$, $f_{m,n} \in \mathbb{C}$ виконується:

$$\sum_{j,k,m,n\in\mathbb{Z}} f_{j,k}\bar{f}_{m,n}s_{j+m,k+n} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \left|\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} f_{m,n}x^m y^n\right|^2 d\rho(x,y) \geq 0. \tag{1.35}$$

Позначимо через l лінійний простір $\mathbb{C}^\infty$ послідовностей $f = (f_{m,n})_{m,n\in\mathbb{Z}}$, $f_{m,n} \in \mathbb{C}$, і через l_{fin} – його лінійну множину, що складається з скінченних послідовностей $f = (f_{m,n})_{m,n\in\mathbb{Z}}$, тобто послідовностей, де $f_{m,n} \neq 0$ тільки для скінченної кількості індексів n і m. Нехай $\delta_{m,n}$, $m,n \in \mathbb{Z}$ – це δ-послідовність, визначена таким чином, що кожен $f \in l_{\text{fin}}$ зображається так: $f = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} f_{m,n}\delta_{m,n}$.

Розглянемо лінійні оператори l_{fin}:

$$\begin{aligned}(J_A f)_{j,k} &= f_{j-1,k}, \qquad (J_B f)_{j,k} = f_{j,k-1},\\ (J_{A^{-1}} f)_{j,k} &= f_{j+1,k}, \quad (J_{B^{-1}} f)_{j,k} = f_{j,k+1},\ j,k \in \mathbb{N}_0.\end{aligned} \tag{1.36}$$

Оператори J_A і J_B та $J_{A^{-1}}$ і $J_{B^{-1}}$ є операторами типу "народження". Для δ-послідовностей маємо:

$$J_A \delta_{j,k} = \delta_{j+1,k}, \quad J_B \delta_{j,k} = \delta_{j,k+1}, \quad J_{A^{-1}} \delta_{j,k} = \delta_{j-1,k}, \quad J_{B^{-1}} \delta_{j,k} = \delta_{j,k-1}. \tag{1.37}$$

Оператори J_A і J_B та $J_{A^{-1}}$ і $J_{B^{-1}}$ – симетричні на фінітних векторах відносно (квазі)скалярного добутку

$$(f,g)_S = \sum_{j,k,m,n \in \mathbb{Z}} f_{j,k} \bar{g}_{m,n} s_{j+m,k+n},\ f,g \in l_{\text{fin}}. \tag{1.38}$$

Дійсно,

$$\begin{aligned}(J_A f, g)_S &= \sum_{j,k,m,n \in \mathbb{Z}} (J_A f)_{j,k} \bar{g}_{m,n} s_{j+m,k+n} = \sum_{j,k,m,n \in \mathbb{Z}} f_{j-1,k} \bar{g}_{m,n} s_{j+m,k+n}\\ &= \sum_{j,k,m,n \in \mathbb{Z}} f_{j,k} \bar{g}_{m,n} s_{j+m+1,k+n} = \sum_{j,k,m,n \in \mathbb{Z}} f_{j,k} \bar{g}_{m-1,n} s_{j+m,k+n}\\ &= \sum_{j,k,m,n \in \mathbb{Z}} f_{j,k} \overline{(J_A g)}_{m,n} s_{j+m,k+n} = (f, J_A g)_S,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(J_B f, g)_S &= \sum_{j,k,m,n \in \mathbb{Z}} (J_B f)_{j,k} \bar{g}_{m,n} s_{j+m,k+n} = \sum_{j,k,m,n \in \mathbb{Z}} f_{j,k-1} \bar{g}_{m,n} s_{j+m,k+n}\\ &= \sum_{j,k,m,n \in \mathbb{Z}} f_{j,k} \bar{g}_{m,n} s_{j+n+1,k+m} = \sum_{j,k,m,n \in \mathbb{Z}} f_{j,k} \bar{g}_{m-1,n} s_{j+n,k+m}\\ &= \sum_{j,k,m,n \in \mathbb{Z}} f_{j,k} \overline{(J_B g)}_{m,n} s_{j+m,k+n} = (f, J_B g)_S,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(J_{A^{-1}} f, g)_S &= \sum_{j,k,m,n \in \mathbb{Z}} (J_{A^{-1}} f)_{j,k} \bar{g}_{m,n} s_{j+m,k+n} = \sum_{j,k,m,n \in \mathbb{Z}} f_{j+1,k} \bar{g}_{m,n} s_{j+m,k+n}\\ &= \sum_{j,k,m,n \in \mathbb{Z}} f_{j,k} \bar{g}_{m,n} s_{j+m-1,k+n} = \sum_{j,k,m,n \in \mathbb{Z}} f_{j,k} \bar{g}_{m+1,n} s_{j+m,k+n}\\ &= \sum_{j,k,m,n \in \mathbb{Z}} f_{j,k} \overline{(J_{A^{-1}} g)}_{m,n} s_{j+m,k+n} = (f, J_{A^{-1}} g)_S,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(J_{B^{-1}}f,g)_S &= \sum_{j,k,m,n\in\mathbb{Z}} (J_{B^{-1}}f)_{j,k}\bar{g}_{m,n}s_{j+m,k+n} = \sum_{j,k,m,n\in\mathbb{Z}} f_{j,k+1}\bar{g}_{m,n}s_{j+m,k+n}\\ &= \sum_{j,k,m,n\in\mathbb{Z}} f_{j,k}\bar{g}_{m,n}s_{j+n-1,k+m} = \sum_{j,k,m,n\in\mathbb{Z}} f_{j,k}\bar{g}_{m-1,n}s_{j+m,k+m}\\ &= \sum_{j,k,m,n\in\mathbb{Z}} f_{j,k}\overline{(J_{B^{-1}}g)}_{m,n}s_{j+m,k+n} = (f,J_{B^{-1}}g)_S.\end{aligned}$$

Оператори J_A, J_B і $J_{A^{-1}}$, $J_{B^{-1}}$ комутують між собою на l_{fin}:

$$(J_BJ_Af)_{j,k} = f_{j-1,k-1} = (J_AJ_Bf)_{j,k}, \quad (J_{B^{-1}}J_{A^{-1}}f)_{j,k} = f_{j+1,k+1} = (J_{A^{-1}}J_{B^{-1}}f)_{j,k}$$
$$(J_BJ_{A^{-1}}f)_{j,k} = f_{j-1,k+1} = (J_{A^{-1}}J_Bf)_{j,k}, \quad (J_{B^{-1}}J_Af)_{j,k} = f_{j+1,k-1} = (J_AJ_{B^{-1}}f)_{j,k}.$$

Нехай S – гільбертів простір, отриманий як фактор-простір $\dot{l}_{\text{fin}} = l_{\text{fin}}/\{h \in l_{\text{fin}} \mid (h,h)$ $0\}$.

Елемент f з S відповідає елементу $\dot{f}$ з простору еквівалентних елементів $\dot{l}_{\text{fin}}$. Отже, оператори $\dot{J}_A$ і $\dot{J}_B$ та їх обернені $\dot{J}_{A^{-1}}$, $\dot{J}_{B^{-1}}$ коректно визначені в S. Цей факт описаний детально в [4], Розділ 8, §1, п. 4 і [8], Розділ 5, §5, п. 2. Аналогічно до цього випадку отримуємо:

$$\begin{gathered}\dot{J}_A\dot{f} = (J_Af)^{\cdot}, \quad \dot{J}_B\dot{f} = (J_Bf)^{\cdot}, \quad \dot{J}_{A^{-1}}\dot{f} = (J_{A^{-1}}f)^{\cdot}, \quad \dot{J}_{B^{-1}}\dot{f} = (J_{B^{-1}}f)^{\cdot},\\ f \in \operatorname{Dom}(\dot{J}_A) = \operatorname{Dom}(\dot{J}_B) = \operatorname{Dom}(\dot{J}_{A^{-1}}) = \operatorname{Dom}(\dot{J}_{B^{-1}}) = \dot{l}_{\text{fin}}.\end{gathered} \tag{1.39}$$

Позначимо для подальших досліджень A і B замикання $\sim$ $\dot{J}_A$ і $\dot{J}_B$ в S.

Для простоти будемо вважати, що послідовність $\{s_{m,n}\}$ є невиродженою, тобто якщо $(f,f)_S = 0$ для $f \in l_{\text{fin}}$, тоді $f = 0$, і тепер $\dot{f} = f$ і $\tilde{\dot{J}}_A = A$ і $\tilde{\dot{J}}_A = B$ та $\tilde{\dot{J}}_{A^{-1}} = A^{-1}$ і $\tilde{\dot{J}}_{B^{-1}} = B^{-1}$. Дослідження в загальному випадку також є більш складним, див., наприклад, в [4], Розділ 8, §1, Підрозділ 4 і [8], Розділ 5, §5, Підрозділ 1-3.

Припустимо також, що оператори A і B та $J_{A^{-1}}$, $J_{B^{-1}}$ – самоспряжені. Пізніше буде доведено, що A і B та A^{-1} і B^{-1} самоспряжені і комутуючі у строгому резольвентному сенсі за умови (1.34).

Побудуємо оснащення простору S:

$$(l_2(p))_{-,S} \supset S \supset l_2(p) \supset l_{\text{fin}}, \tag{1.40}$$

де $l_2(p)$ є зваженим l_2-простором з вагою $p = (p_{m,n})_{m,n\in\mathbb{Z}}$, $p_{m,n} \geq 1$. Норма в $l_2(p)$ визначається формулою: $\|f\|^2_{l_2(p)} = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} |f_{m,n}|^2 p_{m,n}$, де $(l_2(p))_{-,S} = \mathcal{H}_-$ є від'ємним простором відносно додатного простору $l_2(p) = \mathcal{H}_+$ і нульового простору $S = \mathcal{H}$. $\square$

Лема 1.4.2 *Для простору S існує достатньо швидко зростаюча послідовність $p_{m,n}$, така, що вкладення $l_2(p) \hookrightarrow S$ є квазіядерним.*

Доведення. Нерівність (1.33) також означає, що мульти-матриця вигляду $(K_{j,k;m,n})_{j,k,m,n\in\mathbb{Z}}$ з коефіцієнтами $K_{j,k;m,n} = s_{j+m,k+n}$ є невід'ємно визначеною і, отже,

$$|s_{j+n,k+m}|^2 = |K_{j,k;m,n}|^2 \leq K_{j,k;j,k} K_{m,n;m,n} = s_{j+k,j+k} s_{n+m,n+m}, \ j,k,m,n \in \mathbb{Z}. \quad (1.41)$$

Нехай вага $q = (q_{j,k})_{j,k\in\mathbb{Z}}$, $q_{j,k} \geq 1$, така, що $\sum_{j,k\in\mathbb{Z}} s_{j+k,j+k} q^{-1}_{j,k} < \infty$. Далі, з (1.41) отримуємо, що

$$\|f\|^2_S = \sum_{j,k,m,n\in\mathbb{Z}} f_{j,k} \bar{f}_{m,n} s_{j+m,k+n} \leq \left(\sum_{j,k\in\mathbb{Z}} \frac{s_{j+k,j+k}}{q_{j,k}} \right) \|f\|^2_{l_2(q)}, \ f \in l_{\mathrm{fin}}.$$

Таким чином, $l_2(q) \hookrightarrow S$ топологічний. І, якщо $\sum_{j,k\in\mathbb{Z}} q_{j,k} p^{-1}_{j,k} < \infty$, тоді $l_2(p) \hookrightarrow l_2(q)$ квазіядерний. Відображення $l_2(p) \hookrightarrow S$ квазіядерних і топологічних вкладень є також квазіядерним.

На наступному кроці використаємо оснащення (1.40) для побудови узагальнених власних векторів. Внутрішня структура простору $(l_2(p))_{-,S}$ складна, тому що складна структура S. Це є причиною ввести нове оснащення

$$l = (l_{\mathrm{fin}})' \supset (l_2(p^{-1})) \supset l_2 \supset l_2(p) \supset l_{\mathrm{fin}}, \quad (1.42)$$

де $l_2(p^{-1})$, $p^{-1} = (p^{-1}_{m,n})_{m,n\in\mathbb{Z}}$ є від'ємним простором відносно додатного простору $l_2(p)$ і нульового простору l_2. Ланцюги (1.13) і (1.42) мають один і той самий додатній простір $l_2(p)$. Лема 1.2.3 встановлює також, що простір $(l_2(p))_{-,S}$ є ізометричним до простору $l_2(p^{-1})$.

Роль оснащень (1.16) у подальшому будуть виконувати (1.40) і (1.42).

Очевидно, що оператори A і B та A^{-1} і B^{-1} стандартно пов'язані із ланцюгом (1.42), і вектор $\Omega = \delta_{0,0} \in l_{\text{fin}}$ є строго циклічним для операторів A і B та A^{-1} і B^{-1}, тому можемо застосувати теорему 1.3.1. Нехай $\xi_{x,y} \in (l_2(p))_{-,S}$ є узагальненим власним вектором операторів A і B та A^{-1} і B^{-1}. Отже, в цьому випадку, за теоремою 1.3.1 маємо: $\forall f \in l_{\text{fin}}$

$$\begin{aligned} (\xi_{x,y}, Af)_S = x(\xi_{x,y}, f)_S, \qquad & (\xi_{x,y}, Bf)_S = y(\xi_{x,y}, f)_S, \\ (\xi_{x,y}, A^{-1}f)_S = x^{-1}(\xi_{x,y}, f)_S, \quad & (\xi_{x,y}, B^{-1}f)_S = y^{-1}(\xi_{x,y}, f)_S. \end{aligned} \tag{1.43}$$

Позначимо:

$$P(x,y) = U\xi_{x,y} \in l_2(p^{-1}) \subset l, \quad P(x,y) = (P_{m,n}(x,y))_{m,n\in\mathbb{Z}}, \; P_{m,n}(x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Використовуючи (1.40) і (1.42), перепишемо (1.43) у вигляді: $\forall f \in l_{\text{fin}}$

$$\begin{aligned} (P(x,y), Af)_{l_2} = x(P(x,y), f)_{l_2}, \qquad & (P(x,y), Bf)_{l_2} = y(P(x,y), f)_{l_2}, \\ (P(x,y), A^{-1}f)_{l_2} = x^{-1}(P(x,y), f)_{l_2}, \quad & (P(x,y), B^{-1}f)_{l_2} = y^{-1}(P(x,y), f)_{l_2}. \end{aligned} \tag{1.44}$$

Відповідне перетворення Фур'є має вигляд:

$$S \supset l_{\text{fin}} \ni f \to (Ff)(x,y) = \hat{f}(x,y) = (f, P(x,y))_{l_2} \in L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y)). \tag{1.45}$$

Підрахуємо $P(x,y)$. Згідно правила (1.36) для A, (1.44) дає

$$\begin{aligned} \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} xP_{m,n}(x,y)\bar{f}_{m,n} &= x(P(x,y), f)_{l_2} \\ &= (P(x,y), Af)_{l_2} = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} P_{m+1,n}(x,y)\bar{f}_{m,n}, \; \forall f \in l_{\text{fin}}. \end{aligned} \tag{1.46}$$

Аналогічно, використовуючи (1.36) і (1.44), маємо:

$$\begin{aligned} \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} yP_{m,n}(x,y)\bar{f}_{m,n} &= y(P(x,y), f)_{l_2} \\ &= (P(x,y), Bf)_{l_2} = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} P_{m,n+1}(x,y)\bar{f}_{m,n}, \; \forall f \in l_{\text{fin}}, \end{aligned} \tag{1.47}$$

$$\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} x^{-1}P_{m,n}(x,y)\bar{f}_{m,n} = x^{-1}(P(x,y),f)_{l_2} = (P(x,y),A^{-1}f)_{l_2}$$
$$= \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} P_{m-1,n}(x,y)\bar{f}_{m,n},\ \forall f\in l_{\mathrm{fin}}, \tag{1.48}$$

$$\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} y^{-1}P_{m,n}(x,y)\bar{f}_{m,n} = y^{-1}(P(x,y),f)_{l_2} = (P(x,y),B^{-1}f)_{l_2}$$
$$= \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} P_{m,n-1}(x,y)\bar{f}_{m,n},\ \forall f\in l_{\mathrm{fin}}. \tag{1.49}$$

Отже, остаточно маємо:

$$xP_{m,n}(x,y) = P_{m+1,n}(x,y), \qquad yP_{m,n}(x,y) = P_{m,n+1}(x,y),$$
$$x^{-1}P_{m,n}(x,y) = P_{m-1,n}(x,y), \quad y^{-1}P_{m,n}(x,y) = P_{m,n-1}(x,y), \quad m,n\in\mathbb{Z}.$$

Без втрати загальності можемо покласти $P_{0,0}(x,y)=1,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$. Тоді останні дві рівності дають:

$$P_{m,n}(x,y) = x^m y^n, \quad m,n\in\mathbb{Z}. \tag{1.50}$$

Таким чином, перетворення Фур'є (1.45) має вигляд:

$$S\supset l_{\mathrm{fin}}\ni f\to (Ff)(x,y) = \hat{f}(x,y) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} f_{m,n}x^m y^n \in L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y)), \tag{1.51}$$

і

$$(f,g)_S = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(x,y)\overline{\hat{g}(x,y)}d\rho(x,y),\ f,g\in l_{\mathrm{fin}}. \tag{1.52}$$

Для побудови перетворення Фур'є (1.45) і використання формул (1.46)-(1.52) є ще необхідним перевірити, що для наших операторів A і B та A^{-1} і B^{-1} вектор $\Omega=\delta_{0,0}\in l_{\mathrm{fin}}$ є строго циклічним у розумінні оснащення (1.40). Але це вірно, тому що завдяки (1.37) маємо: $A^pB^q\Omega = J_A^pJ_B^q\delta_{0,0} = \delta_{p,q}$, $p,q\in\mathbb{Z}$.

Рівність Парсеваля (1.52) відразу ж приводить до зображення (1.32) згідно з (1.50), (1.51): $\hat{\delta}_{m,n} = x^m y^n$ і $\hat{\delta}_{0,0}=1$; з (1.38) отримаємо

$$s_{m,n} = (\delta_{m,n},\delta_{0,0})_S = (\hat{\delta}_{m,n},\hat{\delta}_{0,0})_{L_2(\mathbb{R}^2,d\rho(x,y))} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} x^m y^n d\rho(x,y),\ m,n\in\mathbb{Z}. \tag{1.53}$$

Однозначність зображення (1.32) випливає з самоспряженості і комутативності операторів A і B або A і B^{-1} або A^{-1} і B або A^{-1} і B^{-1} (з [4], Розділ 8). Отже, для завершення доведення теореми 1.3.1 треба тільки перевірити, що умова (1.34) забезпечує самоспряженість та комутативність A і B. Але для цього (див. теореми 1.1.2 і 1.1.3) потрібно тільки перевірити, чи має, наприклад, оператор A^2+B^2 щільну множину $\mathcal{D}$ квазіаналітичних векторів.

Завдяки (1.36), оператор $\mathcal{A} = A^2 + B^2$ діє на $\delta_{m,n} \in \mathcal{D}$ таким чином:

$$\mathcal{A}\delta_{m,n} = (A^2 + B^2)\delta_{m,n} = \delta_{m+2,n} + \delta_{m,n+2}. \tag{1.54}$$

Очевидно $\mathcal{A} \geq 0$. Для $p \geq 1$ маємо: $\mathcal{A}^p\delta_{m,n} = \sum\limits_{k=0}^{p} C_p^k \delta_{m+2p-k,n+2k}$. Згідно з (1.38) норма $\|f\|_S = \sqrt{(f,f)_S}$ в S. Отже, $\forall \delta_{m,n} \in \mathcal{D}$ отримуємо

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}^p\delta_{m,n}\|_S = \|\sum_{k=0}^{p} C_p^k \delta_{m+2p-k,n+2k}\|_S \leq \sum C_p^k \|\delta_{m+2p-k,n+2k}\| \\ = \sum C_p^k \sqrt{s_{2m+4p-2k,2m+4p-2k}}. \end{aligned} \tag{1.55}$$

Оскільки

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[p]{\|\mathcal{A}^p\delta_{m,n}\|}} \geq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[p]{\sum\limits_{k=0}^{p} C_p^k \sqrt{s_{2m+4p-4k,2n+4k}}}} = \infty, \; m,n \in \mathbb{N}_0,$$

то доведено, що квазіаналітичність класу $\mathrm{C}\{\|\mathcal{A}^p\delta_{m,n}\|\}$, випливає з квазіаналітичності класу $\mathrm{C}\{\sqrt{\sum\limits_{k=0}^{p} C_p^k \sqrt{s_{2m+4p-4k,2n+4k}}}\}$ через властивості квазіаналітичності з [44, 59]. Це еквівалентно квазіаналітічності класу $\mathrm{C}\{\sqrt{\sum\limits_{k=0}^{p} C_p^k \sqrt{s_{4p-4k,4k}}}\}$. Але ця квазіаналітичність дає одну із умов (1.34), беручи до уваги (1.55). Інші з умов в (1.34) отримуються перебором варіантів, покладаючи в (1.54) $A := A^2 + (B^{-1})^2$, $A := (A^{-1})^2 + (B)^2$, $A := (A^{-1})^2 + (B^{-1})^2$. $\square$

Висновки: Наведено розв'язки двовимірної сильної і не сильної проблем моментів, а саме, необхідні умови розв'язності та достатні умови однозначної розв'язності.

Моментні зображення записані, використовуючи рівність Парсеваля для узагальнених власних векторів пари відповідних комутуючих операторів.

РОЗДІЛ 2

Обернена спектральна задача

Обернена спектральна задача для блочних матриць відповідних двовимірній проблемі моментів наведена в [11]. Вона полягає у побудові блочних тридіагональних матриць відповідних або двовимірній проблемі моментів або, можна казати, відповідних борелівській мірі на дійсній площині із умовою, що міра має всі моменти. Наведемо її розгорнуте доведення відповідно до викладеного в [51]. Історично вперше такі матриці з'явились в роботі М.Я. Гехтмана та О.О. Калюжного [11]. Далі в розділі містяться основні результати роботи.

2.1. Ортогоналізація двоіндексної послідовності відповідної не сильній проблемі моментів

Нехай $d\rho(x,y)$ – ймовірнісна міра Бореля з компактним носієм на дійсній площині $\mathbb{R}^2$ і $L_2 = L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y))$ – простір інтегровних з квадратом функцій, визначених на $\mathbb{R}^2$. Вважаємо, що носій цієї міри – це компактна множина, яка містить не порожню відкриту підмножину. Тоді функції $\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longmapsto x^m y^n,\ \ m,n \in \mathbb{N}_0$, є лінійно незалежні і утворюють щільну множину в L_2.

Розглянемо оператори множення

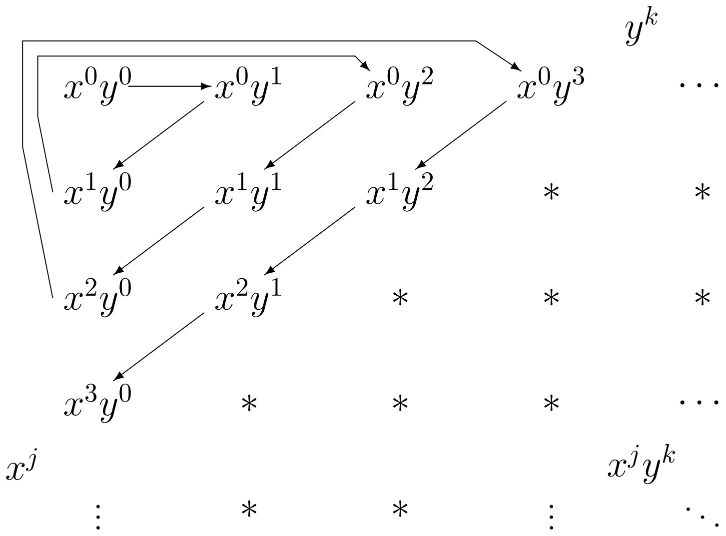
$$\hat{A}f(x,y) = xf(x,y), \quad \hat{B}f(x,y) = yf(x,y)$$

у просторі L_2. Очевидно, що ці оператори обмежені і самоспряжені. Для знаходження матриць типу Якобі операторів $\hat{A}$ і $\hat{B}$ вибирається деякий порядок ортогоналізації в L_2 для сімейства функцій:

$$\{x^m y^n\}, \quad m, n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.1}$$

Використаємо такий лінійний порядок як і в [11] для ортогоналізації у відповідності із процедурою Шмідта (Мал. 1)(див. також, наприклад, [10, 33, 34]):

$$x^0y^0; \quad x^0y^1, x^1y^0; \quad x^0y^2, x^1y^1, x^2y^0; \quad \dots ; \quad x^0y^n, x^1y^{n-1}, \dots, x^ny^0; \quad \dots \tag{2.2}$$



Мал. 1 Порядок ортогоналізації

В результаті отримаємо ортонормовану систему поліномів (кожен поліном за змінними x^my^n, $m, n \in \mathbb{N}_0$), які позначимо і розташуємо таким чином:

$$\begin{array}{lllll}
P_{0;0}(x,y); & P_{1;0}(x,y), & P_{2;0}(x,y), & \dots; & P_{n;0}(x,y), \quad \dots, \\
 & P_{1;1}(x,y); & P_{2;1}(x,y), & & P_{n;1}(x,y), \\
 & & P_{2;2}(x,y); & & P_{n;2}(x,y), \\
 & & & & \quad\dots \\
 & & & & P_{n;n}(x,y);
\end{array} \tag{2.3}$$

де кожен поліном має вигляд $P_{n;\alpha}(x,y) = k_{n;\alpha}x^\alpha y^{n-\alpha} + \cdots$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\alpha = 0, 1, \dots, n$, $k_{n;\alpha} > 0$; тут $+\cdots$ позначимо наступну частину відповідного полінома; для зручності покладаємо $P_{0;0}(x,y) = 1$. Таким чином $P_{n;\alpha}$ деякі лінійні комбінації

$$\{1;\ x^0y^1, x^1y^0;\ \dots;\ x^0y^n, x^1y^{n-1}, \dots, x^\alpha y^{n-\alpha}\}. \tag{2.4}$$

Оскільки множина (2.1) є щільною в просторі L_2, то послідовність (2.3) – це ортонормований базис в цьому просторі. Нехай підпростір $\mathcal{P}_{n;\alpha}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ утворений (2.4). Очевидно, що

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}_{0;0} \subset \mathcal{P}_{1;0} \subset \mathcal{P}_{1;1} \subset \mathcal{P}_{2;0} \subset \mathcal{P}_{2;1} \subset \mathcal{P}_{2;2} \subset \cdots \subset \mathcal{P}_{n;0} \subset \mathcal{P}_{n;1} \subset \cdots \subset \mathcal{P}_{n;n} \subset \cdots,\\
&\mathcal{P}_{n;\alpha} = \{P_{0;0}(x,y)\} \oplus \{P_{1;0}(x,y)\} \oplus \{P_{1;1}(x,y)\} \oplus \\
&\qquad \oplus \{P_{2;0}(x,y)\} \oplus \{P_{2;1}(x,y)\} \oplus \{P_{2;2}(x,y)\} \oplus \cdots \oplus \\
&\qquad \oplus \{P_{n;0}(x,y)\} \oplus \{P_{n;1}(x,y)\} \oplus \cdots \oplus \{P_{n;\alpha}(x,y)\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

де $\{P_{n;\alpha}(x,y)\}$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha = 0, 1, \ldots n$, позначено одновимірний простір, утворений за $P_{n;\alpha}(x,y)$; $\mathcal{P}_{0;0} = \mathbb{R}$.

2.2. Дослідження блочної структури матриць типу Якобі відповідних не сильній проблемі моментів

Для наступного дослідження потрібно замість звичайного простору l_2 ввести гільбертів простір

$$\mathbf{l}_2 = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \cdots, \quad \mathcal{H}_n = \mathbb{C}^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.6}$$

Кожен вектор $f \in \mathbf{l}_2$ має вигляд $f = (f_n)_{n=0}^{\infty}$, $f_n \in \mathcal{H}_n$, і, отже:

$$\|f\|^2_{\mathbf{l}_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|^2_{\mathcal{H}_n} < \infty, \quad (f,g)_{\mathbf{l}_2} = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n, g_n)_{\mathcal{H}_n}, \quad \forall f, g \in \mathbf{l}_2.$$

Для координат вектора $f_n \in \mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$ в деякому ортонормованому базисі $\{e_{n;0}$, $e_{n;1}$, $e_{n;2}$, $\ldots$, $e_{n;n}\}$ в просторі $\mathbb{C}^{n+1}$ позначимо через $(f_{n;0}, f_{n;1}, f_{n;2}, \ldots, f_{n;n})$ і, отже, отримаємо $f_n = (f_{n;0}, f_{n;1}, f_{n;2}, \ldots, f_{n;n})$.

Використовуючи ортонормовану систему (2.3), можна визначити відображення $\mathbf{l}_2$ в L_2. Покладемо $P_n(x,y) = (P_{n;0}, P_{n;1}(x,y), P_{n;2}(x,y), \ldots, P_{n;n}) \in \mathcal{H}_n$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$. Тоді

$$\mathbf{l_2} \ni f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \longmapsto (If)(x,y) := \hat{f}(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n, P_n(x,y))_{\mathcal{H}_n} \in L_2. \tag{2.7}$$

Тому для $n \in \mathbb{N}_0$ отримаємо:

$$(f_n, P_n(x,y))_{\mathcal{H}_n} = f_{n;0}\overline{P_{n;0}(x,y)} + f_{n;1}\overline{P_{n;1}(x,y)} + f_{n;2}\overline{P_{n;2}(x,y)} + \cdots + f_{n;n}\overline{P_{n;n}(x,y)},$$

$$\|f\|^2_{\mathbf{l}_2} = \|(f_{0;0}, f_{1;0}, f_{1;1}, f_{2;0}, f_{2;1}, f_{2;2}, \ldots, f_{n;0}, , f_{n;1}, \ldots, f_{n;n}, \ldots)\|^2_{l_2}.$$

Тоді (2.7) – це відображення простору $\mathbf{l}_2$ в L_2, враховуючи щільність ортонормованої системи (2.3) а, отже, це відображення ізометричне. Відображення (2.7) переводить весь простір l_2 у весь простір L_2, бо система (2.3) – це ортонормований базис в L_2. Тому відображення (2.7) – це унітарне перетворення (позначається I), яке діє з $\mathbf{l}_2$ в L_2.

Нехай T – лінійний обмежений оператор, визначений на просторі $\mathbf{l}_2$ (2.6). Тоді існує єдина послідовність $(\tau_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$, де для кожного $j,k \in \mathbb{N}_0$ елемент $\tau_{j,k}$ є оператором з $\mathcal{H}_k$ в $\mathcal{H}_j$ так, що

$$(Tf)_j = \sum_{k=0}^{\infty} \tau_{j,k} f_k,\ \ j \in \mathbb{N}_0, \quad (Tf, g)_{\mathbf{l}_2} = \sum_{j,k=0}^{\infty} (\tau_{j,k} f_k, g_j)_{\mathcal{H}_j}, \quad f, g \in \mathbf{l}_2. \tag{2.8}$$

Для доведення (2.8) потрібно тільки описати T в $\mathbf{l}_2$, використовуючи базис

$$(e_{0;0};\ e_{1;0}, e_{1;1};\ e_{2;0}, e_{2;1}, e_{2;2};\ \ldots;\ e_{n;0}, e_{n;1}, \ldots, e_{n;n};\ \ldots), \quad e_{0;0} = 1. \tag{2.9}$$

Тоді $\tau_{j,k}$ є оператором $\mathcal{H}_k \longrightarrow \mathcal{H}_j$ для кожного $j,k \in \mathbb{N}_0$. Оператор має матричний вигляд

$$\tau_{j,k;\alpha,\beta} = (Te_{k;\beta}, e_{j;\alpha})_{\mathbf{l}_2}, \tag{2.10}$$

при $\alpha = 0, 1, \ldots, j$ і $\beta = 0, 1, \ldots, k$. Перепишемо $\tau_{j,k} = (\tau_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{j,k}$, враховуючи випадки: $\tau_{0,k} = (\tau_{0,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{0,k}$, $\tau_{j,0} = (\tau_{j,0;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{j,0}$ і $\tau_{0,0} = (\tau_{0,0;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{0,0} = \tau_{0,0;0,0}$.

Варто зауважити, що в зображенні (2.8) це правильно і для загального оператора T в просторі $\mathbf{l}_2$ з областю визначення $\mathrm{Dom}(T) = \mathbf{l}_{\mathrm{fin}} \subset \mathbf{l}_2$, де $\mathbf{l}_{\mathrm{fin}}$ позначає фінітні вектори $\mathbf{l}_2$. У цьому випадку перша формула з (2.8) виконується для $f \in \mathbf{l}_{\mathrm{fin}}$; друга формула – для $f \in \mathbf{l}_{\mathrm{fin}}$, $g \in \mathbf{l}_2$.

Розглянемо відображення $\hat{T} = ITI^{-1} : L_2 \longrightarrow L_2$ обмеженого оператора T :

$\mathbf{l}_2 \longrightarrow \mathbf{l}_2$ при вкладенні (2.7). Ця матриця в базисі (2.3):

$$P_{0;0}(x,y);\ P_{1;0}(x,y), P_{1;1}(x,y);\ P_{2;0}(x,y), P_{2,1}(x,y), P_{2,2}(x,y);\ \ldots;$$
$$P_{n;0}(x,y), P_{n;1}(x,y), \ldots, P_{n;n}(x,y); \ldots,$$

дорівнює звичайній матриці оператора T, яка розуміється як оператор: $\mathbf{l}_2 \longrightarrow \mathbf{l}_2$ у відповідному базисі (2.9). Використовуючи (2.10) і згадану вище процедуру, отримаємо матричний оператор $(\tau_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ $T : \mathbf{l}_2 \longrightarrow \mathbf{l}_2$. За визначенням ця матриця також є матричним оператором $\hat{T} : L_2 \longrightarrow L_2$. Очевидно, що $\hat{T}$ може бути довільним лінійним обмеженим оператором L_2. Розглянемо T замість $\hat{T}$, і в якості T візьмемо A і B відповідні матрицям J_A і J_B.

Лема 2.2.1 *Для поліномів $P_{n;\alpha}(x,y)$, і підпросторів $\mathcal{P}_{m,\beta}$, $n, m \in \mathbb{N}_0$, $\alpha = 0, 1, \ldots, n$, $\beta = 0, 1, \ldots, m$, виконуються співвідношення:*

$$xP_{n;\alpha}(x,y) \in \mathcal{P}_{n+1;\alpha+1}, \qquad yP_{n;\alpha}(x,y) \in \mathcal{P}_{n+1;\alpha}. \tag{2.11}$$

Доведення. Відповідно до (2.3) поліном $P_{n;\alpha}(x,y)$, $n \in \mathbb{N}_0$, утворений лінійною комбінацією $\{1;\, x^0y^1,\, x^1y^0;\, \ldots;\, x^0y^n,\, x^1y^{n-1},\, \ldots,\, x^{\alpha}y^{n-\alpha}\}$. Отже, помноживши її на x, отримаємо лінійну комбінацію $\{x;\, x^1y^1,\, x^2y^0;\, \ldots;\, x^1y^n,\, x^2y^{n-1},\, \ldots,\, x^{\alpha+1}y^{n-\alpha}\}$ і така лінійна комбінація належить до $\mathcal{P}_{n+1;\alpha+1}$. Аналогічно помножимо її на y отримаємо лінійну комбінацію $\{y^1;\, x^0y^2,\, x^1y^1;\, \ldots;\, x^0y^{n+1},\, x^1y^n,\, \ldots,\, x^{\alpha}y^{n-\alpha+1}\}$ і така лінійна комбінаця належить до $\mathcal{P}_{n+1;\alpha}$. ☐

Лема 2.2.2 *Нехай $\hat{A}$ є оператором множення на x в просторі L_2:*

$$L_2 \ni \varphi(x,y) \longmapsto (\hat{A}\varphi)(x,y) = x\varphi(x,y) \in L_2.$$

(Очевидно, що $\hat{A}$ – обмежений і самоспряжений). Матриця $\hat{A} = (a_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ в базисі (2.3) (тобто $A = I^{-1}\hat{A}I$) має тридіагональну структуру: $a_{j,k} = 0$ для $|j-k| > 1$.

Доведення. Використовуючи (2.10) для $e_{n;\gamma} = I^{-1}P_{n;\gamma}(x,y)$, $n \in \mathbb{N}_0$; $\gamma = 0, 1, \ldots, n$, отримаємо $\forall j, k \in \mathbb{N}_0$

$$a_{j,k;\alpha,\beta} = (Ae_{k;\beta}, e_{j;\alpha})_{l_2} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} xP_{k;\beta}(x,y)\overline{P_{j;\alpha}(x,y)}d\rho(x,y), \tag{2.12}$$

де $\alpha = 0, 1, \dots, j,\ \beta = 0, 1, \dots, k$. З (2.11) отримаємо $xP_{k;\beta}(x, y) \in \mathcal{P}_{k+1;\beta+1}$. Згідно з (2.5) інтеграл в (2.12) дорівнює нулю для $j > k + 1$ і для кожного $\beta = 0, 1, \dots, j$.

З іншого боку, інтеграл у (2.12) має вигляд

$$(a^*)_{j,k;\alpha,\beta} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} xP_{k;\beta}(x, y)\overline{P_{j;\alpha}(x, y)}\, d\rho(x, y) =$$

$$\overline{\int\limits_{\mathbb{R}^2} xP_{j;\alpha}(x, y)\overline{P_{k;\beta}(x, y)}\, d\rho(x, y)} = \overline{a_{k,j;\beta,\alpha}}, \quad (2.13)$$

де $\alpha = 0, 1, \dots, j$ і $\beta = 0, 1, \dots, k$. Оскільки оператор $\hat{A}$ симетричний, з (2.11) маємо: $xP_{j;\alpha}(x, y) \in \mathcal{P}_{j+1;\alpha+1}$. Відповідно до (2.5) останній інтеграл дорівнює нулю для $k > j + 1$ і для кожного $\alpha = 0, 1, \dots, k$, $\beta = 0, 1, \dots, k$.

У результаті інтеграл (2.12), тобто коефіцієнти $a_{j,k;\alpha,\beta}$, $j, k \in \mathbb{N}_0$, дорівнюють нулю для $|j - k| > 1$; $\alpha = 0, 1, \dots, j$, $\beta = 0, 1, \dots, k$. (У попередніх міркуваннях необхідно брати до уваги, що $e_{0;0} = I^{-1}P_{0;0}(x, y)$, $P_{0;0}(x, y) = 1$). $\square$

Таким чином матриця $(a_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ оператора $\hat{A}$ має тридіагональну блочну структуру

$$\begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Подальший аналіз виразів (2.12) дає можливість виявити нульові і ненульові елементи матриці $(a_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{j,k}$ в кожному випадку для $|j - k| \le 1$. Використовуємо також властивості перестановок матричних індексів j, k, і α, β.

Лема 2.2.3 *Нехай $(a_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ – матричний оператор множення на x в L_2, де $a_{j,k} : \mathcal{H}_k \longrightarrow \mathcal{H}_j$; $a_{j,k} = (a_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{j,k}$ є матрицями операторів $a_{j,k}$ у відповідному ортонормованому базисі. Тоді $\forall j \in \mathbb{N}_0$,*

$$\begin{aligned} &\forall \alpha = 0, 1, \dots j - 1 \quad a_{j,j+1;\alpha,\alpha+2} = a_{j,j+1;\alpha,\alpha+3} = \dots = a_{j,j+1;\alpha,j+1} = 0; \\ &\forall \beta = 0, 1, \dots j - 1 \quad a_{j+1,j;\beta+2,\beta} = a_{j+1,j;\beta+3,\beta} = \dots = a_{j+1,j;j+1,\beta} = 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Якщо виберемо всередині кожної діагоналі $\{x^0y^n, x^ny^{n-1}, x^0y^{n-2}, \dots, x^ny^0\}$ інший порядок (зі збереженням порядку діагоналей), то лема 2.2.3 не вірна, але це також дає можливість описати матриці $(a_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{j,k}$. Такі матриці $(a_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ мають також тридіагональну блочну структуру і мають інші елементи рівні нулю.

Доведення. Відповідно до (2.12) і (2.11) для $j \in \mathbb{N}_0$, $\forall\alpha = 0, 1, \dots, j$ і $\forall\beta = 0, 1, \dots, j+1$ маємо:

$$a_{j,j+1;\alpha,\beta} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} xP_{j+1,\beta}(x,y)\overline{P_{j;\alpha}(x,y)}\,d\rho(x,y) = \overline{\int\limits_{\mathbb{R}^2} xP_{j,\alpha}(x,y)\overline{P_{j+1;\beta}(x,y)}\,d\rho(x,y)},$$

де $xP_{j;\alpha}(x,y) \in \mathcal{P}_{j+1;\alpha+1}$. Але, відповідно до (2.5), $P_{j+1;\beta}(x,y)$ ортогональний $\mathcal{P}_{j+1;\alpha+1}$ для $\beta > \alpha+1$ і, отже, останній інтеграл дорівнює нулю. Завдяки цьому отримуємо перші рівності в (2.15).

Аналогічно для (2.12) і (2.11) для $j \in \mathbb{N}_0$ $\forall\alpha = 0, 1, \dots, j+1$ і $\forall\beta = 0, 1, \dots, j$ маємо:

$$a_{j+1,j;\alpha,\beta} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} xP_{j,\beta}(x,y)\overline{P_{j+1;\alpha}(x,y)}\,d\rho(x,y),$$

де $xP_{j;\beta}(x,y) \in \mathcal{P}_{j+1;\beta+1}$. Але відповідно до (2.5) $P_{j+1;\alpha}(x,y)$ є ортогональним до $\mathcal{P}_{j+1;\beta+1}$, якщо $\alpha > \beta+1$ і, отже, останній інтеграл дорівнює нулю. Завдяки цьому отримуємо (2.15). □

Таким чином, після цих досліджень можна зробити висновок, що в (2.14) для $\forall j \in \mathbb{N}$ правий кут для кожної $((j+1)\times(j+2))$-матриці $a_{j,j+1}$ (починаючи з третьої діагоналі) і лівий кут для кожної$((j+2)\times(j+1))$-матриці $a_{j+1,j}$ (починається з третьої діагоналі) складається з нульових елементів. Беручи до уваги (2.14), можемо зробити висновок, що матриця оператора множення на x є мультидіагональною звичайною скалярною матрицею, тобто у звичайному базисі простору l_2.

Лема 2.2.4 *Елементи*

$$a_{0,1;0,1}, a_{1,0;1,0}; \quad a_{j,j+1;\alpha,\alpha+1}, a_{j+1,j;\alpha+1,\alpha}; \quad j \in \mathbb{N}, \alpha = 0, 1, \dots j, \tag{2.16}$$

матриці $(a_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ *з леми 2.2.7 є додатніми.*

Доведення. Почнемо з дослідження $a_{0,1;0,1}$. Позначимо через $P'_{1;1}(x,y)$ ненормований вектор $P_{1;1}(x,y)$. Відповідно до (29) і (2.3), маємо:

$$P'_{1;1}(x,y) = x - (x, P_{1;0}(x,y))_{L_2} P_{1;0}(x,y) - (x,1)_{L_2}.$$

Тому, використовуючи (2.30), отримаємо

$$\begin{aligned} a_{0,1;0,1} &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} x P_{0;0} P_{1;1}(x,y)\, d\rho(x,y) = \|P'_{1;1}(x,y)\|^{-1}_{L_2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} x P'_{1;1}(x,y)\, d\rho(x,y) \\ &= \|P'_{1;1}(x,y)\|^{-1}_{L_2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} x(x - (x, P_{1;0}(x,y))_{L_2} P_{1;0}(x,y) - (x,1)_{L_2})\, d\rho(x,y) \\ &= \|P'_{1;1}(x,y)\|^{-1}_{L_2} (\|x\|^2_{L_2} - |(x, P_{1;0}(x,y))_{L_2}|^2 - |(x,1)_{L_2}|^2), \end{aligned} \tag{2.17}$$

де $(1 = P_{0;0}(x,y))$.

Також, з (2.36), з'ясовується, що останній вираз додатній і, отже, $a_{0,1;0,1} > 0$. Оскільки оператор A симетричний, то $a_{0,1;0,1} = a_{1,0;1,0} > 0$.

Додатність в (2.17) випливає з рівності Парсеваля про розклад функції $x \in L_2$ відносно ортонормованого базису (2.3) в просторі L_2:

$$|(x,1)_{L_2}|^2 + |(x, P_{1;0}(x,y))_{L_2}|^2 + |(x, P_{1;1}(x,y))_{L_2}|^2 + \cdots = \|x\|^2_{L_2}. \tag{2.18}$$

Розглянемо елементи $a_{j,j+1;\alpha,\alpha+1}$, де $j \in \mathbb{N}$, $\alpha = 0, 1, \ldots, j$. З (2.30) отримаємо

$$\begin{aligned} a_{j,j+1;\alpha,\alpha+1} &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} x P_{j+1,\alpha+1}(x,y) \overline{P_{j;\alpha}(x,y)}\, d\rho(x,y) \\ &= \overline{\int\limits_{\mathbb{R}^2} x P_{j,\alpha}(x,y) \overline{P_{j+1;\alpha+1}(x,y)}\, d\rho(x,y)}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Для $P_{j;\alpha}(x,y)$ отримаємо відповідно до (2.3) і (2.5):

$$P_{j;\alpha}(x,y) = k_{j;\alpha} x^{\alpha} y^{j-\alpha} + R_{j;\alpha}(x,y), \tag{2.20}$$

де $R_{j;\alpha}(x,y)$ – деякий поліном з $\mathcal{P}_{j;\alpha-1}$, якщо $\alpha > 0$ або з $\mathcal{P}_{j-1;j-1}$, та якщо $\alpha = 0$. Тому $xR_{j;\alpha}(x,y)$ – деякий поліном з $\mathcal{P}_{j+1;\alpha}$ або з $\mathcal{P}_{j;j}$ (див. (2.11) і (2.5)). Помноживши його на x, отримаємо

$$x P_{j;\alpha}(x,y) = k_{j;\alpha} x^{\alpha+1} y^{j-\alpha} + x R_{j;\alpha}(x,y), \tag{2.21}$$

де $xR_{j;\alpha}(x,y) \in \mathcal{P}_{j+1;\alpha}$ або $\mathcal{P}_{j;j}$. З іншого боку, рівність (2.20) дає:

$$P_{j+1;\alpha}(x,y) = k_{j+1;\alpha}x^{\alpha+1}y^{j-\alpha} + R_{j+1;\alpha}(x,y), \tag{2.22}$$

де $R_{j+1;\alpha}(x,y) \in \mathcal{P}_{j+1;\alpha}$ якщо $\alpha > 0$ або належить до $\mathcal{P}_{j;j}$, якщо $\alpha = 0$.

Знайдемо $x^{\alpha+1}y^{j-\alpha}$ з (2.22) і підставимо його в (2.21). Отримаємо:

$$\begin{aligned} xP_{j;\alpha}(x,y) &= \frac{k_{j;\alpha}}{k_{j+1;\alpha}}(P_{j+1;\alpha}(x,y) - R_{j+1;\alpha}(x,y)) + xR_{j;\alpha}(x,y) \\ &= \frac{k_{j;\alpha}}{k_{j+1;\alpha}}P_{j+1;\alpha}(x,y) - \frac{k_{j;\alpha}}{k_{j+1;\alpha}}R_{j+1;\alpha}(x,y) + xR_{j;\alpha}(x,y). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Другі два члени в (2.23) належать до $\mathcal{P}_{j+1;\alpha}$ або до $\mathcal{P}_{j;j}$ і в будь-якому разі ортогональні до $P_{j+1;\alpha+1}(x,y)$.

Тому підстановка виразу (2.23) в (2.19) дає: $a_{j,j+1;\alpha,\alpha+1} = \frac{k_{j;\alpha}}{k_{j+1;\alpha+1}} > 0$. Оскільки матриця (2.32) є симетричною, то елементи $a_{j,j+1;\alpha,\alpha+1} = a_{j,j+1;\alpha,\alpha+1}$ також додатні $j \in \mathbb{N}$, $\alpha = 0,1,\ldots,j$. □

Перепозначимо:

$$\begin{aligned} a_n = a_{n+1,n} \quad &: \quad \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}, \\ b_n = a_{n,n} \quad &: \quad \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_n, \\ c_n = a_{n,n+1} \quad &: \quad \mathcal{H}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{H}_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Всі попередні дослідження узагальнені в такій теоремі.

Теорема 2.2.5 *Обмежений самоспряжений оператор $\hat{A}$ множення на x в просторі L_2 в ортонормованому базисі (2.3) многочленів має вигляд тридіагональної блочної симетричної матриці типу Якобі $J_A = (a_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ яка діє в просторі (2.6):*

$$\mathbf{l}_2 = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \cdots, \quad \mathcal{H}_n = \mathbb{C}^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.25}$$

Норми всіх операторів $a_{j,k} : \mathcal{H}_k \longrightarrow \mathcal{H}_j$ рівномірно обмежені відносно $j,k \in \mathbb{N}_0$. У позначеннях (2.24), ця матриця має вигляд :

$$
J_A = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
b_0 & c_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\hline
a_0 & b_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots \\
\hline
0 & a_1 & b_2 & c_2 & 0 & \dots \\
\hline
0 & 0 & a_2 & b_3 & c_3 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}\right]
$$

$$
= \left[\begin{array}{c|cc|ccc|cccc|ccccc}
\ast & \ast & + & & & & & & & & & & & & \\
\hline
\ast & \ast & \ast & \ast & + & 0 & & & & & & & & & \\
+ & \ast & \ast & \ast & \ast & + & & & & & & & 0 & & \\
\hline
 & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & + & 0 & 0 & & & & & \\
 & + & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & + & 0 & & & & & \\
 & 0 & + & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & + & & & & & \\
\hline
 & & & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & + & 0 & 0 & 0 \\
 & & & + & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & + & 0 & 0 \\
 & 0 & & 0 & + & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & + & 0 \\
 & & & 0 & 0 & + & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & + \\
\hline
 & & & & \ddots & & & & \ddots & & & & \ddots & &
\end{array}\right]. \tag{2.26}
$$

В (2.26) $\forall n \in \mathbb{N}_0$ b_n *–* $((n+1)\times(n+1))$*-матриця:* $b_n = (b_{n;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{n,n}$*,* *(*$b_0 = b_{0;0,0}$ *є скаляром);* a_n *–* $((n+2)\times(n+1))$*-матриця:* $a_n = (a_{n;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{n+1,n}$*;* c_n *–* $((n+1)\times(n+2))$*-матриця:* $c_n = (c_{n;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{n,n+1}$*. В цій матриці* a_n *і* c_n *деякі елементи завжди дорівнюють нулю:* $\forall n \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
a_{n;\beta+2,\beta} = a_{n;\beta+3,\beta} = \cdots = a_{n;n+1,\beta} = 0, \quad & \beta = 0,1,\dots,n-1; \\
c_{n;\alpha,\alpha+2} = c_{n;\alpha,\alpha+3} = \cdots = c_{n;\alpha,n+1} = 0, \quad & \alpha = 0,1,\dots,n-1.
\end{aligned} \tag{2.27}
$$

Деякі інші елементи додатні, а саме:

$$
a_{n;\alpha+1,\alpha}; c_{n;\alpha,\alpha+1} > 0, \quad \alpha = 0,1,\dots,n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.28}
$$

Таким чином, можна говорити, що $\forall n \in \mathbb{N}_0$ *кожен верхній лівий кут матриці* a_n *(починаючи з третьої діагоналі) і кожен правий кут матриці* c_n *(починаючи* *з третьої діагоналі) складаються з нульових елементів. Всі позитивні елементи (2.26) позначаються "+". Отже, матриця (2.26) в скалярному вигляді є багатодіагональною у зазначеній структурі.*

Симетрія оператора $(\hat{A})^* = \hat{A}$ *дає*

$$a_{n;\alpha,\beta} = c_{n;\beta,\alpha}, \quad \beta = 0,1,2,...,n, \ \alpha = 0,1,...,\beta,\beta+1, \ n \in \mathbb{N}_0.$$

Матриця J_A *діє таким чином:*

$$(J_A f)_n = a_{n-1} f_{n-1} + b_n f_n + c_n f_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad \forall f = (f_n)_{n=0}^\infty \in \mathbf{l}_2, \tag{2.29}$$

де покладаємо $a_{-1} = 0, \quad f_{-1} = 0.$

Перейдемо тепер до дослідження матриці J_B пов'язаної зі змінною y. З цієї причини нам потрібна лема, схожа на лему 2.2.1.

Лема 2.2.6 *Нехай* $\hat{B}$ *– оператор множення на* y *в просторі* L_2*:*

$$L_2 \ni \varphi(x,y) \longmapsto (\hat{B}\varphi)(x,y) = y\varphi(x,y) \in L_2.$$

(Очевидно, що $\hat{B}$ *обмежений і самоспряжений). Матриця* $(b_{j,k})_{j,k=0}^\infty$ *оператора* $\hat{B}$ *в базисі (2.3) (тобто* $B = I^{-1}\hat{B}I$*) має тридіагональну структуру:* $b_{j,k} = 0$ *для* $|j-k| > 1.$

Доведення. Використовуючи (2.10) для $e_{n;\gamma} = I^{-1}P_{n;\gamma}(x,y), n \in \mathbb{N}_0; \gamma = 0,1,\ldots,n,$ отримаємо $\forall j,k \in \mathbb{N}_0$

$$b_{j,k;\alpha,\beta} = (Be_{k;\beta}, e_{j;\alpha})_{l_2} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} yP_{k;\beta}(x,y)\overline{P_{j;\alpha}(x,y)}d\rho(x,y), \tag{2.30}$$

де $\alpha = 0,1,\ldots,j, \ \beta = 0,1,\ldots,k$. З (2.11) маємо $yP_{k;\alpha}(x,y) \in \mathcal{P}_{k+1;\alpha}$. Згідно з (2.5) інтеграл в (2.30) дорівнює нулю для $j > k+1$ і для кожного $\alpha = 0,1,\ldots,j$.

З іншого боку, інтеграл у (2.30) має вигляд

$$\begin{aligned}(b^*)_{j,k;\alpha,\beta} &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} yP_{k;\beta}(x,y)\overline{P_{j;\alpha}(x,y)}\, d\rho(x,y) \\ &= \overline{\int\limits_{\mathbb{R}^2} yP_{j;\alpha}(x,y)\overline{P_{k;\beta}(x,y)}\, d\rho(x,y)} = \overline{b_{k,j;\beta,\alpha}},\end{aligned} \tag{2.31}$$

де $\alpha = 0, 1, \ldots, j$ і $\beta = 0, 1, \ldots, k$. З (2.11) маємо $yP_{j;\alpha}(x, y) \subset \mathcal{P}_{j+1,\alpha}$. Відповідно до (2.5) інтеграл (2.31) дорівнює нулю для $k > j + 1$ для кожного $\alpha = 0, 1, ..., j$, $\beta = 0, 1, ..., k$.

У результаті інтеграл у (2.30), тобто коефіцієнти $b_{j,k;\alpha,\beta}$, $j, k \in \mathbb{N}_0$, дорівнюють нулю для $|j - k| > 1$; $\alpha = 0, 1, \ldots, j$, $\beta = 0, 1, \ldots, k$. (У попередніх міркуваннях необхідно брати до уваги, що $e_{0;0} = I^{-1}P_{0;0}(x, y)$, $P_{0;0}(x, y) = 1$). $\square$

Таким чином матриця $(b_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ оператора $\hat{B}$ має тридіагональну блочну структуру

$$\begin{bmatrix} b_{0,0} & b_{0,1} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ b_{1,0} & b_{1,1} & b_{1,2} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \tag{2.32}$$

Подальший аналіз виразів (2.30) дає можливість визначити нульові і ненульові елементи матриці $(b_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{j,k}$ в кожному випадку для $|j - k| \leq 1$. Використовуємо також властивості перестановок матричних індексів j, k, і α, β.

Лема 2.2.7 *Нехай* $(b_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ *– матричний оператор множення на* y *в* L_2, $b_{j,k} : \mathcal{H}_k \longrightarrow \mathcal{H}_j$; $b_{j,k} = (b_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{j,k}$ *– матриці операторів* $b_{j,k}$ *у відповідному ортонормованому базисі. Тоді* $\forall j \in \mathbb{N}_0$ *і*

$$\begin{aligned} &\forall\alpha = 0, 1, \ldots j \quad b_{j,j+1;\alpha,\alpha+1} = b_{j,j+1;\alpha,\alpha+2} = \cdots = b_{j,j+1;\alpha,j+1} = 0; \\ &\forall\beta = 0, 1, \ldots j \quad b_{j+1,j;\beta+1,\beta} = b_{j+1,j;\beta+2,\beta} = \cdots = b_{j+1,j;j+1,\beta} = 0. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Якщо розглядати всередині кожної діагоналі $\{x^0y^n, x^1y^{n-1}, x^2y^{n-2}, \ldots, x^ny^0\}$, інший порядок елементів, то тоді лема 2.2.7 не виконується, але також можна описати нульові елементи матриць $(b_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{j,k}$. Такі матриці $(b_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ мають також тридіагональну блочну структуру але мають нулі в інших місцях.

Доведення. Відповідно до (2.30) і (2.11) для $j \in \mathbb{N}_0$, $\forall\alpha = 0, 1, \ldots, j$ і $\forall\beta = 0, 1, \ldots, j$ маємо:

$$b_{j,j+1;\alpha,\beta} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} yP_{j+1,\beta}(x, y)\overline{P_{j;\alpha}(x, y)}\, d\rho(x, y) = \overline{\int\limits_{\mathbb{R}^2} yP_{j,\alpha}(x, y)\overline{P_{j+1;\beta}(x, y)}\, d\rho(x, y)},$$

де $yP_{j;\alpha}(x,y) \in \mathcal{P}_{j+1;\alpha}$. Але відповідно до (2.5) $P_{j+1;\beta}(x,y)$ ортогональний $\mathcal{P}_{j+1;\alpha}$ для $\beta > \alpha$ і, отже, останній інтеграл дорівнює нулю. Це дає перші рівності в (2.33).

Аналогічно з (2.30) і (2.11) для $j \in \mathbb{N}_0$, $\forall\alpha = 0,1,\ldots,j+1$ і $\forall\beta = 0,1,\ldots,j$ отримаємо

$$b_{j+1,j;\alpha,\beta} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} yP_{j,\beta}(x,y)\overline{P_{j+1;\alpha}(x,y)}\,d\rho(x,y),$$

де $yP_{j;\beta}(x,y) \in \mathcal{P}_{j+1;\beta}$. Але відповідно до (2.5) $P_{j+1;\alpha}(x,y)$ ортогональний $\mathcal{P}_{j+1;\beta}$, якщо $\alpha > \beta$ і, отже, останній інтеграл дорівнює нулю. Це дає другі рівності в (2.33). $\square$

Таким чином, після цих досліджень можна зробити висновок, що в (2.32) для $\forall j \in \mathbb{N}$ в правому куті кожної $((j+1)\times(j+2))$-матриці $b_{j,j+1}$ (починаючи з другої діагоналі) і в лівому куті кожної $((j+2)\times(j+1))$-матриці $b_{j+1,j}$ (починаючи з другої діагоналі) стоять нульові елементи. Беручи до уваги (2.14), можемо зробити висновок, що симетрична матриця оператора множення на y є мультидіагональною звичайною скалярною матрицею, тобто у звичайному базисі простору $\mathbf{l}_2$.

Лема 2.2.8 *Елементи*

$$b_{0,1;0,0}, b_{1,0;0,0}; \quad b_{j,j+1;\alpha,\alpha}, b_{j+1,j;\alpha,\alpha}; \quad j \in \mathbb{N}, \alpha = 0,1,\ldots j \tag{2.34}$$

матриці $(b_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ *з леми 2.2.7 є додатними.*

Доведення. Почнемо з дослідження $b_{1,0;0,0}$. Використовуючи (2.12) і позначаючи через $P'_{1;0}(x,y) = y - (y,1)_{L_2}$ ненормований вектор $P_{1;0}(x,y)$, отримаємо

$$\begin{aligned} b_{1,0;0,0} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} yP_{0;0}(x,y)\overline{P_{1;0}(x,y)}\,d\rho(x,y) &= \|P'_{1;0}(x,y)\|_{L_2}^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}^2} y\overline{(y-(y,1)_{L_2})}\,d\rho(x,y) \\ &= \|P'_{1;0}(x,y)\|_{L_2}^{-1}(\|y\|_{L_2}^2 - |(y,1)_{L_2}|^2), \end{aligned} \tag{2.35}$$

де $P_{0;0}(x,y) = 1$. Остання різниця додатня (див. (2.36)), тому $b_{1,0;0,0} > 0$. Елемент $b_{0,1;0,0}$ також додатній, оскільки матриця B симетрична, тобто $b_{1,0;0,0} = b_{0,1;0,0}$.

Додатність (2.35) випливає з рівності Парсеваля про розклад функції $y \in L_2$ за ортонормованим базисом (2.3) в просторі L_2:

$$|(y,1)_{L_2}|^2 + |(y, P_{1;0}(x,y))_{L_2}|^2 + |(y, P_{1;1}(x,y))_{L_2}|^2 + \cdots = \|y\|^2_{L_2}. \tag{2.36}$$

Перейдемо до доведення додатності $b_{j+1,j;\alpha,\alpha}$, де $j \in \mathbb{N}$, $\alpha = 0, 1, \ldots, j$. З (2.12) маємо:

$$b_{j+1,j;\alpha,\alpha} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} y P_{j;\alpha}(x,y)\overline{P_{j+1;\alpha}(x,y)}\, d\rho(x,y). \tag{2.37}$$

Відповідно до (2.3) і (2.5):

$$P_{j;\alpha}(x,y) = k_{j;\alpha} x^\alpha y^{j-\alpha} + R_{j;\alpha}(x,y), \tag{2.38}$$

де $R_{j;\alpha}(x,y)$ – деякий поліном з $\mathcal{P}_{j;\alpha-1}$, якщо $\alpha > 0$ або з $\mathcal{P}_{j-1;j-1}$, якщо $\alpha = 0$. Тому $yR_{j;\alpha}(x,y)$ – деякий поліном з $\mathcal{P}_{j+1;\alpha}$ або з $\mathcal{P}_{j;j-1}$ (див. (2.11) і (2.5)). Помноживши (2.38) на x, робимо висновок:

$$yP_{j;\alpha}(x,y) = k_{j;\alpha} x^\alpha y^{j-\alpha+1} + xR_{j;\alpha}(x,y), \tag{2.39}$$

де $yR_{j;\alpha}(x,y) \in \mathcal{P}_{j+1;\alpha-1}$ або $\mathcal{P}_{j;j-1} \subset \mathcal{P}_{j;j}$.

З іншого боку, рівність (2.38) для $P_{j+1;\alpha}(x,y)$ дає:

$$P_{j+1;\alpha}(x,y) = k_{j+1;\alpha} x^\alpha y^{j-\alpha+1} + R_{j+1;\alpha}(x,y), \tag{2.40}$$

де $R_{j+1;\alpha}(x,y) \in \mathcal{P}_{j+1;\alpha-1}$ або $\mathcal{P}_{j;j}$.

Знайдемо $x^\alpha y^{j-\alpha+1}$ з (2.40) і підставимо його в (2.39).Отримаємо:

$$\begin{aligned} yP_{j;\alpha}(x,y) &= \frac{k_{j;\alpha}}{k_{j+1;\alpha}}(P_{j+1;\alpha}(x,y) - R_{j+1;\alpha}(x,y)) + yR_{j;\alpha}(x,y) \\ &= \frac{k_{j;\alpha}}{k_{j+1;\alpha}} P_{j+1;\alpha}(x,y) - \frac{k_{j;\alpha}}{k_{j+1;\alpha}} R_{j+1;\alpha}(x,y) + yR_{j;\alpha(x,y)}(x,y), \end{aligned} \tag{2.41}$$

де обидва останні доданки $\mathcal{P}_{j+1;\alpha-1}$ або $\mathcal{P}_{j;j}$ завжди ортогональні до $P_{j+1;\alpha}(x,y)$. Тому, після підстановки виразу (2.41) в (2.37) отримаємо $b_{j+1,j;\alpha,\alpha} = \frac{k_{j;\alpha}}{k_{j+1;\alpha}} > 0$.

Оскільки матриця (2.14) симетрична, то елементи $b_{j,j+1;\alpha,\alpha+1} = b_{j+1,j;\alpha+1,\alpha}$ також позитивні, де $j \in \mathbb{N}$, $\alpha = 0, 1, \ldots, j$. $\square$

Перепозначимо:

$$
\begin{aligned}
u_n &= b_{n+1,n} &:&\quad \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}, \\
w_n &= b_{n,n} &:&\quad \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_n, \\
v_n &= b_{n,n+1} &:&\quad \mathcal{H}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{H}_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0.
\end{aligned}
\tag{2.42}
$$

Всі попередні дослідження підсумовуються в теоремі.

Теорема 2.2.9 *Обмежений самоспряжений оператор $\hat{B}$ множення на y у просторі L_2 в ортонормованому базисі (2.3) поліномів має вигляд тридіагональної симетричної матриці типу Якобі $J_B = (b_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$, який діє в просторі (2.6):*

$$
\mathbf{l}_2 = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \cdots, \quad \mathcal{H}_n = \mathbb{C}^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.43}
$$

Норми всіх операторів $b_{j,k} : \mathcal{H}_k \longrightarrow \mathcal{H}_j$ рівномірно обмежені по відношенню до $j, k \in \mathbb{N}_0$. У позначеннях (2.24), ця матриця має вигляд :

$$
J_B = \left[\begin{array}{cccccc}
w_0 & v_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
u_0 & w_1 & v_1 & 0 & 0 & \dots \\
0 & u_1 & w_2 & v_2 & 0 & \dots \\
0 & 0 & u_2 & w_3 & v_3 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}\right]
$$

$$
= \left[\begin{array}{c|cc|ccc|cccc|ccccc}
* & + & 0 & & & & & & & & & & & & \\
\hline
+ & * & * & + & 0 & 0 & & & & & & & & & \\
0 & * & * & * & + & 0 & & & & & & 0 & & & \\
\hline
 & + & * & * & * & * & + & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
 & 0 & + & * & * & * & * & + & 0 & 0 & & & & & \\
 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & + & 0 & & & & & \\
\hline
 & & & + & * & * & * & * & * & * & + & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & + & * & * & * & * & * & * & + & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & & 0 & 0 & + & * & * & * & * & * & * & + & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * & + & 0 \\
\hline
 & & & & \ddots & & & \ddots & & & & \ddots & & &
\end{array}\right]. \tag{2.44}
$$

В (2.44) $\forall n \in \mathbb{N}_0$ w_n є $((n+1)\times(n+1))$-матриця: $w_n = (w_{n;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{n,n}$, ($w_0 = w_{0;0,0}$ є скаляром); u_n є $((n+2)\times(n+1))$-матриця: $u_n = (u_{n;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{n+1,n}$; v_n є $((n+1)\times(n+2))$-матриця: $v_n = (v_{n;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{n,n+1}$. У матрицях u_n і v_n деякі елементи завжди дорівнюють нулю: $\forall n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} u_{n;\beta+1,\beta} &= u_{n;\beta+2,\beta} = \dots = u_{n;n+1,\beta} = 0, \quad \beta = 0,1,\dots,n; \\ v_{n;\alpha,\alpha+1} &= v_{n;\alpha,\alpha+2} = \dots = v_{n;\alpha,n+1} = 0, \quad \alpha = 0,1,\dots,n. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Деякі інші їх елементи додатні, а саме

$$u_{n;\alpha,\alpha}; v_{n;\alpha,\alpha} > 0, \quad \alpha = 0,1,\dots,n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.46}$$

Таким чином, можна говорити, що $\forall n \in \mathbb{N}_0$ кожен елемент в лівому куті матриці u_n (починаючи з другої діагоналі) і кожен елемент в правому куті матриці v_n (починаючи з другої діагоналі) є нульовим елементом. Всі позитивні елементи в (2.44) позначаються "+").

Таким чином, матриця (2.44) в скалярному вигляді є мультидіагональною у зазначеній структурі.

Симетрія оператора $(\hat{B})^* = \hat{B}$ дає

$$u_{n;\alpha,\beta} = v_{n;\beta,\alpha}, \quad \alpha = 0,1,2,...,n, \ \beta = \alpha,...,n, \ n \in \mathbb{N}.$$

Матриця J_B діє таким чином:

$$(J_B f)_n = u_{n-1} f_{n-1} + w_n f_n + v_n f_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad \forall f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathbf{l}_2, \tag{2.47}$$

де покладаємо $u_{-1} = 0$, $f_{-1} = 0$.

Обернена спектральна задача для блочних матриць відповідних двовимірній проблемі моментів наведена в [11].

2.3. Ортогоналізація двоіндексної послідовності відповідної сильній проблемі моментів

Нехай $d\rho(x,y)$ – ймовірнісна міра Бореля з компактним носієм на дійсній площині $\mathbb{R}^2$ і $L_2 = L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y))$ – простір інтегровних з квадратом функцій, визначених на $\mathbb{R}^2$. Вважаємо, що носій цієї міри – це компактна множина, яка містить не порожню відкриту підмножину. Тоді функції $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \longmapsto x^m y^n,\ m, n \in \mathbb{Z}$, є лінійно незалежні і утворюють щільну множину в L_2.

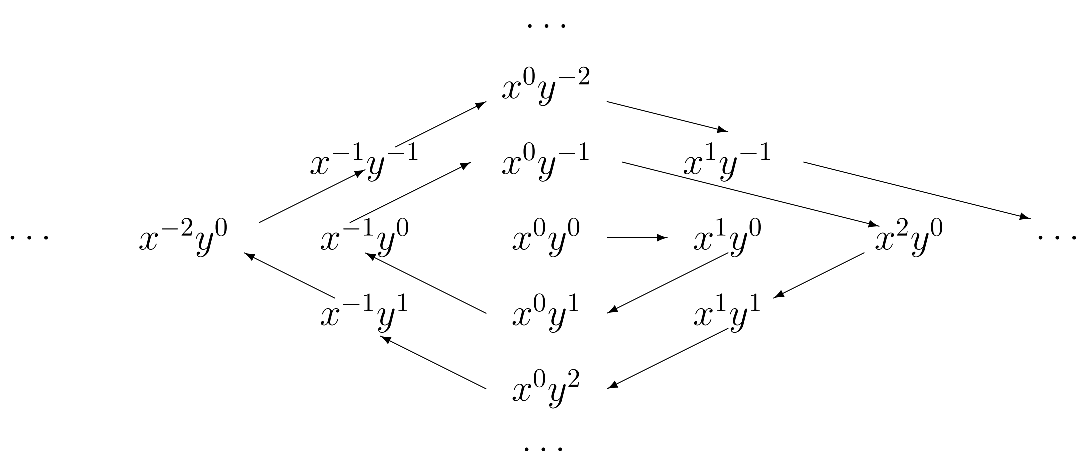
Розглянемо оператори множення (та їх обернені):

$$\hat{A}f(x,y) = xf(x,y), \qquad \hat{B}f(x,y) = yf(x,y)$$
$$\hat{A}^{-1}f(x,y) = x^{-1}f(x,y), \quad \hat{B}^{-1}f(x,y) = y^{-1}f(x,y)$$

в просторі L_2. Очевидно, що ці оператори обмежені і самоспряжені. Для знаходження матриць типу Якобі операторів $\hat{A}$ і $\hat{B}$ та $\hat{A}^{-1}$ і $\hat{B}^{-1}$ вибираємо деякий порядок ортогоналізації в L_2 для сімейства функцій:

$$\{x^m y^n\}, \quad m, n \in \mathbb{Z}. \tag{2.48}$$

Виберемо деякий порядок ортогоналізації для застосування процедури Шмідта (Мал. 2) (див. також, наприклад, [10, 33, 34]) .



Мал. 2 Порядок ортогоналізації

Отже, отримуємо:

$$\begin{aligned}
&1 = x^0y^0;\\
&x^1y^0, x^0y^1, x^{-1}y^0, x^0y^{-1};\\
&x^2y^0, x^1y^1, x^0y^2, x^{-1}y^1, x^{-2}y^0, x^{-1}y^{-1}, x^0y^{-2}, x^1y^{-1}; \ldots\\
&x^ny^0, x^{n-1}y^1, \ldots, x^1y^{n-1}, x^0y^n, x^{-1}y^{n-1}, \ldots, x^{-(n-1)}y^1,\\
&x^{-n}y^0, x^{-(n-1)}y^{-1}, \ldots, x^{-1}y^{-(n-1)}, x^0y^{-n}, x^1y^{-(n-1)}, x^{n-1}y^{-1}; \ldots
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Враховуючи послідовність функцій (2.49), ортогоналізуємо її відповідно до процедури Шмідта. В результаті отримаємо ортонормовану систему поліномів (кожен поліном за змінними $x^m y^n$, $m, n \in \mathbb{Z}$), яку позначимо таким чином:

$$\begin{aligned}
&1 = P_{0,0}(x,y);\\
&P_{1,0}(x,y),\ P_{1,1}(x,y),\ P_{1,2}(x,y),\ P_{1,3}(x,y);\\
&P_{2,0}(x,y),\ P_{2,1}(x,y),\ P_{2,2}(x,y),\ P_{2,3}(x,y), P_{2,4}(x,y),\ P_{2,5}(x,y),\ P_{2,6}(x,y),\ P_{2,7}(x,y);\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&P_{n,0}(x,y),\ P_{n,1}(x,y),\ P_{n,2}(x,y),\ \ldots\ , P_{n,4n-2}(x,y),\ P_{n,4n-1}(x,y);\ldots
\end{aligned} \tag{2.50}$$

де кожний поліном має вигляд

$$\begin{aligned}
&P_{n;\alpha}(x,y) = k_{n;\alpha} x^{n-\alpha} y^{\alpha} + \cdots, \alpha = 0, 1, \ldots, (n-1);\\
&P_{n;\alpha}(x,y) = k_{n;\alpha} x^{n-\alpha} y^{2n-\alpha} + \cdots, \alpha = n, n+1, \ldots, (3n-1);\\
&P_{n;\alpha}(x,y) = k_{n;\alpha} x^{\alpha-3n} y^{2n-\alpha} + \cdots, \alpha = 2n, 2n+1, \ldots, (3n-1);\\
&P_{n;\alpha}(x,y) = k_{n;\alpha} x^{\alpha-3n} y^{\alpha-4n} + \cdots, \alpha = 3n, 3n+1, \ldots, (4n-1);
\end{aligned} \tag{2.51}$$

тут $k_{n;\alpha} > 0$ а $+\cdots$ позначимо наступну частину відповідного полінома; для зручності покладаємо $P_{0;0}(x,y) = 1$. Таким чином $P_{n;\alpha}$ – деякі лінійні комбінації елементів (2.50). Оскільки множина (2.48) є щільною в просторі L_2, то послідовність (2.49) – це ортонормований базис в цьому просторі.

Нехай підпростір $\mathcal{P}_{n;\alpha}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ утворений за (2.51). Очевидно, що $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}_{0;0} \subset \mathcal{P}_{1;0} \subset \mathcal{P}_{1;1} \subset \mathcal{P}_{1;2} \subset \mathcal{P}_{1;3} \subset \mathcal{P}_{2;0} \subset \cdots \subset \mathcal{P}_{n;0} \subset \mathcal{P}_{n;1} \subset \cdots \subset \mathcal{P}_{n;4n-1} \subset \cdots,\\
&\mathcal{P}_{n;\alpha} = \{P_{0;0}(x,y)\} \oplus \{P_{1;0}(x,y)\} \oplus \{P_{1;1}(x,y)\} \oplus \cdots\\
&\qquad \oplus \{P_{n;0}(x,y)\} \oplus \{P_{n;1}(x,y)\} \oplus \cdots \oplus \{P_{n;\alpha}(x,y)\},
\end{aligned} \tag{2.52}$$

де $\{P_{n;\alpha}(x,y)\}$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha = 0, 1, \ldots 4n-1$, позначимо одновимірний простір, утворений за $P_{n;\alpha}(x,y)$; $\mathcal{P}_{0;0} = \mathbb{R}$.

2.4. Дослідження блочної структури матриць типу Якобі відповідних сильній проблемі моментів

Для наступного дослідження потрібно замість звичайного простору l_2 ввести гільбертів простір

$$\mathbf{l}_2 = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \cdots, \quad \mathcal{H}_0 = \mathbb{C}, \quad \mathcal{H}_n = \mathbb{C}^{4n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.53}$$

Кожен вектор $f \in \mathbf{l}_2$ має вигляд $f = (f_n)_{n=0}^{\infty}$, $f_n \in \mathcal{H}_n$, і, отже:

$$\|f\|_{\mathbf{l}_2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\mathcal{H}_n}^2 < \infty, \quad (f,g)_{\mathbf{l}_2} = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n, g_n)_{\mathcal{H}_n}, \quad \forall f, g \in \mathbf{l}_2.$$

Для координат вектора $f_n \in \mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$ в деякому ортонормованому базисі $\{e_{n;0}$, $e_{n;1}$, $e_{n;2}$, $\ldots$, $e_{n;4n-1}\}$ в просторі $\mathbb{C}^{4n}$ позначимо через $(f_{n;0}, f_{n;1}, f_{n;2}, \ldots, f_{n;4n-1})$ і, отже, отримаємо $f_n = (f_{n;0}, f_{n;1}, f_{n;2}, \ldots, f_{n;4n-1})$.

Використовуючи ортонормовану систему (2.50), можна визначити відображення $\mathbf{l}_2$ з (2.53) у L_2. Покладемо $P_n(x,y) = (P_{n;0}, P_{n;1}(x,y), P_{n;2}(x,y), \ldots, P_{n;4n-1}) \in \mathcal{H}_n$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Тоді

$$\mathbf{l_2} \ni f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \longmapsto (If)(x,y) := \hat{f}(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n, P_n(x,y))_{\mathcal{H}_n} \in L_2. \tag{2.54}$$

Тому для $n \in \mathbb{N}$ отримаємо

$$(f_n, P_n(x,y))_{\mathcal{H}_n} = f_{n;0}\overline{P_{n;0}(x,y)} + f_{n;1}\overline{P_{n;1}(x,y)} + f_{n;2}\overline{P_{n;2}(x,y)} + \cdots + f_{n;n}\overline{P_{4n-1;n}(x,y)},$$

$$\|f\|_{\mathbf{l}_2}^2 = \|(f_{0;0}, f_{1;0}, f_{1;1}, f_{1;2}, f_{1;3}, f_{2;0}, \ldots, f_{n;0}, , f_{n;1}, \ldots, f_{n;4n-1}, \ldots)\|_{l_2}^2.$$

Тоді (2.54) – це відображення простору $\mathbf{l}_2$ в L_2, враховуючи щільність ортонормованої системи (2.50) а, отже, це відображення ізометричне. Відображення (2.54) переводить весь простір l_2 у весь простір L_2, бо система (2.50) – це ортонормований базис в L_2. Тому відображення (2.54) – це унітарне перетворення (позначається I), яке діє з $\mathbf{l}_2$ в L_2.

Нехай T – лінійний обмежений оператор, визначений на просторі $\mathbf{l}_2$ з (2.53). Тоді існує єдина послідовність $(\tau_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$, де для кожного $j, k \in \mathbb{N}_0$ елемент $\tau_{j,k}$ є оператором з $\mathcal{H}_k$ в $\mathcal{H}_j$ так, що

$$(Tf)_j = \sum_{k=0}^{\infty} \tau_{j,k} f_k, \ j \in \mathbb{N}_0, \quad (Tf,g)_{\mathbf{l}_2} = \sum_{j,k=0}^{\infty} (\tau_{j,k} f_k, g_j)_{\mathcal{H}_j}, \quad f,g \in \mathbf{l}_2. \tag{2.55}$$

Для доведення (2.8) потрібно тільки описати T в просторі $\mathbf{l}_2$ з (2.53), використовуючи базис

$$(e_{0;0};\ e_{1;0}, e_{1;1};\ e_{1;2}, e_{1;3}, e_{2;0};\ \ldots;\ e_{n;0}, e_{n;1}, \ldots, e_{n;4n-1};\ \ldots), \quad e_{0;0} = 1. \tag{2.56}$$

Тоді $\tau_{j,k}$ є оператором $\mathcal{H}_k \longrightarrow \mathcal{H}_j$ для кожного $j,k \in \mathbb{N}_0$. Оператор має матричний вигляд

$$\tau_{j,k;\alpha,\beta} = (Te_{k;\beta}, e_{j;\alpha})_{\mathbf{l}_2}, \tag{2.57}$$

при $\alpha = 0,1,\ldots,j$ і $\beta = 0,1,\ldots,k$. Перепишемо $\tau_{j,k} = (\tau_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{j,k}$, включаючи випадки: $\tau_{0,k} = (\tau_{0,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{0,k}$, $\tau_{j,0} = (\tau_{j,0;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{j,0}$ і $\tau_{0,0} = (\tau_{0,0;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{0,0} = \tau_{0,0;0,0}$.

Варто зауважити, що в зображенні (2.55) це правильно і для загального оператора T в просторі $\mathbf{l}_2$ з областю визначення $\mathrm{Dom}(T) = \mathbf{l}_{\mathrm{fin}} \subset \mathbf{l}_2$, де $\mathbf{l}_{\mathrm{fin}}$ позначає фінітні вектори $\mathbf{l}_2$. У цьому випадку перша формула з (2.55) виконується для $f \in \mathbf{l}_{\mathrm{fin}}$; друга формула – для $f \in \mathbf{l}_{\mathrm{fin}}$, $g \in \mathbf{l}_2$.

Розглянемо зображення $\hat{T} = ITI^{-1} : L_2 \longrightarrow L_2$ обмеженого оператора $T : \mathbf{l}_2 \longrightarrow \mathbf{l}_2$ з відображенням (2.54). Ця матриця в базисі (2.50):

$$P_{0;0}(x,y);\ P_{1;0}(x,y), P_{1;1}(x,y);\ P_{1;2}(x,y), P_{1,3}(x,y), P_{2,0}(x,y);\ \ldots;$$
$$P_{n;0}(x,y), P_{n;1}(x,y), \ldots, P_{n;4n-1}(x,y); \ldots,$$

дорівнює звичайній матриці оператора T, яка розуміється як оператор: $\mathbf{l}_2 \longrightarrow \mathbf{l}_2$ у відповідному базисі (2.56). Використовуючи (2.57) і згадану вище процедуру, отримаємо матричний оператор $(\tau_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ $T : \mathbf{l}_2 \longrightarrow \mathbf{l}_2$. За визначенням ця матриця також є матричним оператором $\hat{T} : L_2 \longrightarrow L_2$.

Дослідження блочної структури матриці типу Якобі відповідної змінній x

Очевидно, що $\hat{T}$ може бути довільним лінійним обмеженим оператором L_2. Розглянемо T замість $\hat{T}$, і в якості T візьмемо A і B та A^{-1} і B^{-1} відповідних матрицям J_A і J_B та $J_{A^{-1}}$ і $J_{B^{-1}}$.

Лема 2.4.1 *Для поліномів $P_{n;\alpha}(x,y)$, і підпросторів $\mathcal{P}_{m,\beta}$, $n,m\in\mathbb{N}_0$, $\alpha=0,1,\dots,4n-1$, $\beta=0,1,\dots,4n-1$, виконуються співвідношення:*

$$\begin{aligned} &xP_{n;\alpha}(x,y)\in\mathcal{P}_{n+1;\alpha}, \quad \alpha=1,\dots,n;\\ &xP_{n;\alpha}(x,y)\in\mathcal{P}_{n+1;n}, \quad \alpha=n,n+1,\dots,(3n-1);\\ &xP_{n;\alpha}(x,y)\in\mathcal{P}_{n+1;\alpha+4}, \quad \alpha=3n,3n+1,\dots,(4n-1); \end{aligned} \tag{2.58}$$

Доведення. Відповідно до (2.50) поліном $P_{n;\alpha}(x,y)$, $n\in\mathbb{N}_0$, утворений лінійною комбінацією (2.51). Помноживши її на x, отримаємо лінійну комбінацію:

$$\begin{aligned} &xP_{n;\alpha}(x,y)=k_{n;\alpha}x^{n-\alpha+1}y^{\alpha}+\cdots,\alpha=0,1,\dots,(n-1);\\ &xP_{n;\alpha}(x,y)=k_{n;\alpha}x^{n-\alpha+1}y^{2n-\alpha}+\cdots,\alpha=n,n+1,\dots,(3n-1);\\ &xP_{n;\alpha}(x,y)=k_{n;\alpha}x^{\alpha-3n+1}y^{2n-\alpha}+\cdots,\alpha=2n,2n+1,\dots,(3n-1);\\ &xP_{n;\alpha}(x,y)=k_{n;\alpha}x^{\alpha-3n+1}y^{\alpha-4n}+\cdots,\alpha=3n,3n+1,\dots,(4n-1); \end{aligned}$$

Тоді матимемо:

$$\begin{aligned} &xP_{n;\alpha}(x,y)\in\mathcal{P}_{n+1;\alpha}, \quad \alpha=1,\dots,(n-1);\\ &xP_{n;\alpha}(x,y)\in\mathcal{P}_{n+1;n}, \quad \alpha=n,n+1,\dots,(2n-1);\\ &xP_{n;\alpha}(x,y)\in\mathcal{P}_{n+1;n}, \quad \alpha=2n,2n+1,\dots,(3n-1);\\ &xP_{n;\alpha}(x,y)\in\mathcal{P}_{n+1;\alpha+4}, \quad \alpha=3n,3n+1,\dots,(4n-1). \end{aligned}$$

Приєднавши n-ий поліном у перше вкладення і об'єднавши друге і третє вкладення, отримаємо (2.58). □

Лема 2.4.2 *Нехай $\hat{A}$ є оператором множення на x в просторі L_2:*

$$L_2\ni\varphi(x,y)\longmapsto(\hat{A}\varphi)(x,y)=x\varphi(x,y)\in L_2.$$

(Очевидно, що $\hat{A}$ – самоспряжений і обмежений). Матриця $\hat{A}=(a_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ в базисі (2.50) (тобто $A=I^{-1}\hat{A}I$) має тридіагональну структуру: $a_{j,k}=0$ для $|j-k|>1$.

Доведення. Використаємо (2.57) для $e_{n;\gamma}=I^{-1}P_{n;\gamma}(x,y)$, $n\in\mathbb{N}$; $\gamma=0,1,\dots,4n-1$ і отримаємо $\forall j,k\in\mathbb{N}_0$

$$a_{j,k;\alpha,\beta}=(Ae_{k;\beta},e_{j;\alpha})_{l_2}=\int\limits_{\mathbb{R}^2}xP_{k;\beta}(x,y)\overline{P_{j;\alpha}(x,y)}d\rho(x,y), \tag{2.59}$$

де $\alpha = 0, 1, \ldots, 4j-1$, $\beta = 0, 1, \ldots, 4k-1$. Згідно з (2.52) і (2.58) інтеграл в (2.59) дорівнює нулю для $j > k+1$ для кожного $\beta = 0, 1, \ldots, 4j-1$.

З іншого боку, інтеграл у (2.59) має вигляд

$$(a^*)_{j,k;\alpha,\beta} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} xP_{k;\beta}(x,y)\overline{P_{j;\alpha}(x,y)}\, d\rho(x,y) =$$

$$\overline{\int\limits_{\mathbb{R}^2} xP_{j;\alpha}(x,y)\overline{P_{k;\beta}(x,y)}\, d\rho(x,y)} = \overline{a_{k,j;\beta,\alpha}}, \quad (2.60)$$

де $\alpha = 0, 1, \ldots, 4j-1$ і $\beta = 0, 1, \ldots, 4k+3$. Оскільки оператор $\hat{A}$ симетричний, з (2.58) маємо, що останній інтеграл дорівнює нулю для $k > j+1$ і для кожного $\alpha = 0, 1, \ldots, 4j-1$, $\beta = 0, 1, \ldots, 4k+3$.

У результаті інтеграл (2.59), тобто коефіцієнти $a_{j,k;\alpha,\beta}$, $j, k \in \mathbb{N}_0$, дорівнюють нулю для $|j-k| > 1$; $\alpha = 0, 1, \ldots, 4j-1$, $\beta = 0, 1, \ldots, 4k-1$ (у попередніх міркуваннях необхідно брати до уваги, що $P_{0;0}(x,y) = 1$). $\square$

Таким чином матриця $(a_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ оператора $\hat{A}$ має тридіагональну блочну структуру

$$\begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \quad (2.61)$$

Подальший аналіз виразів (2.59) дає можливість виявити нульові і ненульові елементи матриці $(a_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{j,k}$ в кожному випадку для $|j-k| \leq 1$. Використовуємо також властивості перестановок матричних індексів j, k, і α, β.

Лема 2.4.3 *Нехай $(a_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ – матричний оператор множення на x в L_2, де $a_{j,k} : \mathcal{H}_k \longrightarrow \mathcal{H}_j$; $a_{j,k} = (a_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{j,k}$ є матрицями операторів $a_{j,k}$ у відповідному ортонормованому базисі. Тоді $\forall j \in \mathbb{N}_0$,*

$$\begin{aligned} &a_{j,j+1;\alpha,\alpha+1} = a_{j,j+1;\alpha,\alpha+2} = \cdots = a_{j,j+1;\alpha,j-1} = 0, \quad \forall \alpha = 0, 1, \ldots, j-1; \\ &a_{j+1,j;\alpha,\beta} = 0, \quad \alpha = 0, 1, \ldots 3j-2, \beta = j+1, j+2, \cdots, 4j+3; \\ &a_{j,j+1;\alpha,\alpha+4} = a_{j,j+1;\alpha,\alpha+5} = \cdots = a_{j,j+1;\alpha,4j+3} = 0, \quad \forall \alpha = 3j-1, \ldots, 4j-2. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Доведення. Відповідно до (2.59) і (2.58) для $j \in \mathbb{N}_0$, $\forall \alpha = 0, 1, \ldots, 4j-1$ і $\forall \beta = 0, 1, \ldots, 4j+3$ маємо:

$$a_{j,j+1;\alpha,\beta} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} x P_{j+1,\beta}(x,y) \overline{P_{j;\alpha}(x,y)}\, d\rho(x,y) = \overline{\int\limits_{\mathbb{R}^2} x P_{j,\alpha}(x,y) \overline{P_{j+1;\beta}(x,y)}\, d\rho(x,y)},$$

де $xP_{j;\alpha}(x,y)$ належить підпростору з (2.58). Завдяки цьому отримуємо рівності в (2.62). $\square$

Для $a_{j+1,j}$ можна скористатися симетрією оператора A: $a_{j,j+1;\alpha,\beta} = a_{j+1,j;\beta,\alpha}$, $j \in \mathbb{N}_0$, $\alpha = 0, 1, \ldots, 4n-1$, $\beta = 0, 1, \ldots, 4n+3$.

Лема 2.4.4 *Елементи*

$$\begin{aligned} &a_{j,j+1;0,0}, \quad a_{j,j+1;1,1}, \quad \ldots, \quad a_{j,j+1;j,j}; \\ &a_{j,j+1;3j-1,3j+3}, \quad a_{j,j+1;3j,3j+4}, \quad \ldots, \quad a_{j,j+1;4j-1,4j+3}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \end{aligned} \tag{2.63}$$

матриці $(a_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ *є додатніми.*

Доведення. Почнемо з дослідження $a_{0,1;0,0}$. Позначимо через $P'_{1;1}(x,y)$ ненормований вектор $P_{1;1}(x,y)$. Відповідно до (2.55) і (2.54), маємо: $P'_{1;0}(x,y) = x - (x,1)_{L_2}$.

Тому, використовуючи (2.59), отримаємо

$$\begin{aligned} a_{0,1;0,0} &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} x P_{0;0} P_{1;0}(x,y)\, d\rho(x,y) = \|P'_{1;0}(x,y)\|_{L_2}^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^2} x P'_{1;1}(x,y)\, d\rho(x,y) \\ &= \|P'_{1;0}(x,y)\|_{L_2}^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^2} x(x - (x,1)_{L_2})\, d\rho(x,y) = \|P'_{1;0}(x,y)\|_{L_2}^{-1} (\|x\|_{L_2}^2 - |(x,1)_{L_2}|^2), \end{aligned} \tag{2.64}$$

де $(1 = P_{0;0}(x,y))$.

Також, з (2.64), з'ясовуємо, що останній вираз додатній і, отже, $a_{0,1;0,0} > 0$. Оскільки оператор A симетричний, то $a_{0,1;0,0} = a_{1,0;0,0}$.

Додатність в (2.64) випливає з рівності Парсеваля про розклад функції $x \in L_2$ відносно ортонормованого базису (2.50) в просторі L_2:

$$|(x,1)_{L_2}|^2 + |(x, P_{1;0}(x,y))_{L_2}|^2 + |(x, P_{1;1}(x,y))_{L_2}|^2 + \cdots = \|x\|_{L_2}^2. \tag{2.65}$$

Розглянемо елементи $a_{j,j+1;\alpha,\alpha}$, де $j \in \mathbb{N}$, $\alpha = 0, 1, \ldots, j$. З (2.59) отримаємо

$$a_{j,j+1;\alpha,\alpha} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} xP_{j+1,\alpha+1}(x,y)\overline{P_{j;\alpha}(x,y)}\, d\rho(x,y)$$
$$= \overline{\int\limits_{\mathbb{R}^2} xP_{j,\alpha}(x,y)\overline{P_{j+1;\alpha+1}(x,y)}\, d\rho(x,y)}. \quad (2.66)$$

Для $P_{j;\alpha}(x,y)$ отримаємо відповідно до (2.50) і (2.52), $\alpha = 0, 1, \ldots, j$:

$$P_{j;\alpha}(x,y) = k_{j;\alpha}x^{j-\alpha}y^{\alpha} + R_{j;\alpha}(x,y), \quad (2.67)$$

де $R_{j;\alpha}(x,y)$ – деякий поліном з $\mathcal{P}_{j;\alpha-1}$, якщо $\alpha = 0, 1, \ldots, j$. Тому $xR_{j;\alpha}(x,y)$ – деякий поліном з $\mathcal{P}_{j-1;\alpha}$ (див. (2.58) і (2.52)). Помноживши його на x, отримаємо

$$xP_{j;\alpha}(x,y) = k_{j;\alpha}x^{j-\alpha+1}y^{\alpha} + xR_{j;\alpha}(x,y), \quad (2.68)$$

де $xR_{j;\alpha}(x,y) \in \mathcal{P}_{j+1;\alpha}$. З іншого боку, рівність типу (2.67) для індексів $j+1$ дає:

$$P_{j+1;\alpha}(x,y) = k_{j+1;\alpha}x^{j-\alpha+1}y^{\alpha} + R_{j+1;\alpha}(x,y), \quad (2.69)$$

де $R_{j+1;\alpha}(x,y) \in \mathcal{P}_{j;\alpha}$, якщо $\alpha = 0, 1, \ldots, j+1$.

Знайдемо $x^{j-\alpha+1}y^{\alpha}$ з (2.69) і підставимо його в (2.68). Отримаємо:

$$\begin{aligned} xP_{j;\alpha}(x,y) &= \frac{k_{j;\alpha}}{k_{j+1;\alpha}}(P_{j+1;\alpha}(x,y) - R_{j+1;\alpha}(x,y)) + xR_{j;\alpha}(x,y) \\ &= \frac{k_{j;\alpha}}{k_{j+1;\alpha}}P_{j+1;\alpha}(x,y) - \frac{k_{j;\alpha}}{k_{j+1;\alpha}}R_{j+1;\alpha}(x,y) + xR_{j;\alpha}(x,y). \end{aligned} \quad (2.70)$$

Другі два члени в (2.70) належать до $\mathcal{P}_{j;\alpha}$ та до $\mathcal{P}_{j+1;j}$ і в будь-якому разі, ортогональні до $P_{j+1;\alpha+1}(x,y)$.

Тому підстановка виразу (2.70) у (2.66) дає: $a_{j,j+1;\alpha,\alpha+1} = \frac{k_{j;\alpha}}{k_{j+1;\alpha+1}} > 0$. Оскільки матриця (2.61) є симетричною, то $a_{j,j+1;\alpha,\beta} = a_{j,j+1;\beta,\beta}$, $\alpha = 0, 1, \ldots, 4n-1$, $\beta = 0, 1, \ldots, 4n+3$.

Відповідні симетричні елементи матриці теж додатні. Аналогічним чином показуємо позитивність елементів другого рядка в (2.63). $\square$

Перепозначимо:

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_{n+1,n} &:\quad& \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}, \\
b_n &= a_{n,n} &:\quad& \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_n, \\
c_n &= a_{n,n+1} &:\quad& \mathcal{H}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{H}_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0.
\end{aligned}
\tag{2.71}
$$

Попередні дослідження зібрані у такій теоремі.

Теорема 2.4.5 *Обмежений самоспряжений оператор із циклічним вектором множення на незалежну змінну “x” в просторі $L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y))$ в ортонормованому базисі (2.50) має вигляд блочної тридіагональної матриці типу Якобі J_x, що діє у просторі (2.53):*

$$
J_x = \begin{bmatrix}
b_0 & c_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
a_0 & b_1 & c_1 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & a_1 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{bmatrix}, \qquad
\begin{aligned}
a_n &: \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}, \\
b_n &: \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_n, \\
c_n &: \mathcal{H}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{H}_n,
\end{aligned}
\tag{2.72}
$$

$n \in \mathbb{N}_0$, де $c_0 = \begin{bmatrix} c_{0;0,0} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

$$
c_n = \underbrace{\left.\left[\begin{array}{cccccccccc}
c_{n;0,0} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
* & c_{n;1,1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
* & * & \cdots & c_{n;n,n} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
* & * & \cdots & c_{n;n+1,n} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
* & * & \cdots & c_{n;3n-1,n} & \cdots & c_{n;3n-1,3n+3} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
* & * & \cdots & * & \cdots & * & c_{n;3n,3n+4} & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
* & * & \cdots & * & \cdots & * & * & \cdots & c_{n;4n,4n+2} & 0 \\
* & * & \cdots & * & \cdots & * & * & \cdots & * & c_{n;4n-1,4n+3}
\end{array}\right]\right\}{\scriptstyle 4n}}_{4n+4};
$$

b_n – симетрична $(4n \times 4n)$-матриця, $n \in \mathbb{N}$ (b_0 –скаляр). В $(4n+4) \times (4n)$-матриці c_n нульові елементи позначені “0”; додатні елементи – $c_{\cdot;\cdot,\cdot}$, (крім $c_{n;3n-1,n}$); “$*$” –

елементи, які можуть бути і нульовими і ненульовими. Матриця a_n симетрична до матриці c_n, $n \in \mathbb{N}_0$.

Матриця J_x діє на векторах $f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \in (\mathbf{l}_2)$ за правилом:

$$(J_x f)_n = a_{n-1} f_{n-1} + b_n f_n + c_n f_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.73}$$

де покладаємо $a_{-1} := 0$, $f_{-1} := 0$.

Дослідження блочної структури матриці типу Якобі відповідної змінній y

Дослідимо структуру матриці J_B, яка виникає при множенні відповідного оператора на змінну y.

Лема 2.4.6 *Для поліномів $P_{n;\alpha}(x, y)$, і підпросторів $\mathcal{P}_{m,\beta}$, $n, m \in \mathbb{N}_0$, $\alpha = 0, 1, \ldots, 4n-1$ виконуються співвідношення:*

$$\begin{aligned} &yP_{n;\alpha}(x, y) \in \mathcal{P}_{n+1;\alpha+1}, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, 2n; \\ &yP_{n;\alpha}(x, y) \in \mathcal{P}_{n+1;2n+1}, \quad \alpha = 2n+1, \ldots, 4n-1; \end{aligned} \tag{2.74}$$

Доведення. Відповідно до (2.50) поліном $P_{n;\alpha}(x, y)$, $n \in \mathbb{N}_0$, утворений лінійною комбінацією (2.51). Помноживши її на y, отримаємо лінійну комбінацію

$$\begin{aligned} yP_{n;\alpha}(x, y) &= k_{n;\alpha} x^{n-\alpha} y^{\alpha+1} + \cdots, \alpha = 0, 1, \ldots, (n-1); \\ yP_{n;\alpha}(x, y) &= k_{n;\alpha} x^{n-\alpha} y^{2n-\alpha+1} + \cdots, \alpha = n, n+1, \ldots, (3n-1); \\ yP_{n;\alpha}(x, y) &= k_{n;\alpha} x^{\alpha-3n} y^{2n-\alpha+1} + \cdots, \alpha = 2n, 2n+1, \ldots, (3n-1); \\ yP_{n;\alpha}(x, y) &= k_{n;\alpha} x^{\alpha-3n} y^{\alpha-4n+1} + \cdots, \alpha = 3n, 3n+1, \ldots, (4n-1). \end{aligned}$$

Тоді матимемо:

$$\begin{aligned} &yP_{n;\alpha}(x, y) \in \mathcal{P}_{n+1;\alpha+1}, \quad \alpha = 1, \ldots, n-1; \\ &yP_{n;\alpha}(x, y) \in \mathcal{P}_{n+1;\alpha+1}, \quad \alpha = n, n+1, \ldots, (2n-1); \\ &yP_{n;\alpha}(x, y) \in \mathcal{P}_{n+1;2n+1}, \quad \alpha = 2n, 2n+1, \ldots, (3n-1); \\ &yP_{n;\alpha}(x, y) \in \mathcal{P}_{n+1;2n+1}, \quad \alpha = 3n, 3n+1, \ldots, (4n-1). \end{aligned}$$

Поєднуючи перше, друге вкладення та $\alpha = 2n$ з третього, отримуємо перший рядок з (2.74). Решта є другим рядком з (2.74). $\square$

Лема 2.4.7 *Нехай $\hat{B}$ є оператором множення на y в просторі L_2:*

$$L_2 \ni \varphi(x,y) \longmapsto (\hat{B}\varphi)(x,y) = y\varphi(x,y) \in L_2.$$

(Очевидно, що $\hat{B}$ – самоспряжений і обмежений). Матриця $\hat{B} = (b_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ в базисі (2.50) (тобто $B = I^{-1}\hat{B}I$) має тридіагональну структуру: $b_{j,k} = 0$ для $|j-k| > 1$.

Доведення. Використаємо (2.57) для $e_{0;0} = I^{-1}P_{0;0}(x,y)$ та $e_{n;\gamma} = I^{-1}P_{n;\gamma}(x,y)$, $n \in \mathbb{N}$; $\gamma = 0,1,\ldots,4n-1$ і отримаємо $\forall j,k \in \mathbb{N}_0$

$$u_{j,k;\alpha,\beta} = (Be_{k;\beta}, e_{j;\alpha})_{l_2} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} yP_{k;\beta}(x,y)\overline{P_{j;\alpha}(x,y)}d\rho(x,y), \tag{2.75}$$

де $\alpha = 0,1,\ldots,4j-1,\ \beta = 0,1,\ldots,4k+3$. Згідно з (2.52) і (2.58) інтеграл в (2.75) дорівнює нулю для $j > k+1$ для кожного $\beta = 0,1,\ldots,4j-1$.

З іншого боку, інтеграл у (2.75) має вигляд

$$(u^*)_{j,k;\alpha,\beta} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} yP_{k;\beta}(x,y)\overline{P_{j;\alpha}(x,y)}\,d\rho(x,y) =$$

$$\overline{\int\limits_{\mathbb{R}^2} yP_{j;\alpha}(x,y)\overline{P_{k;\beta}(x,y)}\,d\rho(x,y)} = \overline{u_{k,j;\beta,\alpha}}, \tag{2.76}$$

де $\alpha = 0,1,\ldots,4j-1$ і $\beta = 0,1,\ldots,4k+3$. Оскільки оператор $\hat{B}$ симетричний, з (2.58) маємо, що останній інтеграл дорівнює нулю для $k > j+1$ і для кожного $\alpha = 0,1,\ldots,4j-1$, $\beta = 0,1,\ldots,4k+3$.

У результаті інтеграл (2.75), тобто коефіцієнти $u_{j,k;\alpha,\beta}$, $j,k \in \mathbb{N}$, дорівнюють нулю для $|j-k| > 1$; $\alpha = 0,1,\ldots,4j-1$, $\beta = 0,1,\ldots,4k-1$. (У попередніх міркуваннях необхідно брати до уваги, що $P_{0;0}(x,y) = 1$). $\square$

Таким чином матриця $(u_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ оператора $\hat{B}$ має тридіагональну блочну структуру

$$\begin{bmatrix} u_{0,0} & u_{0,1} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ u_{1,0} & u_{1,1} & u_{1,2} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \tag{2.77}$$

Подальший аналіз виразів (2.75) дає можливість виявити нульові і ненульові елементи матриці $(u_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{j,k}$ в кожному випадку для $|j-k| \le 1$. Використовуємо також властивості перестановок матричних індексів j,k, і α,β.

Лема 2.4.8 *Нехай $(u_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ – матричний оператор множення на y в L_2, де $u_{j,k} : \mathcal{H}_k \longrightarrow \mathcal{H}_j$; $u_{j,k} = (u_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{j,k}$ є матрицями операторів $u_{j,k}$ у відповідному ортонормованому базисі. Тоді $\forall j \in \mathbb{N}_0$,*

$$\begin{aligned} &u_{j,j+1;\alpha,\alpha+2} = u_{j,j+1;\alpha,\alpha+3} = \cdots = u_{j,j+1;\alpha,4j+3} = 0, \forall\alpha = 0,1,\ldots,2j-1 \\ &u_{j+1,j;\alpha,\beta} = 0, \forall\alpha = 2j,\ldots,4j-1, \forall\beta = 2j+1,\ldots,4j+3. \end{aligned} \tag{2.78}$$

Доведення. Відповідно до (2.74) і (2.75) для $j \in \mathbb{N}$, $\forall\alpha = 0,1,\ldots,4j-1$ і $\forall\beta = 0,1,\ldots,4j+3$ маємо:

$$u_{j,j+1;\alpha,\beta} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} yP_{j+1,\beta}(x,y)\overline{P_{j;\alpha}(x,y)}\,d\rho(x,y) = \overline{\int\limits_{\mathbb{R}^2} yP_{j,\alpha}(x,y)\overline{P_{j+1;\beta}(x,y)}\,d\rho(x,y)},$$

де $yP_{j;\alpha}(x,y)$ належить підпростору з (2.75).Отже, отримуємо рівності в (2.78). $\square$

Для $u_{j+1,j}$ можна скористатися симетрією оператора B: $u_{j,j+1;\alpha,\beta} = u_{j+1,j;\beta,\alpha}$, $j \in \mathbb{N}_0$, $\alpha = 0,1,\ldots,4j-1$ і $\beta = 0,1,\ldots,4j+3$.

Лема 2.4.9 *Елементи*

$$u_{j,j+1;0,1}, \quad u_{j,j+1;1,2}, \quad \ldots, \quad u_{j,j+1;2j+1,2j+2}, \quad j \in \mathbb{N}, \tag{2.79}$$

матриці $(u_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ є додатніми.

Доведення. Почнемо з дослідження $u_{0,1;0,1}$. Позначимо через $P'_{1;1}(x,y)$ ненормований вектор $P_{1;1}(x,y)$. Відповідно до (2.55) і (2.54), маємо:

$$P'_{1;1}(x,y) = y - (y, P_{1;0}(x,y))_{L_2} P_{1;0}(x,y) - (y,1)_{L_2}.$$

Тому, використовуючи (2.75), отримаємо

$$\begin{aligned} u_{0,1;0,1} &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} yP_{0;0}P_{1;1}(x,y)\,d\rho(x,y) = \|P'_{1;1}(x,y)\|_{L_2}^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^2} yP'_{1;1}(x,y)\,d\rho(x,y) \\ &= \|P'_{1;1}(x,y)\|_{L_2}^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^2} y(x - (y, P_{1;0}(x,y))_{L_2} P_{1;0}(x,y) - (y,1)_{L_2})\,d\rho(x,y) \\ &= \|P'_{1;1}(x,y)\|_{L_2}^{-1} (\|y\|_{L_2}^2 - |(y, P_{1;0}(x,y))_{L_2}|^2 - |(y,1)_{L_2}|^2), \end{aligned} \tag{2.80}$$

де $(1 = P_{0;0}(x,y))$.

Також, з (2.80) з'ясовуємо, що останній вираз додатній і, отже, $u_{0,1;0,1} > 0$. Оскільки оператор B симетричний, то $u_{0,1;0,1} = u_{1,0;1,0}$.

Додатність в (2.80) випливає з рівності Парсеваля про розклад функції $y \in L_2$ відносно ортонормованого базису (2.50) в просторі L_2:

$$|(y,1)_{L_2}|^2 + |(y, P_{1;0}(x,y))_{L_2}|^2 + |(y, P_{1;1}(x,y))_{L_2}|^2 + \cdots = \|y\|^2_{L_2}. \tag{2.81}$$

Розглянемо елементи $u_{j,j+1;\alpha,\alpha+1}$, де $j \in \mathbb{N}$, $\alpha = 0, 1, \ldots, 2j+1$. З (2.75) отримаємо

$$\begin{aligned} u_{j,j+1;\alpha,\alpha+1} &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} y P_{j+1,\alpha+1}(x,y)\overline{P_{j;\alpha}(x,y)}\, d\rho(x,y) \\ &= \overline{\int\limits_{\mathbb{R}^2} y P_{j,\alpha}(x,y)\overline{P_{j+1;\alpha+1}(x,y)}\, d\rho(x,y)}. \end{aligned} \tag{2.82}$$

Для $P_{j;\alpha}(x,y)$ отримаємо відповідно до (2.50) і (2.52), $\alpha = 0, 1, \ldots, 2j+1$:

$$P_{j;\alpha}(x,y) = k_{j;\alpha} x^{j-\alpha} y^{\alpha} + R_{j;\alpha}(x,y), \tag{2.83}$$

де $R_{j;\alpha}(x,y)$ – деякий поліном з $\mathcal{P}_{j;\alpha-1}$ (див. (2.58) і (2.52)). Помноживши $P_{j;\alpha}(x,y)$ на y, отримаємо

$$y P_{j;\alpha}(x,y) = k_{j;\alpha} x^{j-\alpha} y^{\alpha+1} + y R_{j;\alpha}(x,y), \tag{2.84}$$

де $y R_{j;\alpha}(x,y) \in \mathcal{P}_{j+1;\alpha+1}$. З іншого боку, рівність (2.83) для $P_{j+1,\alpha+1}(x,y)$ дає:

$$P_{j+1;\alpha+1}(x,y) = k_{j+1;\alpha} x^{j-\alpha} y^{\alpha+1} + R_{j+1;\alpha+1}(x,y), \tag{2.85}$$

де $R_{j+1;\alpha+1}(x,y) \in \mathcal{P}_{j+1;\alpha+1}$.

Знайдемо $x^{j-\alpha} y^{\alpha+1}$ з (2.85) і підставимо його в (2.84). Отримаємо:

$$\begin{aligned} y P_{j;\alpha}(x,y) &= \frac{k_{j;\alpha}}{k_{j+1;\alpha}} (P_{j+1;\alpha}(x,y) - R_{j+1;\alpha+1}(x,y)) + y R_{j;\alpha}(x,y) \\ &= \frac{k_{j;\alpha}}{k_{j+1;\alpha}} P_{j+1;\alpha}(x,y) - \frac{k_{j;\alpha}}{k_{j+1;\alpha}} R_{j+1;\alpha+1}(x,y) + y R_{j;\alpha}(x,y). \end{aligned} \tag{2.86}$$

Другі два члени в (2.86) належать до $\mathcal{P}_{j+1;\alpha}$ і ортогональні до $P_{j+1;\alpha+1}(x,y)$.

Тому підстановка виразу (2.86) у (2.82) дає: $u_{j,j+1;\alpha,\alpha+1} = \frac{k_{j;\alpha}}{k_{j+1;\alpha+1}} > 0$. Оскільки матриця (2.77) є симетричною, то елементи $u_{j,j+1;\alpha,\alpha+1} = u_{j,j+1;\alpha,\alpha+1}$ також додатні $j \in \mathbb{N}$, $\alpha = 0, 1, \ldots, 2j+1$. $\square$

Перепозначимо:

$$\begin{aligned} u_n = u_{n+1,n} \quad &: \quad \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}, \\ w_n = u_{n,n} \quad &: \quad \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_n, \\ v_n = u_{n,n+1} \quad &: \quad \mathcal{H}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{H}_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \tag{2.87}$$

Попередні дослідження узагальнені в такій теоремі.

Теорема 2.4.10 *Обмежений самоспряжений оператор із циклічним вектором множення на незалежну змінну "y" в просторі $L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y))$ в ортонормованому базисі (2.50) має вигляд блочної тридіагональної матриці типу Якобі, що діє у просторі (2.53):*

$$J_y = \begin{bmatrix} w_0 & u_0 & 0 & 0 & \cdots \\ v_0 & w_1 & u_1 & 0 & \cdots \\ 0 & v_1 & w_2 & u_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} v_n &: \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}, \\ w_n &: \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_n, \\ u_n &: \mathcal{H}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{H}_n, \end{aligned} \tag{2.88}$$

$n \in \mathbb{N}_0$, де $u_0 = \begin{bmatrix} * & u_{0;0,1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

$$u_n = \underbrace{\left.\begin{bmatrix} u_{n;0,0} & u_{n;0,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & u_{n;1,2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & u_{n;2n-2,2n} & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ * & * & * & * & \vdots & u_{n;2n-1,2n+1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & * & \vdots & u_{n;4n-1,2n+1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\right\}4n}_{4n+4},$$

u_n – $(4n+4)\times(4n)$-матриця, де нульові елементи позначені "0"; додатні елементи – $u_{\cdot;\cdot,\cdot}$ (крім $u_{n;0,0}$); "$*$" – елементи, які можуть бути і нульовими і ненульовими;

w_n – симетрична $(4n\times 4n)$-матриця, $n\in\mathbb{N}$ (w_0 – скаляр). Матриця v_n симетрична до матриці u_n, $n\in\mathbb{N}_0$.

Матриця J_y діє на векторах $f=(f_n)_{n=0}^{\infty}\in(\mathbf{l}_2)$ за правилом:

$$(J_y f)_n = v_{n-1}f_{n-1}+w_n f_n+u_n f_{n+1},\quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.89}$$

де покладаємо $v_{-1}:=0$, $f_{-1}:=0$.

Дослідження блочної структури матриці типу Якобі відповідної змінній x^{-1}

Дослідимо структуру матриці $J_{A^{-1}}$, яка виникає при розгляді оператора множення на змінну x^{-1}. Розглянемо замість оператора $\hat{T}$ оператор A^{-1} відповідної матриці $J_{A^{-1}}$.

Лема 2.4.11 *Для поліномів $P_{n;\alpha}(x,y)$, і підпросторів $\mathcal{P}_{m,\beta}$, $n,m\in\mathbb{N}_0$, $\alpha=0,1,\ldots,4n-1$, $\beta=0,1,\ldots,4n-1$, виконуються співвідношення:*

$$\begin{aligned} &x^{-1}P_{n;\alpha}(x,y)\in\mathcal{P}_{n;3n-1},\quad \alpha=0,1,\ldots,n-1;\\ &x^{-1}P_{n;\alpha}(x,y)\in\mathcal{P}_{n+1;\alpha+2},\quad \alpha=n,n+1,\ldots,3n;\\ &x^{-1}P_{n;\alpha}(x,y)\in\mathcal{P}_{n+1;3n+2},\quad \alpha=3n+1,\ldots,4n-1.\end{aligned} \tag{2.90}$$

Доведення. Відповідно до (2.50) поліном $P_{n;\alpha}(x,y)$, $n\in\mathbb{N}_0$, утворений лінійною комбінацією (2.51). Отже, помноживши її на x^{-1}, отримаємо лінійну комбінацію

$$\begin{aligned} &x^{-1}P_{n;\alpha}(x,y)=k_{n;\alpha}x^{n-\alpha-1}y^{\alpha}+\cdots,\alpha=0,1,\ldots,(n-1);\\ &x^{-1}P_{n;\alpha}(x,y)=k_{n;\alpha}x^{n-\alpha-1}y^{2n-\alpha}+\cdots,\alpha=n,n+1,\ldots,(3n-1);\\ &x^{-1}P_{n;\alpha}(x,y)=k_{n;\alpha}x^{\alpha-3n-1}y^{2n-\alpha}+\cdots,\alpha=2n,2n+1,\ldots,(3n-1);\\ &x^{-1}P_{n;\alpha}(x,y)=k_{n;\alpha}x^{\alpha-3n-1}y^{\alpha-4n}+\cdots,\alpha=3n,3n+1,\ldots,(4n-1).\end{aligned} \tag{2.91}$$

Поєднуючи в (2.91) другий і третій рядки та перший елемент четвертого рядка отримуємо (2.90). □

Лема 2.4.12 *Нехай $\hat{A}^{-1}$ є оператором множення x^{-1} в просторі L_2:*

$$L_2\ni\varphi(x,y)\longmapsto(\hat{A}^{-1}\varphi)(x,y)=x^{-1}\varphi(x,y)\in L_2.$$

(Очевидно, що $\hat{A}^{-1}$ – самоспряжений і обмежений). Матриця $\hat{A}^{-1} = (p_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ в базисі (2.50) (тобто $A^{-1} = I^{-1}\hat{A}^{-1}I$) має тридіагональну структуру: $p_{j,k} = 0$ для $|j-k| > 1$.

Доведення. Використовуючи (2.57) для $e_{0;0} = I^{-1}P_{0;0}(x,y)$ і $e_{n;\gamma} = I^{-1}P_{n;\gamma}(x,y)$, $n \in \mathbb{N}$; $\gamma = 0, 1, \ldots, 4n-1$, отримаємо $\forall j,k \in \mathbb{N}_0$

$$p_{j,k;\alpha,\beta} = (A^{-1}e_{k;\beta}, e_{j;\alpha})_{l_2} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} x^{-1}P_{k;\beta}(x,y)\overline{P_{j;\alpha}(x,y)}d\rho(x,y), \tag{2.92}$$

де $\alpha = 0, 1, \ldots, 4j-1$, $\beta = 0, 1, \ldots, 4k+3$. Згідно з (2.52) і (2.90) інтеграл в (2.92) дорівнює нулю для $j > k+1$ для кожного $\alpha = 0, 1, \ldots, 4j-1$, $\beta = 0, 1, \ldots, 4k+3$.

З іншого боку, інтеграл у (2.92) має вигляд

$$(p^*)_{j,k;\alpha,\beta} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} x^{-1}P_{k;\beta}(x,y)\overline{P_{j;\alpha}(x,y)}\,d\rho(x,y) =$$

$$\overline{\int\limits_{\mathbb{R}^2} x^{-1}P_{j;\alpha}(x,y)\overline{P_{k;\beta}(x,y)}\,d\rho(x,y)} = \overline{p_{k,j;\beta,\alpha}}, \tag{2.93}$$

де $\alpha = 0, 1, \ldots, 4j-1$ і $\beta = 0, 1, \ldots, 4k+3$. Оскільки оператор $\hat{A}^{-1}$ симетричний, з (2.90) маємо, що останній інтеграл дорівнює нулю для $k > j+1$ і для кожного $\alpha = 0, 1, \ldots, 4k-1$, $\beta = 0, 1, \ldots, 4k+3$.

У результаті інтеграл (2.92), тобто коефіцієнти $p_{j,k;\alpha,\beta}$, $j,k \in \mathbb{N}$, дорівнюють нулю для $|j-k| > 1$; $\alpha = 0, 1, \ldots, 4j-1$, $\beta = 0, 1, \ldots, 4k+3$. (У попередніх міркуваннях необхідно брати до уваги, що $e_{0;0} = I^{-1}P_{0;0}(x,y)$, $P_{0;0}(x,y) = 1$). ☐

Таким чином матриця $(p_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ оператора $\hat{A}^{-1}$ має тридіагональну блочну структуру

$$\begin{bmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ p_{1,0} & p_{1,1} & p_{1,2} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \tag{2.94}$$

Подальший аналіз виразів (2.92) дає можливість виявити нульові і ненульові елементи матриці $(p_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{j,k}$ в кожному випадку для $|j-k| \leq 1$. Використовуємо також властивості перестановок матричних індексів j, k, і α, β.

Лема 2.4.13 *Нехай* $(p_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ *– матричний оператор множення на* x^{-1} *в* L_2*, де* $p_{j,k} : \mathcal{H}_k \longrightarrow \mathcal{H}_j$*;* $p_{j,k} = (p_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{j,k}$ *є матрицями операторів* $p_{j,k}$ *у відповідному ортонормованому базисі. Тоді* $\forall j \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned} &p_{j,j+1;\alpha,\beta} = 0, \quad \forall\alpha = 0,1,\dots,j-1, \quad \forall\beta = 0,1,\dots,4j-1;\\ &p_{j,j+1;\alpha,\alpha+1} = \dots = p_{j,j+1;\alpha,4j-1} = 0, \quad \forall\alpha = j, j+1,\dots,3j;\\ &p_{j,j+1;\alpha,\beta} = 0, \quad \forall\alpha = 3j+1,\dots,4j-1, \quad \forall\beta = 3j+3,\dots,4j+3. \end{aligned} \tag{2.95}$$

Доведення. Відповідно до (2.92) і (2.90) для $j \in \mathbb{N}_0$, $\forall\alpha = 0,1,\dots,4j-1$ і $\forall\beta = 0,1,\dots,4j+3$ маємо:

$$p_{j,j+1;\alpha,\beta} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} x^{-1} P_{j+1,\beta}(x,y)\overline{P_{j;\alpha}(x,y)}\, d\rho(x,y) = \overline{\int\limits_{\mathbb{R}^2} x^{-1} P_{j,\alpha}(x,y)\overline{P_{j+1;\beta}(x,y)}\, d\rho(x,y)},$$

де $x^{-1}P_{j;\alpha}(x,y)$ належить підпростору з (2.90). Завдяки цьому отримуємо рівності в (2.95). $\square$

Для $p_{j+1,j}$ можна скористатися симетрією оператора A^{-1}: $p_{j,j+1;\alpha,\beta} = p_{j+1,j;\beta,\alpha}$.

Лема 2.4.14 *Елементи*

$$p_{0,1;0,2}, \quad \dots, \quad p_{j;j+1,\alpha,\alpha+2}, \quad j \in \mathbb{N}, \quad \alpha = j, j+1,\dots,2j. \tag{2.96}$$

матриці $(p_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ *є додатніми.*

Доведення. Почнемо з дослідження $p_{0,1;0,2}$. Позначимо через $P'_{1;2}(x,y)$ ненормований вектор $P_{1;2}(x,y)$. Відповідно до (2.55) і (2.54), маємо:

$$P'_{1;2}(x,y) = x^{-1} - (x^{-1},1)_{L_2} - (x^{-1}, P_{1;0}(x,y))_{L_2}P_{1;0}(x,y) - (x^{-1}, P_{1;1}(x,y))_{L_2}P_{1;1}(x,y).$$

Тому, використовуючи (2.59), отримаємо

$$\begin{aligned} p_{0,1;0,2} &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} x^{-1}P_{0;0}P_{1;2}(x,y)\, d\rho(x,y) = \|P'_{1;2}(x,y)\|_{L_2}^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^2} x^{-1}P'_{1;2}(x,y)\, d\rho(x,y)\\ &= \|P'_{1;2}(x,y)\|_{L_2}^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^2} (x^{-1} - (x^{-1},1)_{L_2} - (x^{-1}, P_{1;0}(x,y))_{L_2}P_{1;0}(x,y)\\ &- (x^{-1}, P_{1;1}(x,y))_{L_2}P_{1;1}(x,y))\, d\rho(x,y) = \|P'_{1;1}(x,y)\|_{L_2}^{-1}(\|x^{-1}\|_{L_2}^2\\ &- |(x^{-1},1)_{L_2}|^2 - |(x^{-1}, P_{1;0}(x,y))|^2 - |(x^{-1}, P_{1;1}(x,y))|^2), \end{aligned} \tag{2.97}$$

де $(1 = P_{0;0}(x,y))$.

Також, з (2.97), з'ясовуємо, що останній вираз додатній і, отже, $p_{0,1;0,2} > 0$. Оскільки оператор A^{-1} симетричний, то $p_{0,1;0,2} = p_{1,0;2,0}$ також додатній.

Додатність в (2.97) випливає з рівності Парсеваля про розклад функції $x^{-1} \in L_2$ відносно ортонормованого базису (2.50) в просторі L_2:

$$|(x,1)_{L_2}|^2 + |(x, P_{1;0}(x,y))_{L_2}|^2 + |(x, P_{1;1}(x,y))_{L_2}|^2 + \cdots = \|x\|^2_{L_2}. \tag{2.98}$$

Розглянемо елементи $p_{j,j+1;1,\alpha+2}$, де $j \in \mathbb{N}$, $\alpha = j, j+1, \ldots, 2j$. З (2.59) отримаємо

$$\begin{aligned} p_{j,j+1;1,\alpha+2} &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} x^{-1} P_{j+1,\alpha+2}(x,y)\overline{P_{j;\alpha}(x,y)}\, d\rho(x,y) \\ &= \overline{\int\limits_{\mathbb{R}^2} x^{-1} P_{j,\alpha}(x,y)\overline{P_{j+1;\alpha+2}(x,y)}\, d\rho(x,y)}. \end{aligned} \tag{2.99}$$

Для $P_{j;\alpha}(x,y)$ отримаємо відповідно до (2.50) і (2.52):

$$P_{j;\alpha}(x,y) = k_{j;\alpha} x^{|2j-\alpha|-j} y^{2j-\alpha} + R_{j;\alpha}(x,y), \tag{2.100}$$

де $R_{j;\alpha}(x,y)$ – деякий поліном з $\mathcal{P}_{j;\alpha-1}$, якщо $\alpha = j, j+1, \ldots, 2j$. Тому $x^{-1}R_{j;\alpha}(x,y)$ – деякий поліном з $\mathcal{P}_{j+1;\alpha+1}$ (див. (2.58) і (2.52)). Помноживши його на x^{-1}, отримаємо

$$x^{-1}P_{j;\alpha}(x,y) = k_{j;\alpha} x^{|2j-\alpha|-j-1} y^{2j-\alpha} + x^{-1}R_{j;\alpha}(x,y), \tag{2.101}$$

де $x^{-1}R_{j;\alpha}(x,y) \in \mathcal{P}_{j+1;\alpha+1}$. З іншого боку, рівність (2.100) дає:

$$\begin{aligned} P_{j+1;\alpha+2}(x,y) &= k_{j+1;\alpha+2} x^{|2(j+1)-(\alpha+2)|-(j+1)} y^{2(j+1)-(\alpha+2)} + R_{j+1;\alpha+1}(x,y) \\ &= k_{j+1;\alpha+2} x^{|2j-\alpha|-j-1} y^{2j-\alpha} + R_{j+1;\alpha+1}(x,y), \end{aligned} \tag{2.102}$$

де $R_{j+1;\alpha}(x,y) \in \mathcal{P}_{j;\alpha}$, $\alpha = 0, 1, \ldots, j+1$.

Знайдемо $x^{|2j-\alpha|-j-1} y^{2j-\alpha}$ з (2.102) і підставимо його в (2.101). Отримаємо:

$$\begin{aligned} x^{-1}P_{j;\alpha}(x,y) &= \frac{k_{j;\alpha}}{k_{j+1;\alpha+2}}(P_{j+1;\alpha+2}(x,y) - R_{j+1;\alpha+1}(x,y)) + x^{-1}R_{j;\alpha}(x,y) \\ &= \frac{k_{j;\alpha}}{k_{j+1;\alpha+2}} P_{j+1;\alpha+2}(x,y) - \frac{k_{j;\alpha}}{k_{j+1;\alpha+1}} R_{j+1;\alpha}(x,y) + x^{-1}R_{j;\alpha}(x,y). \end{aligned} \tag{2.103}$$

Другі два члени в (2.103) належать до $\mathcal{P}_{j;\alpha}$ та до $\mathcal{P}_{j+1;\alpha+1}$ і, в будь-якому разі, ортогональні до $P_{j+1;\alpha+2}(x,y)$.

Тому підстановка виразу (2.103) у (2.99) дає: $p_{j,j+1;\alpha,\alpha+2} = \frac{k_{j;\alpha}}{k_{j+1;\alpha+2}} > 0$. Оскільки матриця (2.61) є симетричою, то $p_{j,j+1;\alpha,\beta} = p_{j,j+1;\beta,\alpha}$, $\alpha = 0,1,\ldots,4n-1$, $\beta = 0,1,\ldots,4n+3$. Отже, симетричні елементи теж додатні. $\square$

Перепозначимо:

$$\begin{aligned} p_n = p_{n+1,n} \quad &: \quad \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}, \\ r_n = p_{n,n} \quad &: \quad \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_n, \\ q_n = p_{n,n+1} \quad &: \quad \mathcal{H}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{H}_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \tag{2.104}$$

Попередні дослідження узагальнені в такій теоремі.

Теорема 2.4.15 *Обмежений самоспряжений оператор із циклічним вектором множення на незалежну змінну “x^{-1}” в просторі $L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y))$ в ортонормованому базисі (2.50) має вигляд блочної тридіагональної матриці типу Якобі $J_{x^{-1}}$, що діє у просторі (2.53):*

$$J_{x^{-1}} = \begin{bmatrix} r_0 & q_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ p_0 & r_1 & q_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & p_1 & r_2 & q_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} p_n &: \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}, \\ r_n &: \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_n, \\ q_n &: \mathcal{H}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{H}_n, \end{aligned} \tag{2.105}$$

$n \in \mathbb{N}_0$, *де* $r_0 = [r_{0;0,0}]$ – *скаляр;*

$$r_n = \left.\underbrace{\begin{bmatrix} * & * & \cdots & 0 & * & \cdots & r_{n;0,3n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \cdots & 0 & * & \cdots & r_{n;1,3n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & 0 & * & \cdots & r_{n;n-1,3n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \cdots & 0 & * & \cdots & * & * & \cdots & r_{n;n,4n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n;3n-1,0} & * & \cdots & 0 & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & r_{n;3n,n} & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & r_{n;4n-1,n} & \cdots & * & * & \cdots & * \end{bmatrix}}_{4n}\right\} 4n;$$

r_n – *симетрична* $(4n \times 4n)$*-матриця, де нульові елементи позначені “0”; додатні елементи –* $r_{\cdot;\cdot,\cdot}$ *(крім* $r_{n;n,4n-1}$, $r_{n;3n-1,0}$*); “∗” – елементи, які можуть бути і нульовими і ненульовими;*

$$q_0 = \begin{bmatrix} * & * & q_{0;0,2} & 0 \end{bmatrix},$$

$$q_n = \left.\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n;n,0} & q_{n;n,1} & \cdots & q_{n;n,n+2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \cdots & * & q_{n;n+1,n+3} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & * & * & \cdots & q_{n;3n,3n+2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & * & * & \cdots & q_{n;4n-1,3n+2} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{4n+4}\right\} 4n;$$

q_n – $(4n+4) \times (4n)$*-матриця де нульові елементи позначені “0”; додатні елементи –* $q_{\cdot;\cdot,\cdot}$ *(крім* $q_{n;n,0}$, $q_{n;n,1}$*); “∗” – елементи, які можуть бути і нульовими і ненульовими. Матриця* p_n *симетрична до матриці* q_n, $n \in \mathbb{N}_0$.

Матриця $J_{x^{-1}}$ діє на векторах $f=(f_n)_{n=0}^{\infty}\in(\mathbf{l}_2)$ за правилом:

$$(J_{x^{-1}}f)_n = p_{n-1}f_{n-1}+r_nf_n+q_nf_{n+1},\quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.106}$$

де покладаємо $p_{-1}:=0$, $f_{-1}:=0$.

Дослідження блочної структури матриці типу Якобі відповідної змінній y^{-1}

Дослідимо структуру матриці $J_{B^{-1}}$, яка виникає при множенні відповідного оператора на змінну y^{-1}. Розглянемо замість оператора $\hat{T}$ оператор B^{-1} матриці $J_{B^{-1}}$.

Лема 2.4.16 *Для поліномів $P_{n;\alpha}(x,y)$, і підпросторів $\mathcal{P}_{m,\beta}$, $n,m\in\mathbb{N}_0$, $\alpha=0,1,\ldots,4n-1$, $\beta=0,1,\ldots,4n-1$, виконуються співвідношення:*

$$y^{-1}P_{n;\alpha}(x,y)\in\mathcal{P}_{n+1;4n-1},\quad \alpha=0,1,2,\ldots,(4n-1). \tag{2.107}$$

Доведення. Відповідно до (2.50) поліном $P_{n;\alpha}(x,y)$, $n\in\mathbb{N}_0$, $\alpha=0,1,2,\ldots,(4n-1)$, утворений лінійною комбінацією (2.51). Отже, помноживши її на y^{-1},отримаємо лінійну комбінацію

$$\begin{aligned}
y^{-1}P_{n;\alpha}(x,y) &= k_{n;\alpha}x^{n-\alpha}y^{\alpha-1}+\cdots,\alpha=0,1,\ldots,(n-1);\\
y^{-1}P_{n;\alpha}(x,y) &= k_{n;\alpha}x^{n-\alpha}y^{2n-\alpha-1}+\cdots,\alpha=n,n+1,\ldots,(3n-1);\\
y^{-1}P_{n;\alpha}(x,y) &= k_{n;\alpha}x^{\alpha-3n}y^{2n-\alpha-1}+\cdots,\alpha=2n,2n+1,\ldots,(3n-1);\\
y^{-1}P_{n;\alpha}(x,y) &= k_{n;\alpha}x^{\alpha-3n}y^{\alpha-4n-1}+\cdots,\alpha=3n,3n+1,\ldots,(4n-1).
\end{aligned}$$

Тоді матимемо:

$$\begin{aligned}
y^{-1}P_{n;\alpha}(x,y)&\in\mathcal{P}_{n+1;4n-1},\quad \alpha=1,\ldots,n-1;\\
y^{-1}P_{n;\alpha}(x,y)&\in\mathcal{P}_{n+1;4n-1},\quad \alpha=n,n+1,\ldots,(2n-1);\\
y^{-1}P_{n;\alpha}(x,y)&\in\mathcal{P}_{n+1;4n-1},\quad \alpha=2n,2n+1,\ldots,(3n-1);\\
y^{-1}P_{n;\alpha}(x,y)&\in\mathcal{P}_{n+1;4n-1},\quad \alpha=3n,3n+1,\ldots,(4n-1);
\end{aligned}$$

Поєднуючи останні вкладення в одне, отримуємо (2.107). □

Лема 2.4.17 *Нехай* $\hat{B}^{-1}$ *є оператором множення на* y^{-1} *в просторі* L_2*:*

$$L_2 \ni \varphi(x,y) \longmapsto (\hat{B}^{-1}\varphi)(x,y) = y^{-1}\varphi(x,y) \in L_2.$$

(Очевидно, що $\hat{B}^{-1}$ *– самоспряжений і обмежений). Матриця* $\hat{B}^{-1} = (\psi_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ *в базисі (2.50) (тобто* $B^{-1} = I^{-1}\hat{B}^{-1}I$*) має тридіагональну структуру:* $\psi_{j,k} = 0$ *для* $|j-k| > 1$.

Доведення. Використовуючи (2.57) для $e_{n;\gamma} = I^{-1}P_{n;\gamma}(x,y)$, $n \in \mathbb{N}$; $\gamma = 0,1,\ldots,$ $4n-1$, отримаємо $\forall j,k \in \mathbb{N}_0$

$$\psi_{j,k;\alpha,\beta} = (B^{-1}e_{k;\beta}, e_{j;\alpha})_{l_2} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} y^{-1}P_{k;\beta}(x,y)\overline{P_{j;\alpha}(x,y)}d\rho(x,y), \tag{2.108}$$

де $\alpha = 0,1,\ldots,4j-1,\ \beta = 0,1,\ldots,4k+3$. Згідно з (2.52) і (2.107) інтеграл в (2.108) дорівнює нулю для $j > k+1$ для кожного $\alpha = 0,1,\ldots,4j-1$, $\beta = 0,1,\ldots,4j+3$.

З іншого боку, інтеграл у (2.108) має вигляд

$$(\psi^*)_{j,k;\alpha,\beta} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} y^{-1}P_{k;\beta}(x,y)\overline{P_{j;\alpha}(x,y)}\,d\rho(x,y) = \overline{\int\limits_{\mathbb{R}^2} y^{-1}P_{j;\alpha}(x,y)\overline{P_{k;\beta}(x,y)}\,d\rho(x,y)} = \overline{\psi_{k,j;\beta,\alpha}}, \tag{2.109}$$

де $\alpha = 0,1,\ldots,4j-1$ і $\beta = 0,1,\ldots,4k+3$. Оскільки оператор $\hat{B}^{-1}$ симетричний, з (2.107) маємо, що останній інтеграл дорівнює нулю для $k > j+1$ і для кожного $\alpha = 0,1,\ldots,4k-1$, $\beta = 0,1,\ldots,4k+3$.

У результаті інтеграл (2.108), тобто коефіцієнти $\psi_{j,k;\alpha,\beta}$, $j,k \in \mathbb{N}$, дорівнюють нулю для $|j-k| > 1$; $\alpha = 0,1,\ldots,4j-1$, $\beta = 0,1,\ldots,4k-1$. (У попередніх міркуваннях необхідно брати до уваги, що $e_{0;0} = I^{-1}P_{0;0}(x,y)$, $P_{0;0}(x,y) = 1$). $\square$

Таким чином матриця $(\psi_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ оператора $\hat{B}^{-1}$ має тридіагональну блочну структуру

$$\begin{bmatrix} \psi_{0,0} & \psi_{0,1} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \psi_{1,0} & \psi_{1,1} & \psi_{1,2} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \psi_{2,1} & \psi_{2,2} & \psi_{2,3} & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \tag{2.110}$$

Перепозначимо:

$$\begin{aligned} \psi_n = \psi_{n+1,n} \quad &: \quad \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}, \\ \omega_n = \psi_{n,n} \quad &: \quad \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_n, \\ \phi_n = \psi_{n,n+1} \quad &: \quad \mathcal{H}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{H}_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \tag{2.111}$$

Попередні дослідження узагальнені в такій теоремі.

Теорема 2.4.18 *Обмежений самоспряжений оператор із циклічним вектором множення на незалежну змінну "y^{-1}" в просторі $L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y))$ в ортонормованому базисі (2.50) має вигляд блочної тридіагональної матриці типу Якобі $J_{y^{-1}}$, що діє у просторі (2.53)*

$$J_{y^{-1}} = \begin{bmatrix} \omega_0 & \phi_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \psi_0 & \omega_1 & \phi_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \psi_1 & \omega_2 & \phi_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} \phi_n &: \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}, \\ \omega_n &: \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_n, \\ \psi_n &: \mathcal{H}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{H}_n, \end{aligned} \tag{2.112}$$

$n \in \mathbb{N}_0$, де ω_n – симетрична $(4n \times 4n)$-матриця, $n \in \mathbb{N}$ (ω_0 – скаляр); ψ_n – $(4n \times (4n+4))$ -матриця, в якій елементи можуть бути і нульовими і ненульовими. ϕ_n – $((4n+4) \times 4n)$-матриця. Матриця ϕ_n симетрична до матриці ψ_n, $n \in \mathbb{N}_0$.

Матриця $J_{y^{-1}}$ діє на векторах $f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \in (\mathbf{l}_2)$ за правилом:

$$(J_{y^{-1}} f)_n = \psi_{n-1} f_{n-1} + \omega_n f_n + \phi_n f_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.113}$$

де покладаємо $\psi_{-1} := 0$, $f_{-1} := 0$.

Висновки. Побудовані блочні матриці типу Якобі за заданою ймовірнісною мірою з носієм на компакті на дійсній площині. Вважається, що у міри існують всі моменти та система поліномів $x^n y^m$, $n, m \in \mathbb{Z}$ є лінійно незалежною і тотальною у відповідному просторі L_2. Тобто, розв'язана обернена спектральна задача для блочних матриць типу Якобі відповідних сильній двовимірній дійсній проблемі моментів.

Дано опис внутрішньої структури блочних матриць типу Якобі відповідних сильній двовимірній дійсній проблемі моментів. Досліджені комутативні властивості блочних матриць, відповідних не сильній проблемі моментів, та на основі цих матриць наведені алгоритми побудови численних прикладів.

РОЗДІЛ 3

Пряма спектральна задача

Одним із основних результатів роботи є розв'язання прямої спектральної задачі і відновлення міри за заданими блочними матрицями. Під відновленням розуміємо запис відповідних рівностей Парсеваля за узагальненими власними векторами.

3.1. Побудова оснащення стандартно пов'язаного із парою комутуючих самоспряжених операторів в просторі $\mathbf{l}_2$

Тут знову слідуємо [51]. Розглянемо оператори в просторі $\mathbf{l}_2$ вигляду (2.6). Додатково до простору $\mathbf{l}_2$ розглянемо його оснащення

$$(\mathbf{l}_{\mathrm{fin}})' \supset \mathbf{l}_2(p^{-1}) \supset \mathbf{l}_2 \supset \mathbf{l}_2(p) \supset \mathbf{l}_{\mathrm{fin}}, \tag{3.1}$$

де $\mathbf{l}_2(p)$ – зважений і вкладений в $\mathbf{l}_2$ простір з вагою $p = (p_n)_{n=0}^{\infty}$, $p_n \geq 1$, $(p^{-1} = (p_n^{-1})_{n=0}^{\infty})$. В нашому випадку $\mathbf{l}_2(p)$ гільбертів простір послідовностей $f = (f_n)_{n=0}^{\infty}$, $f_n \in \mathcal{H}_n$ з нормою і скалярним добутком:

$$\|f\|^2_{\mathbf{l}_2(p)} = \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|^2_{\mathcal{H}_n} p_n, \quad (f, g)_{\mathbf{l}_2(p)} = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n, g_n)_{\mathcal{H}_n} p_n. \tag{3.2}$$

Простір $\mathbf{l}_2(p^{-1})$ визначається аналогічно; нагадаємо, що $\mathbf{l}_{\mathrm{fin}}$ – це простір скінчених послідовностей. $(\mathbf{l}_{\mathrm{fin}})'$ – це простір, спряжений з $\mathbf{l}_{\mathrm{fin}}$. Легко показати, що вкладення $\mathbf{l}_2(p) \hookrightarrow \mathbf{l}_2$ квазіядерне, якщо $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n p_n^{-1} < \infty$ (наприклад, [4] Розд. 7; [10] Розд. 15).

Нехай A і B – комутуючі обмежені самоспряжені оператори, стандартно пов'язані із ланцюгом (3.1). Згідно з проекційною спектральною теоремою (див. [8] Розділ 3, Теорема 2.7; [4] Розділ 5; [10], Розділ 15; [64]) такі оператори мають вигляд:

$$Af = \int\limits_{\mathbb{R}^2} x\Phi(x,y)\, d\sigma(x,y)f, \quad Bf = \int\limits_{\mathbb{R}^2} y\Phi(x,y)\, d\sigma(x,y)f, \quad f \in \mathbf{l}_2, \tag{3.3}$$

де $\Phi(x,y) : \mathbf{l}_2(p) \longrightarrow \mathbf{l}_2(p^{-1})$ – оператор узагальненого проектування і $d\sigma(x,y)$ є спектральною мірою. Для кожного $f \in \mathbf{l}_{\text{fin}}$ проекція $\Phi(x,y)f \in \mathbf{l}_2(p^{-1})$ – це узагальнений власний вектор операторів A і B з відповідними власними значеннями x і y. Для всіх $f, g \in \mathbf{l}_{\text{fin}}$ рівність Парсеваля має вигляд

$$(f,g)_{\mathbf{l}_2} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} (\Phi(x,y)f,g)_{\mathbf{l}_2} d\sigma(x,y); \tag{3.4}$$

після замикання за неперервністю рівність (3.4) - виконується $\forall f, g \in \mathbf{l}_2$.

Позначимо через π_n оператор ортогональнго проектування з $\mathbf{l}_2$ на $\mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Отже, $\forall f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathbf{l}_2$ маємо $f_n = \pi_n f$. Цей оператор діє аналогічно на просторах $\mathbf{l}_2(p)$ і $\mathbf{l}_2(p^{-1})$.

Після замикання оператор матриці $(\Phi_{j,k}(x,y))_{j,k=0}^{\infty}$ зображається так:

$$\Phi_{j,k}(x,y) = \pi_j \Phi(x,y) \pi_k \ : \ \mathbf{l}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_j, \quad (\mathcal{H}_k \longrightarrow \mathcal{H}_j). \tag{3.5}$$

Рівність Парсеваля (3.4) можна переписати таким чином:

$$\begin{aligned}(f,g)_{\mathbf{l}_2} &= \sum_{j,k=0}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^2} (\Phi(x,y)\pi_k f, \pi_j g)_{\mathbf{l}_2} d\sigma(x,y) = \sum_{j,k=0}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^2} (\pi_j \Phi(x,y)\pi_k f, g)_{\mathbf{l}_2} d\sigma(x,y) \\ &= \sum_{j,k=0}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^2} (\Phi_{j,k}(x,y) f_k, g_j)_{\mathbf{l}_2} d\sigma(x,y), \quad \forall f, g \in \mathbf{l}_2.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Перейдемо тепер до вивчення більш спеціальних обмежених операторів A і B, що діють у просторі $\mathbf{l}_2$. А саме, нехай дано матриці J_A і J_B, які мають тридіагональну блочну структуру у вигляді (2.26) та (2.44). Таким чином, оператори A і B відповідні цим матрицям визначаються виразами в (2.29) і (2.47). Нагадаємо, що норми всіх елементів a_n, b_n, c_n і u_n, w_n, v_n рівномірно обмежені для $n \in \mathbb{N}_0$.

Для подальших досліджень *припускаємо, що умови (2.27), (2.28) і (2.45), (2.46) виконані і додатково оператори A і B породжені матрицями (2.26) і (2.44) обмежені, комутуючі, самоспряжені на* $\mathbf{l}_2$, (2.6).

3.2. Розв'язання системи різницевих рівнянь, породженої блочними матрицями відповідними дійсній двовимірній проблемі моментів

На наступному кроці перепишемо рівність Парсеваля (3.6) в термінах узагальнених власних векторів комутуючих самоспряжених операторів A і B. Спочатку доведемо таку лему.

Лема 3.2.1 *Нехай* $\varphi(x,y) = (\varphi_n(x,y))_{n=0}^{\infty}$, $\varphi_n(x,y) \in \mathcal{H}_n$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *– узагальнений власний вектор з* $(\mathbf{l}_{\mathrm{fin}})'$ *оператора A з власним числом x, а також узагальнений власний вектор B з власним числом y. Тоді* $\varphi(x,y)$ *це розв'язок з* $(\mathbf{l}_{\mathrm{fin}})'$ *двох різницевих рівнянь (див. (2.29) та (2.47)):*

$$\begin{aligned}(J_A\varphi(x,y))_n &= a_{n-1}\varphi_{n-1}(x,y) + b_n\varphi_n(x,y) + c_n\varphi_{n+1}(x,y) = x\varphi_n(x,y),\\ (J_B\varphi(x,y))_n &= u_{n-1}\varphi_{n-1}(x,y) + w_n\varphi_n(x,y) + v_n\varphi_{n+1}(x,y) = y\varphi_n(x,y),\end{aligned} \tag{3.7}$$

з початковою умовою $\varphi_0 \in \mathbb{R}$, *для* $n \in \mathbb{N}_0$, $\quad \varphi_{-1}(x,y) =: 0$.

Стверджуємо, що цей розв'язок є таким: $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\varphi_n(x,y) = Q_n(x,y)\varphi_0 = (Q_{n;0}, Q_{n;1}, \ldots, Q_{n;n},)\varphi_0. \tag{3.8}$$

Тут $Q_{n;\alpha}$, $\alpha = 0,1,\ldots,n$ *- поліноми від x і y, і ці поліноми мають вигляд*

$$Q_{n;\alpha}(x,y) = l_{n;\alpha}y^{n-\alpha}x^{\alpha} + q_{n;\alpha}(x,y), \quad \alpha = 1,\ldots,n, \tag{3.9}$$

де $l_{n;\alpha} > 0$ *і* $q_{n;\alpha}(x,y)$ *- залишок згідно (2.2) і це деяка лінійна комбінація* $y^j x^k$, $0 \le j+k \le n-1$, $y^{n-(\alpha-1)}x^{\alpha-1}$. *Останні вирази описані для* $\alpha = 1,\ldots n$, *і опишемо* $y^{n-1}x^{n-1}$, *якщо* $\alpha = 0$.

Доведення. Для $n = 0$ система (3.7) має вигляд

$$\begin{array}{lcl} w_0\varphi_0 + v_0\varphi_1 = y\varphi_0, & \text{або} & v_{0;0,0}\varphi_{1;0} = (y - w_{0;0,0})\varphi_0, \\ b_0\varphi_0 + c_0\varphi_1 = x\varphi_0, & & c_{0;0,0}\varphi_{1;0} + c_{0;0,1}\varphi_{1;1} = (x - b_{0;0,0})\varphi_0. \end{array} \tag{3.10}$$

Тут і надалі будемо позначати

$$\varphi_n(x,y) = (\varphi_{n;0}(x,y), \varphi_{n;1}(x,y), \ldots, \varphi_{n;n}(x,y)) \in \mathcal{H}_n, \ \forall n \in \mathbb{N}; \quad \varphi_0 = \varphi_{0;0}.$$

Використовуючи припущення (2.27), (2.28) і (2.45), (2.46), перепишемо останні дві рівності в (3.10) у вигляді

$$\begin{gathered} \Delta_0\varphi_1(x,y) = ((y - w_{0;0,0})\varphi_0, (x - b_{0;0,0})\varphi_0); \\ \Delta_0 = \begin{pmatrix} v_{0;0,0} & 0 \\ c_{0;0,0} & c_{0;0,1} \end{pmatrix}, \quad v_{0;0,0} > 0, \quad c_{0;0,1} > 0. \end{gathered} \tag{3.11}$$

Тому

$$\begin{aligned} \varphi_{1;0}(x,y) &= \frac{1}{v_{0;0,0}}(y - w_{0;0,0})\varphi_0 = Q_{1;0}(x,y)\varphi_0, \\ \varphi_{1;1}(x,y) &= \left(\frac{(x - b_{0;0,0})}{c_{0;0,1}} - \frac{c_{0;0,0}(y - w_{0;0,0})}{c_{0;0,1}v_{0;0,0}}\right)\varphi_0 = Q_{1;1}(x,y)\varphi_0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Іншими словами, розв'язок $\varphi_n(x,y)$ з (3.7) для $n = 0$ має вигляд (3.8) і (3.9).

Припустимо, використовуючи індукцію, що для $n \in \mathbb{N}$ складові $\varphi_{n-1}(x,y)$ і $\varphi(x,y)$ нашого узагальненого власного вектора $\varphi(x,y) = (\varphi_n(x,y))_{n=0}^{\infty}$ мають вигляд (3.8) і (3.9) та доведемо, що $\varphi_{n+1}(x,y)$ також можна записати у вигляді (3.8) і (3.9).

Власний вектор $\varphi(x,y)$ задовольняє систему (3.7) двох рівнянь. Але ця система є перевизначеною: вона складається з $2(n+1)$ скалярних рівняннь, з яких треба знайти тільки $n+2$ невідомі $\varphi_{n+1;0}$, $\varphi_{n+1;1}$, $\ldots$, $\varphi_{n+1;n+1}$, використовуючи значення вихідних даних. Попередні $n+1$ значення $\varphi_{n;0}$, $\varphi_{n;1}$, $\ldots$, $\varphi_{n;n}$ – це координати вектора $\varphi_n(x,y)$. Згідно з теоремами 2.2.9 і 2.2.5, зокрема (2.27), (2.28) і (2.45), (2.46), $((n+1)\times(n+2))$-матриці c_n, і v_n їх дія на $\varphi_{n+1} \in \mathcal{H}_n$, має вигляд:

$$v_n\varphi_{n+1}(x,y) = \begin{bmatrix} v_{n;0,0} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ v_{n;1,0} & v_{n;1,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ v_{n;2,0} & v_{n;2,1} & v_{n;2,2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ v_{n;n-1,0} & v_{n;n-1,1} & v_{n;n-1,2} & \dots & 0 & 0 \\ v_{n;n,0} & v_{n;n,1} & v_{n;n,2} & \dots & v_{n;n,n} & 0 \end{bmatrix} \varphi_{n+1}(x,y), \tag{3.13}$$

$$c_n\varphi_{n+1}(x,y) = \begin{bmatrix} c_{n;0,0} & c_{n;0,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_{n;1,0} & c_{n;1,1} & c_{n;1,2} & \dots & 0 & 0 \\ c_{n;2,0} & c_{n;2,1} & c_{n;2,2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n;n-1,0} & c_{n;n-1,1} & c_{n;n-1,2} & \dots & c_{n;n-1,n} & 0 \\ c_{n;n,0} & c_{n;n,1} & c_{n;n,2} & \dots & c_{n;n,n} & c_{n;n,n+1} \end{bmatrix} \varphi_{n+1}(x,y),$$

де $\varphi_{n+1}(x,y) = (\varphi_{n+1;0}(x,y), \varphi_{n+1;1}(x,y), \dots, \varphi_{n+1;n+1}(x,y))$.

Побудуємо аналогічну до (3.11) наступну комбінацію для матриці (3.13), тобто: $((n+2)\times(n+2))$-матрицю

$$\Delta_n\varphi_{n+1}(x,y) = \begin{bmatrix} v_{n;0,0} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_{n;0,0} & c_{n;0,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_{n;1,0} & c_{n;1,1} & c_{n;1,2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n;n-1,0} & c_{n;n-1,1} & c_{n;n-1,2} & \dots & c_{n;n-1,n} & 0 \\ c_{n;n,0} & c_{n;n,1} & c_{n;n,2} & \dots & c_{n;n,n} & c_{n;n,n+1} \end{bmatrix} \varphi_{n+1}(x,y), \tag{3.14}$$

де $\varphi_{n+1}(x,y) = (\varphi_{n+1;0}(x,y), \varphi_{n+1;1}(x,y), \dots, \varphi_{n+1;n+1}(x,y))$.

В матриці (3.14) її елементи на головній діагоналі додатні (див. (2.28) і (2.46)). Перепишемо рівності (3.7) таким чином:

$$\begin{aligned} c_n\varphi_{n+1}(x,y) &= x\varphi_n(x,y) - a_{n-1}\varphi_{n-1}(x,y) - b_n\varphi_n(x,y), \\ v_n\varphi_{n+1}(x,y) &= y\varphi_n(x,y) - u_{n-1}\varphi_{n-1}(x,y) - v_n\varphi_n(x,y), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Перші $n+2$ скалярні рівняння (з $2(n+1)$ скалярних рівнянь (3.15)) мають вигляд:

$$\begin{aligned}\Delta_n\varphi_{n+1}(x,y) = (xQ_{n;0}(x,y) - (u_{n-1}Q_{n-1}(x,y) - (w_nQ_n(x,y))_{n;0},\\ yQ_{n;0}(x,y) - (a_{n-1}Q_{n-1}(x,y))_{n;0} - (b_nQ_n(x,y))_{n;0},\ldots,\\ yQ_{n;n}(x,y) - (a_{n-1}Q_{n-1}(x,y))_{n;n} - (b_nQ_n(x,y))_{n;n})\varphi_0.\end{aligned} \tag{3.16}$$

Конструкція матриці Δ_n і форма вектора справа в (3.16) і (3.8), (3.9) дає:

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1;0}(x,y) &= Q_{n+1;0}(x,y)\varphi_0\\ &= \frac{1}{a_{n;0,0}}(xQ_{n;0}(x,y) - (u_{n-1}Q_{n-1}(x,y))_{n;0}) - (w_nQ_n(x,y))_{n;0})\varphi_0\\ &= \frac{1}{a_{n;0,0}}(x(l_{n;0}x^n + q_{n;0}(x,y)) - (u_{n-1}Q_{n-1}(x,y))_{n;0}-\\ &\qquad (w_nQ_n(x,y))_{n;0})\varphi_0,\end{aligned} \tag{3.17}$$

тобто перший доданок справа в (3.17) дорівнює $\frac{l_{n;0}}{a_{n;0,0}}x^{n+1}y^0$, тому він має вигляд (3.9).

Аналогічні розрахунки дають той же ефект для $\varphi_{n+1;1}(x,y)$, …, $\varphi_{n+1;n+1}(x,y)$. Потрібно взяти до уваги діагональні елементи $v_{n;0,0}$, $c_{n;0,1}$, $c_{n;1,2}$, …, $c_{n;n,n+1}$ з матриці Δ_n, які є додатними завдяки умовам (2.46) і (2.28). Це завершує індукцію і закінчує доведення. $\square$

При формулюванні і доведенні леми 3.2.1 не стверджується, що розв'язок перевизначеної системи (3.7) існує для будь-яких початкових даних $\varphi_0 \in \mathbb{R}$: доводиться тільки те, що узагальнений власний вектор з $(\mathbf{l}_{\text{fin}})'$ операторів A і B є розв‘язком (3.7) і має вигляд (3.8) і (3.9).

3.3. Відновлення міри за двома заданими блочними матрицями

Розглянемо $Q_n(x,y)$ з фіксованими x і y як лінійний оператор, який діє з $\mathcal{H}_0$ в $\mathcal{H}_n$, тобто, $\mathcal{H}_0 \ni \varphi_0 \longmapsto Q_n(x,y)\varphi_0 \in \mathcal{H}_n$. Також розуміємо $Q_n(x,y)$ як операторнозначний поліном змінних $x, y \in \mathbb{R}$; отже, спряжений оператор має вигляд

$Q_n^*(x,y) = (Q_n(x,y))^* : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_0$. Використовуючи поліноми $Q_n(x,y)$, побудуємо таке зображення для $\Phi_{j,k}(x,y)$.

Лема 3.3.1 *Оператор* $\Phi_{j,k}(x,y)$, $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *має такий вигляд:*

$$\Phi_{j,k}(x,y) = Q_j(x,y)\Phi_{0,0}(x,y)Q_k^*(x,y) : \mathcal{H}_k \longrightarrow \mathcal{H}_j, \quad j,k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.18}$$

де $\Phi_{0,0}(x,y) \geq 0$ *скаляр.*

Доведення. Для фіксованого $k \in \mathbb{N}_0$ вектор $\varphi = \varphi(x,y) = (\varphi_j(x,y))_{j=0}^{\infty}$, де

$$\varphi_j(x,y) = \Phi_{j,k}(x,y) = \pi_j\Phi(x,y)\pi_k \in \mathcal{H}_j, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \tag{3.19}$$

є узагальненим розв'язком, в $(\mathbf{l}_{\text{fin}})'$ рівнянь

$$J_A\varphi(x,y) = x\varphi(x,y), \quad J_B\varphi(x,y) = y\varphi(x,y)$$

оскільки $\Phi(x,y)$ – це проектор на узагальнені власні вектори операторів A і B з відповідними узагальненими власними числами x, та y. Отже, $\varphi = \varphi(x,y) \in \mathbf{l}_2(p^{-1})$ існує, як звичайний розв'язок рівнянь $J_A\varphi = x\varphi$, $J_B\varphi = y\varphi$ з початковою умовою $\varphi_0 = \pi_0\Phi(x,y)\pi_k \in \mathcal{H}_0$.

Використаємо лему 3.2.1 і у зв'язку з (3.8) отримуємо

$$\Phi_{j,k}(x,y) = Q_j(x,y)(\Phi_{0,k}(x,y)), \quad j \in \mathbb{N}_0. \tag{3.20}$$

Оператор $\Phi(x,y) : \mathbf{l}_2(p) \longrightarrow \mathbf{l}_2(p^{-1})$ формально самоспряжений на $\mathbf{l}_2$ і є похідною розкладу одиниці оператора A на $\mathbf{l}_2$ відносно спектральної міри. Отже, відповідно до (3.18) отримуємо

$$(\Phi_{j,k}(x,y))^* = (\pi_j\Phi(x,y)\pi_k)^* = \pi_k\Phi(x,y)\pi_j = \Phi_{k,j}(x,y), \quad j,k \in \mathbb{N}_0. \tag{3.21}$$

Для фіксованого $j \in \mathbb{N}_0$ з (3.21) і попереднього розгляду випливає, що

$$\varphi = \varphi(x,y) = (\varphi_k(x,y))_{k=0}^{\infty}, \quad \varphi_k(x,y) = \Phi_{k,j}(x,y) = (\Phi_{j,k}(x,y))^*$$

є звичайним розв'язком рівнянь $J_A\varphi = x\varphi$ і $J_B\varphi = y\varphi$ з початковою умовою $\varphi_0 = \Phi_{0,j}(x,y) = (\Phi_{j,0}(x,y))^*$.

Знову, використавши лему 3.2.1, отримаємо зображення типу (3.20),

$$\Phi_{k,j}(x,y) = Q_k(x,y)(\Phi_{0,j}(x,y)), \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{3.22}$$

Беручи до уваги (3.21) і (3.22) отримаємо

$$\Phi_{0,k}(x,y) = (\Phi_{k,0}(x,y))^* = (Q_k(x,y)\Phi_{0,0}(x,y))^* = \Phi_{0,0}(x,y)(Q_k(x,y))^*, k \in \mathbb{N}_0 \tag{3.23}$$

(тут ми використовуємо $\Phi_{0,0}(x,y) \geq 0$, ця нерівність випливає з (3.4) і (3.5)). Підставляючи (3.23) в (3.20) отримуємо (3.18). □

Тепер можна переписати рівність Парсеваля (3.6) в більш конкретній формі. Нарешті, підставимо вираз (3.18) для $\Phi_{j,k}(x,y)$ в (3.6) і отримаємо, що

$$\begin{aligned}
(f,g)_{\mathbf{l}_2} &= \sum_{j,k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^2} (\Phi_{j,k}(x,y) f_k, g_j)_{\mathbf{l}_2} d\sigma(x,y) = \\
&= \sum_{j,k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^2} (Q_j(x,y)\Phi_{0,0}(x,y)Q_k^*(x,y) f_k, g_j)_{\mathbf{l}_2} d\sigma(x,y) \\
&= \sum_{j,k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^2} (Q_k^*(x,y) f_k, Q_j^*(x,y) g_j)_{\mathbf{l}_2} d\rho(x,y) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} Q_k^*(x,y) f_k \right) \overline{\left(\sum_{j=0}^{\infty} Q_j^*(x,y) g_j \right)} d\rho(x,y),
\end{aligned} \tag{3.24}$$

$$d\rho(x,y) = \Phi_{0,0}(x,y)\, d\sigma(x,y), \quad \forall f,g \in \mathbf{l}_{\mathrm{fin}}.$$

Позначимо перетворення Фур'є $\widehat{\ }$ для комутуючих самоспряжених операторів A і B в просторі $\mathbf{l}_2$

$$\mathbf{l}_2 \supset \mathbf{l}_{\mathrm{fin}} \ni f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \longmapsto \hat{f}(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^*(x,y) f_n \in L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y)). \tag{3.25}$$

Отже, (3.24) дає рівність Парсеваля у фінальній формі:

$$(f,g)_{\mathbf{l}_2} = \int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(x,y)\overline{\hat{g}(x,y)}\, d\rho(x,y), \quad \forall f,g \in \mathbf{l}_{\mathrm{fin}}. \tag{3.26}$$

Продовжимо (3.26) за неперервністю $\forall f, g \in \mathbf{l}_2$. Ортогональність поліномів $Q_n^*(x,y)$ випливає з (3.25) і (3.26). А саме, достатньо лише взяти $f = (0,\dots,0,f_k, 0,\dots)$, $f_k \in \mathcal{H}_k$, $g = (0,\dots,0,g_j,0,\dots)$, $g_j \in \mathcal{H}_j$ в (3.25) і (3.26). Тоді

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} (Q_k^*(x,y)f_k)\overline{(Q_j^*(x,y)g_j)}\, d\rho(x,y) = \delta_{j,k}(f_j,g_j)_{\mathcal{H}_j}, \quad \forall k,j \in \mathbb{N}_0. \tag{3.27}$$

Використавши зображення (3.8) для цих многочленів, можемо переписати рівність (3.27) в класичній скалярній формі. Щоб зробити це, зауважимо, що в цілому $Q_0^*(x,y) = \bar{Q}_0(x,y)$ і для $n \in \mathbb{N}$ відповідно до (3.8) $Q_n(x,y) = (Q_{n;0}(x,y), Q_{n;1}(x,y),\dots,Q_{n;n}(x,y)) : \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{H}_n$. Отже, для спряженого оператора $Q_n^*(x,y) : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_0$ маємо

$$\begin{aligned}
(Q_n(x,y)q,p)_{\mathcal{H}_n} &= ((Q_{n;0}(x,y)q, Q_{n;1}(x,y)q,\dots,Q_{n;n}(x,y)q),(p_0,p_1,\dots,p_n))_{\mathcal{H}_n}\\
&= Q_{n;0}(x,y)q\bar{p}_0 + Q_{n;1}(x,y)q\bar{p}_1 + \dots + Q_{n;n}(x,y)q\bar{p}_n\\
&= q\overline{(\overline{Q_{n;0}(x,y)}p_0 + \overline{Q_{n;1}(x,y)}p_1 + \dots + \overline{Q_{n;n}(x,y)}p_n)}\\
&= (q, Q_n^*(x,y)p)_{\mathcal{H}_0},
\end{aligned}$$

де $Q_n^*(x,y)p = \overline{Q_{n;0}(x,y)}p_0 + \overline{Q_{n;1}(x,y)}p_1 + \dots + \overline{Q_{n;n}(x,y)}p_n$, $\forall q \in \mathcal{H}_0$, і $p = (p_0,p_1,\dots,p_n) \in \mathcal{H}_n$.

З останньої рівності для $n \in \mathbb{N}$ і $f_n = (f_{n,0}, f_{n,1},\dots,f_{n,n}) \in \mathcal{H}_n$, отримуємо

$$Q_n^*(x,y)f_n = \overline{Q_{n;0}(x,y)}f_{n;0} + \overline{Q_{n;1}(x,y)}f_{n;1} + \dots + \overline{Q_{n;n}(x,y)}f_{n;n}, \quad Q_0^*(x,y) = 1. \tag{3.28}$$

Тому (3.27) має вигляд: $\forall f_{k;0}, f_{k;1},\dots,f_{k;k},\ g_{j;0},g_{j;1},\dots,g_{j;j} \in \mathbb{C}$, $j,k \in \mathbb{N}_0$,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{\alpha=0}^{k} \overline{Q_{k;\alpha}(x,y)} f_{k;\alpha}\right) \overline{\left(\sum_{\beta=0}^{j} \overline{Q_{j;\beta}(x,y)} f_{j;\beta}\right)}\, d\rho(x,y) = \delta_{j,k} \sum_{\alpha=0}^{j} f_{j;\alpha}\bar{g}_{j;\alpha}.$$

Ця рівність еквівалентна співвідношенню ортогональності у звичайній класичній формі:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \overline{Q_{k;\beta}^*(x,y)} Q_{j;\alpha} d\rho(x,y) = \delta_{j,k}\delta_{\alpha,\beta} \quad (Q_{0;0} = Q_0(x,y)), \tag{3.29}$$

$\forall j,k \in \mathbb{N}_0$, $\forall \alpha = 0,1,\dots,j, \beta = 0,1,\dots,k$.

Відзначимо, що у зв'язку з (3.28) перетворення Фур'є (3.25) може бути переписано

$$\hat{f}(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\alpha=0}^{n}\overline{Q_{n;\alpha}(x,y)}f_{n;\alpha},\quad \forall f=(f_n)_{n=0}^{\infty}\in\mathbf{l}_2.\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2, \tag{3.30}$$

Використавши викладені результати цього розділу, можемо сформулювати таку спектральну теорему для наших операторів A і B.

Теорема 3.3.2 *Розглянемо простір (2.53):*

$$\mathbf{l}_2=\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2\oplus,\cdots,\quad \mathcal{H}_n=\mathbb{C}^{n+1},\quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{3.31}$$

і лінійні оператори A і B, які визначаються на скінченних векторах $\mathbf{l}_{\mathrm{fin}}$ блочними тридіагональними матрицями типу Якобі J_A і J_B у вигляді (2.26) і (2.44) за допомогою виразу в (2.29) і (2.47). Вважаємо, що всі коефіцієнти a_n, b_n, c_n, і u_n, v_n, w_n, $n\in\mathbb{N}_0$, рівномірно обмежені, деякі елементи цих матриць дорівнюють нулю або додатні відповідно до (2.27), (2.28) і (2.45), (2.46), і замикання A і B за неперервністю є обмеженими комутуючими самоспряженими операторами в цьому просторі.

Розклад за узагальненими власними векторами операторів A і B має таку форму. Згідно леми 3.2.1 зобразимо за допомогою $\varphi_0\in\mathbb{R}$ розв'язок $\varphi(x,y)=(\varphi_n(x,y))_{n=0}^{\infty}$, $\varphi_n(x,y)\in\mathcal{H}_n$ рівнянь (3.7) (який існує завдяки проекційній спектральній теоремі) для $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\varphi_n(x,y)=Q_n(x,y)\varphi_0=(Q_{n;0}(x,y),Q_{n;1}(x,y),\cdots,Q_{n;n}(x,y))\varphi_0,$$

де $Q_{n;\alpha}(x,y)$, $\alpha=0,1,\dots,n$ поліноми за змінними x і y. Тоді перетворення Фур'є має вигляд

$$\begin{aligned}\mathbf{l}_2\supset\mathbf{l}_{\mathrm{fin}}\ni f=(f_n)_{n=0}^{\infty}\longmapsto\hat{f}(x,y)&=\sum_{n=0}^{\infty}Q_n^*(x,y)f_n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\alpha=0}^{n}\overline{Q_{n;\alpha}(x,y)}f_{n;\alpha}\in L_2(\mathbb{R}^2,d\rho(x,y)).\end{aligned} \tag{3.32}$$

Тут $Q_n^*(x,y):\mathcal{H}_n\longrightarrow\mathcal{H}_0$ є спряженим до оператора $Q_n(x,y):\mathcal{H}_0\longrightarrow\mathcal{H}_n$, $d\rho(x,y)$ – ймовірнісна спектральна міра A і B.

Рівність Парсеваля має такий вигляд: $\forall f, g \in \mathbf{l}_{\mathrm{fin}}$

$$\begin{aligned} (f,g)_{\mathbf{l}_2} &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(x,y)\overline{\hat{g}(x,y)}\, d\rho(x,y), \\ (J_A f,g)_{\mathbf{l}_2} &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} x\hat{f}(x,y)\overline{\hat{g}(x,y)}\, d\rho(x,y), \\ (J_B f,g)_{\mathbf{l}_2} &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} y\hat{f}(x,y)\overline{\hat{g}(x,y)}\, d\rho(x,y). \end{aligned} \tag{3.33}$$

Перетворення (3.32) і тотожності (3.33) розширюються за неперервністю $\forall f, g \in \mathbf{l}_2$ *так, що оператор (3.32) є унітарним і відображає весь* $\mathbf{l}_2$ *на весь* $L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y))$.

Поліноми $\overline{Q_{n;\alpha}(x,y)}$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha = 0, 1, \ldots, n$, *і* $Q_{0;0}(x,y) = 1$ *утворюють ортонормовану систему в* $L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y))$ *в сенсі (3.29).*

Матриці

$$\begin{aligned} J_A &= (\tau_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}, \tau_{j,k} = (\tau_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{j,k}, \\ J_B &= (\theta_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}, \theta_{j,k} = (\theta_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{j,k}, \end{aligned}$$

відновлюються за формулами:

$$\begin{aligned} \tau_{j,k;\alpha,\beta} &= (J_A \delta_{k,\beta}, \delta_{j,\alpha})_{\mathbf{l}_2} = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} x\overline{P_{k;\beta}(x,y)} P_{j;\alpha}(x,y) d\rho(x,y), \\ \theta_{j,k;\alpha,\beta} &= (J_B \delta_{k,\beta}, \delta_{j,\alpha})_{\mathbf{l}_2} = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} y\overline{P_{k;\beta}(x,y)} P_{j;\alpha}(x,y) d\rho(x,y), \end{aligned} \tag{3.34}$$

тут перепозначено $b_j = \tau_{j,j}$, $c_j = \tau_{j,j+1}$, $a_j = \tau_{j+1,j}$ *і* $w_j = \theta_{j,j}$, $v_j = \theta_{j,j+1}$, $u_j = \theta_{j+1,j}$, $j \in \mathbb{N}_0$.

Доведення. Необхідно тільки показати, що поліноми $\overline{Q_{n;\alpha}(x,y)}$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha = 0, 1, \ldots, n$ і $Q_{0;0}(x,y) = 1$ ортогональні і утворюють тотальну множину в просторі $L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y))$. Для цього спочатку зауважимо, що через компактність носія міри $d\rho(x,y)$ на $\mathbb{R}^2$, елементи $x^j y^k$, $j,k \in \mathbb{N}_0$, утворюють тотальну множину в $L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y))$. Дійсно, припустимо протилежне, тобто, що наша система поліномів не є тотальною. Тоді існує ненульова функція $h(x,y) \in L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y))$, що є ортогональною до всіх цих поліномів і, отже, відповідно до (3.44) для всіх $x^j y^k$, $j,k \in \mathbb{N}_0$. Отже $h(x,y) = 0$. $\square$

Остання теорема розв'язує пряму спектральну задачу для обмежених симетричних комутуючих операторів A і B, які зображаються в просторі $\mathbf{l}_2$ матрицями J_A і J_B у вигляді (2.44) і (2.26).

Обернена задача полягає у побудові за заданою мірою $d\rho(x,y)$ на $\mathbb{R}^2$ з компактним носієм обмежених симетричних комутуючих матриць J_A і J_B у вигляді (2.44) і (2.26), які мають свою спектральну міру, що і дорівнює $d\rho(x,y)$. *Ця побудова ведеться відповідно до теорем 2.2.5 і 2.2.9 з використанням ортогоналізації Шмідта для системи (29). Для матриць J_A і J_B у вигляді (2.26) і (2.44), які побудовані за заданою $d\rho(x,y)$, спектральна міра відповідних обмежених симетричних комутуючих операторів A і B співпадає з початковою мірою.*

Доведення. Це твердження вірне, оскільки система ортогональних поліномів, пов'язаних з A і B, $\overline{Q_{n,\alpha}(x,y)}$ $\alpha = 0, 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}_0$, ортонормована в $L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y))$. І, згідно леми 3.5.1, побудовані $Q_{n,\alpha}(x,y)$ за $y^j x^k$, $(x,y) \in \mathbb{R}$, так само, як і система (2.3) побудована за $x^j y^k$, $j,k \in \mathbb{N}_0$. Отже,

$$Q_0(x,y) = P_0(x,y) = 1, \quad \overline{Q_{n,\alpha}(x,y)} = P_{n;\alpha}(x,y), \quad \alpha = 0,1,\ldots,n, \ \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.35)$$

Оскільки система поліномів утворює тотальну множину в $L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y))$, то (3.35) показує, що спектральна міра побудована за оператором і задана спочатку збігаються. $\square$

Зауважимо, що вирази (2.12) і (2.30) (як це було в класичній теорії матриць Якобі) відновлюють початкові матриці (2.44) і (2.26) за спектральною мірою $d\rho(x,y)$ операторів, породжених J_A і J_B на $\mathbf{l}_2$.

3.4. Побудова оснащення стандартно пов'язаного із парою комутуючих, маючих обернені, самоспряжених операторів в просторі $\mathbf{l}_2$

Також одним із основних результатів роботи є розв'язання прямої спектральної задачі і відновлення міри за заданими блочними матрицями, відповідними сильній проблемі моментів. Під відновленням розуміємо запис відповідних рівностей Парсеваля для узагальнених власних векторів відповідних симетричних операторів. Тут знову слідуємо за методикою із [51].

Розглянемо оператори в просторі $\mathbf{l}_2$ але вигляду (2.53). Додатково до простору $\mathbf{l}_2$ розглянемо його оснащення

$$(\mathbf{l}_{\text{fin}})' \supset \mathbf{l}_2(p^{-1}) \supset \mathbf{l}_2 \supset \mathbf{l}_2(p) \supset \mathbf{l}_{\text{fin}}, \tag{3.36}$$

де $\mathbf{l}_2(p)$ – зважений і вкладений в $\mathbf{l}_2$ простір з вагою $p = (p_n)_{n=0}^{\infty}$, $p_n \geq 1$, $(p^{-1} = (p_n^{-1})_{n=0}^{\infty})$. В нашому випадку $\mathbf{l}_2(p)$ гільбертів простір послідовностей $f = (f_n)_{n=0}^{\infty}$, $f_n \in \mathcal{H}_n$, для яких є норма і скалярний добуток:

$$\|f\|^2_{\mathbf{l}_2(p)} = \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|^2_{\mathcal{H}_n} p_n, \quad (f,g)_{\mathbf{l}_2(p)} = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n, g_n)_{\mathcal{H}_n} p_n. \tag{3.37}$$

Простір $\mathbf{l}_2(p^{-1})$ визначається аналогічно; нагадаємо, що $\mathbf{l}_{\text{fin}}$ – це простір скінчених послідовностей. $(\mathbf{l}_{\text{fin}})'$ – це простір, спряжений з $\mathbf{l}_{\text{fin}}$. Легко показати, що вкладення $\mathbf{l}_2(p) \hookrightarrow \mathbf{l}_2$ квазіядерне, якщо $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n p_n^{-1} < \infty$ (наприклад, [4] Розд. 7; [10] Розд. 15).

Нехай A і B та їх обернені A^{-1} і B^{-1} – комутуючі обмежені самоспряжені оператори, пов'язані ланцюгом (3.36). Згідно з проекційною спектральною теоремою (див. [8] Розділ 3, Теорема 2.7; [4] Розділ 5; [10], Розділ 15; [64]) і оператори мають вигляд:

$$\begin{aligned} Af &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} x\Phi(x,y)\, d\sigma(x,y) f, \quad Bf = \int\limits_{\mathbb{R}^2} y\Phi(x,y)\, d\sigma(x,y) f, \\ A^{-1}f &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} x^{-1}\Phi(x,y)\, d\sigma(x,y) f, \quad B^{-1}f = \int\limits_{\mathbb{R}^2} y^{-1}\Phi(x,y)\, d\sigma(x,y) f, \quad f \in \mathbf{l}_2, \end{aligned} \tag{3.38}$$

де $\Phi(x,y) : \mathbf{l}_2(p) \longrightarrow \mathbf{l}_2(p^{-1})$ – оператор узагальненого проектування і $d\sigma(x,y)$ є спектральною мірою. Для кожного $f \in \mathbf{l}_{\text{fin}}$ проекція $\Phi(x,y)f \in \mathbf{l}_2(p^{-1})$ – це узагальнений власний вектор операторів A і B (та A^{-1} і B^{-1}) з відповідними власними значеннями x і y та x^{-1} і y^{-1}. Для всіх $f, g \in \mathbf{l}_{\text{fin}}$ рівність Парсеваля має вигляд:

$$(f,g)_{\mathbf{l}_2} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} (\Phi(x,y)f, g)_{\mathbf{l}_2} d\sigma(x,y); \tag{3.39}$$

після замикання за неперервністю рівність (3.39) виконується $\forall f, g \in \mathbf{l}_2$.

Позначимо через π_n оператор ортогонального проектування з $\mathbf{l}_2$ на $\mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Отже, $\forall f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathbf{l}_2$ маємо $f_n = \pi_n f$. Цей оператор діє аналогічно на просторах $\mathbf{l}_2(p)$ і $\mathbf{l}_2(p^{-1})$.

Після замикання оператор матриця $(\Phi_{j,k}(x,y))_{j,k=0}^{\infty}$ зображається так:

$$\Phi_{j,k}(x,y) = \pi_j \Phi(x,y) \pi_k \;:\; \mathbf{l}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_j, \quad (\mathcal{H}_k \longrightarrow \mathcal{H}_j). \tag{3.40}$$

Рівність Парсеваля (3.39) можна переписати таким чином:

$$\begin{aligned}(f,g)_{\mathbf{l}_2} &= \sum_{j,k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^2} (\Phi(x,y)\pi_k f, \pi_j g)_{\mathbf{l}_2} d\sigma(x,y) = \sum_{j,k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^2} (\pi_j \Phi(x,y) \pi_k f, g)_{\mathbf{l}_2} d\sigma(x,y) \\ &= \sum_{j,k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^2} (\Phi_{j,k}(x,y) f_k, g_j)_{\mathbf{l}_2} d\sigma(x,y), \quad \forall f, g \in \mathbf{l}_2.\end{aligned} \tag{3.41}$$

Перейдемо тепер до вивчення більш спеціальних обмежених операторів A і B та A^{-1} і B^{-1}, що діють у просторі $\mathbf{l}_2$ (2.53). А саме, нехай дано матриці J_A і J_B та $J_{A^{-1}}$ і $J_{B^{-1}}$, які мають тридіагональну блочну структуру у вигляді (2.72) і (2.88) та (2.105) і (2.112). Таким чином, ці оператори визначаються виразами в (2.73) і (2.89) та (2.106) і (2.113). Нагадаємо, що норми всіх елементів a_n, b_n, c_n і u_n, w_n, v_n та p_n, q_n, r_n і ω_n, ϕ_n, ψ_n рівномірно обмежені для $n \in \mathbb{N}_0$.

Для подальших досліджень *припускаємо, що додатково оператори A і B та A^{-1} і B^{-1} з (2.72) і (2.88) та (2.105) і (2.112) – обмежені комутуючі самоспряжені в* $\mathbf{l}_2$ (2.53).

3.5. Розв'язання системи різницевих рівнянь, породженої блочними матрицями відповідними дійсній сильній двовимірній проблемі моментів

Перепишемо рівність Парсеваля (3.6) в термінах узагальнених власних векторів комутуючих самоспряжених операторів A і B та A^{-1} і B^{-1}. Спочатку доведемо таку лему.

Лема 3.5.1 *Нехай* $\varphi(x,y) = (\varphi_n(x,y))_{n=0}^{\infty}$, $\varphi_n(x,y) \in \mathcal{H}_n$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *– узагальнений власний вектор з* $(\mathbf{l}_{\mathrm{fin}})'$ *оператора* A *з власним числом* x*, а також узагальнений власний вектор* B *з власним числом* y *та оператора* A^{-1} *з власним числом* x^{-1}*, а також узагальнений власний вектор* B^{-1} *з власним числом* y^{-1}*. Тоді* $\varphi(x,y)$ *– це розв'язок з* $(\mathbf{l}_{\mathrm{fin}})'$ *чотирьох різницевих рівнянь (див. (2.73) і (2.89) та (2.106) і (2.113)):*

$$\begin{gathered}(J_A\varphi(x,y))_n = a_{n-1}\varphi_{n-1}(x,y) + b_n\varphi_n(x,y) + c_n\varphi_{n+1}(x,y) = x\varphi_n(x,y),\\ (J_B\varphi(x,y))_n = u_{n-1}\varphi_{n-1}(x,y) + w_n\varphi_n(x,y) + v_n\varphi_{n+1}(x,y) = y\varphi_n(x,y),\\ (J_{A^{-1}}\varphi(x,y))_n = p_{n-1}\varphi_{n-1}(x,y) + q_n\varphi_n(x,y) + r_n\varphi_{n+1}(x,y) = x^{-1}\varphi_n(x,y),\\ (J_{B^{-1}}\varphi(x,y))_n = \psi_{n-1}\varphi_{n-1}(x,y) + \omega_n\varphi_n(x,y) + \phi_n\varphi_{n+1}(x,y) = y^{-1}\varphi_n(x,y),\\ n \in \mathbb{N}_0, \quad \varphi_{-1}(x,y) =: 0,\end{gathered} \tag{3.42}$$

з початковою умовою $\varphi_0 \in \mathbb{R}$.

Стверджуємо, що цей розв'язок є таким: $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\varphi_n(x,y) = Q_n(x,y)\varphi_0 = (Q_{n;0}, Q_{n;1}, \ldots, Q_{n;4n-1},)\varphi_0. \tag{3.43}$$

Тут $Q_{n;\alpha}$, $\alpha = 0,1,\ldots,n$ *- поліноми від* x *і* y*, і ці поліноми мають вигляд:*

$$\begin{aligned}&Q_{n;\alpha}(x,y) = k_{n;\alpha}x^{n-\alpha}y^{\alpha} + \cdots, \alpha = 0,1,\ldots,(n-1);\\ &Q_{n;\alpha}(x,y) = k_{n;\alpha}x^{n-\alpha}y^{2n-\alpha} + \cdots, \alpha = n, n+1,\ldots,(3n-1);\\ &Q_{n;\alpha}(x,y) = k_{n;\alpha}x^{\alpha-3n}y^{2n-\alpha} + \cdots, \alpha = 2n, 2n+1,\ldots,(3n-1);\\ &Q_{n;\alpha}(x,y) = k_{n;\alpha}x^{\alpha-3n}y^{\alpha-4n} + \cdots, \alpha = 3n, 3n+1,\ldots,(4n-1);\end{aligned} \tag{3.44}$$

де $k_{n;\alpha} > 0$ *і* $\ldots$ *– залишок згідно (2.51).*

Доведення. Для $n = 0$ система (3.42) має вигляд

$$
\begin{aligned}
&b_0\varphi_{00} + c_{0;0,0}\varphi_{10} = x\varphi_{00},\\
&w_0\varphi_{00} + u_{0;0,0}\varphi_{10} + u_{0;01}\varphi_{11} = y\varphi_{00},\\
&p_0\varphi_{00} + q_{0;0,0}\varphi_{10} + q_{0;0,1}\varphi_{11} + r_{0;02}\varphi_{12} = x^{-1}\varphi_{00},\\
&\psi_{00}\varphi_{00} + \omega_{0;0,0}\varphi_{10} + \omega_{0;01}\varphi_{11} + \phi_{0;02}\varphi_{12} + \phi_{0;03}\varphi_{13} = y^{-1}\varphi_{00}.
\end{aligned}
\tag{3.45}
$$

Система (3.45), очевидно, при заданому $\varphi_{0,0}$ однозначно розв'язується відносно невідомих $\varphi_{1,0}$, $\varphi_{1,1}$, $\varphi_{1,2}$ та $\varphi_{1,3}$.

Далі слід припустити, що $\varphi_{n-1}(x,y)$ та $\varphi_n(x,y)$ для деяких n є компонентами узагальненого власного вектора $\varphi(x,y) = (\varphi_n(x,y))_{n=0}^{\infty}$. За індукцією показуємо, що $\varphi_{n+1}(x,y)$ також має вигляд (3.44).

3.6. Відновлення міри за чотирма заданими блочними матрицями

Розглянемо $Q_n(x,y)$ з фіксованими x і y як лінійний оператор, який діє з $\mathcal{H}_0$ в $\mathcal{H}_n$, тобто, $\mathcal{H}_0 \ni \varphi_0 \longmapsto Q_n(x,y)\varphi_0 \in \mathcal{H}_n$. Також розуміємо $Q_n(x,y)$ як операторнозначний поліном від x і y та x^{-1} і y^{-1}; отже, спряжений оператор має вигляд $Q_n^*(x,y) = (Q_n(x,y))^* : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_0$. Використовуючи поліноми $Q_n(x,y)$, побудуємо таке зображення для $\Phi_{j,k}(x,y)$.

Лема 3.6.1 *Оператор $\Phi_{j,k}(x,y)$, $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$ має такий вигляд:*

$$
\Phi_{j,k}(x,y) = Q_j(x,y)\Phi_{0,0}(x,y)Q_k^*(x,y) : \mathcal{H}_k \longrightarrow \mathcal{H}_j, \quad j,k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.46}
$$

де $\Phi_{0,0}(x,y) \geq 0$ скаляр.

Доведення. Для фіксованого $k \in \mathbb{N}_0$ вектор $\varphi = \varphi(x,y) = (\varphi_j(x,y))_{j=0}^{\infty}$, де

$$
\varphi_j(x,y) = \Phi_{j,k}(x,y) = \pi_j\Phi(x,y)\pi_k \in \mathcal{H}_j, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \tag{3.47}
$$

є узагальненим розв'язком, в $(\mathbf{l}_{\text{fin}})'$ системи рівнянь

$$
\begin{aligned}
J_A\varphi(x,y) &= x\varphi(x,y), & J_B\varphi(x,y) &= y\varphi(x,y)\\
J_{A^{-1}}\varphi(x,y) &= x^{-1}\varphi(x,y), & J_{B^{-1}}\varphi(x,y) &= y^{-1}\varphi(x,y)
\end{aligned}
\tag{3.48}
$$

оскільки $\Phi(x,y)$ – це проектор на узагальнені власні вектори операторів A і B та B^{-1} і A^{-1} з відповідними узагальненими власними числами x і y та x^{-1} і y^{-1} . Отже, $\varphi = \varphi(x,y) \in \mathbf{l}_2(p^{-1})$ існує, як звичайний розв'язок системи рівнянь (3.48) з початковою умовою $\varphi_0 = \pi_0 \Phi(x,y)\pi_k \in \mathcal{H}_0$.

Використаємо лему 3.6.1 і у зв'язку з (3.43) отримуємо

$$\Phi_{j,k}(x,y) = Q_j(x,y)(\Phi_{0,k}(x,y)), \quad j \in \mathbb{N}_0. \tag{3.49}$$

Оператор $\Phi(x,y) : \mathbf{l}_2(p) \longrightarrow \mathbf{l}_2(p^{-1})$ формально самоспряжений на $\mathbf{l}_2$ і є похідною розкладу одиниці оператора A на $\mathbf{l}_2$ відносно спектральної міри. Отже, відповідно до (3.46) отримуємо

$$(\Phi_{j,k}(x,y))^* = (\pi_j \Phi(x,y)\pi_k)^* = \pi_k \Phi(x,y)\pi_j = \Phi_{k,j}(x,y), \quad j,k \in \mathbb{N}_0. \tag{3.50}$$

Для фіксованого $j \in \mathbb{N}_0$ з (3.50) і попереднього розглянутого матеріалу, випливає, що вектор

$$\varphi = \varphi(x,y) = (\varphi_k(x,y))_{k=0}^{\infty}, \quad \varphi_k(x,y) = \Phi_{k,j}(x,y) = (\Phi_{j,k}(x,y))^*$$

це звичайний розв'язок рівнянь (3.48) з початковою умовою $\varphi_0 = \Phi_{0,j}(x,y) = (\Phi_{j,0}(x,y))^*$.

Знову використавши лему 3.6.1, отримаємо зображення типу (3.49),

$$\Phi_{k,j}(x,y) = Q_k(x,y)(\Phi_{0,j}(x,y)), \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{3.51}$$

Беручи до уваги (3.50) і (3.51), отримаємо

$$\Phi_{0,k}(x,y) = (\Phi_{k,0}(x,y))^* = (Q_k(x,y)\Phi_{0,0}(x,y))^* = \Phi_{0,0}(x,y)(Q_k(x,y))^*, k \in \mathbb{N}_0 \tag{3.52}$$

(тут використовуємо $\Phi_{0,0}(x,y) \geq 0$, ця нерівність випливає з (3.39) і (3.40)). Підставляючи (3.52) в (3.49) отримуємо (3.46). $\square$

Тепер можна переписати рівність Парсеваля (3.41) в більш конкретній формі. Нарешті, підставимо вираз (3.46) для $\Phi_{j,k}(x,y)$ в (3.41) і отримаємо, що

$$\begin{aligned}(f,g)_{\mathbf{l}_2} &= \sum_{j,k=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^2}(\Phi_{j,k}(x,y)f_k,g_j)_{\mathbf{l}_2}d\sigma(x,y) = \\ &= \sum_{j,k=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^2}(Q_j(x,y)\Phi_{0,0}(x,y)Q_k^*(x,y)f_k,g_j)_{\mathbf{l}_2}d\sigma(x,y) \\ &= \sum_{j,k=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^2}(Q_k^*(x,y)f_k,Q_j^*(x,y)g_j)_{\mathbf{l}_2}d\rho(x,y) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}Q_k^*(x,y)f_k\right)\overline{\left(\sum_{j=0}^{\infty}Q_j^*(x,y)g_j\right)}d\rho(x,y), \\ d\rho(x,y) &= \Phi_{0,0}(x,y)\,d\sigma(x,y), \quad \forall f,g\in\mathbf{l}_{\mathrm{fin}}.\end{aligned} \tag{3.53}$$

Позначимо перетворення Фур'є $\widehat{\ }$ для комутуючих самоспряжених операторів A і B, у яких є обернені A^{-1} і B^{-1}, в просторі $\mathbf{l}_2$ (2.53)

$$\mathbf{l}_2\supset\mathbf{l}_{\mathrm{fin}}\ni f=(f_n)_{n=0}^{\infty}\longmapsto\hat{f}(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}Q_n^*(x,y)f_n\in L_2(\mathbb{R}^2,d\rho(x,y)). \tag{3.54}$$

Отже, (3.53) дає рівність Парсеваля у фінальній формі,

$$(f,g)_{\mathbf{l}_2}=\int_{\mathbb{R}^2}\hat{f}(x,y)\overline{\hat{g}(x,y)}\,d\rho(x,y), \quad \forall f,g\in\mathbf{l}_{\mathrm{fin}}. \tag{3.55}$$

Продовжимо (3.55) за неперервністю $\forall f,g\in\mathbf{l}_2$. Ортогональність поліномів $Q_n^*(x,y)$ випливає з (3.54) і (3.55). А саме, достатньо лише взяти $f=(0,\ldots,0,f_k,0,\ldots)$, $f_k\in\mathcal{H}_k$, $g=(0,\ldots,0,g_j,0,\ldots)$, $g_j\in\mathcal{H}_j$ в (3.54) і (3.55). Тоді

$$\int_{\mathbb{R}^2}(Q_k^*(x,y)f_k)\overline{(Q_j^*(x,y)g_j)}\,d\rho(x,y)=\delta_{j,k}(f_j,g_j)_{\mathcal{H}_j}, \quad \forall k,j\in\mathbb{N}_0. \tag{3.56}$$

Використаємо зображення (3.43) для цих многочленів, можемо переписати рівність (3.56) у скалярній формі. Щоб зробити це, зауважимо, що в цілому $Q_0^*(x,y)=\bar{Q}_0(x,y)$ і для $n\in\mathbb{N}$ відповідно до (3.43) $Q_n(x,y)=(Q_{n;0}(x,y),$

$Q_{n;1}(x,y),\ldots,Q_{n;4n-1}(x,y)):\mathcal{H}_0\longrightarrow\mathcal{H}_n$. Отже, для спряженого оператора $Q_n^*(x,y):\mathcal{H}_n\longrightarrow\mathcal{H}_0$ маємо

$$\begin{aligned}(Q_n(x,y)q,p)_{\mathcal{H}_n}&=((Q_{n;0}(x,y)q_0,Q_{n;1}(x,y)q_1,\ldots,Q_{n;n}(x,y)q_{4n-1}),(p_0,p_1,\ldots,p_n))_{\mathcal{H}_n}\\&=Q_{n;0}(x,y)q_0\bar{p}_0+Q_{n;1}(x,y)q_1\bar{p}_1+\cdots+Q_{n;n}(x,y)q_{4n-1}\bar{p}_n\\&=q\overline{(\overline{Q_{n;0}(x,y)}p_0+\overline{Q_{n;1}(x,y)}p_1+\cdots+\overline{Q_{n;n}(x,y)}p_n)}\\&=(q,Q_n^*(x,y)p)_{\mathcal{H}_0},\end{aligned}$$

де $Q_n^*(x,y)p=\overline{Q_{n;0}(x,y)}p_0+\overline{Q_{n;1}(x,y)}p_1+\cdots+\overline{Q_{n;4n-1}(x,y)}p_n$, $\forall q\in\mathcal{H}_0$, і $p=(p_0,p_1,\ldots,p_{4n-1})\in\mathcal{H}_n$.

З останньої рівності для $n\in\mathbb{N}$ і $f_n=(f_{n,0},f_{n,1},\ldots,f_{n,n})\in\mathcal{H}_n$, отримуємо

$$Q_n^*(x,y)f_n=\overline{Q_{n;0}(x,y)}f_{n;0}+\overline{Q_{n;1}(x,y)}f_{n;1}+\cdots+\overline{Q_{n;4n-1}(x,y)}f_{n;4n-1},\quad Q_0^*(x,y)=1. \tag{3.57}$$

Тому (3.56) має вигляд: $\forall f_{k;0},f_{k;1},\ldots,f_{k;4k-1},\ g_{j;0},g_{j;1},\ldots,g_{j;4j-1}\in\mathbb{C}$, $j,k\in\mathbb{N}_0$,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2}\left(\sum_{\alpha=0}^{k}\overline{Q_{k;\alpha}(x,y)}f_{k;\alpha}\right)\overline{\left(\sum_{\beta=0}^{j}\overline{Q_{j;\beta}(x,y)}f_{j;\beta}\right)}d\rho(x,y)=\delta_{j,k}\sum_{\alpha=0}^{j}f_{j;\alpha}\bar{g}_{j;\alpha}.$$

Ця рівність еквівалентна співвідношенню ортогональності у класичній формі:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2}\overline{Q_{k;\beta}^*(x,y)}Q_{j;\alpha}d\rho(x,y)=\delta_{j,k}\delta_{\alpha,\beta}\quad(Q_{0;0}=Q_0(x,y)), \tag{3.58}$$

$\forall j,k\in\mathbb{N}_0$, $\forall\alpha=0,1,\ldots,4j-1,\beta=0,1,\ldots,4k-1$.

Відзначимо, що у зв'язку з (3.57) перетворення Фур'є (3.54) може бути переписано у вигляді:

$$\hat{f}(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\alpha=0}^{4n-1}\overline{Q_{n;\alpha}(x,y)}f_{n;\alpha},\quad\forall f=(f_n)_{n=0}^{\infty}\in\mathbf{l}_2.\quad(x,y)\in\mathbb{R}^2, \tag{3.59}$$

Використавши викладені результати цього розділу, можемо сформулювати таку спектральну теорему для наших обмежених, комутуючих симетричних операторів A і B, для яких існують обернені A^{-1} і B^{-1}.

Теорема 3.6.2 *Розглянемо простір (2.53):*

$$\mathbf{l}_2 = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus, \cdots, \mathcal{H}_0 = \mathbb{C}, \quad \mathcal{H}_n = \mathbb{C}^{4n}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.60}$$

і лінійні оператори A і B з їхніми оберненими A^{-1} і B^{-1}, які визначаються на скінченних векторах $\mathbf{l}_{\mathrm{fin}}$ блочними тридіагональними матрицями типу Якобі J_A і J_B та $J_{A^{-1}}$ і $J_{B^{-1}}$ у вигляді (2.72) і (2.88) та (2.105) і (2.112) за допомогою виразів в (2.73) і (2.89) та (2.106) і (2.113). Вважаємо, що всі коефіцієнти a_n, b_n, c_n і u_n, w_n, v_n та p_n, q_n, r_n і ω_n, ϕ_n, ψ_n, $n \in \mathbb{N}_0$, рівномірно обмежені, деякі елементи цих матриць дорівнюють нулю або додатні відповідно до (2.45), (2.46) і (2.27), (2.28) і замикання A і B за неперервністю обмежені комутуючі оператори самосопряжені на цьому просторі.

Розклад за узагальненими власними векторами операторів A і B та A^{-1} і B^{-1} відповідних блочним тридіагональним матрицям типу Якобі J_A, J_B, $J_{A^{-1}}$, $J_{B^{-1}}$ має такий вигляд. Для заданого початкового значення $\varphi_0(x,y) = \varphi_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ система рівнянь

$$\begin{aligned}
(J_A\varphi(x,y))_n &= a_{n-1}\varphi_{n-1}(x,y) + b_n\varphi_n(x,y) + c_n\varphi_{n+1}(x,y) = x\varphi_n(x,y),\\
(J_B\varphi(x,y))_n &= u_{n-1}\varphi_{n-1}(x,y) + w_n\varphi_n(x,y) + v_n\varphi_{n+1}(x,y) = y\varphi_n(x,y),\\
(J_{A^{-1}}\varphi(x,y))_n &= p_{n-1}\varphi_{n-1}(x,y) + r_n\varphi_n(x,y) + q_n\varphi_{n+1}(x,y) = x^{-1}\varphi_n(x,y),\\
(J_{B^{-1}}\varphi(x,y))_n &= \psi_{n-1}\varphi_{n-1}(x,y) + \omega_n\varphi_n(x,y) + \phi_n\varphi_{n+1}(x,y) = y^{-1}\varphi_n(x,y),\\
n \in \mathbb{N}_0, &\quad \varphi_{-1}(x,y) =: 0, a_{n-1} = u_{n-1} = p_{n-1} = \psi_{n-1} =: 0
\end{aligned} \tag{3.61}$$

має розв'язок $\varphi(x,y) = (\varphi_n(x,y))_{n=0}^{\infty}$, $\varphi_n(x,y)$ зі значеннями в $\mathcal{H}_n$, у вигляді:

$$\varphi_n(x,y) = P_n(x,y)\varphi_0 = (P_{n;0}, P_{n;1}, \ldots, P_{n;4n-1},)\varphi_0,$$

який є узагальненим власним вектором пари операторів A і B та A^{-1} і B^{-1} згідно проекційної спектральної теореми [3, 8, 10]. $P_{n;\gamma}(x,y)$, $\gamma = 0, 1, \ldots, 4n-1$ – поліноми від x і y та x^{-1} і y^{-1}.

З розкладу за узагальненими власними векторами для операторів A і B та A^{-1}

і B^{-1} отримуємо перетворення Фур'є у вигляді

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_2 \supset \mathbf{l}_{\text{fin}} \ni f =& (f_n)_{n=0}^{\infty} \longmapsto \hat{f}(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^*(x,y) f_n \\ =& P_{0;0}(x,y) f_{0;0} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\gamma=0}^{4n-1} \overline{P_{n;\gamma}(x,y)} f_{n;\gamma} \in \ L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y)) := L_2, \end{aligned} \tag{3.62}$$

де $P_n^*(x,y) : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_0$ – оператор спряжений до $P_n(x,y) : \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{H}_n$, $d\rho(x,y)$ – відповідна спектральна міра A і B (A^{-1} і B^{-1}).

Рівність Парсеваля має вигляд: $\forall f, g \in \mathbf{l}_{\text{fin}}$

$$(f,g)_{\mathbf{l}_2} = \int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(x,y)\overline{\hat{g}(x,y)}\, d\rho(x,y),$$

$$\begin{aligned} (J_A f, g)_{\mathbf{l}_2} &= \int_{\mathbb{R}^2} x\hat{f}(x,y)\overline{\hat{g}(x,y)}\, d\rho(x,y), \quad (J_{A^{-1}} f, g)_{\mathbf{l}_2} = \int_{\mathbb{R}^2} x^{-1}\hat{f}(x,y)\overline{\hat{g}(x,y)}\, d\rho(x,y), \\ (J_B f, g)_{\mathbf{l}_2} &= \int_{\mathbb{R}^2} y\hat{f}(x,y)\overline{\hat{g}(x,y)}\, d\rho(x,y), \quad (J_{B^{-1}} f, g)_{\mathbf{l}_2} = \int_{\mathbb{R}^2} y^{-1}\hat{f}(x,y)\overline{\hat{g}(x,y)}\, d\rho(x,y). \end{aligned} \tag{3.63}$$

Перетворення (3.62) і тотожність (3.63) розширюються за неперервністю на $\forall f, g \in \mathbf{l}_2$ так, що оператор (3.62) є унітарним і відображає весь $\mathbf{l}_2$ у весь $L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y))$.

Поліноми $P_{n;\gamma}(x,y)$, $n \in \mathbb{N}$, $\gamma = 0, ..., 4n-1$ і $P_{0;0} = 1$ утворюють ортонормовану систему в L_2 у сенсі:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^{j} \overline{P_{j;i}(x,y)} f_{j;i} \sum_{i=l}^{k} P_{k;l}(x,y) \overline{f_{k;l}} = \delta_{j,k} (f_j, g_k)_{\mathcal{H}_j}.$$

де $\forall f_j \in \mathcal{H}_j$, $\forall g_k \in \mathcal{H}_k$, $j,k \in \mathbb{N}_0$.

Матриці

$$\begin{aligned} J_A = (\tau_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}, \tau_{j,k} = (\tau_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{4j-1,4j+3}, \quad J_B = (\theta_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}, \theta_{j,k} = (\theta_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{4j-1,4j+3}, \\ J_{A^{-1}} = (\eta_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}, \eta_{j,k} = (\eta_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{4j-1,4j+3}, J_{B^{-1}} = (\vartheta_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}, \vartheta_{j,k} = (\vartheta_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{4j-1,4j+3}, \end{aligned}$$

відновлюються за формулами:

$$\begin{aligned}
\tau_{j,k;\alpha,\beta} =&(J_A\delta_{k,\beta},\delta_{j,\alpha})_{\mathbf{l}_2} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} x\overline{P_{k;\beta}(x,y)}P_{j;\alpha}(x,y)d\rho(x,y),\\
\theta_{j,k;\alpha,\beta} =&(J_B\delta_{k,\beta},\delta_{j,\alpha})_{\mathbf{l}_2} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} y\overline{P_{k;\beta}(x,y)}P_{j;\alpha}(x,y)d\rho(x,y),\\
\eta_{j,k;\alpha,\beta} =&(J_A\delta_{k,\beta},\delta_{j,\alpha})_{\mathbf{l}_2} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} x^{-1}\overline{P_{k;\beta}(x,y)}P_{j;\alpha}(x,y)d\rho(x,y),\\
\vartheta_{j,k;\alpha,\beta} =&(J_B\delta_{k,\beta},\delta_{j,\alpha})_{\mathbf{l}_2} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} y^{-1}\overline{P_{k;\beta}(x,y)}P_{j;\alpha}(x,y)d\rho(x,y),\\
&j,k\in\mathbb{N}_0,\quad \alpha,\beta=0,1,\ldots,4n-1.
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Тут перепозначено:

$b_j = \tau_{j,j}$, $w_j = \theta_{j,j}$, $\tau_j = \eta_{j,j}$, $\omega_j = \vartheta_{j,j}$, $c_j = \tau_{j,j+1}$, $u_j = \theta_{j,j+1}$, $q_j = \eta_{j,j+1}$, $\phi_j = \vartheta_{j+1,j}$, $a_j = \tau_{j,j}$, $v_j = \theta_{j,j+1}$, $p_j = \eta_{j+1,j}$, $\psi_j = \vartheta_{j+1,j}$, $j \in \mathbb{N}_0$.

Доведення. Необхідно тільки показати, що поліноми $\overline{Q_{n;\alpha}(x,y)}$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha = 0,1,\ldots,4n-1$ і $Q_{0;0}(x,y) = 1$ ортогональні і утворюють тотальну множину в просторі $L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y))$. Для цього спочатку зауважимо, що через компактність носія міри $d\rho(x,y)$ на $\mathbb{R}^2$, елементи $x^j y^k$, $j,k \in \mathbb{Z}$, утворюють тотальну множину в $L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y))$.

Припустимо протилежне, тобто, що наша система поліномів не є тотальною. Тоді існує ненульова функція $h(x,y) \in L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y))$, що є ортогональною до всіх цих поліномів і, отже, відповідно до (3.44) для всіх $x^j y^k$, $j,k \in \mathbb{Z}$. Отже $h(x,y) = 0$. $\square$

Остання теорема розв'язує пряму спектральну задачу для обмежених симетричних комутуючих операторів A і B, які мають обернені A^{-1} і B^{-1}, та зображаються в просторі $\mathbf{l}_2$ матрицями J_A і J_B та $J_{A^{-1}}$ і $J_{B^{-1}}$ у вигляді (2.72) і (2.88) та (2.105) і (2.112).

Обернена задача полягає у побудові за заданою мірою $d\rho(x,y)$ на $\mathbb{R}^2$ з компактним носієм обмежених симетричних комутуючих матриць J_A і J_B та їх обернених $J_{A^{-1}}$ і $J_{B^{-1}}$ у вигляді (2.72) і (2.88) та (2.105) і (2.112), які мають свою спектральну міру, що і дорівнює $d\rho(x,y)$. *Ця побудова ведеться відповідно до теорем 2.4.5,* *2.4.10, 2.4.15 та 2.4.18 з використанням ортогоналізації Шмідта для системи (2.49). Для матриць J_A і J_B та $J_{A^{-1}}$ і $J_{B^{-1}}$ у вигляді (2.72) і (2.88) та (2.105) і (2.112), які побудовані за заданою $d\rho(x, y)$, спектральна міра відповідних обмежених симетричних, комутуючих операторів A і B співпадає з початковою мірою.*

Висновки. За заданими блочними матрицями типу Якобі складена і розв'язана система різницевих рівнянь. Розв'язками є двовимірні поліноми на дійсній площині. За поліномами відновлена міра (в сенсі рівності Парсеваля). Поліноми є лінійно незалежними і утворюють тотальну множину відносно відновленої міри, яка однозначно відповідає заданим блочним матрицям. Тобто розв'язана обернена спектральна задача.

РОЗДІЛ 4

Суміжні питання

В цьому розділі розглядаються поліноми другого роду відповідні дійсній двовимірній (сильній і не сильній) проблемі моментів та введений аналог функції Вейля. Також доведена однозначність відповідності міри матрицям у випадку необмежених операторів для не сильної проблеми моентів.

4.1. Поліноми другого роду відповідні двовимірній дійсній проблемі моментів

У другому розділі йшлося про поліноми першого роду, які є аналогом поліномів першого роду класичної теорії якобієвих матриць. У випадку двовимірної (не сильної) проблеми моментів також можна ввести аналог поліномів другого роду.

Поліноми другого роду $Q_n(z_1 z_2)$ визначаємо виразом, який узагальнює відомий вираз для поліномів другого роду у класичному випадку, а саме покладемо:

$$Q_n(z_1, z_2) := \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{P_n(\lambda, \mu) - P_n(\lambda, z_2) - P_n(z_1, \mu) + P_n(z_1, z_2)}{(\lambda - z_1)(\mu - z_2)} \, d\rho(\lambda, \mu), \tag{4.1}$$

де $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0$ і $d\rho(\lambda, \mu)$ – міра на $\mathbb{R}^2$ із компактним носієм, відповідна парі обмежених самоспряжених комутуючих операторів породжених матрицями J_A і J_B, які введені в підрозділі 2.2.

Теорема 4.1.1 *Послідовність* $Q(z_1,z_2) = (Q_n(z_1,z_2))_{n=0}^{\infty}$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, *де* $Q_n(z_1,z_2)$ *задано формулою (4.1), є розв'язком системи різницевих рівнянь із початковими даними:*

$$\begin{gathered} a_{n-1}Q_{n-1}(z_1,z_2) + b_nQ_n(z_1,z_2) + c_nQ_{n+1}(z_1,z_2) = z_1Q_n(z_1,z_2), \\ u_{n-1}Q_{n-1}(z_1,z_2) + w_nQ_n(z_1,z_2) + v_nQ_{n+1}(z_1,z_2) = z_2Q_n(z_1,z_2), \\ Q_{0;0}(z_1,z_2) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \end{gathered} \tag{4.2}$$

зокрема $Q_{n;0}(z_1,z_2) = Q_{0;n}(z_1,z_2) = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Доведення. Оскільки $P_{0;0}(z_1,z_2) = 1$, то з (4.1) просто отримуємо

$$Q_{0;0}(z_1,z_2) = 0, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{4.3}$$

Обчислимо $Q_{1;0}(z_1,z_2)$. З (4.3) і (4.4) $P_{1;0}(z_1,z_2) = P_{1;0}(z_1)$, (незалежить від z_2), отже $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$Q_{1;0}(z_1,z_2) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{P_n(\lambda) - P_n(\lambda) - P_n(z_1) + P_n(z_1)}{(\lambda - z_1)(\mu - z_2)}\, d\rho(\lambda,\mu) \equiv 0. \tag{4.4}$$

Обчислимо $Q_{1;1}(z_1,z_2)$. З (4.3) і (4.4): $P_{1;1}(z_1,z_2) = \text{l.c.}(1, z_1, z_2) = c_0 + c_1z_1 + c_2z_2$, де "l.c." позначена лінійна комбінація відповідних елементів. Отже, маємо $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} Q_{1;1}(z_1,z_2) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(\lambda - z_1)(\mu - z_2)} \Big(&(c_0 + c_1\lambda + c_2\mu) - (c_0 + c_1\lambda + c_2z_2) \\ &- (c_0 + c_1z_1 + c_2\mu) + (c_0 + c_1z_1 + c_2z_2) \Big)\, d\rho(\lambda,\mu) \equiv 0. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Покажемо, що $Q_{n;0}(z_1,z_2) = 0$. Поліном $P_{n;0}(z_1,z_2)$ має вигляд: $P_{n;0}(z_1,z_2) = k_{n;0}z_1^n + \tilde{R}_{n-1}(z_1,z_2)$, де коефіцієнти $k_{n;0} > 0$ і $\tilde{R}_{n-1}(z_1,z_2) := \text{l.c.}\{P_{0;0}(z_1,z_2), P_{1;0}(z_1,z_2), \ldots, P_{n-1;n-1}(z_1,z_2)\}$. Отже, завдяки (4.3) і (4.4) поліном $Q_{n;0}(z_1,z_2)$ можна подати у вигляді:

$$\begin{aligned} Q_{n;0}(z_1,z_2) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(\lambda - z_1)(\mu - z_2)} \Big(&(k_{n;0}\lambda^n + \tilde{R}_{n-1}(\lambda,\mu)) - (k_{n;0}\lambda^n + \tilde{R}_{n-1}(\lambda,z_2)) \\ - (k_{n;0}z_1^n + \tilde{R}_{n-1}(z_1,\mu)) &+ (k_{n;0}z_1^n + \tilde{R}_{n-1}(z_1,z_2)) \Big)\, d\rho(\lambda,\mu) =: \tilde{Q}_{n-1;n-1}(z_1,z_2), \end{aligned}$$

де $\tilde{Q}_{n-1;n-1}(z_1, z_2) = \text{l.c.}\{Q_{0;0}(z_1, z_2), Q_{1;0}(z_1, z_2), ..., Q_{n-1;n-1}(z_1, z_2)\}$. А оскільки поліноми $Q_{n;\alpha}(z_1, z_2)$ є лінійно незалежними, то $Q_{n;0}(z_1, z_2) = 0$.

Покажемо також, що $Q_{0;n}(z_1, z_2) = 0$. Поліном $P_{n;n}(z_1, z_2)$ згідно (2.2) та (2.3) має вигляд: $P_{n;n}(z_1, z_2) = k_{n;n} z_2^n + \tilde{R}_{n-1}(z_1, z_2)$, де коефіцієнти $k_{n;n} > 0$ і $\tilde{R}_{n-1}(z_1, z_2) := \text{l.c.}\{P_{0;0}(z_1, z_2), P_{1;0}(z_1, z_2), ..., P_{n;n-1}(z_1, z_2)\}$.

Отже, завдяки (4.3) і (4.4) поліном $Q_{n;n}(z_1, z_2)$ можна подати у вигляді:

$$Q_{n;n}(z_1, z_2) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(\lambda - z_1)(\mu - z_2)} \Big((k_{n;n}\mu^n + \tilde{R}_{n-1}(\lambda, \mu)) - (k_{n;n} z_2^n + \tilde{R}_{n-1}(\lambda, z_2))$$
$$- (k_{n;n}\mu^n + \tilde{R}_{n-1}(z_1, \mu)) + (k_{n;n} z_2^n + \tilde{R}_{n-1}(z_1, z_2)) \Big) \, d\rho(\lambda, \mu) =: \tilde{Q}_{n;n-1}(z_1, z_2).$$

де $\tilde{Q}_{n;n-1}(z_1, z_2) = \text{l.c.}\{Q_{0;0}(z_1, z_2), Q_{1;0}(z_1, z_2), ..., Q_{n-1;n}(z_1, z_2)\}$. Але, оскільки поліноми $Q_n(z_1, z_2)$ є лінійно незалежними, то $Q_{n;n}(z_1, z_2) = 0$. Останній вираз дає початкові данні з (4.2).

Для завершення доведення лишилося перевірити, що $Q_n(z_1, z_2)$, $n \in \mathbb{N}$ задовольняють обидва рівняння (4.10). Розглянемо перше рівняння. Згідно (4.1) маємо:

$$\begin{aligned}
(J_A Q(z_1, z_2))_n &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(\lambda - z_1)(\mu - z_2)} \\
&\times \Big((J_A P(\lambda, \mu))_n - (J_A P(\lambda, z_2))_n - (J_A P(z_1, \mu))_n + (J_A P(z_1, z_2))_n \Big) d\rho(\lambda, \mu) \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\Big(\lambda P_n(\lambda, \mu) - \lambda P_n(\lambda, z_2) - z_1 P_n(z_1, \mu) + z_1 P_n(z_1, z_2) \Big)}{(\lambda - z_1)(\mu - z_2)} d\rho(\lambda, \mu) \\
&= z_1 \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\Big(P_n(\lambda, \mu) - P_n(\lambda, z_2) - P_n(z_1, \mu) + P_n(z_1, z_2) \Big)}{(\lambda - z_1)(\mu - z_2)} d\rho(\lambda, \mu) \\
&+ \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{P_n(\lambda, \mu) - P_n(\lambda, z_2)}{(\mu - z_2)} \, d\rho(\lambda, \mu) = z_1 Q_n(z_1, z_2) + \int\limits_{\mathbb{R}^2} \hat{P}_n(\lambda, \mu, z_2) \, d\rho(\lambda, \mu).
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Останній інтеграл в (4.6) дорівнює нулю, отже (4.6) приводить до $(J_A Q(z_1, z_2))_n = z_1 Q_n(z_1, z_2)$, $n \in \mathbb{N}$. Це означає, що перша рівність (4.2) виконується.

Аналогічно,

$$
\begin{aligned}
(J_BQ(z_1,z_2))_n &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(\lambda - z_1)(\mu - z_2)} \\
&\times \Big((J_BP(\lambda,\mu))_n - (J_BP(\lambda,z_2))_n - (J_BP(z_1,\mu))_n + (J_BP(z_1,z_2))_n \Big) d\rho(\lambda,\mu) \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\Big(\mu P_n(\lambda,\mu) - z_2 P_n(\lambda,z_2) - \mu P_n(z_1,\mu) + z_2 P_n(z_1,z_2)\Big)}{(\lambda - z_1)(\mu - z_2)} d\rho(\lambda,\mu) \\
&= z_2 \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\Big(P_n(\lambda,\mu) - P_n(\lambda,z_2) - P_n(z_1,\mu) + P_n(z_1,z_2)\Big)}{(\lambda - z_1)(\mu - z_2)} d\rho(\lambda,\mu) \\
&+ \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{P_n(\lambda,\mu) - P_n(z_1,\mu)}{(\lambda - z_1)} \, d\rho(\lambda,\mu) = z_2 Q_n(z_1,z_2) + \int\limits_{\mathbb{R}^2} \hat{P}_n(\lambda,\mu,z_1)\, d\rho(\lambda,\mu).
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

Останній інтеграл (4.7) також дорівнює нулю, отже (4.7) дає $(J_BQ(z_1,z_2))_n = z_2Q_n(z_1,z_2)$, $n \in \mathbb{N}$. Це означає, що друга рівність (4.2) також виконується. $\square$

Як результат, для поліномів $Q_n(z_1,z_2)$ другого роду, спостерігаємо ситуацію аналогічну до поліномів першого роду: їх послідовність є розв'язком для $n = 1, 2, \dots$ системи (4.10) із заданими в (4.2) початковими умовами $Q_0(z_1,z_2) = 0$. Взагалі ці поліноми не ортогональні в просторі $L^2(\mathbb{R}^2, d\rho(\lambda,\mu))$ відносно міри $d\rho(\lambda,\mu)$ породженої обмеженими комутуючими самоспряженими операторами J_A і J_B.

Зауважимо також, що запропонований підхід дозволяє записати поліноми другого роду і для випадку комплексної проблеми моментів, які відсутні в [9, 38].

Як у випадку класичної проблеми моментів Гамбургера, поліноми другого роду разом із поліномами першого роду можуть бути використаними для опису всіх спектральних мір породжених самоспряженими розширеннями в $\mathbf{l}_2$ операторів J_A і J_B у випадку, коли J_A і J_B не є обмеженими і самоспряженими а лише ермітовими але мають самоспряжені розширення комутуючі у строгому резольвентному сенсі. Проте, реалізація такого проекту не є простою у зв'язку із відсутністю на сьогодні внутрішнього опису матриць вигляду (2.26) та (2.44) із відповідними властивостями (як це відомо для матриць, відповідних тригонометричній проблемі моментів (CMV-матриць) [69, 70], або матриць відповідних сильній проблемі моментів Гамбургера

[49]). Також є невідомим внутрішній опис матриць відповідних нормальній проблемі моментів [38]. Дослідження цих питань є актуальними задачами.

4.2. Аналог функції типу Вейля відповідний двовимірній дійсній проблемі моментів

Аналогічно тому, як в [9] вводиться функція Вейля для комплексної проблеми моментів введемо також аналог функції Вейля для двовимірної дійсної проблеми моментів. Використовуючи вираз (4.1),

$$M(z_1, z_2) = (R_{z_1}(A)\delta_0, R_{\bar{z}_2}(B)\delta_0)_{\mathbf{l}_2} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(\lambda - z_1)(\mu - z_2)}\, d\rho(\lambda, \mu). \tag{4.8}$$

$z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Аналогічно, як у класичній проблемі моментів Гамбургера, введену функцію (4.8) характеризує така теорема.

Теорема 4.2.1 *Нехай J_A і J_B блочні матриці типу Якобі вигляду (2.26) та (2.44) із відповідними властивостями, які породжують в $\mathbf{l}_2$ обмежені комутуючі самоспряжені оператори J_A і J_B. Нехай $R_{z_1}(A)$ і $R_{z_2}(B)$ їх резольвенти (*$\mathrm{Im} z_i \neq 0$*, $i = 1, 2$). Тоді функція $M(z_1, z_2) = (R_{z_1}(A)\delta_0, R_{\bar{z}_2}(B)\delta_0)_{\mathbf{l}_2}$ (4.8) однозначно визначає спектральну міру цих операторів.*

Доведення. Завдяки спектральній теоремі, маємо означення

$$M(z_1, z_2) = (R_{z_1}(A)\delta_0, R_{\bar{z}_2}(B)\delta_0)_{\mathbf{l}_2} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(\lambda - z_1)(\mu - z_2)}\, d\rho(\lambda, \mu).$$

Оскільки оператори відповідні матрицям J_A і J_B вважаються обмеженими, то їх спектр є обмеженим, і отже для $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ можемо записати:

$$M(z_1,z_2)=\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{(\lambda-z_1)(\mu-z_2)}\,d\rho(\lambda,\mu)=\frac{1}{z_1z_2}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{(1-\frac{\lambda}{z_1})(1-\frac{\mu}{z_2})}\,d\rho(\lambda,\mu)$$
$$=\frac{1}{z_1z_2}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{z_1}\right)^m\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{z_2}\right)^n\right)d\rho(\lambda,\mu)$$
$$=\frac{1}{z_1z_2}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\left(\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{1}{z_1^m z_2^n}\lambda^m\mu^n\right)d\rho(\lambda,\mu)$$
$$=\frac{1}{z_1z_2}\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{1}{z_1^m z_2^n}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\lambda^m\mu^n\,d\rho(\lambda,\mu)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{s_{m,n}}{z_1^{m+1}z_2^{n+1}},$$

де (див. 1.5)

$$s_{m,n}=\int\limits_{\mathbb{R}^2}\lambda^m\mu^n\,d\rho(\lambda,\mu),\quad m,n\in\mathbb{N}_0.$$

З попереднього запису функції $M(z_1,z_2)$ у вигляді ряду за $z_1^m z_2^n$, випливає, що коефіцієнти $s_{m,n}$ цього ряду за $M(z_1,z_2)$ відновлюються однозначно. Але ці коефіцієнти є моментами міри $d\rho(\lambda,\mu)$ і задовольняють оцінку $|s_{n,m}|\le\|J_A\|^m\|J_B\|^n$. Оскільки міра $d\rho(\lambda,\mu)$ відновлюється однозначно за моментами $s_{m,n}$, то і функція $M(z_1,z_2)$ також відновлюється однозначно. $\square$

4.3. Поліноми другого роду відповідні двовимірній сильній дійсній проблемі моментів

Розглядаються матриці J_A, J_B, $J_{A^{-1}}$, $J_{B^{-1}}$ вигляду (2.72) і (2.88) та (2.105) і (2.112) із відповідними властивостями. У підрозділі 2.3 йшлося про поліноми першого роду, які є аналогом поліномів першого роду класичної теорії якобієвих матриць. У нашому випадку також можна ввести аналог поліномів другого роду.

Поліноми другого роду $Q_n(z_1z_2)$ визначаємо виразом аналогічно до випадку не сильної проблеми моментів:

$$Q_n(z_1,z_2) := \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{(P_n(\lambda,\mu) - P_n(\lambda,z_2) - P_n(z_1,\mu) + P_n(z_1,z_2))}{(\lambda - z_1)(\mu - z_2)} d\rho(\lambda,\mu), \tag{4.9}$$

де $z_1, z_2 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$, і $d\rho(\lambda,\mu)$ міра на $\mathbb{R}^2$ із компактним носієм, відповідна парі обмежених самоспряжених комутуючих операторів, породжених матрицями J_A і J_B та їх алгебраїчними оберненими $J_{A^{-1}}$ і $J_{B^{-1}}$.

Теорема 4.3.1 *Послідовність* $Q(z) = (Q_n(z_1,z_2))_{n=0}^{\infty}$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, *де* $Q_n(z_1,z_2)$ *задано формулою (4.9), є розв'язком системи різницевих рівнянь із початковими даними:* $n \in \mathbb{N}$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} a_{n-1}Q_{n-1}(z_1,z_2) + b_nQ_n(z_1,z_2) + c_nQ_{n+1}(z_1,z_2) &= z_1Q_n(z_1,z_2),\\ u_{n-1}Q_{n-1}(z_1,z_2) + w_nQ_n(z_1,z_2) + v_nQ_{n+1}(z_1,z_2) &= z_2Q_n(z_1,z_2),\\ p_{n-1}Q_{n-1}(z_1,z_2) + r_nQ_n(z_1,z_2) + q_nQ_{n+1}(z_1,z_2) &= z_1^{-1}Q_n(z_1,z_2),\\ \psi_{n-1}Q_{n-1}(z_1,z_2) + \omega_nQ_n(z_1,z_2) + \phi_nQ_{n+1}(z_1,z_2) &= z_2^{-1}Q_n(z_1,z_2), \end{aligned} \tag{4.10}$$

із початковими даними $Q_{0;0}(z_1,z_2) = 0$.

Доведення. Оскільки $P_{0;0}(z_1,z_2) = 1$, то з (4.9) просто отримуємо

$$Q_{0;0}(z) = 0, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{4.11}$$

Обчислимо $Q_{1;0}(z_1,z_2)$. З (4.3), (4.4) і (4.1) $P_{1;0}(z_1,z_2) = P_{1;0}(z_1)$ (не залежить від z_2), отже, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$Q_{1;0}(z_1,z_2) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{P_n(\lambda) - P_n(\lambda) - P_n(z_1) + P_n(z_1)}{(\lambda - z_1)(\mu - z_2)} d\rho(\lambda,\mu) \equiv 0. \tag{4.12}$$

Доведення першого і другого рівнянь в (4.10) повністю повторює вирази з (4.6) та (4.7).

Отже, $(J_AQ(z_1,z_2))_n = z_1Q_n(z_1,z_2)$ та $(J_BQ(z_1,z_2))_n = z_2Q_n(z_1,z_2)$, $n \in \mathbb{N}$. Це означає, що перші дві рівності в (4.10) виконуються.

Перевіримо, що $Q_n(z_1,z_2)$, $n \in \mathbb{N}$ задовольняють рівняння (4.2). Розглянемо третє рівняння. Згідно (2.49), (2.50), (4.9), маємо:

$$
\begin{aligned}
&(J_{A^{-1}}Q(z_1,z_2))_n = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(\lambda - z_1)(\mu - z_2)} \\
&\times \Big((J_{A^{-1}}P(\lambda,\mu))_n - (J_{A^{-1}}P(\lambda,z_2))_n - (J_{A^{-1}}P(z_1,\mu))_n + (J_{A^{-1}}P(z_1,z_2))_n \Big) d\rho(\lambda,\mu) \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\Big(\mu^{-1}P_n(\lambda,\mu) - {z_1}^{-1}P_n(\lambda,z_2) - \mu^{-1}P_n(z_1,\mu) + {z_1}^{-1}P_n(z_1,z_2)\Big)}{(\lambda - z_1)(\mu - z_2)} d\rho(\lambda,\mu) \\
&= {z_1}^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\Big(P_n(\lambda,\mu) - P_n(\lambda,z_2) - P_n(z_1,\mu) + P_n(z_1,z_2)\Big)}{(\lambda - z_1)(\mu - z_2)} d\rho(\lambda,\mu) \\
&+ \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{P_n(\lambda,\mu) - P_n(z_1,\mu)}{(\lambda - z_1)}\, d\rho(\lambda,\mu) = {z_1}^{-1}Q_n(z_1,z_2) + \int\limits_{\mathbb{R}^2} \hat{P}_n(\lambda,\mu,z_1)\, d\rho(\lambda,\mu).
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

Аналогічно,

$$
\begin{aligned}
&(J_{B^{-1}}Q(z_1,z_2))_n = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(\lambda - z_1)(\mu - z_2)} \\
&\times \Big((J_{B^{-1}}P(\lambda,\mu))_n - (J_{B^{-1}}P(\lambda,z_2))_n - (J_{B^{-1}}P(z_1,\mu))_n + (J_{B^{-1}}P(z_1,z_2))_n \Big) d\rho(\lambda,\mu) \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\Big(\mu^{-1}P_n(\lambda,\mu) - {z_2}^{-1}P_n(\lambda,z_2) - \mu^{-1}P_n(z_1,\mu) + {z_2}^{-1}P_n(z_1,z_2)\Big)}{(\lambda - z_1)(\mu - z_2)} d\rho(\lambda,\mu) \\
&= {z_2}^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\Big(P_n(\lambda,\mu) - P_n(\lambda,z_2) - P_n(z_1,\mu) + P_n(z_1,z_2)\Big)}{(\lambda - z_1)(\mu - z_2)} d\rho(\lambda,\mu) \\
&+ \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{P_n(\lambda,\mu) - P_n(z_1,\mu)}{(\lambda - z_1)}\, d\rho(\lambda,\mu) = {z_2}^{-1}Q_n(z_1,z_2) + \int\limits_{\mathbb{R}^2} \hat{P}_n(\lambda,\mu,z_1)\, d\rho(\lambda,\mu).
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

Згідно з (2.49), (2.50), останні інтеграли в (4.13) і (4.14) також дорівнюють нулю, отже (4.13) і (4.14) дають $(J_{A^{-1}}Q(z_1,z_2))_n = {z_1}^{-1}Q_n(z_1,z_2)$, $(J_{B^{-1}}Q(z_1,z_2))_n = {z_2}^{-1}Q_n(z_1,z_2)$, $n \in \mathbb{N}$. Це означає, що третя і четверта рівності в (4.10) також виконуються. $\square$

4.4. Аналог функції типу Вейля відповідний двовимірній сильній дійсній проблемі моментів

Нехай J_A і J_B та $J_{A^{-1}}$ і $J_{B^{-1}}$ – блочні матриці типу Якобі відповідні сильній проблемі моментів. Аналогічно тому, як в пункті 4.2 вводиться функція Вейля для не сильної проблеми моментів введемо також аналог функції Вейля для двовимірної сильної дійсної проблеми моментів:

Використовуючи вираз (4.9),

$$M(z_1, z_2) = (R_{z_1}(A)\delta_0, R_{\bar{z}_2}(B)\delta_0)_{\mathbf{l}_2} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(\lambda - z_1)(\mu - z_2)}\, d\rho(\lambda, \mu). \tag{4.15}$$

$z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Аналогічно, як у класичній проблемі моментів Гамбургера, введену в (4.15) функцію характеризує така теорема.

Теорема 4.4.1 *Нехай J_A і J_B та $J_{A^{-1}}$ і $J_{B^{-1}}$ – блочні матриці типу Якобі вигляду (2.72) і (2.88) та (2.105) і (2.112) із відповідними властивостями, які породжують в $\mathbf{l}_2$ обмежені комутуючі самоспряжені оператори та їх обернені. Нехай $R_{z_1}(A)$ і $R_{z_2}(B)$ – резольвенти (*$\mathrm{Im} z_i \neq 0$, $i = 1, 2$*) операторів A та B відповідних матрицям J_A та J_B. Тоді функція $M(z_1, z_2) = (R_{z_1}(A)\delta_0, R_{\bar{z}_2}(B)\delta_0)_{\mathbf{l}_2}$ з (4.15) однозначно визначає спектральну міру цих операторів.*

Доведення. Завдяки спектральній теоремі 3.6.2, отримуємо

$$M(z_1, z_2) = (R_{z_1}(A)\delta_0, R_{\bar{z}_2}(B)\delta_0)_{\mathbf{l}_2} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(\lambda - z_1)(\mu - z_2)}\, d\rho(\lambda, \mu).$$

Оскільки оператори, відповідні J_A і J_B та $J_{A^{-1}}$ і $J_{B^{-1}}$, вважаються обмеженими, то їх спектр є обмеженим, і отже для $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ можемо записати:

$$M(z_1, z_2) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(\lambda - z_1)(\mu - z_2)}\, d\rho(\lambda, \mu) = \frac{1}{z_1 z_2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1 - \frac{\lambda}{z_1})(1 - \frac{\mu}{z_2})}\, d\rho(\lambda, \mu)$$

$$= \frac{1}{z_1 z_2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{z_1} \right)^m \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{z_2} \right)^n \right) d\rho(\lambda, \mu)$$

$$= \frac{1}{z_1 z_2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{z_1^m z_2^n} \lambda^m \mu^n \right) d\rho(\lambda, \mu)$$

$$= \frac{1}{z_1 z_2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{z_1^m z_2^n} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \lambda^m \mu^n \, d\rho(\lambda, \mu) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{s_{m,n}}{z_1^{m+1} z_2^{n+1}},$$

де (див. 1.32)

$$s_{m,n} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \lambda^m \mu^n \, d\rho(\lambda, \mu), \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

З попереднього запису функції $M(z_1, z_2)$ у вигляді ряду за $z_1^m z_2^n$, випливає, що коефіцієнти $s_{m,n}$ цього ряду за $M(z_1, z_2)$ відновлюються однозначно. Але ці коефіцієнти є моментами міри $d\rho(\lambda, \mu)$ і задовольняють оцінку $|s_{n,m}| \leq \|J_A\|^m \|J_B\|^n$. Оскільки міра $d\rho(\lambda, \mu)$ відновлюється однозначно за моментами $s_{m,n}$, то і функція $M(z_1, z_2)$ також відновлюється однозначно. □

4.5. Про однозначність відповідності міри матрицям у випадку необмежених операторів (не сильна проблема моментів)

Проведемо аналіз коефіцієнтів матриць J_A і J_B. Умовою того, що матриці J_A і J_B є обмеженими операторами в [48, 51] було те, що міра $d\rho(x, y)$ ймовірнісна із носієм на компакті, а отже однозначно відповідала матрицям. Відмовляючись від обмежень на міру можна дійти до ситуації, коли матрицям J_A і J_B можуть відповідати багато мір. Це можливо тоді, коли відповідні оператори A і B мають індекси дефекту $(1, 1)$ кожний і, отже, мають безліч комутуючих самоспряжених розширень. Нашою задачею є встановлення умов на матриці J_A і J_B, за яких відповідні оператори A і B не тільки є істотно самоспряженими і комутують на деякій щільній множині, але і їх замикання комутують у строгому резольвентному сенсі. Зрозуміло, що у такому випадку A та B – необмежені оператори.

Як відомо [60], комутуючі на щільній множині оператори A і B комутують у строгому резольвентному сенсі, якщо $S = A^2 + B^2$ є істотно самоспряженим оператором.

Запишемо вигляд матриці $J_S = J_A^2 + J_B^2$ відповідної оператору $S = A^2 + B^2$. Матриця J_S також діє в $\mathbf{l}_2$, але зобразимо його по іншому:

$$\mathbf{l}_2 = \mathbf{H}_0 \oplus \mathbf{H}_1 \oplus \mathbf{H}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbf{H}_n \oplus \cdots , \tag{4.16}$$

де $\mathbf{H}_0 = \mathcal{H}_0$, але $\mathbf{H}_1 = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, $\mathbf{H}_2 = \mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{H}_4$ і т.д., $\mathbf{H}_n = \mathcal{H}_{2k-1} \oplus \mathcal{H}_{2k}$, $k, n \in \mathbb{N}$.

В просторі (4.16) оператор S має п'ятидіагональну структуру в термінах блоків:

$$J_A = \begin{bmatrix} b_0 & c_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_0 & b_1 & c_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_1 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad J_B = \begin{bmatrix} w_0 & v_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ u_0 & w_1 & v_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & u_1 & w_2 & v_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{4.17}$$

Для можливості застосування спектральної теорії Якобієвих матриць, внесемо розбиття в J_S на блоки, так аби отримати блочну тридіагональну структуру:

$$J_S = \begin{bmatrix} r_0 & q_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ p_0 & r_1 & q_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & p_1 & r_2 & q_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{4.18}$$

що вже діє у просторі (4.16) за правилом:

$$(J_S f)_n = p_{n-1} f_{n-1} + r_n f_n + q_n f_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad f_{-1} = 0, \quad \forall f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathbf{l}_2,$$

де $p_{-1} =: 0$ і блоки-матриці діють вже між новими просторами:

$$\begin{aligned} p_n &: \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathbf{H}_{n+1}, \\ r_n &: \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathbf{H}_n, \\ q_n &: \mathcal{H}_{n+1} \longrightarrow \mathbf{H}_n, \ n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

В (4.18) r_0 – скаляр ($r_0 = b_0b_0 + c_0a_0 + w_0w_0 + v_0v_0$); r_n – (2×2)-матриця $n \in \mathbb{N}$, елементи якої є лінійні комбінації матриць з (4.17):

$$r_n = \begin{bmatrix} r_{n;11} & r_{n;12} \\ r_{n;21} & r_{n;22} \end{bmatrix}, \quad \text{де} \quad \begin{aligned} r_{n;11} &= a_{n-1}c_{n-1} + b_nb_n + c_na_n + u_nv_n + w_nw_n + v_nu_n, \\ r_{n;12} &= b_nc_n + c_nb_{n+1} + w_nv_n + v_nw_{n+1}, \\ r_{n;21} &= a_nb_n + b_{n+1}a_n + u_nw_n + w_{n+1}u_n, \\ r_{n;22} &= a_nc_n + b_{n+1}b_{n+1} + c_{n+1}a_{n+1} \\ &+u_nv_n + w_{n+1}w_{n+1} + v_{n+1}u_{n+1} \end{aligned}$$

q_0 – (1×2)-матриця, елементи якої є лінійні комбінації матриць з (4.17):

$$q_0 = \left[b_0c_0 + c_0b_1 + w_0v_0 + v_0w_1 \quad c_0c_1 + v_0v_1 \right];$$

q_n – (2×2)-матриця $n \in \mathbb{N}$, елементи якої є лінійні комбінації матриць з (4.17):

$$q_n = \begin{bmatrix} c_nc_{n+1} + v_nv_{n+1} & 0 \\ b_{n+1}c_{n+1} + c_{n+1}b_{n+2} + w_{n+1}v_{n+1} + v_{n+1}w_{n+2} & c_{n+1}c_{n+2} + v_{n+1}v_{n+2} \end{bmatrix};$$

p_0 – (2×1)-матриця, елементи якої є лінійні комбінації матриць з (4.17):

$$p_0 = \begin{bmatrix} a_0b_0 + b_1a_0 + u_0w_0 + w_1u_0 \\ a_1a_0 + u_1u_0 \end{bmatrix};$$

p_n – (2×2)-матриця $n \in \mathbb{N}$, елементи якої є лінійні комбінації матриць з (4.17):

$$p_n = \begin{bmatrix} a_{n+1}a_n + u_{n+1}u_n & a_{n+1}b_{n+1} + b_{n+2}a_{n+1} + u_{n+1}w_{n+1} + w_{n+2}u_{n+1} \\ 0 & a_{n+2}a_{n+1} + u_{n+2}u_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Вектор-стовпець поліномів

$$P_n(x,y) = \{P_{n;0}(x,y), P_{n;1}(x,y), P_{n;2}(x,y), \ldots, P_{n;n}(x,y)\}^{\perp}$$

є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} J_AP_n(x,y) = xP_n(x,y) \\ J_BP_n(x,y) = yP_n(x,y). \end{cases}$$

Тоді він є також розв'язком рівняння $J_SP_n(x,y) = (x^2+y^2)P_n(x,y)$.

Перепишемо останнє рівняння, враховуючи нове зображення J_S з (4.18):

$$J_S\mathbf{P}_n(x,y) = (x^2+y^2)\mathbf{P}_n(x,y),$$

де $\mathbf{P}_0(x,y) = \{P_0(x,y)\}^\perp$, $\quad \mathbf{P}_1(x,y) = \{P_1(x,y), P_2(x,y)\}^\perp$, ... , $\mathbf{P}_n(x,y) = \{P_{2k-1}(x,y), P_{2k}(x,y)\}^\perp$, $n,k \in \mathbb{N}$.

Тепер для оператора J_S використаємо стандартний відомий результат про те, що J_S є істотно самоспряженим оператором, якщо

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\|q_n\|} = \infty, \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\|p_n\|} = \infty\right). \tag{4.19}$$

Вираз у дужках є альтернативним в силу симетричності матриць J_A, J_B, а, отже, і J_S. Останню рівність можна було б залишити в якості відповіді, але, використовуючи вигляд $\|q_n\|$ ($\|p_n\|$), виконаємо їх оцінку:

$$\begin{aligned}\|q_n\| =&\max\{\|c_nc_{n+1}+v_nv_{n+1}\|, \|c_{n+1}c_{n+2}+v_{n+1}v_{n+2}\|\}\\ \le&\max\{\|c_n\|\cdot\|c_{n+1}\|+\|v_n\|\cdot\|v_{n+1}\|, \|c_{n+1}\|\cdot\|c_{n+2}\|+\|v_{n+1}\|\cdot\|v_{n+2}\|\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\|q_n\| =&\max\{\|a_{n+1}a_n+u_{n+1}u_n\|, \|a_{n+2}a_{n+1}+u_{n+2}u_{n+1}\|\}\\ \le&\max\{\|a_{n+1}\|\cdot\|a_n\|+\|u_{n+1}\|\cdot\|u_n\|, \|a_{n+2}\|\cdot\|a_{n+1}\|+\|u_{n+2}\|\cdot\|u_{n+1}\|\}),\end{aligned}$$

яка не сильно послаблює результат, і отримуємо таку умову:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|c_n\|^2+\|v_n\|^2} = \infty, \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|a_n\|^2+\|u_n\|^2} = \infty\right). \tag{4.20}$$

Нарешті, враховуючи вигляд матриць c_n, v_n, отримуємо такий результат.

Теорема 4.5.1 *Блочні тридіагональні матриці типу Якобі з (4.17) відповідні необмеженим операторам у двовимірній дійсній проблемі моментів однозначно співставляються деякій борелівській мірі на дійсній площині, якщо коефіцієнти матриць задовольняють умову*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\max\{c_{n;k,k+1}\}_{k=0}^n\right)^2 + \left(\max\{v_{n;k,k}\}_{k=0}^n\right)^2 + \left(\sum_{k=0}^n c_{n;k,0}\right)^2} = \infty,$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\max\{a_{n;k+1,k}\}_{k=0}^{n}\right)^2 + \left(\max\{u_{n;k,k}\}_{k=0}^{n}\right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n;0,k}\right)^2} = \infty \right).$$

Доведення міститься у попередніх міркуваннях із урахуванням внутрішньої структури матриць c_n, v_n, $(a_n,\, u_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Окремі елементи c_0, v_0, $(a_0,\, u_0)$ на збіжність (розбіжність) рядів не впливають. □

Зауважимо, що взагалі ідея такої теореми є в [11]. Проте умови теореми перевіряються легше, ніж умови (4.19) або нові – в (4.20).

Приклади.

1. Покладемо матриці J_A і J_B такими, що $a_{n;\alpha+1,\alpha} = c_{n;\alpha,\alpha+1} = \sqrt{\alpha+1}$, $u_{n;\alpha,\alpha} = v_{n;\alpha,\alpha} = \sqrt{n-\alpha}$, $\alpha = 0, 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Всі інші елементи в a_n, c_n та u_n, v_n вважатимемо рівними нулю та повністю матриці b_n, w_n – нульовими. Зокрема не важко переконатися у комутативності $J_A J_B = J_B J_A$. Тоді за теоремою 1 маємо: $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty$. Отже, так визначені матриці J_A і J_B однозначно відповідають мірі, яка їх породжує.

2. Покладемо матриці J_A і J_B такими, що $a_{n;\alpha+1,\alpha} = c_{n;\alpha,\alpha+1} = 1$, $u_{n;\alpha,\alpha} = v_{n;\alpha,\alpha} = 1$, $\alpha = 0, 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Всі інші елементи в a_n, c_n та u_n, v_n вважатимемо рівними нулю та повністю матриці b_n, w_n – нульовими. Майже очевидна комутативність $J_A J_B = J_B J_A$.

Тоді за теоремою 4.5.1 маємо: $\frac{1}{2}(1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots) = \infty$. Отже так визначені матриці J_A і J_B також однозначно відповідають мірі, яка їх породжує. Це ясно і без теореми, оскільки оператори відповідні матрицям a_n, c_n та u_n, v_n є рівномірно обмеженими: $\|a_n\| = \|c_n\| = \|u_n\| = \|v_n\| = 1$.

Співставляючи такі матриці із класичними результатами (див. наприклад [3]), доходимо висновку, що відповідна їм міра зосереджена у квадраті $[-1, 1] \times [-1, 1]$ і з точністю до константи має вигляд $d\rho(x, y) = \frac{dxdy}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}$.

4.6. Побудова прикладів матриць відповідних двовимірній дійсній проблемі моментів (не сильній)

Знайдемо умову, яка гарантує, що матриця J_A комутує з матрицею J_B типу (4.17). Перемноживши ці матриці, отримуємо

$$J_A J_B = \begin{bmatrix} b_0w_0 + c_0v_0 & b_0v_0 + c_0w_1 & c_0v_1 & 0 & 0 & \cdots \\ a_0w_0 + b_1u_0 & a_0v_0 + b_1w_1 + c_1u_1 & b_1v_1 + c_1w_2 & c_1v_2 & 0 & \cdots \\ a_1u_0 & a_1w_1 + b_2u_1 & a_1v_1 + b_2w_2 + c_2u_2 & b_2v_2 + c_2w_3 & c_2v_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \tag{4.21}$$

Вираз для $J_A J_B$ отримується аналогічно до (4.21) зі зміною a_n, b_n і c_n на u_n, w_n і v_n відповідно і навпаки. Порівнюючи ці вирази для $J_A J_B$ і $J_B J_A$, з'ясовуємо, що рівність $J_A J_B = J_B J_A$ еквівалентно виконанню таких рівностей (візьмемо до уваги, що b_0 – скаляр, і покладемо $w_0 = b_0$)

$$\begin{gathered} c_0u_0 = v_0a_0; \quad c_nv_{n+1} = v_nc_{n+1}, \quad b_nv_n + c_nw_{n+1} = w_nc_n + v_nb_{n+1}, \\ a_nv_n + b_{n+1}w_{n+1} + c_{n+1}u_{n+1} = u_nc_n + w_{n+1}b_{n+1} + v_{n+1}a_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \end{gathered} \tag{4.22}$$

Необхідні рівності $a_nw_n + b_{n+1}u_n = u_nb_n + w_{n+1}a_n$, $a_{n+1}u_n = u_{n+1}a_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, випливають з третьої і другої рівностей (4.22) записуються в пов'язаній формі.

Таким чином, умови (4.22) є необхідними і достатніми для матричної рівності $J_A J_B = J_B J_A$. Якщо норми операторів a_n, b_n, c_n і u_n, w_n, v_n рівномірно обмежені відповідно $n \in \mathbb{N}_0$, то тоді оператори J_A і J_B на $\mathbf{l}_2$ обмежені, самоспряжені і оператори (4.22) дає комутативність цих операторів.

Беручи вихідні матриці a_0, b_0, c_0 можемо знайти з (4.22) крок за кроком a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; ... (але неоднозначно).

Знаходження матриць a_n, b_n, c_n і u_n, w_n, v_n, $n \in \mathbb{N}_0$ які є розв'язком рівнянь (4.22) а a_n, c_n та u_n, v_n мають вигляд (2.61), (2.72) та (2.77), (2.88) відповідно є досить складною проблемою, і ми досліджуємо тут тільки деякі окремі випадки.

А саме, припускаємо, в першу чергу, що всі матриці $w_n = b_n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Тоді умови

(4.22) можна переписати у такому вигляді:

$$\begin{gathered} c_0u_0 = v_0a_0; \quad c_nv_{n+1} = v_nc_{n+1}, \quad b_n(v_n - c_n) = (v_n - c_n)b_{n+1}, \\ a_nv_n + c_{n+1}u_{n+1} = u_nc_n + v_{n+1}a_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \end{gathered} \tag{4.23}$$

І, якщо додатково покласти $\forall n \in \mathbb{N}_0 \quad w_n = b_n = 0$, то

$$c_0u_0 = v_0a_0; \quad c_nv_{n+1} = v_nc_{n+1}, a_nv_n + c_{n+1}u_{n+1} = u_nc_n + v_{n+1}a_{n+1}. \tag{4.24}$$

Крім того, припускаємо, що всі матриці a_n, c_n і u_n, v_n, $n \in \mathbb{N}_0$, мають вигляд (2.61), (2.72) та (2.77), (2.88), де $a_{n;1,0}$, $a_{n;2,1}$, $\ldots$, $a_{n;n+1,n}$, $c_{n;0,1}$, $c_{n;1,2}$, $\ldots$, $c_{n;n,n+1}$, $u_{n;0,0}$, $u_{n;1,1}$, $\ldots$, $u_{n;n,n}$, $v_{n;0,0}$, $v_{n;1,1}$, $\ldots$, $v_{n;n,n}$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$, додатні і всі інші елементи цих матриць дорівнюють нулю. Таким чином, блоки наших матриць мають вигляд ($n \in \mathbb{N}_0$):

$$\begin{gathered} u_n = \underbrace{\left.\begin{bmatrix} u_{n;0,0} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & u_{n;1,1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & u_{n;n,n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}\right\}}_{n+1} {\scriptstyle n+2}, \quad a_n = \underbrace{\left.\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{n;1,0} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{n;2,1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{n;n+1,n} \end{bmatrix}\right\}}_{n+2} {\scriptstyle n+1}, \\ v_n = \underbrace{\left.\begin{bmatrix} v_{n;0,0} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & v_{n;1,1} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & v_{n;n,n} & 0 \end{bmatrix}\right\}}_{n+2} {\scriptstyle n+1}, \quad c_n = \underbrace{\left.\begin{bmatrix} 0 & c_{n;0,1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & c_{n;1,2} & \ldots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & c_{n;n,n+1} \end{bmatrix}\right\}}_{n+1} {\scriptstyle n+2}, \end{gathered} \tag{4.25}$$

Перемноживши матриці, типу (4.25), можемо переписати першу, другу і четверту рівності (4.24) у вигляді відповідних рівностей для елементів цих матриць

$$
\begin{aligned}
&v_{0;0,0}c_{1;0,1} = v_{1;1,1}c_{0;0,1}, && v_{0;0,0}c_{0;0,1} = v_{1;1,1}c_{1;0,1},\\
&v_{1;0,0}c_{2;0,1} = v_{2;1,1}c_{1;0,1}, && v_{1;0,0}c_{1;0,1} = v_{2;1,1}c_{2;0,1},\\
&v_{1;1,1}c_{2;1,2} = v_{2;2,2}c_{1;1,2}, && v_{1;1,1}c_{1;1,2} = v_{2;2,2}c_{2;1,2},\\
&v_{2;0,0}c_{3;0,1} = v_{3;1,1}c_{2;0,1}, && v_{2;0,0}c_{2;0,1} = v_{3;1,1}c_{3;0,1},\\
&v_{2;1,1}c_{3;1,2} = v_{3;2,2}c_{2;1,2}, && v_{2;1,1}c_{2;1,2} = v_{3;2,2}c_{3;1,2},\\
&v_{2;2,2}c_{3;2,3} = v_{3;3,3}c_{2;2,3}, && v_{2;2,2}c_{2;2,3} = v_{3;3,3}c_{3;2,3},\\
&\ldots && \ldots\\
&v_{n;0,0}c_{n+1;0,1} = v_{n+1;1,1}c_{n;0,1}, && v_{n;0,0}c_{n;0,1} = v_{n+1;1,1}c_{n+1;0,1},\\
&v_{n;1,1}c_{n+1;1,2} = v_{n+1;2,2}c_{n;1,2}, && v_{n;1,1}c_{n;1,2} = v_{n+1;2,2}c_{n+1;1,2},\\
&\ldots && \ldots\\
&v_{n;n,n}c_{n+1;n,n+1} = v_{n+1;n+1,n+1}c_{n;n,n+1}, && v_{n;n,n}c_{n;n,n+1} = v_{n+1;n+1,n+1}c_{n+1;n,n+1},
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

де $v_{n;k,k} = u_{n;k,k}$, і $c_{n;k,k+1} = a_{n;k+1,k}$, $k = 0, 1, ..., n$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$. Система рівностей (4.26) еквівалентна системі (4.23) для випадку, коли всі $b_n = w_n = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Кожна система, що складається з двох рівнянь в кожному рядку в (4.26) використовуючи додатність $v_{n;k,k}$ і $c_{n;k,k+1}$, $k = 0, 1, ..., n$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$, дає

$$
\begin{array}{llll}
c_{1;0,1} = c_{0;0,1}, & c_{2;0,1} = c_{1;0,1}, & \ldots, & c_{n+1;0,1} = c_{n;0,1};\\
 & c_{2;1,2} = c_{1;1,2}, & \ldots, & c_{n+1;1,2} = c_{n;1,2};\\
 & & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\\
 & & \ldots, & c_{n+1;n,n+1} = c_{n;n,n+1}.
\end{array}
\tag{4.27}
$$

Зберемо останні дослідження у таке твердження.

Лема 4.6.1 *Матриці J_A і J_B вигляду (2.26) і (2.44) з коефіцієнтами a_n, c_n і u_n, v_n як у (4.25) і $b_n = w_n = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$ комутуючі симетричні, якщо для довільного $v_{n;k,k} = u_{n;k,k} < c < \infty$, $k = 0, 1, ..., n$, числа $c_{n;k,k+1} = c_{n+1;k,k+1}$, $k = 0, 1, ..., n$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$ задовольняють нерівності (4.27).*

Доведення. Для побудови J_A і J_B досить вибрати обмежену послідовність $\{\delta_n\}$, $|\delta_n| < c_1 < \infty$, $n \in \mathbb{N}_0$ і покласти $c_{n;k,k+1} := \delta_n$, $k = 0, 1, ..., n$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$. $\square$

Приклад 1. Покладемо $b_n = w_n = 0$ і для (4.25) $v_{n;k,k} = u_{n;k,k} = c_{n;k,k+1} = a_{n;k+1,k} = 1$, $k = 0, 1, ..., n$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$. Очевидними спостереженнями отримуємо матриці типу J_A і J_B, що задовольняють всі умови, описані в теоремах 2.2.5 і 2.2.9. Позначимо такі матриці J_{A1} і J_{B1}).

Приклад 2. Використовуючи попередній приклад, покладемо $J_{A11} := J_{A1} + J_{B1}$. Ця матриця: 1) очевидно симетрична (як сума двох симетричних); 2) є обмеженим оператором (як сума двох обмежених операторів); 3) комутує з J_{B1}, оскільки J_{A1} комутує з J_{B1} і J_{B1} комутує з собою.

4.7. Ланцюжки Тоди відповідні двовимірній не сильній проблемі моментів

Нехай L_x та L_y – матриці типу (2.26) і (2.44) з умовами (2.27) (2.28) і (2.45) (2.46) відповідно. Припустимо, що їх елементи – це неперервно диференційовні функції, які залежать від змінної t, $t \in [0, T]$, $T \leq \infty$: $L_x = L_x(t)$ та $L_y = L_y(t)$. Розглянемо також деякі матриці $A = (d_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ та $B = (g_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$, елементи яких теж неперервно залежать від тієї ж змінної t: $d_{j,k} = d_{j,k}(t)$, $g_{j,k} = g_{j,k}(t)$ вигляду (2.26) і (2.44) (але які не обов‘язково мають властивості(2.27) (2.28) і (2.45) (2.46) або взагалі не є симетричними). Розглянемо систему рівняннь типу Лакса:

$$L'_x = [L_x A] = L_x A - A L_x, \quad L'_y = [L_y B] = L_y B - B L_y. \tag{4.28}$$

Тут добутки блочних матриць $L_x A$, $A L_x$, $L_y B$ та $B L_y$ визначені звичайним чином.

Якщо в рівностях (4.28) матриці $A(t)$ та $B(t)$ вважати фіксованими матрицями коефіцієнтів, то ці рівності можна вважати як систему лінійних диференціальних рівнянь першого порядку відносно невідомих $L_x(t)$ та $L_y(t)$, $t \in [0, T]$.

Випишемо систему рівнянь Лакса у вигляді системи рівнянь для елементів матриць у випадку, якщо $L_x(t)$ та $L_y(t)$ мають блочну якобієву структуру, подібну до структури матриць (2.26) і (2.44).

Перепозначимо:

$$L_x(t) = \begin{bmatrix} \beta_0(t) & \gamma_0(t) & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \alpha_0(t) & \beta_1(t) & \gamma_1(t) & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \alpha_1(t) & \beta_2(t) & \gamma_2(t) & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} \alpha_n(t) : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}, \\ \beta_n(t) : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_n, \\ \gamma_n(t) : \mathcal{H}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{H}_n, \quad n \in \mathbb{N}_0; \end{array} \tag{4.29}$$

$$L_y(t) = \begin{bmatrix} \omega_0(t) & \theta_0(t) & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \tau_0(t) & \omega_1(t) & \theta_1(t) & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \tau_1(t) & \omega_2(t) & \theta_2(t) & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \begin{array}{l} \tau_n(t) : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}, \\ \omega_n(t) : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_n, \\ \theta_n(t) : \mathcal{H}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{H}_n, \quad n \in \mathbb{N}_0. \end{array} \tag{4.30}$$

Блоки α_n, β_n, γ_n, τ_n, ω_n, та θ_n задовольняють властивості (2.27) (2.28) і (2.45) (2.46). Покладемо A та B так, що їх блоки не обов'язково задовольняють умови (2.27) (2.28) і (2.45) (2.46).

Для підрахунку комутаторів $[A(t), L_x(t)]$ та $[B(t), L_y(t)]$ випишемо відповідні формули (в подальшому всюди елементи з від'ємними індексами вважатимуться рівними нулю):

$$\begin{aligned} &(L_xA)_{n-2,n} = c_{n-2}\gamma_{n-1}, && (L_yB)_{n-2,n} = v_{n-2}\theta_{n-2}, \\ &(L_xA)_{n-1,n} = b_{n-1}\gamma_{n-1} + c_{n-1}\beta_n, && (L_yB)_{n-1,n} = w_{n-1}\theta_{n-1} + v_{n-1}\omega_n, \\ &(L_xA)_{n,n} = a_{n-1}\gamma_{n-1} + b_n\beta_n + c_n\alpha_n, && (L_yB)_{n,n} = u_{n-1}\theta_{n-1} + w_n\omega_n + v_n\tau_n, \\ &(L_xA)_{n+1,n} = a_n\beta_n + b_{n+1}\alpha_n, && (L_yB)_{n+1,n} = u_n\omega_n + w_{n+1}\tau_n, \\ &(L_xA)_{n+2,n} = a_{n+1}\alpha_n, && (L_yB)_{n+2,n} = u_{n+1}\tau_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Для (AL_x) та (BL_y) виконуються аналогічні формули з заміною a_j, b_j, c_j на α_j, β_j, γ_j і v_j, w_j, u_j на τ_j, ω_j, θ_j. Порівнюючи елементи в правій та лівій частинах відповідних рівнянь в системі (4.28) і користуючись формулами (4.31), отримаємо систему рівнянь Лакса (4.28) в "координатному" вигляді:

$$
\begin{aligned}
0 &= c_n\gamma_{n+1} - \gamma_n c_{n+1}, & 0 &= v_n\theta_{n+1} - \theta_n v_{n+1},\\
\gamma_n' &= b_n\gamma_n + c_n\beta_{n+1} - \beta_n c_n - \gamma_n b_{n+1}, & \theta_n' &= w_n\theta_n + v_n\omega_{n+1} - \omega_n v_n - \theta_n w_{n+1},\\
\beta_n' &= a_{n-1}\gamma_{n-1} + b_n\beta_n + c_n\alpha_n & w_n' &= u_{n-1}\theta_{n-1} + w_n\omega_n + v_n\theta_n\\
&\quad - \alpha_{n-1}c_{n-1} - \beta_n b_n - \gamma_n a_n, & &\quad - \tau_{n-1}v_{n-1} - \omega_n w_n - \theta_n u_n,\\
\alpha_n' &= a_n\beta_n + b_{n+1}\alpha_n - \alpha_n b_n - \beta_{n+1}a_n, & \tau_n' &= u_n\omega_n + w_{n+1}\tau_n - \tau_n w_n - \omega_{n+1}u_n,\\
0 &= a_{n+1}\alpha_n - \alpha_{n+1}a_n & 0 &= u_{n+1}\tau_n - \tau_{n+1}u_n
\end{aligned}
\tag{4.32}
$$

Елементи матриць (4.29) та (4.30) також будемо вважати рівномірно обмеженими по $n \in \mathbb{N}_0$ та $t \in [0, T]$. Тому вони породжують в $\mathbf{l}_2$ обмежені оператори, для яких збережемо позначення L_x та L_y. Оператори L_x та L_y будуть слабо неперервними по $t \in [0, T]$.

Аналог функції Вейля для двовимірної дійсної проблеми моментів описується такою теоремою.

Теорема 4.7.1 *Нехай J_x і J_y – блочні матриці типу Якобі, які породжують в $\mathbf{l}_2$ обмежені комутуючі самоспряжені оператори. Покладемо резольвенти $R_x = R_{z_1;x}(t) = (L_x(t) - z_1)^{-1}$ і $R_y = R_{z_2;y}(t) = (L_y(t) - z_2)^{-1}$ відповідних операторів ($\mathrm{Im} z_i \neq 0$, $i = 1, 2$). Тоді функція*

$$
M := M(z_1, z_2; t) = (R_x\delta_0, R_y\delta_0)_{\mathbf{l}_2} = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(\lambda - z_1)(\mu - z_2)}\, d\rho(\lambda, \mu). \tag{4.33}
$$

$z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ однозначно визначає спектральну міру цих операторів.

Продиференціюємо M по t. Тоді

$$
M' = (R_x'\delta_0, R_y\delta_0)_{\mathbf{l}_2} + (R_x\delta_0, R_y'\delta_0)_{\mathbf{l}_2}. \tag{4.34}
$$

Не важко зрозуміти, що з (4.28) отримається:

$$
R_x' = R_xA - AR_x, \quad R_y' = R_yB - BR_y. \tag{4.35}
$$

Підставимо (4.34) в (4.35):

$$\begin{aligned} M' &= (R_xA\delta_0, R_y\delta_0)_{\mathbf{l}_2} - (AR_x\delta_0, R_y\delta_0)_{\mathbf{l}_2} + (R_x\delta_0, R_yB\delta_0)_{\mathbf{l}_2} - (R_x\delta_0, BR_y\delta_0)_{\mathbf{l}_2} \\ &= (R_xA\delta_0, R_y\delta_0)_{\mathbf{l}_2} + (R_x\delta_0, R_yB\delta_0)_{\mathbf{l}_2} - ((A+B^*)R_x\delta_0, R_y\delta_0)_{\mathbf{l}_2}. \end{aligned}$$

Скористаємося комутативними властивостями R_x та R_y та покладемо $A = -B^*$:

$$\begin{aligned} M' &= (R_x(\delta_0 b_0 + \delta_1 c_0), R_y\delta_0)_{\mathbf{l}_2} - (R_x\delta_0, R_y(-b_0\delta_0 - a_0\delta_1)_{\mathbf{l}_2} \\ &= b_0(R_x\delta_0, R_y\delta_0)_{\mathbf{l}_2} + (R_xc_{0;0,0}\delta_{10}, R_y\delta_0)_{\mathbf{l}_2} + (R_xc_{0;0,1}\delta_{11}, R_y\delta_0)_{\mathbf{l}_2} \\ &- b_0(R_x\delta_0, R_y\delta_0)_{\mathbf{l}_2} - a_{0;0,0}(R_x\delta_0, R_y\delta_{10})_{\mathbf{l}_2} - a_{0;0,1}(R_x\delta_0, R_y\delta_{11})_{\mathbf{l}_2} \\ &= (c_{0;0,0} - a_{0;0,0})(R_x\delta_0, R_y\delta_{10})_{\mathbf{l}_2} + (c_{0;0,1} - a_{0;0,1})(R_x\delta_0, R_y\delta_{11})_{\mathbf{l}_2}. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Припустимо додатково $c_{0;0,1} = a_{0;0,1} = 0$. Тоді

$$M' = (c_{0;0,0} - a_{0;0,0})(R_x\delta_0, R_y\delta_{10})_{\mathbf{l}_2}. \tag{4.37}$$

Таким чином доведена така лема.

Лема 4.7.2 *Для функції M вигляду (4.33) і операторів A і B, таких що $A = -B^*$ і $c_{0;0,1} = a_{0;0,1} = 0$, виконується рівність (4.37).*

Запишемо чотири тотожності, що відповідають кожному рівнянню системи, припускаючи $\alpha_{0;0,0} = 0$, $\beta_{1;1,0} = 0$, $\beta_{1;0,1} = 0$, $\gamma_{0;0,0} = 0$, $\gamma_{1;0,0} = 0$, $\gamma_{1;1,0} = 0$, $\gamma_{1;1,1} = 0$ для матриці L_x та $\omega_{1;1,0} = 0$, $\omega_{1;0,1} = 0$, $\theta_{1;1,0} = 0$ для матриці L_y :

$$\begin{aligned} 1 &= (\delta_0, \delta_0)_{\mathbf{l}_2} = (R_x(L_x - z_1)\delta_0, R_y(L_y - z_2)\delta_0)_{\mathbf{l}_2} \\ &= (R_x\{(\beta_{0;0,0} - z_1)\delta_0 + \gamma_{0;0,1}\delta_{11}\}, R_y\{(\omega_{0;0,0} - z_2)\delta_0 + \theta_{0;0,0}\delta_{10}\})_{\mathbf{l}_2} \\ &= (\beta_{0;0,0} - z_1)(\omega_{0;0,0} - z_2)(R_x\delta_0, R_y\delta_0)_{\mathbf{l}_2} + (\beta_{0;0,0} - z_1)\theta_{0;0,0}(R_x\delta_0, R_y\delta_{10})_{\mathbf{l}_2} \\ &+ \gamma_{0;0,1}(\omega_{0;0,1} - z_2)(R_x\delta_{11}, R_y\delta_0)_{\mathbf{l}_2} + \gamma_{0;0,1}\theta_{0;0,0}(R_x\delta_{11}, R_y\delta_{10})_{\mathbf{l}_2}, \end{aligned} \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned} 0 &= (\delta_{10}, \delta_0)_{\mathbf{l}_2} = (R_x(L_x - z_1)\delta_{10}, R_y(L_y - z_2)\delta_0)_{\mathbf{l}_2} \\ &= (R_x\{(\beta_{1;0,0} - z_1)\delta_{10} + \gamma_{1;0,1}\delta_{11}\}, \{(\omega_{0;0,0} - z_2)\delta_0 + \theta_{0;0,0}\delta_{10}\})_{\mathbf{l}_2} \\ &= (\omega_{0;0,0} - z_2)(\beta_{1;0,0} - z_1)(R_x\delta_{10}, R_y\delta_0)_{\mathbf{l}_2} + (\omega_{0;0,0} - z_2)\gamma_{1;0,1}(R_x\delta_{21}, R_y\delta_0)_{\mathbf{l}_2} \\ &+ \theta_{0;0,0}(\beta_{1;0,0} - z_1)(R_x\delta_{10}, R_y\delta_{10})_{\mathbf{l}_2} + \theta_{0;0,0}\gamma_{1;0,1}(R_x\delta_{21}, R_y\delta_{10})_{\mathbf{l}_2}, \end{aligned} \tag{4.39}$$

$$
\begin{aligned}
1 &= (\delta_0, \delta_0)_{\mathbf{l}_2} = (R_x R_y (L_y - z_2)(L_x - z_1)\delta_0, \delta_0)_{\mathbf{l}_2} \\
&= (R_x R_y (L_y - z_2)\{(\beta_{0;0,0} - z_1)\delta_0 + \gamma_{0;0,1}\delta_{11}\}, \delta_0)_{\mathbf{l}_2} \\
&= (R_x R_y ((\beta_{0;0,0} - z_1)\{(\omega_{0;0,0} - z_2)\delta_0 + \theta_{0;0,0}\delta_{10}\} \\
&+ \gamma_{0;0,1}\{(\omega_{1;1,1} - z_2)\delta_{11} + \gamma_{0;0,1}\theta_{1;1,1}\delta_{21})\}, \delta_0)_{\mathbf{l}_2} \\
&= (\beta_{0;0,0} - z_1)(\omega_{1;1,1} - z_2)(R_x R_y \delta_0, \delta_0)_{\mathbf{l}_2} + (\beta_{0;0,0} - z_1)\theta_{0;0,0}(R_x R_y \delta_{10}, \delta_0)_{\mathbf{l}_2} \\
&+ \gamma_{0;0,1}(\omega_{1;1,1} - z_2)(R_x R_y \delta_{11}, \delta_0)_{\mathbf{l}_2} + \gamma_{0;0,1}(\theta_{1;1,1}(R_x R_y \delta_{21}, \delta_0)_{\mathbf{l}_2},
\end{aligned} \tag{4.40}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= (\delta_0, \delta_{10})_{\mathbf{l}_2} = (R_x R_y (L_y - z_2)(L_x - z_1)\delta_0, \delta_{10})_{\mathbf{l}_2} \\
&= (R_x R_y (L_y - z_2)\{(\beta_{0;0,0} - z_1)\delta_0 + \gamma_{0;0,1}\delta_{11}\}, \delta_{10})_{\mathbf{l}_2} \\
&= (R_x R_y ((\beta_{0;0,0} - z_1)\{(\omega_{0;0,0} - z_2)\delta_0 + \theta_{0;0,0}\delta_{10}\} \\
&+ \gamma_{0;0,1}\{(\omega_{1;1,1} - z_2)\delta_{11} + \gamma_{0;0,1}\theta_{1;1,1}\delta_{21})\}, \delta_{10})_{\mathbf{l}_2} \\
&= (\beta_{0;0,0} - z_1)(\omega_{1;1,1} - z_2)(R_x R_y \delta_0, \delta_0)_{\mathbf{l}_2} + (\beta_{0;0,0} - z_1)\theta_{0;0,0}(R_x R_y \delta_{10}, \delta_{10})_{\mathbf{l}_2} \\
&+ \gamma_{0;0,1}(\omega_{0;0,0} - z_2)(R_x R_y \delta_{11}, \delta_0)_{\mathbf{l}_2} + \gamma_{0;0,1}(\theta_{1;1,1}(R_x R_y \delta_{21}, \delta_{10})_{\mathbf{l}_2}.
\end{aligned} \tag{4.41}
$$

Розв'язуючи систему рівнянь (4.38)–(4.41), отримаємо:

$$
1 = (\beta_{0;0,0} - z_1)(\omega_{0;0,0} - z_2)(R_x\delta_0, R_y\delta_0) + (\beta_{0;0,0} - z_1)\theta_{0;0,0}(R_x\delta_0, R_y\delta_{10}). \tag{4.42}
$$

При розв'язанні припускалось, що $\beta_{1;0,0} = \beta_{0;0,0}$ та також враховано рівність $\gamma_{1;0,1}\theta_{0;0,0} = \gamma_{0;0,1}\theta_{1;1,1}$, яка є наслідком комутативності матриць L_x та L_y.

Виразимо з (4.42) $(R_x\delta_0, R_y\delta_{10})$ і підставимо його в (4.36):

$$
M' = (c_{0;0,0} - a_{0;0,0})(1 - (\beta_{0;0,0} - z_1)(\omega_{0;0,0} - z_2)M). \tag{4.43}
$$

Таким чином доведена така лема.

Лема 4.7.3 *Припустимо, що у матриць L_x та L_y*

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{0;0,0} = \beta_{1;1,0} = \beta_{1;0,1} = \gamma_{0;0,0} = \gamma_{1;0,0} = \gamma_{1;1,0} = \gamma_{1;1,1} = 0, \\
&\omega_{1;1,0} = \omega_{1;0,1} = \theta_{1;1,0} = 0, \quad \beta_{1;0,0} = \beta_{0;0,0}, \quad \omega_{1;0,0} \neq \omega_{1;1,1}
\end{aligned} \tag{4.44}
$$

а для матриць A і B виконуються такі умови:

$$
A = -B^*, \quad c_{0;0,1} = a_{0;0,1} = 0, \quad c_{0;0,0} \neq a_{0;0,1}. \tag{4.45}
$$

Тоді функція M вигляду (4.33) задовольняє рівняння (4.43).

Наслідком леми 4.7.2 і леми 4.7.3 є така теорема.

Теорема 4.7.4 *Нехай задана система (4.32), де* $\alpha_{-1} = \gamma_{-1} = \tau_{-1} = \theta_{-1} = 0$. *Нехай також існує розв'язок* $\alpha_n(t)$, $\beta_n(t)$, $\gamma_n(t)$, $\tau_n(t)$, $\omega_n(t)$, $\theta_n(t)$, $n \to \infty$ *задачі Коші для цієї системи такий, що матриці (4.29) та (4.30) породжують обмежені самоспряжені комутуючі оператори в просторі* $\mathbf{l}_2$, *для яких виконуються умови (4.44), з коефіцієнтами* A *та* B, *для яких виконуються умови (4.45). Тоді цей розв'язок відновлюється за допомогою формул типу (3.64), в яких спектральна міра* $d\rho(x, y, t)$ *знаходиться за початковою спектральною мірою* $d\rho(x, y, 0)$ *за такою процедурою:*

- *розв'язати задачу Коші для рівняння (4.43) із початковими умовами для* $M(z_1, z_2, 0)$, *яке знаходиться за* $d\rho(x, y, 0)$ *з (4.33);*
- *знайдена функція* $M(z_1, z_2, t)$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $t \in [0, T]$, *яка однозначно визначає міру згідно теореми 4.7.1.*

Висновки. Використовуючи поліноми першого роду введені поліноми другого роду та функція типу Вейля відповідні двовимірній сильній (та не сильній) дійсній проблемі моментів та надані їх основні властивості, які узагальнюють відповідні властивості поліномів другого роду і аналогу функції Вейля для класичної проблеми моментів Гамбургера.

ВИСНОВКИ

1) Побудовані блочні матриці типу Якобі за заданою ймовірнісною мірою з носієм на компакті на дійсній площині. Вважається, що у міри існують всі моменти та система поліномів $x^n y^m$, $n, m \in \mathbb{Z}$ є лінійно незалежною і тотальною у відповідному просторі L_2. Тобто, розв'язана обернена спектральна задача для блочних матриць типу Якобі відповідних сильній двовимірній дійсній проблемі моментів.

2) За заданими блочними матрицями типу Якобі складена і розв'язана система різницевих рівнянь. Розв'язками є двовимірні поліноми на дійсній площині. За поліномами відновлена міра (в сенсі рівності Парсеваля). Поліноми є лінійно незалежними і утворюють тотальну множину відносно відновленої міри, яка однозначно відповідає заданим блочним матрицям. Тобто розв'язана пряма спектральна задача.

3) Дано опис внутрішньої структури блочних матриць типу Якобі відповідних сильній двовимірній дійсній проблемі моментів: вказані обов'язково нульові та додатні елементи. Досліджені комутативні властивості блочних матриць, відповідних не сильній проблемі моментів, та на основі цих матриць наведені алгоритми побудови численних прикладів.

4) Використовуючи поліноми першого роду введені поліноми другого роду та функція типу Вейля відповідні двовимірній сильній (та не сильній) дійсній проблемі моментів та надані їх основні властивості, які узагальнюють відповідні властивості поліномів другого роду і аналогу функції Вейля для класичної проблеми моментів Гамбургера.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Ахиезер Н.И. Классическая проблема моментов / Н.И. Ахиезер // М.:Гос. физ.-мат. лит. – 1961. – 312 с.

[2] Ахиезер Н.И. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею / Н.И. Ахиезер // М.: Физматгиз. – 1961. – 310 с.

[3] Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям уравнений в частных разностях второго порядка / Ю.М. Березанский.// Тр. Моск. М. Об-ва. – 1956. – т. 5. – С. 203-268.

[4] Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю.М. Березанский. // Киев: Наук. думка. – 1965. – 450 с.

[5] Березанский Ю.М. Прямая и обратная спектральные задачи для якобиева поля / Ю.М. Березанский.// Алгебра и анализ. – 1997. – т. 9, № 6. – С. 38–61.

[6] Березанский Ю.М. Обобщенная проблема моментов, связанная с корреляционными мерами / Ю.М. Березанский. // Функ. анализ и прилож. – 2003. – v. 37, № 4. – С. 86–91.

[7] Березанский Ю.М. Интегрирование методом обратной спектральной задачи некоторых цепочек нелинейных разностных уравнений / Ю.М. Березанский, М.И. Гехтман, М.Е. Шмойш // Киев: Укр. мат. журнал. – 1986. – т. 38, № 1. – С. 84-89.

[8] Березанский Ю.М. Спектральные методы в бесконечномерном анализе / Ю.М. Березанский, Ю.Г. Кондратьев.// Киев: Наук. думка. – 1988. – 800 с.

[9] Березанский Ю.М. Интегрирование некоторых дифференциально-разностных нелинейных уравнений с помощью спектральной теории блочных якобиевых нормальных матриц / Ю. М. Березанский, А.А. Мохонько // Функ. анализ и прилож. – 2008. – т. 42, № 1. – С. 1–21.

[10] Березанский Ю.М. Функциональный анализ: Курс лекций. / Ю.М. Березанский , Г.Ф.Ус, З.Г. Шефтель. // Київ: Вища шк.– 1990. – 600 с.

[11] Гехтман М. И. Спектральная теория ортогональных полиномов нескольких переменных,/М. И. Гехтман, А. А. Калюжный // Укр. мат. журнал, Ин-т математики АН УССР, Киев. – 1991. – т. 43, № 10. – С. 1437–1440.

[12] Дудкін М. Є. Пряма задача для блочних матриць типу Якобі відповідних двовимірній дійсній проблемі моментів/ М. Є. Дудкін, В. І. Козак //Наукові Вісті НТУУ "КПІ". – 2014. – № 4. – С. 41-47.

[13] Дудкін М. Є. Поліноми другого роду у двовимірній проблемі моментів / Дудкін М. Є., Козак В. І. // Наукові Вісті НТУУ "КПІ". – 2015. – №4, – С. 41–46.

[14] Дудкін М. Є. Блочні матриці типу Якобі відповідні двовимірній проблемі моментів: поліноми другого роду та функція Вейля / М. Є. Дудкін, В. І. Козак // Український математичний журнал. –2016. – т. 68, №4, –С. 495–505.

[15] Дудкін М. Є. Умови єдиності міри відповідної двовимірній проблемі моментів / М. Є. Дудкін,В. І. Козак // Наукові Вісті НТУУ КПІ. – 2016. – № 4. – С. 32–37.

[16] Дудкін М. Є. Пряма спектральна задача з блочними матрицями типу Якобі, що відповідають сильній двовимірній проблемі моментів / М. Є. Дудкін, В. І. Козак // Наукові записки НаУКМА Фізико-математичні науки. – 2016. – т. 178, С. 16–22.

[17] Ескин Г. И. Достаточное условие разрешимости многомерной проблемы моментов / Г. И. Ескин // ДАН СССР. – 1960. – т. 133, № 3. – С. 540–543.

[18] Зархина Р. Б. О двумерной проблеме моментов / Р. Б. Зархина // ДАН СССР. – 1959. – т. 124, №4. – С. 743–746.

[19] Козак В.І. Обернена спектральна задача для блочних матриць типу Якобі, відповідних дійсній двовимірній проблемі моментів / В.І. Козак // Наукові Вісті НТУУ "КПІ". – 2013.– т. 170, №4. – С. 73–76.

[20] Козак В. І. Обернена спектральна задача для блочних матриць типу Якобі відповідних дійсній двовимірній проблемі моментів/ В. І. Козак // Матеріали конференції "П'ятнадцята міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука" Київ, 15–17, травень, 2014: тези доп. – Київ: Нац. техн. ун-т України "КПІ", 2014. – С. 117-118.

[21] Dudkin M .E. Direct spectral problems for the block Jacobi type bounded symmetric matrices related to the two dimensional real moment problem/ M. E. Dudkin, V .I. Kozak: П'ятнадцята міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука, Київ, 15–17, травень, 2014: тези доп. – Київ: Нац. техн. ун-т України "КПІ". – 2014. – С. 13.

[22] Козак В. І. Побудова блочних матриць типу Якобі, відповідних строгій двовимірній дійсній проблемі моментів // Наукові записки НаУКМА. –2015. – т. 21, № 165. –Р. 19–25.

[23] Козак В. І. Поліноми другого роду у двовимірній проблемі моментів / В. І. Козак // Четверта всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, 23–25, квітень, 2015 р.: тези доп. –Київ: Нац. техн. ун-т України "КПІ" , 2015. – С. 19.

[24] Козак В. І. Аналог функції Вейля відповідної двовимірній дійсній проблемі моментів / В. І. Козак // Міжнародна конференція молодих математиків, Київ, 3–6, червень, 2015 р., тези доп. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2015. – С. 76.

[25] Козак В. І. Нескінченна двовимірна система зв'язних тягарців / В. І. Козак // Сьома міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації" Кам'янець-Подільський, 21–22, квітень, 2016 р.: тези доп. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський нац. ун-т ім. І. Огієнка , 2016. – С. 103-104.

[26] Козак В. І. Умова єдиності міри відповідної блочним матрицям типу Якобі у двовимірній проблемі моментів / В. І. Козак // Всеукраїнська науково-методична конференція "Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі" присвячена пам'яті професора С.С.Левіщенка, 7-8 жовтня 2016 р. : тези доп. – – Київ: Нац. пед. ун-т ім. М.Драгоманова, 2016. – С. 48.

[27] Козак В. І. Інтегрування диференціально-різницевих нелінійних рівнянь за допомогою спектральної теорії блочних матриць відповідних двовимірній проблемі моментів / В. І. Козак // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. – 2017. – № 2. – С. 41-48.

[28] Костюченко А. Г. Многомерная проблема моментов / А. Г. Костюченко // ДАН СССР. – 1960. – v. 131, №6. – С. 1249–1252.

[29] Крейн М. Г. Бесконечные J-матрицы и матричная проблема моментов / М. Г. Крейн // ДАН СССР. – 1949. – т. 69, № 2. – С. 125-128.

[30] Крейн М.Г. Основные положения теории представлений эрмитовых операторов с индексом дефекта (m, m) / М.Г.Крейн // Укр. мат. журн. – 1949. – № 2. – С. 3-66.

[31] Сеге Г. Ортогональные полиномы / Г. Сеге // М: Гос. изд. физ.-мат. лит. – 1962. – 500 с.

[32] Симонов К. К. Ортогональные матричные полиномы Лорана / К. К. Симонов // Мат. заметки. – 2006. – т. 79, № 2. – С. 316–320.

[33] Симонов К. К. Ортогональные матричные полиномы Лорана на вещественной оси / К. К. Симонов // Украинский Математический Вестник. – 2006. – т. 3, № 2. – С. 275-299.

[34] Суетин П.К. Ортогональные многочлены по двум переменным / П.К. Суетин// М:Наука Гл. ред. физ.-мат. лит-ры. – 1988. – 384 с.

[35] Berezansky Yu. M. Spectral theory of commutative Jacobi fields: direct and inverse problems / Yu. M. Berezansky // Fields Inst. Communic. – 2000. – т. 25. – P. 211–224.

[36] Berezansky Yu. M. Some generalizations of the classical moment problem / Yu. M. Berezansky // Integr. Equ. Oper. Theory. – 2002. – V. 44. – P. 255–289.

[37] Berezansky Yu. M. The complex moment problem in the exponential form / Yu. M. Berezansky, M. E. Dudkin // Methods Funct. Anal. Topology. – 2004. – V.10, №4. – P. 1–10.

[38] Berezansky Yu. M. The complex moment problem and direct and inverse spectral problems for the block Jacobi type bounded normal matrices / Yu. M. Berezansky, M. E. Dudkin // Methods Funct. Anal. Topology. – 2005. – V. 12, №1. – P. 1–32.

[39] Berezansky Yu. M. The direct and inverce spectral problems for the block Jacobi type unitary matrices / Yu. M. Berezansky, M. E. Dudkin // Methods Funct. Anal. Topology. – 2005. – V. 11, №4. – P. 327–345.

[40] Berezansky Yu. M. On the complex moment problem / Yu. M. Berezansky, M. E. Dudkin // Math. Nachr. – 2007. – №1-2. – P. 60-73.

[41] Berezansky Yu. M. The investigation of generalized moment problem associated with correlation measures / Yu. M. Berezansky, D. A. Mierzejewski // Methods Funct. Anal. Topology. – 2007. – V. 13, № 2. – P. 124–151.

[42] Bisgaard T. M. On note on factoring of positive definite functions on semigroups / T. M. Bisgaard // Math. Nachr. – 2002. – V. 236. – P. 31–46.

[43] Cantero M. J. Five-diagonal matrices and zeros of ortogonal polynomials on the unit circle / M. J. Cantero, L. Moral, L. Velazquez // Linear Algebra and its Applications. – 2002. – V. 362. – P. 29–56.

[44] Carleman T. Les fonctions quasi analytiques / T. Carleman // Gauthier-Villars, Paris. – 1926. – 113 p.

[45] Derevyagin M. S. Spectral problems for generalized Jacobi matrices / M. S. Derevyagin, V. A. Derkach // Linear Algebra Appl. – 2004. – V.384. – P. 1–24.

[46] Devinatz A. Integral representations of positive definite functions, II / A. Devinatz // Trans. Amer. Math. Soc. – 1954. – V. 77. – P. 455–480.

[47] Devinatz A. Two parameter moment problems / A. Devinatz // Duke Math. J. – 1957. – V. 24. – P. 481–498.

[48] Dudkin M. E. Singularly perturbed rank one normal operators and its applications / M. E. Dudkin // Institute of Mathematics NAS of Ukraine. – 2008. – V. 3. – P.

[49] Dudkin M.E. The exact inner structure of the block Jacobi type unitary matrices connected with the corresponding direct and inverse spectral problems matrices / M.E. Dudkin // Methods Funct. Anal. Topology. – 2008. – V.14, № 2. – P. 168–176.

[50] Dudkin M.E. The complex moment problem in the exponential form with direct and inverse spectral problems for the block Jacobi type correspondence matrices / M. E. Dudkin // Methods Funct. Anal. Topology. – 2012. – V. 18, № 21. – P. 111–139.

[51] Dudkin M.E. Direct and inverse spectral problems for the block Jacobi type bounded symmetric matrices related to the two dimensional real moment problem / M. E. Dudkin, V. I. Kozak // Methods Funct. Anal. Topology. – 2014. – V. 21, № 3. – P. 219–251.

[52] Fuglede B. The multidimensional moment problem / B. Fuglede // Expo. Math. – 1983. – № 1. – P. 47–65.

[53] Geronimus Ya. L. Theory of Orthogonal Polynomials / Ya. L. Geronimus // Gostekhizdat., Moscow-Leningrad. – 1950. – P.

[54] Gorbachuk M. L. M. G. Krein's Lectures on entire operators / M. L. Gorbachuk, V. I. Gorbachuk. – Birkhäuser Verlag, Oper. Theorey Adv. Appl., Boston. – 1997. – 221 p.

[55] Haviland E. K., On the moment problem for distribution functions in more than one dimension / E. K. Haviland // Amer. J. Math. – 1995. – V. 57. – P. 562–572.

[56] Haviland E. K. On the moment problem for distribution functions in more than one dimension II / E. K. Haviland // Amer. J. Math. – 1996. – V. 58. – P. 164–168.

[57] Krein M. G. On the general method of decomposition of positive defined kernels on elementary products / M. G. Krein // Dokl. Acad. Nauk SSSR. – 1946. – V. 53, № 1. – P. 3–6.

[58] Krein M. G. On Hermitian operators with directing functionals / M. G. Krein // Zbirnyk prac' Inst. Mat. AN USSR. – 1948. – № 10. – P. 83–106.

[59] Mandelbrojt S. Séries Adhérentes. Régularisation des Suites. Applications / S. Mandelbrojt. – Gauthier-Villars, Paris. – 1952. – 277 p.

[60] Nelson E. Analytic vectors / E.Nelson // Ann. Math. – 1959. – V. 70. – P. 572–614.

[61] Nussbaum A.E. Quasi-analytic vectors / A.E.Nussbaum // Ark. Math. – 1965. – V. 6, № 10. – P. 179–191.

[62] Nussbaum A.E. A note on quasi-analytic vectors / A.E.Nussbaum // Studia Math. – 1969. – V. 33. – P. 305–309.

[63] Petersen L. C. On the relation between the multidimensional moment problem and the one-dimensional moment problem / L. C. Petersen // Math. Scand. – 1982. – V. 51. – P. 361–366.

[64] Pulemyotov A.D. Support of a joint resolution of identity and the projection spectral theorem, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. / A.D.Pulemyotov // – 2003. – V. 6, № 4. – P. 549–561.

[65] Reed M. Method of Modern Mathematical Physics: Functional analisys / M. Reed, B. Simon. – Academic Press, New York, 1975. – V. 1. – 400 p.

[66] K. Schmüdgen An example of a positive polynomial, which is not a sum of squares polynomials. A positive but not positive functional / K. Schmüdgen // Math. Nachr. – 1979. – V. 88. – P. 385–390.

[67] K. Schmüdgen On commuting unbounded self-adjoint operators, IV / K. Schmüdgen // Math. Nachr. – 1986. – V. 125. – P. 83–102.

[68] Simon B. The classical moment problem as a self-adjoint finite differential operator / B. Simon // Advances Math. – 1998. – V. 137. – P. 82–203.

[69] Simon B. Orthogonal polynomials on the unite circle Part 1: Classical theory / B. Simon. – Amer. Math. Soc. Providence. – 2005. – V. 54. – 455 p.

[70] Simon B. Orthogonal polynomials on the unite circle Part 2: Spectral Theory / B. Simon. – Amer. Math. Soc. Providence. – 2004. – V. 54. – 1031 p.

[71] Simonov K. K. Strong matrix moment problem of Hamburger / K. K. Simonov // Methods Funct. Anal. Topology. – 2006. – V. 12, № 2. – P. 183–196.

[72] Teschl G. Jacobi Operators and Completely Integrable Nonlinear Lattices / G. Teschl. – AMS Mathematical Surveys and Monographs, Amer. Math. Soc. Providence. – 2000. – V. 72. – 165 p.

[73] Xu Y. On Ortogonal Polinomials in Several Variables / Y. Xu // American Math. Society. – 1997. – V. 14. – P. 247–270.

[74] Xu Y. Block jacobi matrices and zeros of multivariate ortogonal polynomials / Y. Xu // American mathematical society. – 1994. – V. 342, №2 – P. 855–866.