НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Бохонко Василина Василівна

УДК 512.552.13

СТАБІЛЬНИЙ РАНГ І ЙОГО УЗАГАЛЬНЕННЯ У КІЛЬЦЯХ БЕЗУ

01.01.06 – алгебра та теорія чисел

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2017

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі алгебри і логіки Львівського національного університету імені Івана Франка Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Забавський Богдан Володимирович,
Львівський національний університет
імені Івана Франка,
завідувач кафедри алгебри і логіки

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Шаваровський Богдан Зеновійович,
Інститут прикладних проблем механіки і
математики імені Я. С. Підстригача НАН України,
в. о. провідного наукового співробітника відділу алгебри;

кандидат фізико-математичних наук,
Дяченко Сергій Миколайович,
Національний університет
«Києво-Могилянська Академія»,
доцент кафедри математики.

Захист відбудеться «31» жовтня 2017 р. о 15 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.03 у Інституті математики НАН України за адресою:
01400, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий «25» вересня 2017р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради Максименко С. І.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. У витоках поняття стабільного рангу кілець стоять роботи Баса[1] та Вассерштейна[2]. Перше застосування даного інваріанту пов'язане з вивченням теорем стабілізації у алгебраїчній К-теорії. Пізніше стабільний ранг кілець вивчався у зв'язку з проблемами скорочення модулів. Зокрема, якщо A є правим R-модулем таким що $End(A)$ є кільцем стабільного рангу один, і якщо B і C є праві R-модулі такі, що $A \oplus B \cong A \oplus C$, тоді $B \cong C$.

Гудьорл[3] розвиваючи дані дослідження, вводить поняття кільця степеневого стабільного рангу один. Зокрема, якщо A правий R-модуль такий, що $End_R(\mathrm{A})$ має праву властивість степеневої заміни, і якщо B і C є довільні праві R-модулі такі, що $A \oplus B \cong A \oplus C$ тоді $B^n \cong C^n$ для деякого натурального числа n. Дані результати дозволили Хурані, Ламу та Шоу[4] ввести в розгляд поняття кільця R квадратного стабільного рангу один, що дозволило їм розвинути теорію факторизації матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \text{ де } a, b \in R$$

у добуток двох матриць Тепліца.

Найбільш корисним поняття стабільного рангу і його узагальнення працює у класичних задачах діагоналізації матриць над кільцями. Ще в 1861 році Сміт[5] показав, що цілочисельна матриця шляхом елементарних перетворень рядків і стовпців приводиться до канонічного діагонального вигляду.

---

[1] Bass H. *K-theory and stable algebra*.Inst.Hautes.Etudes.Sci.Publ.Math. – 1964. – 22. – №1. – P. 5–60.
[2] Vaserstein L.N. *The stable rank of rings and dimensionality of topological spaces,* Funct. Anal.Appl. – 1971. – V.5. – P.102–110.
[3] Goodearl K. R. *Power-cancellation of groups and modules*. Pacific J. Math. – 1976. – 64, – 2. – P. 387–413.
[4] Khurana D., Lam T. Y., Zhou Wang. *Rings of square stable range one*. J. Algebra. – 2011. – 338. P.122–143.
[5] Smith H. *On systems of linear indeterminate equation and congruences*. Philos.Trans.Roy.Soc.London. – 1861. –151. – №2. – P. 293–326.

Згодом Діксон[5], Ведерберн[6], Ван дер Варден[7], Джекобсон[8] поширили даний результат на різні класи комутативних і некомутативних кілець Евкліда, а також на комутативні області головних ідеалів і їх узагальнення.

Класичне означення кілець елементарних дільників належить Капланському[9]. У цій роботі також прослідковується глибокий зв'язок кілець елементарних дільників із задачами розкладу скінченно зображуваних модулів у прямі суми циклічних модулів. Ларсен, Левіс і Шорес[10] показали, що комутативне кільце елементарних дільників є в точності кільцем, над яким довільний скінченно зображуваний модуль є прямою сумою циклічних модулів. Також даний результат є частковою відповіддю на проблему Уорфілда про опис кілець, над якими кожен скінченно зображуваний модуль є прямою сумою циклічних модулів. У некомутативному випадку дана проблема розв'язана лише частково. Наприклад, для класу узагальнено однорядних кілець Дроздом отримано розв'язання цієї проблеми. Також слід відзначити результати Кириченка та Лафона у цьому напрямку. Зауважимо, що некомутативні кільця елементарних дільників мало досліджені та описані частково.

Можемо відзначити наступні результатати: Хенріксен досліджуючи одинично регулярні кільця (регулярні кільця стабільного рангу один) показав, що довільна матриця над таким кільцем є еквівалентна діагональній. У той же час з'ясувалось, що існують такі класи регулярних кілець, як наприклад, клас сепаративно регулярних кілець, над якими лише квадратні матриці еквівалентні діагональній матриці. Зауважимо, що цей факт властивий напівланцюговим кільцям.

---

[5] Dickson L. *Algebras and their arithmetics.*University of Chicago. – 1923.
[6] Wedderburn J.H.M. *On matrices whose coefficient are functions of a single variable*. Trans. Amer. Math. Soc. – 1915. – 16. –№3. – P.328–332.
[7] Van der Warden B. *Modern Algebra*.Berlin,New York, Springer. – 1930.
[8] Джекобсон Н. *Теория колец.* М.:Издательство иностранной л-ри. – 1947.
[9] Kaplansky I. *Commutative rings*. The university Michigan of Chicago Press, Chicago and London. –1974.
[10] Larsen M., Lewis W., Shores T. *Elementary divisor rings and finitely presented modules*, Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. – 187. – P.231–248.

Крім наведених результатів, що стосуються регулярних кілець, кілець головних ідеалів, потрібно відмітити результати Кона[11], який показав, що права головна область Безу є кільцем елементарних дільників з умовою певної подільності на діагональні елементи. Також відзначимо результат Дубровіна, який показав, що напівпервинне, напівлокальне кільце Безу R є кільцем елементарних дільників тоді і лише тоді, якщо для довільного елемента $a \in R$ існує елемент $b \in R$ такий, що $RaR = bR = Rb$ (умова Дубровіна).

Враховуючи те, що кільця елементарних дільників є кільцями Безу, природним є питання чи довільне кільце Безу є кільцем елементарних дільників?

У роботі Гілмана та Хенріксена[12] у класі кілець дійснозначних функцій $C(X)$, визначених на певному топологічному просторі X, було побудовано приклад комутативного кільця Безу (з дільниками нуля), яке не є кільцем елементарних дільників. А це дозволило звузити дане питання про кільця елементарних дільників до класу комутативних областей Безу.

Першим, хто зауважив зв'язок стабільного рангу кілець із кільцями елементарних дільників був Капланський, який відзначив, що комутативні кільця Безу стабільного рангу один є кільцями елементарних дільників. Особливо важливу роль у вивченні кілець елементарних дільників відіграють кільця Ерміта. Назвемо кільце правим (лівим) кільцем Ерміта, якщо всі 1×2 (2×1) матриці над цим кільцем володіють діагональною редукцією. Менал і Монказі[13] вказали, що стабільний ранг правих (лівих) кілець Ерміта не більше двох. У випадку комутативних кілець Забавський[14] показав, що кільце Безу стабільний ранг якого не більше двох є кільцем Ерміта.

---

[11] Cohn.P. M. *Right principal Bezout domains.* J.London.Math Soc. – 1987. – 35. – №2. – P. 251- 262.

[12] Gilman L., Henriksen M. *Rings of continuous functions in which every finitely generated ideal is principal.*Trans.Amer.Math.Soc. – 1956. – 82. – P.366–391.

[13] Menal P., Moncasi J. *On regular rings with stable range 2.*J.Pure Appl.Alg. – 1982. – 24. – P. 25–40.

[14] Zabavsky B.V. *Diagonal reduction of matrices over rings*. Mat. Stu., Mon.Series – V.16 – VNTL Pub. – 2012. – Lviv. – P. 251.

Вивчаючи узагальнення поняття кільця стабільного рангу один Забавський на основі поняття кільця акуратного рангу один описав комутативні області елементарних дільників.

Більшість відомих класів кілець елементарних дільників суттєво залежить від умов обриву зростаючих ланцюгів ідеалів.

Перший приклад кільця елементарних дільників без умов на ланцюги ідеалів був вказаний Вандерберном[15] ще в 1915 році, а саме таким є кільце аналітичних функцій на комплексній площині. У більш абстрактній формі, цей приклад дозволив Хелмеру[16] ввести новий клас кілець елементарних дільників, який отримав назву класу адекватних кілець. З вивченням адекватних кілець пов'язані дослідження таких математиків, як Капланський, Гілман, Хенріксен, Ларсен, Левіс і Шорес. У той же час, структурна будова таких кілець мало досліджена. Забавським та Білявською обчислено стабільний ранг адекватних кілець, та показано, що їх скінченні гомоморфні образи є кільцями з властивістю заміни. Проте структурна будова кілець цього класу мало досліджена: відомо лише, що адекватне кільце є PM *-кільцем (Гілман, Хенріксен).

Зауважимо, що Ларсен, Левіс і Шорес ставлять і обернене запитання: чи кожна комутативна PM *-область Безу є адекватною. Як показали Бревер, Конрад та Монтгомері[17] відповідь на це питання є негативною, проте Гаталевичем та Забавським[18] показано, що комутативна PM *-область Безу є кільцем елементарних дільників.

---

[15] Wedderburn J. H. M. *On matrices whose coefficients are functions of single variable*. Trans. Amer. Math. Soc. – 1915. – 16. – 2. – P. 328–332.

[16] Helmer O. *The elementary divisor for certain rings without chain condition*. Bull.Amer.Math.Soc. – 1943. – 49. – №4. – P. 225–236.

[17] J. W. Brewer, P. F. *Conrad, P. R. Montgomery. Lattice-ordered groups and a conjecture for adequate domains*. Proc. Amer. Math. Soc. – 43 – 1 – 1974 – pp.31–34, pp. 93–108.

[18] Zabavsky B.V., Gatalevych A.I. *A commutative Bezout PM* domain is an elementary divisor ring*. Alg. and Dis. Maths. – V. 19 – 2015 – № 2 – P. 295–301

Особливу роль у всіх вказаних дослідженнях відіграють головні ідеали кілець, а також фактор-кільця стосовно головних ідеалів. Так, більшість результатів та понять, які пов'язані із діагоналізацією матриць можуть бути охарактеризовані у цих термінах (Забавський, Чен, Фаччіні, Шорес, МакГоверн). Окрім цього, згідно з результатами Шореса, окремий інтерес становить питання вивчення властивостей кільця, накладаючи умови на його скінченні гомоморфні образи, припускаючи, що такі кільця є чистими, напівпотужними кільцями, кільцями стабільного рангу один.

Хоч питання діагоналізації матриць над комутативними кільцями досліджено достатньо широко, проте відчувається брак результатів, які стосуються некомутативних кілець елементарних дільників. Дослідження Забавського, Комарницького та Туганбаєва у цьому напрямку показують, що дистрибутивне кільце елементарних дільників є дуо-кільцем. Все це спонукає до досліджень дуо-кілець елементарних дільників. Також, Забавським показано, що проста область Безу є кільцем елементарних дільників тоді і лише тоді, коли це 2-проста область. Згідно з дослідженнями Забавського, Дубровіна, Борегарда та Лама важливу роль у діагоналізації матриць над некомутативними областями Безу відіграє структура елементів, які породжують тривіальні двобічні ідеали.

Підсумовуючи зауважимо, що тематика дисертаційної роботи відноситься до тих розділів математики, які перебувають у стадії постійного розвитку і мають багато теоретичних та прикладних застосувань. Це дозволяє зробити висновок про актуальність цих досліджень.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тематика дисертації знаходиться в руслі основних досліджень кафедри алгебри та логіки, а також пов'язана з науковими дослідженнями, які проводяться в галузі математики у Львівському національному університеті імені Івана Франка.

Мета і завдання дослідження.

Метою дисертаційної роботи є встановлення умов діагоналізації матриць над кільцями стабільного рангу один і два та відомих його узагальнень. Зокрема, ставиться задача знаходження критерію діагоналізації матриць над різними класами кілець, особливо дистрибутивними кільцями, дуо-кільцями та комутативними кільцями скінченного стабільного рангу.

Об'єктом дослідження є кільця скінченного стабільного рангу, кільця Безу, дистрибутивні кільця.

Предметом дослідження є стабільний ранг та пов'язані з ним властивості елементів і матриць.

Завданнями дослідження є:

- встановлення критерію діагоналізації матриць над дистрибутивними областями;
- на мові поняття гельфандового ідеалу для дуо-областей і поняття кільця гельфандового рангу один довести діагоналізацію матриць над PM*-дуо-областями Безу;
- використавши поняття комутативного кільця квадратного стабільного рангу один дослідити умови діагоналізації матриць другого порядку оборотними матрицями Тепліца;
- для області Безу стабільного рангу один з умовами Дубровіна та умовою Z, дослідити можливість канонічно діагональної редукції матриць;
- дослідити умови, коли скінченний гомоморфний образ комутативної області Безу є напівпотужним кільцем.

Методи дослідження: у дисертаційній роботі використано методи, які використовуються у теорії кілець та модулів, алгебраїчній K-теорії та лінійній алгебрі.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертаційній роботі вперше:

- встановлено умови, коли скінчений гомоморфний образ дуо-області є чистим кільцем;
- наведено критерій, коли дуо-область є кільцем елементарних дільників;
- встановлено необхідні та достатні умови, коли дистрибутивна область Безу є областю елементарних дільників (відповідь на відкрите питання Забавського);
- показано, що область Безу стабільного рангу один з умовою Дубровіна та умовою Z є кільцем елементарних дільників.

- доведено, що PM*-дуо-область є кільцем елементарних дільників (відповідь на відкрите питання Забавського, Ларсена, Левіса, Шореса для випадку дуо-областей);

- доведено, що локально гельфандова дуо-область є кільцем елементарних дільників;

- показано, що над кільцем елементарних дільників квадратного стабільного рангу один довільна матриця другого порядку приводиться до канонічно діагонального вигляду оборотними матрицями Тепліца;

- встановлено умови, коли скінченний гомоморфний образ комутативної області Безу є напівпотужним кільцем.

Наукове та практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Розроблені методи та одержані результати можуть бути використані у подальших К-теоретичних дослідженнях і в задачах теорії кілець і модулів, які пов'язані з поняттями стабільного рангу та кільцями елементарних дільників.

Особистий внесок здобувача. Усі наукові результати, які виносяться на захист, отримані автором особисто. Постановки задачі, вибір методів досліджень, аналіз результатів і загальна координація роботи належить науковому керівнику. У спільних публікаціях за темою дисертації внески авторів є рівними.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на:

- X міжнародній алгебраїчній конференції в Україні, присвяченій 70-річчю Ю. А. Дрозда, м. Одеса (20 – 27 серпня 2015 р.);

- Міжнародній математичній конференції «Group and Actions: Geometry and Dynamics» присвяченій пам'яті проф. В. Сущанського, м. Київ (19 – 22 грудня 2016 р.);

- Всеукраїнській науковій конференції: "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", м. Ворохта, (24 – 27 лютого 2016 р.).

- міжнародній науковій конференції “Сучасні проблеми механіки і математики”, присвяченій 85-річчю від дня народження академіка НАНУ Я. С. Підстригача та 40-річчю заснованого ним ІППММ, м. Львів (21 – 25 травня 2013 р.);

- Алгебраїчному семінарі Інституту математики НАН України (Інститут математики НАН України, 2017 р.);

- Алгебраїчному семінарі «Problems of elementary divisor rings» (Львівський національний університет ім. І. Франка, 2013 – 2016 рр.);

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковані у 8 наукових працях, з них 4 [3, 4, 5, 14] – у фахових наукових журналах із переліку, затвердженого Міністерством освіти і науки України (2 без співавторів), одна [15] – опублікована в журналі, який входить до міжнародної наукометричної бази даних (Web of Science,"Scopus"), дві [16,17] – у матеріалах міжнародних наукових конференцій, 1 [6] – у матеріалах всеукраїнської наукової конференції.

Структура та об’єм дисертації. Дисертація складається зі вступу, п’яти розділів (перший з яких складає попередні відомості) поділених на підрозділи, висновків та списку використаних джерел, який займає 8 сторінок і включає 63 найменувань. Загальний обсяг роботи 126 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано вивчення дисертаційного матеріалу автора, визначені мета, актуальність та методи досліджень, вказано наукову новизну отриманих результатів та наведено форми їх апробації.

У **першому розділі,** який має допоміжний характер, зібрані необхідні означення та факти, пов’язані з тематикою досліджень, що використовуються у дисертації. Перелічені необхідні позначення та термінологія. Наведені посилання на першоджерела досліджень кандидатської роботи. Крім того, у даному розділі сформульовано уже відомі результати, які є необхідними для подальшого викладу матеріалу.

Другий розділ присвячений вивченню дуо-областей Безу та їх зв'язку із кільцями елементарних дільників.

У підрозділі 2.1 даного розділу вводиться поняття кільця акуратного рангу один для дуо-областей Безу. Використовуючи це поняття, знайдено необхідні та достатні умови того, що скінченний гомоморфний образ дуо-області Безу є чистим кільцем. Крім того, показано, що дистрибутивна область Безу є областю елементарних дільників тоді і лише тоді, коли вона є дуо-областю акуратного рангу один.

Означення 2.1. *Скажемо, що дуо-кільце R має акуратний ранг один, якщо для довільних* $a, b \in R$ *таких, що* $aR + bR = R$ *існує елемент* $t \in R$ *такий, що* $R/(a+bt)R$ *є чистим кільцем.*

Очевидним прикладом дуо-кільця акуратного рангу один є довільне дуо-кільце стабільного рангу один. Одним з основних результатів даного розділу є наступний критерій.

Теорема 2.3. *Дуо-область Безу є областю елементарних дільників тоді і лише тоді, коли вона є областю акуратного рангу один.*

У даній дисертаційній роботі описано дистрибутивні області елементарних дільників, як дуо-області Безу акуратного рангу один.

Теорема 2.4. *Дистрибутивна область Безу є кільцем елементарних дільників тоді і лише тоді, коли вона є дуо-областю акуратного рангу один.*

Наступна теорема є поширенням відомих результатів Ройтмана[19] та Щедрика[20] на випадок дуо-областей Безу.

Теорема 2.1. *Нехай* R *дуо-область Безу. Тоді наступні умови є еквівалентні:*

1) R *– дуо-область елементарних дільників;*

2) для довільних елементів $x, y, z \in R$ *таких, що* $xR + yR = R$ *існує елемент* $\lambda \in R$ *такий, що* $x + \lambda y = vu,\ uR + zR = R,\ vR + (1-z)R = R$.

---

[19] Roitman M. *The Kaplansky condition and rings of almost stable range 1.* J. Proc.Amer. Math. Soc. – 2013. – 141. – P. 3013 – 3019.

[20] Shchedryk V. P. *Commutative domains of elementary divisors and some properties of their elements* . Ukr. Math. J. – 2012 – 64, – 1. – P. 126 – 139.

Наступне твердження встановлює зв'язок описаних кілець із попередньої теореми з чистими кільцями.

Теорема 2.2. *Нехай* R *– дуо-область Безу, і* $c \in R \setminus \{0\}$. *Тоді* R/cR *є чистим кільцем тоді і лише тоді, коли для кожного елемента* $a \in R$ *існують елементи* $v, u \in R$ *такі, що* $c = vu$, *де* $uR + aR = R$, $vR + (1-a)R = R$, $uR + vR = R$.

Другий підрозділ присвячений вивченню некомутативних кілець Безу з умовами на двобічні ідеали, породжені одним елементом, а саме умовами Дубровіна, L та Z. Показано зв'язок цих понять із квазі-дуо кільцями та кільцями елементарних дільників. Показано, що область Безу стабільного рангу один з умовою Дубровіна і умовою Z є кільцем елементарних дільників.

Означення 2.2. *Будемо казати, що* R *є областю з умовою L, якщо із того, що* $RaR = R$ *випливає рівність* $aR = R$.

Означення 2.3. *Скажемо, що R є кільцем з умовою Дубровіна, якщо для довільного ненульового елемента* $a \in R$ *існує елемент* $\alpha \in R$ *такий, що* $RaR = \alpha R = R\alpha$.

Теорема 2.6. *Нехай* R *є кільцем елементарних дільників з умовою L. Тоді* $\mathbf{R}$ *є квазі-дуо кільцем з умовою Дубровіна.*

Відомо, що майже атомна область Безу стабільного рангу 1 з умовою Дубровіна є кільцем елементарних дільників. У цьому підрозділі обмеження на майже атомні області Безу заміняється умовою Z, а саме, скажемо, що над кільцем R виконується умова Z, якщо з умови $RaR = R$, де $a \in R$ випливає, що a – скінченний елемент.

Одним з основних результатів є наступна теорема.

Теорема 2.7. *Нехай R є областю Безу стабільного рангу 1, в якій виконуються умова Z і умова Дубровіна. Тоді R є кільцем елементарних дільників.*

У третьому підрозділі наведено ряд різноманітних прикладів некомутативних кілець Безу, до яких застосовні результати перших двох підрозділів.

У **третьому розділі**, на основі введеного поняття максимально негельфандового ідеалу доводиться, що PM*-дуо-область Безу та локально гельфандова область є областями елементарних дільників.

У першому підрозділі вводиться означення гельфандових та негельфандових елементів та ідеалів, встановлюються властивості множин таких елементів чи ідеалів, розглянуто гельфандовий аналог радикалу Джекобсона.

Означення 3.1. *Ненульовий елемент а дуо-області R називається гельфандовим, якщо для довільного первинного правого ідеалу P такого, що* $a \in P$*, ідеал P міститься у єдиному максимальному правому ідеалі.*

Твердження 3.1. *Множина S всіх гельфандових елементів дуо-області Безу R є насиченою мультиплікативно замкненою множиною.*

Означення 3.2. *Правий ідеал I дуо-області R називається гельфандовим, якщо I містить хоча б один гельфальдовий елемент. У протилежному випадку, правий ідеал I називається негельфандовим, тобто, довільний ненульовий елемент правого ідеалу I є негельфандовим.*

Означення 3.3. *Правий негельфандовий ідеал N кільця R називається максимально негельфандовим, якщо для довільного правого ідеалу I, такого, що* $N \subset I$, $I \neq N$*, існує гельфандовий елемент а такий, що* $a \in I$.

Встановлено існування максимально негельфандових правих ідеалів дуо-області Безу і їх найпростіші властивості. Узагальнено результат Хенріксена про те, що кожен ненульовий простий ідеал комутативного адекватного кільця міститься у єдиному максимальному ідеалі, на випадок гельфандових елементів дуо-областей Безу.

Теорема 3.1. *Нехай R – дуо-область Безу, в якій довільний ненульовий первинний правий ідеал містить гельфандовий елемент. Тоді R є областю, у якій довільний ненульовий первинний правий ідеал міститься у єдиному максимальному.*

У другому підрозділі вивчається канонічна діагональна редукція матриць над дуо-областями Безу гельфандового рангу один. Вводиться означення локально гельфандової дуо-області Безу, та показано, що така область володіє властивостями, які є аналогічні до класичних локальних кілець. Доведено, що будь-яка локально гельфандова дуо-область Безу є кільцем елементарних дільників.

Означення 3.5. *Нехай R – дуо-область Безу. Назвемо кільце R, кільцем гельфандового рангу один, якщо для довільних елементів* $a,b\in R$*, що* $aR+bR=R$*, існує такий елемент* $r\in R$*, що* $a+br$ *– гельфандовий елемент.*

Одним з головних результатів даного розділу є наступна теорема.

Теорема 3.3. *Дуо-область Безу R гельфандового рангу один є кільцем елементарних дільників.*

Як наслідок отримаємо наступний результат (відповідь на відкрите питання Забавського, Ларсена, Левіса та Шореса для випадку дуо-кілець).

Наслідок 3.1. *PM* дуо-область Безу є кільцем елементарних дільників.*

У дисертації вводиться поняття локально гельфандової дуо-області Безу.

Означення 3.6. *Дуо-область Безу називається локально гельфандовою, якщо вона містить єдиний максимально негельфандовий правий ідеал.*

Установлено існування і найпростіші властивості локально гельфандової дуо-області та доведено один з основних результатів для локально гельфандової дуо-області Безу.

Теорема 3.7. *Локально гельфандова дуо-область Безу R є кільцем елементарних дільників.*

Четвертий розділ присвячений питанням приведення до канонічного діагонального вигляду матриць другого порядку оборотними матрицями Тепліца над кільцями елементарних дільників квадратного стабільного рангу один.

У першому підрозділі вводиться поняття кільця Тепліца, та досліджується діагональна редукція матриць над кільцями квадратного стабільного рангу один.

Означення 4.1. *Кільце R є кільцем квадратного стабільного рангу один, якщо для довільних* $a,b\in R$ *з того, що* $aR+bR=R$ *випливає, що* $a^2+bt\in U(R)$ *для деякого елемента* $t\in R$.

Аналогічно до означення кільця Ерміта визначено поняття кільця Тепліца.

Означення 4.3. *Комутативне кільце R назвемо кільцем Тепліца, якщо для будь-яких* $a,b \in R$ *існує оборотна матриця Тепліца T така, що* $(a,b)T=(d,0)$.

Доведено необхідну та достатню умову того, що кільце Ерміта є кільцем Тепліца.

Теорема 4.1. *Нехай R є комутативним кільцем Ерміта. Тоді R – кільце Тепліца тоді і лише тоді, коли це кільце квадратного стабільного рангу один.*

Одним з основних результатів даного розділу є наступна теорема.

Теорема 4.2. *Нехай R – комутативне кільце елементарних дільників квадратного стабільного рангу один. Тоді довільна матриця другого порядку оборотними матрицями Тепліца приводиться до канонічного діагонального вигляду.*

Більше того, має місце наступний результат.

Теорема 4.3. *Нехай R – комутативне кільце елементарних дільників квадратного стабільного рангу один. Тоді будь-яка оборотна матриця другого порядку є добутком оборотних матриць Тепліца.*

У другому підрозділі четвертого розділу вводиться поняття кільця одиничного квадратного стабільного рангу один та розглядається діагональна редукція матриць над такими кільцями.

Означення 4.4. *Кільце R називається кільцем одиничного квадратного стабільного рангу один, якщо з умови* $aR+bR=R$ *випливає, що існує оборотний елемент* $t \in R$ *такий, що* a^2+bt *– оборотний елемент кільця R.*

Теорема 4.4. *Нехай R – комутативне кільце Ерміта одиничного квадратного стабільного рангу один. Тоді R є кільцем елементарних дільників та будь-яка матриця другого порядку над R діагоналізується оборотними матрицями Тепліца.*

Теорема 4.5. *Нехай* R *– комутативне кільце Безу стабільного рангу один. Тоді:*

1) *довільний унімодулярний рядок (стовпець) довжини 2 над* R *доповнюється до оборотної матриці Тепліца;*

2) довільна матриця другого порядку над R, шляхом домноження справа та зліва на оборотні матриці Тепліца приводиться до канонічно діагонального вигляду;

3) довільна оборотна матриця другого порядку над кільцем R розкладається у добуток оборотних матриць Тепліца.

У **п'ятому розділі** дисертації встановлено умови за яких скінченний гомоморфний образ комутативної області Безу є напівпотужним кільцем.

Означення 5.2. *Нехай R комутативна область Безу. Скажемо, що ненульовий елемент $a \in R$ є напівпотужним, якщо для будь-якого $b \in R$ знайдуться елементи $r, s \in R$:*

$$a = rs,\ rR + bR = R,\ rR + sR = R.$$

Теорема 5.1. *Нехай R комутативна область Безу. Тоді a є напівпотужним елементом тоді і лише тоді, коли R/aR є напівпотужним кільцем.*

Наступні результати встановлюють зв'язок адекватних елементів із поняттям напівпотужного кільця.

Теорема 5.2. *Нехай R є комутативною областю Безу. Якщо елемент $a \in R$ є напівпотужним, тоді для будь-якого елемента $b \notin J(aR)$ існує деякий елемент $u \in R$ такий, що ${}_{a}A_{bu}$ (${}_{a}A_{bu}$ – означає, що елемент a є адекватним до елемента bu*).

Теорема 5.3. *Нехай R – комутативна область Безу і $a \in R \setminus \{0\}$. Фактор-кільце R/aR є напівпотужним тоді і лише тоді, коли для будь-якого елемента $b \notin J(aR)$ існує деякий елемент $u \in R$ такий, що ${}_{a}A_{bu}$ і $bu \in aR$.*

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню стабільного рангу та його узагальнень у кільцях Безу.

У дисертації автором отримано такі нові результати:

- Показано, що дистрибутивна область Безу є областю елементарних дільників тоді і лише тоді, коли вона є дуо-областю акуратного рангу один;

- Розглянуто максимально негельфандові ідеали, встановлено їх властивості, вивчено локально негельфандові дуо-області Безу і також встановлено їх зв'язок із кільцями елементарних дільників;

- Показано, що над комутативними кільцями елементарних дільників квадратного стабільного рангу один, довільна матриця другого порядку, приводиться до канонічно діагонального вигляду оборотними матрицями Тепліца;

- Показано, що область Безу стабільного рангу один з умовою Дубровіна і умовою Z є кільцем елементарних дільників;

- Встановлено умови, коли скінченно гомоморфні образи комутативної області Безу є напівпотужними кільцями;

Автор вдячний своєму науковому керівникові доктору фізико-математичних наук, професору Забавському Богдану Володимировичу за підтримку в процесі виконання кандидатської роботи, цінні поради та постійну увагу і допомогу.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Бохонко В. В. Приведення матриць до канонічного діагонального вигляду оборотними теплецевими матрицями / В. В. Бохонко, Б. В. Забавський // Вісник ДонНУ. Сер. А: Природничі науки. – 2015. – 1-2. – С.7-11.*

2. *Бохонко В. В. Редукція матриць над областю Безу стабільного рангу 1 з умовою Дубровіна та умовою Z / В. В. Бохонко // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2015. – 80. – С.5-9.*

3. *Bokhonko V. V. Bezout domains whose finite homomorphic images are semipotent ring / V. V. Bokhonko // Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. – 2016. – 81. – P.58-60.*

4. *Бохонко В. В. Максимально негельфандові ідеали дуо-області Безу / В. В. Бохонко, О. В. Пігура // Мат. Студ. – 2016. – 46,№1. – С.13-19.*

5. *Bokhonko V. A criterion of elementary divisor domain for distributive domains / V. Bokhonko, B. Zabavsky // Algebra and Discrete Mathematics, – 2017. – 23,№1. – P.1-6.*

6. *Bokhonko V. V. A criterion of elementary divisor domain for distributive domains // X International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd, August 20 – 27, 2015. Odessa. P.19.*

7. *Bokhonko V. V., Pihura O. V. The maximal non-Gelfand ideals of Bezout duo-domains / V. V. Bokhonko, O. V. Pihura // International mathematics conference "Group and Actions: Geometry and Dynamics" dedicated to the memiry of professor Vitaly Sushchanskyy. December 19 – 22, 2016. Kyiv. P.14.*

8. *Бохонко В. В. Приведення матриць до канонічного вигляду оборотними теплецевими матрицями / В. В. Бохонко, Б. В. Забавський // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу". 24 – 27 лютого 2016 року. Ворохта. С. 58.*

АНОТАЦІЯ

Бохонко В. В. *Стабільний ранг і його узагальнення у кільцях Безу.* – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – алгебра та теорія чисел. – Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2017.

Дисертація присвячена вивченню стабільного рангу та його узагальнень у кільцях Безу, як комутативних, так і некомутативних. Доведено, що дистрибутивна область Безу є кільцем елементарних дільників тоді і лише тоді, коли це дуо-область акуратного рангу один, та дуо-область Безу гельфандового рангу один є кільцем елементарних дільників. Наведено необхідні та достатні умови того, що фактор-кільце дуо-області Безу за головним ідеалом є чистим кільцем. Доведено, що кільце елементарних дільників з умовою L є квазі-дуо кільцем з умовою Дубровіна. Введено поняття кільця з умовою Z та встановлено, що область Безу стабільного рангу один з умовою Дубровіна та умовою Z є кільцем елементарних дільників. Введено поняття напівпотужного елемента, та показано, що скінченний гомоморфний образ комутативної області Безу є напівпотужним кільцем тоді і лише тоді, коли він породжений напівпотужним елементом. Більше того, встановлено

критерій напівпотужності елемента комутативної області Безу в термінах адекватності до елементів з радикалу, визначеного цим елементом. Введено поняття кільця Тепліца, та доведено, що кільце Ерміта є кільцем Тепліца тоді і лише тоді, коли це кільце квадратного стабільного рангу один. Введено поняття кільця одиничного квадратного стабільного рангу один та показано, що кільце Ерміта одиничного квадратного стабільного рангу один є кільце елементарних дільників будь-яка матриця другого порядку діагоналізується оборотними матрицями Тепліца.

Ключові слова: *стабільний ранг, квадратний стабільний ранг, дуо-кільця, дистрибутивні кільця, кільце Безу, кільце елементарних дільників, акуратний ранг один, напівпотужні кільця, гельфандові кільця.*

АННОТАЦИЯ

Бохонко В. В. *Кольца Стабильный ранг и его обобщения в кольцах Безу*. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – алгебра и теория чисел. – Львовский национальный университет имени Ивана Франко, Львов, 2017.

Диссертация посвящена изучению стабильного ранга и его обобщений в кольцах Безу, как коммутативных, так и некоммутативных. Доказано, что дистрибутивная область Безу является кольцом элементарных делителей тогда и только тогда, когда это дуо-область аккуратного ранга один, и дуо-область Безу гельфандового ранга один является кольцом элементарных делителей. Приведены необходимые и достаточные условия того, что фактор-кольцо дуо-области Безу относительно главного идеала является чистым кольцом. Доказано, что кольцо элементарных делителей с условием L является квази-дуо кольцом с условием Дубровина. Введено понятие кольца с условием Z и установлено, что область Безу стабильного ранга один с условием Дубровина и условием Z является кольцом элементарных делителей. Введено понятие полумощного элемента, и показано, что конечный гомоморфный образ коммутативной области Безу является полумощным кольцом тогда и только тогда, когда он порождается полумощным элементом. Более того, установлен критерий полумощности элемента коммутативной области Безу в терминах адекватности к элементам с радикала, определенного этим элементом. Введено понятие кольца Теплица, и доказано, что кольцо Эрмита является кольцом Теплица тогда и только тогда, когда это кольцо квадратного стабильного ранга один. Введено понятие кольца единичного квадратного стабильного ранга один и показано, что кольцо Эрмита единичного квадратного стабильного ранга один является кольцо элементарных делителей любая матрица второго порядка диагонализуется оборотными матрицами Теплица.

Ключевые слова: *стабильный ранг, квадратный стабильный ранг, дуо-кольца, дистрибутивные кольца, кольцо Безу, кольцо элементарных делителей, аккуратный ранг один, полумощные кольца, кольца Гельфанда.*

ABSTRACT

Bokhonko V. V. *Stable range and its generalizations in Bezout rings.* – Manuscript.

The thesis for obtaining the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences by the speciality 01.01.06 – algebra and number theory. – Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2017.

The thesis is devoted to the study of stable range and its generalizations in Bezout rings, both commutative and noncommutative. It is proved that the distributive Bezout domain is an elementary divisor ring if and only if it is a duo-domain of neat range one, and the Bezout duo-domain of the Gelfand range one is an elementary divisor ring. The necessary and sufficient conditions are given for the case of clean finite homomorphic image of the Bezout duo-domain. It is proved that the elementary divisor ring with condition L is a quasi-duo ring with Dubrovin's condition. The concept of a ring with the condition Z is introduced and it is established that the Bezout domain of stable range one with Dubrovin's condition and the condition Z is an elementary divisor ring. The concept of a semipotent element is introduced, and it is shown that a finite homomorphic image of a commutative Bezout domain is a semipotent ring if and only if it is generated by a semipotent element. Moreover, a criterion for the semipotency of the element of the commutative Bezout domain was established in terms of adequacy to the elements from the radical defined by this element. The notion of Toeplitz ring is introduced, and it is proved that the Hermite ring is a Toeplitz ring if and only if this ring is of square stable range one. The concept of a ring of unit square stable rank one is introduced and it is shown that the Hermite ring of the unit square stable rank one is a ring of elementary divisors, any second-order matrix is diagonalized by the invertible Toeplitz matrices.

Keywords: *Stable range, square stable range, duo-rings, distributive rings, Bezout rings, elementary divisor rings, neat range one, semipotent rings, Gelfand rings.*