НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ШАРИН Сергій Володимирович

УДК 517.98

Алгебри поліноміальних розподілів на нескінченновимірних просторах та їх застосування до числення операторів

01.01.01 – математичний аналіз

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ — 2017

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі математичного і функціонального аналізу в ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника" Міністерства освіти і науки України.

Науковий консультант:

доктор фізико-математичних наук, професор
ЛОПУШАНСЬКИЙ Олег Васильович,
Жешувський університет, Польща,
декан математично-природничого факультету.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник
КАЧАНОВСЬКИЙ Микола Олександрович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник відділу функціонального аналізу;

доктор фізико-математичних наук, професор
ПЛІЧКО Анатолій Миколайович,
Інститут математики Краківської політехніки ім. Т. Костюшка, Польща,
професор кафедри функціонального аналізу;

доктор фізико-математичних наук, професор
СТОРОЖ Олег Георгійович,
Львівський національний університет імені Івана Франка,
професор кафедри математичного і функціонального аналізу.

Захист відбудеться " 28 " листопада 2017 р. о 15 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ-4, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України, 01004, м. Київ-4, вул. Терещенківська, 3.

Автореферат розіслано " 11 " жовтня 2017 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Романюк А.С.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. У дисертаційній роботі побудовано алгебри поліноміальних основних та узагальнених функцій, досліджено властивості цих алгебр (зокрема встановлено їхню тензорну структуру) та вивчено властивості деяких операторів (серед яких оператори зсуву, диференціювання, деякі інтегральні оператори), що діють в таких алгебрах. Спираючись на тензорну структуру, в якості застосування поліноміальних алгебр у дисертації розроблено метод побудови функціонального числення для зліченних наборів генераторів сильно неперервних напівгруп, класом символів якого є власне ці алгебри. Зокрема побудовано напівгрупу на просторі поліноміальних основних функцій, генератором якої є лапласіан Ґросса, записано у явному вигляді розв'язок нескінченновимірної задачі Коші для рівняння теплопровідності, породженого лапласіаном Ґросса.

У дисертації розглядаються лише локально опуклі топологічні векторні простори. Значний внесок у розвиток теорії локально опуклих просторів зроблений у 50-х роках минулого століття Л. Шварцом, Н. Бурбакі, А. Ґротендіком та ін. Значна частина їхніх досліджень присвячена теорії двоїстості. Особлива увага була приділена метризовним локально опуклим просторам, зокрема просторам Фреше (або коротко просторам типу (F)). Істотне місце в теорії двоїстості локально опуклих просторів зайняли простори типу (DF) (спряжений до простору Фреше), що були введені в роботах А. Ґротендіка. Класи просторів типу (F) та (DF) містять, зокрема, ряд відомих просторів послідовностей, аналітичних функцій, нескінченнодиференційовних функцій, розподілів та ультрарозподілів, які є важливі у застосуваннях.

У дисертаційній роботі суттєво використовується теорія двоїстості локально опуклих ядерних (F) та (DF) просторів та техніка тензорних добутків Ґротендіка. Завдяки позитивній відповіді на "проблему топологій" Ґротендіка для ядерних (F) та (DF) просторів у дисертації стало можливим описати тензорну структуру поліноміальних розподілів.

Інший підхід до побудови узагальнених функцій нескінченної кількості змінних, що ґрунтується на техніці трійок Гельфанда і теорії мір на нескінченновимірних просторах, розвивався (і продовжує розвиватися) в роботах Ю.М. Березанського, Ю.С. Самойленка, Т. Хіди, Й. Іто, Ю.Г. Кондратьєва, Л. Штрайта, Х. Куо, К. Обати, Х. Оуердіана, М.О. Качановського та ін.

У дисертації істотним чином використано методи поліноміальних та полілінійних відображень, що активно розвиваються в роботах Р. Арона, Ш. Дініна, П. Ґаліндо, О.В. Лопушанського, А.В. Загороднюка та ін.

Функціональне числення для генераторів аналітичних напівгруп відіграє важливу роль в спектральній теорії диференціальних операторів і її застосуваннях до еволюційних рівнянь, зокрема у характеризації максимальної регулярності дробових степенів диференціальних операторів. В контексті дробових степенів функціональне числення є ефективним методом зведення обчислень над операторними функціями до відповідних обчислень із звичайними голоморфними функціями. Метод операторного числення був використаний при розв'язанні проблеми Като квадратного кореня.

Основною метою останніх двох розділів дисертації є побудова числення типу Хілле-Філліпса для зліченного набору генераторів сильно неперервних напівгруп. Зауважимо, що метод, запропонований у дисертації, дає можливість описати образ функціонального числення, що не завжди можливо при інших підходах до побудови операторного числення.

В основі формул функціонального числення, що побудовано в дисертації, лежить операція крос-кореляції; вона має фізичний зміст і застосовується у теорії Фур'є-процесорів для виділення слабких сигналів із шумового фону та для обробки сигналів радіолокаторів і систем дальнього зв'язку.

Числення Хілле-Філліпса для функцій скінченної кількості змінних розвинуто в роботах автора дисертації [13, 14]. Спосіб побудови функціонального числення іншого типу для зліченних наборів самоспряжених операторів на гільбертовому просторі описано в книзі Ю.С. Самойленка "Спектральная теория наборов самосопряженных операторов" (1984 р.). Актуальною залишається проблема побудови аналогу числення Хілле-Філліпса для функцій нескінченної кількості змінних. Розв'язанню цієї проблеми присвячена друга частина дисертації (див. також статті автора [20, 22]).

Зв'язок роботи з науковими програмам, планами, темами. Дослідження, що складають основу дисертації, проводились на кафедрі математичного і функціонального аналізу ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника" в рамках науково-дослідних тем "Розробка аналітичних методів у нескінченновимірному комплексному аналізі та теорії операторів" (номер державної реєстрації 0113U000184) та "Гомоморфізми та функціональне числення в алгебрах аналітичних функцій на банахових просторах" (номер державної реєстрації 0115U002305).

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є розвиток нового підходу до дослідження дуальної пари, що складається з просторів основних функцій нескінченної кількості змінних та відповідних просторів поліноміальних розподілів та ультрарозподілів, дослідження алгебраїчної та тензорної структури цих просторів, а також побудова функціонального числення для зліченного набору операторів із символами в цих просторах.

Об'єктом дослідження є локально опуклі простори поліноміальних основних і узагальнених функцій та простори із тензорною структурою типу Фока; деякі оператори і операції (оператори зсуву, диференціювання, операції множення тощо) на цих просторах; функції нескінченної кількості змінних (числових та операторних аргументів); а також задача Коші для рівняння теплопровідності, породжена нескінченновимірним лапласіаном Ґросса.

Предметом дослідження є структура та властивості локально опуклих просторів поліноміальних основних і узагальнених функцій та просторів із тензорною структурою типу Фока; властивості операторів і операцій на цих просторах; властивості та застосування функцій від зліченного набору генераторів сильно неперервних напівгруп та груп операторів.

Завдання дослідження полягають у запровадженні та розвитку нового підходу до побудови локально опуклих просторів основних та узагальнених функцій нескінченної кількості змінних, який базується на теорії двоїстості ядерних (F) та (DF) просторів та теорії їхніх симетричних тензорних добутків; дослідженні структури та опису властивостей таких просторів і операторів на них; побудові функціонального числення для зліченного набору операторів із символами в таких просторах та вивченні властивостей цього числення.

Методи дослідження. Для розв'язання поставлених задач в дисертації використовуються методи функціонального аналізу і топології, зокрема: методи теорії двоїстості ядерних (F) та (DF) просторів, методи теорії симетричних тензорних добутків локально опуклих просторів, методи нескінченновимірного аналізу та теорії узагальнених функцій, методи операторного числення, методи теорії напівгруп та груп операторів.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі результати дисертації, які виносяться на захист, є новими. У роботі вперше отримано такі результати:

– розвинуто новий підхід до дослідження дуальної пари $\langle \mathcal{P}'(\mathcal{X}'), \mathcal{P}(\mathcal{X}') \rangle$, що складається з простору $\mathcal{P}(\mathcal{X}')$ неперервних поліномів над $\mathcal{X}'$ та сильно спряженого простору $\mathcal{P}'(\mathcal{X}')$ поліноміальних розподілів, де $\langle \mathcal{X}', \mathcal{X} \rangle$ є дуальною парою лінійних локально опуклих ядерних просторів типу (F) або (DF);

– побудовано узагальнення операторів диференціювання та зсуву окремо на випадки просторів поліноміальних основних швидко спадних функцій, поліноміальних узагальнених функцій повільного росту, поліноміальних ультрадиференційовних функцій та поліноміальних ультрарозподілів; у кожному випадку доведено, що відповідні похідні генерують напівгрупи зсувів;

– поширено перетворення Фур'є на простори поліноміальних основних швидко спадних функцій і поліноміальних розподілів повільного росту та вивчено його властивості; поширено перетворення Фур'є-Лапласа та Лапласа на простори поліноміальних ультрарозподілів та вивчено властивості цих перетворень; описано образ основного простору при перетворенні Фур'є-Лапласа;

– доведено теореми типу Пелі-Вінера для поліноміальних ультрадиференційовних основних та узагальнених функцій;

– досліджено диференційовність за Ґато поліноміальних основних швидко спадних функцій і поліноміальних розподілів повільного росту, описано властивості похідної Ґато на просторах із тензорною структурою типу Фока, встановлено зв'язок похідної Ґато з диференціюваннями на цих просторах;

– доведено теорему про продовження швидко спадної функції з додатного конуса на весь простір із збереженням властивості швидкого спадання;

– доведено структурні теореми для операторів, що діють в просторах (лінійних) ультрадиференційовних функцій і які комутують з багатопараметричними напівгрупами; доведено структурну теорему про представлення локально опуклої алгебри із тензорною структурою типу Фока у вигляді комутанта поліноміальної напівгрупи зсувів;

– побудовано функціональне числення типу Хілле-Філліпса для комутуючих наборів генераторів сильно неперервних напівгруп, що діють в банаховому просторі, в класі аналітичних в трубчастих областях функцій скінченної та нескінченної кількості змінних;

– побудовано функціональне числення для зліченного некомутуючого набору генераторів сильно неперервних груп операторів, що діють в гільбертовому просторі, в класі цілих аналітичних функцій зліченної кількості змінних;

– знайдено в явному вигляді розв'язок нескінченновимірного рівняння теплопровідності, породженого лапласіаном Ґросса; побудовано в явному вигляді напівгрупу, генератором якої є лапласіан Ґросса;

– описано гомоморфізми з алгебри аналітичних функцій обмеженого типу на банаховому просторі в деяку комутативну банахову алгебру і показано, що не кожен такий гомоморфізм задається функціональним численням.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер. Вони можуть бути використані у нескінченновимірному аналізі, зокрема в теорії узагальнених функцій, теорії функціонального числення; а також можуть бути застосовані в теорії аналітичних функцій та нелінійному аналізі.

Особистий внесок здобувача. Всі результати дисертації, які виносяться на захист, одержані автором самостійно. З результатів робіт, що виконані у співавторстві, на захист виносяться лише положення, що одержані автором. У статті [3] автору дисертації належать Твердження 2 і 3. У статті [7] А.В. Соломку належать Твердження 2, Теореми 2 і 3. У статті [17] автору дисертації належать леми 3, 5, 6, теореми 1 і 2 та ідея доведення теореми 4. У статті [4] О.В. Лопушанському належить постановка задачі та аналіз одержаних результатів. У статтях [1, 2, 5, 6, 13–16, 21] внесок співавторів є рівноцінним.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались та обговорювались на чотирнадцяти міжнародних та чотирьох всеукраїнських конференціях, на літній математичній школі та на одинадцяти семінарах у провідних математичних центрах України та зарубіжжя.

Публікації. Результати дисертації опубліковані у 25 статтях [1–25], серед яких 16 статей у наукових фахових виданнях України [1–12, 17, 18, 21, 23], 9 статей у закордонних наукових періодичних виданнях, які включені до міжнародних наукометричних баз [13–16, 19, 20, 22, 24, 25], а також 20 тез доповідей на наукових конференціях [26–45].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації (українською та англійською мовами), змісту, переліку позначень, вступу, шести розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить 225 найменувань. Повний обсяг дисертації складає 328 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У вступі висвітлено актуальність дослідження, зв'язок дисертаційної роботи з науково-дослідними темами, сформульовано мету і завдання дослідження, відзначено наукову новизну одержаних у дисертації результатів, виокремлено особистий внесок здобувача та вказано установи та організації, де доповідалися та обговорювалися результати дисертації.

У першому розділі дисертаційного дослідження зроблено огляд відомих результатів, що стосуються тематики дисертаційного дослідження. Його мета — стисло дати уявлення про стан досліджень з даної тематики, місце дисертаційної роботи у розв'язанні поставленої проблеми. Крім того тут введено необхідну термінологію, викладено попередні відомості та результати, які потрібні для розуміння роботи, наведено приклад числення операторів, на основі якого ґрунується запропонований в дисертації підхід до побудови функціонального числення; подано короткий огляд дисертації.

У другому розділі дисертації розвинуто новий підхід до побудови поліноміальних основних функцій та поліноміальних розподілів на основі довільних ядерних (F) або (DF) просторів.

У першому параграфі наведено означення полілінійних та поліноміальних відображень на локально опуклих просторах, вказано на їхній зв'язок із симетричними тензорними добутками, досліджено слабку поліноміальну топологію на нескінченновимірному банаховому просторі.

У другому параграфі запропоновано загальний підхід до побудови поліноміальних основних та узагальнених функцій на основі локально опуклих ядерних просторів типу (F) або (DF) та введено на них ряд лінійних неперервних операторів, які використовуються в дисертації, досліджено властивості цих операторів.

Нехай $\mathcal{X}$ — довільний локально опуклий простір. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ позначимо через $\mathcal{X}^{\otimes n}$ його n-тий тензорний степінь. Символом $\widehat{\otimes}$ будемо позначати симетричний тензорний добуток. Підпростір в $\mathcal{X}^{\otimes n}$, що породжується елементами $x_1 \widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes} x_n$, $x_1, \ldots x_n \in \mathcal{X}$, позначимо $\mathcal{X}^{\widehat{\otimes} n}$ і назвемо симетричним тензорним степенем простору $\mathcal{X}$.

Теорема 2.2.2. *Якщо $\mathcal{X}$ локально опуклий ядерний (F) або (DF) простір, то справджується рівність $\mathcal{X}'^{\widehat{\otimes} n} \simeq (\mathcal{X}^{\widehat{\otimes} n})'$, $n \in \mathbb{N}$, для симетричних тензорних степенів.*

Для спрощення записів введемо наступні позначення

$$\Gamma(\mathcal{X}) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+}{}_{fin}\, \mathcal{X}^{\widehat{\otimes} n} \qquad \text{та} \qquad \Gamma(\mathcal{X}') := \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{X}'^{\widehat{\otimes} n}.$$

Зауважимо, що елементи прямої суми містять скінченну, але не фіксовану кількість доданків. Позначимо: $\mathcal{P}_n(\mathcal{X})$ (відп. $\mathcal{P}_n(\mathcal{X}')$) — простір n-однорідних поліномів на $\mathcal{X}$ (відп. на $\mathcal{X}'$); $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ (відп. $\mathcal{P}(\mathcal{X}')$) — простір неперервних поліномів на $\mathcal{X}$ (відп. на $\mathcal{X}'$); $\mathcal{P}'(\mathcal{X}')$ — сильно спряжений до $\mathcal{P}(\mathcal{X}')$ простір.

Теорема 2.2.3. *Для довільного ядерного (F) або (DF) простору $\mathcal{X}$ справджуються наступні лінійні топологічні ізоморфізми*

$$\begin{aligned} &\Upsilon_n^{\mathcal{X}}\colon \mathcal{X}^{\widehat{\otimes} n} \longrightarrow \mathcal{P}_n(\mathcal{X}'), && \Psi_n^{\mathcal{X}}\colon \mathcal{X}'^{\widehat{\otimes} n} \longrightarrow \mathcal{P}_n(\mathcal{X}),\\ &\Upsilon^{\mathcal{X}}\colon \Gamma(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{X}'), && \Psi^{\mathcal{X}}\colon \Gamma(\mathcal{X}') \longrightarrow \mathcal{P}'(\mathcal{X}'). \end{aligned}$$

Якщо простір $\mathcal{X}$ неперервно та щільно вкладений в $\mathcal{X}'$, то справджуються наступні неперервні щільні вкладення: $\mathcal{P}_n(\mathcal{X}') \looparrowright \mathcal{P}_n(\mathcal{X})$, $\mathcal{P}(\mathcal{X}') \looparrowright \mathcal{P}'(\mathcal{X}')$.

Елементи простору $\mathcal{P}(\mathcal{X}')$ називатимемо поліноміальними основними функціями, а елементи $\mathcal{P}'(\mathcal{X}')$ — поліноміальними розподілами.

У дисертації доведено, що введені простори основних $\mathcal{P}(\mathcal{X}')$ і узагальнених функцій $\mathcal{P}'(\mathcal{X}')$ є поповненням у відповідній топології множини поліномів скінченного типу.

Простори $\Gamma(\mathcal{X})$ та $\Gamma(\mathcal{X}')$ є локально опуклими алгебрами відносно операцій згорткового типу

$$\boldsymbol{p} \diamond \boldsymbol{q} := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \sum_{m=0}^{n} p_m \,\widehat{\otimes}\, q_{n-m}, \qquad \boldsymbol{f} \diamond \boldsymbol{g} := \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \sum_{m=0}^{n} f_m \,\widehat{\otimes}\, g_{n-m},$$

де $\boldsymbol{p} = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} p_n, \boldsymbol{q} = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} q_n \in \Gamma(\mathcal{X})$, $\boldsymbol{f} = \bigtimes\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} f_n, \boldsymbol{g} = \bigtimes\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} g_n \in \Gamma(\mathcal{X}')$. Операцію $\diamond$ по-іншому ще називають добутком Віка.

Простори основних $\mathcal{P}(\mathcal{X}')$ і узагальнених функцій $\mathcal{P}'(\mathcal{X}')$ є топологічними алгебрами відносно операцій

$$P \diamond Q := \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \sum_{m=0}^{n} P_m \cdot Q_{n-m}, \quad \text{де} \quad P = \sum_n P_n \in \mathcal{P}(\mathcal{X}'),\ Q = \sum_n Q_n \in \mathcal{P}(\mathcal{X}'),$$

$$U \diamond V := \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \sum_{m=0}^{n} U_m \cdot V_{n-m}, \quad \text{де} \quad U = \bigtimes_n U_n \in \mathcal{P}'(\mathcal{X}'),\ V = \bigtimes_n V_n \in \mathcal{P}'(\mathcal{X}'),$$

відповідно. При цьому така алгебраїчна структура існує незалежно від того, чи вихідний простір $\mathcal{X}$ (або $\mathcal{X}'$) є алгеброю чи ні.

У третьому параграфі введено ряд операторів, що діють на просторах поліноміальних основних та узагальнених функцій, а також на відповідних просторах з тензорною структурою типу Фока, вивчено їхні властивості, зокрема доведено, що всі введені оператори є лінійними та неперервними.

У третьому розділі описано структуру та вивчено властивості просторів поліноміальних основних швидко спадних функцій та відповідних поліноміальних розподілів повільного росту, введено операції зсуву та диференціювання, а також поширено перетворення Фур'є на такі простори.

До простору $\mathcal{S} := \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (відповідно $\mathcal{S}_+ := \mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$) віднесемо всі нескінченно диференційовні в $\mathbb{R}$ (відповідно в $\mathbb{R}_+$) функції $\varphi(t)$, які разом з усіма похідними спадають до нуля при $|t| \to \infty$ (відповідно при $t \to \infty$) швидше, ніж будь-який степінь $|t|^{-1}$.

У першому параграфі доведено теорему типу Сілі, яка гарантує можливість продовження швидко спадної функції з півосі на всю вісь, зберігши при цьому крім нескінченної гладкості (класична теорема Сілі), ще й властивість швидкого спадання.

Теорема 3.1.1. *Існує лінійний неперервний оператор розширення*

$$\Lambda\colon \mathcal{S}_+ \ni \varphi \longmapsto \Lambda\varphi \in \mathcal{S}$$

такий, що $\Lambda\varphi(t) = \varphi(t)$ для всіх $t \in \mathbb{R}_+$.

У другому параграфі введено поліноміальне узагальнення операторів диференціювання та зсуву та показано, що така похідна генерує відповідну напівгрупу зсувів, як і в лінійному випадку.

Для кожного $s \in \mathbb{R}_+$ визначимо на просторі поліномів $\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$ оператор $\mathscr{T}_s$, що діє за правилом $\mathscr{T}_s : \mathcal{P}(\mathcal{S}'_+) \ni P \longmapsto P \circ T'_s \in \mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$, де T'_s — спряжений відносно дуальної пари $\langle\, \mathcal{S}'_+,\, \mathcal{S}_+ \,\rangle$ оператор до звичайного оператора зсуву T_s на $\mathcal{S}_+$. На відповідному просторі $\Gamma(\mathcal{S}_+)$ оператор $\mathbb{T}_s \in \Gamma(\mathcal{S}_+)$, $s \in \mathbb{R}_+$, визначимо формулою $\mathbb{T}_s := [\Upsilon^{\mathcal{S}_+}]^{-1} \circ \mathscr{T}_s \circ \Upsilon^{\mathcal{S}_+}$.

Теорема 3.2.1. *Однопараметрична сім'я $\{\mathbb{T}_s : s \in \mathbb{R}_+\}$ лінійних операторів, що діють на алгебрі $\{\Gamma(\mathcal{S}_+), \diamond\}$, є одностайно неперервною (C_0) напівгрупою алгебраїчних автоморфізмів. Її генератором є оператор $\mathbb{D}$, що на довільний елемент вигляду $\boldsymbol{p} = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} \varphi^{\otimes n} \in \Gamma(\mathcal{S}_+)$, де $\varphi \in \mathcal{S}_+$, діє за правилом*

$$\mathbb{D}\boldsymbol{p} := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} D^{\{\otimes\}n}\varphi^{\otimes n},\ \text{де}\ D^{\{\otimes\}n}\varphi^{\otimes n} := \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\varphi\otimes\cdots\otimes\varphi\otimes D\varphi}_{j}\otimes\underbrace{\varphi\otimes\cdots\otimes\varphi}_{n-j},\ n\in\mathbb{N},$$

а $D^{\{\otimes\}0}$ — нульовий оператор.

Оператор $\mathbb{T}'_s \in \Gamma(\mathcal{S}'_+)$, $s \in \mathbb{R}_+$, визначимо формулою $\mathbb{T}'_s := [\Psi^{\mathcal{S}_+}]^{-1} \circ \mathscr{T}'_s \circ \Psi^{\mathcal{S}_+}$.

Теорема 3.2.2. *Однопараметрична сім'я $\{\mathbb{T}'_s : s \in \mathbb{R}_+\}$ лінійних операторів, що діють на алгебрі $\{\Gamma(\mathcal{S}'_+), \diamond\}$, є одностайно неперервною (C_0) напівгрупою алгебраїчних автоморфізмів. Її генератором є оператор $\mathbb{D}'$, що на довільний елемент вигляду $\boldsymbol{f} = \bigtimes\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} f^{\otimes n} \in \Gamma(\mathcal{S}'_+)$, де $f \in \mathcal{S}'_+$, діє за правилом*

$$\mathbb{D}'\boldsymbol{f} := \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} D'^{\{\otimes\}n} f^{\otimes n},\ \text{де}\ D'^{\{\otimes\}n} f^{\otimes n} := \sum_{j=1}^{n} \underbrace{f\otimes\cdots\otimes f\otimes D'f}_{j}\otimes\underbrace{f\otimes\cdots\otimes f}_{n-j},\ n\in\mathbb{N},$$

а $D'^{\{\otimes\}0}$ — нульовий оператор.

Визначимо оператори $\mathscr{D} := \Upsilon^{\mathcal{S}_+} \circ \mathbb{D} \circ [\Upsilon^{\mathcal{S}_+}]^{-1}$ та $\mathscr{D}' := \Psi^{\mathcal{S}_+} \circ \mathbb{D}' \circ [\Psi^{\mathcal{S}_+}]^{-1}$.

Наслідок 3.2.1. *На елементи вигляду* $P_m(\cdot) := \sum_{k=0}^{m}\langle\,\cdot\,,\varphi\rangle^k$, *які утворюють тотальну в* $\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$ *підмножину, оператор* $\mathscr{D}$ *діє за формулою*

$$\mathscr{D}P_m(\cdot) := \sum_{k=1}^{m} k\langle\,\cdot\,,D\varphi\rangle\langle\,\cdot\,,\varphi\rangle^{k-1} = \langle\,\cdot\,,D\varphi\rangle\sum_{k=1}^{m} k\langle\,\cdot\,,\varphi\rangle^{k-1}.$$

Наслідок 3.2.2. *На елементи вигляду* $U = (1, U_1, \dots, U_n, \dots) \in \mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+)$, *де* $U_n(\cdot) = \langle f^{\otimes n}, \cdot^{\otimes n}\rangle \in \mathcal{P}_n(\mathcal{S}_+)$, $f \in \mathcal{S}'_+$, *які утворюють тотальну в* $\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+)$ *підмножину, оператор* $\mathscr{D}'$ *діє за формулою*

$$\mathscr{D}'U := \big(0, \langle D'f, \cdot\rangle, 2\langle D'f, \cdot\rangle U_1, \dots, n\langle D'f, \cdot\rangle U_{n-1}, \dots\big).$$

Теорема 3.2.3. *Оператори* $\mathbb{D}$ *та* $\mathbb{D}'$ *є неперервними диференціюваннями в сенсі правила Лейбніца на алгебрах* $\{\Gamma(\mathcal{S}_+), \diamond\}$ *та* $\{\Gamma(\mathcal{S}'_+), \diamond\}$ *відповідно.*

Наслідок 3.2.3. *Оператори* $\mathscr{D}$ *та* $\mathscr{D}'$ *є неперервними диференціюваннями на алгебрах* $\{\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+), \diamond\}$ *та* $\{\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+), \diamond\}$ *відповідно.*

Теорема 3.2.4. *Похідні* $\mathbb{D}'$ *та* $\mathbb{D}$ *як оператори, що задані на спряжених просторах* $\Gamma(\mathcal{S}'_+)$ *та* $\Gamma(\mathcal{S}_+)$, *задовольняють дуальне співвідношення*

$$\langle \mathbb{D}'\boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}\rangle = -\langle \boldsymbol{u}, \mathbb{D}\boldsymbol{p}\rangle, \qquad \forall\, \boldsymbol{u} \in \Gamma(\mathcal{S}'_+), \quad \forall\, \boldsymbol{p} \in \Gamma(\mathcal{S}_+).$$

Наслідок 3.2.4. *Похідні* $\mathscr{D}'$ *та* $\mathscr{D}$ *як оператори, що задані на спряжених просторах* $\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+)$ *та* $\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$, *задовольняють дуальне співвідношення*

$$\langle \mathscr{D}'U, P\rangle = -\langle U, \mathscr{D}P\rangle, \qquad \forall\, U \in \mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+), \quad \forall\, P \in \mathcal{P}(\mathcal{S}'_+).$$

Третій параграф присвячений інтегральним перетворенням у просторах лінійних та поліноміальних основних та узагальнених функцій.

Для функції $\varphi \in \mathcal{S}_+$ визначимо перетворення Фур'є

$$\widehat{\varphi}(\xi) := F_+\big[\varphi(t)\big](\xi) := \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\mathrm{i}t\xi}\varphi(t)\,dt, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Позначимо: $\widehat{\mathcal{S}}_+ := F_+\big[\mathcal{S}_+\big]$ — образ простору $\mathcal{S}_+$ при перетворенні Фур'є, $\widehat{\mathcal{S}}'_+$ — сильно спряжений до $\widehat{\mathcal{S}}_+$ простір.

Перетворення $\mathcal{F}' := 2\pi(F'_+)^{-1}\colon \mathcal{S}'_+ \ni f \longmapsto \widehat{f} := \mathcal{F}'[f] \in \widehat{\mathcal{S}}'_+$ назвемо узагальненим перетворенням Фур'є розподілів з класу $\mathcal{S}'_+$.

Поліноміальне розширення $\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}}$ узагальненого перетворення Фур'є $\mathcal{F}'$ визначимо формулою

$$\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}} : \mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+) \ni U = \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} U_n \quad\longmapsto\quad \widehat{U} := \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{F}'^{\otimes n}_{\mathcal{P}}(U_n) \in \mathcal{P}'(\widehat{\mathcal{S}}'_+),$$

де $U_n \in \mathcal{P}_n(\mathcal{S}_+)$, а $\mathcal{F}'^{\otimes n}_{\mathcal{P}}$ — n-однорідна компонента відображення $\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}}$, тобто перетворення $\mathcal{F}'^{\otimes n}_{\mathcal{P}} := \Psi_n^{\widehat{\mathcal{S}}_+} \circ \mathcal{F}'^{\otimes n} \circ [\Psi_n^{\mathcal{S}_+}]^{-1}$.

Для елементів тотальних підмножин просторів $\Gamma(\mathcal{S}_+)$ та $\Gamma(\widehat{\mathcal{S}}_+)$ визначимо операції $\big(\varphi^{\otimes n}\big) \circledast \big(\psi^{\otimes n}\big) := \big((\varphi * \psi)^{\otimes n}\big)$ і $\big(\widehat{\varphi}^{\otimes n}\big) \odot \big(\widehat{\psi}^{\otimes n}\big) := \big((\widehat{\varphi}\cdot\widehat{\psi})^{\otimes n}\big)$ відповідно, де $\varphi, \psi \in \mathcal{S}_+$, $\widehat{\varphi}, \widehat{\psi} \in \widehat{\mathcal{S}}_+$. Далі розширимо їх на простори $\Gamma(\mathcal{S}'_+)$ і $\Gamma(\widehat{\mathcal{S}}'_+)$ за лінійністю та неперервністю.

Теорема 3.3.3. *Поліноміальне розширення перетворення Фур'є $\mathcal{F}'^{\otimes}$ є гомоморфізмом алгебр $(\Gamma(\mathcal{S}'_+), \circledast)$ та $(\Gamma(\widehat{\mathcal{S}}'_+), \odot)$.*

Наслідок 3.3.3. *Поліноміальне розширення перетворення Фур'є $\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}}$ є гомоморфізмом алгебр $(\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+), \circledast)$ та $(\mathcal{P}'(\widehat{\mathcal{S}}'_+), \odot)$.*

Теорема 3.3.4. *Поліноміальне розширення перетворення Фур'є $\mathcal{F}'^{\otimes}$ є гомоморфізмом алгебр $(\Gamma(\mathcal{S}'_+), \diamond)$ та $(\Gamma(\widehat{\mathcal{S}}'_+), \diamond)$.*

Наслідок 3.3.4. *Поліноміальне розширення перетворення Фур'є $\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}}$ є гомоморфізмом алгебр $(\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+), \diamond)$ та $(\mathcal{P}'(\widehat{\mathcal{S}}'_+), \diamond)$.*

У четвертому параграфі досліджено диференційовність за Ґато поліноміальних основних та узагальнених функцій та елементів відповідних просторів із тензорною структурою типу Фока.

Визначимо вектор

$$\phi_{\varphi,m} = \Big(1, \varphi, \frac{\varphi^{\otimes 2}}{2!}, \dots, \frac{\varphi^{\otimes m}}{m!}, 0, \dots\Big) \in \Gamma(\mathcal{S}_+), \qquad \varphi \in \mathcal{S}_+, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Оператором знищення a_t в точці $t \in \mathbb{R}_+$ називають оператор в $\mathscr{L}(\Gamma(\mathcal{S}_+))$, що володіє властивістю $a_t \phi_{\varphi,m} = \varphi(t)\phi_{\varphi,m-1}$, $\varphi \in \mathcal{S}_+$, $m \in \mathbb{N}$.

Оператором народження $a'_t \in \mathscr{L}(\Gamma(\mathcal{S}'_+))$ в точці $t \in \mathbb{R}_+$ називають спряжений до a_t оператор відносно дуальної пари $\langle \Gamma(\mathcal{S}'_+), \Gamma(\mathcal{S}_+)\rangle$.

Нехай $P \in \mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$ — неперервний поліном. Визначимо оператор зсуву за правилом $\mathscr{T}_g P(f) = P(f+g)$, $f \in \mathcal{S}'_+$, де $g \in \mathcal{S}'_+$ — довільний розподіл повільного росту. Легко бачити, що $\mathscr{T}_g \in \mathscr{L}(\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+))$ для будь-якого $g \in \mathcal{S}'_+$.

З теореми 2.2.3 випливає, що оператор $\mathbb{T}_g := (\Upsilon^{\mathcal{S}_+})^{-1} \circ \mathscr{T}_g \circ \Upsilon^{\mathcal{S}_+}$ коректно заданий на просторі $\Gamma(\mathcal{S}_+)$, більше того $\mathbb{T}_g \in \mathscr{L}(\Gamma(\mathcal{S}_+))$.

Символом $\circledcirc_k$ позначимо (праве) k-скорочення симетричного тензорного добутку, а саме $g^{\otimes k} \circledcirc_k \varphi^{\otimes s} := \langle g, \varphi\rangle^k \varphi^{\otimes(s-k)}$, $k \le s$.

Кажуть, що поліном $P \in \mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$ (відповідно елемент $\boldsymbol{p} \in \Gamma(\mathcal{S}_+)$) є диференційовним за Ґато, якщо для довільного $g \in \mathcal{S}'_+$ оператор зсуву $\mathscr{T}_{\varepsilon g} P$ (відповідно $\mathbb{T}_{\varepsilon g} p$) визначений для для всіх достатньо малих ε і якщо

$$\mathscr{D}_g P := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathscr{T}_{\varepsilon g} P - P}{\varepsilon} \qquad \Big(\text{відповідно } \mathbb{D}_g \boldsymbol{p} := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathbb{T}_{\varepsilon g}\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}}{\varepsilon}\Big)$$

збігається в $\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$ (відповідно в $\Gamma(\mathcal{S}_+)$) у топології рівномірної збіжності на обмежених множинах (відповідно у топології прямої суми).

Оператор $\mathscr{D}_g$ (відповідно $\mathbb{D}_g$) називають похідною Ґато полінома P (відповідно елемента $\boldsymbol{p}$) у напрямку g.

Теорема 3.4.1. *Кожен поліном з простору $\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$ є диференційовним за Ґато, при цьому $\mathscr{D}_g P_{\varphi,m} = \sum_{k=0}^{m-1}(k+1)\langle g, \varphi\rangle\langle\,\cdot\,, \varphi\rangle^k$. Більше того, похідна Ґато $\mathscr{D}_g$ є лінійним неперервним оператором на $\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$.*

Наслідок 3.4.1. *Кожен елемент з простору $\Gamma(\mathcal{S}_+)$ є диференційовним за Ґато, при цьому $\mathbb{D}_g \boldsymbol{\varphi}_m = \big(\langle g, \varphi\rangle, 2\langle g, \varphi\rangle\varphi, \dots, m\langle g, \varphi\rangle\varphi^{\otimes(m-1)}, 0, \dots\big)$ для всіх $\boldsymbol{\varphi}_m = (1, \varphi, \varphi^{\otimes 2}, \dots, \varphi^{\otimes m}, 0, \dots) \in \Gamma(\mathcal{S}_+)$, де $\varphi \in \mathcal{S}_+$. Більше того, похідна Ґато $\mathbb{D}_g$ є лінійним та неперервним оператором на $\Gamma(\mathcal{S}_+)$.*

Наслідок 3.4.3. *Похідна Ґато $\mathbb{D}_{\delta_t}$ у напрямку δ_t є оператором знищення в точці $t \in \mathbb{R}_+$.*
Теорема 3.4.2. *Для кожного $g \in \mathcal{S}'_+$ похідна Ґато $\mathbb{D}_g$ є неперервним диференціюванням алгебри $\big\{\Gamma(\mathcal{S}_+), \diamond\big\}$.*
Наслідок 3.4.4. *Для кожного $g \in \mathcal{S}'_+$ похідна Ґато $\mathscr{D}_g$ є неперервним диференціюванням алгебри $\{\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+),\ \diamond\ \}$.*

Для довільного $g \in \mathcal{S}'_+$ нехай $\mathbb{D}'_g$ та $\mathscr{D}'_g$ позначають спряжені оператори до похідних Ґато відносно дуальних пар $\big\langle \Gamma(\mathcal{S}'_+), \Gamma(\mathcal{S}_+)\big\rangle$ та $\big\langle \mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+), \mathcal{P}(\mathcal{S}'_+))\big\rangle$ відповідно.
Наслідок 3.4.5. *Оператор $\mathbb{D}'_{\delta_t}$ є оператором народження a'_t в точці $t \in \mathbb{R}_+$*
Теорема 3.4.4. *Для кожного розподілу $g \in \mathcal{S}'_+$ узагальнена похідна Ґато $\mathbb{D}'_g$ є неперервним диференціюванням алгебри $\big\{\Gamma(\mathcal{S}'_+),\ \diamond\big\}$.*
Наслідок 3.4.7. *Для кожного розподілу $g \in \mathcal{S}'_+$ узагальнена похідна Ґато $\mathscr{D}'_g$ є неперервним диференціюванням алгебри $\big\{\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+),\ \diamond\ \big\}$.*

Зафіксуємо деяке $t \in \mathbb{R}_+$ і визначимо оператор $\mathbb{D}(t) \in \Gamma(\mathcal{S}_+)$ за правилом $\mathbb{D}(t)\boldsymbol{\varphi}_m := \bigoplus_{k=1}^m D_t^{\{\otimes\}_k}[\varphi^{\otimes k}]$ для довільного $\boldsymbol{\varphi}_m = (1, \varphi, \varphi^{\otimes 2}, \dots, \varphi^{\otimes m}, 0, \dots)$, $\varphi \in \mathcal{S}_+$, де $D_t^{\{\otimes\}_k}[\varphi^{\otimes k}] := \sum_{j=1}^k \underbrace{\varphi \otimes \dots \otimes \varphi \otimes \varphi'(t)}_{j} \otimes \underbrace{\varphi \otimes \dots \otimes \varphi}_{k-j}$, $k = 1, \dots, m$.
Теорема 3.4.5. *При $g = -\delta'_t$ отримаємо рівність $\mathbb{D}_{-\delta'_t} = \mathbb{D}(t)$ для довільного фіксованого $t \in \mathbb{R}_+$.*

У четвертому розділі розглянуто випадок, коли абстрактний ядерний простір $\mathcal{X}$ замінено на один з просторів ультрадиференційовних функцій. В основному ми використовуємо простір $\mathcal{G}_+$ функцій з класу Жевре, що мають компактні носії, зосереджені у додатному конусі $\mathbb{R}^d_+$.

Перший параграф присвячений введеню означень та встановленню властивостей ультрадиференційовних функцій Жевре та ультрарозподілів Рум'є.

Позначимо $[\mu, \nu] := \bigtimes_{j=1}^d [\mu_j, \nu_j]$ де $\mu_1 < \nu_1, \dots, \mu_d < \nu_d$, $\partial^k := \partial_1^{k_1} \dots \partial_d^{k_d}$, $\partial_j^{k_j} = \partial^{k_j}/\partial t_j^{k_j}$, $j = 1, \dots, d$, $|k| = k_1 + \dots + k_d$, $k^{k\beta} = k_1^{k_1\beta} \cdot \ldots \cdot k_d^{k_d\beta}$, де $k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d_+$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Зафіксуємо довільне дійсне $\beta > 1$. Нескінченно диференційовну в $\mathbb{R}^d_+$ функцію φ називають ультрадиференційовною в сенсі Жевре, якщо для кожної множини $[\mu, \nu] \subset \operatorname{int} \mathbb{R}^d_+$ існують такі константи $h > 0$ і $C > 0$, що нерівність $\sup_{t \in [\mu,\nu]} |\partial^k \varphi(t)| \le C h^{|k|} k^{k\beta}$ виконується для всіх $k \in \mathbb{Z}^d_+$. Векторний простір всіх ультрадиференційовних в $\operatorname{int} \mathbb{R}^d_+$ в сенсі Жевре функцій позначимо $\mathcal{E}^\beta_+ := \mathcal{E}^\beta(\mathbb{R}^d_+)$. Позначимо $\mathcal{G}^\beta_+ \subset \mathcal{E}^\beta_+$ підпростір ультрадиференційовних в сенсі Жевре функцій з компактними носіями. Для спрощення позначень ми писатимемо $\mathcal{G}_+$ замість $\mathcal{G}^\beta_+$, опускаючи фіксоване число β.

У другому параграфі доведено структурні теореми для операторів, що діють в просторах (лінійних) ультрадиференційовних функцій і які комутують з багатопараметричними напівгрупами.

Розглянемо d-параметричну (C_0) напівгрупу зсувів на $\mathcal{G}_+$, визначену за правилом $T\colon \mathbb{R}^d_+ \ni s \longmapsto T_s \in \mathscr{L}(\mathcal{G}_+)$, $T_s\varphi(t) := \varphi(t+s)$, $t \in \mathbb{R}^d_+$, $\varphi \in \mathcal{G}_+$.

Для довільного ультрарозподілу $f \in \mathcal{G}'_+$ визначимо оператор крос-кореляції за правилом $K_f\colon \mathcal{G}_+ \ni \varphi \longmapsto K_f\varphi$, $K_f\varphi(s) := \langle f, T_s\varphi\rangle$, $s \in \mathbb{R}^d_+$.

Нехай $S \subset \mathscr{L}(\mathcal{X})$ — деяка підмножина в просторі всіх неперервних лінійних операторів на $\mathcal{X}$. Комутантом множини S називають множину операторів, що визначена за правилом $[S]^c := \big\{B \in \mathscr{L}(\mathcal{X})\colon B \circ A = A \circ B, \forall A \in S\big\}$.

Теорема 4.2.1. *Відображення $\mathcal{K}\colon \mathcal{G}'_+ \ni f \longmapsto K_f \in \mathscr{L}(\mathcal{G}_+)$ здійснює топологічний ізоморфізм зі згорткової алгебри $\mathcal{G}'_+$ на комутант $[T]^c$ напівгрупи зсувів T. При цьому для довільних $f, g \in \mathcal{G}'_+$ виконується рівність $K_{f*g} = K_f \circ K_g$, де $*$ позначає згортку в $\mathcal{G}'_+$, зокрема, K_δ — одиничний оператор в $\mathscr{L}(\mathcal{G}_+)$.*

Нехай $E := (E, \|\cdot\|)$ — комплексний банаховий простір. Елементи простору $E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{G}_+$ ми можемо трактувати як E-значні ультрадиференційовні функції $x : t \longmapsto x(t)$ з компактними носіями в $\mathbb{R}^d_+$.

Для довільних $h > 0$ та $\nu \in \operatorname{int}\mathbb{R}^d_+$ наступним чином визначимо підпростір $\mathcal{G}^h_\nu := \big\{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d_+) : \operatorname{supp}\varphi \subset [0,\nu], \|\varphi\|_{\mathcal{G}^h_\nu} < \infty\big\}$ ультрадиференційовних функцій з компактними носіями в $[0,\nu]$, де $\|\varphi\|_{\mathcal{G}^h_\nu} := \sup_{k \in \mathbb{Z}^d_+} \sup_{t \in [0,\nu]} \frac{|\partial^k\varphi(t)|}{h^{|k|}k^{k\beta}}$.

З теореми про представлення елементів проективного тензорного добутку випливає, що кожен $x \in E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{G}_+$ можна (взагалі кажучи, неоднозначно) розвинути в абсолютно збіжний ряд $x = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j x_j \otimes \varphi_j$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $x_j \in E$, $\varphi_j \in \mathcal{G}^h_\nu$, для деяких $\nu \in \mathbb{R}^d_+$ і $h > 0$, де $\sum_j |\lambda_j| < \infty$ і послідовності $\{x_j\}$ та $\{\varphi_j\}$ збігаються до нуля у відповідних просторах.

Нехай I_E позначає тотожний оператор в $\mathscr{L}(E)$. Розглянемо довільний оператор $K \in \mathscr{L}(\mathcal{G}_+)$. Використовуючи розвинення в абсолютно збіжний ряд, можна визначити тензорний добуток $I_E \otimes K \in \mathscr{L}(E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{G}_+)$ наступним чином $(I_E \otimes K)x = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j x_j \otimes K\varphi_j$. Аналогічно можна визначити дію $\langle f, x\rangle := \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j x_j \langle f, \varphi_j\rangle$ для довільного ультрарозподілу $f \in \mathcal{G}'_+$ і векторнозначної ультрадиференційовної функції $x \in E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{G}_+$. Добре відомо, що ці означення не залежать від представлення функції $x \in E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{G}_+$ у вигляді абсолютно збіжного ряду.

Скажемо, що оператор $I_E \otimes K$, де $K \in \mathscr{L}(\mathcal{G}_+)$, є інваріантним відносно операторів зсуву $I_E \otimes T = \big\{I_E \otimes T_s\colon s \in \mathbb{R}^d_+\big\}$, якщо $I_E \otimes (K \circ T_s) = I_E \otimes (T_s \circ K)$ для всіх $s \in \mathbb{R}^d_+$.

Для довільного ультрарозподілу $f \in \mathcal{G}'_+$ оператор крос-кореляції над простором $E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{G}_+$ визначимо за правилом $I_E \otimes K_f\colon E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{G}_+ \ni x \longmapsto (I_E \otimes K_f)x$.

Теорема 4.2.2. *Для довільного ультрарозподілу $f \in \mathcal{G}'_+$ оператор $I_E \otimes K_f$ є інваріантним відносно операторів зсуву $I_E \otimes T$. Навпаки, для довільного такого оператора $K \in \mathscr{L}(\mathcal{G}_+)$, що $I_E \otimes K$ є інваріантним відносно $I_E \otimes T$, існує єдиний такий ультрарозподіл $f \in \mathcal{G}'_+$, що $K\varphi = K_f\varphi$ і $(I_E \otimes K)x = (I_E \otimes K_f)x$ для всіх $\varphi \in \mathcal{G}_+$ і $x \in E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{G}_+$.*

Нехай $\mathscr{G}$ позначає множину генераторів d-параметричних (C_0) напівгруп стиску. Розглянемо простір $\widehat{\mathcal{G}} := \{\widehat{x}\colon \mathscr{G} \longrightarrow E \ : \ x \in E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{G}_+\}$ всіх E-значних функцій вигляду

$$\widehat{x}\colon \mathscr{G} \ni A \longmapsto \widehat{x}(A) \in E, \quad \text{де} \quad \widehat{x}(A) := \int_{\mathbb{R}^d_+} G_t(A)x(t)\,dt,$$

а $G_t(A)$ — напівгрупа, що генерується оператором A.

Визначимо лінійне відображення $\mathcal{F}_{\mathscr{G}}\colon E\otimes_{\mathfrak{p}}\mathcal{G}_+ \ni x \longmapsto \widehat{x} \in \widehat{\mathcal{G}}$. Це відображення можна розуміти як операторний аналог перетворення Фур'є.

Розглянемо d-параметричну напівгрупу на просторі $\widehat{\mathcal{G}}$

$$\widehat{T}\colon \mathbb{R}^d_+ \ni s \longmapsto \widehat{T}_s \in \mathscr{L}(\widehat{\mathcal{G}}), \qquad \widehat{T}_s = \mathcal{F}_{\mathscr{G}} \circ (I_E \otimes T_s) \circ \mathcal{F}_{\mathscr{G}}^{-1},$$

де $\mathcal{F}_{\mathscr{G}}^{-1}$ — обернене до $\mathcal{F}_{\mathscr{G}}$ відображення.

Теорема 4.2.3. *Відображення* $\mathcal{G}'_+ \ni f \longmapsto \widehat{K}_f := \mathcal{F}_{\mathscr{G}} \circ (I_E \otimes K_f) \circ \mathcal{F}_{\mathscr{G}}^{-1} \in \mathscr{L}(\widehat{\mathcal{G}})$ *здійснює алгебраїчний ізоморфізм зі згорткової алгебри* $\mathcal{G}'_+$ *на комутант* $[\widehat{T}]^c$ *напівгрупи* $\widehat{T}$, *що складається з усіх операторів на* $\widehat{\mathcal{G}}$ *вигляду* $\mathcal{F}_{\mathscr{G}}\circ(I_E\otimes K)\circ\mathcal{F}_{\mathscr{G}}^{-1}$ *для деякого* $K \in \mathscr{L}(\mathcal{G}_+)$. *Зокрема, справджується рівність* $\widehat{K}_{f*g} = \widehat{K}_f \circ \widehat{K}_g$ *для всіх* $f, g \in \mathcal{G}'_+$, *а* $\widehat{K}_\delta$ *— одиничний оператор в* $\mathscr{L}(\widehat{\mathcal{G}})$.

У третьому параграфі досліджено деякі властивості топологічної алгебри $\mathcal{P}(\mathcal{G}'_+)$ неперервних скалярних поліномів на згортковій алгебрі $\mathcal{G}'_+$ ультрарозподілів Рум'є, носії яких розміщені в додатному конусі $\mathbb{R}^d_+$, а також властивості сильно спряженого простору $\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_+)$ поліноміальних ультрарозподілів.

Нехай $\partial_i := \frac{\partial}{\partial t_i}$ позначає оператор диференціювання за змінною t_i, $i = 1,\dots,d$. Однопараметрична сім'я операторів

$$T_{s_i}\colon \varphi(t_1,\dots,t_d) \longmapsto \varphi(t_1,\dots,t_{i-1},t_i+s_i,t_{i+1},\dots,t_d), \qquad s_i \ge 0, \quad i=1,\dots,d,$$

де $(t_1,\dots,t_d) \in \mathbb{R}^d_+$, утворює напівгрупу $T_i\colon 0 \le s_i \longmapsto T_{s_i} \in \mathscr{L}(\mathcal{G}_+)$ зсувів вздовж конуса $\mathbb{R}^d_+$.

Для всіх $i = 1,\dots,d$ нехай $T'_i\colon 0 \le s_i \longmapsto T'_{s_i}$ позначає спряжену до T_i напівгрупу, а ∂'_i — спряжений до ∂_i оператор відносно двоїстості $\langle \mathcal{G}'_+, \mathcal{G}_+\rangle$.

Визначимо оператори $\mathbb{D}_i \in \mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{G}_+)\big)$ та $\mathbb{D}'_i \in \mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{G}'_+)\big)$, $i=1,\dots,d$, наступним чином

$$\mathbb{D}_i : (1,\varphi,\dots,\varphi^{\otimes n},0,\dots) \longmapsto \Big(0,\partial_i\varphi,\dots,\partial_i^{\{\otimes\}n}\varphi^{\otimes n},0,\dots\Big),$$

$$\mathbb{D}'_i : (1,f,\dots,f^{\otimes n},\dots) \longmapsto \Big(0,\partial'_i f,\dots,\partial_i'^{\{\otimes\}n} f^{\otimes n},\dots\Big),$$

де оператори $\partial_i^{\{\otimes\}n}$ та $\partial_i'^{\{\otimes\}n}$ діють за правилами

$$\partial_i^{\{\otimes\}n}\varphi^{\otimes n} := \sum_{j=1}^n \varphi^{\otimes(j-1)} \otimes \partial_i\varphi \otimes \varphi^{\otimes(n-j)}, \quad \partial_i'^{\{\otimes\}n} f^{\otimes n} := \sum_{j=1}^n f^{\otimes(j-1)} \otimes \partial'_i f \otimes f^{\otimes(n-j)}.$$

Для кожного $i = 1,\dots,d$ на просторах $\Gamma(\mathcal{G}_+)$ та $\Gamma(\mathcal{G}'_+)$ визначимо однопараметричні сім'ї $\mathbb{T}_i : 0 \le s_i \longmapsto \mathbb{T}_{s_i} \in \mathscr{L}(\Gamma(\mathcal{G}_+))$ та $\mathbb{T}'_i : 0 \le s_i \longmapsto \mathbb{T}'_{s_i} \in \mathscr{L}(\Gamma(\mathcal{G}'_+))$

операторів, що діють за правилами

$$\mathbb{T}_{s_i} : (1, \varphi, \dots, \varphi^{\otimes n}, 0, \dots) \longmapsto \Big(1, T_{s_i}\varphi, \dots, T_{s_i}^{\otimes n}\varphi^{\otimes n}, 0, \dots\Big),$$

$$\mathbb{T}'_{s_i} : (1, f, \dots, f^{\otimes n}, \dots) \longmapsto \Big(1, T'_{s_i}f, \dots, T'^{\otimes n}_{s_i} f^{\otimes n}, \dots\Big),$$

де $T_{s_i}^{\otimes n}$, $T'^{\otimes n}_{s_i}$ визначені як тензорні степені відповідних операторів T_{s_i}, T'_{s_i}.

Теорема 4.3.1. *Однопараметричні сім'ї $\mathbb{T}_i$, $i = 1, \dots, d$, лінійних операторів на згортковій алгебрі $\Gamma(\mathcal{G}_+)$ утворюють (C_0) напівгрупи алгебраїчних автоморфізмів. Їх генераторами є оператори $\mathbb{D}_i$, $i = 1, \dots, d$.*

Однопараметричні сім'ї $\mathbb{T}'_i$, $i = 1, \dots, d$, лінійних операторів на згортковій алгебрі $\Gamma(\mathcal{G}'_+)$ утворюють (C_0) напівгрупи алгебраїчних автоморфізмів. Їх генераторами є оператори $\mathbb{D}'_i$, $i = 1, \dots, d$.

Наслідок 4.3.1. *Однопараметричні сім'ї $\mathscr{T}_i\colon 0 \le s_i \longmapsto \mathscr{T}_{s_i}$, $i = 1, \dots, d$, лінійних операторів на мультиплікативній алгебрі $\mathcal{P}(\mathcal{G}'_+)$, що визначені за правилом $\mathscr{T}_{s_i}P := P \circ T'_{s_i}$, $P \in \mathcal{P}(\mathcal{G}'_+)$, утворюють (C_0) напівгрупи алгебраїчних автоморфізмів з генераторами $\mathscr{D}_i := \Upsilon^{\mathcal{G}_+} \circ \mathbb{D}_i \circ (\Upsilon^{\mathcal{G}_+})^{-1}$, $i = 1, \dots, d$.*

Однопараметричні сім'ї $\mathscr{T}'_i\colon 0 \le s_i \longmapsto \mathscr{T}'_{s_i}$, $i = 1, \dots, d$, лінійних операторів на мультиплікативній алгебрі $\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_+)$, що визначені за правилом $\mathscr{T}'_{s_i}U := U \circ T_{s_i}$, $U \in \mathcal{P}'(\mathcal{G}'_+)$, утворюють (C_0) напівгрупи алгебраїчних автоморфізмів з генераторами $\mathscr{D}'_i := \Psi^{\mathcal{G}_+} \circ \mathbb{D}'_i \circ (\Psi^{\mathcal{G}_+})^{-1}$, $i = 1, \dots, d$.

Теорема 4.3.2. *Генератори $\mathbb{D}'_i$, $\mathbb{D}_i$, $i = 1, \dots, d$, є неперервними диференціюваннями на алгебрах $\Gamma(\mathcal{G}'_+)$, $\Gamma(\mathcal{G}_+)$ відповідно. Генератори $\mathbb{D}'_i$, $\mathbb{D}_i$, $i = 1, \dots, d$, задовольняють дуальне співвідношення $\langle \mathbb{D}'_i\boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}\rangle = -\langle \boldsymbol{u}, \mathbb{D}_i\boldsymbol{p}\rangle$ для всіх $\boldsymbol{u} \in \Gamma(\mathcal{G}'_+)$, $\boldsymbol{p} \in \Gamma(\mathcal{G}_+)$.*

Наслідок 4.3.2. *Оператори $\mathscr{D}'_i$, $\mathscr{D}_i$, $i = 1, \dots, d$, є неперервними диференціюваннями на алгебрах $\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_+)$, $\mathcal{P}(\mathcal{G}'_+)$ відповідно. Генератори $\mathscr{D}'_i$, $\mathscr{D}_i$, $i = 1, \dots, d$, задовольняють дуальне співвідношення $\langle \mathscr{D}'_iU, P\rangle = -\langle U, \mathscr{D}_iP\rangle$ для всіх $U \in \mathcal{P}'(\mathcal{G}'_+)$, $P \in \mathcal{P}(\mathcal{G}'_+)$.*

Крос-кореляцією ультрарозподілу $f \in \mathcal{G}'_+$ і ультрадиференційовної функції $\varphi \in \mathcal{G}_+$ назвемо функцію $(f \star \varphi)(s) := \langle f, T_s\varphi\rangle = \langle f(t), \varphi(t + s)\rangle$. Оператор крос-кореляції $K_f\colon \varphi \longmapsto f \star \varphi$ належить простору $\mathscr{L}(\mathcal{G}_+)$ для довільного ультрарозподілу $f \in \mathcal{G}'_+$.

Для елементів тотальної підмножини простору $\Gamma(\mathcal{G}'_+)$ визначимо операцію $\big(f^{\otimes n}\big) \circledast \big(g^{\otimes n}\big) := \big((f * g)^{\otimes n}\big)$ і розширимо її на цілий простір за лінійністю та неперервністю. Легко бачити, що $\Gamma(\mathcal{G}'_+)$ є алгеброю відносно операції $\circledast$. Таку ж операцію $\circledast$ введемо на просторі $\Gamma(\mathcal{G}_+)$, який також стає алгеброю.

Для довільного $K \in \mathscr{L}(\mathcal{G}_+)$ визначимо оператор $K^{\otimes} \in \mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{G}_+)\big)$ за правилом

$$K^{\otimes} := \big(K^{\otimes n}\big) : p = (p_n) \quad \longmapsto \quad K^{\otimes}p := \big(K^{\otimes n}p_n\big),$$

де кожен з операторів $K^{\otimes n} \in \mathscr{L}(\mathcal{G}_+^{\otimes n})$, $n \in \mathbb{N}$, визначений як лінійне та неперервне розширення відображення $\varphi^{\otimes n} \longmapsto (K\varphi)^{\otimes n}$, $\varphi \in \mathcal{G}_+$, а $K^{\otimes 0} := I_{\mathbb{C}}$ — одиничний оператор.

Зокрема, коректно визначеними є оператори $K_{\boldsymbol{u}}^{\otimes} := \big(K_{u_n}^{\otimes n}\big) \in \mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{G}_+)\big)$ та $K_{u_n}^{\otimes n} \in \mathscr{L}(\mathcal{G}_+^{\otimes n})$, де $\boldsymbol{u} := (u_n) \in \Gamma(\mathcal{G}'_+)$ при $u_n \in \mathcal{G}_+'^{\otimes n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Введемо операцію, яка є розширенням крос-кореляції на простори поліноміальних ультрадиференційовних функцій та ультрарозподілів. Для довільних $\boldsymbol{u} = (u_n) \in \Gamma(\mathcal{G}'_+)$ та $\boldsymbol{p} = (p_n) \in \Gamma(\mathcal{G}_+)$ їх крос-кореляцією назвемо елемент $\boldsymbol{u} \star \boldsymbol{p} := K_{\boldsymbol{u}}^{\otimes}\boldsymbol{p} = \big(K_{u_n}^{\otimes n} p_n\big)$.

Використовуючи ізоморфізми $\Upsilon^{\mathcal{G}_+}$ і $\Psi^{\mathcal{G}_+}$ та їх обернені визначимо аналогічну операцію на поліноміальних просторах. А саме, для довільних $U \in \mathcal{P}'(\mathcal{G}'_+)$ та $P \in \mathcal{P}(\mathcal{G}'_+)$ їх крос-кореляцією назвемо елемент $U \star P := \Upsilon^{\mathcal{G}_+}(\boldsymbol{u} \star \boldsymbol{p})$, де $\boldsymbol{u} = (\Psi^{\mathcal{G}_+})^{-1}U \in \Gamma(\mathcal{G}'_+)$, $\boldsymbol{p} = (\Upsilon^{\mathcal{G}_+})^{-1}P \in \Gamma(\mathcal{G}_+)$.

Теорема 4.3.3. *Відображення* $\mathsf{K} : \Gamma(\mathcal{G}'_+) \ni \boldsymbol{u} \longmapsto K_{\boldsymbol{u}}^{\otimes} \in \mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{G}_+)\big)$ *здійснює алгебраїчний ізоморфізм з алгебри* $\big\{\Gamma(\mathcal{G}'_+), \circledast\big\}$ *на комутант* $\big[T^{\otimes}\big]^c$ *напівгрупи* $T^{\otimes}$ *в алгебрі* $\big\{\mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{G}_+)\big), \circ\big\}$.

У четвертому параграфі поряд із класом $\mathcal{G}_+$ ультрадиференційовних функцій з компактними в $\mathbb{R}^d_+$ носіями, розглянуто ширший клас $\mathcal{G}_\beta$ ультрадиференційовних функцій, заданих на всьому просторі $\mathbb{R}^d$.

Зафіксуємо довільне дійсне $\beta > 1$. Для додатного числа $h > 0$ і таких векторів $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d)$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_d) \in \mathbb{R}^d$, що $\mu_i < \nu_i$, $i = 1, \dots, d$, в просторі цілих функцій експоненціального типу введемо підпростір $E^h_\beta[\mu, \nu]$ функцій $\mathbb{C}^d \ni z \longmapsto \psi(z) \in \mathbb{C}$ зі скінченною нормою

$$\|\psi\|_{E^h_\beta[\mu,\nu]} := \sup_{k \in \mathbb{Z}^d_+} \sup_{z \in \mathbb{C}^d} \frac{|z^k \psi(z) e^{-H_{[\mu,\nu]}(\eta)}|}{h^{|k|} k^{k\beta}},$$

де $H_{[\mu,\nu]}$ — опорна функція множини $[\mu, \nu]$.

Твердження 4.4.1. *Кожен з просторів* $E^h_\beta[\mu, \nu]$ *є банаховим простором, а всі вкладення* $E^h_\beta[\mu, \nu] \hookrightarrow E^{h'}_\beta[\mu', \nu']$ *при* $[\mu, \nu] \subset [\mu', \nu']$, $h < h'$ *компактні.*

Введемо простір $E_\beta(\mathbb{C}^d) := \bigcup\limits_{\mu \prec \nu,\, h > 0} E^h_\beta[\mu, \nu]$, наділивши його топологією індуктивної границі $E_\beta(\mathbb{C}^d) = \liminf\limits_{\mu \prec \nu,\, h>0} E^h_\beta[\mu, \nu]$ відносно цих вкладень.

Нехай $\mathcal{G}_\beta(\mathbb{R}^d)$ — простір ультрадиференційовних в сенсі Жевре функцій d змінних. Визначимо перетворення Фур'є-Лапласа

$$\widehat{\varphi}(z) := (F\varphi)(z) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(t,z)} \varphi(t)\, dt, \qquad \varphi \in \mathcal{G}_\beta(\mathbb{R}^d),\ z \in \mathbb{C}^d.$$

Теорема 4.4.1. *Справджуються топологічні ізоморфізми*

$$F(\mathcal{G}_\beta(\mathbb{R}^d)) \simeq E_\beta(\mathbb{C}^d) \quad \textit{та} \quad F'^{-1}(\mathcal{G}'_\beta(\mathbb{R}^d)) \simeq E'_\beta(\mathbb{C}^d).$$

Для спрощення записів введемо позначення $\mathcal{G}_\beta := \mathcal{G}_\beta(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{G}'_\beta := \mathcal{G}'_\beta(\mathbb{R}^d)$, $E_\beta := E_\beta(\mathbb{C}^d)$, $E'_\beta := E'_\beta(\mathbb{C}^d)$.

Для елементів тотальних підмножин просторів $\mathcal{G}_\beta^{\widehat{\otimes}n}$ і $\mathcal{G}_\beta'^{\widehat{\otimes}n}$ визначимо оператори $\mathcal{F}^{\otimes n}$ і $\mathcal{F}'^{\otimes n}$ співвідношеннями $\mathcal{F}^{\otimes 0} = \mathcal{F}'^{\otimes 0} := I_{\mathbb{C}}$, $\mathcal{F}^{\otimes n} : \varphi^{\otimes n} \longmapsto \widehat{\varphi}^{\otimes n}$, $\mathcal{F}'^{\otimes n} : f^{\otimes n} \longmapsto \widehat{f}^{\otimes n}$, де $\widehat{\varphi}^{\otimes n} := (F\varphi)^{\otimes n}$, $\widehat{f}^{\otimes n} := \left(F'^{-1}f\right)^{\otimes n}$, $\varphi \in \mathcal{G}_\beta$, $f \in \mathcal{G}_\beta'$. Далі розширимо ці відображення на весь відповідний простір $\mathcal{G}_\beta^{\widehat{\otimes}n}$ і $\mathcal{G}_\beta'^{\widehat{\otimes}n}$ за лінійністю та неперервністю, в результаті отримаємо $\mathcal{F}^{\otimes n} \in \mathscr{L}\big(\mathcal{G}_\beta^{\widehat{\otimes}n}, E_\beta^{\widehat{\otimes}n}\big)$ і $\mathcal{F}'^{\otimes n} \in \mathscr{L}\big(\mathcal{G}_\beta'^{\widehat{\otimes}n}, E_\beta'^{\widehat{\otimes}n}\big)$. Нарешті перетворення $\mathcal{F}^{\otimes}$ і $\mathcal{F}'^{\otimes}$ визначимо відповідно як відображення

$$\mathcal{F}^{\otimes} := \big(\mathcal{F}^{\otimes n}\big) : \Gamma(\mathcal{G}_\beta) \ni \boldsymbol{p} = \big(p_n\big) \quad \longmapsto \quad \widehat{\boldsymbol{p}} := \big(\widehat{p}_n\big) \in \Gamma(E_\beta),$$

$$\mathcal{F}'^{\otimes} := \big(\mathcal{F}'^{\otimes n}\big) : \Gamma(\mathcal{G}_\beta') \ni \boldsymbol{u} = \big(u_n\big) \quad \longmapsto \quad \widehat{\boldsymbol{u}} := \big(\widehat{u}_n\big) \in \Gamma(E_\beta'),$$

де $p_n \in \mathcal{G}_\beta^{\widehat{\otimes}n}$, $\widehat{p}_n := \mathcal{F}^{\otimes n} p_n \in E_\beta^{\widehat{\otimes}n}$, $u_n \in \mathcal{G}_\beta'^{\widehat{\otimes}n}$, $\widehat{u}_n := \mathcal{F}'^{\otimes n} u_n \in E_\beta'^{\widehat{\otimes}n}$.

На просторах $\mathcal{P}(\mathcal{G}_\beta')$ і $\mathcal{P}'(\mathcal{G}_\beta')$ відповідні оператори $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}^{\otimes} \in \mathscr{L}\big(\mathcal{P}(\mathcal{G}_\beta'), \mathcal{P}(E_\beta')\big)$ і $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}'^{\otimes} \in \mathscr{L}\big(\mathcal{P}'(\mathcal{G}_\beta'), \mathcal{P}'(E_\beta')\big)$ задамо формулами $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}^{\otimes} := \Upsilon^{E_\beta} \circ \mathcal{F}^{\otimes} \circ \big(\Upsilon^{\mathcal{G}_\beta}\big)^{-1}$ і $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}'^{\otimes} := \Psi^{E_\beta'} \circ \mathcal{F}'^{\otimes} \circ \big(\Psi^{\mathcal{G}_\beta'}\big)^{-1}$ відповідно. Їх назвемо перетворенням Фур'є-Лапласа поліноміальних ультрадиференційовних функцій та поліноміальних ультрарозподілів відповідно.

Теорема 4.4.2. *Перетворення Фур'є-Лапласа $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}^{\otimes}$ діє як топологічний ізоморфізм з алгебри $\mathcal{P}(\mathcal{G}_\beta')$ на алгебру $\mathcal{P}(E_\beta')$.*

Теорема 4.4.3. *Перетворення Фур'є-Лапласа $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}'^{\otimes}$ діє як топологічний ізоморфізм з алгебри $\mathcal{P}'(\mathcal{G}_\beta')$ на алгебру $\mathcal{P}'(E_\beta')$.*

У п'ятому розділі побудовано функціональне числення типу Хілле-Філліпса та його узагальнення для операторів, заданих на деякому банаховому просторі, класом символів такого числення є різні аналітичні в трубчастих областях функції скінченної чи нескінченної кількості змінних.

У першому параграфі описано підхід, що узагальнює класичне числення Хілле-Філліпса в тому сенсі, що замість алгебри мір на $\mathbb{R}_+$, яка розглянута в класичному випадку, використано згорткову алгебру $\mathcal{S}_+'$ узагальнених функцій повільного росту з носіями в конусі $\mathbb{R}_+^d$. Побудоване числення задане для генераторів $A = (A_1, \ldots, A_d)$ багатопараметричних рівномірно обмежених (C_0) напівгруп операторів, що діють в деякому банаховому просторі.

Кожен елемент $x \in E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{S}_+$ можна представити (взагалі кажучи, не єдиним чином) у вигляді суми абсолютно збіжного ряду $x = \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j x_j \otimes \varphi_j$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $x_j \in E$, $\varphi_j \in \mathcal{S}_+$, де $\sum_j |\lambda_j| < \infty$, а послідовності $\{x_j\}$ і $\{\varphi_j\}$ збігаються до нуля у відповідних просторах.

Для довільного $s \in \mathbb{R}_+^d$ розглянемо оператор зсуву T_s, який визначений на просторі $\mathcal{S}_+$ формулою $T_s : \varphi(t) \longmapsto \varphi(t+s)|_{\mathbb{R}_+^d}$ для всіх $\varphi \in \mathcal{S}_+$. Крос-кореляцією розподілу $f \in \mathcal{S}_+'$ і функції $\varphi \in \mathcal{S}_+$ назвемо функцію вигляду $(f \star \varphi)(t) := \langle f(s), T_s\varphi(t)\rangle = \langle f(s), \varphi(t+s)\rangle$, $t \in \mathbb{R}_+^d$. Кожному розподілу f поставимо у відповідність оператор крос-кореляції $K_f \colon \varphi \longmapsto f \star \varphi$.

Нехай $\mathcal{S}_+(E)$ — простір нескінченно диференційовних E-значних швидко спадних функцій на $\mathbb{R}^d_+$. З ядерності простору $\mathcal{S}_+$ випливає топологічний ізоморфізм $\mathcal{S}_+(E) \simeq E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{S}_+$, де $\otimes_{\mathfrak{p}}$ позначає поповнення тензорного добутку в локально опуклій проективній тензорній топології.

Нехай I — одиничний оператор в банаховому просторі E. Для довільного оператора $K \in \mathscr{L}(\mathcal{S}_+)$ рівність $(I \otimes K)x := \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j x_j \otimes K\varphi_j$, де елемент $x \in \mathcal{S}_+(E)$ представлений вигляді абсолютно збіжного ряду, однозначно визначає оператор $I \otimes K \in \mathscr{L}(\mathcal{S}_+(E))$. Тому коректно визначеними є наступні оператори $(I \otimes T_s)x := \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j x_j \otimes T_s\varphi_j$ та $(I \otimes K_f)x := \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j x_j \otimes K_f\varphi_j$, де $s \in \mathbb{R}^d_+$, $x \in \mathcal{S}_+(E)$ і $f \in \mathcal{S}'_+$.

Узагальненою крос-кореляцією розподілу $f \in \mathcal{S}'_+$ і елемента $x \in \mathcal{S}_+(E)$ назвемо векторнозначну функцію з простору $\mathcal{S}_+(E)$ вигляду

$$(f \star x)(t) := \langle f(s), (I \otimes T_s)x(t)\rangle = \langle f(s), x(t+s)\rangle, \qquad s \in \mathbb{R}^d_+.$$

Відповідний оператор узагальненої крос-кореляції має вигляд

$$I \otimes K_f \colon \mathcal{S}_+(E) \ni x \longmapsto (I \otimes K_f)x =: f \star x \in \mathcal{S}_+(E).$$

Теорема 5.1.2. *Відображення $\mathcal{K} : \mathcal{S}'_+ \ni f \longmapsto K_f \in \mathscr{L}(\mathcal{S}_+)$ здійснює ізоморфізм з алгебри $\mathcal{S}'_+$ на комутант $[T]^c \subset \mathscr{L}(\mathcal{S}_+)$ напівгрупи зсувів T, при цьому K_δ — одиничний оператор і $K_{f*g} = K_f \circ K_g$ для всіх $f, g \in \mathcal{S}'_+$.*

Розглянемо (C_0) напівгрупу узагальнених зсувів $I \otimes T = \{I \otimes T_s \colon s \in \mathbb{R}^d_+\}$, визначену на просторі $\mathcal{S}_+(E)$. Кажуть, що оператор $I \otimes K$, де $K \in \mathscr{L}(\mathcal{S}_+)$, є інваріантним відносно напівгрупи узагальнених зсувів $I \otimes T$, якщо $I \otimes (K \circ T_s) = I \otimes (T_s \circ K)$ для всіх $s \in \mathbb{R}^d_+$.

Теорема 5.1.3. *Для довільного розподілу $f \in \mathcal{S}'_+$ оператор $I \otimes K_f$ інваріантний відносно напівгрупи $I \otimes T$. Навпаки, для довільного оператора $K \in \mathscr{L}(\mathcal{S}_+)$ такого, що $I \otimes K$ інваріантний відносно $I \otimes T$, знайдеться така єдина узагальнена функція $f \in \mathcal{S}'_+$, що $K = K_f$ і $I \otimes K = I \otimes K_f$.*

Нехай $\mathbb{C}^d_+ = \{z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}^d \colon x \in \operatorname{int}\mathbb{R}^d_+\}$ — трубчаста область в $\mathbb{C}^d$. Узагальнене перетворення Фур'є $F' \colon f \longmapsto F'[f]$ ізоморфно відображає $\mathcal{S}'$ на себе. Тому F' визначено на $\mathcal{S}'_+$ і образ $F'[\mathcal{S}'_+]$ — замкнутий підпростір в $\mathcal{S}'$.

Узагальнене перетворення Лапласа $\widehat{f}$ розподілу $f \in \mathcal{S}'_+$, яке визначають за формулою $\widehat{f}(z) := \langle f(t), e^{-tz}\rangle$, $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}^d_+$, є комплексною аналітичною функцією в $\mathbb{C}^d_+$. Для довільної функції $f \in \mathcal{S}'_+$ справедливе представлення $\widehat{f}(z) = F'\big[f(t)e^{-tx}\big](y)$. Відомо, що $\widehat{f * g}(z) = \widehat{f}(z) \cdot \widehat{g}(z)$ для всіх $z \in \mathbb{C}^d_+$, тому образ $\widehat{\mathcal{S}'_+}$ простору $\mathcal{S}'_+$ при відображенні $L \colon \mathcal{S}'_+ \ni f \longmapsto \widehat{f} \in \widehat{\mathcal{S}'_+}$ є мультиплікативною алгеброю аналітичних функцій на $\mathbb{C}^d_+$.

Звідси випливає, що перетворення Лапласа $\widehat{\varphi} = L[\varphi]$ функцій з простору $\mathcal{S}_+ \subset \mathcal{S}'_+$ можна визначити формулою $\widehat{\varphi}(z) := \int_{\mathbb{R}^d_+} e^{-tz}\varphi(t)\,dt$ для всіх $z \in \mathbb{C}^d_+$. Розглянемо відповідне відображення $L \colon \varphi \longmapsto L[\varphi]$ з $\mathcal{S}_+$ на образ $\widehat{\mathcal{S}_+} := L[\mathcal{S}_+]$, який наділимо індукованою топологією відносно відображення $L \colon \mathcal{S}_+ \longrightarrow \widehat{\mathcal{S}_+}$. Тоді L — ізоморфізм зі згорткової алгебри $\mathcal{S}_+$ на мультиплікативну підалгебру

$\widehat{\mathcal{S}_+} \subset \widehat{\mathcal{S}'_+}$ аналітичних функцій. Використовуючи відображення L і його обернене L^{-1}, для кожного розподілу $f \in \mathcal{S}'_+$ визначимо оператор $\widehat{K}_f$ і напівгрупу $\widehat{T}$ формулами

$$\widehat{K}_f := L \circ K_f \circ L^{-1} \in \mathscr{L}(\widehat{\mathcal{S}_+}), \qquad \widehat{T} \colon \mathbb{R}^d_+ \ni s \longmapsto \widehat{T}_s := L \circ T_s \circ L^{-1} \in \mathscr{L}(\widehat{\mathcal{S}_+}).$$

Наслідок 5.1.1. *Відображення $\widehat{\mathcal{K}} : \widehat{\mathcal{S}'_+} \ni \widehat{f} \longmapsto \widehat{K}_f \in \mathscr{L}(\widehat{\mathcal{S}_+})$ здійснює ізоморфізм з алгебри $\widehat{\mathcal{S}'_+}$ на комутант $[\widehat{T}]^c$ в алгебрі $\mathscr{L}(\widehat{\mathcal{S}_+})$. Зокрема, справджуються рівності $\widehat{\mathcal{K}}[\widehat{f} \cdot \widehat{g}] = \widehat{K}_{f*g} = \widehat{K}_f \circ \widehat{K}_g$ для всіх $f, g \in \mathcal{S}'_+$ і $\widehat{\mathcal{K}}[\widehat{\delta}] = \widehat{K}_\delta$ — одиничний оператор в $\mathscr{L}(\widehat{\mathcal{S}_+})$.*

Нехай в комплексному банаховому просторі E визначено сімейство рівномірно обмежених d-параметричних (C_0) напівгруп $\{e^{tA}\}_{t\in\mathbb{R}^d_+}$. Клас генераторів таких напівгруп позначимо символом $\mathfrak{A}$. Розглянемо лінійне відображення

$$\mathcal{L} \colon \mathcal{S}_+(E) \ni x \longmapsto \widetilde{x} \in \widetilde{\mathcal{S}}, \qquad \text{де} \qquad \widetilde{x}(A) = \int_{\mathbb{R}^d_+} e^{tA} x(t)\, dt, \quad A \in \mathfrak{A}.$$

Елементами простору $\widetilde{\mathcal{S}}$ є функції вигляду $\widetilde{x} : \mathfrak{A} \ni A \longmapsto \widetilde{x}(A) \in E$. Для кожної функції з простору $\widetilde{\mathcal{S}}$ її значення на операторі $A \in \mathfrak{A}$ можна записати у вигляді

$$\widetilde{x}(A) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j \int_{\mathbb{R}^d_+} e^{tA} x_j \varphi_j(t)\, dt = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j \widehat{\varphi}_j(A) x_j,$$

де справа стоїть збіжний в просторі E ряд.

Для кожного $A \in \mathfrak{A}$ введемо в E підпростір $\widetilde{\mathcal{S}}(A) := \{\widetilde{x}(A) : \widetilde{x} \in \widetilde{\mathcal{S}}\}$.

Визначимо d-параметричну (C_0) напівгрупу на $\widetilde{\mathcal{S}}$ за правилом

$$\widehat{I \otimes T} \colon \mathbb{R}^d_+ \ni s \longmapsto \widehat{I \otimes T_s} \in \mathscr{L}(\widetilde{\mathcal{S}}), \qquad (\widehat{I \otimes T_s})\widetilde{x}(A) = \int_{\mathbb{R}^d_+} e^{tA}(I \otimes T_s) x(t)\, dt.$$

Лема 5.1.2. *Образ відображення $\widehat{I \otimes T_s} : \widetilde{\mathcal{S}} \ni \widetilde{x} \longmapsto \widehat{I \otimes T_s}\widetilde{x}(A) \in E$ щільний в E для кожного $s \in \mathbb{R}^d_+$ і кожного $A \in \mathfrak{A}$. Як наслідок, підпростір $\widetilde{\mathcal{S}}(A)$ щільний в E для кожного $A \in \mathfrak{A}$.*

Користуючись сюр'єктивністю перетворення $L \colon \mathcal{S}'_+ \ni f \longmapsto \widehat{f} \in \widehat{\mathcal{S}'_+}$, задамо відображення $\Phi \colon \widehat{\mathcal{S}'_+} \ni \widehat{f} \longmapsto \widetilde{f} \in \mathscr{L}(\widetilde{\mathcal{S}})$, де

$$(\widetilde{f}\widetilde{x})(A) := \widetilde{f}(A)\widetilde{x}(A) = \int_{\mathbb{R}^d_+} e^{tA}(f \star x)(t)\, dt, \qquad A \in \mathfrak{A}.$$

Зауважимо, що $\widetilde{f}(A)$ для кожного фіксованого $A \in \mathfrak{A}$ діє як оператор $\widetilde{f}(A) : E \ni \widetilde{x}(A) \longmapsto (\widetilde{f}\widetilde{x})(A) \in E$, де $\widetilde{f}\widetilde{x} = \mathcal{L}\big((I \otimes K_f)x\big)$.

Теорема 5.1.4. *Відображення Φ здійснює топологічний ізоморфізм з $\widehat{\mathcal{S}'_+}$ на комутативну підалгебру в $\mathscr{L}(\widetilde{\mathcal{S}})$ всіх операторів $\widehat{I \otimes K} \in \mathscr{L}(\widetilde{\mathcal{S}})$ вигляду $\widehat{I \otimes K}\widetilde{x}(A) = \int_{\mathbb{R}^d_+} e^{tA}(I \otimes K)x(t)\, dt$, $K \in [T]^c$. При цьому, для всіх $f, g \in \mathcal{S}'_+$, $k \in \mathbb{Z}^d_+$ справджуються рівності:*

$$\widetilde{f * g}(A) = \widetilde{f}(A) \circ \widetilde{g}(A), \qquad \widetilde{\delta}(A) = I, \qquad \widetilde{\partial^k f}(A)\widetilde{x}(A) = (-1)^{|k|}\widetilde{f}(A)\widetilde{\partial^k x}(A).$$

Нехай $\{G(t)\colon t \in \mathbb{R}^d_+\}$ — d-параметрична обмежена аналітична напівгрупа на банаховому просторі E з генератором $A = (A_1, \dots, A_d)$. Припустимо, що всі генератори A_j, $j = 1, \dots, d$, марґінальних аналітичних напівгруп ін'єктивні та мають щільні області визначення та образи. У цьому випадку для всіх мультиіндексів $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}^d_+$ коректно визначеними є степені операторів $A^\alpha := A_1^{\alpha_1} \circ \dots \circ A_d^{\alpha_d}$ з відповідними щільними областями визначення $\mathfrak{D}(A^\alpha) := \bigcap_{j=1}^d \mathfrak{D}(A_j^{\alpha_j})$. Введемо позначення $\mathfrak{D}(A^\infty) = \bigcap_{\alpha \in \mathbb{Z}^d_+} \mathfrak{D}(A^\alpha)$.

Теорема 5.1.5. *Для довільного оператора $A \in \mathfrak{A}$ виконуєтьcя вкладення $\widetilde{\mathcal{S}}(A) \subset \mathfrak{D}(A^\infty)$. Крім того,*

$$\widetilde{f}(A)\widetilde{\partial_j^{k_j} x}(A) = (-1)^{k_j} A_j^{k_j} \widetilde{f}(A)\widetilde{x}(A) - \sum_{l=0}^{k_j-1} (-A_j)^{k_j-l-1} \lim_{t_j \to +0} \int_{\mathbb{R}^{d-1}_+} e^{tA} \partial_j^l (f \star x)(t)\, \check{d}_j t$$

для довільного $k_j \in \mathbb{Z}_+$, де позначено $\check{d}_j t := dt_1 \dots dt_{j-1}\, dt_{j+1} \dots dt_d$ для всіх $j = 1, \dots, d$.

У другому параграфі побудовано числення для генераторів багатопараметричних аналітичних напівгруп операторів, що діють в банаховому просторі. Алгебра символів такого числення складається з аналітичних в деякій трубчастій області функцій, які є перетвореннями Лапласа розподілів Шварца повільного росту з носіями в додатному конусі.

Нехай $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(A^{-1})$ позначає щільний підпростір, наділений нормою $\|x\|_{\mathfrak{D}} := \|x\| + \sum_{j=1}^d \|A_j x\| + \sum_{j=1}^d \|A_j^{-1} x\|$. При наших припущеннях — це банаховий простір. Крім того, кожен простір $\mathfrak{D}^\alpha = \mathfrak{D}(A^\alpha) \cap \mathfrak{D}(A^{-\alpha})$, $\alpha \in \mathbb{Z}^d_+$, наділений нормою $\|x\|_{\mathfrak{D}^\alpha} = \sum_{-\alpha \preccurlyeq \mu \preccurlyeq \alpha} \|A^\mu x\|_{\mathfrak{D}}$ є повним.

Визначимо простір $\mathfrak{U} := \bigcap \left\{\mathfrak{D}^\alpha \colon \alpha \in \mathbb{Z}^d_+\right\}$ і наділимо його топологією проективної границі відносно включень $\mathfrak{D}^\alpha \hookrightarrow \mathfrak{D}^\mu$ для всіх таких $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d)$, що $\mu_i \le \alpha_i$, $i = 1, \dots, d$. Зауважимо, що при цьому $\mathfrak{U}$ стає простором Фреше.

Лема 5.2.3. *Нехай $\{e^{-tA} : t \in \mathbb{R}^d_+\}$ — обмежена аналітична напівгрупа над банаховим простором E. Підпростір $\mathfrak{U}$ є інваріантним відносно дії операторів e^{-tA} для довільного $t \in \mathbb{R}^d_+$, крім того він щільний в E.*

Користуючись сюр'єктивністю перетворення $L\colon \mathcal{S}'_+ \ni f \longmapsto \widehat{f} \in \widehat{\mathcal{S}'_+}$, задамо відображення

$$\varPhi\colon \widehat{\mathcal{S}'_+} \ni \widehat{f} \longmapsto \widehat{f}(A) \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}, E), \quad \text{де} \quad \widehat{f}(A)x = \left\langle f(t), e^{-tA}x \right\rangle, \quad x \in \mathfrak{U}.$$

Теорема 5.2.1. *Відображення $\varPhi$ здійснює неперервний гомоморфізм з алгебри $\widehat{\mathcal{S}'_+}$ аналітичних функцій в комутант напівгрупи $\{e^{-tA} : t \in \mathbb{R}^d_+\}$. Оператори з образу $\varPhi\big[\widehat{\mathcal{S}'_+}\big]$ задовольняють наступну рівність $\widehat{f * g}(A) = \widehat{f}(A) \circ \widehat{g}(A)$, $f, g \in \mathcal{S}'_+$, і $\widehat{\delta}_0(A) = I$ — одиничний оператор.*

Встановимо деякі диференціальні властивості операторів $\widehat{f}(A)$, що характерні для скалярного перетворення Лапласа.

Символом $\mathfrak{U}\otimes_{\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+$ позначимо підпростір в $E\otimes_{\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+\simeq\mathcal{S}_+(E)$ всіх функцій вигляду $x\colon\mathbb{R}^d_+\ni t\longmapsto x(t)\in\mathfrak{U}$. Визначимо в банаховому просторі E підпростір $\widehat{\mathfrak{U}}$ наступним чином

$$\widehat{\mathfrak{U}}:=\big\{\widehat{x}_A\in E\colon x\in\mathfrak{U}\otimes_{\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+\big\},\qquad \text{де}\qquad \widehat{x}_A:=\int_{\mathbb{R}^d_+}e^{-tA}x(t)\,dt.$$

Лема 5.2.4. *Підпростір* $\widehat{\mathfrak{U}}\subset\mathfrak{U}$ *щільний в* E.
Теорема 5.2.2. *Справджується рівність* $\widehat{\partial^\alpha f}(A)x=A^\alpha\widehat{f}(A)x$, $x\in\mathfrak{U},\alpha\in\mathbb{Z}^d_+$.
Теорема 5.2.3. *Для* $\alpha\in\mathbb{N}$ *і* $j=1,\dots,d$ *справджуються рівності*

$$\widehat{f}(A)\widehat{\partial^\alpha_j x}_A=A^\alpha_j\widehat{f}(A)\widehat{x}_A-\sum_{r=0}^{\alpha-1}A_j^{\alpha-r-1}\widehat{f}(A)\widetilde{\partial^r_j\Lambda x}_{A_j}(0),\qquad \widehat{x}_A\in\widehat{\mathfrak{U}}.$$

У третьому параграфі побудовано нескінченновимірний варіант розглянутих вище числень операторів. А саме, побудовано функціональне числення типу Хілле-Філліпса для зліченного набору генераторів (C_0) напівгруп стиску, що діють в деякому банаховому просторі.

Нехай E — комплексний банахів простір. Символом $\mathfrak{A}$ позначимо множину, елементами якої є зліченні набори $\mathbf{A}:=(\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\dots,\mathbf{A}_n,\dots)$ операторів, що діють в E. Позначимо $A_n:=(\mathbf{A}_{\mathfrak{b}_n},\dots,\mathbf{A}_{\mathfrak{e}_n})$, де $\mathfrak{b}_n:=\frac{n(n-1)}{2}+1$, $\mathfrak{e}_n:=\frac{n(n+1)}{2}$. Тоді цю зліченну систему операторів можна записати у вигляді $\mathbf{A}=(A_1,A_2,\dots,A_n,\dots)$ або скорочено $\mathbf{A}=\big(A_n\big)$.

Нехай A_n є генератором n-параметричної (C_0) напівгрупи $\mathbb{R}^n_+\ni t\longmapsto e^{-\mathrm{i}t\cdot A_n}\in\mathscr{L}(E)$, що задовольняє умову $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}^n_+}\|e^{-\mathrm{i}t\cdot A_n}\|_{\mathscr{L}(E)}\le 1$, де для довільного $t\in\mathbb{R}^n_+$ позначено $t\cdot A_n:=t_1\mathbf{A}_{\mathfrak{b}_n}+\dots+t_n\mathbf{A}_{\mathfrak{e}_n}$.

Припустимо, що оператори групи $A_n=(\mathbf{A}_{\mathfrak{b}_n},\dots,\mathbf{A}_{\mathfrak{e}_n})$ для всіх $n\in\mathbb{N}$ комутують один з одним. Для кожного $n\in\mathbb{N}$ нехай $\mathfrak{A}_n$ — множина, елементами якої є набори з n генераторів однопараметричних (C_0) напівгруп стиску.

Визначимо відображення $\boldsymbol{\mathcal{L}}:=(\mathcal{L}_n)\colon\Gamma(\mathcal{S}_+)\ni\boldsymbol{p}=\big(p_n\big)\mapsto\widetilde{\boldsymbol{p}}:=\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\widetilde{p}_n\in\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{S}}}$, де $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{S}}}:=\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\widetilde{\mathcal{S}}_n$. Зауважимо, що для кожного $n\in\mathbb{Z}_+$ множина $\widetilde{\mathcal{S}}_n$ визначена як простір функцій

$$\widetilde{p}_n:\mathfrak{A}_n\ni A_n\longmapsto\widetilde{p}_n(A_n):=\int_{\mathbb{R}^n_+}e^{-\mathrm{i}t\cdot A_n}p_n(t)\,dt\in\mathscr{L}(E)$$

для $n\in\mathbb{N}$, а $\widetilde{p}_0:=p_0I_E\in\mathscr{L}(E)$.

Визначимо однопараметричну напівгрупу $\widetilde{T}^\otimes:\mathbb{R}_+\ni s\longmapsto\widetilde{T}^\otimes_s\in\mathscr{L}\big(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{S}}}\big)$ на просторі $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{S}}}$ за правилом

$$\widetilde{T}^\otimes_s:=\big(\widetilde{T}^{\otimes n}_s\big)\colon\widetilde{\boldsymbol{p}}=\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\widetilde{p}_n\quad\longmapsto\quad\widetilde{T}^\otimes_s\widetilde{\boldsymbol{p}}:=\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\widetilde{T}^{\otimes n}_s\widetilde{p}_n.$$

При цьому функцію $\widetilde{T}^{\otimes n}_s\widetilde{p}_n\in\widetilde{\mathcal{S}}_n$ ми визначаємо наступним чином

$$\widetilde{T}^{\otimes n}_s\widetilde{p}_n\colon A_n\longmapsto\widetilde{T}^{\otimes n}_s\widetilde{p}_n(A_n):=\int_{\mathbb{R}^n_+}e^{-\mathrm{i}t\cdot A_n}p_n(t+s)\,dt,$$

де для простоти позначено $p_n(t+s):=p_n(t_1+s,\dots,t_n+s)$.

Використовуючи властивості інтеграла Бохнера, можна довести, що для довільного елемента $\boldsymbol{p} = \big(p_n\big) \in \Gamma(\mathcal{S}_+)$ при $p_n = \varphi^{\otimes n} \in \mathcal{S}_+^{\widehat{\otimes} n}$, $\varphi \in \mathcal{S}_+$, справджується рівність $\widetilde{T_s^{\otimes}\boldsymbol{p}}(\mathbf{A}) = \widetilde{T}_s^{\otimes}\widetilde{\boldsymbol{p}}(\mathbf{A})$ для всіх $s \in \mathbb{R}_+$ і $\mathbf{A} := \big(A_n\big) \in \mathfrak{A}$. Звідси випливає, що оператор $\widetilde{T}_s^{\otimes}$ можна представити у вигляді $\widetilde{T}_s^{\otimes} = \mathcal{L} \circ T_s^{\otimes} \circ \mathcal{L}^{-1}$.

Визначимо операцію $\big(f^{\otimes n}\big) \circledast \big(g^{\otimes n}\big) := \big((f * g)^{\otimes n}\big)$ для елементів тотальної підмножини простору $\Gamma(\mathcal{S}'_+)$ і розширимо її на весь простір за лінійністю та неперервністю. Очевидно, що $\Gamma(\mathcal{S}'_+)$ є алгеброю відносно $\circledast$. Оскільки простір $\Gamma(\mathcal{S}_+)$ неперервно і щільно вкладений в $\Gamma(\mathcal{S}'_+)$, а простір $\mathcal{S}_+$ є згортковою алгеброю, то простір $\Gamma(\mathcal{S}_+)$ теж є алгеброю відносно $\circledast$.

Відображення $\mathcal{L}\colon \Gamma(\mathcal{S}_+) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{S}}$ є гомоморфізмом з алгебри $\{\Gamma(\mathcal{S}_+), \circledast\}$ в алгебру операторнозначних функцій, заданих на $\mathfrak{A}$. З іншого боку, відображення $\mathcal{F}^{\otimes} : \Gamma(\mathcal{S}_+) \longrightarrow \Gamma(\widehat{\mathcal{S}}_+)$ також є гомоморфізмом. Тому відображення $\mathcal{L} \circ (\mathcal{F}^{\otimes})^{-1}\colon \Gamma(\widehat{\mathcal{S}}_+) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{S}}$ можна розуміти як "елементарне" функціональне числення. Іншими словами, оператор $\widetilde{\boldsymbol{p}}(\mathbf{A}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \widetilde{p}_n(A_n) \in \mathscr{L}(E)$ ми розуміємо як "значення" функції

$$\widehat{\boldsymbol{p}} : (\xi_1, \dots, \xi_n, \dots) \longmapsto \big(\widehat{p}_0, \widehat{p}_1(\xi_1), \widehat{p}_2(\xi_2, \xi_3), \dots, \widehat{p}_n(\xi_{\mathfrak{b}_n}, \dots, \xi_{\mathfrak{e}_n}), \dots\big)$$

на зліченному наборі $\mathbf{A} := (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n, \dots) \in \mathfrak{A}$ генераторів однопараметричних (C_0) напівгруп стиску.

Визначимо відображення

$$\mathit{\Phi} := \big(\mathit{\Phi}_n\big) : \Gamma(\mathcal{S}'_+) \ni \boldsymbol{u} = \big(u_n\big) \quad \longmapsto \quad \mathit{\Phi}_{\boldsymbol{u}} := \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathit{\Phi}_{u_n} \in \mathscr{L}\big(\widetilde{\mathcal{S}}\big),$$

де $u_n := f^{\otimes n} \in \mathcal{S}'^{\widehat{\otimes} n}_+$, $f \in \mathcal{S}'_+$. При цьому функція $\mathit{\Phi}_{u_n} \in \mathscr{L}\big(\widetilde{\mathcal{S}}_n\big)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, визначена за формулами: $(\mathit{\Phi}_{u_0}\widetilde{p}_0)(A_0) := I_E$ і

$$\mathit{\Phi}_{u_n} : \widetilde{p}_n \longmapsto \mathit{\Phi}_{u_n}\widetilde{p}_n, \quad \text{де} \quad (\mathit{\Phi}_{u_n}\widetilde{p}_n)(A_n) := \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-\mathrm{i}t\cdot A_n} K_f^{\otimes n} p_n(t)\, dt, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 5.3.2. *Відображення $\mathit{\Phi}$ діє як алгебраїчний ізоморфізм з алгебри $\big\{\Gamma(\mathcal{S}'_+), \circledast\big\}$ в підалгебру комутанта $\big[\widetilde{T}^{\otimes}\big]^c$ операторів вигляду $\mathcal{L} \circ K^{\otimes} \circ \mathcal{L}^{-1} \in \mathscr{L}\big(\widetilde{\mathcal{S}}\big)$, де $K \in \mathscr{L}(\mathcal{S}_+)$. Зокрема, справджується рівність $\mathit{\Phi}_{\boldsymbol{u}\circledast\boldsymbol{v}} = \mathit{\Phi}_{\boldsymbol{u}} \circ \mathit{\Phi}_{\boldsymbol{v}}$ для всіх $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \Gamma(\mathcal{S}'_+)$, а оператор $\mathit{\Phi}_{\boldsymbol{\delta}}$ діє як тотожний в $\mathscr{L}\big(\widetilde{\mathcal{S}}\big)$, де $\boldsymbol{\delta} = \big(1, \delta, \dots, \delta^{\otimes n} \dots\big)$. Більше того, справджується диференціальна властивість $\mathit{\Phi}_{\mathbb{D}'\boldsymbol{u}}\widetilde{\boldsymbol{p}} = -\mathit{\Phi}_{\boldsymbol{u}}\widetilde{\mathbb{D}\boldsymbol{p}}$ для довільних $\boldsymbol{u} \in \Gamma(\mathcal{S}'_+)$ і $\boldsymbol{p} \in \Gamma(\mathcal{S}_+)$.*

Для довільного фіксованого $\boldsymbol{p} \in \Gamma(\mathcal{S}_+)$ відображення $\Gamma(\mathcal{S}'_+) \ni \boldsymbol{u} \longmapsto \mathit{\Phi}_{\boldsymbol{u}}\widetilde{\boldsymbol{p}} \in \widetilde{\mathcal{S}}$ є гомоморфізмом з алгебри $\big\{\Gamma(\mathcal{S}'_+), \circledast\big\}$ в алгебру операторнозначних функцій, заданих на $\mathfrak{A}$. Тому ми можемо розуміти це відображення як функціональне числення в алгебрі поліноміальних розподілів повільного росту. Функція $\mathit{\Phi}_{\boldsymbol{u}}\widetilde{\boldsymbol{p}}$ операторного аргумента може бути записана у вигляді $\mathit{\Phi}_{\boldsymbol{u}}\widetilde{\boldsymbol{p}} = \widetilde{\boldsymbol{u} \star \boldsymbol{p}}$. Тому оператор $\mathit{\Phi}_{\boldsymbol{u}}\widetilde{\boldsymbol{p}}(\mathbf{A}) = \widetilde{\boldsymbol{u} \star \boldsymbol{p}}(\mathbf{A}) \in \mathscr{L}(E)$ можна розуміти як "значення" функції $\widehat{\boldsymbol{u} \star \boldsymbol{p}}$ нескінченної кількості змінних на зліченному наборі $\mathbf{A} := (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n, \dots) \in \mathfrak{A}$ генераторів (C_0) напівгруп стиску.

У шостому розділі розглянуто функціональне числення в класах цілих аналітичних функцій нескінченної кількості змінних.

У першому параграфі побудовано функціональне числення для зліченного набору генераторів сильно неперервних груп операторів в класі Фур'є-образів поліноміальних ультрарозподілів, які є цілими аналітичними функціями зліченної кількості змінних. А саме, для зліченної кількості генераторів сильно неперервних груп операторів, заданих на гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, побудовано операторне числення, що задане на симетричному просторі Фока $\mathfrak{F}(\mathcal{H}) := \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{H}^{\widehat{\otimes} n}$.

Нагадаємо, що елементи простору $\Gamma(E_\beta) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} E_\beta^{\widehat{\otimes} n}$ мають вигляд $\widehat{\boldsymbol{p}} = \big(\widehat{p}_n\big)$, де $\widehat{p}_n = F^{\otimes n} p_n \in E_\beta^{\widehat{\otimes} n}$ для деякого $\boldsymbol{p} = \big(p_n\big) \in \Gamma(\mathcal{G}_\beta)$, $p_n \in \mathcal{G}_\beta^{\widehat{\otimes} n}$. Для простоти розглянемо одновимірний випадок, тобто $d = 1$. Елементи простору $\Gamma(E_\beta)$ можна розуміти як функції нескінченної кількості змінних

$$\widehat{\boldsymbol{p}} : \bigtimes_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{C} \ni (z_1, \dots, z_n, \dots) \quad \longmapsto \quad \widehat{\boldsymbol{p}}(z_1, \dots, z_n, \dots) \in \mathbb{C},$$

де $\widehat{\boldsymbol{p}}(z_1, \dots, z_n, \dots) := \widehat{p}_0 + \widehat{p}_1(z_1) + \widehat{p}_2(z_2, z_3) + \dots + \widehat{p}_n(z_{\mathfrak{b}_n}, \dots, z_{\mathfrak{e}_n}) + \dots$.

Зауважимо, що $\widehat{p}_n$ є функцією n комплексних змінних. З означення симетричного тензорного добутку випливає, що $\widehat{p}_n$ є симетричною функцією.

Нехай $\mathcal{H}$ — комплексний гільбертів простір. Розглянемо зліченний набір неперервних операторів $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n, \dots)$, що діють в просторі $\mathcal{H}$. Жодних умов комутативності операторів такого набору ми не накладаємо.

Припустимо, що $\mathbf{A}_j$ для кожного $j \in \mathbb{N}$ генерує однопараметричну сильно неперервну групу стиску $\mathbb{R} \ni t \longmapsto e^{-\mathrm{i}t\mathbf{A}_j} \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$.

Позначимо $\mathscr{A}_j := \underbrace{I_\mathcal{H} \otimes \dots \otimes I_\mathcal{H}}_{j} \otimes \mathbf{A}_j \otimes I_\mathcal{H} \otimes \dots \in \mathscr{L}(\mathfrak{F}(\mathcal{H}))$, $j \in \mathbb{N}$. За означенням приймемо $\mathscr{A}_0 := I_\mathcal{H} \otimes I_\mathcal{H} \otimes \dots \in \mathscr{L}(\mathfrak{F}(\mathcal{H}))$.

Для кожного натурального n позначимо $A_n := \mathscr{A}_{\mathfrak{b}_n} \otimes \dots \otimes \mathscr{A}_{\mathfrak{e}_n}$, де $\mathfrak{b}_n := \frac{n(n-1)}{2} + 1$, $\mathfrak{e}_n := \frac{n(n+1)}{2}$. Приймемо за означенням $A_0 := \mathscr{A}_0$.

Тепер замість набору $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n, \dots)$, взагалі кажучи, не комутуючих операторів, що діють в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, розглянемо зліченний набір $A := (A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots)$ комутуючих операторів, що діють в просторі Фока $\mathfrak{F}(\mathcal{H})$. Позначимо символом $\mathscr{G}$ множину, елементами якої є зліченні набори вказаного вигляду.

Зауважимо, що для кожного $n \in \mathbb{Z}_+$ оператор A_n є тотожним оператором на $\mathcal{H}^{\widehat{\otimes} k}$ для всіх $k \neq n$. Тому, не обмежуючи загальності, можна вважати, що $A_n \in \mathscr{L}(\mathcal{H}^{\widehat{\otimes} n})$, $n \in \mathbb{Z}_+$. При цьому оператор A_n генерує сильно неперервну n-параметричну групу

$$\mathbb{R}^n \ni t = (t_1, \dots, t_n) \longmapsto e^{-\mathrm{i}tA_n} := e^{-\mathrm{i}t_1\mathscr{A}_{\mathfrak{b}_n}} \otimes \dots \otimes e^{-\mathrm{i}t_n\mathscr{A}_{\mathfrak{e}_n}} \in \mathscr{L}(\mathfrak{F}(\mathcal{H})),$$

де $e^{-\mathrm{i}t_i\mathscr{A}_j} := I_\mathcal{H} \otimes \dots \otimes I_\mathcal{H} \otimes e^{-\mathrm{i}t_i\mathbf{A}_j} \otimes I_\mathcal{H} \otimes \dots$, $i = 1, \dots, n$, $j \in \mathbb{N}$. Не обмежуючи загальності можна вважати, що $e^{-\mathrm{i}tA_n} \in \mathscr{L}(\mathcal{H}^{\widehat{\otimes} n})$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Нехай $\mathscr{G}$ позначає множину, елементами якої є описані вище зліченні системи операторів, а $\mathscr{G}_n$ — множину, елементами якої є оператори $A_n = \mathscr{A}_{\mathfrak{b}_n} \otimes \cdots \otimes \mathscr{A}_{\mathfrak{e}_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Приймемо за означенням $\mathscr{G}_0 := \{\mathscr{A}_0\}$.

Визначимо множину $\widetilde{\mathcal{H}}_n := \{\widetilde{p}_n : \mathscr{G}_n \longrightarrow \mathscr{L}(\mathcal{H}^{\widehat{\otimes} n}) : p_n \in \mathcal{G}_\beta^{\widehat{\otimes} n}\}$ для кожного $n \in \mathbb{Z}_+$, що складається із функцій операторного аргумента вигляду

$$\widetilde{p}_n(A_n) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\mathrm{i}t_1 \mathscr{A}_{\mathfrak{b}_n}} \otimes \cdots \otimes e^{-\mathrm{i}t_n \mathscr{A}_{\mathfrak{e}_n}} p_n(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n.$$

Приймемо за означенням $\widetilde{p}_0 \colon \mathscr{G}_0 \ni A_0 \longmapsto \widetilde{p}_0(A_0) := p_0 I_{\mathbb{C}} \in \mathscr{L}(\mathbb{C})$.

Визначимо відображення

$$\mathcal{F} := (\mathcal{F}_n) \colon \Gamma(\mathcal{G}_\beta) \ni \boldsymbol{p} = \big(p_n\big) \;\longmapsto\; \widetilde{\boldsymbol{p}} := \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \widetilde{p}_n \in \widetilde{\mathcal{H}}, \qquad \text{де} \quad \widetilde{\mathcal{H}} := \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \widetilde{\mathcal{H}}_n.$$

Відображення $\mathcal{F}$ діє як гомоморфізм з алгебри $\big\{\Gamma(\mathcal{G}_\beta), \circledast\big\}$ в алгебру $\widetilde{\mathcal{H}}$ функцій операторного аргумента, визначених на $\mathscr{G}$ із значеннями в просторі операторів на просторі Фока. З іншого боку, відображення $F^{\otimes} : \Gamma(\mathcal{G}_\beta) \longrightarrow \Gamma(E_\beta)$ також є гомоморфізмом. Тому композицію $\mathcal{F} \circ (F^{\otimes})^{-1} \colon \Gamma(E_\beta) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{H}}$ цих відображень ми розуміємо як функціональне числення. Іншими словами, оператор $\widetilde{\boldsymbol{p}}(A) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \widetilde{p}_n(A_n) \in \mathscr{L}(\mathfrak{F}(\mathcal{H}))$ є "значенням" функції $\widehat{\boldsymbol{p}}$ нескінченної кількості змінних на зліченному наборі $A = (A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots) \in \mathscr{G}$ операторів.

Розглянемо на просторі $\widetilde{\mathcal{H}}$ аналогічну до вище розглянутої однопараметричну групу $\widetilde{T}^{\otimes} : \mathbb{R} \ni s \longmapsto \widetilde{T}_s^{\otimes} \in \mathscr{L}\big(\widetilde{\mathcal{H}}\big)$, де

$$\widetilde{T}_s^{\otimes} := \big(\widetilde{T}_s^{\otimes n}\big) \colon \widetilde{\boldsymbol{p}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \widetilde{p}_n \longmapsto \widetilde{T}_s^{\otimes} \widetilde{\boldsymbol{p}} := \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \widetilde{T}_s^{\otimes n} \widetilde{p}_n.$$

Визначимо відображення $\mathcal{Q} : \Gamma(\mathcal{G}'_\beta) \ni \boldsymbol{u} = \big(f^{\otimes n}\big) \longmapsto \mathcal{Q}_{\boldsymbol{u}} := \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{Q}_{f^{\otimes n}} \in \mathscr{L}\big(\widetilde{\mathcal{H}}\big)$, де $f \in \mathcal{G}'_\beta$. У свою чергу оператори $\mathcal{Q}_{f^{\otimes n}} \in \mathscr{L}\big(\widetilde{\mathcal{H}}_n\big)$ визначимо за допомогою формул: $(\mathcal{Q}_{f^{\otimes 0}} \widetilde{p}_0)(A_0) := I_{\mathbb{C}}$ та $\mathcal{Q}_{f^{\otimes n}} : \widetilde{p}_n \longmapsto \mathcal{Q}_{f^{\otimes n}} \widetilde{p}_n$ для кожного натурального n, де

$$(\mathcal{Q}_{f^{\otimes n}} \widetilde{p}_n)(A_n) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\mathrm{i}t_1 \mathscr{A}_{\mathfrak{b}_n}} \otimes \cdots \otimes e^{-\mathrm{i}t_n \mathscr{A}_{\mathfrak{e}_n}} K_f^{\otimes n} p_n(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n.$$

Теорема 6.1.1. *Відображення $\mathcal{Q}$ здійснює алгебраїчний ізоморфізм з алгебри $\big\{\Gamma(\mathcal{G}'_\beta), \circledast\big\}$ на підалгебру в комутанті $\big[\widetilde{T}^{\otimes}\big]^c$ групи $\widetilde{T}^{\otimes}$ операторів вигляду $\widetilde{K}^{\otimes} = \mathcal{F} \circ K^{\otimes} \circ \mathcal{F}^{-1} \in \mathscr{L}\big(\widetilde{\mathcal{H}}\big)$, де $K \in \mathscr{L}(\mathcal{G}_\beta)$. Зокрема, для всіх $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \Gamma(\mathcal{G}'_\beta)$ справджується рівність $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{u} \circledast \boldsymbol{v}} = \mathcal{Q}_{\boldsymbol{u}} \circ \mathcal{Q}_{\boldsymbol{v}}$. Крім того, оператор $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{\delta}}$ є одиничним в $\mathscr{L}\big(\widetilde{\mathcal{H}}\big)$, де $\boldsymbol{\delta} = \big(1, \delta, \ldots, \delta^{\otimes n} \ldots\big)$.*

Відображення $\mathsf{K}_{\boldsymbol{p}} : \Gamma(\mathcal{G}'_\beta) \ni \boldsymbol{u} \longmapsto \boldsymbol{u} \star \boldsymbol{p} \in \Gamma(\mathcal{G}_\beta)$ при кожному фіксованому $\boldsymbol{p} \in \Gamma(\mathcal{G}_\beta)$ є гомоморфізмом відповідних алгебр. З іншого боку відображення $\Gamma(\mathcal{G}'_\beta) \ni \boldsymbol{u} \longmapsto \mathcal{Q}_{\boldsymbol{u}} \widetilde{\boldsymbol{p}} \in \widetilde{\mathcal{H}}$ є гомоморфізмом з алгебри $\Gamma(\mathcal{G}'_\beta)$ в алгебру операторнозначних функцій, визначених на $\mathscr{G}$. Порівнюючи означення відображень $\mathcal{F}$ та $\mathcal{Q}$, легко побачити, що функцію $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{u}} \widetilde{\boldsymbol{p}}$ операторного аргумента можна записати у вигляді $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{u}} \widetilde{\boldsymbol{p}} = \widetilde{\boldsymbol{u} \star \boldsymbol{p}}$. Звідси випливає, що оператор $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{u}} \widetilde{\boldsymbol{p}}(A) = \widetilde{\boldsymbol{u} \star \boldsymbol{p}}(A) \in \mathscr{L}(\mathfrak{F}(\mathcal{H}))$

можна розуміти як "значення" функції $\widehat{\boldsymbol{u}\star\boldsymbol{p}}\in\Gamma(E_\beta)$ нескінченної кількості змінних на зліченному наборі $(\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\dots,\mathbf{A}_n,\dots)$ генераторів однопараметричних (C_0) груп стиску.

У другому параграфі застосовано побудоване числення операторів до розв'язання нескінченновимірної задачі Коші для рівняння теплопровідності.

Нехай $g\in\mathcal{G}'_\beta$. Визначимо оператор зсуву на просторі $\mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta)$ за правилом $\mathscr{T}_gP(f):=P(f+g)$, $P\in\mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta)$, $f\in\mathcal{G}'_\beta$.

Визначимо згортку поліноміального ультрарозподілу $U\in\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_\beta)$ з основною функцією $P\in\mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta)$ за правилом $(U*P)(g):=\langle U,\mathscr{T}_gP\rangle$, $g\in\mathcal{G}'_\beta$, де справа записане спарювання дуальної пари $\big\langle\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_\beta),\mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta)\big\rangle$.

Для довільного поліноміального ультрарозподілу $U\in\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_\beta)$ відображення C_U, що визначене формулою $C_U:\mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta)\ni P\longmapsto U*P\in\mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta)$, назвемо асоційованим з U згортковим оператором на $\mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta)$.

Довільному поліноміальному ультрарозподілу $U\in\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_\beta)$ поставимо у відповідність формальний ряд

$$e^{*U}:=\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{1}{n!}U^{*n},\qquad \text{де}\quad U^{*n}:=\underbrace{U*U*\dots*U}_{n}.$$

Нехай $\{U_t:t\in J\}$ — сім'я елементів з простору $\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_\beta)$, J — довільний інтервал вигляду $[0,\alpha]$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha\geq 0$. Припустимо, що функція $t\longmapsto U_t$ є неперервна з J в $\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_\beta)$. Тоді функція $t\longmapsto\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}}U_t$ є неперервною з J в $\mathcal{P}'(E'_\beta)$, де $\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}}$ — поліноміальне перетворення Фур'є-Лапласа. Тому для кожного $t\in J$ множина $\{\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}}U_s:s\in[0,t]\}$ є компактною підмножиною в $\mathcal{P}'(E'_\beta)$. Зокрема вона обмежена. Звідси випливає, що елемент $\int_0^t\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}}U_s\,ds$, належить простору $\mathcal{P}'(E'_\beta)$ для кожного $t\in J$. А, отже, в просторі $\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_\beta)$ існує єдиний елемент, який позначимо $\int_0^tU_s\,ds$, такий що

$$\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}}\int_0^tU_s\,ds=\int_0^t\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}}U_s\,ds.$$

Більше того, відображення $E_t=\int_0^tU_s\,ds$, $t\in J$, диференційовне в $\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_\beta)$ і задовольняє рівність $\frac{\partial}{\partial t}E_t=U_t$.

Нехай $\{U_t:t\in J\}$ — довільна описана вище сім'я елементів з $\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_\beta)$.

Теорема 6.2.1. *Задача Коші*

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial t}X_t=U_t*X_t, & t\in J,\\ X_0=P, & P\in\mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta),\end{cases}$$

має єдиний розв'язок в $\mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta)$, що задається формулою $X_t=e^{*\int_0^tU_s\,ds}*P$.

Визначимо оператор сліду τ формулою $\big\langle\tau,\varphi\widehat{\otimes}\psi\big\rangle:=\int_{\mathbb{R}^d_+}\varphi(t)\psi(t)\,dt$, $\varphi,\psi\in\mathcal{G}_\beta$. Лапласіан Ґросса Δ_G — це оператор, що поліному $P=\sum_{n=0}^m\langle\cdot^{\otimes n},\varphi^{\otimes n}\rangle$, $\varphi\in\mathcal{G}_\beta$, степеня m ставить у відповідність поліном Δ_GP степеня $m-2$ вигляду

$$\Delta_G P := \sum_{n=0}^{m-2} (n+2)(n+1)\big\langle \tau, \varphi^{\otimes 2}\big\rangle \big\langle \ \cdot\ ^{\otimes n}, \varphi^{\otimes n}\big\rangle.$$

Теорема 6.2.2. *Лапласіан Ґросса* Δ_G *діє як згортковий оператор, а саме справджується рівність* $\frac{1}{2}\Delta_G P = U_\tau * P$, $P \in \mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta)$, *де* $U_\tau \in \mathcal{P}'(\mathcal{G}'_\beta)$ *— поліноміальний ультрарозподіл, що відповідає елементу* $(0, 0, \tau, 0, \dots) \in \Gamma(\mathcal{G}'_\beta)$.

Теорема 6.2.3. *Задача Коші*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} X_t = \frac{1}{2}\Delta_G X_t, & t \in J, \\ X_0 = P, & P \in \mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta), \end{cases}$$

для узагальненого рівняння теплопровідності, породженого лапласіаном Ґросса, має єдиний в $\mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta)$ *розв'язок* $X_t = e^{*tU_\tau} * P$, $t \in J$.

Побудуємо однопараметричну напівгрупу $\{\mathsf{G}_t : t \geq 0\}$, інфінітезимальним генератором якої є оператор $\frac{1}{2}\Delta_G$. Формально цю напівгрупу можна записати у вигляді $\mathsf{G}_t = e^{t\frac{1}{2}\Delta_G}$.

Оскільки $\frac{1}{2}\Delta_G P = U_\tau * P$, то

$$\mathsf{G}_t P := \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=0}^{\left[\frac{m-n}{2}\right]} \frac{(n+2k)!}{k!n!} \frac{t^k}{2^k} \langle \tau^{\otimes k}, \varphi^{\otimes 2k}\rangle \big\langle \ \cdot\ ^{\otimes n}, \varphi^{\otimes n}\big\rangle, \quad \text{де} \quad P = \sum_{n=0}^{m} \big\langle \cdot\ ^{\otimes n}, \varphi^{\otimes n}\big\rangle, \varphi \in \mathcal{G}_\beta.$$

Твердження 6.2.1. *Відображення* $\mathbb{R}_+ \ni t \longmapsto \mathsf{G}_t \in \mathscr{L}(\mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta))$ *є сильно неперервною напівгрупою операторів з генератором* $\frac{1}{2}\Delta_G$.

У третьому параграфі розглянуто абстрактний випадок алгебри символів $H_b(\mathcal{X})$ всіх аналітичних функцій обмеженого типу на деякому нескінченновимірному банаховому просторі $\mathcal{X}$.

Нехай $\mathcal{A}$ — деяка банахова алгебра з одиницею $1_\mathcal{A}$. Спектром комутативної топологічної алгебри $\mathcal{A}$ називають множину $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ характерів (неперервних гомоморфізмів) алгебри $\mathcal{A}$ в $\mathbb{C}$.

Теорема 6.3.2. *Нехай* $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$. *Тоді* $\bigcap_{k=1}^n \ker P_k = \emptyset$ *у тому й тільки в тому випадку, коли* $\bigcap_{k=1}^n \ker(P_k)_\mathcal{A} = \emptyset$ *і при цьому для деяких* $Q_1, \dots, Q_n \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$

$$\sum_{k=1}^n (P_k)_\mathcal{A}(\boldsymbol{a})\,(Q_k)_\mathcal{A}(\boldsymbol{a}) = 1_\mathcal{A}, \qquad \forall\, \boldsymbol{a} \in \mathcal{A} \otimes_\mathfrak{p} \mathcal{X}.$$

Теорема 6.3.3. *Для кожного гомоморфізму* $\Phi_0 : H_b(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{A}$ *існує така напрямленість* $\{\mathbf{a}_\alpha\} \subset \mathcal{A} \otimes_\mathfrak{p} \mathcal{X}$, *що* $h \circ \Phi_0(P) = \lim_\alpha P_A([h \otimes I_\mathcal{X}](\mathbf{a}_\alpha))$ *для довільних* $P \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ *і* $h \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Нехай $\mathcal{X} = \ell_2$, $\{a_k\}$ — збіжна до елемента a послідовність в напівпростій алгебрі $\mathcal{A}$ і $\mathcal{U}$ — вільний ультрафільтр на множині $\mathbb{N}$. Нехай $\{e_k\}$ — система ортогональних базисних елементів в ℓ_2. Гомоморфізм $\Phi_\mathcal{U} : H_b(\ell_2) \longrightarrow \mathcal{A}$, який визначено формулою $\Phi_\mathcal{U}(f) = \lim_\mathcal{U} f_\mathcal{A}(a_k \otimes e_k)$, показує, що існують гомоморфізми з $H_b(\mathcal{X})$ в $\mathcal{A}$, які не подаються у вигляді функціонального числення.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена побудові алгебр поліноміальних розподілів на нескінченновимірних просторах та дослідженню їхньої тензорної та алгебраїчної структури. В якості застосування поліноміальних алгебр запропоновано новий метод розв'язання проблеми побудови функціонального числення для зліченних наборів операторів.

У другому розділі дисертації розвинуто загальний підхід до побудови поліноміальних основних функцій та поліноміальних розподілів на основі теорії ядерних (F) або (DF) просторів. Таке поліноміальне розширення можна розглядати як узагальнення класичних просторів основних та узагальнених функцій на випадок нескінченної кількості змінних. Нами розвинуто новий підхід до дослідження дуальної пари $\langle \mathcal{P}'(\mathcal{X}'), \mathcal{P}(\mathcal{X}') \rangle$, що складається з простору $\mathcal{P}(\mathcal{X}')$ неперервних поліномів над $\mathcal{X}'$ та сильно спряженого простору $\mathcal{P}'(\mathcal{X}')$ поліноміальних розподілів, де $\langle\, \mathcal{X}',\, \mathcal{X}\,\rangle$ — дуальна пара лінійних ядерних просторів типу (F) або (DF).

Третій розділ присвячений опису структури, властивостей простору поліноміальних основних швидко спадних функцій та поліноміальних розподілів повільного росту, а також основних операцій на цих просторах. Окремий параграф присвячений дослідженню диференційовності за Ґато поліноміальних основних швидко спадних функцій і поліноміальних розподілів повільного росту, опису властивостей похідної Ґато на відповідних просторах із тензорною структурою типу Фока та встановленню зв'язку похідної Ґато з диференціюваннями на цих просторах.

У третьому та четвертому розділах дисертації побудовано узагальнення операторів диференціювання та зсуву на різні випадки просторів поліноміальних основних та узагальнених функцій; у кожному випадку доведено, що відповідні похідні генерують напівгрупи зсувів.

Окремим завданням роботи було поширення деяких інтегральних перетворень на поліноміальні простори основних та узагальнених функцій. Зокрема, поширено перетворення Фур'є на простір поліноміальних основних швидко спадних функцій і поліноміальних розподілів повільного росту та вивчено його властивості; поширено перетворення Фур'є-Лапласа та Лапласа на простори поліноміальних ультрарозподілів, вивчено властивості цих перетворень та доведено теореми типу Пелі-Вінера для цих просторів; описано образ основного простору при перетворенні Фур'є-Лапласа у вигляді певного класу цілих функцій експоненціального типу.

У четвертому розділі дисертації поширено на випадок просторів ультрарозподілів структурну теорему Шварца про представлення деякого оператора, що комутує із зсувом. Зокрема, тут доведено структурні теореми для операторів, що діють в просторах лінійних ультрадиференційовних функцій і які комутують з багатопараметричними напівгрупами. Крім того доведено, що згорткову алгебру ультрарозподілів з носіями в додатному конусі можна ізоморфно представити як комутант напівгрупи зсувів, доведено також векторнозначний варіант цього результату і досліджено загальніший випадок довільної напівгрупи стиску.

У п'ятому розділі дисертації побудовано узагальнення функціонального числення типу Хілле-Філліпса для комутуючих наборів генераторів сильно неперервних напівгруп в класах аналітичних в трубчастих областях функцій скінченної чи зліченної кількості змінних. Результатом такого числення є оператори, що задані на банаховому просторі.

Матеріал шостого розділу об'єднаний за тим принципом, що тут розглянуто функціональне числення в класах цілих аналітичних функцій зліченної кількості змінних. Тут побудовано функціональне числення для зліченного некомутуючого набору генераторів сильно неперервних груп операторів, що діють в гільбертовому просторі, в класі цілих аналітичних функцій зліченної кількості змінних. Результатом такого числення є оператори, що задані у симетричному просторі Фока. В якості застосування побудованого числення знайдено в явному вигляді роз'язок нескінченновимірного рівняння теплопровідності, породженого лапласіаном Ґросса. В останньому параграфі шостого розділу розглянуто абстрактний випадок алгебри символів $H_b(\mathcal{X})$ всіх аналітичних функцій обмеженого типу на деякому нескінченновимірному банаховому просторі $\mathcal{X}$. Тут описано гомоморфізми з алгебри $H_b(\mathcal{X})$ в деяку комутативну банахову алгебру і показано, що не кожен такий гомоморфізм задається функціональним численням.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Загороднюк А.В.* Функціональне числення і гомоморфізми в алгебрі аналітичних функцій обмеженого типу на банаховому просторі / А.В. Загороднюк, С.В. Шарин // Прикл. пробл. механіки і математики. – 2007. – Т. 5. – С. 22–27.

2. *Лозинська В.Я.* Поліноміальні ω-ультрарозподіли типу Берлінга і типу Рум'є / В.Я. Лозинська, С.В. Шарин // Прикл. пробл. механіки і математики. – 2013. – Т. 11. – С. 12–20.

3. *Лопушанский О.В.* Про топологічний ізоморфізм алгебри розподілів з носіями в конусі комутанту напівгрупи зсувів / О.В. Лопушанський, А.В. Соломко, С.В. Шарин // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2004. – Т. 47, № 2. – С. 95–99.

4. *Лопушанский О.В.* Функціональне числення для генераторів аналітичних напівгруп операторів / О.В. Лопушанський, С.В. Шарин // Карпатські мат. публ. – 2012. – Т. 4, № 1. – С. 83–89.

5. *Соломко А.В.* Операторне перетворення Фур'є-Лапласа згорткової алгебри ультрарозподілів Рум'є / А.В. Соломко, С.В. Шарин // Прикл. пробл. механіки і математики. – 2011. – Т. 9. – С. 55–62.

6. *Соломко А.В.* Узагальнені граничні значення Фур'є-образів згорткової алгебри розподілів Шварца з носіями в конусі / А.В. Соломко, С.В. Шарин // Буковинський мат. журн. – 2013. – Т. 1, № 1–2. – С. 139–143.

7. *Соломко А.В.* Функціональне числення над банаховими просторами в конусі

$\mathbb{R}^n_+$ / А.В. Соломко, С.В. Шарин // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2004. – Т. 47, № 4. – С. 51–55.

8. *Шарин С.В.* Деякі узагальнені функції від генератора напівгрупи дробового інтегрування / С.В. Шарин // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1999. – Т. 42, № 3. – С. 28–30.

9. *Шарин С.В.* Напівгрупи зсувів в алгебрі поліноміальних розподілів Шварца повільного росту / С.В. Шарин // Математичний вісник НТШ. – 2011. – Т. 8. – С. 230–242.

10. *Шарин С.В.* Перетворення Фур'є в алгебрі поліноміальних розподілів Шварца повільного росту / С.В. Шарин // Матем. вісн. НТШ. – 2012. – Т 9. – С. 366–374.

11. *Шарин С.В.* Поліноміальні повільно зростаючі розподіли / С.В. Шарин // Карпатські матем. публ. – 2010. – Т. 2, № 2. – С. 123–132.

12. *Шарин С.В.* Про дуальність $\langle \mathcal{D}'_+, \mathcal{D}_+ \rangle$ / С.В. Шарин // Вісн. нац. ун-ту "Львівська політехніка". Серія "Прикладна математика". – 2000. – Т. 411. – С. 345–349.

13. *Lopushansky O.V.* Application of the Laplace Transform of Tempered Distributions to the Construction of Functional Calculus / O.V. Lopushansky, S.V. Sharyn // Ukrainian Math. J. – 2016. – V. 67, № 11. – P. 1687–1703.

14. *Lopushansky O.V.* Generalized Hille-Phillips type functional calculus for multiparameter semigroups / O.V. Lopushansky, S.V. Sharyn // Sib. Math. J. – 2014. – T. 55, № 1. – C. 105–117.

15. *Lopushansky O.V.* Operators commuting with multi-parameter shift semigroups / O.V. Lopushansky, S.V. Sharyn // Carpathian J. Math. – 2014. – V. 30, № 2. – P. 217–224.

16. *Lopushansky O.V.* Polynomial ultradistributions on cone $\mathbb{R}^d_+$ / O.V. Lopushansky, S.V. Sharyn // Topology. – 2009. – V. 48, № 2–4. – P. 80–90.

17. *Lopushansky O.V.* Vector-valued functional calculus for a convolution algebra of distributions on cone / O.V. Lopushansky, A.V. Solomko, S.V. Sharyn // Мат. студії. – 2011. – Т. 35, № 1. – P. 78–90.

18. *Sharyn S.V.* Application of the functional calculus to solving of infinite dimensional heat equation / S.V. Sharyn // Carpathian Math. Publ. – 2016. – T. 8, № 2. – C. 313–322.

19. *Sharyn S.V.* Gâteaux differentiability of polynomial test and generalized functions / S.V. Sharyn // J. Math. Sci. – 2017. – V. 220, № 1. – P. 15–26.

20. *Sharyn S.* Joint functional calculus in algebra of polynomial tempered distributions / S. Sharyn // Methods Funct. Anal. Topology. – 2016. – V. 22, № 1. – P. 62–73.

21. *Sharyn S.V.* Note on the weak polynomial topology / S.V. Sharyn, A.V. Zagorodnyuk // Мат. студії. – 2008. – Т. 30, № 1. – P. 98–100.

22. *Sharyn S.V.* Operator calculus for noncommuting operators over symmetric

Fock space / S.V. Sharyn // Internat. J. Math. Anal. – 2017. – V. 11, № 1. – P. 29–38.

23. *Sharyn S.V.* Paley-Wiener-type theorem for polynomial ultradifferentiable functions / S.V. Sharyn // Carpathian Math. Publ. – 2015. – V. 7, № 2. – P. 271–279.

24. *Sharyn S.V.* The cross-correlation operation of Schwartz distributions / S.V. Sharyn // J. Math. Sci. – 2001. – V. 107, № 1. – P. 3604–3609.

25. *Sharyn S.V.* The Paley-Wiener theorem for Schwartz distributions with support on a half-line / S.V. Sharyn // J. Math. Sci. – 1999. – V. 96, № 2. – P. 2985–2987.

26. *Лопушанський О.В.* Перетворення Лапласа поліноміальних ультрарозподілів з носіями в $\mathbb{R}^n_+$ / О.В. Лопушанський, С.В. Шарин // Міжн. наук. конф. присв. 50-річчю каф. алгебри і мат. логіки. – Київ. – 2009. Тези. – С. 52.

27. *Шарин С.В.* Операторне числення в різних класах розподілів та ультрарозподілів / С.В. Шарин // Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей і математичного аналізу". – Івано-Франківськ. – 2011. Тези. – С. 75.

28. *Шарин С.В.* Операторне числення для аналітичних напівгруп операторів / С.В. Шарин // Всеукр. наук. конф. "Алгебра, топологія, аналіз, стохастика". – Івано-Франківськ-Микуличин. – 2012. Тези. – С. 29.

29. *Шарин С.В.* Операторне числення для зліченного набору некомутуючих операторів над симетричним простором Фока / С.В. Шарин // II Всеукр. наук. конф. "Прикладні задачі математики". – Івано-Франківськ. – 2016. Тези. – С. 112–114.

30. *Шарин С.В.* Операторне числення типу Хілле-Філліпса в класі поліноміальних ультрарозподілів / С.В. Шарин // Міжн. матем. конф. ім. В.Я. Скоробагатька. – Дрогобич. – 2011. Тези. – С. 228.

31. *Шарин С.В.* Перетворення Фур'є поліноміальних повільно зростаючих узагальнених функцій / С.В. Шарин // Міжн. конф. присв. пам'яті проф. Боголюбова М.М. і проф. Нагнибіди М.І. – Чернівці. – 2009. Тези. – С. 199–200.

32. *Шарин С.В.* Повільно зростаючі поліноміальні розподіли: приклад напівгруп дробового інтегрування і диференціювання / С.В. Шарин // Міжн. конф. "Сучасні проблеми аналізу". – Чернівці. – 2010. Тези. – С. 151.

33. *Шарин С.В.* Про оператори знищення і народження на просторах Фока / С.В. Шарин // IX Літня школа "Алгебра, топологія, аналіз". – Поляниця. – 2014. Тези. – С. 79.

34. *Шарин С.В.* Про похідну Ґато на просторах типу Фока / С.В. Шарин // IV Міжн. ганська конф., присв. 135 річн. від дня народж. Ганса Гана. – Чернівці. – 2014. Тези. – С. 215.

35. *Шарин С.В.* Функціональне числення в різних класах узагальнених функцій повільного росту / С.В. Шарин // XIV міжн. наук. конф. ім. М. Кравчука. – Київ. – 2012. Тези. – С. 266.

36. *Шарин С.В.* Функціональне числення для секторіальних операторів / С.В. Шарин // Всеукр. наук. конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування в

прикладній математиці”. – Чернівці. – 2012. Тези. – С. 154.

37. *Sharyn S.V.* Fourier-Laplace transformations of tempered polynomial distributions / S.V. Sharyn // Internat. conf. in honor of Prof. V.E. Liantse. – Lviv. – 2010. Abstracts. – P. 83.

38. *Sharyn S.V.* Fourier transformation and differentiation of polynomial tempered distributions / S.V. Sharyn // Всеукр. наук. семінар “Сучасні проблеми теорії ймовірностей і математичного аналізу”. – Івано-Франківськ. – 2010. Тези. – С. 47.

39. *Sharyn S.* Functionl calculus for analytic semigroups of operators / S. Sharyn // Internat. conf. “Spectral theory and differential equations”. – Kharkiv. – 2012. Abstracts. – P. 97–98.

40. *Sharyn S.* Functional calculus: infinite dimensional aspect / S. Sharyn // Internat. conf. dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach. – Lviv. – 2012. Abstracts. – P. 66.

41. *Sharyn S.V.* Gâteaux differentiability of polynomial test and generalized functions / S.V. Sharyn // XVII Conf. on Analytic Functions and Related Topics. – Chelm. – 2014. Abstracts. – P. 44.

42. *Sharyn S.V.* Generalized Fourier transformation for polynomial ultradistributions / S.V. Sharyn // Internat. Sci. Conf. “Infinite Dimensional Analysis and Topology”. – Ivano-Frankivsk. – 2009. Abstracts. – P. 134–135.

43. *Sharyn S.* Hille-Philips type functional calculus for linear and polynomial tempered distributions / S. Sharyn // Internat. Conf. “Functional Analysis: Applications to Complex Analysis and Partial Differential Equations”. – Będlewo. – 2012. Abstracts. – P. 33.

44. *Sharyn S.V.* Laplace transformation for polynomial ultradistributions on cone $\mathbb{R}^n_+$ / S.V. Sharyn // Internat. Conf. “Spaces of Analytic and Smooth Functions III”. – Będlewo. – 2009. Abstracts. – P. 31.

45. *Sharyn S.V.* Tensor structure of Gevrey ultradistribution spaces / S.V. Sharyn, A.V. Solomko // 5-th Internat. Conf. on Appl. Math. in honor of Prof. I.A. Rus. – Baia Mare. – 2006. Abstarcts. – P. 43.

АНОТАЦІЯ

Шарин С.В. *Алгебри поліноміальних розподілів на нескінченновимірних просторах та їх застосування до числення операторів.* – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – “Математичний аналіз” (111 – Математика). – Інститут математики НАН України, Київ, 2017.

У дисертаційній роботі розвинуто новий підхід до дослідження дуальної пари $\langle \mathcal{P}'(\mathcal{X}'), \mathcal{P}(\mathcal{X}')\rangle$, що складається з простору $\mathcal{P}(\mathcal{X}')$ неперервних поліномів над $\mathcal{X}'$ та сильно спряженого простору $\mathcal{P}'(\mathcal{X}')$ поліноміальних розподілів.

Поширено деякі інтегральні перетворення на простори поліноміальних основних та узагальнених функцій, вивчено їхні властивості.

Доведено структурні теореми для операторів, які комутують з багатопараметричними напівгрупами.

Досліджено диференційовність за Ґато поліноміальних основних та узагальнених функцій повільного росту.

Побудовано функціональне числення для наборів генераторів сильно неперервних напівгруп і груп операторів в класах аналітичних функцій скінченної та зліченної кількості змінних.

Знайдено роз'язок нескінченновимірного рівняння теплопровідності, породженого лапласіаном Ґросса.

Описано гомоморфізми з алгебри аналітичних функцій обмеженого типу на нескінченновимірному банаховому просторі в деяку комутативну банахову алгебру.

Ключові слова: поліном на нескінченновимірному просторі, ядерний (F), (DF) простір, інтегральні перетворення основних та узагальнених функцій, багатопараметрична напівгрупа, оператор, що комутує із зсувом, похідна Ґато, нескінченновимірне рівняння теплопровідності, функціональне числення для зліченних наборів генераторів (C_0) напівгруп та груп операторів.

АННОТАЦИЯ

Шарин С.В. *Алгебры полиномиальных распределений на бесконечномерных пространствах и их приложение к исчислению операторов.* – Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 – "Математический анализ" (111 – Математика). – Институт математики НАН Украины, Киев, 2017.

В диссертационной работе развинут новый подход к исследованию дуальной пары $\langle \mathcal{P}'(\mathcal{X}'), \mathcal{P}(\mathcal{X}')\rangle$, которая состоит из пространства $\mathcal{P}(\mathcal{X}')$ непрерывных полиномов над $\mathcal{X}'$ и сильно сопряженного пространства $\mathcal{P}'(\mathcal{X}')$ полиномиальных распределений.

Расширены некоторые интегральные преобразования на пространства полиномиальных основных и обобщенных функций, также изучены их свойства.

Доказаны структурные теоремы для операторов, которые коммутируют с многопараметрическими полугруппами.

Исследована дифференцируемость по Гато полиномиальных основных и обобщенных функций медленного роста.

Построено функциональное исчисление для наборов генераторов сильно непрерывных полугрупп и групп операторов в классах аналитических функций конечного и счётного числа переменных.

Найдено решение бесконечномерного уравнения теплопроводности, порождённого лапласианом Гросса.

Описаны гомоморфизмы с алгебры аналитических функций ограниченного типа на бесконечномерном банаховом пространстве в некоторую коммутативную банаховую алгебру.

Ключевые слова: полином на бесконечномерном пространстве, ядерное (F), (DF) пространство, интегральные преобразования основных и обобщённых функций, производная Гато, бесконечномерное уравнение теплопроводности, функциональное исчисление для счётных наборов генераторов (C_0) полугрупп и групп операторов.

ABSTRACT

Sharyn S.V. *Algebras of polynomial distributions on infinite dimensional spaces and their application to operator calculus.* – Qualifying scientific work on rights of manuscript.

The thesis for obtaining the Doctor of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.01 – "Mathematical analysis" (111 – Mathematics). – Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2017.

A new approach to investigation of the dual pair $\langle \mathcal{P}'(\mathcal{X}'), \mathcal{P}(\mathcal{X}') \rangle$ is developed, where $\mathcal{P}(\mathcal{X}')$ is the space of continuous polynomials over $\mathcal{X}'$, $\mathcal{P}'(\mathcal{X}')$ is the space of polynomial distributions, which is strong dual space of $\mathcal{P}(\mathcal{X}')$. Note that the duality $\langle \mathcal{P}'(\mathcal{X}'), \mathcal{P}(\mathcal{X}') \rangle$ is a nonlinear extension of the dual pair $\langle\, \mathcal{X}',\, \mathcal{X}\, \rangle$, consisting of linear locally convex nuclear (F) or (DF) spaces. It is constructed a generalization of differential operators and shift operators for four cases: space of polynomial rapidly decreasing test functions, space of polynomial tempered distributions, space of Gevrey ultradifferentiable test functions and space of polynomial Roumieu ultradistributions. In each case it is proved that the differential operator generates respective semigroup of shifts.

It is extended the Fourier transformation on the spaces of polynomial rapidly decreasing test functions and polynomial tempered distributions; properties of the transformation are investigated. It is also extended the Fourier-Laplace and Laplace transformations on the spaces of polynomial Gevrey ultradifferentiable functions and polynomial Roumieu ultradistributions; properties of these transformations are investigated. Herewith the image of the test space with respect to Fourier-Laplace transformation is described; this image is presented as a class of entire functions of exponential type. Paley-Wiener type theorems for polynomial ultradifferentiable functions and polynomial ultradistributions are proved.

We have proved Seeley type theorem about extension of a rapidly decreasing function from the positive cone $\mathbb{R}^d_+$ onto whole space; it is important that the rapid decreasing property of such extension is preserved. Some structure theorems for shift-invariant operators are proved. In particular, we describe a commutative algebra

of shift-invariant continuous linear operators, commuting with contraction multiparameter semigroups over a Banach space. Thereby, we generalize classic Schwartz's and Hörmander's theorems on shift-invariant operators. Structure theorem for locally convex Fock type space is proved, namely it is shown that this space may be represented as a commutant of polynomial shift semigroup.

The Gâteaux differentiability of the elements of the spaces of polynomial rapidly decreasing test functions and polynomial tempered distributions is investigated. It is shown the properties of Gâteaux derivative on Fock type spaces. It is established connection of Gâteaux derivative with the creation and annihilation operators on the Fock type spaces as well as with differentiations on these spaces.

Hille-Phillips type functional calculi for commuting sets of generators of strongly continuous semigroups of operators, acting in a Banach space, are constructed; the symbol classes of such calculi are spaces of analytic functions of finite or countable quantity of variables. It is constructed a functional calculus for countable noncommuting set of generators of strongly continuous groups of operators, acting in a Hilbert space; the symbol class of such calculus is a space of entire analytic functions of countable quantity of variables.

We found a solution of infinite dimensional heat equation, generated by Gross Laplacian. It is constructed the semigroup, which is generated by Gross Laplacian.

It is described homomorphisms from the algebra of analytic functions of bounded type on an infinite dimensional Banach space into some commutative Banach algebra. It is shown that not every such homomorphism is defined by a functional calculus.

Key words: polynomial on an infinite dimensional space, nuclear (F), (DF) space, rapidly decreasing function, tempered distribution, Gevrey ultradifferentiable function, Roumieu ultradistribution, integral transformations of test and generalized functions, multiparameter semigroup, shift-invariant operator, Gâteaux derivative, infinite dimensional heat equation, Gross Laplacian, Hille-Phillips functional calculus, functional calculus for countable set of generators of (C_0) semigroups and groups of operators.