ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ІВАНА ФРАНКА

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

БОХОНКО ВАСИЛИНА ВАСИЛІВНА

УДК 512.552.13

ДИСЕРТАЦІЯ

СТАБІЛЬНИЙ РАНГ І ЙОГО УЗАГАЛЬНЕННЯ У КІЛЬЦЯХ БЕЗУ

01.01.06. Алгебра та теорія чисел

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук.

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело. ________________________________ Бохонко В. В.

Науковий керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор
Забавський Богдан Володимирович

ЛЬВІВ –2017

Анотація

Бохонко В. В. Стабільний ранг і його узагальнення у кільцях Безу. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.06 "Алгебра та теорія чисел". – Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2017.

Дисертація складається зі вступу, п'яти розділів, висновків та списку літератури. У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформулювано мету, завдання, предмет, об'єкт та методи дослідження, вказано наукову новизну, практичне значення отриманих результатів, особистий внесок здобувача, а також вказано, де апробовані та опубліковані основні результати дисертації.

У розділі 1 зібрані необхідні означення та факти, пов'язані з тематикою досліджень, що використовуються у дисертації. Перелічені необхідні позначення та термінологія. Наведені посилання на першоджерела досліджень кандидатської роботи. Крім того, у даному розділі сформульовано уже відомі результати, які є необхідними для подальшого викладу матеріалу.

Другий розділ складається із трьох підрозділів. Він присвячений вивченню дуо-областей Безу та їх зв'язку із кільцями елементарних дільників.

У цьому першому підрозділі даного розділу вводиться поняття кільця акуратного рангу один для дуо-областей Безу. Використовуючи це

поняття, охарактеризовано такі елементи a дуо-області Безу R, що R/aR є чистим кільцем. Також знайдено необхідну і достатню умову того, що дуо-кільце Ерміта є кільцем елементарних дільників. Крім того, показано, що дистрибутивна область Безу є областю елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли вона є дуо-областю акуратного рангу один.

Другий підрозділ присвячений вивченню некомутативних кілець Безу з умовами на двобічні ідеали, породжені одним елементом. Зокрема, це умова L та умова Дубровіна, і введена в розгляд як узагальнення умови L умова Z. Показано зв'язок цих понять із квазі-дуо кільцями та кільцями елементарних дільників. Доведено, що кожен елемент області Безу з умовою Z та умовою Дубровіна є добутком дуо-елемента та скінченного елемента. Також показано, що область Безу стабільного рангу один з умовою Дубровіна і умовою Z є кільцем елементарних дільників.

У третьому підрозділі наведено ряд різноманітних прикладів некомутативних кілець Безу, до яких застосовні результати перших двох підрозділів.

Третій розділ присвячено теорії гельфандових елементів дуо-областей Безу та зв'язку діагональнії редукції матриць та гельфандового рангу один.

У першому підрозділі вводиться означення гельфандових та негельфандових елементів та ідеалів, встановлюються властивості множин таких елементів чи ідеалів, розглянуто гельфандовий аналог радикалу Джекобсона.

У другому підрозділі вивчається канонічна діагональна редукція матриць над дуо-областями Безу гельфандового рангу один. Вводиться означення локально-гельфандової дуо-області Безу, та показано, що така область володіє властивостями, які є аналогічні до класичних локальних кілець. Доведено, що будь-яка локально-гельфандова дуо-область Безу є кільцем елементарних дільників.

Четвертий розділ присвячено канонічній діагональній редукції матриць другого порядку над кільцями квадратного стабільного рангу один.

У першому підрозділі вводиться поняття кільця Тепліца, як підкласу кілець Ерміта, та встановлюються необхідні та достатні умови того, що кільце Ерміта є кільцем Тепліца. Доведено, що унімодулярний рядок довжини два є доповнювальним до оборотної матриці Тепліца над кільцями квадратного стабільного рангу один. Також показано, можливість канонічної діагональної редукції матриць над кільцями елементарних дільників квадратного стабільного рангу один за допомогою оборотних матриць Тепліца, та розклад оборотних матриць другого порядку у добуток цих матриць.

У другому підрозділі вводиться поняття кільця одиничного квадратного стабільного рангу один, подібно до кілець одиничного стабільного рангу один. Доведено, що над кільцями Ерміта одиничного квадратного стабільного рангу один, довільна матриця другого порядку, приводиться до канонічно діагонального вигляду оборотними матрицями Тепліца, і таке кільце є кільцем елементарних дільників.

У цьому розділі встановлено умови, коли скінченний гомоморфний образ комутативної області Безу є напівпотужними кільцями. Започатковано та розвинуто концепцію напівпотужних елементів. Показано, що напівпотужність елемента є рівносильним тому, що скінченний гомоморфний образ визначений цим елементом є напівпотужним кільцем. Досліджено зв'язок між напівпотужними елементами та їх адекватністю до елементів із визначеного ними радикалу.

Практичне значення отриманих результатів. Одержані в дисертації результати мають теоретичний характер і можуть бути застосовані у задачах пов'язаних з поняттями стабільного рангу та узагальнень стабільного рангу кілець, а також у задачах діагоналізації матриць.

Ключові слова: стабільний ранг, квадратний стабільний ранг, дуо-кільця, дистрибутивні кільця, кільце Безу, кільце елементарних дільників, акуратний ранг один, напівпотужні кільця, гельфандові кільця.

Список публікацій здобувача за тематикою дисертації

1. Бохонко В. В. Приведення матриць до канонічного діагонального вигляду оборотними теплецевими матрицями / В. В. Бохонко, Б. В. Забавський // Вісник ДонНУ. Сер. А: Природничі науки. - 2015. - 1-2. - С.7-11.

2. Бохонко В. В. Редукція матриць над областю Безу стабільного рангу 1 з умовою Дубровіна та умовою Z / В. В. Бохонко // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. - 2015. - 80. - С.5-9.

3. Bokhonko V. V. Bezout domains whose finite homomorphic images are semipotent ring / V. V. Bokhonko // Visnyk of the Lviv Univ. Series

Mech. Math. - 2016. - 81. - P.58-60.

4. Бохонко В. В. Максимально негельфандові ідеали дуо-області Безу / В. В. Бохонко, О. В. Пігура // Мат. Студ. - 2016. - 46,№1. - С.13-19.

5. Bokhonko V. A criterion of elementary divisor domain for distributive domains / V. Bokhonko, B. Zabavsky // Algebra and Discrete Mathematics, - 2017. - 23,№1. - P.1-6.

6. Bokhonko V. V. A criterion of elementary divisor domain for distributive domains // X International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd, August 20-27, 2015. Odessa. P.19.

7. Bokhonko V. V., Pihura O. V. The maximal non-Gelfand ideals of Bezout duo-domains / V. V. Bokhonko, O. V. Pihura // International mathematics conference "Group and Actions: Geometry and Dynamics"dedicated to the memiry of professor Vitaly Sushchanskyy. December 19-22, 2016. Kyiv. P.14.

8. Бохонко В. В. Приведення матриць до канонічного вигляду оборотніми теплецевими матрицями / В. В. Бохонко, Б. В. Забавський // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу". 24-27 лютого 2016 року. Ворохта. С. 58.

Abstract

Bokhonko V. V. Stable range and its generalizations in Bezout rings. – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis presented for the degree of Candidate of Sciences in Physics and Mathematics (Doctor of Philosophy) in speciality 01.01.06 "Algebra and number theory". – The Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2017.

The thesis consists of an introduction, five chapters, conclusions and references. The introduction consists of the relevance of research topic, purpose, objectives, subject, object and research methods, The introduction substantiates the relevance of research topic. The goal, subject, object and methods of the research are listed there. Scientific novelty, the practical significance of the results, the relation to scientific topic and applicant's contribution are also indicated in the introduction.

In Chapter 1 we gather all necessary definitions and facts related to the subject that are used in the thesis. We also list there necessary notations and terminology.

The second chapter consists of three sections. In this chapter we the study Bezout duo-domains that are elementary divisor rings.

In this first section of this chapter we introduce the concept of neat range one for duo-Bezout domains. Using this concept, we describe such elements a of Bezout duo-domain R, that R/aR is a clean ring. Also we found necessary and sufficient condition that Hermite duo-ring is an elementary divisor ring. Furthermore, we show that distributive Bezout

domain is an elementary divisor ring if and only if it is a duo-domain of neat range one.

The second section is devoted to the study of noncommutative Bezout rings in terms of two-sided principal ideals. In particular, the condition L and the Dubrovin's condition are put into consideration. Also we generalize condition L and define condition Z. We show the relationship of these concepts with quasi-duo rings and rings elementary divisors. It is proved that every element of the Bezout domain with Z and Dubrovin conditions and is the product of duo-element and finite element. It is also shown that the Bezout stable range one domain with Dubrovin's condition and the condition Z is an elementary divisor ring.

The third section provides a number of different examples of noncommutative Bezout rings, which are applicable the results of the first two sections.

The third chapter is devoted to the theory gelfand elements in Bezout duo-domains and their relationship with canonical matrix diagonal reduction.

The first section introduces the definition of gelfand and nongelfand elements and ideals, we establish sets of properties elements or ideals, consider gelfand analogue of Jacobson radical.

The second section examines canonical reduction diagonal matrix of duo-area Bezout gelfand range one. Introduce a definition of locally gelfand duo-Bezout field and show that this area has properties which is similar to the classic local rings. It is proved that any locally gelfand Bezout duo-domain is an elementary divisor ring.

The fourth section is devoted to the canonical diagonal matrix reduction the second order of rings square stable rank one.

The first section introduces the concept of ring Toeplitz Division rings as Ermita and set necessary and sufficient conditions that a Hermite ring is a Toeplitz ring. Proved that unimodular row of length two is completable to the invertible Toeplitz matrix over rings of square stable range one. Also it is shown the possibility of canonical diagonal reduction matrices over rings elementary divisors square stable range one using Toeplitz matrices of second order in their products.

The second section introduces the concept of ring unit square stable range one, like the rings of a unit stable range one. It is proved that over Hermite rings of unit square stable range one, arbitrary matrix of second order is reducible to canonical diagonal form via invertible Toeplitz matrices and it is an elementary divisor ring.

This section establishes conditions when finite homomorphic images commutative Bezout doamins is a semipotent rings. Initiated and developed the concept semipotent elements. It is shown that semipotent element condition is equivalent to that finite homomorphic image defined by this element is a semipotent ring. The connection of semipotentelements and their adequacy to certain elements of their radical is established.

The practical significance of the results. Obtained in the thesis results are theoretical in nature and can be used in problems related to sustainable concepts and generalizations of stable range, as well as the problems of diagonalization of matrices.

Keywords: Stable range, square stable range, duo-rings, distributive rings, Bezout rings, elementary divisor rings, neat range one, semipotent

rings, Gelfand rings.

Publications list of the applicant.

1. Bokhonko V. V., Zabavsky B. V. A criterion of elementary divisor domain for distributive domains // Algebra and Discrete Mathematics. – 2017. – 23,№1. – P.1-6.

2. Bokhonko V. V., Pihura O. V. Maximally non-Gelfand ideals of Bezout duo-domains // Mat. Stud. – 2016. – 46,№1 – P.13–19. (in Ukrainian)

3. Bokhonko V. V.Bezout domains whose finite homomorphic images are semipotent ring // Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. – 2016. – 81. – P.58-60.

4. Bokhonko V. V. Reduction of matrices over Bezout domain of stable range one satisfying Dubrovin condition and condition Z // Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. – 2015. – 80. – P.5-9. (in Ukrainian)

5. Bokhonko V. V., Zabavsky B. V.Canonical diagonal matrix reduction via invertible Toeplitz matrices // Bulletin of Donetsk National University. Series A. Natural Sciences. – 2015. – №1-2. – P. 7 – 11. (in Ukrainian)

6. Bokhonko V. V. A criterion of elementary divisor domain for distributive domains // X International Algebraic Cinference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd, August 20-27, 2015. Odessa. P.19.

7. Bokhonko V. V., Pihura O. V. The maximal non-Gelfand ideals of Bezout duo-domains // International mathematics conference "Group and Actions: Geometry and Dynamics" dedicated to the memiry of professor Vitaly Sushchanskyy. December 19-22, 2016. Kyiv. P.14.

8. Bokhonko V. V., Zabavsky B. V.Canonical diagonal matrix reduction via invertible Toeplitz matrices // Ukrainian scientific conference "Modern problems of probability theory and mathematical analysis". 24-27 February 2016. Vorohta. P.58. (in Ukrainian)

Зміст

Перелік умовних позначень

$\mathbb{M}_{n\times m}(R)$ — множина матриць розміру $n \times m$ над кільцем R;

D_n — діагональна матриця розміру $n \times n$ над кільцем R $D = (d_{ii}),\ \ i = 1, 2, \ldots, n$;

$A \sim B$ — матриці A та B еквівалентні;

$GL_n(R)$ — група оборотніх матриць порядку n;

$\mathbb{R}[x]$ — кільце многочленів з коефіцієнтами з кільця R;

$\mathcal{C}(X)$ — кільце неперервних дійсних функцій на топологічному просторі X;

$\mathbb{Q}_{Cl}(R)$ — класичне кільце дробів кільця R;

$R \propto M$ — тривіальне розширення (R – кільце, ${}_RM_R$ – бімодуль);

$U(R)$ — група одиниць кільця R;

$\mathbb{Z}_n$ — кільце лишків за модулем n;

$\mathbb{Z}_{(p)}$ — кільце всіх раціональних чисел, знаменник яких взаємно простий з p;

$\operatorname{spec}(R)$ — множина всіх простих ідеалів комутативного кільця R;

$\operatorname{mspec}(R)$ — множина всіх максимальних ідеалів комутативного кільця R;

$\overline{R} = R/aR$ — скінченний гомоморфний образ комутативної області Безу ($\overline{R} = R/aR$ для довільного ненульового елемента $a \in R$);

J(R)	— радикал Джекобсона кільця R;
$N\,(R)$	— ніль-радикал кільця R;
$sr\,(R)$	— стабільний ранг кільця R;
$l(a)$	— лівий анулятор елемента a $l(a) = \{z \mid za = 0, a \in R\}$;
$r(a)$	— правий анулятор елемента a $r(a) = \{z \mid az = 0, a \in R\}$;
$\mathrm{Ann}(a)$	— анулятор елемента a комутативного кільця
$a \mid b$	— елемент a є дільником елемента b (a ділить b) ($aR \subset bR$) (R – комутативне кільце);
$a \parallel b$	— елемент a є повним дільником елемента b ($RbR \subseteq aR \cap Ra$);
(a, b)	— найбільший спільний дільник елементів a і b, де $a, b \in R$, R – комутативне кільце.

Вступ

Актуальність теми.

Кільце R називається кільцем стабільного рангу n, якщо n є найменшим натуральним числом для якого виконується наступна властивість: якщо елементи $a_1, \ldots, a_{n+1} \in R$ породжують одиничний ідеал, тоді існують $x_1, \ldots, x_n$ такі, що елементи $a_1 + a_{n+1}x_1, \ldots, a_n + a_{n+1}x_n$ також породжують одиничний ідеал. Іншими словами, кожен унімодулярний рядок довжини $m \geq n$ може бути "зведений" до унімодулярного рядка довжини n, тобто стабільний ранг кільця виступає у ролі певної розмірності. Аналогічно до поняття розмірності, у випадку коли такого числа не існує, говорять, що кільце R має нескінченний стабільний ранг. Зв'язок між стабільним рангом та більш традиційними поняттями розмірності встановлюється нерівністю доведеною Басом [12], який і ввів вказане поняття:

$$sr(R) \leq dim(Max(R)) + 1,$$

якщо R є комутативним нетеровим кільцем, а $Max(R)$ — простір його максимальних ідеалів, наділений топологією Зариського. Доцільність введення даного поняття чітко обґрунтував Бас [12], досліджуючи стабільні властивості функтора K_1 та питання стабілізації лінійних груп над кільцями. У подальшому різноманітними авторами продемонстровано застосування стабільного рангу до інших проблем алгебраїчної K-теорії, а рівно ж і до теорії кілець та модулів. Наприклад, стабільний ранг відіграє важливу роль у проблемах скорочуваності, підстановки та властивості заміни у прямих сумах модулів. Крім цього, у деяких випадках даний інваріант цілком характеризує властивості кільця, яке розглядається. Капланським показано, що регулярне (в сенсі фон Неймана) має стабілний ранг один в точності коли це одинично-регулярне кільце. Ара, Гудьорл, О'Мьяра та Пардо [11] довели, що стабільний ранг сепаративного регулярного кільця рівний один, два або є нескінченним. Питання про існування регулярного кільця скінченного стабільного рангу на даний момент є відкритим. Зауважимо, якщо сепаративне регулярне кільце має скінченний стабільний ранг, тоді це кільце є кільцем Ерміта [40]. У загальному випадку, Меналом та Монказі [41] доведено, що стабільний ранг кільця Ерміта завжди не перевищує двох. Важлива роль кілець скінченного стабільного рангу прослідковується також у наступному результаті Васерштейна:

$$sr(M_n(R)) = 1 + \lceil (sr(R) - 1)/n \rceil$$

для будь-якого натурального числа n. Згідно з цією формулою кільця матриць достатньо високого порядку над кільцем стабільного рангу $sr(R)$ завжди є кільцями стабільного рангу два. Більше того, якщо $sr(R) = 1$, тоді і будь-яке кільце матриць також є кільцем стабільного рангу один, тобто стабільний ранг один та два є Моріта інваріантами. Усі висловлені вище міркування стали підставою до більш глибокого вивчення цього поняття у роботах таких дослідників, як Лам [36], Васерштейн [50], Менал, Монказі [41], Ара, Гудьорл [11], МакГоверн [38], Чен [21], Кушо, Забавський [59].

Поряд із класичною теорією стабільного рангу виникає тенденція до специфікації або узагальнення класичних понять з метою отримання якісно нових результатів у добре досліджених областях. Одним із перших таких узагальнень є поняття кільця ідемпотентного стабільного рангу один [20]. Аналогічно до означення класичного стабільного рангу кільця вказане поняття дозволяє характеризувати різні типи кілець. Вонг, Чен, Хурана та Лам [53] показали, що у випадку напівлокального кільця напівдосконалість еквівалентна тому, що це кільце ідемпотентного стабільного рангу один, а у випадку центральних ідемпотентів кільця ідемпотентного стабільного рангу один, чисті кільця та кільця з властивістю заміни співпадають. Також вивчались і інші узагальнення поняття стабільного рангу у роботах Менaлі, Монказі [41], Каміло [18, 19], МакГоверна [38], Степанова [9].

У 1977 році Ніколсон [42] започаткував систематичне вивчення кілець з властивістю заміни, як кілець в яких ідемпотенти піднімаються за модулем будь-якого однобічного ідеалу, грунтуючись на роботі Уорфілда про властивість заміни прямих доданків у розкладах модулів. Клас кілець з властивістю заміни містить всі чисті, регулярні, напіврегулярні, напівдосконалі, неперервні та напівартінові кільця. Зауважимо, що згідно з результатами Каміло та Ю [19] кільце з властивістю заміни, в якому кожен регулярний елемент є одинично-регулярним, є кільцем стабільного рангу один. Як було зазначено вище, кільця з властивістю заміни, ідемпотенти яких є центральними елементами, мають стабільний ранг один. Проте, в загальному випадку відсутній повний опис стабільного рангу таких кілець. Припустивши, що у кожному однобічному ідеалі, що не міститься в радикалі Джекобсона, міститься ідемпотент отримаємо означення напівпотужних кілець [43], який містить кільця з властивістю заміни. Вивчення властивостей таких кілець має серйозні перспективи, оскільки центральну роль у вивченні кілець з властивістю заміни відіграють ідемпотенти кільця.

Окрім традиційного означення одинично-регулярне кільце може бути визначене як кільце, кожен елемент якого є добутком ідемпотента та оборотного елемента. Введений Ніколсоном [42] адитивний аналог вказаної властивості отримав назву чистого кільця, тобто кільце є чистим, якщо кожен його елемент є сумою ідемпотента та оборотного елемента. Як показав Каміло, одинично-регулярне кільце є чистим. Ю показав, що кільце з властивістю заміни є чистим, у випадку правого (лівого) квазі-дуо кільця, а пізніше Ченом доведено аналогічне твердження, якщо всі примітивні фактор-кільця є артіновими.

Класична проблема діагоналізації матриць над кільцями отримує нові перспективи, накладаючи обмеження на стабільний ранг кільця. Капланським доведено, що для діагоналізації матриць будь-яких порядків оборотними перетвореннями над кільцем достатньо вміти діагоналізувати будь-які $1 \times 2,\ 2 \times 1,\ 2 \times 2$ матриці. Кільця над якими діагоналізуються матриці будь-яких порядків Капланський визначив як кільця елементарних дільників, а правими (лівими) Ермітовими було названо кільця над яким діагоналізуються $1 \times 2,\ (2 \times 1)$ матриці. Зауважимо, що будь-який скінченно-породжений правий (лівий) ідеал правого (лівого) кільця Ерміта є головним правим (лівим) ідеалом, тобто праві (ліві) кільця Ерміта є правими (лівими) кільцям Безу. Обернене твердження справедливе у випадку областей. У випадку існування у кільці дільників нуля Гілманом та Хенріксеном побудовано приклад комутативного кільця Ерміта, яке не є кільцем елементарних дільників. Вони ж також показали, що не кожне кільце Безу є кільцем Ерміта. Крім цього, Капланський довів, що над кільцем елементарних дільників кожен скінченно-зображуваний модуль є прямою сумою циклічних модулів, тому було поставлено питання повного опису класів кілець елементарних дільників. Обернене твердження довели Ларсен, Левіс та Щорес для комутативних кілець, тим самим частково відповідаючи на питання Уоріфлда: над якими кільцями довільний скінченно-зображуваний модуль є прямою сумою циклічних модулів? На підставі вказаних фактів рядом авторів (Капланський, Хенріксен, Кон, Ларсен, Левіс, Шорес, Вігант, МакГоверн, Забавський) вивчалось питання: чи кожна комутативна область Безу є кільцем елементарних дільників? На даний момент повного розв'язання ця проблема не має. У 2014 році Забавський охарактеризував комутативні кільця елементарних дільників, як кільця акуратного рангу один. Також він довів [58], що комутативне кільце Безу є кільцем Ерміта тоді і лише тоді, коли це кільце стабільного рангу не більше двох. Особливий інтерес у вивченні кілець Безу скінченного рангу викликає той факт, що стабільний ранг кільця елементарних дільників не перевищує двох, оскільки ці кільця є кільцями Ерміта.

Цікавим та важливим підкласом комутативних кілець елементарних дільників є клас адекавтних кілець. Такі кільця вперше виникають у роботі Веддербарна [55], пов'язаній із дослідженням кільця цілих аналітичних функцій. Свою назву вони отримують у праці Хелмера [29], у випадку областей. Інтерес до їх вивчення викликаний тим, що ці кільця є кільцями елементарних дільників, проте зобов'язані задовольняти жодних умов скінченності ланцюгів ідеалів. У подальшому такі кільця активно вивчались рядом інших авторів, поняття адекватності було розширено на випадок кілець з дільниками нуля, введено поняття адекватного елемента. Зокрема, Гілман та Хенріксен [26] довели, що комутативне регулярне кільце є кільцем в якому нуль є адекватним елементом, та комутативне кільце нормування є всюди адекватним кільцем. Незважаючи на їх розповсюдженість, адекватні кільця залишаються мало вивченими з точки зору їх структури. Серед існуючих результатів можна зауважити теорему Хенріксена про те, що кожен ненульовий простий ідеал адекватного кільця міститься в єдиному максимальному ідеалі. Ларсен, Левіс і Шорес поставили питання, чи PM*-комутативна область Безу є адекватною. У роботі [13] отримано негативну відповідь на дане запитаня. Забавський і Гаталевич [57] нещодавно показали, що PM*-комутативна область Безу є областю елементарних дільників. Більше того, Забавський, Білявська, МакГоверн довели критерій адекватності комутативної області Безу в термінах напіврегулярності її скінченних гомоморфних образів. Згідно з теоремою Забавського на Білявської адекватне кільце є кільцем майже стабільного рангу один, а у випадку, коли радикал Джекобсона є ненульовим — його стабільний ранг рівний один.

Один із ефективних підходів до вивчення питання діагоналізації матриць вказав Шорес [46] у роботі за 1974 рік. Ним доведено, що комутативне напівспадкове кільце Безу є кільцем елементарних дільників тоді і лише тоді, коли будь-яке фактор-кільце стосовно головного ідеалу породженого елементом, який не є дільником нуля, є кільцем елементарних дільників. Таким чином, вивчення властивостей комутативних областей Безу може бути здійснене за допомогою вивчення їх скінченних гомоморфних образів. Встановленню такого типу зв'язків присвячена велика кількість робіт. Зокрема, Забавський та Білявська [2] показали, що у випадку адекватного елемента скінченний гомоморфний образ комутативної області Безу є кільцем з властивістю заміни. Згодом даний результат був уточнений Забавським та Кузніцькою [35], які ввели в розгляд роздільні елементи та роздільні кільця, що є більш загальними поняттями. Отже, вивчення комутативних областей Безу, скінченні гомоморфні образи яких є чистими або напівпотужними кільцями є актуальною задачею.

На основі цих результатів можна зробити висновок про цілісність і більш-менш завершену картину описання комутативних кілець елементарних дільників, що, на жаль, не можна сказати про некомутативні кільця елементарних дільників.

Серед відомих результатів слід відзначити результати Хенріксена [30], який показав, що над одинично регулярними кільцями довільна матриця діагоналізується (без умов повної подільності діагональних елементів). Відзначимо, що згідно Капланського, одинично регулярне кільце — це регулярне кільце стабільного рангу один. У класі кілець елементарних дільників стабільного рангу 1 слід відзначити напівлокальні напівпервинні кільця, які є кільцями елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли виконується умова Дубровіна [8]. Більше того, як показали Забавський і Комарницький квазі-дуо кільце елементарних дільників — це кільце, в якому виконується умова Дубровіна. Звідси, як наслідок Туганбаєв показав, що дистрибутивне кільце елементарних дільників — це лише дуо-кільце елементарних дільників. Тим самим задача вивчених умов, коли дуо-кільце Безу є кільцем елементарних дільників є доволі актуальною задачею. А враховуючи описані вище результати щодо комутативних кілець елементарних дільників, особливу роль відіграють дослідження дуо-кілець Безу стабільного рангу один і всеможливих відомих узагальнень — ідемпотентного стабільного рангу один [20], квадратного стабільного рангу один [34], Гельфандового рангу один [63] і т.д.

Вивчаючи прості області елементарних дільників, Забавський описав їх як 2-прості області Безу [61]. Рядом авторів отримано узагальнення цих результатів для різних класів некомутативних кілець елементарних дільників. Найбільш значними є результати Кона, який показав над правою головною областю Безу довільна матриця діагоналізується (з певними обмеженнями на діагональні елементи) [23]. Тому актуальним є продовження такого роду дослідження, які стосуються, взагалі кажучи, не лише дуо-кілець елементарних дільників, а більш ширших класів.

Вивчаючи ряди Лорана та матриці пов'язані із ними Тепліц у 1910 році вперше систематично почав вивчати матриці із однаковими елементами на кожній із діагоналей, назвавши їх $L-$формами. У сучасній літературі такі матриці відомі під назвою матриць Тепліца. Детальна та структурована теорія таких матриць зустрічається у роботах Фробеніуса. Слід відзначити, що матриці Тепліца достатньо часто виникають і у інших галузях теоретичної математики (функціональний та гармонійний аналіз, теорія ймовірностей), прикладної математики та фізики. У лінійній алгебрі відомим такий факт: над полем комплексних чисел будь-яка квадратна матриця є добутком матриць Тепліца. Вивчаючи проблему факторизації матриці

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

в добуток матриць Тепліца Хурана, Лам і Шоу ввели в розгляд поняття квадратного стабільного рангу один [34]. У комутативному випадку кільця стабільного рангу один є кільцями квадратного стабільного рангу один. Також відзначимо тісний зв'язок степеневої скорочуваності модулів над цими класами кілець [28].

Підсумовуючи, зауважимо, що тематика дисертаційної роботи відноситься до тих розділів математики, які перебувають у стадії постійного розвитку і мають багато теоретичних і прикладних застосувань. Це дозволяє зробити висновок про актуальність цих досліджень.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Тематики дисертаційної роботи є в русі основних досліджень кафедри алгебри та логіки, і також тісно пов'язані з науковими дослідженнями, які проводяться у галузі математики, зокрема алгебри у Львівському національному університеті імені Івана Франка. Матеріал дисертації є складовою і невід'ємною частиною досліджень держбюджетної теми, яка виконувана на кафедрі алгебри та логіки.

Мета і завдання дослідження.

Метою дисертаційної роботи є встановлення умов діагоналізації матриць над кільцями стабільного рангу один і два, і відомих його узагальнень. Зокрема, ставилася задача знаходження критерію діагоналізації матриць над різними класами кілець, зокрема дистрибутивними кільцями, дуо-кільцями та комутативними кільцями скінченного стабільного рангу.

Завданнями дослідження є:

- встановлення критерію діагоналізації матриць над дистрибутивними областями;

- на мові поняття гельфандового ідеалу для дуо-областей і поняття кільця гельфандового рангу один довести діагоналізацію матриць над PM*-дуо-областями Безу;

- використавши поняття комутативного кільця квадратного стабільного рангу один дослідити умови діагоналізацію матриць другого порядку оборотними матрицями Тепліца;

- для області Безу стабільного рангу один з умовами Дубровіна та умовою Z, дослідити можливість канонічно діагональної редукції матриць;

- дослідити умови, коли скінченний гомоморфний образ комутативної області Безу є напівпотужним кільцем.

Об'єкт дослідження: кільця скінченного стабільного рангу, кільця Безу, дистрибутивні кільця.

Предмет дослідження: стабільний ранг та пов'язані з ним властивості елементів і матриць

Методи дослідження: у дисертаційній роботі використовуються методи, які використовують у теорії кілець і модулів, алгебраїчної K-теорії та теорії матриць над кільцями.

Наукова новизна одержаних результатів.

У дисертації виявлено:

- встановлено умови, коли скінчений гомоморфний образ дуо-області є чистим кільцем;

- наведено критерій, коли дуо-область є кільцем елементарних дільників;

- встановлено необхідні та достатні умови, коли дистрибутивна область Безу є областю елементарних дільників;

- показано, що область Безу стабільного рангу один з умовою Дубровіна та умовою Z є кільцем елементарних дільників.

- доведено, що PM*-дуо-область є кільцем елементарних дільників;

- доведено, що локально гельфандова дуо-область є кільцем елементарних дільників;

- показано, що над кільцем елементарних дільників квадратного стабільного рангу один довільна матриця другого порядку приводиться до канонічно діагонального вигляду оборотними матрицями Тепліца;

- встановлено умови, коли скінченний гомоморфний образ комутативної області Безу є напівпотужним кільцем.

Наукове та практичне значення одержаних результатів.

Одержані в дисертації результати мають теоретичний характер і можуть бути застосовані у задачах пов'язаних з поняттями стабільного рангу та узагальнень стабільного рангу кілець, а також у задачах діагоналізації матриць.

Особистий внесок здобувача.

Усі основні результати роботи отримані автором особисто. Постановки задачі, вибір методів досліджень, аналіз результатів і загальна координація роботи належить науковому керівнику.

Основні результати дисертаційної роботи були оприлюднені і обговорені на таких конференціях:

— X міжнародній алгебраїчній конференції в Україні, присвяченій 70-річчю Ю. А. Дрозда, м. Одеса (20–27 серпня 2015 р.);

— Міжнародній математичній конференції «Group and Actions: Geometry and Dynamics» присвяченій пам'яті проф. В. Сущанського, м. Київ (19 – 22 грудня 2016 р.);

— Всеукраїнській науковій конференції: "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу м. Ворохта, (24–27 лютого 2016 р.).

Крім того, результати дисертації неодноразово доповідалися на наукових семінарах:

— Алгебраїчному семінарі Інституту математики НАН України (Інститут математики НАН України, м. Київ, 2017 р.);

— Алгебраїчному семінарі "Problems of elementary divisor rings"(Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів, 2013–2016 рр.).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковані у 8 наукових працях, з них 4 [3, 4, 5, 14] — у фахових наукових журналах із переліку, затвердженого Міністерством освіти і науки України (2 без співавторів), одна [15] — опублікована в журналі, який входить до міжнародної наукометричної бази даних (Web of Science,"Scopus"), дві [16, 17] — у матеріалах міжнародних наукових конференцій, 1 [6] — у матеріалах всеукраїнської наукової конференції.

Структура та обсяг дисертації.

Дисертаційна робота складається з переліку умовних позначень, вступу, п'яти розділів, висновків та списку використаних джерел. Повний обсяг дисертації — 126 сторінок. Список використаних джерел займає 8 сторінок та містить 63 найменувань.

Основний зміст роботи.

У **вступі** обґрунтована актуальність дисертаційного дослідження автора, визначені мета, актуальність, предмет, об'єкт та методи досліджень; вказано наукову новизну отриманих результатів; наведено форми апробації одержаних результатів.

У **першому розділі**, який має допоміжний характер, зібрані необхідні означення та факти, пов'язані з тематикою досліджень, що використовуються у дисертації. Перелічені потрібні позначення та термінологія, наведені посилання на першоджерела досліджень роботи, а також сформульовано відомі результати, які є необхідними для подальшого викладу матеріалу.

Другий розділ присвячений вивченню дуо-областей Безу та їх зв'язку із кільцями елементарних дільників.

У цьому першому підрозділі даного розділу вводиться поняття кільця акуратного рангу один для дуо-областей Безу. Використовуючи це поняття, знайдено необхідні та достатні умови того, що скінченний гомоморфний образ дуо-області Безу є чистим кільцем. Крім того, показано, що дистрибутивна область Безу є областю елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли вона є дуо-областю акуратного рангу один.

Означення 2.1. *Скажемо, що дуо-кільце R має акуратний ранг один, якщо для довільних $a, b \in R$ таких, що $aR + bR = R$ існує елемент $t \in R$ такий, що $R/(a + bt)R$ є чистим кільцем.*

Очевидним прикладом дуо-кільця акуратного рангу один є довільне дуо-кільце стабільного рангу один. Одним з основних результатів даного розділу є наступний критерій.

Теорема 2.3. *Дуо-область Безу є областю елементарних дільників тоді і лише тоді, коли вона є областю акуратного рангу один.*

У даній дисертаційній роботі описано дистрибутивні області елементарних дільників, як дуо-області Безу акуратного рангу один.

Теорема 2.4 *Дистрибутивна область Безу є кільцем елементарних дільників тоді і лише тоді, коли вона є дуо-областю акуратного рангу один.* Наступна теорема є поширенням відомих результатів Ройтмана [44], Щедрика [45] на випадок дуо-областей Безу.

Теорема 2.1. *Нехай R дуо-область Безу. Тоді наступні умови є еквівалентні:*

1) R дуо-область елементарних дільників;

2) для довільних елементів $x, y, z \in R$ таких, що $xR + yR = R$ існує елементt $\lambda \in R$ такий, що $x + \lambda y = vu$, де $uR + zR = R$, $vR + (1 - z)R = R$.

Наступне твердження встановлює зв'язок описаних кілець із попередньої теореми з чистими кільцями

Теорема 2.2. *Нехай R дуо-область Безу, і $c \in R \setminus \{0\}$. Тоді $\overline{R} = R/cR$ є чистим кільцем тоді і лише тоді, коли для кожного елемента*

$a \in R$ існують елементи v, u такі, що $c = vu$ де $uR + aR = R$ $vR + (1 - a)R = R$, $uR + vR = R$.

Другий підрозділ присвячений вивченню некомутативних кілець Безу з умовами на двобічні ідеали, породжені одним елементом, а саме умовами Дубровіна, L та Z. Показано зв'язок цих понять із квазі-дуо кільцями та кільцями елементарних дільників. Показано, що область Безу стабільного рангу один з умовою Дубровіна і умовою Z є кільцем елементарних дільників.

Означення 2.2. *Будемо казати, що R є* областю з умовою *L, якщо із того, що $RaR = R$ випливає рівність $aR = R$.*

Означення 2.3. *Скажемо, що R є* кільцем з умовою Дубровіна*, якщо для довільного ненульового елемента $a \in R$ існує елемент $\alpha \in R$ такий, що $RaR = \alpha R = R\alpha$.*

Теорема 2.6. *Нехай R є кільцем елементарних дільників з умовою L. Тоді R є квазі-дуо кільцем з умовою Дубровіна.*

Відомо, що майже атомна область Безу стабільного рангу 1 з умовою Дубровіна є кільцем елементарних дільників. У цьому підрозділі обмеження на майже атомні області Безу заміняється умовою Z, а саме — скажемо, що над кільцем R виконується умова Z, якщо з умови $RaR = R$, де $a \in R$ випливає, що a — скінченний елемент.

Одним з основних результатів є наступна теорема.

Теорема 2.7. *Нехай R є областю Безу стабільного рангу 1, в якій виконуються умова Z і умова Дубровіна. Тоді R є кільцем елементарних дільників.*

У третьому підрозділі наведено ряд різноманітних прикладів некомутативних кілець Безу, до яких застосовні результати перших двох підрозділів.

У **третьому розділі**, на основі введеного поняття максимально негельфандового ідеалу доводиться, що PM*-дуо-область Безу та локально гельфандова область є областями елементарних дільників.

У першому підрозділі вводиться означення гельфандових та негельфандових елементів та ідеалів, встановлюються властивості множин таких елементів чи ідеалів, розглянуто гельфандовий аналог радикалу Джекобсона.

Означення 3.1. *Ненульовий елемент a дуо-області R називається* гельфандовим, *якщо довільний первинний правий ідеал у P такий, що $a \in P$, ідеал P міститься у єдиному максимальному правому ідеалі.*

Твердження 3.1. *Множина S всіх гельфандових елементів дуо-області Безу R є насиченою мультиплікативно замкненою множиною.* **Означення 3.2.** *Правий ідеал I дуо-області R називається гельфандовим, якщо I містить хоча б один гельфальдовий елемент. У протилежному випадку, правий ідеал I називається негельфандовим, тобто, довільний ненульовий елемент правого ідеалу I є негельфандовим.*

Означення 3.3. *Правий негельфандовий ідеал N кільця R називається максимально негельфандовим, якщо для довільного правого ідеалу I, такого, що $N \subset I$, $I \neq N$, існує гельфандовий елемент a такий, що $a \in I$.*

Встановлено існування максимально негельфандових правих ідеалів дуо-області Безу і їх найпростіші властивості. Узагальнено результат Ларсена, Левіса та Шореса про те, що кожен ненульовий простий ідеал комутативного адекватного кільця міститься у єдиному максимальному ідеалі, на випадок гельфандових елементів дуо-областей Безу.

Теорема 3.1. *Нехай R — дуо-область Безу, в якій довільний ненульовий первинний правий ідеал містить гельфандовий елемент. Тоді R є областю, у якій довільний ненульовий первинний правий ідеал міститься у єдиному максимальному.*

У другому підрозділі вивчається канонічна діагональна редукція матриць над дуо-областями Безу гельфандового рангу один. Вводиться означення локально-гельфандової дуо-області Безу, та показано, що така область володіє властивостями, які є аналогічні до класичних локальних кілець. Доведено, що будь-яка локально-гельфандова дуо-область Безу є кільцем елементарних дільників.

Означення 3.5. *Нехай R — дуо-область Безу. Назвемо кільце R, кільцем гельфандового рангу один, якщо для довільних елементів $a, b \in R$, що $aR + bR = R$, існує такий елемент $r \in R$, що $a + br$ — гельфандовий елемент.*

Одним з головних результатів даного розділу є наступна теорема.

Теорема 3.3. *Дуо-область Безу R гельфандового рангу один є кільцем елементарних дільників.*

Як наслідок отримаємо наступний результат (відповідь на відкрите питання Забавського [60] і Ларсена, Левіса і Шореса [37] для випадку дуо-кілець).

Наслідок 3.1. *PM^* дуо-область Безу є кільцем елементарних дільників.*

У дисертації вводиться поняття локально-гельфандової дуо-області Безу.

Означення 3.6. *Дуо-область Безу називається локально гельфандовою, якщо вона містить єдиний максимально негельфандовий правий ідеал.*

Установлено існування і найпростіші властивості локально гельфандової дуо-області та доведено один з основних результатів для локально гельфандової дуо-області Бузу.

Теорема 3.7. *Локально гельфандова дуо-область Безу R є кільцем елеметарних дільників.*

Четвертий розділ присвячений питанням приведення до канонічного діагонального вигляду матриць другого порядку оборотними матрицями Тепліца над кільцями елементарних дільників квадратного стабільного рангу один.

У першому підрозділі вводиться поняття кільця Тепліца, та досліджується діагональна редукція матриць над кільцями квадратного стабільного рангу один.

Означення 4.1. *Кільце R є кільцем квадратного стабільного рангу один, якщо для довільних $a, b \in R$ з того, що $aR+bR = R$ випливає, що $a^2 + bx$ є оборотним елементом кільця R для деякого елемента x.*

Аналогічно до означення кільця Ерміта визначино поняття кільця Тепліца.

Означення 4.3. *Комутативне кільце R назвемо* кільцем Тепліца, *якщо для будь-яких $a, b \in R$ існує оборотна матриця Тепліца T така, що*

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} d & 0 \end{pmatrix}.$$

Доведемо необхідну та достатню умову того, що кільце Ерміта є кільцем Тепліца.

Теорема 4.1. *Нехай R є комутативним кільцем Ерміта. Тоді R — кільце Тепліца тоді і лише тоді, коли це кільце квадратного стабільного рангу один.*

Одним з основних результатів даного розділу є наступна теорема.

Теорема 4.2. *Нехай R — комутативне кільце елементарних дільників квадратного стабільного рангу один. Тоді довільна матриця другого порядку оборотними матрицями Тепліца приводиться до канонічного діагонального вигляду.*

Більше того, має місце наступний результат.

Теорема 4.3. *Нехай R — комутативне кільце елементарних дільників квадратного стабільного рангу один. Тоді будь-яка оборотна матриця другого порядку є добутком оборотних матриць Тепліца.*

У другому підрозділі четвертого розділу вводиться поняття кільця одиничного квадратного стабільного рангу один та розглядається діагональна редукція матриць над такими кільцями.

Означення 4.4. *Кільце R називається кільцем одиничного квадратного стабільного рангу один, якщо з умови $aR + bR = R$ випливає, що існує оборотний елемент t такий, що $a^2 + bt$ — оборотний елемент кільця R.*

Теорема 4.4. *Нехай R — комутативне кільце Ерміта одиничного квадратного стабільного рангу один. Тоді R є кільцем елементарних дільників та будь-яка матриця другого порядку над R діагоналізується оборотними матрицями Тепліца.*

У **п'ятому розділі** дисертації встановлено умови за яких скінченний гомоморфний образ комутативної області Безу є напівпотужним кільцем.

Означення 5.2. *Нехай R комутативна область Безу. Скажемо, що елемент $a \in R \setminus \{0\}$ є* напівпотужним*, якщо для будь-якого $b \in R$ знайдуться елементи $r, s \in R$:*

$$a = rs, \quad rR + bR = R, \quad rR + sR = R.$$

Теорема 5.1. *Нехай R комутативна область Безу. Тоді a є напівпотужним елементом тоді і тільки тоді, коли R/aR є напівпотужним кільцем.*

Наступний результат встановлює зв'язок адекватних елементів із поняттям напівпотуджного кільця.

Теорема 5.3. Нехай R комутативна область Безу і $a \in R \setminus \{0\}$. Фактор-кільце R/aR є напівпотужним тоді і тільки тоді, коли для будь-якого елемента $b \notin J(aR)$ існує деякий елемент $u \in R$ такий, що ${}_aA_{bu}$ і $bu \notin aR$.

РОЗДІЛ 1

Попередні відомості, допоміжні факти та основні результати

1.1. Попередні відомості та допоміжні факти

У цьому розділі розглядаються різноманітні класи кілець, а також подаються необхідні означення, відомі теореми, твердження та факти, що стосуються теми дисертаці.

Під кільцем розумітимемо асоціативне кільце з одиницею, в якому $1 \neq 0$.

Означення 1.1. *[32] Дві матриці A і B над кільцем R називаються* еквівалентними, *якщо існують такі оборотні матриці P і Q відповідних розмірів над кільцем R для яких справедлива рівність:*

$$B = PAQ.$$

Позначення $A \sim B$ означає, що матриця A еквівалентна матриці B [32].

Класичне означення кільця елементаних дільників було введено Капланським [32].

Означення 1.2. *Кільце R називається* кільцем елементарних дільників*, якщо довільна матриця A розміру $m \times n$ еквівалентна канонічній діагональній матриці, а саме, для матриці A існують оборотні матриці $P \in GL_m(R)$, $Q \in GL_n(R)$ такі, що матриця*

$$PAQ = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_r & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

де $Rd_{i+1}R \subseteq d_iR \cap Rd_i$, $i = 1, \dots, r-1$.

Кільця елементарних дільників є кільцями Ерміта.

Означення 1.3. *[32, 59] Якщо над кільцем R всі матриці розміру 1×2 діагоналізуються, то таке кільце називається* правим кільцем Ерміта*.*

Лівим кільцем Ерміта *називається таке кільце R над яким всі матриці розміру 2×1 діагоналізуються.*

Кільце, яке є одночасно і правим, і лівим кільцем Ерміта називається кільцем Ерміта*.*

Зауважимо, що в класі комутативних кілець поняття лівого кільця Ерміта, правого кільця Ерміта і кільця Ерміта співпадають [59].

З кільцями Ерміта тісно пов'язані багато класів кілець. Наведемо їх нижче.

Означення 1.4. *[23]* Правим кільцем Безу *називається кільце, в якому довільний скінченнопороджений правий ідеал є головним. Аналогічно визначаються і* ліві кільця Безу, *а саме: кільце, в якому довільний скінченнопороджений лівий ідеал є головним.* Кільце Безу *— це кільце, яке є одночасно правим і лівим кільцем Безу.*

За допомогою теорії тривіальних розширень будуться нові приклади комутативних кілець Безу з наперед заданими властивостями, які пов'язані з класами кілець, що досліджуються в даній роботі [31].

Типовим прикладом правого (лівого) кільця Безу служить кільце правих (лівих) головних ідеалів.

Означення 1.5. *[7] Кільце R називається* кільцем головних лівих (правих) ідеалів, *якщо в ньому довільний лівий (правий) ідеал є головним.*

Наступні теореми визначають умови при яких кільце R є кільцем елементарних дільників.

Теорема 1.1. *[32] Якщо довільні матриці над комутативним кільцем R розміру 1×2, 2×1 та 2×2 володіють канонічною діагональною редукцією, то кільце R є кільцем елементарних дільників.*

Теорема 1.2. *[37] Комутативне кільце R є кільцем елементарних дільників тоді і лише тоді, коли довільна квадратна матриця розміру 2×2, елементи якої належать кільцю R, володіє канонічною діагональною редукцією.*

Теорема 1.3. *[32] Комутативне кільце R є кільцем елементарних дільників тоді і лише тоді, коли воно є кільцев Ерміта і для* *довільних елементів* $a, b, c \in R$, *які задовольняють умову*

$$aR + bR + cR = R,$$

існують такі елементи $p, q \in R$, *для яких виконується*

$$(pa + qb)R + qcR = R.$$

Розглянемо факти, які стосуються некомутативних кілець елементарних дільників.

Означення 1.6. *Кільце* R *називається* правим (лівим) квазі-дуо кільцем, *якщо довільний максимальний правий (лівий) ідеал кільцяє двобічним.*

Означення 1.7. *Кільце* R *назвемо* правим (лівим) дистрибутивним, *якщо гратка правих (лівих) ідеалів кільця* R *є дистрибутивною.* Дистрибутивне кільце — *це кільце, яке є правим і лівим дистрибутивним кільцем одночасно.*

Означення 1.8. *Кільце* R *називається* дуо-кільцем, *якщо довільний однобічний ідеал є двобічним.*

У випадку дистрибутивних правих (лівих) кілець Безу, зв'язок з правими (лівими) квазі-дуо кільцями встановлений у наступній теоремі.

Теорема 1.4. *[48] Наступні властивості еквівалентні для кільця Безу* R.

1) R *є правим дистрибутивним кільцем.*

2) R *є правим квазі-дуо кільцем.*

3) З умови $aR+bR=R$ слідує, що $Ra+Rb=R$ для деяких елементів $a,b\in R$

Теорема 1.5. *[56] Будь-яка дистрибутивна область елементарних дільників є дуо-областю.*

Означення 1.9. *Елемент кільця називається* атомом, *якщо він є необоротним, ненульовим і не може бути зображеним у вигляді добутку двох необоротних елементів.*

Означення 1.10. *[62] Ненульовий елемент a області R назвемо* лівим скінченним, *якщо довільний тривіальний лівий дільник a є оборотним, або скінченним добутком атомів і правий скінченний елемент — це елемент, довільний правий множник якого є оборотним або є добутком скінченного числа атомів. Елемент a області R назвемо* скінченним, *якщо він є лівим і правим скінченним.* Довжиною *$l(a)$ скінченного елемента a області R назвемо число атомних дільників.*

Зауважимо, що в області Безу, елемент є скінченним тоді і лише тоді, коли він має скінченну довжину [62].

Фактично, область Безу є областю головних ідеалів тоді і лише тоді, коли довільний ненульовий, незворотній елемент є скінченним [62].

У класі кілець елементарних дільників важливе місце займають адекватні кільця, оскільки вони є досить широким класом кілець і містять в собі комутативні області головних ідеалів. Це поняття було введено Хелмером [29]. Воно є часто використовуваним в сучасних алгебраїчних дослідженнях повязаних із діагоналізацією матриць над комутативними кільцями.

Означення 1.11. *[29, 59] Елемент a комутативного кільця Безу R називається* адекватним до елемента $b \in R$, *якщо елемент a можна зобразити у вигляді добутку двох елементів*

$$a = r \cdot s,$$

де

$$rR + bR = R$$

та

$$s'R + bR \neq R,$$

для довільного необоротного дільника s' елемента s. Даний факт будемо позначати ${}_aA_b$.

Означення 1.12. *[29, 59] Елемент a комутативного кільця Безу R називається* адекватним, *якщо він є адекватним до довільного елемента $b \in R$.*

Прикладами адекватних елементів можуть послужити факторіальні та оборотні елементи кільця [59].

Означення 1.13. *[29, 59]* Адекватним кільцем *називається комутативне кільце Безу, в якому довільний ненульовий елемент є адекватним.*

Справедливим є наступний результат, який встановлює зв'язок адекватних кілець з кільцями елементарних дільників.

Теорема 1.6. *[2] Комутативне адекватне кільце є кільцем елементарних дільників.*

Важливими прикладами кілець Безу є регулярні (в сенсі фон Неймана) кільця.

Означення 1.14. *[27] Кільце R називається* регулярним кільцем *(в сенсі фон Неймана), якщо для довільного елемента $a \in R$ існує елемент $x \in R$, для якого виконується умова*

$$axa = a.$$

Для регулярних (в сенсі фон Неймана) кілець справедливим є таке твердження.

Теорема 1.7. *[27] Для кільця R наступні властивості є еквівалентними:*

1. *кільце R — регулярне (в сенсі фон Неймана) кільце;*

2. *довільний головний правий (лівий) ідеал кільця R є породжений ідемпотентом;*

3. *довільний скінченнопороджений правий (лівий) ідеал кільця R є породжений ідемпотентним елементом.*

В класі регулярних (в сенсі фон Неймана) кілець відзначимо підклас одинично-регулярних кілець.

Означення 1.15. *[27] Кільце R називається* одинично-регулярним *кільцем, якщо для довільного елемента $a \in R$ існує оборотний елемент $u \in U(R)$ такий, що*

$$aua = a.$$

Теорема 1.8. *[22] Комутативне регулярне (в сенсі фон Неймана) кільце є одинично-регулярним кільцем.*

Більше того, справедливим є такий результат:

Твердження 1.1. *[28, 30] Нехай R — одинично-регулярне кільце. Тоді, для довільного елемента $a \in R$ існують ідемпотентні елементи $e_1 = e_1^2$, $e_2 = e_2^2$, які належать кільцю R і оборотні елементи u_1, $u_2 \in U(R)$ такі, що*

$$a = e_1 u_1 = u_2 e_2.$$

Означення 1.16. *Якщо для довільного елемента $a \in R$ знайдеться $x \in R$ з властивістю $a^2 x = a$, то таке кільце будемо називати* строго регулярним.

Зауваження 1.1. *Строго регулярні кільця є одинично-регулярними, а одинично-регулярні є, очевидно, регулярними. У випадку кілець, ідемпотенти яких є центральні (наприклад комутативні кільця), ці класи кілець збігаються.*

Приклад 1.1. Кільце Z/nZ є регулярним тоді і лише тоді, коли n є вільним від квадратів (не ділиться на квадрат жодного числа).

Приклад 1.2. Нехай k є полем. Тоді довільне кільце матриць $M_n(k)$ є одинично-регулярним кільцем.

Наведемо ряд прикладів строго регулярних кілець серед групових кілець.

Означення 1.17. *Група G називається скінченно-породженою, якщо існує скінченна множина $S \subset G$, що кожен елемент з G може бути записаний у вигляді скінченного добутку елементів з S та обернених елементів з S.*

Означення 1.18. *Група G називається локально скінченною, якщо всі всі її скінченно-породжені підгрупи є скінченні.*

Означення 1.19. *Група G називається періодичною, якщо кожен її елемент має скінченний порядок.*

Означення 1.20. *Група G називається розв'язною, якщо існують підгрупи $G_1, G_2, \ldots, G_k$ такі, що*

$$\{e\} = G_1 \lhd G_2 \lhd \ldots \lhd G_{k-1} \lhd G_k$$

та для будь-якого $j \in \{1, \ldots, n\}$ G_j/G_{j-1} є абелевою групою.

Приклад 1.3.

1. Довільна скінченна група є локально скінченною.
2. Нескінченна пряма сума скінченних груп є локально скінченною.
3. Група Прюфера $Z_{p^\propto} = \cup_{n\in\mathbb{N}} Z/p^n Z$ є локально скінченною.
4. Кожна періодична розв'язна група є локально скінченною.
5. Довільна періодична підгрупа групи $GL_n(C)$ є локально скінченною.

Теорема 1.9. *[10] Нехай R є строго регулярним кільцем, а G — локально скінченною групою, причому порядки її елементів є оборотними в R. Тоді наступні умови еквівалентні:*

1. *RG є правим дистрибутивним кільцем;*
2. *RG є правим квазі-дуо-кільцем, яке є правим кільцем Безу;*
3. *RG є строго регулярним кільцем.*

Ще одним класом адекватних кілець є комутативні регулярні кільця.

Теорема 1.10. *[26] Комутативне регулярне (в сенсі фон Неймана) кільце є адекватним кільцем.*

Зауважимо, що у випадку регулярного (в сенсі фон Неймана) кільця умова з означення адекватного кільця, виконується для нульового елемента. Крім цього, вона виконується і для кільця нормування [37].

Означення 1.21. *[33] Комутативне кільце R називається кільцем нормування, якщо для довільних елементів $a, b \in R$ виконується $a \mid b$ або $b \mid a$.*

Означення 1.22. *[59] Комутативне кільце Безу R називається* всюди адекватним*, якщо всі елементи кільця R (зокрема і 0) є адекватним.*

Теорема 1.11. *[59] Комутативне регулярне (в сенсі фон Неймана) кільце є всюди адекватним кільцем.*

Теорема 1.12. *[59] Кільце нормування є всюди адекватним кільцем.*

Важливу роль у дослідженнях кілець, які розглядаються в дисертаційній роботі, відіграє такий важливий інваріант К-теорії, як стабільний ранг кільця.

Означення 1.23. *[59] Рядок*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

елементів кільця R називається правим унімодулярним*, якщо*

$$a_1R + a_2R + \ldots + a_nR = R.$$

Означення 1.24. *[51] Стабільним рангом кільця R називається найменше натуральне число n таке, що для довільного правого унімодулярного рядка*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1})$$

довжини $n+1$ існують такі елементи $b_1, b_2, \ldots, b_n \in R$ такі, що рядок

$$(a_1 + a_{n+1}b_1, a_2 + a_{n+1}b_2, \ldots, a_n + a_{n+1}b_n)$$

є правим унімодулярним.

Той факт, що стабільний ранг кільця R дорівнює n позначатимемо так:

$$sr(R) = n.$$

Згідно з результатами Васерштейна [50] та Уорфілда [54] ці поняття є ліво-право симетричними.

Означення Васерштейна [50], тобто, $sr(R) = n$, передбачає, що дана властивість виконується для довільного натурального числа більшого ніж n, тобто n є найменшим натуральним з даною властивістю. Більше того, існують такі класи кілець (на приклад, чисто нескінченні кільця [27, 59]), що поняття скінченного стабільного рангу не визначено, тобто є нескінченним. Такі кільця отримали назву кілець *нескінченного стабільного рангу.*

В процесі дослідження кілець скінченного стабільного рангу виявилось, що, як правило, основні дослідження проводяться для кілець стабільного рангу один або два.

Означення 1.25. *[51] Кільце R називається* кільцем стабільного рангу один *(цей факт позначатимемо $sr(R) = 1$), якщо для довільних* *елементів* $a, b \in R$, *які задовільняють умову*

$$aR + bR = R,$$

існує елемент $t \in R$ *такий, що*

$$a + bt \in U(R).$$

Класи кілець стабільного рангу один є доволі широкими і найбільш досліджуваними.

Кільце Кронекерівських функцій на цілозамкненій області є не лише кільцем Безу, але і кільцем стабільного рангу один [59]. Васерштейн, вивчаючи клас кілець дійснозначних функцій $\mathcal{C}(X)$, які визначені на топологічному просторі X, описав умови, за яких дане кільце є кільцем стабільного рангу один та два. Зокрема, він показав, що $sr(\mathcal{C}(X)) = 1$ тоді і тільки тоді, коли $\dim(X) = 0$ [50, 51].

Напівлокальне кільце є кільцем стабільного рангу один [52]. В цей же час, існують кільця головних ідеалів стабільного рангу один, які не є напівлокальними [51]. А також, існують кільця Дедекінда стабільного рангу один, які не є кільцями головних ідеалів [59]. Кільця формальних степеневих рядів над полем P від багатьох змінних є кільцем стабільного рангу один, хоча, кільце многочленів не є таким [50].

Означення 1.26. *Кільце* R *називається редукованим, якщо єдиним нільпотентом* R *є нульовий елемент.*

Теорема 1.13. *[49] Нехай існує такий примітивний многочлен* $f(x)$ *з цілими коефіцієнтами, що* $f(r) = 0$ *для довільного елемента* r *кільця* R*. Тоді стабільний ранг кільця* R *дорівнює один.*

Для регулярних (в сенсі фон Неймана) кілець має місце такий результат Капланського:

Теорема 1.14. *[30] Регулярне (в сенсі фон Неймана) кільце є одинично-регулярним кільцем тоді і лише тоді, коли його стабільний ранг дорівнює один.*

Зауважимо, що комутативне регулярне (в сенсі фон Неймана) кільце є одинично-регулярним [26]. А згідно з попередньою теоремою, це кільце є кільцем стабільний ранг якого дорівнює один.

Відзначимо користь в дослідженнях наступних результатів.

Теорема 1.15. *[51] Стабільний ранг кільця R дорівнює один тоді і лише тоді, коли стабільний ранг фактор-кільця $R/J(R)$ кільця R по радикалу Джекобсона $J(R)$ дорівнює один.*

Серед властивостей кілець стабільного рангу один виділимо наступні властивості:

Теорема 1.16. *[51] Довільне фактор-кільце кільця стабільного рангу один є кільцем стабільного рангу один.*

Теорема 1.17. *[51] Якщо стабільний ранг кільця R дорівнює один і елемент $e = e^2$ — довільний ідемпотент кільця R, то кільце eRe також є кільцем стабільного рангу один.*

Теорема 1.18. *[62] Нехай R — ліве (праве) кільце Безу стабільного рангу один. Тоді для довільних елементів $a, b \in R$ існують такі $x \in R$ ($y \in R$) і $d \in R$ ($\delta \in R$), що $a+xb = d$ ($a+by = \delta$) і $Ra+Rb = Rd$ ($aR + bR = \delta R$).*

У випадку комутативних областей головних ідеалів стабільного рангу один маємо:

Теорема 1.19. *[25] Нехай R — комутативна область головних ідеалів стабільного рангу один, тоді R є евклідовим кільцем.*

Проте не всяке евклідове кільце (зокрема, $\mathbb{Z}$) є кільцем стабільного рангу один. Зауважимо, що довільний скінченний гомоморфний образ кільця цілих чисел є скінченним кільцем, тобто є кільцем стабільного рангу один.

Згідно з результатами МакГоверна, класи кілець, нетривіальні гомоморфні образи яких є кільцями стабільного рангу один отримали назву кілець майже стабільного рангу один.

Означення 1.27. *[60] Елемант a комутативного кільця R називаєтьcя* елементом майже стабільного рангу один*, якщо*

$$sr(R/aR) = 1.$$

Очевидно, що довільна одиниця кільця R є елементом майже стабільного рангу один. Зауважимо, що $sr(R) = 1$ то, тоді, для довільного ідеалу I $sr(R/I) = 1$, тобто, кільце стабільного рангу один є кільцем майже стабільного рангу один [51, 54]. Як відзначалось, кільце цілих чисел є прикладом кільця майже стабільного рангу один, яке не є кільцем стабільного рангу один.

Більше того, справедливим є наступний результат:

Теорема 1.20. *[25] Довільна адекватна область Безу є кільцем майже стабільного рангу один.*

Означення 1.28. *[50, 59] Кільце R називається* кільцем стабільного рангу два *(позначатимемо цей факт так: $sr(R) = 2$), якщо для довільних елементів $a, b, c \in R$ таких, що*

$$aR + bR + cR = R,$$

виконується співвідношення

$$(a + cx)R + (b + cy)R = R$$

для деяких елементів $x, y \in R$.

Очевидним прикладом кільця стабільного рангу два може послужити довільне комутативне кільце головних ідеалів. Більше того, матимемо:

Теорема 1.21. *[2] Стабільний ранг адекватного кільця не перевищує двох. Якщо радикал Джекобсона адекватного кільця є ненульовим, то це кільце стабільного рангу один.*

Що стосується властивостей кілець стабільного рангу один та два, то їх приклади можна знайти в роботах [21, 28, 40].

Квадратний стабільний ранг має багато властивостей характерних для стабільного рангу один та властивостей фактор-кілець і кілець степеневих рядів над такими кільцями.

Означення 1.29. *[34] Кільце R є* кільцем (правого) квадратного стабільного рангу один*, якщо для довільних $a, b \in R$ з того, що $aR + bR = R$ випливає, що $a^2 + bx$ є оборотним елементом кільця R для деякого елемента x.*

Твердження 1.2. *[34] Якщо R — кільце стабільного рангу один, тоді R є кільцем квадратного стабільного рангу один.*

У той же час не всяке кільце квадратного стабільного рангу один є кільцем стабільного рангу один.

Прикладами кілець квадратного стабільного рангу один слугують кільця дійснозначних функцій на топологічному просторі, а також дійсне кільце гомоморфності в формально дійсному полі [34]. Багато нових прикладів отримано в роботі [34] пов'язаних з властивістю Артіна-Шраєра, тобто з кільцями R де з умови

$$\sum_i a_i R = R$$

випливає, що $\sum_i a_i^2$ — оборотний елемент.

Кільця (правого) квадратного стабільного рангу один є правими квазі-дуо кільцями, тобто ми маємо наступний результат.

Теорема 1.22. *[34] Нехай R кільце правого квадратного стабільного рангу один. Тоді R — праве квазі-дуо кільце.*

На підставі відомого результату щодо правих квазі-дуо кілець елементарних дільників отримаємо такий результат.

Теорема 1.23. *[34] Кільце елементарних дільників квадратного стабільного рангу один є дуо-кільцем.*

Даний результат, дає підставу розглядати лише комутативні кільця квадратного стабільного рангу один.

Особливе місце в класі кілець стабільного рангу один відіграють наступні класи кілець, які були введені Ніколсоном.

Означення 1.30. *[42] Кільце R називають* чистим*, якщо довільний елемент $x \in R$ можна представити у вигляді суми ідемпотента* *та оборотного елемента, тобто*

$$x = u + e,$$

де $e = e^2$ *і* $u \in U(R)$.

Найбільш відомим тривіальним класом чистих кілець є локальне кільце.

Означення 1.31. *Кільце R називається локальним, якщо вона має єдиний максимальний правий (лівий) ідеал.*

Нагадаємо, що елемент x кільця R називається *квазі-регулярним*, якщо існує елемент $y \in R$ такий, що $x + y = yx = xy$. Зауважимо, що елемент x є квазі-резулярним, тоді і тільки тоді, коли $(1 - x)$ є оборотним елементом і елементи радикалу Джекобсона є квазі-регулярними. На підставі цього отримується таке твердження.

Твердження 1.3. *Довільне тіло, булеве кільце та локальне кільце є чистим.*

Справді, якщо R — локальне кільце та M — єдиний максимальний ідеал кільця R, причому $x \in R$, то можливі два випадки:

1. якщо $x \in M$, то $1 - x \notin M$ і, оскільки, M — єдиний максимальний ідеал, тоді $1 - x$ — оборотний елемент кільця R. Отже,

$$x = 1 - (1 - x);$$

2. якщо $x \notin M$, то x — оборотний елемент, звідси, $x = 0 + x$, де $0 = 0^2$ — ідемпотент, а $x \in U(R)$.

У випадку напівлокальних кілець маємо наступний результат.

Теорема 1.24. *[39] Напівлокальне кільце є чистим тоді і тільки тоді, коли воно є напівдосконалим.*

Означення 1.32. *Кільце R називається* напівдосконалим*, над яким кожен скінченнопороджений модуль має проективне покриття.*

Зауважимо, що згідно з [39] кільце $\mathbb{Z}_{(2)}$ раціональних чисел з непарними знаменниками є напівдосконалим кільцем, яке не є досконалим і нескінченний прямий добуток

$$\mathbb{Z}_{(2)} \times \mathbb{Z}_{(2)} \times \ldots$$

є чистим кільцем, яке не є напівдосконалим. Зауважимо, що кільце $\mathbb{Z}_4$ не є полем, а прямий добуток $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ є напівдосконалим, але не є локальним кільцем.

Довільне нуль-вимірне кільце є напіврегулярним кільцем, яке, в свою чергу, є чистим кільцем. Звідси $\mathbb{Z}_4$ є нуль-вимірним кільцем, яке не є регулярним (в сенсі фон Неймана), але є чистим кільцем.

Відзначимо, що нетерове кільце не є чистим, тут наприклад, кільце цілих чисел є нетеровим, але не є чистим, а кільце $\mathbb{Z}_{(6)}$ всіх раціональних чисел, знаменник яких взаємно простий з 6 є напівлокальним і нетеровим, але не є чистим.

Групові кільця RC_2 і RS_3, де C_2 — циклічна група порядку 2, S_3 — група підстановок, є чистими, якщо R є комутативним чистим кільцем.

В класі кілець стабільного рангу один важливу роль відіграє наступний клас кілець.

Означення 1.33. *[18, 38, 39] Кільце R називають* кільцем ідемпотентного стабільного рангу один*, якщо для довільних елементів $a, b \in$*

R для яких виконується умова

$$aR + bR = R$$

існує ідемпотент $e \in R$ такий, що

$$(a + be)R = R,$$

тобто, елемент $a + be$ є оборотним елементом кільця R.

Означення 1.34. *[42] Кільце R називається* кільцем з властивістю заміни*, якщо для довільного елемента $a \in R$ існує ідемпотент $e \in aR$ такий, що*

$$(1 - e) \in (1 - a)R.$$

Наступний клас кілець стабільного рангу один є прикладом кілець з властивістю заміни.

Означення 1.35. *Кільце R називається π-регулярним, якщо для довільного елемента $a \in R$ існують $n \in N$ та $x \in R$ такі, що $a^{n+1}x = a^n$.*

Наступний результат характеризує випадок, коли скінченний гомоморфний образ комутативної області Безу є кільцем з властивістю заміни.

Означення 1.36. *[35] Елемент a комутативної області Безу R називається* роздільним елементом*, якщо фактор-кільце R/aR є кільцем з властивістю заміни.*

Теорема 1.25. *[35] Для комутативної області Безу R та для елемента $a \in R \setminus \{0\}$ фактор-кільце R/aR є кільцем з властивістю* *заміни тоді і тільки тоді, коли для будь-яких* $b, c \in R$ *таких, що* $aR + bR + cR = R$ *існують елементи* $r, s \in R$ *такі, що*

$$a = r \cdot s,$$

де $rR + bR = R$, $sR + bR = R$ *і* $rR + sR = R$.

Зауважимо, що клас комутативних кілець з властивістю заміни співпадає з класом кілець ідемпотентного стабільного рангу один [18, 38]. Також зазначимо, що у випадку комутативного кільця, чисте кільце є кільцем з властивістю заміни, а в некомутативному кільці клас чистих кілець міститься в класі кілець з властивістю заміни [18]. Наведемо приклади чистих кілець і наведемо їхні найпростіші властивості.

Теорема 1.26. *[18, 38] Наступні властивості комутативного кільця* R *є еквівалентні:*

1. R *— кільце ідемпотентного стабільного рангу 1;*
2. R *— чисте кільце;*
3. R *— кільце з властивістю заміни.*

Означення 1.37. *Кільце* R *називається нерозкладним, якщо його єдиними ідемпотентами є* 0 *та* 1.

Теорема 1.27. *Наступні властивості є еквівалентними для довільного кільця* R*:*

1. R *є локальним кільцем;*
2. R *нерозкладне чисте кільце;*
3. R *нерозкладне кільце з властивістю заміни.*

Як наслідок, отримуємо таке твердження.

Твердження 1.4. *Область цілісності є чистою тоді і тільки тоді, коли вона є локальною.*

Важливими узагальненням кілець з властивістю заміни є потужні та напівпотужні кільця.

Означення 1.38. *Модуль M називається напівпотужним, якщо кожен його підмодуль $N \subsetneq J(M)$ містить ненульовий прямий доданок модуля M.*

Теорема 1.28. *Модуль M є напівпотужним тоді і лише тоді, коли кожен циклічний підмодуль в M містить ненульовий доданок модуля M.*

Означення 1.39. *Кільце R називається напівпотужним, якщо ${}_RR$ або R_R є напівпотужними модулями, тобто кожен лівий чи правий ідеал I, що не міститься в $J(R)$, містить ненульовий ідемпотент.*

Теорема 1.29. *Для кільця R наступні властивості еквівалентні:*

1. *R є напівпотужним кільцем.*
2. *R_R є напівпотужним модулем.*
3. *${}_RR$ є напівпотужним модулем.*

Теорема 1.30. *Нехай R є напівпотужним кільцем. Тоді:*

1. *кільце матриць $M_n(R)$ є напівпотужним.*
2. *${}_eR_e$ є напівпотужним кільцем, для кожного ненульового ідемпотента $e \in R$.*

Означення 1.40. *Напівпотужне кільце R називається потужним, якщо ідемпотенти кільця $R/J(R)$ піднімаються за модулем ідеалу $J(R)$, тобто для довільного $\overline{e^2} = \overline{e} \in R/J(R)$ існує $x^2 = x \in R$, що $e - x \in J(R)$.*

Теорема 1.31. *Кільце R є потужним, якщо $R/J(R)$ є напівпотужним кільцем та ідемпотенти в $R/J(R)$ піднімаються за модулем $J(R)$.*

Теорема 1.32. *Нехай R є кільцем. Тоді такі властивості є еквівалентні:*

1. *$R/J(R)$ є потужним кільцем.*
2. *$R/J(R)$ є напівпотужним кільцем.*
3. *кожен ненульвий правий (лівий) ідеал кільця $R/J(R)$ містить ненульовий ідемпотент.*

Теорема 1.33. *Для кільця R такі властивості є еквівалентні:*

1. *R є потужним нерозкладним кільцем.*
2. *R є напівпотужним нерозкладним кільцем.*
3. *R є локальним кільцем.*

Теорема 1.34. *Нехай B підкільце з одиницею кільця з одиницею A, нехай $D = \sqcap_{i=1}^{\propto} A_i$, де $A_i = A$, а R — це підкільце кільця D породжене ідеалом $\oplus_{i=1}^{\propto} A_i$ та підкільцем $B' = \{(b, b, \ldots, b, \ldots) \mid b \in R\}$. Тоді*

1. *$R = \{(a_1, \ldots, a_n, b, b, \ldots) \mid a_i \in A, b \in R, n \in N\}$.*
2. *Кільце A ізоморфне фактор-кільцю R, та $B \cong B' \cong R/(\oplus_{i=1}^{\propto} A_i)$.*

3. $J(R) = 0$ тоді і лише тоді, коли $J(A) = 0$.

4. R є регулярним тоді і лише тоді, коли A і B — регулярні.

5. R є напівпотужне тоді і лише тоді, коли A є напівпотужним.

Приклад 1.4. Якщо $A = Q$, $B = Z$, то R є комутативне редуковане напівпотужне кільце Безу, $J(R) = 0$, яке не є регулярним.

Більше того, згідно з [39], нетерове кільце є чистим (відповідно, кільцем з властивістю заміни, напівпотужним) кільцем тоді і тільки тоді, коли воно є напівдосконалим.

Означення 1.41. *[?, 24] Кільце R називається PM-кільцем, якщо кожен його простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі.*

Відмітимо, що чисті кільця є PM-кільцями [?, 42].

Клас PM-кілець тісно пов'язаний з наступним класом кілець.

Означення 1.42. *[39] Комутативне кільце R називається PM^*-кільцем, якщо кожен його ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі.*

Гельфандові кільця були введені Малвеєм у 1979 році, як кільця, для яких можливі узагальнення гельфандової дуальності. Вони були названі на честь Ізраеля Гельфанда. Найбільш відомим прикладом є $\mathcal{C}(X)$ — кільця неперервних дійсних функцій на топологічному просторі X [47].

Означення 1.43. *[39] Кільце R називається* гельфандовим*, якщо для довільної пари $a, b \in R$, для якої виконується умова*

$$a + b = 1,$$

існують елементи $r, s \in R$ *такі, що*

$$(1 + ar)(1 + bs) = 0.$$

Означення 1.44. *[42] Елемент* $a \in R$ *називається акуратним елементом в кільці* R*, якщо* R/aR *є чистим.*

Кільце R *називається акуратним, якщо довільний ненульовий елемент з* R *є акуратним.*

Наведемо приклади акуратних кілець і їх найпростіші властивості.

Оскільки гомоморфний образ чистого кільця є чистим кільцями, тоді очевидним прикладом акуратних елементів служать одиниці, ідемпотенти і квазірегулярні елементи [39]. Чисте кільце є акуратним. Більше того, у випадку розкладного кільця ми маємо наступний результат:

Твердження 1.5. *[39] Нехай* R *розкладним комутативним кільцем. Тоді* R *є акуратним тоді і лише тоді, коли воно є чистим.*

Означення 1.45. *[58] Кільце* R *називається кільцем акуратного рангу один, якщо для довільних елементів* $a, b \in R$ *для яких виконується умова*

$$aR + bR = R$$

існує $t \in R$*, такий що* $a + bt$ *є акуратним елементом в* R *[58].*

Зауважимо, що одиниці кільця R є акуратними елементами, отже, кожне кільце стабільного рангу один є кільцем акуратного рангу один.

Зв'язок акуратних кілець з чистими встановлюють наступні результати.

Теорема 1.35. *[39] Чисте кільце є акуратним.*

Теорема 1.36. *[39] Якщо R є акуратним кільцем, яке не є чистим, то тоді R є напівпримітивним кільцем.*

Звідси слідує, що дослідження акуратних кілець, які не є чистими, умова нерозкладності кільця є визначальною.

Оскільки область цілісності завжди є нерозкладною, тому є важливим дослідження акуратних областей цілісності. Стандартним прикладом акуратної області цілісності служить кільце цілих чисел. Більше того, справедливим є таке твердження.

Теорема 1.37. *[39] Якщо R є комутативною областю розмірності Крулля один, то тоді R є акуратним кільцем.*

Зокрема, довільна комутативна область головних ідеалів є акуратною.

Зауважимо, що якщо P — довільне поле, то кільце $P[x, y]$ не є акуратним, оскільки

$$P[x, y]/yP[x, y]$$

не є чистим, хоча кільце $P[x]$ є акуратним згідно з теоремою 1.37. Більше того, якщо $A[x]$ є акуратним, тоді A є полем [39].

Більше того, згідно з [1], маємо:

Твердження 1.6. *Комутативна адекватна область є акуратною.*

Якщо P — поле і $R = P[x, y]$, тоді R не є акуратною, оскільки

$$R/yR \cong R[x]$$

не є чистим кільцем. Більше того, якщо $P[x]$ є акуратним, тоді P — поле.

Згідно з Капланським [39], комутативне кільце R називається FGC-*кільцем*, якщо довільний скінченно-породжений R-модуль є ізоморфний прямій сумі циклічних підмодулів. Повне описання FGC-кілець дано в [39].

Твердження 1.7. *[39] FGC-область є акуратною.*

Нагадаємо, що комутативне кільце називається *h-локальним*, якщо воно має скінченний характер (тобто довільний ненульовий елемент міститься лише в скінченній множині максимальних ідеалів) і довільний власний гомоморфний образ є PM-кільцем.

Твердження 1.8. *[39] h-локальна область є акуратною.*

РОЗДІЛ 2

Дистрибутивні області елементарних дільників та акуратний ранг один

Даний розділ складається із трьох підрозділів. Він присвячений вивченню дуо-областей Безу та їх зв'язку із кільцями елементарних дільників.

У цьому першому підрозділі даного розділу вводиться поняття кільця акуратного рангу один для дуо-областей Безу. Використовуючи це поняття, ми охарактеризуємо елементи a дуо-області Безу R, що R/aR є чистим кільцем. Також буде знайдено необхідну і достатню умову того, що дуо-кільце Ерміта є кільцем елементарних дільників. Крім того, буде показано, що дистрибутивна область Безу є областю елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли вона є дуо-областю акуратного рангу один.

Другий підрозділ присвячений вивченню некомутативних кілець Безу з умовами на двобічні ідеали, породжені одним елементом. Зокрема, це умова L та умова Дубровіна, і введена в розгляд як узагальнення умови L умова Z. Показано зв'язок цих понять із квазі-дуо кільцями та кільцями елементарних дільників. Доведено, що кожен елемент області Безу з умовою Z та умовою Дубровіна є добутком дуо-елемента та скінченного елемента. Також показано, що область Безу стабільного рангу один з умовою Дубровіна і умовою Z є кільцем елементарних дільників.

У третьому підрозділі наведено ряд різноманітних прикладів некомутативних кілець Безу, до яких застосовні результати перших двох підрозділів.

У цьому розділі під кільцем R будемо завжди розуміти асоціативне кільце з $1 \neq 0$.

2.1. Дуо-області акуратного рангу один

Розпочнемо із означення поняття акуратного рангу один у випадку дуо-кілець, яке є узагальненням стабільного рангу один.

Означення 2.1. *Скажемо, що дуо-кільце R має* акуратний ранг один*, якщо для довільних елементів $a, b \in R$ таких, що $aR + bR = R$ існує елемент $t \in R$ такий, що $R/(a + bt)R$ є чистим кільцем.*

Оскільки у випадку кільця стабільного рангу один елемент t у попередньому означенні можу бути обраний таким чином, що $a + bt$ є оборотним елементом, то робимо висновок, що будь-яке дуо-кільце стабільного рангу один є кільцем акуратного рангу один.

Доведемо результат, який буде корисним у подальших дослідженнях.

Твердження 2.1. *Якщо R є правим кільцем Ерміта, то кожен унімодулярний рядок $(a_1, \ldots, a_n)$ з елементами з кільця R можна доповнити до оборотної матриці.*

Доведення. Оскільки R є правим кільцем Ерміта та $a_1R + \ldots +$

$a_nR = R$, тоді

$$(a_1, \ldots, a_n)P = (1, 0 \ldots 0)$$

для деякої оборотної матриці P порядку n над кільцем R.

Позначивши $P^{-1} = (p_{ij})$ ми отримаємо

$$(a_1, \ldots, a_n) = (1, 0 \ldots 0)P^{-1},$$

а тому

$$a_1 = p_{11}, \ldots, a_n = p_{1n}$$

Отже, $(a_1, \ldots, a_n)$ є першим рядком оборотної матриці P^{-1}. Твердження доведено. $\square$

Доведемо аналог теореми Капланського у випадку дуо-кілець.

Твердження 2.2. *Дуо-кільце Ерміта R є кільцем елементарних дільників, тоді і лише тоді, коли для буль-яких елементів $a, b, c \in R$ таких, що*

$$aR + bR + cR = R$$

існують елементи $p, q \in R$ такі, що

$$(pa)R + (pb + qc)R = R.$$

Доведення. Доведемо необхідність твердження. Нехай R є кільцем елементарних дільників, та припустимо, що

$$aR + bR + cR = R.$$

Тоді матриця

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

володіє канонічно діагональною редукцією, тобто існують оборотні матриці

$$P = \begin{pmatrix} p & q \\ * & * \end{pmatrix}, \quad Q \in GL_2(R)$$

такі, що

$$PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

Безпосереднім обчисленням переконуємось, що $paR + (pb + qc)R = R$.

Необхідність доведена.

Для того, щоб довести достатність, досить довести, що кожна матриця

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

де $aR+bR+cR = R$ володіє канонічно діагональною редукцією. Оскільки

$$(pa)R + (pb + qc)R = R$$

для деяких елементів $p, q \in R$, то $pR + qR = R$. Використовуючи те, що R є кільцем Ерміта, рядок (p, q), за Твердженням 2.1 доповнюється до оборотної матриці $P \in GL_2(R)$. Очевидно, що матриця PA володіє канонічно діагональною редукцією. Твердження доведене. □

Твердження 2.3. *Нехай R є дуо-областю Безу, та a, b, c є елементами кільця R. Якщо $aR + bR + cR = R$, то наступні умови є еквівалентні:*

1) *існують елементи $p, q \in R$ такі, що $paR + (pb + qc)R = R$;*

2) *існують елементи $\lambda, u, v \in R$ такі, що $b + \lambda c = vu$, де $uR + aR = R$, $vR + cR = R$.*

Доведення. Покажемо, що (1) $\Rightarrow$ (2). Припустивши, що виконується умова (1), отримаємо, що $pR + qcR = R$, а звідси

$$pR + cR = R$$

оскільки $qc = cq'$ ля деякого елемента $q' \in R$. Оскільки R є дуо-кільцем, то $Rp + Rc = R$, а тому $vp + jc = 1$ для деяких елементів $v, j \in R$. Тоді

$$vpb - b = jcb = ct$$

для деякого $t \in R$. Оскільки R є дуо-кільцем, зауважимо, що $t = jc$, де $jc = cj'$ для деякого $j' \in R$.

Таким чином, із того, що

$$v(pb + qc) = vpb + vqc = b + ct + vqc = b + ct + ck,$$

випливає, що $v(pb+qc)-b \in cR$. Зауважимо, що вказаний вище елемент k з властивістю $vqc = ck$ існує, оскільки R є дуо-кільцем.

Іншими словами, $v(pb+qc)-b = c\lambda$ для деякого $\lambda \in R$. Зауважимо, що рівність $uR + aR = R$, де $u = pb + qc$, очевидним чином випливає з того, що $paR+(pb+qc)R = R$. У підсумку, ми отримуємо: $vR+cR = R$ і $uR + aR = R$, тобто умову (2) доведено.

Покажемо, що (2) $\Rightarrow$ (1). Припустимо, що існує елемент $\lambda \in R$ такий, що

$$b + c\lambda = vu,$$

де $vR+cR = R$ і $uR+aR = R$. Оскільки $vR+cR = R$, то $Rv+Rc = R$ і $pv + jc = 1$ для деяких елементів $p, j \in R$.

Зауважимо, що $pR + cR = R$. Тоді

$$pb = p(vu - c\lambda) = (pv)u - pc\lambda = (1 - jc)u - pc\lambda = u - qc$$

для деякого елемента $q \in R$. Звідси ми отримуємо, що $u = pb + qc$. Таким чином,

$$(pb + qc)R + aR = R, \quad pR + cR = R.$$

Оскільки R є дуо-областю Безу, то можемо вважати, що

$$pR + qR = dR,$$

де $p = dp_1$, $q = dq_1$ і $p_1R + q_1R = R$. Більше того,

$$p_1R + (p_1b + q_1c)R = p_1R + q_1cR,$$

та оскільки $pR + cR = R$ і $p_1R + q_1R = R$, то

$$p_1R + (p_1b + q_1c)R = R.$$

Використовуючи те, що $(p_1b+q_1c)R+aR = R$ і $(p_1b+q_1c)R+p_1R = R$ робимо висновок:

$$p_1aR + (p_1b + q_1c)R = R,$$

що доводить умову (1). Твердження доведене. □

Зауваження 2.1. *Слід зауважити, що у Твердженні 2.3 ми можемо вибрати елементи u і v такими, що $uR + vR = R$.*

Теорема 2.1. *Для дуо-області Безу R такі умови є рівносильними:*

1) R є дуо-областю елементарних дільників;

2) для довільних елементів $x, y \in R$ таких, що $xR + yR = R$ та довільного елемента $z \in R$ існує елемент $\lambda \in R$ такий, що

$$x + y\lambda = vu, \quad uR + zR = R, \quad vR + (1 - z)R = R.$$

Доведення. Покажемо, що (1) $\Rightarrow$ (2). Нехай $x, y, z \in R$, причому $xR+yR=R$. Якщо вважати, що R є областю елементарних дільників та елементи $a, b, c \in R$ є такими, що $aR+bR+cR=R$, то використовуючи Твердження 2.2 ми можемо знайти елементи $p, q \in R$ що задовольняють рівність

$$paR+(pb+qc)R=R.$$

Поклавши $a=z,\ b=x,\ c=y(1-z)$, отримуємо шукану умову.

Неважко довести, що (2) $\Rightarrow$ (1). Згідно з Твердженням 2.2 достатньо довести, що для кожної трійки елементів $a, b, c \in R$ таких, що $aR+bR+cR=R$ можна знайти елементи $p, q \in R$ такі, що $paR+(pb+qc)R=R$. Нехай

$$bR+cR=dR,\ b=db_1,\ c=dc_1,\ b_1R+c_1R=R$$

для деяких $d, b_1, c_1\ inR$. Оскільки $aR+bR+cR=R$, тоді $dR+aR=R$ і $1-d_1d \in aR$ для деякого елемента $d_1 \in R$.

Покладемо $x=b_1, y=c_1, z=d_1d$. Із умови (2) нашої теореми випливає існування елементів $\lambda_1, v, u_1 \in R$ таких, що

$$b_1+c_1\lambda_1=vu_1,\ u_1R+(1-d_1d)R=R,\ vR+d_1dR=R.$$

Використовуючи те, що $1-d_1d \in aR$, $dR+aR=R$ і $u_1R+(1-d_1d)R=R$, робимо висновок:

$$u_1R+aR=R,\ dR+aR=R \Rightarrow uR+aR=R,$$

де $u=u_1d$. Покажемо, що $vR+c_1R=R$. Оскільки R є дуо-кільцем, то існує елемент $\lambda \in R$ такий, що

$$c_1\lambda_1=\lambda c_1.$$

Крім того, існують елементи $r, s \in R$ такі, що $b_1 r + c_1 s = 1$. Тоді

$$1 = b_1 r + c_1 s = (vu_1 - \lambda c_1) r + c_1 s = b_1 r + c_1 s =$$

$$= (vu_1 - c_1 \lambda_1) r + c_1 s = vu_1 r + c_1 (s - \lambda_1 r),$$

і ми робимо висновок, що $vR + c_1 R = R$. Враховуючи те, що $vR + dR = R$, оскільки $vR + d_1 dR = R$, отримуємо, що $vR + cR = vR + c_1 dR = R$.

Із рівності $b + \lambda c = (b_1 + \lambda c_1) d = vu$ та того, що $vR + cR = R,\ uR + aR = R$ робимо висновок, що виконується умова (2) Твердження 2.3, а тому для будь-яких $a, b, c \in R$, що $aR + bR + cR = R$ снують елементи $p, q \in R$ такі, що

$$paR + (pb + qc)R = R.$$

Теорему доведено. $\square$

Наступна теорема відповідає на питання про те, коли скінченний гомоморфний образ дуо-області Безу є чистим кільцем.

Теорема 2.2. *Нехай R є дуо-областю Безу, і $c \in R \setminus \{0\}$. Тоді $\overline{R} = R/cR$ є чистим кільцем тоді і лише тоді, коли для довільного елемента $a \in R$ існують елементи v, u такі, що*

$$c = vu,\ uR + aR = R,\ vR + (1 - a)R = R,\ uR + vR = R.$$

Доведення. Нехай R є чистим кільцем. Відповідно до Теореми 1.26 R є кільцем з властивістю заміни. Нехай $\overline{a} = a + cR$. Тоді існує ідемпотент $\overline{e} \in \overline{R}$ такий, що

$$\overline{e} \in \overline{a}\overline{R}, \quad \overline{1} - \overline{e} \in (\overline{1} - \overline{a})\overline{R}.$$

Оскільки $\overline{e} \in \overline{a}\overline{R}$, то $e - ap = cs$ для деяких елементів $p, s \in R$. Аналогічно отримуємо, $1 - e - (1 - a)\alpha = c\beta$ для деяких елементів $\alpha, \beta \in R$.

Оскільки $\overline{e}^2 = \overline{e}$, тоді

$$e(1-e) = ct$$

для деякого елемента $t \in R$. Якщо покласти $eR + cR = dR$, то отримуємо $e = de_0$, $c = dc_0$ для деяких елементів $e_0, c_0 \in R$ таких, що $e_0R + c_0R = R$. Отже, з $e_0(1-e) = c_0t$ випливає, що $e_0 = e_0e + c_0t$. Враховуючи рівність $e_0R + c_0R = R$ ми отримаємо, що $e + c_0j = 1$ для деякого елемента $j \in R$.

Позначивши $v = d, u = c_0$, отримаємо рівність $c = vu$. Оскільки $e = 1 - c_0j$, то $uR + eR = R$. Більше того, врахувавши те, що $e = ap + cs$, можемо зробити висновок $uR + aR = R$.

Покажемо, що $vR + (1-a)R = R$. Оскільки $1 - e + (1-a)\alpha = c\beta$ і $e = de_0$, $c = dc_0$ то $1 - de_0 + (1-a)\alpha = dc_0\beta$, а це означає, що

$$d(e_0 + c_0\beta) + (1-a)\alpha = 1 \Rightarrow dR + (1-a)R = R \Rightarrow vR + (1-a)R = R,$$

що доводить необхідність твердження.

Доведемо достатність. Нехай $c = vu$, де $uR + aR = R$, $vR + (1-a)R = R$, $uR + vR = R$. Нехай $\overline{u} = u + cR$, $\overline{v} = v + cR$. Із рівності $uR + vR = R$ отримаємо, що $ur + vs = 1$ для деяких елементів $r, s \in R$. Звідси отримаємо рівності

$$vur + v^2s = v, \ u^2r + uvs = u.$$

Переходячи до образів у фактор-кільці отримаємо:

$$\overline{v}^2\overline{s} = \overline{v}, \quad \overline{u}^2\overline{r} = \overline{u}.$$

Поклавши $\overline{vs} = \overline{e}$, очевидним чином бачимо, що $\overline{e}^2 = \overline{e}$ і $\overline{1} - \overline{e} = \overline{ur}$. Оскільки $uR + aR = R$, то $ux + ay = 1$ для деяких елементів $x, y \in R$.

Звідси випливає, що

$$vux + vay = v, \quad vuxs + vays = vs.$$

Нехай $va = av'$ для деякого елемента v'. Таким чином,

$$vuxs + av'ys = vs \Rightarrow \overline{av'}\overline{y} \cdot \overline{s} = \overline{v} \cdot \overline{s}$$

і це означає, що $\overline{a}\overline{j} = \overline{e}$ для деякого $\overline{j} \in R$, тобто $\overline{e} \in \overline{a}\overline{R}$. Аналогічним чином, із рівності $vR + (1 - a)R = R$ випливає, що

$$\overline{1} - \overline{e} \in (\overline{1} - \overline{a})R.$$

Отже, $\overline{R}$ — чисте кільце. Теорему доведено. □

Із Теорем 2.1 та 2.2 отримуємо дві теореми, які є основними результатами цього розділу.

Теорема 2.3. *Дуо-область Безу є областю елементарних дільників тоді і лише тоді, коли вона є областю акуратного рангу один.*

Теорема 2.4. *Дистрибутивна область Безу є областю елементарних дільників тоді і лише тоді, коли вона є дуо-областю акуратного рангу один.*

2.2. Редукція матриць над кільцями, що задовольняють умову Дубровіна та умову Z

Забавським [61] показано, що проста область Безу R є кільцем елементарних дільників тоді і лише тоді, коли R є 2–простою областю, тобто, якщо для довільного ненульового елемента $a \in R$ існують такі елементи $u_1, u_2, v_1, v_2 \in R$, що

$$u_1 a v_1 + u_2 a v_2 = 1.$$

Відзначимо, що у простій області R для довільного ненульового елемента $a \in R$ виконується рівність $RaR = R$. Саме вивченню різноманітних умов на ідеал RaR присвячено цей розділ. Серед перших видів обмежень на область, відзначимо умову L.

Означення 2.2. *Будемо казати, що R є* областю з умовою L, *якщо із того, що $RaR = R$ випливає рівність $aR = R$.*

Знайдемо за яких умов область з умовою L є правим квазі-дуо кільцем.

Твердження 2.4. *Нехай R є областю з умовою L, в якій довільний максимальний правий (лівий) ідеал є головним. Тоді R є правою (лівою) квазі-дуо областю.*

Доведення. Нехай $M = mR$ є довільним максимальним правим ідеалом області R, і нехай існує елемент x, такий, що $xm \notin M$. Розглянемо правий ідеал $M + xmR$. Оскільки $M \subseteq M + xmR$, то в силу максимальності M отримуємо, що

$$M + xmR = R,$$

тобто $ms+xmy=1$ для деяких елементів $s,y\in R$. Із останньої рівності робимо висновок, що $RmR=R$. В силу умови L, можемо стверджувати, що m є оборотним елементом кільця R, що неможливо, оскільки mR є максимальним правим ідеалом в R. Дане протиріччя показує, що $Rm\subseteq mR$, тобто mR є двобічним ідеалом. Твердження для випадку максимального лівого ідеалу доводиться аналогічно. Твердження доведене. $\square$

Також нагадаємо означення кільця з умовою Дубровіна.

Означення 2.3. *Скажемо, що R є* кільцем з умовою Дубровіна*, якщо для довільного ненульового елемента $a\in R$ існує елемент $\alpha\in R$ такий, що $RaR=\alpha R=R\alpha$.*

Очевидним прикладом кільця з умовою Дубровіна є просте кільце.

Наступний відомий факт підкреслює роль умови Дубровіна для кілець елементарних дільників.

Теорема 2.5. *[59] Нехай R область Безу з умовою Дубровіна. Тоді R є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли довільна матриця*

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix},$$

де $RaR+RbR+RcR=R$ володіє канонічною діагональною редукцією.

Наступна теорема встановлює зв'язок кілець з умовою L і кілець з умовою Дубровіна.

Теорема 2.6. *Нехай R є кільцем елементарних дільників з умовою L. Тоді R є квазі-дуо кільцем з умовою Дубровіна.*

Доведення. Нехай $aR+bR=R$ і розглянемо матрицю

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки R є кільцем елементарних дільників, тоді для матриці A існують оборотні матриці другого порядку P і Q, що

$$PAQ=\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

де $RcR \subseteq zR \cap Rz$. Нехай $P=(p_{ij})$, $Q=(q_{ij})$. Тоді

$$(p_{11}a+p_{12}b)q_{11}=z \Rightarrow RzR \subseteq RaR+RbR.$$

Зауважимо, що із рівності

$$A=P\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}Q$$

випливає, що $a, b \in RzR+RcR$. Оскільки $RcR \subseteq zR \cap Rz \subseteq RzR$, то $RaR+RbR \subseteq RzR+RcR \subseteq RzR$. Із цього отримуємо такий висновок:

$$R=aR+bR \subseteq RaR+RbR=RzR,$$

тобто $RzR=R$. З умови L випливає, що z — оборотний елемент кільця R. Оскільки $z=(p_{11}a+p_{12}b)q_{11} \in U(R)$, то $p_{11}a+p_{12}b \in U(R)$. Отже, $Ra+Rb=R$.

Якщо розглянути рівність $Ra+Rb=R$, то, провівши для матриці

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

аналогічні міркування, ми доведемо, що $aR+bR=R$. Згідно з Теоремою 1.26, R є правим і лівим квазі-дуо кільцем.

Тепер доведемо, що R є кільцем з умовою Дубровіна. Нехай a — довільний ненульовий елемент R. Оскільки, R є кільцем елементарних дільників, то для матриці

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

існують оборотні матриці другого порядку $P = (p_{ij})$, $Q = (q_{ij})$, що

$$AP = Q \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

де $RbR \subseteq zR \cap Rz$. Аналогічним чином до викладок вище отримуємо, що $RaR = RzR$. Використовуючи вказану вище матричну рівність, отримаємо

$$ap_{12} = q_{12}b, \quad ap_{22} = q_{22}b.$$

Оскільки, P — оборотна матриця, то $Rp_{12} + Rp_{22} = R$. У силу доведеного вище, R є квазі-дуо кільцем Безу, а тому

$$p_{12}R + p_{22}R = R,$$

тобто для деяких елементів $u, v \in R$ виконується рівність

$$p_{12}u + p_{22}v = 1.$$

Оскільки $ap_{12} = q_{12}b$ та $ap_{22} = q_{22}b$, то

$$a = ap_{12}u + ap_{22}v = q_{12}bu + q_{22}bv \in RbR.$$

Таким чином $RaR \subseteq RbR$. Враховуючи, що

$$RbR \subseteq RzR, \quad RaR = RzR,$$

робимо висновок, що

$$RaR = RbR \subseteq zR \cap Rz \subseteq RzR = RaR,$$

а тому $RaR = zR = Rz$. Теорему доведено. □

Оскільки частковим випадком скінченного елемента є оборотний елемент, то аналогічно з означенням умови L розглянемо наступне поняття.

Означення 2.4. *Будемо казати, що R є кільцем з умовою Z, якщо з умови $RaR = R$ випливає, що a — скінченний елемент.*

Наступна теорема описує мультиплікативну структуру елементів області Безу з умовою Дубровіна та умовою Z.

Твердження 2.5. *Нехай R область Безу з умовою Дубровіна та умовою Z. Тоді довільний ненульовий елемент $a \in R$ можна зобразити у вигляді*

$$a = \alpha f = \varphi \alpha,$$

де α — дуо-елемент, а f, φ — скінченні елементи R.

Доведення. З умови Дубровіна випливає існування дуо-елемента α такого, що $RaR = \alpha R = R\alpha$. Тому

$$a = \alpha f = \varphi \alpha,$$

де $RfR = R\varphi R = R$. Згідно з обмеженнями накладеними на кільце R, отримаємо, що f, φ — скінченні елементи. Твердження доведене. □

У попередньому підрозділі доведено, що дуо-область Безу акуратного рангу один є кільцем елементарних дільників. Частковим випадком кілець акураного рангу один є кільця стабільного рангу один.

Зауважимо, що в доведенні наступної теореми, будемо використовувати той факт, що довільний дільник скінченного елемента області Безу є скінченним [62].

Теорема 2.7. *Нехай R є областю Безу стабільного рангу один з умовою Z і умовою Дубровіна. Тоді R є кільцем елементарних дільників.*

Доведення. Згідно з результатами Дубровіна та Забавського для доведення теореми необхідно і достатньо довести, що довільна матриця вигляду

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix},$$

де $RaR + RbR + RcR = R$, володіє канонічною діагональною редукцією.

Оскільки R є областю Безу стабільного рангу один, то згідно з Теоремою 1.18 для елементів $a, b \in R$ існують елементи $x, d \in R$, що $xa + b = d$, де $Ra + Rb = Rd$. Тоді

$$\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa + d & c \\ a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & c \\ a & 0 \end{pmatrix},$$

де $a = a_0 d$, для деякого елемента $a_0 \in R$.

Згідно з Теоремою 1.18 існують елементи $y, z \in R$ такі, що $cR + dR = zR$ і $cy + d = z$. Звідси

$$\begin{pmatrix} d & c \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d + xy & c \\ a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & c \\ a & 0 \end{pmatrix},$$

де $d = zt$, $c = zc_0$. Оскільки матриця A еквівалентна матриці

$$\begin{pmatrix} z & c \\ a & 0 \end{pmatrix},$$

де $a = a_0 zt$, $c = zc_0$. Оскільки

$$R = RaR + RbR + RcR = RzR + RcR \subseteq RzR + Rzc_0R \subseteq RzR,$$

ми отримаємо, що $RzR = R$, а згідно з умовою Z елемент z є скінченим елементом області R.

Таким чином, розглянемо матрицю

$$B = \begin{pmatrix} z & c \\ a & 0 \end{pmatrix}.$$

Замінюючи елемент z на найбільший спільний лівий дільник елементів z і c, ми отримаємо, що новий елемент z матриці на місці (1,1) буде теж скінченним, і його довжина буде менша за $l(z)$.

Аналогічні перетворення здійснюємо із першим стовпцем матриці, при цьому перший рядок нової матриці може знову стати ненульовим, але останнє можливо лише, коли довжина скінченного елемента z на місці (1,1) зменшується, тобто матрицю B, ми зведемо до вигляду

$$C = \begin{pmatrix} z' & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}.$$

де z' — скінченний елемент.

Використовуючи операцію додавання до першого стовпця (рядка) правого (лівого) кратного другого стовпця (рядка), і знову здійснивши послідовну заміну елемента z' на найбільший спільний лівий (правий) дільник даного елемента і утвореного таким чином елемента, ми будемо зменшувати довжину елемента z'. Даний процес будемо продовжувати поки не отримаємо еквівалентну до B матрицю C вигляду

$$C = \begin{pmatrix} z'' & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix},$$

де $RsR \subseteq z''R \cap Rz''$. Теорему доведено. □

2.3. Приклади дистрибутивних та дуо-кілець

Наведемо ряд результатів, необхідних для побудови прикладів дистрибутивних та дуо-кілець.

Нехай φ є ін'єктивниим ендорфізмом кільця A. Введемо позначення

$$[x,\varphi]A = \{a_0 + xa_1 + \ldots + x^n a_n \mid a_i \in A, n \geq 0\},$$

причому $a \cdot x = x\varphi(a)$, для довільного $a \in A$.

Теорема 2.8. *Нехай φ є ін'єктивниим ендорфізмом кільця A, та $R = [\varphi, x]A$. Тоді R/x^2R є правим кільцем Безу тоді і лише тоді, коли R є правим кільцем Безу.*

Якщо додатково у кільці A всі праві аннулятори є двобічними ідеалами, то умова правого кільця Безу для кільця R еквівалентна тому, що A є правим Рікартовим правим кільцем Безу, де $\varphi(e) = e$, для кожного центрального ідемпотенту $e^2 = e \in A$, та $\varphi(d) \in U(A)$, для кожного елемента d, який не є дільником нуля.

Теорема 2.9. *Нехай φ є ін'єктивниим ендорфізмом кільця A, та $R = [\varphi, x]A, n \geq 2$. Тоді такі властивості є еквівалентні:*

1. *R/x^nR є правим кільцем Безу.*
2. *R/x^nR є правим дуо-кільцем.*
3. *R/x^nR є правим дистрибутивним кільцем.*
4. *R є редукованим правим кільцем Безу, причому R/x^nR є правим дистрибутивним, правим дуо-кільцем і правим кільцем Безу, для довільного $n \geq 1$*
5. *для довільного центрального ідемпотента $e \in A : \varphi(e) = e$.*

Якщо ж $\varphi \in Aut(A)$, *то* $R = A[x, \varphi_{-1}], x^n R = Rx^n$ *для кожного* n, *та вказані вище умови є еквівалентні своїм лівим аналогам.*

Теорема 2.10. *Нехай* φ *є ін'єктивниим ендорфізмом кільця* A. *Тоді такі властивості є еквівалентні:*

1. $R[x, \varphi]$ *є правим дистрибутивним кільцем.*
2. $R[x, x^{-1}]$ *є правим дистрибутивним кільцем.*
3. $R[x, x^{-1}]$ *є правим квазі-дуо-кільцем, яке є правим кільцем Безу.*
4. $R[x, \varphi]$, $R[x, x^{-1}]$ *є комутативними дистрибутивними редукованими кільцями Безу.*
5. R *є комутативним регулярним кільцем, а* φ *є тотожнім автоморфізмом.*

Теорема 2.11. *Нехай* φ *є ін'єктивниим ендорфізмом кільця* A, *та* $R = A[x, \varphi]$, *причому* R/Rx^2 *є правим кільцем Безу, і або* A *є правим квазі-дуо-кільцем або праві аннулятори елементів кільця* A *є двобічними ідеалами. Тоді:*

1. φ *є автоморфізмом.*
2. A *є строго регулярним.*
3. R *та* $A[x, x^{-1}, \varphi]$ *є редукованими кільцями Безу.*
4. R/Rx^k *є дистрибутивним дуо-кільцем Безу, для кожного* $k \geq 2$.
5. *для будь-якого* A *існує* $b \in A$ *такий, що* $\varphi(a) = \varphi(a)ab$.
6. *для кожного ідемпотента* $e \in A$ *є центральним в* S *та* $\varphi(e) = e$.

Наведемо приклад кільця Безу, в якому виконується умова Дубровіна та дистрибутивних кілець.

Приклад 2.1. Розглянемо підкільце K кільця кватерніонів $\mathbb{H}$, яке складається із кватерніонів

$$1a_0 + ia_1 + ja_2 + ka_3,$$

де або a_i або $2a_i$ є цілими числами. Тоді K є дуо-областю Безу стабільного рангу один, яка задовольняє умову Z та умову Дубровіна.

Приклад 2.2. Нехай K — підкільце гамільтонової алгебри кватерніонів, яке складається з кватерніонів $1a_0 + ia_1 + ja_2 + ka_3$, де всі числа a_i є цілими або половинами непарних цілих чисел і нехай T — тіло дробів кільця K, тобто

$$H = \mathbb{Q}(i, j, k) = \{1a_0 + ia_1 + ja_2 + ka_3 \mid a_i \in \mathbb{Q}, i = \overline{0, 3}\}.$$

Розглянемо підкільце R кільця $H\big[[x]\big]$, яке складається з рядів, у яких вільний член належить K. Як відомо, R є кільцем Безу. Нехай $f(x)$ — довільний елемент кільця R. Тоді

$$f(x) = a_{n(f)} x^{n(f)} u,$$

де $a_{n(f)}$ — перший, відмінний від нуля, коефіцієнт ряду $f(x)$, а $u \in U(R)$. Оскільки $a_{n(f)} \in \mathbb{Q}(i, j, k)$, то

$$a_{n(f)} = bc^{-1},$$

де $c^{-1} = \frac{1}{N(c)} c^*$, $N(c)$ — норма елемента c, c^* — спряжений кватерніон до кватерніона c. Звідси

$$f(x) = \frac{1}{N(c)} bc^* x^{n(f)}.$$

Оскільки елементи x і $N(c)$ комутують з довільним елементом кільця R, то

$$Rf(x)R = \frac{1}{N(c)}x^{n(f)}Rbc^*R.$$

Оскільки $bc^* \in K$, а K, як відомо, є кільцем головних ідеалів, то

$$Rbc^*R = dR = Rd$$

для деякого елемента $d \in K$. Звідси

$$Rf(x)R = \frac{1}{N(c)}dx^{n(f)}R = R\frac{1}{N(c)}dx^{n(f)},$$

що і потрібно було довести.

Прикладом кільця Безу без дільників нуля стабільного рангу 1 може послужити так побудоване кільце, якщо в якості кільця K взяти довільне кільце головних ідеалів стабільного рангу 1 (зокрема в якості K може бути довільне напівлокальне кільце головних ідеалів).

Приклад 2.3. Нехай K — кільце головних ідеалів без дільників нуля, а T — тіло дробів кільця K. Нехай $T\big[[x]\big]$ — кільце степеневих над тілом T з комутуючою змінною x. Розглянемо підкільце R даного кільця $T\big[[x]\big]$, яке складається з степеневих рядів з вільним членом з кільця K, тобто $R = \{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots | b_0 \in K, b_i \in T, i = 1, 2, \dots\}$. Легко переконатися, що R є кільцем Безу без дільників нуля.

Позначимо через $b_{n(f)}$ — перший відмінний від нуля коефіцієнт ряду $f(x)$, тобто $f(x) = b_{n(f)}x^{n(f)} + (1 + b_{n(f)+1}x + \dots)$. Оскільки $J(R) = \{b_1x + b_2x^2 + \dots \mid b_i \in T\}$, то $1 + b_{n(f)+1}x + \dots \in U(R)$ і тоді

$$f(x)R = b_{n(f)}x^{n(f)}R.$$

Аналогічно доводиться, що

$$Rf(x) = Rb_{n(f)}x^{n(f)}.$$

Розглянемо правий ідеал $f(x)R+\varphi(x)R$. Оскільки $f(x)R = b_{n(f)}x^{n(f)}R$, то

$$\varphi(x) = b_{n(\varphi)}x^{n(\varphi)}R.$$

Очевидно, якщо $n(f) = n(\varphi) = 0$, то $b_{n(f)}R + b_{n(\varphi)}R$ — головний правий ідеал, оскільки $b_{n(f)}, b_{n(\varphi)} \in K$, де K — кільце головних ідеалів.

Якщо $n(f) > n(\varphi)$, то

$$f(x)R + \varphi(x)R = \varphi(x)R.$$

Аналогічно доводиться випадок, коли $n(f) < n(\varphi)$.

Нехай тепер $n(f) = n(\varphi) = n \neq 0$. Оскільки $b_{n(f)} \in T$, $b_{n(\varphi)} \in T$, то

$$b_{n(f)} = b_1 s^{-1} = t^{-1} b_2, \quad b_{n(\varphi)} c_1 s^{-1} = t^{-1} c_2$$

для деяких елементів $b_1, b_2, c_1, c_2 \in K$, $s, t \in K \setminus \{0\}$. Оскільки K — кільце головних ідеалів, то

$$b_2 K + c_2 K = d_2 K.$$

Звідси

$$t^{-1} b_2 x^n R + t^{-1} c_2 x^n R = t^{-1} d_2 x^n R.$$

Тобто R — праве кільце Безу.

Аналогічно доводиться випадок лівого кільця Безу, причому R не є кільцем головних ідеалів.

Приклад 2.4. Нехай R_1 та R_2 є локалізаціями кільця цілих гаусових чисел по простим ідеалам, які породжені елементами $2-i$ та $2+i$. Тоді R_1 та R_2 є комутативними областями нормування, які є кільцями головних ідеалів. Позначимо $R = R_1 \cap R_2$, та нехай X та Y є ідеалами в R, які породжені елементами $2-i$ та $2+i$ відповідно.

Комутативна область головних ідеалів R має точно два максимальні ідеали X та Y, причому

$$R/J(R) \cong R/X \times R/Y.$$

Нехай $M = \mathbb{Q}(i)]/R_X$ є правим R-модулем. Перетворимо M також на лівий R-модуль, визначивши

$$rm = m\varphi(r)$$

де φ є автоморфізмом спряження. Безпосередня перевірка показує, що M є (R, R)-бімодулем.

Нехай A є тривіальним розширенням (R, R)-бімодуля M, тобто елементами кільця A є матриці вигляду

$$\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix},$$

де $m \in M, r \in R$. Тоді A є дистрибутивним дуо-кільцем Безу.

ВИСНОВКИ:

В цьому розділі розглянуто теорію некомутативних кілець Безу. Введено поняття акуранного рангу один для дуо-кілець і встановлено критерій кільця елементарних дільників для дуо-областей Безу у термінах акуратного рангу один. Описано необхідні і достатні умови того, що скінченний гомоморфний образ дуо-області Безу є чистим кільцем. Показано зв'язок між односторонніми максимальними ідеалами кілець елементарних дільників та умовою L та умовою Дубровіна. Доведено, що кільце елементарних дільників з умовою L є також і кільцем з умовою Дубровіна. Введено в розгляд кільця з умовою Z, як узагальнення кілець з умовою L, та доведено, що область Безу стабільного рангу один з умовою Z та умовою Дубровіна є кільцем елементарних дільників.

Головними результатами цього розділу є:

1) у дуо-кільці Ерміта виконується умова Капланського тоді і лише тоді, коли це кільце елементарних дільників;

2) наведено необхідні і достатні умови структури елемента дуо-області Безу, що фактор-кільце по головному ідеалу, який він породжує, є чистим кільцем, в термінах взаємопростоти із іншими елементами кільця;

3) дистрибутивна область Безу є кільцем елементарних дільників тоді і лише тоді, коли це дуо-область акуратного рангу один;

4) область з умовою L, праві (ліві) максимальні ідеали якої є головними, є правим (лівим) квазі-дуо кільцем;

5) кільце елементарних дільників з умовою L є квазі-дуо кільцем з умовою Дубровіна;

6) довільний елемент дуо-області Безу з умовою Дубровіна та умовою Z є добутком дуо-елемента та скінченного елемента;

7) область Безу стабільного рангу один з умовою Дубровіна та умовою Z є кільцем елементарних дільників.

Результати даного розділу опубліковані в таких роботах: [16, 4, 15].

РОЗДІЛ 3

Максимально негельфандові ідеали дуо-областей Безу та гельфандовий ранг один

Третій розділ присвячено теорії гельфандових елементів дуо-областей Безу та зв'язку діагональнії редукції матриць та гельфандового рангу один.

У першому підрозділі вводиться означення гельфандових та негельфандових елементів та ідеалів, встановлюються властивості множин таких елементів чи ідеалів, розглянуто гельфандовий аналог радикалу Джекобсона.

У другому підрозділі вивчається канонічна діагональна редукція матриць над дуо-областями Безу гельфандового рангу один. Вводиться означення локально гельфандової дуо-області Безу, та показано, що така область володіє властивостями, які є аналогічні до класичних локальних кілець. Доведено, що будь-яка локально гельфандова дуо-область Безу є кільцем елементарних дільників.

Впродовж цього розділу під кільцем будемо розуміти асоціативне кільце R з $1 \neq 0$.

3.1. Гельфандові елементи та максимально негельфандові ідеали

Означення 3.1. *Нехай R є дуо-кільцем. Ненульовий елемент $a \in R$ називається гельфандовим, якщо довільний первинний правий ідеал P такий, що $a \in P$, міститься у єдиному максимальному правому ідеалі.*

Позначимо через S множину всіх гельфандових елементів кільця R. Відзначимо, що множина S непорожня, оскільки, $1 \in S$.

Твердження 3.1. *Множина S всіх гельфандових елементів дуо-області Безу R є насиченою мультиплікативно замкненою множиною.*

Доведення. Нехай $a, b \in S$. Припустимо, що існує первинний правий ідеал P такий, що $ab \in P$ і

$$P \subset M_1 \cap M_2,$$

де M_1, M_2 різні максимальні праві ідеали R. Оскільки, $ab \in P$ тоді $a \in P$ або $b \in P$. Якщо $a \in P$, тоді

$$a \in P \subset M_1 \cap M_2,$$

що неможливо, оскільки $a \in S$. Аналогічно розглядається випадок $b \in P$. Отримані протиріччя доводять, що S мультиплікативно замкненою множиною.

Нехай $ab \in S$ і $a \notin S$. Тоді існує первинний правий ідеал P такий, що

$$a \in P \subset M_1 \cap M_2,$$

де M_1, M_2 різні максимальні праві ідеали. Тоді

$$ab \in P \subset M_1 \cap M_2,$$

що неможливо, оскільки, $ab \in S$. Отже, S є насиченою мультиплікативно замкненою множиною. $\square$

Означення 3.2. *Правий ідеал I кільця R називається* гельфандовим*, якщо I містить хоча б один гельфандовий елемент. У протилежному випадку, правий ідеал I називається* негельфандовим*, тобто довільний ненульовий елемент правого ідеалу I є негельфандовим.*

Доведемо, що множина H всіх негельфандових правих ідеалів кільця R є індуктивною. Оскільки, $0 \in H$, тоді множина H – непорожня. Нехай

$$\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$$

є довільним ланцюгом правих ідеалів множини H. Розглянемо правий ідеал

$$I = \cup_{\alpha\in\Omega} I_\alpha.$$

Якщо $I \notin H$, тоді існує такий гельфандовий елемент a, що $a \in I$. Згідно з означенням правого ідеалу I маємо, що існує такий $\beta \in \Omega$, що $a \in I_\beta$. Тобто, згідно з означенням правий ідеал I_β є гельфандовим, що неможливо, тому, що $I_\beta \in H$. Отже, множина H — індуктивна. За лемою Цорна, в H існує хоча б один максимальний елемент. Такі праві ідеали назвемо *максимально негельфандовими.*

Означення 3.3. *Правий негельфандовий ідеал N кільця R називається* максимально негельфандовим*, якщо для довільного правого* *ідеалу I, де $N \subset I$, $I \neq N$, існує гельфандовий елемент a такий, що $a \in I$.*

Використовуючи, що максимально негельфандові ідеали є максимальними елементами частково впорядкованої множини H, отримаємо наступне твердження.

Твердження 3.2. *Довільний негельфандовий правий ідеал дуо-області Безу міститься хоча б в одному максимально негельфандовому правому ідеалі.*

У наступному твердженні доведемо, що максимально негельфандові ідеали є первинними.

Твердження 3.3. *Кожний максимально негельфандовий правий ідеал дуо-області Безу є первинним правим ідеалом.*

Доведення. Нехай P є довільним максимально негельфандовим правим ідеалом. Доведемо від супротивного. Нехай існують такі елементи $b, c \in R$, що $c \notin P$, $b \notin P$ але $cb \in P$.

Розглянемо правий ідеал $P + cR$. Оскільки,

$$P \subset P + cR,$$

де $c \notin P$, тоді правий ідеал $P + cR$ є гельфандовим, тобто, існують такі елементи $p_1 \in P$ та $r_1 \in R$, такі, що елемент $x = p_1 + cr_1$ є теж гельфандовим.

Аналогічно, із того, що $P \subset P + bR$ отримаємо, що $y = p_2 + br_2$ є гельфандовим елементом для деяких елементів $p_2 \in P$ та $r_2 \in R$.

Оскільки $cb \in P$, то, $xy \in P$, що неможливо. Оскільки множина гельфандових елементів є мультиплікативно замкненою, то ідеал P

містить гельфандовий елемент, що неможливо згідно з припущенням. Твердження доведене. □

Наступне твердження узагальнює результат Ларсена, Левіса та Шореса про те, що кожен ненульовий простий ідеал комутативного адекватного кільця міститься у єдиному максимальному ідеалі, на випадок гельфандових елементів дуо-областей Безу.

Теорема 3.1. *Нехай R — дуо-область Безу, в якій довільний ненульовий первинний правий ідеал містить гельфандовий елемент. Тоді R є областю, у якій довільний ненульовий первинний правий ідеал міститься у єдиному максимальному.*

Доведення. Згідно з попередніми твердженнями кожен негельфандовий правий ідеал дуо-області Безу міститься хоча б в одному максимально негельфандовому правому ідеалі, який є первинним правим ідеалом. Тому, для доведення теореми достатньо показати, що у кільці R немає негельфандових елементів. Припустимо, що в R існує ненульовий негельфандовий елемент a. Розглянемо правий ідеал aR. Зауважимо, що всі елементи правого ідеалу aR є негельфандовими, тому, що у протилежному випадку елемент a був би гельфандовим, як дільник гельфандового елемента. Тоді $aR \subset M$, де M — максимально негельфандовий правий ідеал, який є простим. Оскільки, довільний ненульовий первинний правий ідеал містить гельфандовий елемент, то ми отримаємо протиріччя. Теорему доведено. □

Позначимо через $A(R)$ перетин усіх максимально негельфандових правих ідеалів. Доведемо декілька властивостей цієї множини.

Твердження 3.4. *Нехай R — дуо-область Безу, елемент a —*

гельфандовий у R і $b \in A(R)$. Тоді, для довільного $x \in R$ елемент $a + bx$ є гельфандовим.

Доведення. Припустимо, що $a + bx$ не є гельфандовим елементом. Тоді $(a + bx)R$ є негельфандовим правим ідеалом кільця R. Тоді існує максимально негельфандовий правий ідеал N, який містить правий ідеал $(a + bx)R$, а тому і елемент $a + bx$. Оскільки b належить всім максимально негельфандовим правим ідеалам, то

$$a = (a + bx) - bx \in N,$$

що неможливо, за означенням правого ідеалу N. Отримане протиріччя доводить твердження. $\square$

Твердження 3.5. *Нехай I є таким правим ідеалом дуо-області Безу, що для довільних $i \in I$ та гельфандового елемента a елемент $i + a$ є гельфандовим. Тоді $I \subset A(R)$.*

Доведення. Нехай існує максимально негельфандовий правий ідеал N для якого $I \nsubseteq N$. Згідно з означенням максимально негельфандового правого ідеалу, існує гельфандовий елемент a, який належить $I + N$. Тоді $a = -i + n$, де $i \in I$, $n \in N$. Згідно з означенням ідеалу I отримаємо, що елемент $n = a + i$ є гельфандовим, що неможливо, бо $n \in N$. Твердження доведено. $\square$

Зауважимо, що попередні два твердження встановлюють для правого ідеалу $A(R)$ властивості, які є аналогічними до властивостей радикала Джекобсона. Тому, $A(R)$ назвемо *гельфандовим аналогом радикала Джекобсона.*

Наступне твердження у випадку єдиного максимального негельфандового правого ідеалу засвідчує, що така дуо-область має аналогічні до локальної області властивості.

Твердження 3.6. *Для дуо-області Безу R наступні властивості є еквівалентними:*

1) у кільці R існує єдиний максимально негельфандовий правий ідеал N;

2) сума довільних двох негельфандових елементів є негельфандовим елементом.

Доведення. (1) $\Rightarrow$ (2) Припустимо, що існують негельфандові елементи a та b, сума яких $a+b$ — гельфандовий елемент. Врахувавши обмеження накладені на кільце R, отримаємо, що $a \in N$ та $b \in N$. Оскільки, N — правий ідеал, тоді $a+b \in N$, що неможливо, завдяки припущенню, що $a+b$ — гельфандовий елемент, бо правий ідеал N — максимально негельфандовий.

(2) $\Rightarrow$ (1). Очевидно, оскільки добуток будь-якого негельфандового елемента на довільний елемент кільця є негельфандовим елементом. Твердження доведене. $\square$

Нагадаємо означення PM-кільця у дуо-випадку.

Означення 3.4. *Дуо-кільце R називається PM-кільцем, якщо довільний первинний правий ідеал кільця R міститься у єдиному максимальному правому ідеалі.*

Зауважимо, що елемент a дуо-області R є гельфандовим тоді і лише тоді, коли фактор-кільце R/aR є PM-кільцем.

Розширивши доведення роботи [24], для випадку дуо-кільця, отримаємо наступний результат.

Твердження 3.7. *Нехай R є дуо-кільцем. Тоді наступні властивості еквівалентні:*

1) R є PM-кільце;

2) з рівності $a+b=1$ в R слідує, що $(1+ar)(1+bs)=0$ для деяких елементів $r,s \in R$.

У наступній теоремі відображені необхідні та достатні умови того, що елемент дуо-області Безу є гельфандовим.

Теорема 3.2. *Нехай R є дуо-областю Безу і $a \in R$. Тоді наступні властивості еквівалентні*

1) a — гельфандовий елемент;

2) якщо $aR+bR+cR=R$ тоді $a=r\cdot s$, $rR+bR=R$, $sR+bR=R$.

Доведення. Покажемо, що з умови 1) випливає умова 2). Нехай $aR+bR+cR=R$. Введемо позначення: $\overline{R}=R/aR$, $\overline{b}=b+aR$, $\overline{c}=c+aR$. Тоді $\overline{bR}+\overline{cR}=\overline{R}$.

Згідно з попереднім твердженням можемо вважати, що існують такі елементи $\overline{p},\overline{q}\in R$, що

$$(\overline{1}+\overline{b}\overline{p})(\overline{1}+\overline{c}\,\overline{q})=\overline{0}.$$

Позначимо $\alpha=1+bp$, $\beta=1+cq$. Очевидно, що $\alpha R+bR=R$ і $\beta R+cR=R$. Поклавши $\overline{\alpha}=\alpha+\overline{R}$, $\overline{\beta}=\beta+\overline{R}$, ми отримаємо

$$\overline{\alpha}\overline{\beta}=\overline{\alpha\beta}=\overline{0},$$

а тому $\alpha\beta \in aR$, тобто $\alpha\beta = at$, для деякого елемента $t \in R$.

Оскільки R є областю Безу, то існують такі елементи $r, s, x \in R$, що $\alpha R + aR = rR$, $\alpha = rx$, $a = rs$ і $xR + sR = R$. Оскільки, $xR + bR = R$, тоді $rR + bR = R$. Оскільки $\alpha\beta = at$ і R є дуо-областю, то із рівності $rx\beta = rst$ випливає, що $x\beta = st$. Оскільки, $xR + sR = R$ тоді $xu + sv = 1$ для деяких елементів $u, v \in R$. Звідси $xu\beta + sv\beta = \beta$, а тому $x\beta u' + sv\beta = \beta$, де u' є деяким елементом кільця R, який задовольняє рівність $u\beta = \beta u'$. Враховуючи те, що $x\beta = st$, отримаємо

$$ytu' + sv\beta = \beta,$$

тобто $yj = \beta$. Оскільки $\beta R + cR = R$ тоді $sR + cR = R$.

Отже, ми довели, що

$$a = r \cdot s, \ rR + bR = R, \ sR + cR = R.$$

Доведемо обернене твердження. Припустимо, що $\overline{b} + \overline{c} = \overline{1}$ у $\overline{R}$. Тоді $b + c + ax = 1$ для деякого елемента $x \in R$. Оскільки, $a = r \cdot s$, де $rR + bR = R$, $sR + cR = R$, тоді

$$rk + b\lambda = 1, \ s\omega + c\mu = 1,$$

для деяких елементів $k, \lambda, \mu, \omega \in R$. Звідси

$$\overline{(1 - b\lambda)}\ \overline{(1 - c\mu)} = \overline{0}$$

в R. Тоді, згідно з попереднім твердженням, R/aR є PM-кільцем, тобто a — гельфандовий елемент. $\square$

3.2. Редукція матриць над дуо-областями гельфандового рангу один та локально гельфандові дуо-кільця

Означення 3.5. *Нехай R — дуо-область Безу. Назвемо кільце R, кільцем гельфандового рангу один, якщо для довільних елементів $a, b \in R$, що $aR + bR = R$, існує такий елемент $r \in R$, що $a + br$ — гельфандовий елемент.*

Теорема 3.3. *Нехай R — дуо-область Безу гельфандового рангу один. Тоді R є кільцем елементарних дільників.*

Доведення. Нехай A довільна матриця вигляду

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix},$$

де $aR + bR + cR = R$. Для доведення теореми нам досить довести, що матриця A володіє канонічною діагонально редукцією. Запишемо

$$ax + by + cz = 1,$$

для деяких елементів $x, y, z \in R$. Тоді

$$bR + (ax + cz)R = R.$$

Оскільки, R є кільцем гельфандового рангу один, то, існує такий елемент $t \in R$, такий, що $b + (ax + cz)t$ є гельфандовим елементом. Маємо наступне

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ zt & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ d & c \end{pmatrix} = B$$

де $\alpha \in R$ такий елемент R, що $\alpha a = axt$.

Оскільки, $aR + bR + cR = R$ то $b + (ax + cz)t = d$.

Відповідно до обмежень накладених на елемент d, можемо вважати, що елемент d можна подати у вигляді $d = rs$, де $rR + aR = R$ і $sR + cR = R$.

Нехай елемент $p \in R$ такий, що виконується рівність

$$sp + ck = 1,$$

для деякого елемента $k \in R$. Звідси, отримаємо що $rsp + rck = r$ та $dp + cr'k = r$, де r' такий елемент, що $rc = cr'$.

Поклавши $q = r'k$, будемо мати

$$(dp + cq)R + aR = R.$$

Нехай $Rp + Rq = \delta R$, тоді $p = \delta p_1$, $q = \delta q_1$ і $\delta = up + vq$, де $Rp_1 + Rq_1 = R$. Зауважимо, що $Rp \subset Rp_1$ і $Rp + Rc = R$, $Rp_1 + Rc = R$. Оскільки, $Rp_1 + Rq_1 = R$, то

$$Rp_1 + R(p_1 d + q_1 c) = R.$$

З того, що $dp + cq = (dp_1 + cp_1)\delta$ та $(dp + cq)R + aR = R$, отримаємо

$$(dp_1 + cp_1)R + aR = R.$$

Оскільки, ми одержали, що $Rp_1 + R(dp_1 + cq_1) = R$, то

$$p_1 R + (dp_1 + cq_1)R = R,$$

а тому

$$ap_1 R + (dp_1 + cp_1)R = R.$$

Отже, матриця

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ d & c \end{pmatrix}$$

володіє канонічною діагональною редукцією. Звідси, матриця A теж володіє канонічною діагонально редукцією. Теорему доведено. □

Наслідок 3.1. *Нехай R є PM^* дуо-область Безу. Тоді R — кільце елементарних дільників.*

Доведення. Доведення теореми слідує з того факту, що PM^*-дуо-область є дуо-областю гельфандового рангу один. □

Теорема 3.4. *Дуо-область Безу R є областю з єдиним максимально негельфандовим правим ідеалом тоді і лише тоді, якщо для таких довільних елементів $a, b \in R$ таких, що $aR + bR = R$, один з елементів a або b є гельфандовим.*

Доведення. Нехай R — кільце з єдиним гельфандовим правим ідеалом та існують такі негельфандові елементи $a, b \in R$, що із рівності

$$aR + bR = R$$

випливає, що один з елементів a або b є гельфандовим.

Оскільки елементи a і b негельфандові, то $a \in R$ та $b \in R$, а, отже, $aR + bR \subset N$, що неможливо тому, що $aR + bR = R$.

Розглянемо другий випадок. Нехай R — дуо-область, та для таких довільних елементів $a, b \in R$, що $aR + bR = R$. Доведемо, що кільце R є кільцем з єдиним максимально негельфандовим правим ідеалом. Припустимо, що це не так. Нехай існують два максимально негельфандові праві ідеали $N_1, N_2 \in R$. Оскільки, R є дуо-областю Безу і N_1 і N_2 непорівнювані первинні праві ідеали, то

$$N_1 + N_2 = R.$$

Тобто,

$$n_1 + n_2 = 1,$$

де $n_1 \in N_1$, $n_2 \in N_2$. Очевидно, що

$$n_1R + n_2R = R,$$

а, звідси, через обмеження накладені на дуо-область Безу, отримуємо, що один з елементів n_1 та n_2 є гельфандовими, що неможливо, тому, що N_1 і N_2 є максимально негельфандовими правими ідеалами за припущенням. $\square$

Означення 3.6. *Дуо-область Безу назвається* локально гельфандовою*, якщо вона містить єдиний максимально негельфандовий правий ідеал.*

Приклад 3.1. Прикладом локально гельфандового кільця є приклад Хенріксона, тобто

$$R = \{z_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n | z_0 \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{Q}\}.$$

Радикал Джекобсона — це єдиний максимально негельфандовий правий ідеал цього кільця.

Теорема 3.5. *Дуо-область Безу R є локально гельфандовою тоді і лише тоді, коли для довільного елемента $a \in R$ або a або $1 - a$ є гельфандовим елементом.*

Доведення. Доведемо необхідність. Нехай R є локально гельфандовою областю. Розглянемо правий ідеал N — єдиний максимально негельфандовий. Візьмемо довільний елемент $a \in N$. Очевидно, що

$$(1 - a) \notin N.$$

Отже, $1 - a$ є гельфандовим елементом.

Розглянемо інший варіант, тобто, $a \notin N$. Тоді елемент a є гельфандовим. Необхідність доведено.

Доведемо достатність. Припустимо, що існує два максимально негельфандові праві ідеали N_1 та N_2. Очевидно, що

$$N_1 + N_2 = R.$$

Звідси, маємо, що

$$n_1 + n_2 = 1,$$

де $n_1 \in N_1$, $n_2 \in N_2$. Тоді елемент n_1 або $1 - n_1$ є гельфандовим. Отримали протиріччя. Теорему доведено. $\square$

Наслідками цієї теореми є такі результати.

Теорема 3.6. *Дуо-область Безу R, в якій кожен ненульовий первинний правий ідеал міститься у єдиному максимальному правому ідеалі, є локально гельфандовим кільцем.*

Теорема 3.7. *Довільна локально гельфандова дуо-область Безу R є кільцем елеметарних дільників.*

Доведення. Для доведення теореми, в силу теореми 2, досить довести, що локально гельфандова дуо-область Безу є кільцем гельфандового рангу один.

Нехай $aR = bR = R$. Якщо a — гельфандовий елемент, тоді $a + b \cdot 0$ є шукане представлення. Якщо ж a не є гельфандовим, тоді з очевидної рівності

$$aR + (a + b)R = R$$

і теореми 3 слідує, що $a + b \cdot 1$ — гельфандовий елемент, це означає, що R є кільцем гельфандового рангу один. Теорему доведено.

$\square$

ВИСНОВКИ:

Даний розділ присвячений теорії гельфандових елементів та діагоналізації матриць над дуо-областями Безу гельфандового рангу один.

Основними результатами цього розділу є:

1) введено означення гельфандового та негельфандового елемента, показано мультиплікативну замкненість та насиченість множини гельфандових елементів дуо-області Безу;

2) введено в розгляд максимально негельфандові ідеали, доведено їх існування первинність;

3) доведено критерій того, що скінченний гомоморфний образ дуо-області Безу є кільцем Гельфанда;

4) визначено поняття гельфандового рангу один для дуо-областей Безу, та показано, що такі області є кільцями елементарних дільників;

5) введено та охарактеризовано локально гельфандові дуо-області Безу, показано, що такі кільця є кільцями елементарних дільників.

Результати цього розділу відображені у роботах: [17, 5].

РОЗДІЛ 4

Канонічна діагональна редукція оборотними теплецевими матрицями

Четвертий розділ присвячено канонічній діагональній редукції матриць другого порядку над кільцями квадратного стабільного рангу один.

У першому підрозділі вводиться поняття кільця Тепліца, як підкласу кілець Ерміта, та встановлюються необхідні та достатні умови того, що кільце Ерміта є кільцем Тепліца. Доведено, що унімодулярний рядок довжини два є доповнювальним до оборотної матриці Тепліца над кільцями квадратного стабільного рангу один. Також показано, можливість канонічної діагональної редукції матриць над кільцями елементарних дільників квадратного стабільного рангу один за допомогою оборотних матриць Тепліца, та розклад оборотних матриць другого порядку у добуток цих матриць.

У другому підрозділі вводиться поняття кільця одиничного квадратного стабільного рангу один, подібно до кілець одиничного стабільного рангу один. Доведено, що над кільцями Ерміта одиничного квадратного стабільного рангу один, довільна матриця другого порядку, приводиться до канонічно діагонального вигляду оборотними матрицями Тепліца, і таке кільце є кільцем елементарних дільників.

Впродовж цього розділу під кільцем будемо розуміти асоціативне комутативне кільце R з $1 \neq 0$.

4.1. Оборотні матриці Тепліца та кільця скінченного стабільного рангу

Розпочнемо підрозділ, нагадавши означення кільця квадратного стабільного рангу один та матриці Тепліца.

Означення 4.1. *Кільце R є* кільцем квадратного стабільного рангу один *(у позначеннях $ssr(R) = 1$), якщо для довільних $a, b \in R$ з того, що $aR + bR = R$ випливає, що $a^2 + bx$ є оборотним елементом кільця R для деякого елемента x.*

Означення 4.2. *Розглянемо матрицю A. Матриця другого порядку A над комутативними кільцем R називається* матрицею Тепліца, *якщо вона має вигляд*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix},$$

де $a, b, c \in R$.

Зауважимо, якщо A — оборотна матриця Тепліца, то A^{-1} — теж матриця Тепліца.

Аналогічно до означення кільця Ерміта визначимо кільця Тепліца, обмежившись у означенні оборотними матрицями Тепліца.

Означення 4.3. *Комутативне кільце R назвемо* кільцем Тепліца, *якщо для будь-яких $a, b \in R$ існує оборотна матриця Тепліца T така,* *що*

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} d & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки кільце Тепліца є частковим випадком кільця Ерміта, а кільця Ерміта є кільцями Безу, то кільця Тепліца також є кільцями Безу.

Наступні два твердження доводять той факт, що над кільцем квадратного стабільного рангу один довільний унімодулярний рядок довжини два доповнюється до оборотної матриці Тепліца.

Твердження 4.1. *Нехай R є комутативним кільцем квадратного стабільного рангу один та елементи $a, b \in R$ є такими, що $aR + bR = R$. Тоді існує оборотна матриця Тепліца T така, що*

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Оскільки R є кільцем квадратного стабільного рангу один, тоді із рівності $aR + bR = R$ випливає, що $a^2 + bt = u$, де u — оборотний елемент. Введемо позначення

$$S = \begin{pmatrix} a & -b \\ t & a \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} u^{-1} & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix}$$

і виконаємо наступне:

$$(a \ \ b = \begin{pmatrix} a & -b \\ t & a \end{pmatrix} = (u \ \ a)$$

$$(u \ \ a) \begin{pmatrix} u^{-1} & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix} = (1 \ \ 0).$$

Таким чином для матриці $T = SK$ виконується рівність

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} SK = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ t & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{-1} & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au & -bu \\ bu & au \end{pmatrix}$$

тобто матриця T є матрицею Тепліца, що й потрібно було показати. □

Твердження 4.2. *Над комутативним кільцем R квадратного стабільного рангу один будь-який унімодулярний рядок довжини 2 можна доповнити до оборотної матриці Тепліца.*

Доведення. Якщо $aR + bR = R$, тоді рядок

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$$

є унімодулярним. Із Твердження 4.1 випливає існування оборотної матриці Тепліца T для якої

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки обернена матриця до матриці Тепліца другого порядку теж матриця Тепліца, то позначивши

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} t & t_{12} \\ t_{21} & t \end{pmatrix},$$

і використавши рівність $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}$, отримаємо, що $a = t$, $b = t_{12}$. Таким чином

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ t_{21} & a \end{pmatrix},$$

що і потрібно було довести. □

В наступній теоремі ми доведемо необхідну та достатню умову того, що кільце Ерміта є кільцем Тепліца.

Теорема 4.1. *Нехай R є комутативним кільцем Ерміта. Тоді R — кільце Тепліца тоді і лише тоді, коли це кільце квадратного стабільного рангу один.*

Доведення. Припустимо, що $ssr(R) = 1$. Нехай $a, b \in R$. Оскільки R є кільцем Ерміта, то існують елементи $d, a_0, b_0 \in R$ такі, що

$$aR + bR = dR, \quad a = a_0 d, \quad b = b_0 d, \quad a_0 R + b_0 R = R,$$

. згідно з Теоремою 000. Але з Твердження 4.1 випливає, що

$$(a_0 \ \ b_0) = \begin{pmatrix} a_0 & -b_0 \\ t & a_0 \end{pmatrix} = (1 \ \ 0)$$

для деякого $t \in R$. Звідси отримаємо, що $a_0^2 + b_0 t = u$ є оборотним елементом. Домножуючи останню рівність на d бачимо, що $aa_0 + bt = du$, а значить

$$(a \ \ b) = \begin{pmatrix} a_0 & -b_0 \\ t & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{-1} & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix} = (d \ \ 0).$$

Тобто R — кільце Тепліца.

Навпаки, припустимо, що R є кільцем Тепліца, та $a, b \in R$ є такими, що $aR + bR = R$. Із означення кільця Тепліца випливає існування матриці

$$T = \begin{pmatrix} x & -z \\ y & x \end{pmatrix} \in GL_2(R),$$

що $(a \ \ b)T = (1 \ \ 0)$. Оскільки обернена матриця T^{-1} є також матрицею Тепліца, та

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} w^{-1}x & w^{-1}z \\ -w^{-1}y & w^{-1}x \end{pmatrix}$$

де $w = x^2 + zy \in U(R)$, то робимо висновок, що $a = w^{-1}x,\ b = w^{-1}z$. Звідси $x = wa,\ z = wb,\ w = a^2w^2 + byw$, та домножуючи останню рівність на $(w^{-1})^2$ бачимо, що

$$a^2 + byw^{-1} = w^{-1} \in U(R),$$

тобто, $ssr(R) = 1$. Теорему доведено. □

Із означення кільця елементарних дільників випливає, що довільна матриця другого порядку приводиться до канонічного діагонального вигляду шляхом домноження зліва та справа на деякі оборотні матриці. Наступна теорема дає підстави вважати, що ці оборотні матриці є матрицями Тепліца, у випадку кільця квадратного стабільного рангу один.

Теорема 4.2. *Нехай R є комутативним кільцем елементарних дільників квадратного стабільного рангу один. Тоді довільна матриця другого порядку приводиться оборотними матрицями Тепліца до канонічного діагонального вигляду.*

Доведення. Насамперед зауважимо, що відповідно до Твердження 4.1, для доведення нашого результату достатньо обмежитися матрицями вигляду

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

де $aR + bR + cR = R$. Оскільки R є кільцем елементарних дільників, тоді існують такі елементи $p, q \in R$, що $paR + (pb + qc)R = R$, тобто

$$par + (pb + qc)s = 1$$

для деяких елементів $r, s \in R$. Зауважимо, що із останньої рівності випливає

$$pR + qR = R, \quad rR + sR = R.$$

Більше того, рівність $par + (pb + qc)s = 1$ можна матрично записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = 1$$

Оскільки $pR + qR = R$, та $rR + sR = R$, то використовуючи Твердження 4.2, ми можемо знайти оборотні матриці Тепліца вигляду

$$P_1 = \begin{pmatrix} p & q \\ * & * \end{pmatrix}, Q_1 = \begin{pmatrix} r & * \\ s & * \end{pmatrix}.$$

Із вказаної вище матричної рівності отримуємо

$$P_1 A Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix} = A_1,$$

для деяких $x, y, x \in R$. Шляхом трансквенції рядків і стовпців матриця A_1 приводиться до канонічного діагонального вигляду. Оскільки кожній такого роду трансквенції відповідає домноження матриці A_1 справа та зліва на оборотню матрицю Тепліца вигляду

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -y & 1 \end{pmatrix}, Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

то робимо висновок

$$P_2 P_1 A Q_1 Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ac \end{pmatrix},$$

де P_1, P_2, Q_1, Q_2 – оборотні матриці Тепліца. Теорему доведено. □

Теорема 4.3. *Нехай R — комутативне кільце елементарних дільників квадратного стабільного рангу один. Тоді будь-яка оборотна матриця другого порядку є добутком оборотних матриць Тепліца.*

Доведення. Нехай A - оборотна матриця другого порядку над кільцем R. Згідно з Теоремою 4.2, враховуючи, що A — оборотна, можемо знайти оборотні матриці Тепліца P і Q другого порядку, що

$$PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко бачити, що тоді $A = P^{-1}Q^{-1}$, а оскільки обернена матриця до матриці Тепліца є теж матрицею Тепліца, ми отримуємо шуканий результат. Теорему доведено. □

Застосовуючи Теорему 4.1 до попередніх двох теорем, ми отримаємо такий наслідок.

Наслідок 4.1. *Нехай R — комутативне кільце Тепліца елементарних дільників. Тоді*

1) *довільна матриця другого порядку приводиться оборотними матрицями Тепліца до канонічного діагонального вигляду;*

2) *будь-яка оборотна матриця другого порядку є добутком оборотних матриць Тепліца.*

4.2. Одиничний квадратний стабільний ранг один та кільця елементарних дільників

В означенні кільця стабільного рангу один елемент t для заданих взаємнопростих елементів a, b, із властивістю $aa^2 + bt \in U(R)$, обирається серед усіх елементів кільця. Якщо обмежитись у цьому виборі ідемпотентами чи оборотними елементами, то отримаємо класи кілець ідемпотентного та одиничного стабільного рангу один. Перший серед цих класів у комутативному випадку співпадає із класом чистих кілець та кілець із властивістю заміни, а кільця другого класу володіють тією властивістю, що довільний елемент кільця зображується у вигляді суми двох оборотних елементів. У цьому розділі ми розглянемо специфікацію кільця квадраного стабільного рангу один, а саме це будуть кільця одиничного квадратного стабільного рангу один.

Означення 4.4. *Кільце R називається* кільцем одиничного квадратного стабільного рангу один*, якщо з умови $aR+bR = R$ випливає, що існує оборотний елемент t такий, що $a^2 + bt$ — оборотний елемент кільця R.*

Наступна теорема дозволяє розширити результати Теореми 4.2 на випадок кільця Ерміта, поклавши обмеження на квадратний стабільний ранг.

Теорема 4.4. *Нехай R — комутативне кільце Ерміта одиничного квадратного стабільного рангу один. Тоді R є кільцем елементарних дільників та будь-яка матриця другого порядку над R діагоналізується оборотними матрицями Тепліца.*

Доведення. Згідно з обмежень накладених на R маємо, для будь-яких елементів $a, b \in R$, де $aR + bR = dR$, і $a = da_0$, $b = db_0$, отримаємо, що $a_0R + b_0R = R$. Оскільки кільце R є кільцем одиничного квадратного стабільного рангу один, то $a_0^2 + b_0t = u$, де u, t є деякими оборотними елементами. Домножуючи останню рівність на найбільший спільний дільник d отримаємо, що $aa_0 + bt = ud$.

Доведемо, що R — кільце елементарних дільників. Для цього досить довести, що довільна матриця

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

де $aR + bR + cR = R$, володіє канонічно діагональною редукцією.

Оскільки $aR+bR = dR$, то, в силу доведеного вище, ми отримаємо

$$aa_0 + bt = ud, \ a = da_0, \ b = db_0, \ a_0R + b_R = R$$

та u, t — оборотні елементи. Тоді

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & -b_0 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} du & 0 \\ ct & ca_0 \end{pmatrix}$$

Оскільки $aR + bR = dR$ і $aR + bR + cR = R$, то $dR + cR = R$. В силу того, що t — оборотний елемент, можемо вважати, що $duR+ctR = R$. Із останньої рівності випливає, що матриця A володіє канонічною діагональною редукцію. Теорему доведено. □

Теорема 4.5. *Нехай R — комутативне кільце Безу стабільного рангу один. Тоді:*

1) *довільний унімодулярний рядок (стовпець) довжини 2 над R доповнюється до оборотної матриці Тепліца;*

2) *довільна матриця другого порядку над R, шляхом домноження справа та зліва на оборотні матриці Тепліца приводиться до канонічного діагонального вигляду;*

3) *довільна оборотна матриця другого порядку над кільцем R розкладається у добуток оборотних матриць Тепліца.*

Доведення. Оскільки кільце стабільного рангу один є кільцем квадратного стабільного рангу один, а кільце Безу стабільного рангу один є кільцем елементарних дільників за Теоремою 2.3, то в силу попередніх результатів, ми отримаємо доведення даного результату. Теорему доведено. □

ВИСНОВКИ:

Даний розділ присвячений канонічній діагоналізації матриць другого порядку над комутативними кільцями квадратного стабільного рангу один. Доведено, що над кільцем квадратного стабільного рангу один кожен унімодулярний рядок довжини два доповнюється до оборотної телецевої матриці. Введено означення кільця Тепліца, та наведено критерій того, що комутативне кільце Ерміта є кільцем Тепліца у термінах стабільного рангу. Як наслідок цих результатів, доводиться, що довільна матриця другого порядку над кільцем елементарних дільників приводиться до канонічного діагонального вигляду за допомогою домноження зліва та справа на оборотні матриці Тепліца, та більше того — будь-яка оборотня матриця другого порядку є добутком матриць Тепліца.

Розділ завершується введенням поняття одиничного квадратного стабільного рангу один, та доведенням того, що кільце Ерміта одиничного квадратного стабільного рангу один є кільцем елементарних дільників та довільна матриця другого порядку приводиться до канонічного діагонального вигляду шляхом домноження зліва та справа на оборотні матриці Тепліца.

Основними результатами цього розділу є:

1) введено поняття кільця Тепліца, та доведено, що кільце Ерміта є кільцем Тепліца тоді і лише тоді, коли це кільце квадратного стабіль-

ного рангу один;

2) довільний унімодулярний рядок довжини два над кільцем квадратного стабільного рангу один доповнюється до оборотної матриці Тепліца;

3) над кільцем елементарних дільників квадратного стабільного рангу один довільна матриця другого порядку приводиться до канонічного діагонального вигляду домноженням зліва та справа на оборотні матриці Тепліца;

4) будь-яка оборотна матриця другого порядку є добутком матриць Тепліца у випадку кільця елементарних дільників квадратного стабільного рангу один;

5) введено поняття кільця одиничного квадратного стабільного рангу один та показано, що кільце Ерміта одиничного квадратного стабільного рангу один є кільце елементарних дільників будь-яка матриця другого порядку діагоналізується оборотними матрицями Тепліца.

Результати цього розділу відображені у роботах: [3, 6].

РОЗДІЛ 5

Комутативні області Безу, скінченні гомоморфні образи яких є напівпотужними кільцями

У цьому розділі встановлено умови, коли скінченний гомоморфний образ комутативної області Безу є напівпотужними кільцями. Започатковано та розвинуто концепцію напівпотужних елементів. Показано, що напівпотужність елемента є рівносильним тому, що скінченний гомоморфний образ визначений цим елементом є напівпотужним кільцем. Досліджено зв'язок між напівпотужними елементами та їх адекватністю до елементів із визначеного ними радикалу.

Під кільцем R у цьому розділі будемо розуміти асоціативне комутативне кільце з $1 \neq 0$.

5.1. Напівпотужні елементи комутативних областей Безу

Оскільки центральну роль у поточному підрозділі відіграють напівпотужні кільця нагадаємо їх означення.

Означення 5.1. *Кільце R називають напівпотужним, якщо кожен головний ідеал, що не міститься у $J(R)$, містить ненульовий ідемпотент.*

Нижче буде охарактеризована структура елементів $a \neq 0$ комутативної області Безу R, що R/aR є напівпотужний елемент. У наступному означенні визначимо такі елементи як напівпотужні.

Означення 5.2. *Нехай R комутативна область Безу. Скажемо, що елемент $a \in R \setminus \{0\}$ є* напівпотужним, *якщо для будь-якого $b \in R$ знайдуться елементи $r, s \in R$:*

$$a = rs, \quad rR + bR = R, \quad rR + sR = R.$$

Теорема 5.1. *Нехай R комутативна область Безу. Тоді ненульовий елемент a є напівпотужним тоді і лише тоді, коли R/aR є напівпотужним кільцем.*

Доведення. Для початку припустимо, що a є напівпотужним елементом, тобто для будь-якого $b \in R$ справедливі рівності

$$a = rs, \quad rR + bR = R, \quad rR + sR = R$$

для деяких $r, s \in R$. Із рівності $rR + sR = R$ випливає, що

$$ru + sv = 1$$

для деяких елементів $u, v \in R$. Переходячи до образів у фактор-кільці отримуємо:

$$\overline{r}^2\overline{u} = \overline{r}, \quad \overline{s}^2\overline{v} = \overline{s}$$

для $\overline{r} = r + aR$ і $\overline{s} = s + aR$. Очевидно, що

$$\overline{ru} = \overline{e} = \overline{e}^2, \ \overline{1} - \overline{e} = \overline{sv}.$$

Із рівності $rR + bR = R$ випливає існування елементів $x, y \in R$ таких, що $rx + by = 1$. Тому,

$$1 - ru = sv = sv(rx + by) = b(svy) + avx,$$

а звідси $\overline{1} - \overline{e} \in \overline{bR}$, де $\overline{b} = b + aR$. Якщо $b \notin J(aR)$, тоді $\overline{1} - \overline{e}$ є відповідним ідемпотентом. У протилежному випадку, для будь-якого максимального ідеалу M, що містить елемент a, отримуємо, що $b \in M$, а тоді r є оборотним елементом, і навпаки. Отже, $\overline{R}$ є напівпотужним кільцем.

Припустимо, що $\overline{R}$ є напівпотужним кільцем. Розглянемо елемент $\overline{b} = b + aR$, та ідемпотент $\overline{e}^2 = \overline{e}$ такий, що

$$\overline{e} \in \overline{bR}.$$

Оскільки $\overline{e}^2 = \overline{e}$, то $e(1-e) = a\alpha$ для деякого $\alpha \in R$. Більше того, із того, що $\overline{e} \in \overline{b}\ \overline{R}$ випливає рівність

$$e - bt = as$$

для деяких елементів $t, s \in R$. Нехай $eR + aR = dR$. Тоді

$$e = de_0, \quad a = da_0, \quad a_0R + e_0R = R,$$

де $e_0, a_0 \in R$. Із рівності $e(1-e) = a\alpha$ отримаємо, що

$$e_0(1-e) = a_0\alpha,$$

використовуючи те, що R областю. Оскільки $a_0R + e_0R = R$, то a_0 є дільником $1 - e$. Звідси

$$a_0R + eR = R,$$

а тому існують елементи $p, q \in R$ такі, що $a_0p + eq = 1$. Оскільки $e = as + bt$, то

$$1 = a_0p + eq = a_0(p + dsq) + btq$$

і тому $a_0R + bR = R$. Поклавши $r = a_0$ та $s = d$ отримаємо шуканий розклад елемента a стосовно елемента b. Теорему доведено. $\square$

Оскільки будь-яке кільце з властивістю заміни є напівпотужним кільцем, тоді довільний роздільний елемент є напівпотужним елементом.

Наступний результат встановлює зв'язок адекватних елементів із поняттям напівпотуджного кільця.

Теорема 5.2. *Нехай R є комутативною областю Безу. Якщо елемент $a \in R$ є напівпотужним, тоді для будь-якого елемента $b \notin J(aR)$ існує деякий елемент $u \in R$ такий, що ${}_aA_{bu}$.*

Доведення. Нехай $\overline{R} = R/aR$ є напівпотужним кільцем, і $b \notin J(aR)$. Тоді існує ненульовий ідемпотент $\overline{e}$ такий, що

$$\overline{e} \in \overline{bR}.$$

Отже, існують деякі елементи $u, t \in R$ такі, що

$$e - bu = at.$$

Більше того, оскільки $\overline{e}^2 = \overline{e}$ то

$$1 - e = as$$

для деякого елемента $s \in R$. Нехай $eR + aR = dR$, причому $e = de_0$, $a = da_0$ і $a_0R + e_0R = R$. Тоді

$$e_0(1 - e) = a_0 s$$

і $e + a_0 j = 1$ для деякого елемента $j \in R$. Поклавши $r = a_0$ та $s = d$ отримаємо розклад

$$a = rs, \quad rR + eR = R, \quad s'R + eR \neq R$$

для довільного необоротнього дільника s' елемента s. Таким чином, ${}_aA_e$ і, враховуючи рівність $bu = e + at$, робимо висновок ${}_aA_{bu}$. Теорему доведено. □

Як наслідок з попередньої теореми, отримаємо наступний результат.

Теорема 5.3. *Нехай R є комутативною областю Безу і $a \in R \setminus \{0\}$. Фактор-кільце R/aR є напівпотужним тоді і лише тоді, коли для будь-якого елемента $b \notin J(aR)$ існує деякий елемент $u \in R$ такий, що ${}_aA_{bu}$ і $bu \notin aR$.*

ВИСНОВКИ:

У цьому розділі досліджено випадок, коли скінченні гомоморфні образи комутативної області Безу є напівпотужними кільцями. Введено в розгляд поняття напівпотужного елемента та показано як ці елементи характеризуються в термінах скінченних гомоморфних образів.

Головними результатами цього розділу є:

1) введено поняття напівпотужного елемента, та показано, що скінченний гомоморфний образ R/aR комутативної області Безу є напівпотужним кільцем тоді і лише тоді, коли a є напівпотужним елементом;

2) встановлено зв'язок напівпотужних елементів із роздільними та адекватними елементами;

3) доведено, що напівпотужний елемент комутативної області Безу в термінах адекватності до елементів з радикалу, визначеного цим елементом.

Результати цього розділу відображені у роботах: [14].

Висновки

Дисертаційна робота присвячена дослідженню стабільного рангу та його узагальнень у кільцях Безу. У дисертації отримано такі нові результати:

1) Введено поняття акуратного рангу один для дуо-областей Безу;

2) Показано, що дистрибутивна область Безу є областю елементарних дільників тоді і лише тоді, коли вона є дуо-областю акуратного рангу один;

3) Розглянуто максимально негельфандові ідеали, встановлено їх властивості, вивчено локально негельфандові дуо-області Безу і також встановлено їх зв'язок із кільцями елементарних дільників;

4) Показано, що над комутативними кільцями елементарних дільників квадратного стабільного рангу один, довільна матриця другого порядку, приводиться до канонічно діагонального вигляду оборотними матрицями Тепліца;

5) Показано, що область Безу стабільного рангу один з умовою Дубровіна і умовою Z є кільцем елементарних дільників;

6) Встановлено умови, коли скінченно гомоморфні образи комутативної області Безу є напівпотужними кільцями.

Бібліографія

[1] Білявська С. І. *Зв'язок адекватних кілець з чистими кільцями*/ С. І. Білявська, Б. В. Забавський // Прикладні проблеми механіки і математики — 2012. -– № 8. — С.28–32.

[2] Білявська С. І. *Стабільний ранг адекватного кільця* / С. І. Білявська, Б. В. Забавський // Математичні Студії.— 2008.— Т. 33, №2.— С. 212–214.

[3] Бохонко В. В. Приведення матриць до канонічного діагонального вигляду оборотними теплецевими матрицями / В. В. Бохонко, Б. В. Забавський // Вісник ДонНУ. Сер. А: Природничі науки. - 2015. - 1-2. - С.7-11.

[4] Бохонко В. В. Редукція матриць над областю Безу стабільного рангу 1 з умовою Дубровіна та умовою Z / В. В. Бохонко // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. — 2015. — 80. — С.5–9.

[5] Бохонко В. В. Максимально негельфандові ідеали дуо-області Безу / В. В. Бохонко, О. В. Пігура // Мат. Студ. - 2016. - 46,№1. - С.13-19.

[6] Бохонко В. В. Приведення матриць до канонічного вигляду оборотніми теплецевими матрицями / В. В. Бохонко, Б. В. Забавський // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу". 24-27 лютого 2016 року. Ворохта. С. 58.

[7] Джекобсон Н. *Теория колец* / Н. Джекобсон // М.: Издательство иностранной литературы. — 1947. – 287 с.

[8] Дубровин Н. И. О *кольцах с элементарными делителями* / Н. И. Дубровин // Известия вузов. Математика. — 1986. — №11. — С.14–20.

[9] Степанов А. В. *Идеальный стабильный ранг колец* / А. В. Степанов // Вестн. ЛГУ. —- 1986. —- 3. —- С. 46–51.

[10] Туганбаев А. А. *Теория колец. Арифметические модули и кольца* / А. А. Туганбаев // – М.: МУНМО, — 2009. – 472 с.

[11] Ara P. *Diagonalization of matrices over regular rings* / P. Ara, K. Goodearl, K. C. O'Meara, E. Pardo // Linear algebra and Appl. — 1987. — V. 265. — P. 147–163.

[12] Bass H. *K–theory and stable algebra* / H. Bass // Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. — 1964. — 22. — P.485–544.

[13] Brewer J. W. *Lattice - ordered groups and a conjecture for adequate domains* / J. W. Brewer, P. F. Conrad, P. R. Montgomery // Proc. Amer. Math. Soc. — 1974. — V. 43, №1. — P. 31–35.

[14] Bokhonko V. V. Bezout domains whose finite homomorphic images are semipotent ring / V. V. Bokhonko // Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. - 2016. - 81. - P.58-60.

[15] Bokhonko V. A criterion of elementary divisor domain for distributive domains / V. Bokhonko, B. Zabavsky // Algebra and Discrete Mathematics, - 2017. - 23,№1. - P.1-6.

[16] Bokhonko V. V. A criterion of elementary divisor domain for distributive domains // X International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd, August 20-27, 2015. Odessa. P.19.

[17] Bokhonko V. V., Pihura O. V. The maximal non-Gelfand ideals of Bezout duo-domains / V. V. Bokhonko, O. V. Pihura // International mathematics conference "Group and Actions: Geometry and Dynamics"dedicated to the memory of professor Vitaly Sushchanskyy. December 19-22, 2016. Kyiv. P.14.

[18] Camilo V. P. *Exchange rings, units and idempotents* / V. P. Camiloo, H. P. Yu // Comm. Algebra — 1994.— 22.— P. 4737 – 4749.

[19] Camilo V. P. *Stable range one for rings with many idempotents* / V. P. Camiloo, H. P. Yu // Trans. Amer. Math. Soc. — 1995.— 34, 8.— P. 3141 – 3149.

J. Appl. Algebra Discrete Strut. — 2003.— 1.— №3.— P. 189–196.

[20] Chen H. *Rings with many idempotents* / H. Chen // Int. J. Math. — 1999.— 22.— P. 547–558.

[21] Chen H. *Rings related stable range conditions* / H. Chen // Series in Algebra 11, World Scientific, Hackensack, NJ. — 2011. — 680 pp.

[22] Chen H. *Unit 1-stable range for ideals* / H. Chen, M. Chen // Int. J. Math. and Math. Scien.— 2004.— 46.— P. 2477–2482.

[23] Cohn P. M. *Right principal Bezout domains* / P. M. Cohn // J. London Math. Soc. — 1987.— 35.— №2— P. 251–262.

[24] Contessa M. *On PM-rings* / M. Contessa // Commun. Algebra — 1982. — 10. — P. 93–108 .

[25] Estes D. *Stable range in commutative rings* / D. Estes, J. Ohm // J.Algebra. — 1967. — 7. — P. 343–362.

Comm. Ring Theory Proc. // Int. conf. — 1996. —185. — P. 293–302.

[26] Gillman L. *Some remarks about elementary divisor rings* / L. Gillman, M. Henriksen // Trans. Amer. Math. Soc. — 1956. — 82. — P. 362–365.

[27] Goodearl K. R. *Von Neumann regular rings* / K. R. Goodearl // Pitman, London – San Francisco – Melbourne — 1979. — 369 pp.

[28] Goodearl K. R. *Power-cancellation of groups and modules* / K. R. Goodearl // Pacific J. Math. — 1976. — 64, № 2. — P. 387–413.

D. Handelman // Proc. Amer. Soc. — 1979. — V. 76, №2. — P. 241–249.

[29] Helmer O. *The elementary divisor theorem for certain rings without chain conditions* / O. Helmer // Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – 49, №2. — P. 225–236.

[30] Henriksen M. *On a class of regular rings that are elementary divisor rings* / M. Henriksen/ M. Henriksen // Arch. Math. — 1973. — 24, №2.— P. 133–141.

[31] Houston E., Taylor J. *Arithmetic properties in pulbacks* / E. Houston, J. Taylor // J. Algebra — 2007. — 310. — P. 235– 60.

[32] Kaplansky I. *Elementary divisor ring and modules* / I. Kaplansky // Trans. Amer. Math. Soc. — 1949. — 66. — P. 464–491.

[33] Kaplansky I. *Commutative rings* / I. Kaplansky // Chicago and London: The University of Chicago Press — 1974. — 182 pp.

[34] Khurana D. *Rings of square stable range one* / D. Khurana, T. Y. Lam, Zhou Wang // J. Algebra. —- 2011. —- 338. — P. 122–143.

[35] Kuznitska B. M. *Avoidable rings* / B. M. Kuznitska, B. V. Zabavsky // Mat. Stud. —- 2015. —- 43. — P. 153–155.

[36] Lam T. Y. Quasi-duo rings and stable range descent / Lam T. Y., Dugas A. S. // J.Pure Appl.Alg. — 2005. — 195. — P.243–259.

[37] Larsen M. *Elementary divisor rings and finitely presented modules* / M. Larsen, W. Lewis, T. Shores // Trans. Amer. Math. Soc. — 1974. — 187. — P. 231–248.

[38] McGovern W. Wm. *Bezout rings with almost stable range 1 are elementary divisor rings* / W. Wm. McGovern // J. Pure and Appl. Algebra. — 2007.— 212.— P.340–348.

[39] McGovern W. Wm. *Neat ring* / W. Wm. McGovern // J. of Pure and Appl. Algebra — 2006. — 205. — P. 243–265.

[40] Menal P. *K_1 of von Neumann regular rings* / P. Menal, J. Moncasi // J. Pure Appl. Alg.— 1984.— 33.— P. 295–312.

[41] Menal P. *On regular rings with stable range 2* / P. Menal, J. Moncasi // J. Pure Appl. Algebra — 1982. — 24. — P. 25–40.

[42] Nicholson W. K. *Lifting idempotents and exchange rings* / W. K. Nicholson // Trans. Amer. Math. Soc. — 1977. — 229. — P. 269–278.

[43] Nicholson W. K. *I-rings* //Transactions of the American Mathematical Society. —- 1975. —- 207. — P. 361–373.

[44] Roitman M. *The Kaplansky condition and rings of almost stable range 1* / M. Roitman // Trans. Amer. Math. Soc. — 2013. — 141. P. 3013 – 3019.

[45] Shchedryk V.P. *Commutative domains of elementary divisors and some properties of their elements* / V. P. Shchedryk // Ukr. Math. J. — 2012 — 64, №1. — P. 126–139.

[46] Shores T. Modules over semihereditary Bezout rings / Shores T. // Proc. Amer. Math. Soc. — 1974. — 46. — 2. — P.211–213.

[47] Sun S. H. *Noncommutative rings in which every prime ideals are contained in a unique maximal ideal* / S. H. Sun // Pure Appl. Algebra —- 1991. — 76. — P. 179–192.

[48] Tuganbaev A. A. *Rings of elementary divisors and distributive rings* // Russian. Math. Serveys. — 1991. — 46, N6. — P. 219 – 220.

[49] Van der Walt *Weakly prime one sided ideals* / Van der Walt // J. Austral Math. Soc.— 1985.— 38. — P. 84–91.

[50] Vaserstein L. N. *The stable rank of ring and dimentionality of topological spaces* / L. N. Vaserstein // Funct. Anal.Appl.— 1971. — 5. — P. 102–110.

[51] Vaserstein L. N. *Bass' first stable range condition* / L. N. Vaserstein // J. Pure and Appl. Alg. —1984. — 34. — P. 319–330.

[52] Vaserstein L. N. *An answer to a question of M.Newmann on matrix completion* / L. N. Vaserstein // Proc. Amer. Math. Soc.— 1997.— 2. — P. 189–196.

[53] Wang Z. *Rings of idempotent stable range one* / Z. Wang, J. Chen, D. Khurana, T. Y. Lam // Algebras and representation theory. —2012.— 15, №1. — P. 195–200.

[54] Warfield R. B. *Stable equivalence of matrices and resolutions* / R. B. Warfield // Comm. Algebra. —1978.— 17. — P. 1811–1828.

[55] Wedderburn J. H. M. *On matrices whose coefficients are functions of single variable* / J. H. M. Wedderburn // Trans. Amer. Math. Soc. — 1915. — 16. — №2. — P.328–332.

[56] Zabavsky B.V., Komarnytskii M. Y. *Distributive elementary divisor domain* // Ukr. Mat. J. — 1990. — 42, N7, P. 1000–1004.

[57] Zabavsky B. V. *A commutative Bezout PM^*-domain is an elementary divisor ring* / B. V. Zabavsky, A. I. Gatalevych // Algebra and Discrete Math. — 2015. — 19, №2. — P. 295–301.

[58] Zabavsky B. V. *Diagonal reduction of matrices over finite stable range rings* / B. V. Zabavsky // Mat. Stud. — 2014. — 41. — P. 101–108.

[59] Zabavsky B. V. *Diagonal reduction of matrices over rings* / B. V. Zabavsky // Mathematical Studies, Monograph Series, volume XVI, VNTL Publishers, 2012, Lviv, 251 pp.

[60] Zabavsky B. V. *Questions related to the K-theoretical aspect of Bezout rings with various stable range conditions* / B. V. Zabavsky // Math. Stud. — 2014. — 42, № 1. — P. 89–109.

[61] Zabavsky B. V. *Simple elementary divisor rings* / B. V. Zabavsky // Mat. Stud. — 2004. — 22, 2 — P. 129–133.

[62] Zabavsky B.V. *Diagonal reduction of matrices over rings* // Mathematical Studies, Monograph Series, volume XVI, VNTL Publishers, 2012. Lviv. 251 pp.

[63] Пігура О. В. *Максимально негельфандові ідеали комутативної області Безу* // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2015. – Вип. 13. – С. 47–52