Державний вищий навчальний заклад
“Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника”
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

ШАРИН СЕРГІЙ ВОЛОДИМИРОВИЧ

УДК 517.98

ДИСЕРТАЦІЯ

АЛГЕБРИ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ РОЗПОДІЛІВ НА НЕСКІНЧЕННОВИМІРНИХ ПРОСТОРАХ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДО ЧИСЛЕННЯ ОПЕРАТОРІВ

01.01.01 — математичний аналіз

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень.
Використання ідей, результатів і текстів інших авторів
мають посилання на відповідне джерело.

Науковий консультант
Лопушанський Олег Васильович,
доктор фізико-математичних наук, професор

Івано-Франківськ — 2017

АНОТАЦІЯ

Шарин С.В. Алгебри поліноміальних розподілів на нескінченновимірних просторах та їх застосування до числення операторів. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – “математичний аналіз”. – Інститут математики НАН України, Київ, 2017.

У дисертаційній роботі розвинуто новий підхід до дослідження дуальної пари $\langle\mathcal{P}'(\mathcal{X}'),\mathcal{P}(\mathcal{X}')\rangle$, що складається з простору $\mathcal{P}(\mathcal{X}')$ неперервних поліномів над $\mathcal{X}'$ та сильно спряженого простору $\mathcal{P}'(\mathcal{X}')$ поліноміальних розподілів, яка є нелінійним розширенням дуальної пари $\langle\, \mathcal{X}',\, \mathcal{X}\,\rangle$ лінійних локально опуклих ядерних просторів типу (F) або (DF). Побудовано узагальнення операторів диференціювання та зсуву на просторах поліноміальних основних та узагальнених функцій, доведено, що поліноміальні похідні генерують відповідні напівгрупи зсувів.

Поширено деякі інтегральні перетворення на простори поліноміальних основних швидко спадних функцій, поліноміальних розподілів повільного росту і поліноміальних ультрарозподілів та вивчено їхні властивості. Доведено теореми типу Пелі-Вінера для таких просторів.

Доведено структурні теореми для операторів, які комутують з багатопараметричними напівгрупами, зокрема доведено, що згорткову алгебру ультрарозподілів з носіями в додатному конусі можна ізоморфно представити як комутант напівгрупи зсувів, доведено також векторнозначний варіант цього результату і досліджено загальніший випадок довільної напівгрупи стиску. Доведено структурну теорему про представлення локально опуклої алгебри із тензорною структурою типу Фока у вигляді комутанта поліноміальної напівгрупи зсувів.

Досліджено диференційовність за Ґато поліноміальних основних швид-

ко спадних функцій і поліноміальних розподілів повільного росту, описано властивості похідної Ґато на просторах із тензорною структурою типу Фока, встановлено зв'язок похідної Ґато з квантовим білим шумом та диференціюваннями на цих просторах.

Побудовано функціональне числення типу Хілле-Філліпса для комутуючих наборів генераторів сильно неперервних напівгруп, що діють в банаховому просторі, в класі аналітичних в трубчастих областях функцій скінченної та зліченної кількості змінних. Побудовано функціональне числення для зліченного некомутуючого набору генераторів сильно неперервних груп операторів, що діють в гільбертовому просторі, в класі цілих аналітичних функцій зліченної кількості змінних.

Знайдено роз'язок нескінченновимірного рівняння теплопровідності, породженого лапласіаном Ґросса; побудовано напівгрупу, генератором якої є лапласіан Ґросса.

Описано гомоморфізми з алгебри аналітичних функцій обмеженого типу на нескінченновимірному банаховому просторі в деяку комутативну банахову алгебру і показано, що не кожен такий гомоморфізм задається функціональним численням.

Усі результати дисертації, які виносяться на захист, є новими. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер. Вони можуть бути використані у нескінченновимірному аналізі, зокрема в теорії узагальнених функцій, теорії функціонального числення; а також можуть бути застосовані в теорії аналітичних функцій та нелінійному аналізі.

Всі результати дисертації, які виносяться на захист, одержані автором самостійно. З результатів робіт, що виконані у співавторстві, на захист виносяться лише положення, що одержані автором дисертації. У статті [3] автору дисертації належать Твердження 2 і 3. У статті [7] А.В. Соломку належать Твердження 2, Теореми 2 і 3. У статті [17] автору дисертації належать леми 3, 5, 6, теореми 1 і 2, та ідея доведення теореми 4;

аналогічний метод доведення був використаний автором у параграфі 4.2. У статті [4] О.В. Лопушанському належить постановка задачі та аналіз одержаних результатів. У статтях [1, 2, 5, 6, 13–16, 21] внесок співавторів є рівноцінним.

Ключові слова: поліном на нескінченновимірному просторі, ядерний (F), (DF) простір, швидко спадна функція, узагальнена функція повільного росту, ультрадиференційовна в сенсі Жевре функція, ультрарозподіл Рум'є, інтегральні перетворення основних та узагальнених функцій, багатопараметрична напівгрупа, оператор, що комутує із зсувом, похідна Ґато, нескінченновимірне рівняння теплопровідності, лапласіан Ґросса, функціональне числення Хілле-Філліпса, функціональне числення для злічених наборів генераторів сильно неперервних напівгруп та груп операторів.

ABSTRACT

Sharyn S.V. Algebras of polynomial distributions on infinite dimensional spaces and their application to operator calculus. – Qualifying scientific work on rights of manuscript.

The thesis for obtaining the Doctor of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.01 – mathematical analysis. – Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, 2017.

A new approach to investigation of the dual pair $\langle \mathcal{P}'(\mathcal{X}'), \mathcal{P}(\mathcal{X}')\rangle$ is developed, where $\mathcal{P}(\mathcal{X}')$ is the space of continuous polynomials over $\mathcal{X}'$, $\mathcal{P}'(\mathcal{X}')$ is the space of polynomial distributions, which is strong dual space of $\mathcal{P}(\mathcal{X}')$. Note that the duality $\langle \mathcal{P}'(\mathcal{X}'), \mathcal{P}(\mathcal{X}')\rangle$ is a nonlinear extension of the dual pair $\langle\, \mathcal{X}', \mathcal{X}\,\rangle$, consisting of linear locally convex nuclear (F) or (DF) spaces. It is constructed a generalization of differential operators and shift operators for four cases: space of polynomial rapidly decreasing test functions, space of polynomial tempered distributions, space of Gevrey

ultradifferentiable test functions and space of polynomial Roumieu ultradistributions. In each case it is proved that the differential operator generates respective semigroup of shifts.

It is extended the Fourier transformation on the spaces of polynomial rapidly decreasing test functions and polynomial tempered distributions; properties of the transformation are investigated. It is also extended the Fourier-Laplace and Laplace transformations on the spaces of polynomial Gevrey ultradifferentiable functions and polynomial Roumieu ultradistributions; properties of these transformations are investigated. Herewith the image of the test space with respect to Fourier-Laplace transformation is described; this image is presented as a class of entire functions of exponential type. Paley-Wiener type theorems for polynomial ultradifferentiable functions and polynomial ultradistributions are proved.

We have proved Seeley type theorem about extension of any rapidly decreasing function from the positive cone $\mathbb{R}^d_+$ onto whole space; it is important that the rapidly decreasing property of such extension is preserved. Some structure theorems for shift-invariant operators are proved. In particular, using operators of cross-correlation with ultradistributions supported by a positive cone, we describe a commutative algebra of shift-invariant continuous linear operators, commuting with contraction multi-parameter semigroups over a Banach space. Thereby, we generalize classic Schwartz's and Hörmander's theorems on shift-invariant operators. Structure theorem for locally convex Fock type space is proved, namely it is shown that this space may be represented as a commutant of polynomial shift semigroup.

The Gâteaux differentiability of the elements of the spaces of polynomial rapidly decreasing test functions and polynomial tempered distributions is investigated. It is shown the properties of Gâteaux derivative on Fock type spaces. It is established connection of Gâteaux derivative with the creation and annihilation operators on the Fock type spaces as well as with

differentiations on these spaces.

Hille-Phillips type functional calculi for commuting sets of generators of strongly continuous semigroups of operators, acting in a Banach space, are constructed; the symbol classes of such calculi are spaces of analytic functions of finite or countable quantity of variables. It is constructed a functional calculus for countable noncommuting set of generators of strongly continuous groups of operators, acting in a Hilbert space; the symbol class of such calculus is a space of entire analytic functions of countable quantity of variables.

We found a solution of infinite dimensional heat equation, generated by Gross Laplacian. It is constructed the semigroup, which is generated by Gross Laplacian.

It is described homomorphisms from the algebra of analytic functions of bounded type on an infinite dimensional Banach space into some commutative Banach algebra. It is shown that not every such homomorphism is defined by a functional calculus.

Key words: polynomial on a infinite dimensional space, nuclear (F), (DF) space, rapidly decreasing function, tempered distribution, Gevrey ultradifferentiable function, Roumieu ultradistribution, integral transformations of test and generalized functions, multiparameter semigroup, shift-invariant operator, Gâteaux derivative, infinite dimensional heat equation, Gross Laplacian, Hille-Phillips functional calculus, functional calculus for countable set of generators of (C_0) semigroups and groups of operators.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА, В ЯКИХ ОПУБЛІКОВАНІ ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Загороднюк А.В.* Функціональне числення і гомоморфізми в алгебрі аналітичних функцій обмеженого типу на банаховому просторі / А.В. Загороднюк, С.В. Шарин // Прикл. пробл. механіки і математики. – 2007. – Т. 5. – С. 22–27.
2. *Лозинська В.Я.* Поліноміальні ω-ультрарозподіли типу Берлінга і типу Рум'є / В.Я. Лозинська, С.В. Шарин // Прикл. пробл. механіки і математики. – 2013. – Т. 11. – С. 12–20.
3. *Лопушанский О.В.* Про топологічний ізоморфізм алгебри розподілів з носіями в конусі комутанту напівгрупи зсувів / О.В. Лопушанський, А.В. Соломко, С.В. Шарин // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2004. – Т. 47, № 2. – С. 95–99.
4. *Лопушанский О.В.* Функціональне числення для генераторів аналітичних напівгруп операторів / О.В. Лопушанський, С.В. Шарин // Карпатські мат. публ. – 2012. – Т. 4, № 1. – С. 83–89.
5. *Соломко А.В.* Операторне перетворення Фур'є-Лапласа згорткової алгебри ультрарозподілів Рум'є / А.В. Соломко, С.В. Шарин // Прикл. пробл. механіки і математики. – 2011. – Т. 9. – С. 55–62.
6. *Соломко А.В.* Узагальнені граничні значення Фур'є-образів згорткової алгебри розподілів Шварца з носіями в конусі / А.В. Соломко, С.В. Шарин // Буковинський мат. журн. – 2013. – Т. 1, № 1–2. – С. 139–143.
7. *Соломко А.В.* Функціональне числення над банаховими просторами в конусі $\mathbb{R}^n_+$ / А.В. Соломко, С.В. Шарин // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2004. – Т. 47, № 4. – С. 51–55.

8. *Шарин С.В.* Деякі узагальнені функції від генератора напівгрупи дробового інтегрування / С.В. Шарин // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1999. – Т. 42, № 3. – С. 28–30.

9. *Шарин С.В.* Напівгрупи зсувів в алгебрі поліноміальних розподілів Шварца повільного росту / С.В. Шарин // Математичний вісник НТШ. – 2011. – Т. 8. – С. 230–242.

10. *Шарин С.В.* Перетворення Фур'є в алгебрі поліноміальних розподілів Шварца повільного росту / С.В. Шарин // Матем. вісн. НТШ. – 2012. – Т 9. – С. 366–374.

11. *Шарин С.В.* Поліноміальні повільно зростаючі розподіли / С.В. Шарин // Карпатські матем. публ. – 2010. – Т. 2, № 2. – С. 123–132.

12. *Шарин С.В.* Про дуальність $\langle\mathcal{D}'_+,\mathcal{D}_+\rangle$ / С.В. Шарин // Вісн. нац. ун-ту “Львівська політехніка”. Серія “Прикладна математика”. – 2000. – Т. 411. – С. 345–349.

13. *Lopushansky O.V.* Application of the Laplace Transform of Tempered Distributions to the Construction of Functional Calculus / O.V. Lopushansky, S.V. Sharyn // Ukrainian Math. J. – 2016. – V. 67, № 11. – P. 1687–1703.

14. *Lopushansky O.V.* Generalized Hille-Phillips type functional calculus for multiparameter semigroups / O.V. Lopushansky, S.V. Sharyn // Sib. Math. J. – 2014. – T. 55, № 1. – C. 105–117.

15. *Lopushansky O.V.* Operators commuting with multi-parameter shift semigroups / O.V. Lopushansky, S.V. Sharyn // Carpathian J. Math. – 2014. – V. 30, № 2. – P. 217–224.

16. *Lopushansky O.V.* Polynomial ultradistributions on cone $\mathbb{R}^d_+$ / O.V. Lopushansky, S.V. Sharyn // Topology. – 2009. – V. 48, № 2–4. – P. 80–90.

17. *Lopushansky O.V.* Vector-valued functional calculus for a convolution algebra of distributions on cone / O.V. Lopushansky, A.V. Solomko, S.V. Sharyn // Мат. студії. – 2011. – T. 35, № 1. – P. 78–90.
18. *Sharyn S.V.* Application of the functional calculus to solving of infinite dimensional heat equation / S.V. Sharyn // Carpathian Math. Publ. – 2016. – T. 8, № 2. – C. 313–322.
19. *Sharyn S.V.* Gâteaux differentiability of polynomial test and generalized functions / S.V. Sharyn // J. Math. Sci. – 2017. – V. 220, № 1. – P. 15–26.
20. *Sharyn S.* Joint functional calculus in algebra of polynomial tempered distributions / S. Sharyn // Methods Funct. Anal. Topology. – 2016. – V. 22, № 1. – P. 62–73.
21. *Sharyn S.V.* Note on the weak polynomial topology / S.V. Sharyn, A.V. Zagorodnyuk // Мат. студії. – 2008. – T. 30, № 1. – P. 98–100.
22. *Sharyn S.V.* Operator calculus for noncommuting operators over symmetric Fock space / S.V. Sharyn // Internat. J. Math. Anal. – 2017. – V. 11, № 1. – P. 29–38.
23. *Sharyn S.V.* Paley-Wiener-type theorem for polynomial ultradifferentiable functions / S.V. Sharyn // Carpathian Math. Publ. – 2015. – V. 7, № 2. – P. 271–279.
24. *Sharyn S.V.* The cross-correlation operation of Schwartz distributions / S.V. Sharyn // J. Math. Sci. – 2001. – V. 107, № 1. – P. 3604–3609.
25. *Sharyn S.V.* The Paley-Wiener theorem for Schwartz distributions with support on a half-line / S.V. Sharyn // J. Math. Sci. – 1999. – V. 96, № 2. – P. 2985–2987.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА, ЯКІ ЗАСВІДЧУЮТЬ АПРОБАЦІЮ МАТЕРІАЛІВ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Лопушанський О.В.* Перетворення Лапласа поліноміальних ультрарозподілів з носіями в $\mathbb{R}^n_+$ / О.В. Лопушанський, С.В. Шарин // Міжн. наук. конф. присв. 50-річчю кафедри алгебри і мат. логіки. – Київ. – 2009. Тези. – С. 52.
2. *Шарин С.В.* Операторне числення в різних класах розподілів та ультрарозподілів / С.В. Шарин // Всеукр. наук. конф. “Сучасні проблеми теорії ймовірностей і математичного аналізу”. – Івано-Франківськ. – 2011. Тези. – С. 75.
3. *Шарин С.В.* Операторне числення для аналітичних напівгруп операторів / С.В. Шарин // Всеукр. наук. конф. “Алгебра, топологія, аналіз, стохастика”. – Івано-Франківськ-Микуличин. – 2012. Тези. – С. 29.
4. *Шарин С.В.* Операторне числення для зліченного набору некомутуючих операторів над симетричним простором Фока / С.В. Шарин // II Всеукр. наук. конф. “Прикл. задачі математики”. – Івано-Франківськ. – 2016. Тези. – С. 112–114.
5. *Шарин С.В.* Операторне числення типу Хілле-Філліпса в класі поліноміальних ультрарозподілів / С.В. Шарин // Міжн. матем. конф. ім. В.Я. Скоробагатька. – Дрогобич. – 2011. Тези. – С. 228.
6. *Шарин С.В.* Перетворення Фур’є поліноміальних повільно зростаючих узагальнених функцій / С.В. Шарин // Міжн. конф. присв. пам’яті проф. Боголюбова М.М. і проф. Нагнибіди М.І. – Чернівці. – 2009. Тези. – С. 199–200.
7. *Шарин С.В.* Повільно зростаючі поліноміальні розподіли: приклад напівгруп дробового інтегрування і диференціювання / С.В. Шарин

// Міжн. конф. “Сучасні проблеми аналізу”. – Чернівці. – 2010. Тези. – С. 151.

8. *Шарин С.В.* Про оператори знищення і народження на просторах Фока / С.В. Шарин // IX Літня школа “Алгебра, топологія, аналіз”. – Поляниця. – 2014. Тези. – С. 79.
9. *Шарин С.В.* Про похідну Ґато на просторах типу Фока / С.В. Шарин // IV Міжн. ганська конф., присв. 135 річн. від дня народж. Ганса Гана. – Чернівці. – 2014. Тези. – С. 215.
10. *Шарин С.В.* Функціональне числення в різних класах узагальнених функцій повільного росту / С.В. Шарин // XIV міжн. наук. конф. ім. М. Кравчука. – Київ. – 2012. Тези. – С. 266.
11. *Шарин С.В.* Функціональне числення для секторіальних операторів / С.В. Шарин // Всеукр. наук. конф. “Диференціальні рівняння та їх застосування в прикладній математиці”. – Чернівці. – 2012. Тези. – С. 154.
12. *Sharyn S.V.* Fourier-Laplace transformations of tempered polynomial distributions / S.V. Sharyn // Internat. conf. in honor of Prof. V.E. Liantse. – Lviv. – 2010. Abstracts. – P. 83.
13. *Sharyn S.V.* Fourier transformation and differentiation of polynomial tempered distributions / S.V. Sharyn // Всеукр. наук. семінар “Сучасні пробл. теорії ймовірностей і математичного аналізу”. – Івано-Франківськ. – 2010. Тези. – С. 47.
14. *Sharyn S.* Functionl calculus for analytic semigroups of operators / S. Sharyn // Internat. conf. “Spectral theory and differential equations”. – Kharkiv. – 2012. Abstracts. – P. 97–98.

15. *Sharyn S.* Functional calculus: infinite dimensional aspect / S. Sharyn // Conf. dedicated to 120th anniversary of S. Banach. – Lviv. – 2012. Abstracts. – P. 66.

16. *Sharyn S.V.* Gâteaux differentiability of polynomial test and generalized functions / S.V. Sharyn // XVII Conf. on Analytic Functions and Related Topics. – Chelm. – 2014. Abstracts. – P. 44.

17. *Sharyn S.V.* Generalized Fourier transformation for polynomial ultradistributions / S.V. Sharyn // Internat. Sci. Conf. "Infinite Dimensional Analysis and Topology". – Ivano-Frankivsk. – 2009. Abstracts. – P. 134–135.

18. *Sharyn S.* Hille-Philips type functional calculus for linear and polynomial tempered distributions / S. Sharyn // Conf. "Functional Analysis: Applications to Complex Analysis and Partial Differential Equations". – Będlewo. – 2012. Abstracts. – P. 33.

19. *Sharyn S.V.* Laplace transformation for polynomial ultradistributions on cone $\mathbb{R}^n_+$ / S.V. Sharyn // Internat. Conf. "Spaces of Analytic and Smooth Functions III". – Będlewo. – 2009. Abstracts. – P. 31.

20. *Sharyn S.V.* Tensor structure of Gevrey ultradistribution spaces / S.V. Sharyn, A.V. Solomko // 5-th Internat. Conf. on Appl. Math. in honor of Prof. I.A. Rus. – Baia Mare. – 2006. Abstarcts. – P. 43.

Зміст

Розділ 4. Поліноміальні ультрарозподіли 162

Перелік позначень

(C_0) напівгрупа (група) — сильно неперервна напівгрупа (група)

(F) простір — простір Фреше (означення див. стор. 41)

(DF) простір — спряжений до простору Фреше (означення див. стор. 41)

(FS) простір — простір Фреше-Шварца (означення див. стор. 41)

(DFS) простір — спряжений до простору Фреше-Шварца (означення див. стор. 41)

$\mathcal{X}^n$ — n-тий декартовий степінь простору $\mathcal{X}$

$\langle\,\mathcal{X},\,\mathcal{Y}\,\rangle$ — двоїстість, яку утворюють простори $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$

$\mathcal{X}^{\otimes n}$ $(\mathcal{X}^{\widehat{\otimes} n})$ — n-тий (симетричний) тензорний степінь простору $\mathcal{X}$

$\mathscr{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ — простір всіх неперервних лінійних операторів, що діють з $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$

$\mathscr{L}(\mathcal{X})$ — $\mathscr{L}(\mathcal{X},\mathcal{X})$

$\mathscr{L}(\mathcal{X}^n,\mathcal{Y})$ — простір всіх неперервних n-лінійних операторів, що діють з $\mathcal{X}^n$ в $\mathcal{Y}$

$\mathscr{L}_{\mathfrak{s}}(\mathcal{X}^n,\mathcal{Y})$ — простір всіх симетричних відносно перестановки змінних неперервних n-лінійних операторів, що діють з $\mathcal{X}^n$ в $\mathcal{Y}$

$\Gamma(\mathcal{X})$ — $\underset{n\in\mathbb{Z}_+}{\bigoplus_{fin}}\mathcal{X}^{\widehat{\otimes}n}$, фінітна пряма сума симетричних тензорних степенів простору $\mathcal{X}$

$\Gamma(\mathcal{X}')$ — $\underset{n\in\mathbb{Z}_+}{\times}\mathcal{X}'^{\widehat{\otimes}n}$, декартовий добуток симетричних тензорних степенів простору $\mathcal{X}'$

$\mathcal{P}_n(\mathcal{X})$ — простір n-однорідних неперервних поліномів над локально опуклим простором $\mathcal{X}$

$\mathcal{P}(\mathcal{X})$ — простір всіх неперервних поліномів над локально опуклим простором $\mathcal{X}$

$\mathcal{P}'(\mathcal{X})$ — сильно спряжений до простору $\mathcal{P}(\mathcal{X})$

$\underset{\alpha}{\lim\operatorname{ind}}\,\mathcal{X}_\alpha$ — індуктивна границя системи $\{\mathcal{X}_\alpha\}$ локально опуклих просторів

$\underset{\alpha}{\lim\operatorname{pr}}\,\mathcal{X}_\alpha$ — проективна границя системи $\{\mathcal{X}_\alpha\}$ локально опуклих просторів

$\operatorname{Ker} F$ — ядро відображення F

$\operatorname{Im} F$ — образ відображення F

$\simeq$ — рівність в сенсі топологічного ізоморфізму

$\otimes$ — тензорний добуток

$\widehat{\otimes}$ — симетричний тензорний добуток

$\otimes_{\mathfrak{p}}$ $(\otimes_{\mathfrak{e}})$ — поповнення тензорного добутку в проективній (ін'єктивній) тензорній локально опуклій топології

$\Re z$ — дійсна частина комплексного числа $z\in\mathbb{C}$

$\mathbb{R}_+$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{C}_+$ — $[0,\infty)$, $\mathbb{R}_+\cap\mathbb{Z}$, $\{z\in\mathbb{C}:\Re z>0\}$ відповідно

$\mathbb{C}^d$, $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{N}^d$ — $\times_{j=1}^{d}\mathbb{C}$, $\times_{j=1}^{d}\mathbb{R}$, $\times_{j=1}^{d}\mathbb{N}$ відповідно

$\mathbb{C}^d_+$, $\mathbb{Z}^d_+$, $\mathbb{R}^d_+$ — $\times_{j=1}^{d}\mathbb{C}_+$, $\times_{j=1}^{d}\mathbb{Z}_+$, $\times_{j=1}^{d}\mathbb{R}_+$ відповідно

$\mathsf{int}\,\mathbb{R}^d_+$ — внутрішність конуса $\mathbb{R}^d_+$

Вступ

Актуальність теми. У дисертаційній роботі побудовано алгебри поліноміальних основних та узагальнених функцій, досліджено властивості цих алгебр (зокрема встановлено їхню тензорну структуру) та вивчено властивості деяких операторів (серед яких оператори зсуву, диференціювання, деякі інтегральні оператори), що діють в таких алгебрах. Спираючись на тензорну структуру, в якості застосування поліноміальних алгебр у дисертації розроблено метод побудови функціонального числення для зліченних наборів генераторів сильно неперервних напівгруп, класом символів якого є власне ці алгебри. Зокрема побудовано напівгрупу на просторі поліноміальних основних функцій, генератором якої є лапласіан Ґросса, записано у явному вигляді розв'язок нескінченновимірної задачі Коші для рівняння теплопровідності, породженого лапласіаном Ґросса.

Варто відзначити, що у дисертації розглядаються лише локально опуклі топологічні векторні простори. Значний внесок у розвиток теорії локально опуклих просторів зроблений у 50-х роках минулого століття Л. Шварцом, Н. Бурбакі, А. Ґротендіком та ін. Значна частина їхніх досліджень присвячена теорії двоїстості. Особлива увага була приділена метризовним локально опуклим просторам, зокрема просторам Фреше (або коротко просторам типу (F)). Істотне місце в теорії двоїстості локально опуклих просторів зайняли простори типу (DF) (спряжений до простору Фреше, точне означення див. на стор. 41), що були введені А. Ґротендіком у статті [122]. Класи просторів типу (F) та (DF) містять, зокрема, ряд відомих просторів послідовностей, аналітичних функцій, нескінченнодиференційовних функцій, розподілів та ультрарозподілів, які є важливі у застосуваннях.

У дисертації суттєво використовується теорія двоїстості локально опуклих ядерних (F) та (DF) просторів та техніка тензорних добутків Ґротендіка, що розвинута у відомих роботах [120, 121]. Завдяки позитивній відповіді на “проблему топологій” Ґротендіка для ядерних (F) та (DF) просторів (див. [54,77], формулювання проблеми див. на стор. 98) у дисертації стало можливим описати тензорну структуру поліноміальних основних та узагальнених функцій.

Інший підхід до побудови узагальнених функцій нескінченної кількості змінних, що ґрунтується на техніці трійок Гельфанда і теорії мір на нескінченновимірних просторах, розвивався (і продовжує розвиватися) в роботах Ю.М. Березанського, Ю.С. Самойленка, Т. Хіди, Й. Іто, Ю.Г. Кондратьєва, Л. Штрайта, Х. Куо, К. Обати, Х. Оуердіана, М.О. Качановського та ін.

Слід відзначити, що в дисертації істотним чином використано методи поліноміальних та полілінійних відображень, що активно розвиваються в роботах Р. Арона, Ш. Дініна, П. Ґаліндо, О.В. Лопушанського, А.В. Загороднюка та ін.

Функціональне числення — один із інструментів загального спектрального аналізу і теорії банахових алгебр, який дозволяє використовувати в цих дисциплінах функціонально-аналітичні методи. У сучасній квантовій теорії поля (див., наприклад, [137, 138, 145]) процедура квантування передбачає побудову відображення з алгебри дійснозначних функцій (алгебри класичних спостережуваних величин) в алгебру самоспряжених операторів (алгебру квантових спостережуваних величин). З точки зору математики процедура квантування є проблемою побудови функціонального числення.

Починаючи із 70-х років минулого століття функціональне числення для генераторів аналітичних напівгруп відіграє важливу роль в спектральній теорії диференціальних операторів і її застосуваннях до еволюційних рівнянь, зокрема у характеризації максимальної регулярності дробових степенів диференціальних операторів (див. роботи П. Ґрісварда і Дж. Да Прато [90, 118]). В контексті дробових степенів функціональне числення є ефективним методом зведення обчислень над операторними функціями до відповідних обчислень із звичайними голоморфними функціями. Метод операторного числення був використаний у відносно недавній роботі [65] при розв'язанні проблеми Като квадратного кореня (див. [143]).

Основною метою останніх двох розділів дисертації є побудова числення типу Хілле-Філліпса для зліченного набору генераторів сильно неперервних напівгруп стиску. Зауважимо, що метод, запропонований у дисертації, дає можливість описати образ функціонального числення, що не завжди можливо при інших підходах до побудови операторного числення.

В основі формул функціонального числення, яке розглядаємо в дисертації, лежить операція крос-кореляції, що забезпечує коректність означень такого числення. Відзначимо, що операція крос-кореляції має фізичний зміст і застосовується у теорії Фур'є-процесорів для виділення слабких сигналів із шумового фону та для обробки сигналів радіолокаторів і систем дальнього зв'язку (див. [30]).

Числення Хілле-Філліпса для функцій скінченної кількості змінних розвинуто в роботах О. Лопушанського та автора дисертації [156, 157] (див. також подібну роботу А. Міротіна [25]). Спосіб побудови функціонального числення іншого типу для зліченних наборів самоспряжених операторів на гільбертовому просторі описано Ю.С. Самойленком у книзі [34]. Актуальною залишається проблема побудови аналогу числення Хілле-Філліпса для функцій нескінченної кількості змінних. Розв'язанню цієї проблеми присвячена друга частина даної дисертації (див. також статті автора [198, 206]).

Зв'язок роботи з науковими програмам, планами, темами. Дослідження, що складають основу дисертації, проводились на кафедрі математичного і функціонального аналізу ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника" в рамках науково-дослідних тем "Розробка аналітичних методів у нескінченновимірному комплексному аналізі та теорії операторів" (номер державної реєстрації 0113U000184) і "Гомоморфізми та функціональне числення в алгебрах аналітичних функцій на банахових просторах" (номер державної реєстрації 0115U002305).

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є розвиток нового підходу до дослідження дуальної пари, що складається з просторів основних функцій нескінченної кількості змінних та відповідних просторів поліноміальних розподілів та ультрарозподілів, дослідження алгебраїчної та тензорної структури цих просторів, а також побудова функціонального числення для зліченного набору операторів із символами в цих просторах.

Об'єктом дослідження є локально опуклі простори поліноміальних основних і узагальнених функцій та простори із тензорною структурою типу Фока; деякі оператори і операції (оператори зсуву, диференціювання, операції множення тощо) на цих просторах; функції нескінченної кількості змінних (числових та операторних аргументів); а також задача Коші для рівняння теплопровідності, породжена нескінченновимірним лапласіаном Ґросса.

Предметом дослідження є структура та властивості локально опуклих просторів поліноміальних основних і узагальнених функцій та просторів із тензорною структурою типу Фока; властивості операторів і операцій на цих просторах; властивості та застосування функцій від зліченного набору генераторів сильно неперервних напівгруп та груп операторів.

Завдання дослідження полягають у запровадженні та розвитку нового підходу до побудови локально опуклих просторів основних та узагальнених функцій нескінченної кількості змінних, який базується на теорії двоїстості ядерних (F) та (DF) просторів та теорії їхніх симетричних тензорних добутків; дослідженні структури та опису властивостей таких просторів і операторів на них; побудові функціонального числення для зліченного набору операторів із символами в таких просторах та вивченні властивостей цього числення.

Методи дослідження. Для розв'язання поставлених задач в дисертації використовуються методи функціонального аналізу і топології, зокрема: методи теорії двоїстості ядерних (F) та (DF) просторів, методи теорії симетричних тензорних добутків локально опуклих просторів, методи нескінченновимірного аналізу та теорії узагальнених функцій, методи операторного числення, методи теорії напівгруп та груп операторів.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі результати дисертації, які виносяться на захист, є новими. У роботі вперше отримано наступні результати:

- розвинуто новий підхід до дослідження дуальної пари $\langle \mathcal{P}'(\mathcal{X}'), \mathcal{P}(\mathcal{X}')\rangle$, що складається з простору $\mathcal{P}(\mathcal{X}')$ неперервних поліномів над $\mathcal{X}'$ та сильно спряженого простору $\mathcal{P}'(\mathcal{X}')$ поліноміальних розподілів, яка є нелінійним розширенням дуальної пари $\langle\, \mathcal{X}',\, \mathcal{X}\,\rangle$ лінійних локально опуклих ядерних просторів типу (F) або (DF);
- побудовано узагальнення операторів диференціювання та зсуву окремо на випадки просторів поліноміальних основних швидко спадних функцій, поліноміальних узагальнених функцій повільного росту, поліноміальних ультрадиференційовних функцій та поліноміальних ультрарозподілів; у кожному випадку доведено, що відповідні похідні генерують напівгрупи зсувів;

- поширено перетворення Фур'є на простори поліноміальних основних швидко спадних функцій і поліноміальних розподілів повільного росту та вивчено його властивості; поширено перетворення Фур'є-Лапласа та Лапласа на простори поліноміальних ультрарозподілів та вивчено властивості цих перетворень; при цьому описано образ основного простору при перетворенні Фур'є-Лапласа;
- доведено теореми типу Пелі-Вінера для поліноміальних ультрадиференційовних основних та узагальнених функцій;
- досліджено диференційовність за Ґато поліноміальних основних швидко спадних функцій і поліноміальних розподілів повільного росту, описано властивості похідної Ґато на просторах із тензорною структурою типу Фока, встановлено зв'язок похідної Ґато з квантовим білим шумом та диференціюваннями на цих просторах;
- доведено теорему про продовження довільної швидко спадної функції з додатного конуса $\mathbb{R}^d_+$ на весь простір із збереженням властивості швидкого спадання;
- доведено структурні теореми для операторів, що діють в просторах (лінійних) ультрадиференційовних функцій і які комутують з багатопараметричними напівгрупами; доведено структурну теорему про представлення локально опуклої алгебри із тензорною структурою типу Фока у вигляді комутанта поліноміальної напівгрупи зсувів;
- побудовано функціональне числення типу Хілле-Філліпса для комутуючих наборів генераторів сильно неперервних напівгруп, що діють в банаховому просторі, в класі аналітичних в трубчастих областях функцій скінченної та нескінченної кількості змінних;
- побудовано функціональне числення для зліченного некомутуючого набору генераторів сильно неперервних груп операторів, що діють в

гільбертовому просторі, в класі цілих аналітичних функцій зліченної кількості змінних;

- знайдено в явному вигляді роз'язок нескінченновимірного рівняння теплопровідності, породженого лапласіаном Ґросса; побудовано в явному вигляді напівгрупу, генератором якої є лапласіан Ґросса;
- описано гомоморфізми з алгебри аналітичних функцій обмеженого типу на нескінченновимірному банаховому просторі в деяку комутативну банахову алгебру і показано, що не кожен такий гомоморфізм задається функціональним численням.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер. Вони можуть бути використані у нескінченновимірному аналізі, зокрема в теорії узагальнених функцій, теорії функціонального числення; а також можуть бути застосовані в теорії аналітичних функцій та нелінійному аналізі.

Особистий внесок здобувача. Всі результати дисертації, які виносяться на захист, одержані автором самостійно. З результатів робіт, що виконані у співавторстві, на захист виносяться лише положення, що одержані автором дисертації. У статті [22] автору дисертації належать Твердження 2 і 3. У статті [37] А.В. Соломку належать Твердження 2, Теореми 2 і 3. У статті [159] автору дисертації належать леми 3, 5, 6, теореми 1 і 2, та ідея доведення теореми 4; аналогічний метод доведення був використаний автором у параграфі 4.2. У статті [24] О.В. Лопушанському належить постановка задачі та аналіз одержаних результатів. У статтях [16,20,35,36,156,157,160,161,201] внесок співавторів є рівноцінним.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались та обговорювались на: п'ятій міжнародній конференції з прикладної математики, присвяченій проф. І.А. Русу (Бая-Маре, Румунія, 2006); міжнародній конференції, присвяченій 50-річчю кафедри алгебри і математичної логіки (Київ, 2009); міжнародній конференції, присвяченій пам'яті проф. М.М. Боголюбова і проф. М.І. Нагнибіди (Чернівці, 2009); міжнародній конференції "Infinite Dimensional Analysis and Topology" (Івано-Франківськ, 2009); міжнародній конференції "Spaces of Analytic and Smooth Functions III" (Бендлєво, Польща, 2009); міжнародній конференції "Сучасні проблеми аналізу" (Чернівці, 2010); міжнародній конференції, присвяченій пам'яті проф. В.Е. Лянце (Львів, 2010); всеукраїнському науковому семінарі "Сучасні проблеми теорії ймовірностей і математичного аналізу" (Івано-Франківськ, 2010); всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей і математичного аналізу" (Івано-Франківськ, 2011); міжнародній математичній конференції ім. В.Я. Скоробагатька (Дрогобич, 2011); всеукраїнській науковій конференції "Алгебра, топологія, аналіз, стохастика" (Івано-Франківськ–Микуличин, 2012); XIV міжнародній науковій конференції ім. М. Кравчука (Київ, 2012); всеукраїнській науковій конференції "Диференціальні рівняння та їх застосування в прикладній математиці" (Чернівці, 2012); міжнародній науковій конференції "Spectral theory and differential equations" (Харків, 2012); міжнародній науковій конференції, присвяченій 120 річниці від дня народження Стефана Банаха (Львів, 2012); міжнародній конференції "Functional Analysis: Applications to Complex Analysis and Partial Differential Equations" (Бендлєво, Польща, 2012); IX літній школі "Алгебра, топологія, аналіз" (Поляниця, 2014); IV міжнародній конференції, присвяченій 135 річниці від дня народження Ганса Гана (Чернівці, 2014); XVII конференції "Analytic Functions and Related Topics" (Хелм, Польща, 2014); II всеукраїнській науковій конференції "Прикладні задачі математики" (Івано-Франківськ, 2016); науковому семінарі Інституту математики Математично-Природничого факультету (Жешув, Польща 2009); спільному виїзному засіданні Бюро відділення математики НАН України і секції математики та математичного моделювання

ЗНЦ НАН України (Івано-Франківськ, 2011); науковому семінарі відділу функціонального аналізу Інституту математики НАН України (керівник Ю.М. Березанський) (Київ, 2012); науковому семінарі Інституту математики Вищої професійної школи (керівник Й. Зайонц) (Хелм, Польща, 2013, 2015); науковому семінарі факультету математики та інформатики Лодзького університету (керівник Р. Павляк) (Лодзь, Польща, 2015); науковому семінарі кафедри математичного і функціонального аналізу Чернівецького національного університету (керівник В.К. Маслюченко) (Чернівці, 2017); науковому семінарі математичного відділення Фізико-технічного інституту низьких температур НАН України (керівник Є.Я. Хруслов) (Харків, 2017); науковому семінарі факультету математики та інформатики Лодзького університету (керівник М. Студнярський) (Лодзь, Польща, 2017); Львівському міжвузівському семінарі з функціонального аналізу ім. В.Е. Лянце (керівники О.Г. Сторож, Я.М. Микитюк) (Львів, 2017); Київському семінарі з функціонального аналізу (керівник А.Н. Кочубей) (Київ, 2017); неодноразово на засіданнях наукового семінару факультету математики та інформатики і наукового семінару кафедри математичного і функціонального аналізу Прикарпатського національного університету (керівник А.В. Загороднюк); звітних конференціях Прикарпатського національного університету (2006–2016 р.р.).

Публікації. Результати дисертації опубліковані у 25 статтях [16, 20, 22, 24, 35–37, 39, 40, 45, 48, 49, 156, 157, 159–161, 190, 196, 198, 201, 202, 204–206], серед яких 16 статей у наукових фахових виданнях України [16, 20, 22, 24, 35–37, 39, 40, 45, 48, 49, 159, 190, 201, 202], 9 статей у закордонних наукових періодичних виданнях, які включені до міжнародних наукометричних баз [156, 157, 160, 161, 196, 198, 204–206], а також 20 тез доповідей на наукових конференціях [23, 41–44, 46, 47, 50–53, 191–195, 197, 199, 200, 203].

Розділ 1

Вихідні положення, огляд літератури та основні напрямки дослідження

1.1 Огляд відомих результатів, які відносяться до тематики дисертаційного дослідження

1.1.1 Алгебри поліноміальних відображень та їхній зв'язок з тензорними добутками

Значна частина дисертації присвячена дослідженню топологічної алгебри вигляду $\mathcal{P}(\mathcal{X}')$, що складається з усіх неперервних поліномів на тополічно спряженому просторі $\mathcal{X}'$, де $\mathcal{X}$ — деякий локально опуклий ядерний (F) або (DF) простір. Іншим об'єктом дослідження є топологічно спряжений до $\mathcal{P}(\mathcal{X}')$ простір $\mathcal{P}'(\mathcal{X}')$, який можна інтерпретувати як поліноміальне розширення простору $\mathcal{X}'$. При цьому суттєвими для нас є той факт, що $\mathcal{P}'(\mathcal{X}')$ має природну алгебраїчну структуру незалежно від наявності такої структури на просторі $\mathcal{X}$ (чи $\mathcal{X}'$). Множення алгебри $\mathcal{P}'(\mathcal{X}')$ може бути задано формулою

$$U \diamond V := \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \sum_{m=0}^{n} U_m \cdot V_{n-m},$$

де $U = \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} U_n \in \mathcal{P}'(\mathcal{X}')$, $V = \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} V_n \in \mathcal{P}'(\mathcal{X}')$, $U_0 \in \mathbb{C}$, $V_0 \in \mathbb{C}$, і $\forall n \in \mathbb{N}$, U_n, V_n — n-однорідні поліноми на просторі $\mathcal{X}$, при цьому добуток $U_m \cdot V_{n-m}$ є звичайним поточковим множенням двох многочленів (див. твердження 2.2.3).

В дисертації розвивається підхід до дослідження алгебр $\mathcal{P}(\mathcal{X}')$ та $\mathcal{P}'(\mathcal{X}')$, що базується на їхньому представленні

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}') \simeq \bigoplus\nolimits_{fin}\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{X}^{\widehat{\otimes} n}, \qquad\qquad \mathcal{P}'(\mathcal{X}') \simeq \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{X}'^{\widehat{\otimes} n}$$

у вигляді фінітної прямої суми та декартового добутку симетричних проективних тензорних степенів простору $\mathcal{X}$ та $\mathcal{X}'$ відповідно. Такі представлення дозволяють природним способом побудувати операторне числення для відповідних алгебр функцій нескінченної кількості змінних. З цією метою у дисертації використовується теорія локально опуклих тензорних добутків Ґротендіка [120–122], що істотним чином доповнена технікою симетричних тензорних добутків просторів типу (F) та (DF). Це дає можливість отримати поширення ряду відомих результатів теорії лінійних розподілів на випадок поліноміальних розподілів.

Зауважимо, що властивості симетричних тензорних добутків довільних локально опуклих просторів в контексті теорії голоморфних функцій нескінченної кількості змінних добре описані в книзі Ш. Дініна [99]. Як зауважив Ш. Дінін, суть використання тензорних добутків у теорії поліноміальних відображень формулюється просто: поліноміальні функції на деякому локально опуклому просторі можна замінити простішими лінійними функціями на дещо складнішому просторі.

Необхідно зауважити, що існують інші відомі і широко використовувані нескінченновимірні узагальнення класичних просторів лінійних розподілів, які базуються на сучасних методах нескінченновимірного аналізу і концепціях трійок Гельфанда (див., наприклад, [127, 150, 175]). Додамо, що питання, пов'язані із аналітичністю таких розподілів, досліджувалися зокрема в [75].

Потреба у розвитку теорії ненормованих топологічних алгебр виникла, в основному, із застосувань у квантовій механіці. Р. Аренс [61] та Е.А. Майкл [167] незалежно один від одного отримали фундаментальні результати у теорії псевдонормованих алгебр. Пізніше А.Я. Хелемський [125] назвав їх алгебрами Аренса-Майкла і показав різноманітні застосування. Сучасний стан досліджень теорії топологічних алгебр можна знайти у книгах [109, 113].

Полілінійні та поліноміальні відображення від нескінченної кількості змінних розглядалися в класичних роботах М. Фреше [110] і В. Вольтерра [216]. Пізніше Р. Ґато [114] встановив зв'язок між поліномами та n-лінійними функціоналами. С. Мазур і В. Орліч в [164] довели фундаментальну поляризаційну формулу. Незалежно від них цю ж формулу вивів Р.С. Мартін [163]. Практично в той же час А.Д. Майкл, Р.С. Мартін, А.Г. Кліффорд [168, 169] для загального випадку встановили зв'язок між симетричними n-лінійними функціоналами і n-однорідними поліномами. Подальший розвиток теорії поліномів нескінченної кількості змінних відображений у роботах С. Банаха [68], А.Е. Тейлора [210], М.А. Цорна [225] та інших математиків. Зокрема ними було встановлено еквівалентність означень поліноміальних відображень в сенсі Фреше і Ґато.

Систематичне дослідження просторів поліноміальних відображень розпочалось з монографії Л. Нахбіна [172]. Поліноміальні функціонали є природним узагальненням лінійних функціоналів, тому закономірним є питання збереження властивостей лінійних відображень для поліноміальних. Л. Дружковський у [103] показав, що замкненість ядра поліноміального функціоналу, заданого на комплексному локально опуклому просторі, є необхідною та достатньою умовою його неперервності. Крім того, він довів теорему про замкнений графік для таких функціоналів. Я. Бохнак та Й. Сіцяк у [74] довели критерій неперервності поліноміального відображення з локально опуклого в локально обмежений простір;

таким критерієм є обмеженість на обмежених множинах. Аналогічні результати для поліноміальних відображень між метричними просторами отримані А.В. Загороднюком у [14].

Використовуючи теорію топологічних тензорних добутків А. Ґротендіка (див. [120, 122]), Р.А. Раян [184] (див. також його відносно недавню книгу [185]) описав тензорну структуру простору неперервних поліномів на банахових просторах. Він довів ізоморфізм між простором поліноміальних відображень та простором лінійних операторів на симетричному тензорному степені банахового простору. Цей зв'язок між вказаними просторами детально вивчався впродовж багатьох десятиліть, зокрема він став корисним інструментом у теорії голоморфних функцій нескінченної кількості змінних (див. фундаментальні роботи Дж. Мухіки [171], Ш. Дініна [98, 99] та К. Флорета [107, 108]).

Слід відзначити, що для різних типів поліноміальних відображень окремо досліджувались їхні тензорні представлення, наприклад, у [174] М. Нішіхара та К. Хо Шон довели, що простір всіх однорідних поліномів слабкого типу має представлення у вигляді тензорного добутку тільки у випадку, якщо простір є типу (DF).

Дуальність між поліномами і лінійними операторами на симетричному тензорному добутку просторів була узагальнена на векторнозначний випадок за допомогою методу лінеаризації, що був розвинутий в [120, 121, 184]. Метод лінеаризації дозволяє встановити ізоморфізм між простором векторнозначних неперервних n-однорідних поліномів $\mathcal{P}_n(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ і простором неперервних лінійних операторів, що діють з проективного симетричного тензорного степеня $\mathcal{X}^{\widehat{\otimes}_{\mathfrak{p}} n}$ простору $\mathcal{X}$ в простір $\mathcal{Y}$.

Відомо [120, 121], що кожна крос-норма на тензорному добутку банахових просторів строго лежить між найслабшою ін'єктивною та найсильнішою проективною нормами. Проективним та ін'єктивним нормам на тензорних добутках локально опуклих просторів та їх зв'язкам із операторними ідеалами присвячена відома книга А. Дефанта та К. Флорета [94]. Дослідженням різних топологій, в яких можна поповнювати тензорні добутки локально опуклих просторів, присвячені роботи П. Доманського, М. Ліндстрьома [102], А. Періса [177], Х.М. Ансеміла, С. Понте, К. Флорета [58, 59] та інших.

Додаткову інформацію про тензорні добутки локально опуклих просторів, які використовуються в дисертації, можна знайти у пункті 1.2.2. Детальніше із станом досліджень у теорії полілінійних відображень та теорії тензорних добутків можна ознайомитись в монографіях та оглядових статтях [62, 75, 94, 99, 107, 108, 162, 171].

1.1.2 Функціональне числення

Функціональне (або операторне) числення — це теорія, що вивчає як будувати функції від операторів, грубо кажучи, як "підставляти" оператор замість аргумента функції. З іншого боку, функціональне числення для деякого (не обов'язково обмеженого) оператора A на банаховому (чи довільному локально опуклому) просторі $\mathcal{X}$ — це відображення, за яким деякій функції f з топологічної алгебри $\mathcal{A}$ (її називають класом символів числення) ставиться у відповідність оператор $f(A)$. При цьому таке відображення повинно бути неперервним гомоморфізмом з алгебри $\mathcal{A}$ в топологічну алгебру операторів $\mathscr{L}(\mathcal{X})$, що діють в $\mathcal{X}$. Таким чином, в цій термінології функціональне числення можна асоціювати із згаданим гомоморфізмом, але як теорія функціональне числення вивчає такі гомоморфізми. Для ознайомлення із загальною теорією функціонального числення ми рекомендуємо книжку К. Боша і Ч. Шварца [79].

У п'ятдесятих роках минулого сторіччя Ян Мікусінський запропонував новий підхід до побудови операторного числення для диференціального оператора (див. [170]). Цей алгебраїчний спосіб ґрунтується на інтерпретації згортки як множення в кільці неперервних функцій, заданих на додатній дійсній півосі. Операторне числення Мікусінського успішно використано у теорії звичайних диференціальних рівнянь, інтегральних рівнянь, диференціальних рівнянь з частинними похідними та в теорії спектральних функцій. Звичайно, що такий вдалий метод був узагальнений рядом математиків (див., наприклад, [10, 11, 222]) для інших класів рівнянь.

Існує багато різних підходів до побудови функціонального числення для одного оператора, що діє в банаховому (чи гільбертовому) просторі. Більшість з них базуються на деякому інтегральному представленні функцій з класу символів числення. Одним із таких найпростіших і найпоширеніших представлень є інтегральна формула Коші. Це приводить до відомого числення Рісса-Данфорда, що має застосування, зокрема у спектральній теорії еліптичних диференціальних рівнянь і теорії максимальної регулярності параболічних еволюційних рівнянь (див., наприклад, [142, 152]).

Якщо A є самоспряженим оператором, то можна визначити оператор $f(A)$ для всіх обмежених комплекснозначних вимірних функцій, заданих на спектрі оператора A. У роботі [165] А. Макінтош запропонував і розвинув теорію функціонального числення для ширшого класу так званих секторіальних операторів.

H^∞-числення є розширенням класичного числення Данфорда для обмежених операторів на випадок необмежених секторіальних операторів. Такий підхід був формалізований А. Макінтошем та його співавторами у статті [87]. В першу чергу вони були вмотивовані зв'язком H^∞-числення із проблемою Като квадратного кореня (див. [143]). Насправді H^∞-числення внесло значний вклад у розв'язання [65] цієї проблеми. Інше застосування H^∞-числення полягає у операторному підході до еволюційних рівнянь Ґрісвальда і Да Прато.

Ці важливі застосування спонукали до появи багатьох робіт про H^∞-числення для частинних диференціальних операторів (див., наприклад, статті Н. Калтона, Р. Делаубенфельса, А. Макінтоша і співавторів [80, 87, 142] та цитування там). Питанням доведення обмеженості H^∞-числення для генераторів напівгруп присвячена недавня стаття М. Хаазе, Я. Розендаля [124]. Широкі класи еліптичних диференціальних операторів, операторів Шредінґера із сингулярними потенціалами, багато операторів Стокса мають обмежене H^∞-числення. Для детальної інформації про числення Рісса-Данфорда, що ґрунтується на інтегральній формулі Коші, та його розширення, H^∞-числення, ми рекомендуємо статтю [69] і книгу [123].

Існує ряд робіт, що використовують інші інтегральні представлення функцій, або не використовують їх взагалі. Дамо короткий огляд робіт у цьому контексті.

У роботах [1,9,32] побудовано функціональне числення для функцій з класу Крейна (так званих абсолютно ввігнутих функцій). Використовуючи техніку перетворення Фур'є автори статті [144] будують функціональне числення в спеціальному класі (алгебрі) функцій, що є підпростором простору Соболєва. Одновимірне та багатовимірне функціональне числення для генераторів напівгруп в класі функцій Шенберга розвинуто А. Міротіним у роботах [26] та [25] відповідно. У [95,97] Р. Делаубенфельс запропонував метод побудови функціонального числення для взагалі кажучи необмежених генераторів обмежених голоморфних напівгруп. Для цього використовується спеціальне інтегральне представлення функцій з класу символів. Аналогічні результати отримано в [92, 112]. К. Берґ, К. Бояджієв, Р. Делаубенфельс у [72] побудували функціональне числення для функцій Бернштейна, що є сумою функції Стільтьєса і невід'ємної монотонної функції. В роботі [180] досліджено спектральну теорію та побудовано функціональне числення для пари збурених лінійних операторів, що діють з одного комплексного банахового простору в інший. І. Курбатова у [19] побудувала функціональне числення для квадратичного пучка (трійки операторів спеціального вигляду) в класі аналітичних функцій на спектрі цього пучка. У праці [116], використовуючи функціональне числення, П. Ґурка, Х. Прадо та Е. Реєс досліджують певне рівняння із нескінченною кількістю похідних, що продиктовано теорією струн та недавніми дослідженнями в космології.

Ситуація стає складнішою, якщо захотіти побудувати функціональне числення для функцій багатьох змінних. Коли $A = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ є набором комутуючих операторів, тоді зрозуміло як визначити $f(A)$, якщо f є поліномом або степеневим рядом n змінних. Однак є різні способи визначення спільного спектру $\sigma(A)$ набору A і, таким чином, визначення функціонального числення для A. Якщо оператори задовольняють умову $\sigma(\sum_j \xi_j A_j) \subset \mathbb{R}$ для всіх $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, тоді є можливість використати алгебри Кліффорда і замінити використання інтеграла Коші у численні Рісса-Данфорда інтегралом Кліффорда-Коші вищої розмірності (див. статтю А. Макінтоша [166]).

В літературі є багато способів визначення класу символів числення у випадку функцій багатьох змінних, що часто приводить до певних обмежень на комутативність розглядуваних операторів. Наприклад, можна узагальнити функціональне числення з однієї комплексної змінної на випадок багатьох змінних, як це зроблено в ранніх роботах Й.Л. Тейлора [212], але цей спосіб може бути застосований лише для випадку скінченного набору комутуючих операторів. У [186] С. Санберг запропонував загальну схему побудови розширення голоморфного числення Тейлора [212] для скінченного набору операторів на класи неголоморфних функцій, а М. Андерссон в [57] — на класи (ультра)диференційовних функцій.

Інша можливість — це розглянути числення Вейля [56, 213] для некомутуючих самоспряжених операторів або використати некомутативність функцій з алгебр Кліффорда. У [221] Г. Вейль побудував функціональне числення для того, щоб розв'язати конкретну задачу із необмеженими самоспряженими операторами диференціювання та множення на просторову змінну. Таке числення отримало назву числення Вейля і спочатку використовувалось для потреб квантової механіки. Пізніше воно було розширено на абстрактні простори [55, 56]. Таке числення розглядав Л. Хермандер в [131] і застосував у псевдо-диференціальних рівняннях. Ця робота відіграла велику роль в теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними і мала значний вплив на низку застосувань в математичній фізиці. Відносно недавно у [70] було запропоновано абстрактний підхід до псевдо-диференціального числення Вейля для операторів у просторах функцій нескінченної кількості змінних. При цьому результати проілюстровано на прикладі нескінченновимірної групи Гейзенберга.

Серед багатьох досліджень, присвячених некомутативному випадку, варто згадати роботи Б. Джеффері, А. Макінтоша, А. Прайда [135, 136, 166]. Вони побудували функціональне числення для наборів не обов'язково комутуючих операторів, що продиктовано значним інтересом з фізичної точки зору. Ф. Коломбо разом із співавторами опублікували добрий огляд [85] робіт, присвячених різним версіям функціонального числення для некомутативного випадку.

У роботах [60, 218, 219] Л. Вальброк, К. Апостол побудували так зване голоморфне числення на спектрі Вальброка. Х. Гале у [111] переніс результати з [219] на нескінченну кількість змінних.

У статтях [100, 101] Ш. Дінін, Р. Харт, С. Тейлор побудували функціональне числення в алгебрі всіх аналітичних функцій обмеженого типу на комплексному банаховому нескінченновимірному просторі.

Повні комплексні комутативні обернені алгебри Маккі узагальнюють комутативні банахові алгебри. Використовуючи перетворення Гельфанда для таких алгебр Г. Біллер у [73] побудував функціональне числення для голоморфних функцій на околах спільного спектру скінченного набору елементів алгебри і для голоморфних функцій на околах спектру Гельфанда.

Історичний огляд робіт, пов'язаних із використанням поліноміальних та аналітичних відображень в теорії лінійних операторів, зокрема у функціональному численні, можна знайти в статті А.Е. Тейлора [211].

Останні два розділи дисертації присвячені побудові функціонального числення в класі функцій нескінченної кількості змінних. При цьому наш підхід істотним чином використовує формулу функціонального числення Хілле-Філліпса.

H^∞-числення є добрим інструментом для роботи із генераторами аналітичних напівгруп. Однак для генераторів довільних (C_0) напівгруп таке числення не годиться. Для таких операторів Е. Хілле і Р. Філліпс у своїй відомій книзі [38] запропонували використовувати функціональне числення, що базується на перетворенні Лапласа-Стільт'єса.

Інший метод, що базується на перетворенні Лапласа, був розвинутий ними в [38]. Цей метод відомий як числення Хілле-Філліпса. Він має багато корисних застосувань, зокрема, в гідрології (див. [66] і посилання там). Е. Нельсон [173] і А. Балакрішнан [67] розширили таке числення на ширші класи функцій. У роботі [133] П. Яра розширив числення Хілле-Філліпса для генераторів бінеперервних напівгруп.

Нехай μ — деяка σ-скінченна міра на $\mathbb{R}_+$, A — генератор деякої (C_0) напівгрупи $\{T(t;A) : t \geq 0\}$ стиску. Означимо відображення

$$\Psi(\mu;A)x := \int_0^\infty T(t;A)x\,\mu(dt), \qquad x \in \mathcal{X}.$$

Відомо [38, 15.2], що для кожного $x \in \mathcal{X}$ цей інтеграл існує у сенсі інтеграла Бохнера.

Теорема 1.1.1 ([38]). *Функція* $\Psi(\mu; A)$ *є гомоморфним відображенням з алгебри* σ*-скінченних мір на* $\mathbb{R}_+$ *в алгебру операторних функцій, визначених на множині генераторів* (C_0) *напівгруп стиску, зі значеннями в* $\mathscr{L}(\mathcal{X})$.

Р. Херш та Т. Като [126] показали, що функціональне числення Хілле-Філліпса є добрим інструментом дослідження збіжності і якісних властивостей методів часової дискретизації для сильно неперервних напівгруп.

1.2 Термінологія та допоміжні результати

1.2.1 Відомості з теорії локально опуклих просторів

Нехай на парі векторних просторів $\mathcal{X}$ і $\mathcal{Y}$ задана білінійна форма

$$\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \ni (x,\, y) \longmapsto \langle\, x,\, y\,\rangle \in \mathbb{C}\,.$$

Тоді кажуть, що задана дуальна пара $\langle\, \mathcal{X},\, \mathcal{Y}\,\rangle$. Якщо сукупність лінійних функціоналів $\{\mathcal{X} \ni x \longmapsto \langle\, x,\, y\,\rangle \,:\, y \in \mathcal{Y}\}$ відокремлює точки простору $\mathcal{X}$, а сукупність лінійних функціоналів $\{\mathcal{Y} \ni y \longmapsto \langle\, x,\, y\,\rangle \,:\, x \in \mathcal{X}\}$ відокремлює точки простору $\mathcal{Y}$, то кажуть, що дуальна пара $\langle\, \mathcal{X},\, \mathcal{Y}\,\rangle$ є відокремлюваною. Відокремлювану дуальну пару $\langle\, \mathcal{X},\, \mathcal{Y}\,\rangle$ називають двоїстістю або дуальністю. Якщо $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$ є лінійними топологічними просторами, то топологія $\mathcal{X}$ (відповідно $\mathcal{Y}$) називається узгодженою з двоїстістю $\langle\, \mathcal{X},\, \mathcal{Y}\,\rangle$ за умови $\mathscr{L}(\mathcal{X}, \mathbb{C}) = \mathcal{Y}$ (відповідно $\mathscr{L}(\mathcal{Y}, \mathbb{C}) = \mathcal{X}$).

Полярою та ортогональним доповненням деякої підмножини $S \subset \mathcal{X}$ відносно двоїстості $\langle\, \mathcal{X},\, \mathcal{Y}\,\rangle$ називають множини $S^\circ \subset \mathcal{Y}$ та $S^\perp \subset \mathcal{Y}$ вигляду

$$\begin{aligned} S^\circ &:= \{y \in \mathcal{Y} : |\langle\, x,\, y\,\rangle| \le 1,\ \forall x \in S\} \quad \text{та} \\ S^\perp &:= \{y \in \mathcal{Y} : \langle\, x,\, y\,\rangle = 0,\ \forall x \in S\} \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

відповідно. Відомо [54], що поляра співпадає з ортогональним доповненням, якщо S є лінійним підпростором $\mathcal{X}$.

Через $\langle S\rangle = \{x\in\mathscr{X} : x = \sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i,\ x_i\in S,\ \sum\limits_{i=1}^{n}|\lambda_i|\le 1,\ n\in\mathbb{N}\}$ позначають абсолютно опуклу оболонку, через $|S| = \bigcup\limits_{|\lambda|\le 1}(\lambda S)$ – урівноважену оболонку S і кажуть, що множина S є опуклою урівноваженою, якщо $S = \langle|S|\rangle$. Множина $U\subset\mathscr{X}$ поглинає S, якщо існує таке число $\lambda>0$, що $S\subset\lambda U$; якщо U поглинає усі точки простору $\mathscr{X}$, то U називають поглинаючою множиною. Поглинаюча множина U локально опуклого простору $\mathscr{X}$, яка співпадає із замиканням множини $\langle|U|\rangle$, називається бочкою. Якщо кожна бочка в $\mathscr{X}$ є околом нуля, то простір $\mathscr{X}$ називають бочковим простором.

Кожній множині $S\subset\mathscr{X}$ можна поставити у відповідність функціонал Мінковського $p_S(x) := \inf\{\lambda>0 : x\in\lambda S\}$, який є напівнормою на підпросторі $\mathbb{C}\cdot S := \{\lambda S : \lambda\in\mathbb{C}\}$.

Нехай U, V — дві довільні підмножини векторного простору $\mathscr{X}$. Кажуть (див. [13]), що U цілком обмежена відносно V, якщо U міститься в лінійній оболонці V і для кожного $\varepsilon>0$ існує така скінченна підмножина $A_\varepsilon\subset U$, що $U\subset A_\varepsilon+\varepsilon V$.

Через $b(\mathscr{X}',\mathscr{X})$ позначимо локально опуклу топологію в $\mathscr{X}'$ рівномірної збіжності на обмежених множинах з $\mathscr{X}$, яку називають сильною топологією спряженого простору. Простір $\mathscr{X}''\equiv\mathscr{L}(\mathscr{L}_b(\mathscr{X},\mathbb{C}),\mathbb{C})$ називають другим спряженим до $\mathscr{X}$. Якщо має місце рівність $\mathscr{X}''=\mathscr{X}$ в сенсі векторних просторів, то простір $\mathscr{X}$ називають піврефлексивним. Простір $\mathscr{X}$ називають рефлексивним, якщо рівність $\mathscr{X}''=\mathscr{X}$ є топологічним ізоморфізмом при умові, що на $\mathscr{X}''$ задано сильну топологію $b(\mathscr{X}'',\mathscr{L}_b(\mathscr{X},\mathbb{C}))$ відносно двоїстості $\langle\mathscr{X}'',\mathscr{X}'\rangle$.

Відомо [54, 151], що простір $\mathscr{X}$ рефлексивний тоді і тільки тоді, коли він піврефлексивний і бочковий. Рефлексивний локально опуклий простір $\mathscr{X}$ називають монтелевим, якщо в ньому кожна замкнена обмежена підмножина є компактною. Відзначимо, що властивість монтелевості переноситься на спряжені простори у їх сильній топології [54, 151].

Нехай $\mathcal{X}$ — локально опуклий простір. Нагадаємо [13, 54, 134, 151], що:

(i) повний метричний простір $\mathcal{X}$ називають простором Фреше (або коротко (F) простором);

(ii) простір $\mathcal{X}$ називають простором Шварца, якщо для довільного околу нуля $\mathscr{U} \subset \mathcal{X}$ знайдеться окіл нуля $\mathscr{V} \subset \mathcal{X}$, цілком обмежений відносно $\mathscr{U}$;

(iii) простір $\mathcal{X}$ називають (DF) простором, якщо він має зліченну базу обмежених підмножин і кожне сильно обмежене зліченне об'єднання одностайно неперервних підмножин в $\mathcal{X}'$ є одностайно неперервним;

(iv) простір $\mathcal{X}$ називають простором Фреше-Шварца (або коротко (FS) простором), якщо він є простором Фреше і простором Шварца одночасно;

(v) простір $\mathcal{X}$ називають (DFS) простором, якщо він є простором Шварца і (DF) простором одночасно.

Нехай $\mathcal{X}$ і $\mathcal{Y}$ – довільні нормовані простори із замкнутими одиничними кулями U і V відповідно, $\mathcal{X}'$ – спряжений простір до $\mathcal{X}$. Лінійне неперервне відображення T з $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$ називається ядерним, якщо існують неперервні лінійні функціонали $f_n \in \mathcal{X}'$ і елементи $y_n \in \mathcal{Y}$ такі, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{U^\circ}(f_n) p_V(y_n) < \infty \qquad \text{і} \qquad Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \langle\, f_n,\, x \,\rangle y_n$$

для всіх $x \in \mathcal{X}$, де U° — поляра до U відносно двоїстості $\langle\, \mathcal{X}', \mathcal{X}\,\rangle$, а p_{U° і p_V — функціонали Мінковського в $\mathcal{X}'$ і $\mathcal{Y}$ множин U° і V відповідно.

Нехай U – довільний замкнений опуклий окіл нуля в локально опуклому просторі $\mathcal{X}$. Тоді ядро функціоналу Мінковського множини U є лінійним підпростором в $\mathcal{X}$. Факторпростір $\mathcal{X}/\operatorname{Ker} p_U(x)$ з топологією, що визначається нормою $\|[\,x\,]\| = p_U(x)$, $x \in \mathcal{X}$, позначимо $\mathcal{X}(U)$.

Локально опуклий простір $\mathcal{X}$ називається ядерним, якщо в ньому існує система околів нуля, для якої виконується наступна властивість: для кожного околу нуля U існує окіл нуля V такий, що U поглинає V і канонічне відображення простору $\mathcal{X}(V)$ на $\mathcal{X}(U)$ ядерне.

Далі ми будемо використовувати наступні відомі [54, 134, 151] факти: якщо $\mathcal{X}$ є (F) простором, то його сильно спряжений $\mathcal{X}'$ є (DF) простором, і навпаки, якщо $\mathcal{X}$ є (DF) простором, то його сильно спряжений $\mathcal{X}'$ — (F) простір. Крім того, кожен ядерний (F) або (DF) простір $\mathcal{X}$ є монтелевим, зокрема рефлексивним [31, теорема 4.4.12], при цьому його сильно спряжений $\mathcal{X}'$ теж є ядерним простором [54, теорема 9.6]. Для (F) та (DF) просторів ядерність зберігається при переході до підпросторів, сепарабельних фактор-просторів, поповнень, зліченних прямих сум та декартових добутків. Наступна одна із найважливіших властивостей (DF) просторів доведена А. Ґротендіком [122]. Нехай $\mathcal{X}$ є (DF) простором, а $\mathcal{Y}$ є довільним локально опуклим простором. Лінійне відображення з $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$ є неперервним, якщо його звуження на всі обмежені підмножини в $\mathcal{X}$ є неперервними.

Нехай A — деяка напрямлена множина. Припустимо, що задано сімейство лінійних відображень $u_\alpha : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}_\alpha$, $\alpha \in A$, з векторного простору $\mathcal{X}$ в локально опуклі простори $\mathcal{X}_\alpha$. Існує найслабша локально опукла топологія на $\mathcal{X}$, відносно якої всі u_α є неперервні. Цю топологія називають (узагальненою) проективною локально опуклою топологією відносно системи $(\mathcal{X}_\alpha, u_\alpha)$. Якщо $\mathfrak{S}_\alpha$ є системою напівнорм, що визначають топологію $\mathcal{X}_\alpha$, то $\{p \circ u_\alpha : \alpha \in A, p \in \mathfrak{S}_\alpha\}$ є системою напівнорм, що визначають проективну локально опуклу топологію на $\mathcal{X}$. Зауважимо, що ця топологія не обов'язково гаусдорфова.

Якщо $\mathcal{X} = \times_\alpha \mathcal{X}_\alpha$ є прямим добутком локально опуклих просторів $\mathcal{X}_\alpha$, а $u_\alpha : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}_\alpha$ є канонічними проекціями, то проективну локально опуклу топологію на $\mathcal{X}$ називають локально опуклою топологією прямого добутку.

Якщо $\mathcal{X}$ є лінійним підпростором локально опуклого простору $\mathcal{Y}$, а $u : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ є канонічним відображенням вкладення, то проективна локально опукла топологія на $\mathcal{X}$ відносно "системи" $(\mathcal{Y}, u)$ є ні чим іншим, як топологією підпростору.

Відомо (див. [146]), що якщо проективна локально опукла топологія є гаусдорфовою, то вона у певному сенсі є комбінацію двох вище описаних спеціальних випадків.

З іншого боку (звичайні) проективні границі локально опуклих просторів можна визначити наступним чином. Нехай A — деяка напрямлена множина. Припустимо, що для кожного $\alpha \in A$ визначено локально опуклий простір $\mathcal{X}_\alpha$. Крім того, для кожної такої пари індексів (α, β), що $\alpha > \beta$, визначено неперервні лінійні відображення $u^\alpha_\beta : \mathcal{X}_\alpha \longrightarrow \mathcal{X}_\beta$, які задовольняють співвідношення $u^\alpha_\gamma = u^\beta_\gamma \circ u^\alpha_\beta$ для всіх таких $\alpha, \beta, \gamma \in A$, що $\alpha > \beta > \gamma$. Проективну границю локально опуклих просторів $\mathcal{X}_\alpha$ визначають як підпростір прямого добутку $\bigtimes_\alpha \mathcal{X}_\alpha$ наступного вигляду

$$\lim_{\alpha} \operatorname{pr} \mathcal{X}_\alpha := \big\{ (x_\alpha) \in \bigtimes_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha : u^\alpha_\beta(x_\alpha) = x_\beta \big\},$$

наділений найслабшою локально опуклою топологією, відносно якої канонічні відображення $u_\alpha : \lim \operatorname{pr} \mathcal{X}_\alpha \ni (x_\alpha) \longmapsto x_\alpha \in \mathcal{X}_\alpha$ є неперервними.

Нехай $\mathcal{X}$ — векторний простір, а $u_\alpha : \mathcal{X}_\alpha \longrightarrow \mathcal{X}$, $\alpha \in A$, — сім'я лінійних відображень. Найсильнішу локально опуклу топологію на $\mathcal{X}$, відносно якої всі u_α є неперервними, називають (узагальненою) індуктивною локально опуклою топологією відносно системи $(\mathcal{X}_\alpha, u_\alpha)$. Напівнорма p на $\mathcal{X}$ є неперервною відносно цієї топології тоді і тільки тоді, коли $p \circ u_\alpha$ є неперервною напівнормою на $\mathcal{X}_\alpha$ для кожного α. Зауважимо, що ця топологія не обов'язково гаусдорфова.

Нехай $\mathcal{X} = \bigoplus_\alpha \mathcal{X}_\alpha$ є векторним простором, що представлений у вигляді прямої суми локально опуклих просторів $\mathcal{X}_\alpha$, а $u_\alpha : \mathcal{X}_\alpha \longrightarrow \mathcal{X}$ —

канонічні ін'єкції. Індуктивну локально опуклу топологію на $\mathcal{X}$ називають локально опуклою топологією прямої суми. Якщо $\mathfrak{S}_\alpha$ є сім'єю всіх неперервних напівнорм на $\mathcal{X}_\alpha$, то топологія прямої суми це локально опукла топологія, що визначається системою напівнорм наступного вигляду $p(\oplus x_\alpha) = \sum_\alpha p_\alpha(x_\alpha)$, $p_\alpha \in \mathfrak{S}_\alpha$.

Фактортопологія на факторпросторі $\mathcal{X}/\mathcal{Y}$ локально опуклого простору $\mathcal{X}$ є індуктивною топологією відносно канонічної проекції $\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}/\mathcal{Y}$.

Відомо (див. [146]), що якщо індуктивна локально опукла топологія є гаусдорфовою, то вона у певному сенсі є комбінацію двох вище описаних спеціальних випадків.

З іншого боку (звичайні) індуктивні границі локально опуклих просторів можна визначити наступним чином. Нехай $\mathcal{X}_\alpha$, $\alpha \in A$, — сімейство локально опуклих просторів, де A — деяка напрямлена множина. Нехай $v_\beta^\alpha : \mathcal{X}_\alpha \longrightarrow \mathcal{X}_\beta$, $\alpha, \beta \in A$, $\alpha < \beta$, — сім'я неперервних лінійних відображень, що задовольняють співвідношення $v_\gamma^\alpha = v_\gamma^\beta \circ v_\beta^\alpha$ для всіх таких $\alpha, \beta, \gamma \in A$, що $\alpha < \beta < \gamma$. Нехай $\mathcal{U}$ — лінійний підпростір у прямій сумі $\bigoplus_\alpha \mathcal{X}_\alpha$, що генерується всіма елементами наступного вигляду: якщо на деякій позиції з індексом $\beta \in A$ стоїть $x_\beta \in \mathcal{X}_\beta$, то на позиції з індексом $\gamma \in A$, $\gamma > \beta$, стоїть $-v_\gamma^\beta(x_\beta) \in \mathcal{X}_\gamma$, а на всіх інших позиціях стоять нулі. Індуктивна границя векторних просторів $\mathcal{X}_\alpha$ є факторпростором

$$\lim_{\alpha} \operatorname{ind} \mathcal{X}_\alpha := \bigoplus_\alpha \mathcal{X}_\alpha / \mathcal{U}.$$

Визначимо канонічні відображення $u_\beta : \mathcal{X}_\beta \longrightarrow \lim\limits_{\alpha} \operatorname{ind} \mathcal{X}_\alpha$, що ставлять у відповідність елементу $x_\beta \in \mathcal{X}_\beta$ клас еквівалентності, який містить елемент, в якого на позиції з індексом β стоїть x_β, а на всіх інших позиціях стоять нулі. Топологія на $\lim\limits_{\alpha} \operatorname{ind} \mathcal{X}_\alpha$ є найсильнішою локально опуклою топологією, відносно якої всі канонічні відображення u_β, $\beta \in A$, неперервні. Індуктивна границя $\lim\limits_{\alpha} \operatorname{ind} \mathcal{X}_\alpha$, в якій $v_\gamma^\beta : \mathcal{X}_\beta \longrightarrow \mathcal{X}_\gamma$, $\beta < \gamma$, є вкладеннями, називається внутрішньою; у цьому випадку $\lim\limits_{\alpha} \operatorname{ind} \mathcal{X}_\alpha$ як множина співпадає з об'єднанням $\bigcup_\alpha \mathcal{X}_\alpha$, в такому разі часто пишуть $\lim\limits_{\alpha}\operatorname{ind}\mathcal{X}_\alpha = \bigcup_\alpha \mathcal{X}_\alpha$. Внутрішню індуктивну границю $\lim\limits_{\alpha}\operatorname{ind}\mathcal{X}_\alpha$, у якій при виконанні умови $\mathcal{X}_\alpha \subset \mathcal{X}_\beta$ топологія простору $\mathcal{X}_\alpha$ індукується топологією простору $\mathcal{X}_\beta$, називається строгою. Строгі індуктивні границі просторів Фреше називають (LF) просторами. Строгі індуктивні границі просторів Фреше володіють так званою властивістю регулярності: кожна обмежена множина з $\lim\limits_{\alpha}\operatorname{ind}\mathcal{X}_\alpha$ міститься у деякому підпросторі $\mathcal{X}_\beta$ [54].

У доведеннях теорем 4.2.1, 5.1.2, 5.1.4 ми будемо використовувати теорему про відкрите відображення у формі, описаній у статті Д.Райкова [33]. Для зручності читача сформулюємо цю теорему.

Теорема 1.2.1 ([33]). *Нехай $\mathcal{X}$ — лінійний топологічний простір. Якщо лінійне відображення φ з лінійної індуктивної границі $\mathcal{Y} = \lim\operatorname{pr}\mathcal{Y}_\alpha$ довільної сім'ї метризовних берівських просторів $(\mathcal{Y}_\alpha)_{\alpha\in A}$ в $\mathcal{X}$ має замкнутий графік, а $\mathcal{D}_\varphi \bigcap \mathcal{Y}_\alpha$ є другої категорії в $\mathcal{Y}_\alpha$ для всіх $\alpha \in A$, де $\mathcal{D}_\varphi$ — область визначення φ, то $\mathcal{D}_\varphi = \mathcal{Y}$ і φ є неперервним відображенням.*

Зокрема в [33] показано, що ця теорема справедлива для кожного простору Фреше $\mathcal{X}$.

Простір $\mathcal{A}$ називається банаховою алгеброю (алгеброю Фреше), якщо він є банаховим простором (простором Фреше), на якому задано асоціативну операцію множення і топологія на $\mathcal{A}$ може бути задана зліченною системою $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ напівнорм таких, що $q_n(xy) \le q_n(x)q_n(y)$ для довільних $x, y \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$. Банахова алгебра (алгебра Фреше) $\mathcal{A}$ називається комутативною, якщо для будь-яких $x, y \in \mathcal{A}$ виконується $xy = yx$.

Відображення $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ називається гомоморфізмом, якщо для довільних $x, y \in \mathcal{A}$ і $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ виконуються умови:

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y),$$

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y).$$

Підмножина $J \subset \mathcal{A}$ комутативної банахової алгебри $\mathcal{A}$ з одиницею називається ідеалом, якщо J є векторним підпростором $\mathcal{A}$ і $xy \in J$ для довільних $x \in \mathcal{A}$, $y \in J$. Ідеал, який не співпадає з усією алгеброю $\mathcal{A}$, називається власним ідеалом. Власний ідеал, який не міститься строго в іншому власному ідеалі, називається максимальним ідеалом. Комплексний гомоморфізм банахової алгебри $\mathcal{A}$ називається характером (мультиплікативним функціоналом) цієї алгебри.

У випадку, коли $\mathcal{A}$ — комутативна банахова алгебра, існує взаємно-однозначна відповідність між множиною комплексних гомоморфізмів і множиною максимальних ідеалів алгебри $\mathcal{A}$.

Через $M(\mathcal{A})$ позначають множину всіх комплексних гомоморфізмів з алгебри $\mathcal{A}$ і називають спектром цієї алгебри.

1.2.2 Тензорні добутки локально опуклих просторів

У цьому пункті ми означимо тензорний добуток довільних локально опуклих просторів та введемо різні тензорні топології. Також сформулюємо ті властивості ядерних (F) або (DF) просторів, що пов'язані з тензорними добутками. Детальну інформацію на цю тему можна знайти в [120,147–149]. Крім того, сформулюємо необхідні в дисертації властивості лінійних неперервних операторів, що діють в ядерних (F) або (DF) просторах та їхніх тензорних добутках. Зауважимо, що загальна теорія таких операторів на ядерних просторах добре описана в роботах [28,120].

Алгебраїчним тензорним добутком $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ лінійних просторів $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$ називають лінійний простір всіх формальних скінченних сум

$$z = \sum_{j=1}^{m} x_j \otimes y_j, \qquad x_j \in \mathcal{X}, \quad y_j \in \mathcal{Y},$$

в якому вважається, що

$$(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y,$$

$$x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2,$$

$$\alpha(x \otimes y) = (\alpha x) \otimes y = x \otimes (\alpha y).$$

Нехай $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$ — довільні локально опуклі простори. На алгебраїчному тензорному добутку $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ можна задати різні топології. Одну з них (позначення $\mathfrak{e}$) називають ін'єктивною топологією, або топологією одностайно неперервної збіжності, яку вводять наступним чином. Розглянемо простір $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ як множину лінійних форм на $\mathcal{X}' \otimes \mathcal{Y}'$, що визначаються рівністю $(x \otimes y)(x' \otimes y') := \langle\, x', x \,\rangle\langle\, y', y \,\rangle$. Тоді за означенням топологія $\mathfrak{e}$ — це топологія рівномірної збіжності на множинах $S \otimes T$, де S, T — довільні одностайно неперервні підмножини $\mathcal{X}'$ та $\mathcal{Y}'$ відповідно.

Нехай $\mathfrak{S}$ та $\mathfrak{T}$ позначають сім'ї неперервних напівнорм, що визначають топологію простору $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$ відповідно. Тоді проективну топологію $\mathfrak{p}$ тензорного добутку $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ визначає сім'я напівнорм $\{p \otimes_{\mathfrak{p}} q : p \in \mathfrak{S}, q \in \mathfrak{T}\}$, де

$$(p \otimes_{\mathfrak{p}} q)(z) := \inf \Big\{ \sum_{j=1}^{m} p(x_j) q(y_j) : z = \sum_{j=1}^{m} x_j \otimes y_j \Big\}.$$

Топологія $\mathfrak{p}$ є найсильнішою локально опуклою топологією на $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$, відносно якої канонічне білінійне відображення $\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ неперервне.

Якщо в останній властивості неперервність замінити на нарізну неперервність, то отримаємо іншу топологію. Індуктивна топологія $\mathfrak{i}$ тензорного добутку $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ за означенням є найсильнішою локально опуклою топологією на $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$, відносно якої канонічне білінійне відображення $\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ нарізно неперервне.

Поповнення тензорного добутку $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ відносно топології $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{i}$ позначимо $\mathcal{X} \otimes_{\mathfrak{e}} \mathcal{Y}$, $\mathcal{X} \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{Y}$, $\mathcal{X} \otimes_{\mathfrak{i}} \mathcal{Y}$ відповідно.

Топологія $\mathfrak{e}$ слабша, ніж $\mathfrak{p}$, яка в свою чергу слабша, ніж $\mathfrak{i}$. Ці топології співпадають у наступному випадку.

Твердження 1.2.1 ([149, теорема 2.2]). *Припустимо, що виконується одна з наступних умов:*

(i) $\mathcal{X}$ є ядерним (F) простором, а $\mathcal{Y}$ — (F) простором,

(ii) $\mathcal{X}$ *є ядерним* (DF) *простором, а* $\mathcal{Y}$ *— повним* (DF) *простором. Тоді справджуються наступні канонічні ізоморфізми локально опуклих просторів* $\mathcal{X}\otimes_{\mathfrak{e}}\mathcal{Y}\simeq\mathcal{X}\otimes_{\mathfrak{p}}\mathcal{Y}\simeq\mathcal{X}\otimes_{\mathfrak{i}}\mathcal{Y}$*. Більше того*

$$(\mathcal{X}\otimes_{\mathfrak{p}}\mathcal{Y})'_\beta\simeq\mathcal{X}'_\beta\otimes_{\mathfrak{p}}\mathcal{Y}'_\beta\simeq\mathcal{X}'_\beta\otimes_{\mathfrak{i}}\mathcal{Y}'_\beta\simeq\mathcal{X}'_\beta\otimes_{\mathfrak{e}}\mathcal{Y}'_\beta.$$

Тут і всюди далі індекс β у позначенні $\mathcal{X}'_\beta$ означає сильну топологію на спряженому просторі.

Зауважимо, що інші умови для виконання останньої рівності доведені А. Дефантом у [93].

Відомо [31, теорема 7.3.3], що локально опуклий простір $\mathcal{X}$ є ядерним тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{X}\otimes_{\mathfrak{p}}\mathcal{Y}=\mathcal{X}\otimes_{\mathfrak{e}}\mathcal{Y}$ для довільного локально опуклого простору $\mathcal{Y}$.

Якщо $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$ — ядерні простори, то $\mathcal{X}\otimes_{\mathfrak{p}}\mathcal{Y}$ теж ядерний простір [31, теорема 5.4.1]. Якщо $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$ — (DF) простори, то $\mathcal{X}\otimes_{\mathfrak{p}}\mathcal{Y}$ теж (DF) простір. Якщо $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$ — (F) простори і принаймні один з них ядерний, то $\mathcal{X}\otimes_{\mathfrak{p}}\mathcal{Y}$ теж (F) простір.

У статті [121] А. Ґротендік поставив питання про існування не ядерних локально опуклих просторів $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$ таких, що ін'єктивна і проективна топології співпадають на $\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}$ і припустив, що відповідь на це запитання негативна. Дж. Пізьє в [178] навів контрприклад до гіпотези Ґротендіка, ввівши такий нескінченновимірний (а, отже, не ядерний) банаховий простір $\mathcal{B}$, що $\mathcal{B}\otimes_{\mathfrak{e}}\mathcal{B}\simeq\mathcal{B}\otimes_{\mathfrak{p}}\mathcal{B}$. К. Джон в [139] довів, що такий приклад неможливий для тензорних добутків порядку $n\geq 3$. Для локально опуклих просторів він показав, що наступна рівність $\mathcal{X}^{\otimes_{\mathfrak{e}}n}\simeq\mathcal{X}^{\otimes_{\mathfrak{p}}n}$, де $\mathcal{X}^{\otimes_{\mathfrak{e}}n}:=\underbrace{\mathcal{X}\otimes_{\mathfrak{e}}\ldots\otimes_{\mathfrak{e}}\mathcal{X}}_{n}$, $\mathcal{X}^{\otimes_{\mathfrak{p}}n}:=\underbrace{\mathcal{X}\otimes_{\mathfrak{p}}\ldots\otimes_{\mathfrak{p}}\mathcal{X}}_{n}$, виконується в тому і лише в тому випадку, коли $\mathcal{X}$ є ядерним. Крім того, він показав, що банаховий простір $\mathcal{B}$, для якого виконується рівність $\mathcal{B}^{\otimes_{\mathfrak{e}}n}\simeq\mathcal{B}^{\otimes_{\mathfrak{p}}n}$ для деякого $n\geq 3$, є скінченновимірним. У [83] Д. Карандо та В. Дімант отримали симетричну версію результату К. Джона для нормованих просторів.

Нехай $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$ — довільні локально опуклі топологічні векторні простори, $A : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ — лінійний та неперервний оператор, $I_{\mathcal{Y}}$ — одиничний оператор на $\mathcal{Y}$. Легко перевірити (див. також [28]), що оператор $A \otimes I_{\mathcal{Y}}$, заданий на тензорному добутку $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ формулою

$$(A \otimes I_{\mathcal{Y}})(x \otimes y) := Ax \otimes y, \qquad x \in \mathcal{X}, \quad y \in \mathcal{Y},$$

продовжується до лінійного неперервного оператора на $\mathcal{X} \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{Y}$.

Твердження 1.2.2 ([28]). *Нехай $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — ядерні (F) або (DF) простори і $A \in \mathscr{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Тоді*

$$\operatorname{Ker}(A \otimes I_{\mathcal{Y}}) = \operatorname{Ker} A \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{Y}.$$

Лема 1.2.1 ([28]). *Для довільного рефлексивного локально опуклого простору $\mathcal{X}$ та лінійного неперервного оператора $A : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ наступні умови є еквівалентні*

(i) $\operatorname{Ker} A = \{0\}$*;*

(ii) образ $\operatorname{Im} A'$ *є щільним в $\mathcal{X}'_{\beta}$, де $A' : \mathcal{X}' \longrightarrow \mathcal{X}'$ — спряжений до A оператор відносно дуальної пари $\langle \mathcal{X}', \mathcal{X} \rangle$.*

Зауважимо, що за аналогією правильною є рівність

$$\operatorname{Ker}(I_{\mathcal{X}} \otimes B) = \mathcal{X} \otimes_{\mathfrak{p}} \operatorname{Ker} B,$$

де $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — локально опуклі ядерні (F) або (DF) простори, а $B : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Y}$ — довільний лінійний неперервний оператор.

Для довільних операторів $A \in \mathscr{L}(\mathcal{X})$ і $B \in \mathscr{L}(\mathcal{Y})$ із відповідними ядрами $\operatorname{Ker} A$ і $\operatorname{Ker} B$ справджується топологічний ізоморфізм

$$(\mathcal{X} \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{Y}) \big/ (\operatorname{Ker} A \otimes_{\mathfrak{p}} \operatorname{Ker} B) \simeq (\mathcal{X} / \operatorname{Ker} A) \otimes_{\mathfrak{p}} (\mathcal{Y} / \operatorname{Ker} B).$$

Нехай $\mathcal{X}$ — локально опуклий топологічний векторний простір. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $x_n \in \mathcal{X}$, називають абсолютно збіжним в $\mathcal{X}$, якщо існує такий елемент $x \in \mathcal{X}$, що $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ і якщо для довільної неперервної напівнорми p на $\mathcal{X}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} p(x_n)$ збіжний в $\mathbb{R}$.

У параграфах 4.2, 5.1, 5.2, ми користуватимемось відомою теоремою про представлення елементів проективного тензорного добутку.

Теорема 1.2.2 ([54]). *Нехай $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — метризовні локально опуклі простори. Тоді кожний елемент $u \in \mathcal{X} \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{Y}$ можна представити у вигляді суми абсолютно збіжного ряду*

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i \otimes y_i,$$

де $\sum_i |\lambda_i| < +\infty$, а $\{x_i\}$ та $\{y_i\}$ — збіжні до нуля послідовності в просторах $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$ відповідно.

У дисертації буде використано (див., наприклад, пункт 4.2.1) відомий ізоморфізм Ґротендіка про комутативну властивість індуктивних границь із проективними тензорними добутками. Для зручності читача сформулюємо тут відповідний результат.

Теорема 1.2.3 ([120]). *Припустимо, що простір $\mathcal{X}$ є нормованим або типу (DF). Нехай $\mathcal{Y}$ — локально опуклий простір, що є індуктивною границею $\mathcal{Y} = \lim\limits_{\alpha}\operatorname{ind} \mathcal{Y}_\alpha$ сім'ї локально опуклих топологічних векторних просторів $\mathcal{Y}_\alpha$. Тоді справджується наступний топологічний ізоморфізм*

$$\mathcal{X} \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{Y} \simeq \lim_{\alpha}\operatorname{ind} \mathcal{X} \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{Y}_\alpha. \tag{1.2.2}$$

Зауважимо, що узагальненнями комутативної властивості індуктивних границь із тензорними добутками пізніше займалися Р. Хольштейн [128], Х. Боне та А. Ґалбіс [76].

1.2.3 Багатопараметричні напівгрупи та групи операторів на банахових просторах

Нехай задано функцію $\mathbb{R}_+^d \ni t \longmapsto U(t) \in \mathscr{L}(E)$, де $E := (E, \|\cdot\|)$ — комплексний банаховий простір.

Сім'ю $\{U(t)\colon t \in \mathbb{R}^d_+\}$ обмежених лінійних операторів на E називають (див. [38,82,105,176]) d-параметричною напівгрупою, якщо для всіх $t, s \in \mathbb{R}^d_+$ справджується рівність $U(t+s) = U(t) \circ U(s)$ і $U(0) = I$ — тотожній оператор в $\mathscr{L}(E)$.

Напівгрупу $\{U(t)\colon t \in \mathbb{R}^d_+\}$ називають сильно неперервною або (C_0) напівгрупою, якщо

$$\lim_{\mathbb{R}^d_+ \ni t \to 0} \|U(t)x - x\| = 0 \qquad \text{для всіх} \qquad x \in E.$$

Для кожної d-параметричної напівгрупи U визначимо марґінальні однопараметричні напівгрупи $V_j = \{V_j(\tau) : \tau \in \mathbb{R}_+\}$, $j = 1, \ldots, d$, де

$$V_j\colon \mathbb{R}_+ \ni \tau \longmapsto U(\underbrace{0, \ldots, 0, \tau}_{j}, 0, \ldots, 0) \in \mathscr{L}(E).$$

Кожну d-параметричну напівгрупу U можна представити як композицію марґінальних однопараметричних напівгруп, що комутують одна з одною (див. [38, 82]), тобто

$$U(t_1, \ldots, t_d) = V_1(t_1) \circ \ldots \circ V_d(t_d).$$

Генератор A_j марґінальної напівгрупи $V_j = \{V_j(\tau) : \tau \in \mathbb{R}_+\}$ визначають за правилом

$$A_j x := \lim_{\tau \to +0} \tau^{-1}\big(V_j(\tau)x - x\big) = \frac{\partial}{\partial \tau} V_j(\tau)x\big|_{\tau=+0},$$

для всіх $x \in \mathfrak{D}(A_j)$, де $\mathfrak{D}(A_j)$ складається з усіх $x \in E$, для яких вище написана границя існує.

Генератором d-параметричної напівгрупи $U = \{U(t)\colon t \in \mathbb{R}^d_+\}$ називають множину операторів $A := (A_1, \ldots, A_d)$ із спільною областю визначення $\mathfrak{D}(A) := \bigcap_{j=1}^d \mathfrak{D}(A_j)$.

Якщо U є (C_0) напівгрупою, то кожний оператор A_j є замкнутим і його звуження $A_j\big|_{\mathfrak{D}(A)}$ є обмеженим. Більше того, мають місце наступні добре відомі властивості (див., наприклад, [82, твердження 1.1.8 і 1.1.9]):

а) якщо $x \in \mathfrak{D}(A_j)$, то $U(t)x \in \mathfrak{D}(A_j)$ і $A_jU(t)x = U(t)A_jx$ для всіх $t \in \mathbb{R}^d_+$;

б) $U(t)x \in \mathfrak{D}(A)$ для всіх $x \in E$, $t \in \operatorname{int}\mathbb{R}^d_+$, і $\mathfrak{D}(A)$ є щільним підпростором E; крім того $\mathfrak{D}(A)$ є банаховим простором відносно норми

$$\|x\|_{\mathfrak{D}(A)} := \|x\| + \sum_{j=1}^{d} \|A_jx\|;$$

в) для всіх $x \in \mathfrak{D}(A)$ та $i, j = 1, \ldots, d$ виконується наступна рівність $A_iA_jx = A_jA_ix$.

Зауваження 1.2.1. Якщо у всіх вище записаних формулюваннях покласти $d = 1$, то отримаємо відоме означення однопараметричної напівгрупи операторів; якщо ж конус $\mathbb{R}^d_+$ замінити на $\mathbb{R}^d$ (відп. на $\mathbb{R}$), то отримаємо означення d-параметричної (відп. однопараметричної) групи операторів.

Нехай $\Sigma_\varphi \subset \mathbb{C}$ позначає сектор

$$\Sigma_\varphi := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 0, |\arg z| < \varphi\}, \qquad 0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Очевидно, що $\Sigma^{\mathrm{cl}}_\varphi := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 0, |\arg z| \leq \varphi\} \cup \{0\}$ — його замикання. Однопараметричну (C_0) напівгрупу $\{V(t) \colon t \in \mathbb{R}_+\}$ називають (див. [217, Розд. 7]) обмеженою аналітичною напівгрупою, якщо існує такий кут $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, що $\{V(t) \colon t \in \mathbb{R}_+\}$ можна розширити до такої голоморфної сім'ї обмежених операторів $\{\widetilde{V}(z) \colon z \in \Sigma_\varphi\}$, що задовольняє наступні властивості:

а) рівність $\lim\limits_{z \in \Sigma^{\mathrm{cl}}_\varphi,\, z \to 0} \widetilde{V}(z)x = x$ справджується для всіх $x \in E$;

б) рівність $\widetilde{V}(z + s) = \widetilde{V}(z) \circ \widetilde{V}(s)$ справджується для всіх $z, s \in \Sigma^{\mathrm{cl}}_\varphi$;

в) відображення $z \longmapsto \widetilde{V}(z)$ є обмеженим із замикання конуса $\Sigma^{\mathrm{cl}}_\psi$ в $\mathscr{L}(E)$ для всіх $0 < \psi < \varphi$.

Сильно неперервну d-параметричну напівгрупу називають обмеженою аналітичною напівгрупою, якщо кожна її марґінальна напівгрупа є обмеженою аналітичною напівгрупою [217]. У цьому випадку знайдеться такий набір кутів $(\varphi_1, \dots, \varphi_d)$, $0 < \varphi_j \le \frac{\pi}{2}$, що напівгрупа має обмежене аналітичне розширення в множину $\big\{z \in \mathbb{C}^d \colon |\arg z_j| \le \psi_j,\ j = 1, \dots, d\big\}$ для всіх $0 < \psi_j < \varphi_j$.

Генератор $A = (A_1, \dots, A_d)$ d-параметричної напівгрупи називатимемо ін'єктивним, якщо всі оператори A_j, $j = 1, \dots, d$, є ін'єктивними. В цьому випадку існує набір обернених операторів $A^{-1} := (A_1^{-1}, \dots, A_d^{-1})$ зі щільною областю визначення $\mathfrak{D}(A^{-1}) = \bigcap_{j=1}^{d} \mathfrak{D}(A_j^{-1})$, яку ми наділяємо нормою

$$\|x\|_{\mathfrak{D}(A^{-1})} := \|x\| + \sum_{j=1}^{d} \|A_j^{-1} x\|.$$

Відомо (див. [72, теорема 3.7] або [96]), що якщо генератор A d-параметричної обмеженої аналітичної напівгрупи є ін'єктивним, то A^{-1} теж генерує d-параметричну обмежену аналітичну напівгрупу.

1.2.4 Приклад числення операторів

У кандидатській дисертації автора у спеціальній алгебрі узагальнених функцій побудовано функціональне числення для генераторів (C_0) напівгруп операторів. Для довільного генератора A сильно неперервної напівгрупи $e^{-\mathrm{i}tA}$ в банаховому просторі E оператор $\widehat{f}(A) \in \mathscr{L}(E)$ був визначений наступним чином:

$$\widehat{f}(A) : \int_0^\infty e^{-\mathrm{i}tA} x(t)\, dt \longmapsto \int_0^\infty e^{-\mathrm{i}tA} (f \star x)(t)\, dt,$$

де інтеграли ми розуміємо у сенсі Бохнера, а x — нескінченно диференційовна E-значна функція з класу $\mathcal{S}_+(E) := \{\theta \cdot y : y \in \mathcal{S} \otimes E\}$, $\mathcal{S}$ — простір Шварца швидко спадних нескінченно диференційовних функцій, θ — характеристична функція додатної півосі, $f \star x$ — операція крос-кореляції (означення цієї операції на випадок d змінних див. (5.1.2)).

Там же було встановлено формули

$$\delta^n = \frac{1}{(2\pi)^n}\widehat{\underbrace{\theta * \cdots * \theta}_{n}}, \qquad \delta^{(n)} = \frac{1}{2\pi}\widehat{(\mathrm{i}t)^n\theta(t)}, \tag{1.2.3}$$

де символ $\widehat{\ }$ позначає перетворення Фур'є відповідної функції, а $*$ — згортку в $\mathcal{S}'_+$.

Їх ми використаємо для обчислення "значення" степенів і похідних дельта функції Дірака на генераторі напівгрупи дробового інтегрування. Ці результати були опубліковані в [39] після захисту кандидатської дисертації, тому тут можуть слугувати ілюстративним матеріалом.

Відомо [7], що множина $\{f_t* \in \mathscr{L}(\mathcal{S}'_+) : t \in \mathbb{R}_+\}$ згорткових операторів $f_t* : \mathcal{S}'_+ \ni f \mapsto f_t * f \in \mathcal{S}'_+$ утворює (C_0) напівгрупу, яку називають напівгрупою дробового інтегрування. При цьому узагальнену функцію $f_t \in \mathcal{S}'_+$ визначають формулою $f_t(x) := \dfrac{\theta(x)x^{t-1}}{\Gamma(t)}$, де $\Gamma(t) = \int\limits_0^\infty s^{t-1}e^{-s}\,ds$ — Гамма функція. У [21] встановлено, що генератором цієї напівгрупи є оператор $G = -(1+C)\delta$, де $C = -\Gamma'(1)$ — константа Ейлера, а $\delta \in \mathcal{S}'_+$ — дельта функція Дірака.

Твердження 1.2.3. *Для довільної функції $\varphi \in \mathcal{S}_+$ виконується рівність $f_t * \varphi = f_{t+n} * \varphi^{(n)}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.*

Доведення. Використовуючи метод інтегрування частинами, отримаємо наступні рівності

$$\begin{aligned}(f_t * \varphi)(x) &= \frac{1}{\Gamma(t)}\int_0^\infty \theta(y)y^{t-1}\varphi(x-y)\,dy = \frac{1}{\Gamma(t)}\int_0^\infty y^{t-1}\varphi(x-y)\,dy\\ &= \frac{y^t}{t\Gamma(t)}\varphi(x-y)\Big|_0^\infty + \frac{1}{t\Gamma(t)}\int_0^\infty y^t\varphi'(x-y)\,dy\\ &= \frac{1}{\Gamma(t+1)}\int_0^\infty \theta(y)y^t\varphi'(x-y)\,dy = (f_{t+1} * \varphi')(x).\end{aligned}$$

Проробивши цей же процес скінченну кількість раз, отримаємо потрібний результат. □

Крос-кореляцією розподілу $f \in \mathcal{S}'_+$ і функції $\varphi \in \mathcal{S}_+$ назвемо функцію вигляду

$$(f \star \varphi)(t) := \langle f(s), \varphi(t+s) \rangle, \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

Твердження 1.2.4. *Нехай* $f, h \in \mathcal{S}'_+$, $\varphi \in \mathcal{S}_+$. *Тоді справедлива формула*

$$f * (h \star \varphi) = h \star (f * \varphi). \tag{1.2.4}$$

Доведення. У справедливості формули (1.2.4) переконуємося безпосередньо.

$$\begin{aligned}(f * (h \star \varphi))(t) &= f * \langle h(x), \varphi(x+t) \rangle = \langle f(y), \langle h(x), \varphi(x+t-y) \rangle \rangle \\ &= \langle h(x), \langle f(y), \varphi(x+t-y) \rangle \rangle = \langle h(x), (f * \varphi)(x+t) \rangle \\ &= (h \star (f * \varphi))(t).\end{aligned}$$

□

Твердження 1.2.5. *Для довільного* $n \in \mathbb{N}$ *справедлива формула*

$$(\underbrace{\theta * \cdots * \theta}_{n})(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \qquad x \in \mathbb{R}_+. \tag{1.2.5}$$

Доведення. Доведемо рівність (1.2.5) методом математичної індукції. При $n = 1$ очевидно. При $n = 2$ отримуємо

$$\theta * \theta = \int_0^\infty \theta(y)\theta(x-y)\,dy = \int_0^x dy = x.$$

Припустимо, що формула (1.2.5) правильна для всіх $n \le k$. Доведемо, що вона справедлива при $n = k+1$.

$$\begin{aligned}\underbrace{\theta * \cdots * \theta}_{k} * \theta = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} * \theta(x) &= \frac{1}{(k-1)!}\int_0^\infty y^{k-1}\theta(x-y)\,dy \\ &= \frac{1}{(k-1)!}\int_0^x y^{k-1}\,dy = \frac{x^k}{k!}.\end{aligned}$$

□

Твердження 1.2.6. *Для довільного* $n \in \mathbb{N}$ *справедлива формула*

$$(\underbrace{\theta * \cdots * \theta}_{n}) \star \varphi^{(n)} = (-1)^n \varphi, \qquad \varphi \in \mathcal{S}_+. \tag{1.2.6}$$

Доведення. Використовуючи n раз метод інтегрування частинами, переконуємось у справедливості формули (1.2.6):

$$\begin{aligned}\big((\underbrace{\theta * \dots * \theta}_{n}) \star \varphi^{(n)}\big)(x) = &\int_0^\infty \frac{y^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n)}(y+x)\,dy\\ =&\frac{1}{(n-1)!}\left(y^{n-1}\varphi^{(n-1)}(y+x)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty (n-1)y^{n-2}\varphi^{(n-1)}(y+x)\,dy\right)\\ =&-\frac{1}{(n-2)!}\int_0^\infty y^{n-2}\varphi^{(n-1)}(y+x)\,dy = \dots\\ =&(-1)^{n-1}\int_0^\infty \varphi'(y+x)\,dy = (-1)^n\varphi(x).\end{aligned}$$

□

Тепер ми можемо надати змісту символу $\delta^n(G)$, де G — генератор напівгрупи дробового інтегрування.

Теорема 1.2.4. *На перетворенні Фур'є $\widehat{\varphi}$ функції $\varphi \in \mathcal{S}_+$ оператор $\delta^n(G)$ діє за формулою*

$$\delta^n(G)\widehat{\varphi} = \frac{(-1)^n}{(2\pi)^n}\int_0^\infty (f_{t+n} * \varphi)(t)\,dt.$$

Доведення. Використовуючи першу з формул (1.2.3), безпосередньо переконаємось у цьому:

$$\begin{aligned}\delta^n(G)\widehat{\varphi} = &\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^\infty f_t * ((\underbrace{\theta * \dots * \theta}_{n}) \star \varphi)(t)\,dt\\ =&\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^\infty ((\underbrace{\theta * \dots * \theta}_{n}) \star (f_{t+n} * \varphi^{(n)}))(t)\,dt = \frac{(-1)^n}{(2\pi)^n}\int_0^\infty (f_{t+n} * \varphi)(t)\,dt.\end{aligned}$$

□

Твердження 1.2.7. *Для довільної функції $\varphi \in \mathcal{S}_+$ справедлива наступна формула*

$$x^n \star \varphi^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} n! \varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}_+, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доведення. Дійсно, застосовуючи n раз метод інтегрування частинами, отримуємо

$$\begin{aligned} x^n \star \varphi^{(n+1)}(x) &= \int_0^\infty y^n \varphi^{(n+1)}(x+y)\,dy = -n\int_0^\infty y^{n-1}\varphi^{(n)}(x+y)\,dy \\ &= n(n-1)\int_0^\infty y^{n-2}\varphi^{(n-1)}(x+y)\,dy = \ldots = (-1)^{n+1} n!\varphi(x). \end{aligned}$$

□

Теорема 1.2.5. *На перетворенні Фур'є* $\widehat{\varphi}$ *функції* $\varphi \in \mathcal{S}_+$ *оператор* $\delta^{(n)}(G)$ *діє за формулою*

$$\delta^{(n)}(G)\widehat{\varphi} = -\frac{(-\mathfrak{i})^n n!}{2\pi}\int_0^\infty (f_{t+n+1} * \varphi)(t)\,dt.$$

Доведення. Використовуючи вище доведену властивість та другу з формул (1.2.3), переконуємось у справедливості теореми

$$\delta^{(n)}(G)\widehat{\varphi} = \frac{\mathfrak{i}^n}{2\pi}\int_0^\infty (f_t * (x^n \star \varphi(x)))(t)\,dt = -\frac{(-\mathfrak{i})^n n!}{2\pi}\int_0^\infty (f_{t+n+1} * \varphi)(t)\,dt.$$

□

1.3 Основні напрямки та результати дослідження

У вступі висвітлено актуальність дослідження, зв'язок дисертаційної роботи з науково-дослідними темами, сформульовано мету і завдання дослідження, відзначено наукову новизну одержаних у дисертації результатів, виокремлено особистий внесок здобувача та вказано установи та організації, де доповідалися та обговорювалися результати дисертації.

У першому розділі дисертаційного дослідження зроблено огляд відомих результатів, що стосуються тематики роботи. Його мета — стисло дати уявлення про стан досліджень з даної тематики, місце дисертаційної роботи у розв'язанні поставленої проблеми. Крім того тут введено необхідну термінологію, викладено попередні відомості та результати, які потрібні для розуміння роботи, наведено приклад числення операторів, на основі якого ґрунується запропонований в дисертації підхід до побудови функціонального числення; подано короткий огляд дисертації.

У другому розділі дисертації розвинуто новий підхід до побудови поліноміальних основних функцій та поліноміальних розподілів на основі абстрактних ядерних (F) або (DF) просторів.

У першому параграфі наведено означення полілінійних та поліноміальних відображень на локально опуклих просторах, вказано на їхній зв'язок із симетричними тензорними добутками, досліджено слабку поліноміальну топологію на нескінченновимірному банаховому просторі.

У другому параграфі запропоновано загальний підхід до побудови поліноміальних основних та узагальнених функцій на основі локально опуклих ядерних просторів типу (F) або (DF) та введено на них ряд лінійних неперервних операторів, які використовуються в дисертації, досліджено властивості цих операторів.

Наступний ключовий у наших дослідженнях результат є симетричним аналогом відповідного топологічного ізоморфізму А. Ґротендіка.

Теорема 2.2.2. *Якщо $\mathcal{X}$ локально опуклий ядерний (F) або (DF) простір, то справджується рівність*

$$\mathcal{X}'^{\widehat{\otimes} n} \simeq (\mathcal{X}^{\widehat{\otimes} n})', \qquad n \in \mathbb{N},$$

для симетричних тензорних степенів.

Для спрощення записів введемо наступні позначення

$$\Gamma(\mathcal{X}) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} {}_{fin} \mathcal{X}^{\widehat{\otimes} n} \qquad \text{та} \qquad \Gamma(\mathcal{X}') := \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{X}'^{\widehat{\otimes} n}.$$

Нагадаємо, що елементи прямої суми містять скінченну, але не фіксовану кількість доданків.

Позначимо: $\mathcal{P}_n(\mathcal{X})$ (відп. $\mathcal{P}_n(\mathcal{X}')$) — простір n-однорідних поліномів на $\mathcal{X}$ (відп. на $\mathcal{X}'$); $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ (відп. $\mathcal{P}(\mathcal{X}')$) — простір неперервних поліномів на $\mathcal{X}$ (відп. на $\mathcal{X}'$); $\mathcal{P}'(\mathcal{X}')$ — сильно спряжений до $\mathcal{P}(\mathcal{X}')$ простір.

Наступний результат ми називаємо структурною теоремою для простору поліномів та спряженого до нього простору поліноміальних розподілів.

Теорема 2.2.3. *Для довільного ядерного* (F) *або* (DF) *простору* $\mathcal{X}$ *справджуються наступні лінійні топологічні ізоморфізми*

$$\Upsilon_n^{\mathcal{X}}\colon \mathcal{X}^{\widehat{\otimes} n} \longrightarrow \mathcal{P}_n(\mathcal{X}'), \qquad \Psi_n^{\mathcal{X}}\colon \mathcal{X}'^{\widehat{\otimes} n} \longrightarrow \mathcal{P}_n(\mathcal{X}),$$
$$\Upsilon^{\mathcal{X}}\colon \Gamma(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{X}'), \qquad \Psi^{\mathcal{X}}\colon \Gamma(\mathcal{X}') \longrightarrow \mathcal{P}'(\mathcal{X}').$$

Якщо простір $\mathcal{X}$ неперервно та щільно вкладений в $\mathcal{X}'$, то справджуються неперервні щільні вкладення: $\mathcal{P}_n(\mathcal{X}') \looparrowright \mathcal{P}_n(\mathcal{X})$, $\mathcal{P}(\mathcal{X}') \looparrowright \mathcal{P}'(\mathcal{X}')$.

Простори $\Gamma(\mathcal{X})$ та $\Gamma(\mathcal{X}')$ є локально опуклими алгебрами відносно операцій згорткового типу

$$\boldsymbol{p} \diamond \boldsymbol{q} := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \Big(\sum_{m=0}^{n} p_m \widehat{\otimes}\, q_{n-m}\Big), \qquad \boldsymbol{f} \diamond \boldsymbol{g} := \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \Big(\sum_{m=0}^{n} f_m \widehat{\otimes}\, g_{n-m}\Big),$$

де $\boldsymbol{p} = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} p_n, \boldsymbol{q} = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} q_n \in \Gamma(\mathcal{X})$, $\boldsymbol{f} = \bigtimes\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} f_n, \boldsymbol{g} = \bigtimes\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} g_n \in \Gamma(\mathcal{X}')$. Операцію $\diamond$ по-іншому ще називають добутком Віка [141].

Простори основних $\mathcal{P}(\mathcal{X}')$ і узагальнених функцій $\mathcal{P}'(\mathcal{X}')$ є топологічними алгебрами. При цьому така алгебраїчна структура існує незалежно від того, чи вихідний простір $\mathcal{X}$ (або $\mathcal{X}'$) є алгеброю чи ні.

У третьому параграфі введено та досліджено ряд операторів, що діють на локально опуклих просторах поліноміальних основних та узагальнених функцій, а також на відповідних просторах з тензорною структурою типу Фока.

У третьому розділі описано структуру та вивчено властивості просторів поліноміальних основних швидко спадних функцій та відповідних поліноміальних розподілів повільного росту, введено операції зсуву та диференціювання, а також розширено перетворення Фур'є на ці простори.

До простору $\mathcal{S} := \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (відп. $\mathcal{S}_+ := \mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$) віднесемо всі нескінченно диференційовні в $\mathbb{R}$ (відп. в $\mathbb{R}_+$) функції $\varphi(t)$, які разом з усіма похідними спадають до нуля при $|t| \to \infty$ (відп. при $t \to \infty$) швидше, ніж будь-який степінь $|t|^{-1}$.

У першому параграфі доведено теорему типу Сілі, яка гарантує можливість продовження швидко спадної функції з півосі на всю вісь, зберігши при цьому крім нескінченної гладкості (класична теорема Сілі), ще й властивість швидкого спадання.

Теорема 3.1.1. *Існує такий лінійний неперервний оператор розширення* $\Lambda\colon \mathcal{S}_+ \ni \varphi \longmapsto \Lambda\varphi \in \mathcal{S}$, *що* $\Lambda\varphi(t) = \varphi(t)$ *для всіх* $t \in \mathbb{R}_+$.

На основі абстрактної теорії, розвинутої в другому розділі, введено простори поліноміальних основних швидко спадних функцій $\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$ та поліноміальних розподілів повільного росту $\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+)$. Елементи просторів $\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$ і $\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+)$ ми називаємо поліноміальними швидко спадними функціями та поліноміальними розподілами повільного росту відповідно.

У другому параграфі введено поліноміальне узагальнення операторів диференціювання та зсуву та показано, що поліноміальна похідна генерує відповідну напівгрупу зсувів, як і в лінійному випадку.

Для кожного $s \in \mathbb{R}_+$ визначимо на просторі поліномів $\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$ оператор $\mathscr{T}_s$, що діє за правилом $\mathscr{T}_s : \mathcal{P}(\mathcal{S}'_+) \ni P \longmapsto P \circ T'_s \in \mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$, де T'_s — спряжений оператор відносно дуальної пари $\langle\, \mathcal{S}'_+, \mathcal{S}_+ \,\rangle$ до звичайного оператора зсуву T_s на $\mathcal{S}_+$. На відповідному просторі $\Gamma(\mathcal{S}_+)$ оператор $\mathbb{T}_s \in \Gamma(\mathcal{S}_+)$, $s \in \mathbb{R}_+$, визначимо формулою $\mathbb{T}_s := [\Upsilon^{\mathcal{S}_+}]^{-1} \circ \mathscr{T}_s \circ \Upsilon^{\mathcal{S}_+}$.

Теорема 3.2.1. *Однопараметрична сім'я* $\{\mathbb{T}_s : s \in \mathbb{R}_+\}$ *лінійних операторів, що діють на алгебрі* $\{\Gamma(\mathcal{S}_+), \diamond\}$, *є одностайно неперервною* (C_0) *напівгрупою алгебраїчних автоморфізмів. Її генератором є оператор* $\mathbb{D}$, *що на довільний елемент вигляду* $\boldsymbol{p} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \varphi^{\otimes n} \in \Gamma(\mathcal{S}_+)$, *де* $\varphi \in \mathcal{S}_+$, *діє за правилом* $\mathbb{D}\boldsymbol{p} := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} D^{\{\otimes\}n}\varphi^{\otimes n}$, *де* $D^{\{\otimes\}n}\varphi^{\otimes n} := \sum\limits_{j=1}^{n} \underbrace{\varphi \otimes \cdots \otimes \varphi \otimes D\varphi}_{j} \otimes \underbrace{\varphi \otimes \cdots \otimes \varphi}_{n-j}$, $n \in \mathbb{N}$, *а* $D^{\{\otimes\}0}$ *— нульовий оператор.*

Оператор $\mathbb{T}'_s$, $s \in \mathbb{R}_+$, на просторі $\Gamma(\mathcal{S}'_+)$ визначимо формулою

$$\mathbb{T}'_s := [\Psi^{\mathcal{S}_+}]^{-1} \circ \mathscr{T}'_s \circ \Psi^{\mathcal{S}_+},$$

де $\mathscr{T}'_s$ спряжений до $\mathscr{T}_s$ оператор відносно дуальності $\langle\, \mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+),\, \mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)\,\rangle$.

Теорема 3.2.2. *Однопараметрична сім'я* $\{\mathbb{T}'_s : s \in \mathbb{R}_+\}$ *лінійних операторів, що діють на алгебрі* $\{\Gamma(\mathcal{S}'_+), \diamond\}$, *є одностайно неперервною* (C_0) *напівгрупою алгебраїчних автоморфізмів. Її генератором є оператор* $\mathbb{D}'$, *що на довільний елемент вигляду* $\boldsymbol{f} = \times_{n\in\mathbb{Z}_+} f^{\otimes n} \in \Gamma(\mathcal{S}'_+)$, *де* $f \in \mathcal{S}'_+$, *діє за правилом* $\mathbb{D}'\boldsymbol{f} := \times_{n\in\mathbb{Z}_+} D'^{\{\otimes\}n} f^{\otimes n}$, *де* $D'^{\{\otimes\}n} f^{\otimes n} := \sum\limits_{j=1}^{n} \underbrace{f \otimes \cdots \otimes f \otimes D'f}_{j} \otimes \underbrace{f \otimes \cdots \otimes f}_{n-j}$, $n \in \mathbb{N}$, *а* $D'^{\{\otimes\}0}$ *– нульовий оператор.*

Визначимо оператори $\mathscr{D} := \Upsilon^{\mathcal{S}_+} \circ \mathbb{D} \circ [\Upsilon^{\mathcal{S}_+}]^{-1}$ та $\mathscr{D}' := \Psi^{\mathcal{S}_+} \circ \mathbb{D}' \circ [\Psi^{\mathcal{S}_+}]^{-1}$.

Наслідок 3.2.1. *На елементи вигляду* $P_m(\cdot) := \sum_{k=0}^{m} \langle \,\cdot\,, \varphi\rangle^k$, *які утворюють тотальну в* $\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$ *підмножину, оператор* $\mathscr{D}$ *діє за формулою*

$$\mathscr{D}P_m(\cdot) := \sum_{k=1}^{m} k\langle \,\cdot\,, D\varphi\rangle\langle \,\cdot\,, \varphi\rangle^{k-1} = \langle \,\cdot\,, D\varphi\rangle \sum_{k=1}^{m} k\langle \,\cdot\,, \varphi\rangle^{k-1}.$$

Наслідок 3.2.2. *На елементи вигляду* $U = (1, U_1, \ldots, U_n, \ldots) \in \mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+)$, *де* $U_n(\cdot) = \langle f^{\otimes n}, \cdot^{\otimes n}\rangle \in \mathcal{P}_n(\mathcal{S}_+)$, $f \in \mathcal{S}'_+$, *які утворюють тотальну в* $\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+)$ *підмножину, оператор* $\mathscr{D}'$ *діє за формулою*

$$\mathscr{D}'U := \big(0, \langle D'f, \cdot\rangle, 2\langle D'f, \cdot\rangle U_1, \ldots, n\langle D'f, \cdot\rangle U_{n-1}, \ldots\big).$$

Теорема 3.2.3. *Оператори* $\mathbb{D}$ *та* $\mathbb{D}'$ *є неперервними диференціюваннями в сенсі правила Лейбніца на алгебрах* $\{\Gamma(\mathcal{S}_+), \diamond\}$ *та* $\{\Gamma(\mathcal{S}'_+), \diamond\}$ *відповідно.*

Наслідок 3.2.3. *Оператори* $\mathscr{D}$ *та* $\mathscr{D}'$ *є неперервними диференціюваннями на алгебрах* $\{\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+), \diamond\}$ *та* $\{\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+), \diamond\}$ *відповідно.*

Теорема 3.2.4. *Похідні* $\mathbb{D}'$ *та* $\mathbb{D}$ *як оператори, що задані на спряжених просторах* $\Gamma(\mathcal{S}'_+)$ *та* $\Gamma(\mathcal{S}_+)$, *задовольняють дуальне співвідношення* $\langle \mathbb{D}'\boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}\rangle = -\langle \boldsymbol{u}, \mathbb{D}\boldsymbol{p}\rangle$, $\forall\, \boldsymbol{u} \in \Gamma(\mathcal{S}'_+)$, $\forall\, \boldsymbol{p} \in \Gamma(\mathcal{S}_+)$.

Наслідок 3.2.4. *Похідні* $\mathscr{D}'$ *та* $\mathscr{D}$ *як оператори, що задані на спряжених просторах* $\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+)$ *та* $\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$*, задовольняють дуальне співвідношення* $\langle \mathscr{D}'U, P\rangle = -\langle U, \mathscr{D}P\rangle$*,* $\forall\, U \in \mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+)$*,* $\forall\, P \in \mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$*.*

Третій параграф присвячений інтегральним перетворенням у просторах лінійних та поліноміальних основних та узагальнених функцій.

Для функції $\varphi \in \mathcal{S}_+$ визначимо перетворення Фур'є

$$\widehat{\varphi}(\xi) := F_+\big[\varphi(t)\big](\xi) := \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\mathrm{i}t\xi}\varphi(t)\,dt, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Позначимо: $\widehat{\mathcal{S}}_+ := F_+\big[\mathcal{S}_+\big]$ — образ простору $\mathcal{S}_+$ при перетворенні Фур'є, $\widehat{\mathcal{S}}'_+$ — сильно спряжений до $\widehat{\mathcal{S}}_+$ простір.

Перетворення $\mathcal{F}' := 2\pi(F'_+)^{-1}\colon \mathcal{S}'_+ \ni f \longmapsto \widehat{f} := \mathcal{F}'[f] \in \widehat{\mathcal{S}}'_+$ назвемо узагальненим перетворенням Фур'є розподілів з класу $\mathcal{S}'_+$.

У пункті 3.3.2 доведено аналог теореми Пелі-Вінера для одного класу типу Харді-Лебега про зображення Фур'є-образу згорткової алгебри $\mathcal{S}'_+$ у вигляді мультиплікативної алгебри аналітичних функцій комплексної змінної.

Поліноміальне розширення $\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}}$ узагальненого перетворення Фур'є $\mathcal{F}'$ визначимо формулою

$$\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}} : \mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+) \ni U = \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} U_n \quad \longmapsto \quad \widehat{U} := \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{F}'^{\otimes n}_{\mathcal{P}}(U_n) \in \mathcal{P}'(\widehat{\mathcal{S}}'_+),$$

де $U_n \in \mathcal{P}_n(\mathcal{S}_+)$, а $\mathcal{F}'^{\otimes n}_{\mathcal{P}}$ — n-однорідна компонента відображення $\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}}$, тобто перетворення $\mathcal{F}'^{\otimes n}_{\mathcal{P}} := \Psi_n^{\widehat{\mathcal{S}}_+} \circ \mathcal{F}'^{\otimes n} \circ [\Psi_n^{\mathcal{S}_+}]^{-1}$.

Для елементів тотальних підмножин просторів $\Gamma(\mathcal{S}_+)$ та $\Gamma(\widehat{\mathcal{S}}_+)$ визначимо операції

$$\big(\varphi^{\otimes n}\big) \circledast \big(\psi^{\otimes n}\big) := \big((\varphi * \psi)^{\otimes n}\big) \qquad \text{і} \qquad \big(\widehat{\varphi}^{\otimes n}\big) \odot \big(\widehat{\psi}^{\otimes n}\big) := \big((\widehat{\varphi}\cdot\widehat{\psi})^{\otimes n}\big)$$

відповідно, де $\varphi, \psi \in \mathcal{S}_+$, $\widehat{\varphi}, \widehat{\psi} \in \widehat{\mathcal{S}}_+$. Далі розширимо їх на простори $\Gamma(\mathcal{S}'_+)$ і $\Gamma(\widehat{\mathcal{S}}'_+)$ за лінійністю та неперервністю.

Теорема 3.3.3. *Поліноміальне розширення перетворення Фур'є* $\mathcal{F}'^{\otimes}$ *є гомоморфізмом алгебр* $(\Gamma(\mathcal{S}'_+), \circledast\,)$ *та* $(\Gamma(\widehat{\mathcal{S}}'_+), \odot\,)$*.*

Наслідок 3.3.3. *Поліноміальне розширення перетворення Фур'є* $\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}}$ *є гомоморфізмом алгебр* $(\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+), \circledast\,)$ *та* $(\mathcal{P}'(\widehat{\mathcal{S}}'_+), \odot\,)$*.*

Як відомо, класичне перетворення Фур'є згортку переводить у множення. У теоремі 3.3.3 та наслідку 3.3.3 доведено аналог вказаної властивості. Проте простори поліноміальних основних та узагальнених функцій мають іншу алгебраїчну операцію — добуток Віка. Виявляється, що перетворення Фур'є зберігає цю операцію. Зрозуміло, що класичного аналогу цієї властивості немає.

Теорема 3.3.4. *Поліноміальне розширення перетворення Фур'є* $\mathcal{F}'^{\otimes}$ *є гомоморфізмом алгебр* $(\Gamma(\mathcal{S}'_+), \diamond\,)$ *та* $(\Gamma(\widehat{\mathcal{S}}'_+), \diamond\,)$*.*

Наслідок 3.3.4. *Поліноміальне розширення перетворення Фур'є* $\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}}$ *є гомоморфізмом алгебр* $(\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+), \diamond\,)$ *та* $(\mathcal{P}'(\widehat{\mathcal{S}}'_+), \diamond\,)$*.*

У четвертому параграфі досліджено диференційовність за Ґато поліноміальних основних та узагальнених функцій та елементів відповідних просторів із тензорною структурою типу Фока. Встановлено зв'язок похідної Ґато з квантовим білим шумом на просторах $\Gamma(\mathcal{S}_+)$ та $\Gamma(\mathcal{S}'_+)$, а також з диференціюваннями на цих просторах.

Визначимо вектор

$$\phi_{\varphi,m} = \Big(1, \varphi, \frac{\varphi^{\otimes 2}}{2!}, \dots, \frac{\varphi^{\otimes m}}{m!}, 0, \dots\Big) \in \Gamma(\mathcal{S}_+), \qquad \varphi \in \mathcal{S}_+, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Оператором знищення a_t в точці $t \in \mathbb{R}_+$ називають єдиний оператор в $\mathscr{L}(\Gamma(\mathcal{S}_+))$, що володіє властивістю $a_t\phi_{\varphi,m} = \varphi(t)\phi_{\varphi,m-1}$, $\varphi \in \mathcal{S}_+$, $m \in \mathbb{N}$.

Оператором народження $a'_t \in \mathscr{L}(\Gamma(\mathcal{S}'_+))$ в точці $t \in \mathbb{R}_+$ називають спряжений до a_t оператор відносно дуальної пари $\langle \Gamma(\mathcal{S}'_+), \Gamma(\mathcal{S}_+) \rangle$.

Нехай $P \in \mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$ — неперервний поліном. Визначимо оператор зсуву $\mathscr{T}_g \in \mathscr{L}(\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+))$ формулою $\mathscr{T}_g P(f) = P(f + g)$, $f \in \mathcal{S}'_+$, де $g \in \mathcal{S}'_+$ — довільний розподіл повільного росту.

З теореми 2.2.3 випливає, що оператор $\mathbb{T}_g := (\Upsilon^{\mathcal{S}_+})^{-1} \circ \mathscr{T}_g \circ \Upsilon^{\mathcal{S}_+}$ коректно заданий на просторі $\Gamma(\mathcal{S}_+)$, більше того $\mathbb{T}_g \in \mathscr{L}(\Gamma(\mathcal{S}_+))$.

Символом $\circledcirc_k$ позначимо (праве) k-скорочення симетричного тензорного добутку, а саме $g^{\otimes k} \circledcirc_k \varphi^{\otimes s} := \langle g, \varphi \rangle^k \varphi^{\otimes (s-k)}$, $k \leq s$.

Кажуть, що поліном $P \in \mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$ (відповідно елемент $\boldsymbol{p} \in \Gamma(\mathcal{S}_+)$) є диференційовним за Ґато, якщо для довільного $g \in \mathcal{S}'_+$ оператор зсуву $\mathscr{T}_{\varepsilon g} P$ (відповідно $\mathbb{T}_{\varepsilon g} p$) визначений для для всіх достатньо малих ε і якщо

$$\mathscr{D}_g P := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathscr{T}_{\varepsilon g} P - P}{\varepsilon} \qquad \Big(\text{відповідно } \mathbb{D}_g \boldsymbol{p} := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathbb{T}_{\varepsilon g} \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}}{\varepsilon}\Big)$$

збігається в $\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$ (відповідно в $\Gamma(\mathcal{S}_+)$) у топології рівномірної збіжності на обмежених множинах (відповідно у топології прямої суми).

Оператор $\mathscr{D}_g$ (відповідно $\mathbb{D}_g$) називають похідною Ґато полінома P (відповідно елемента $\boldsymbol{p}$) у напрямку g.

Теорема 3.4.1. *Кожен поліном з простору $\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$ є диференційовним за Ґато, при цьому $\mathscr{D}_g P_{\varphi,m} = \sum_{k=0}^{m-1} (k+1) \langle g, \varphi \rangle \langle \ \cdot \ , \varphi \rangle^k$. Більше того, похідна Ґато $\mathscr{D}_g$ є лінійним неперервним оператором на $\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$.*

Наслідок 3.4.1. *Кожен елемент з простору $\Gamma(\mathcal{S}_+)$ є диференційовним за Ґато, при цьому $\mathbb{D}_g \boldsymbol{\varphi}_m = \big(\langle g, \varphi \rangle, 2\langle g, \varphi \rangle \varphi, \dots, m \langle g, \varphi \rangle \varphi^{\otimes (m-1)}, 0, \dots\big)$ для всіх $\boldsymbol{\varphi}_m = (1, \varphi, \varphi^{\otimes 2}, \dots, \varphi^{\otimes m}, 0, \dots) \in \Gamma(\mathcal{S}_+)$, де $\varphi \in \mathcal{S}_+$. Більше того, похідна Ґато $\mathbb{D}_g$ є лінійним та неперервним оператором на $\Gamma(\mathcal{S}_+)$.*

Наслідок 3.4.3. *Похідна Ґато $\mathbb{D}_{\delta_t}$ у напрямку δ_t є оператором знищення в точці $t \in \mathbb{R}_+$.*

Теорема 3.4.2. *Для кожного $g \in \mathcal{S}'_+$ похідна Ґато $\mathbb{D}_g$ є неперервним диференціюванням алгебри $\big\{\Gamma(\mathcal{S}_+), \diamond\big\}$.*

Наслідок 3.4.4. *Для кожного $g \in \mathcal{S}'_+$ похідна Ґато $\mathscr{D}_g$ є неперервним диференціюванням алгебри $\{\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+), \diamond\}$.*

Для довільного розподілу $g \in \mathcal{S}'_+$ нехай $\mathbb{D}'_g$ та $\mathscr{D}'_g$ позначають спряжені оператори до похідних Ґато відносно дуальних пар $\big\langle \Gamma(\mathcal{S}'_+), \Gamma(\mathcal{S}_+) \big\rangle$ та

$\big\langle \mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+), \mathcal{P}(\mathcal{S}'_+))\big\rangle$ відповідно.

Наслідок 3.4.5. *Оператор* $\mathbb{D}'_{\delta_t}$ *є оператором народження* a'_t *в точці* $t \in \mathbb{R}_+$

Теорема 3.4.4. *Для кожного розподілу* $g \in \mathcal{S}'_+$ *узагальнена похідна Ґато* $\mathbb{D}'_g$ *є неперервним диференціюванням алгебри* $\big\{\Gamma(\mathcal{S}'_+), \diamond\big\}$.

Наслідок 3.4.7. *Для кожного розподілу* $g \in \mathcal{S}'_+$ *узагальнена похідна Ґато* $\mathscr{D}'_g$ *є неперервним диференціюванням алгебри* $\big\{\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+), \diamond\big\}$.

Зафіксуємо деяке $t \in \mathbb{R}_+$ і визначимо оператор $\mathbb{D}(t) \in \Gamma(\mathcal{S}_+)$ за правилом $\mathbb{D}(t)\boldsymbol{\varphi}_m := \bigoplus_{k=1}^m D_t^{\{\otimes\}_k}[\varphi^{\otimes k}]$ для довільного елемента $\boldsymbol{\varphi}_m = (1, \varphi, \varphi^{\otimes 2}, \dots, \varphi^{\otimes m}, 0, \dots)$, $\varphi \in \mathcal{S}_+$, де

$$D_t^{\{\otimes\}_k}[\varphi^{\otimes k}] := \sum_{j=1}^{k} \underbrace{\varphi \otimes \dots \otimes \varphi \otimes \varphi'(t)}_{j} \otimes \underbrace{\varphi \otimes \dots \otimes \varphi}_{k-j}, \qquad k = 1, \dots, m.$$

У наступній теоремі встановлено зв'язок похідної Ґато з введеними в параграфі 3.2 диференціюваннями.

Теорема 3.4.5. *При* $g = -\delta'_t$ *отримаємо рівність* $\mathbb{D}_{-\delta'_t} = \mathbb{D}(t)$ *для довільного фіксованого* $t \in \mathbb{R}_+$.

У четвертому розділі розглянуто випадок, коли абстрактний ядерний простір $\mathcal{X}$ замінено на один з просторів ультрадиференційовних функцій. В основному ми використовуємо простір $\mathcal{G}_+$ функцій з класу Жевре, що мають компактні носії, зосереджені у додатному конусі $\mathbb{R}^d_+$. При цьому, на відміну від розділу 3, тут розглянуто клас основних функцій багатьох змінних.

Перший параграф присвячений введеню означень та встановленню основних властивостей ультрадиференційовних функцій Жевре та ультрарозподілів Рум'є.

Позначимо $[\mu, \nu] := \times_{j=1}^d [\mu_j, \nu_j]$ де $\mu_1 < \nu_1, \dots, \mu_d < \nu_d$, $\partial^k := \partial_1^{k_1} \dots \partial_d^{k_d}$, $\partial_j^{k_j} = \partial^{k_j}/\partial t_j^{k_j}$, $j = 1, \dots, d$, $|k| = k_1 + \dots + k_d$, $k^{k\beta} = k_1^{k_1\beta} \cdot \ldots \cdot k_d^{k_d\beta}$, де $k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d_+$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Зафіксуємо довільне дійсне $\beta > 1$. Нескінченно диференційовну в $\mathbb{R}^d_+$ функцію φ називають ультрадиференційовною в сенсі Жевре (див. [146]), якщо для кожної множини $[\mu, \nu] \subset \operatorname{int} \mathbb{R}^d_+$ існують такі константи $h > 0$ і $C > 0$, що нерівність $\sup_{t \in [\mu,\nu]} |\partial^k \varphi(t)| \leq C h^{|k|} k^{k\beta}$ виконується для всіх $k \in \mathbb{Z}^d_+$. Векторний простір всіх ультрадиференційовних в $\operatorname{int} \mathbb{R}^d_+$ в сенсі Жевре функцій позначимо $\mathcal{E}^\beta_+ := \mathcal{E}^\beta(\mathbb{R}^d_+)$. Позначимо $\mathcal{G}^\beta_+ \subset \mathcal{E}^\beta_+$ підпростір ультрадиференційовних в сенсі Жевре функцій з компактними носіями. Для спрощення позначень ми писатимемо $\mathcal{G}_+$ замість $\mathcal{G}^\beta_+$, опускаючи фіксоване число β. Сенс параметра $\beta > 1$ описаний в пункті 4.1.1.

Елементи сильно спряженого до $\mathcal{G}_+$ простору $\mathcal{G}'_+$ називають ультрарозподілами Рум'є з носіями в $\mathbb{R}^d_+$.

У другому параграфі доведено структурні теореми для операторів, що діють в просторах (лінійних) ультрадиференційовних функцій і які комутують з багатопараметричними напівгрупами.

Розглянемо d-параметричну (C_0) напівгрупу зсувів на просторі $\mathcal{G}_+$, визначену за правилом $T\colon \mathbb{R}^d_+ \ni s \longmapsto T_s \in \mathscr{L}(\mathcal{G}_+)$, $T_s\varphi(t) := \varphi(t+s)$, $t \in \mathbb{R}^d_+$, $\varphi \in \mathcal{G}_+$.

Для довільного ультрарозподілу $f \in \mathcal{G}'_+$ оператор крос-кореляції над простором $\mathcal{G}_+$ визначимо за правилом $K_f\colon \mathcal{G}_+ \ni \varphi \longmapsto K_f\varphi$, $K_f\varphi(s) := \langle f, T_s\varphi \rangle$, $s \in \mathbb{R}^d_+$.

Нехай $S \subset \mathscr{L}(\mathcal{X})$ — деяка підмножина в просторі всіх неперервних лінійних операторів на $\mathcal{X}$. Комутантом множини S називають множину операторів, що визначена за правилом $[S]^c := \big\{B \in \mathscr{L}(\mathcal{X})\colon B \circ A = A \circ B, \forall A \in S\big\}$.

У наступній теоремі доведено, що згорткову алгебру $\mathcal{G}'_+$ можна ізоморфно представити як комутант напівгрупи зсувів. У теоремі 4.2.2 доведено векторнозначний варіант цього результату.

Теорема 4.2.1. *Відображення* $\mathcal{K}\colon \mathcal{G}'_+ \ni f \longmapsto K_f \in \mathscr{L}(\mathcal{G}_+)$ *здійснює топологічний ізоморфізм зі згорткової алгебри* $\mathcal{G}'_+$ *на комутант* $[T]^c$

напівгрупи зсувів T. *При цьому для довільних* $f, g \in \mathcal{G}'_+$ *виконується рівність* $K_{f*g} = K_f \circ K_g$, *де* $*$ *позначає згортку в* $\mathcal{G}'_+$, *зокрема,* K_δ *— одиничний оператор в* $\mathscr{L}(\mathcal{G}_+)$.

Нехай $E := (E, \|\cdot\|)$ — комплексний банаховий простір. Елементи простору $E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{G}_+$ ми можемо трактувати як E-значні ультрадиференційовні функції $x : t \longmapsto x(t)$ з компактними носіями в $\mathbb{R}^d_+$.

Для довільних $h > 0$ та $\nu \in \operatorname{int} \mathbb{R}^d_+$ наступним чином визначимо підпростір $\mathcal{G}^h_\nu := \big\{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d_+) : \operatorname{supp} \varphi \subset [0, \nu], \|\varphi\|_{\mathcal{G}^h_\nu} < \infty\big\}$, ультрадиференційовних функцій з компактними носіями в $[0, \nu]$, де $\|\varphi\|_{\mathcal{G}^h_\nu} := \sup_{k \in \mathbb{Z}^d_+} \sup_{t \in [0,\nu]} \frac{|\partial^k \varphi(t)|}{h^{|k|} k^{k\beta}}$.

З теореми 1.2.2 (див. також [54, III.6.4]) про представлення елементів проективного тензорного добутку випливає, що кожен $x \in E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{G}_+$ можна (взагалі кажучи, неоднозначно) розвинути в абсолютно збіжний ряд $x = \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j x_j \otimes \varphi_j$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $x_j \in E$, $\varphi_j \in \mathcal{G}^h_\nu$, для деяких $\nu \in \mathbb{R}^d_+$ і $h > 0$, де $\sum_j |\lambda_j| < \infty$ і послідовності $\{x_j\}$ та $\{\varphi_j\}$ збігаються до нуля у відповідних просторах.

Нехай I_E позначає тотожний оператор в $\mathscr{L}(E)$. Розглянемо довільний оператор $K \in \mathscr{L}(\mathcal{G}_+)$. Використовуючи розвинення в абсолютно збіжний ряд, можна визначити тензорний добуток $I_E \otimes K \in \mathscr{L}(E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{G}_+)$ наступним чином $(I_E \otimes K)x = \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j x_j \otimes K\varphi_j$. Аналогічно можна визначити дію $\langle f, x\rangle := \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j x_j \langle f, \varphi_j\rangle$ для довільного ультрарозподілу $f \in \mathcal{G}'_+$ і векторнозначної ультрадиференційовної функції $x \in E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{G}_+$. Добре відомо [54], що ці означення не залежать від представлення функції $x \in E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{G}_+$ у вигляді абсолютно збіжного ряду.

Скажемо, що оператор $I_E \otimes K$, де $K \in \mathscr{L}(\mathcal{G}_+)$, є інваріантним відносно операторів зсуву $I_E \otimes T = \big\{I_E \otimes T_s \colon s \in \mathbb{R}^d_+\big\}$, якщо $I_E \otimes (K \circ T_s) = I_E \otimes (T_s \circ K)$ для всіх $s \in \mathbb{R}^d_+$.

Для довільного ультрарозподілу $f \in \mathcal{G}'_+$ оператор крос-кореляції над простором $E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{G}_+$ визначимо за правилом $I_E \otimes K_f \colon E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{G}_+ \ni x \longmapsto$

$(I_E \otimes K_f)x$.

Теорема 4.2.2. *Для довільного ультрарозподілу* $f \in \mathcal{G}'_+$ *оператор* $I_E \otimes K_f$ *є інваріантним відносно операторів зсуву* $I_E \otimes T$. *Навпаки, для довільного такого оператора* $K \in \mathscr{L}(\mathcal{G}_+)$, *що* $I_E \otimes K$ *є інваріантним відносно* $I_E \otimes T$, *існує єдиний такий ультрарозподіл* $f \in \mathcal{G}'_+$, *що*

$$K\varphi = K_f\varphi \qquad i \qquad (I_E \otimes K)x = (I_E \otimes K_f)x.$$

для всіх $\varphi \in \mathcal{G}_+$ *і* $x \in E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{G}_+$.

Розглянемо загальніший випадок довільної напівгрупи стиску.

Нехай $\mathscr{G}$ позначає множину генераторів d-параметричних (C_0) напівгруп стиску. Розглянемо простір $\widehat{\mathcal{G}} := \{\widehat{x} \colon \mathscr{G} \longrightarrow E \ : \ x \in E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{G}_+\}$ всіх E-значних функцій вигляду

$$\widehat{x} \colon \mathscr{G} \ni A \longmapsto \widehat{x}(A) \in E, \qquad \widehat{x}(A) := \int_{\mathbb{R}^d_+} G_t(A)x(t)\,dt,$$

де $G_t(A)$ — напівгрупа, шо генерується оператором A, а інтеграл ми розуміємо у сенсі Бохнера. Зауважимо, що остання формула задає відоме функціональне числення Хілле-Філліпса.

Визначимо лінійне відображення

$$\mathcal{F}_{\mathscr{G}} \colon E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{G}_+ \ni x \longmapsto \widehat{x} \in \widehat{\mathcal{G}}.$$

Це відображення можна розуміти як операторний аналог перетворення Фур'є, введеного в параграфі 3.3.

Розглянемо d-параметричну напівгрупу на просторі $\widehat{\mathcal{G}}$

$$\widehat{T} \colon \mathbb{R}^d_+ \ni s \longmapsto \widehat{T}_s \in \mathscr{L}(\widehat{\mathcal{G}}), \qquad \widehat{T}_s = \mathcal{F}_{\mathscr{G}} \circ (I_E \otimes T_s) \circ \mathcal{F}_{\mathscr{G}}^{-1},$$

де $\mathcal{F}_{\mathscr{G}}^{-1}$ — обернене до $\mathcal{F}_{\mathscr{G}}$ відображення.

Наступна теорема показує, що згорткова алгебра $\mathcal{G}'_+$ має ізоморфне представлення у вигляді комутанта напівгрупи $\widehat{T}$ над простором E-значних функцій, аргументами яких є оператори. Цю теорему можна розуміти як обґрунтування існування узагальненого функціонального числення типу Хілле-Філліпса у класі Фур'є образів векторнозначних ультрадиференційовних функцій.

Теорема 4.2.3. *Відображення* $\mathcal{G}'_+ \ni f \longmapsto \widehat{K}_f \in \mathscr{L}(\widehat{\mathcal{G}})$, *де* $\widehat{K}_f := \mathcal{F}_{\mathscr{G}} \circ (I_E \otimes K_f) \circ \mathcal{F}_{\mathscr{G}}^{-1}$, *здійснює алгебраїчний ізоморфізм зі згорткової алгебри* $\mathcal{G}'_+$ *на комутант* $[\widehat{T}]^c$ *напівгрупи* $\widehat{T}$, *що складається з усіх операторів на* $\widehat{\mathcal{G}}$ *вигляду* $\widehat{K} = \mathcal{F}_{\mathscr{G}} \circ (I_E \otimes K) \circ \mathcal{F}_{\mathscr{G}}^{-1}$ *для деякого* $K \in \mathscr{L}(\mathcal{G}_+)$. *Зокрема, справджується рівність* $\widehat{K}_{f*g} = \widehat{K}_f \circ \widehat{K}_g$ *для всіх* $f, g \in \mathcal{G}'_+$, *а* $\widehat{K}_\delta$ *— одиничний оператор в* $\mathscr{L}(\widehat{\mathcal{G}})$.

У третьому параграфі досліджено деякі властивості топологічної алгебри $\mathcal{P}(\mathcal{G}'_+)$ неперервних скалярних поліномів на згортковій алгебрі $\mathcal{G}'_+$ ультрарозподілів Рум'є, носії яких розміщені в додатному конусі $\mathbb{R}^d_+$, а також властивості сильно спряженого простору $\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_+)$ поліноміальних ультрарозподілів. Алгебра $\mathcal{G}'_+$ топологічно вкладена в $\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_+)$, отже $\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_+)$ можна розглядати як поліноміальне розширення алгебри ультрарозподілів Рум'є.

Однопараметрична сім'я операторів

$$T_{s_i}\colon \varphi(t_1,\dots,t_d) \longmapsto \varphi(t_1,\dots,t_{i-1},t_i{+}s_i,t_{i+1},\dots,t_d), \quad s_i \geq 0, \quad i = 1,\dots,d,$$

де $(t_1,\dots,t_d) \in \mathbb{R}^d_+$, утворює напівгрупу $T_i\colon 0 \leq s_i \longmapsto T_{s_i} \in \mathscr{L}(\mathcal{G}_+)$ зсувів вздовж конуса $\mathbb{R}^d_+$.

Нехай $\partial_i := \frac{\partial}{\partial t_i}$ позначає оператор диференціювання за змінною t_i, $i = 1,\dots,d$. Для всіх $i = 1,\dots,d$ нехай $T'_i\colon 0 \leq s_i \longmapsto T'_{s_i}$ позначає спряжену до T_i напівгрупу, а ∂'_i — спряжений до ∂_i оператор відносно двоїстості $\langle \mathcal{G}'_+, \mathcal{G}_+ \rangle$.

Визначимо оператори $\mathbb{D}_i \in \mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{G}_+)\big)$ та $\mathbb{D}'_i \in \mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{G}'_+)\big)$, $i = 1,\dots,d$, наступним чином

$$\mathbb{D}_i : (1, \varphi, \dots, \varphi^{\otimes n}, 0, \dots) \longmapsto \Big(0, \partial_i\varphi, \dots, \partial_i^{\{\otimes\}n} \varphi^{\otimes n}, 0, \dots\Big),$$

$$\mathbb{D}'_i : (1, f, \dots, f^{\otimes n}, \dots) \longmapsto \Big(0, \partial'_i f, \dots, \partial_i'^{\{\otimes\}n} f^{\otimes n}, \dots\Big),$$

де оператори $\partial_i^{\{\otimes\}n}$ та $\partial_i'^{\{\otimes\}n}$ діють за правилами

$$\partial_i^{\{\otimes\}n}\varphi^{\otimes n}:=\sum_{j=1}^{n}\varphi^{\otimes(j-1)}\otimes\partial_i\varphi\otimes\varphi^{\otimes(n-j)},\quad \partial_i'^{\{\otimes\}n}f^{\otimes n}:=\sum_{j=1}^{n}f^{\otimes(j-1)}\otimes\partial_i'f\otimes f^{\otimes(n-j)}.$$

Для кожного $i=1,\dots,d$ на просторах $\Gamma(\mathcal{G}_+)$ та $\Gamma(\mathcal{G}'_+)$ визначимо однопараметричні сім'ї $\mathbb{T}_i : 0\le s_i\longmapsto \mathbb{T}_{s_i}\in\mathscr{L}(\Gamma(\mathcal{G}_+))$ та $\mathbb{T}'_i : 0\le s_i\longmapsto \mathbb{T}'_{s_i}\in\mathscr{L}(\Gamma(\mathcal{G}'_+))$ операторів, що діють за правилами

$$\mathbb{T}_{s_i}:(1,\varphi,\dots,\varphi^{\otimes n},0,\dots)\longmapsto\Big(1,T_{s_i}\varphi,\dots,T_{s_i}^{\otimes n}\varphi^{\otimes n},0,\dots\Big),$$

$$\mathbb{T}'_{s_i}:(1,f,\dots,f^{\otimes n},\dots)\longmapsto\Big(1,T'_{s_i}f,\dots,T_{s_i}'^{\otimes n}f^{\otimes n},\dots\Big),$$

де $T_{s_i}^{\otimes n}$, $T_{s_i}'^{\otimes n}$ визначені як тензорні степені операторів T_{s_i}, T'_{s_i}.

У наступній теоремі та наслідку показано що оператори диференціювання на поліноміальних просторах генерують поліноміальні сильно неперервні багатопараметричні напівгрупи зсувів.

Теорема 4.3.1. *Однопараметричні сім'ї $\mathbb{T}_i$, $i=1,\dots,d$, лінійних операторів на згортковій алгебрі $\Gamma(\mathcal{G}_+)$ утворюють (C_0) напівгрупи алгебраїчних автоморфізмів. Їх генераторами є оператори $\mathbb{D}_i$, $i=1,\dots,d$.*

Однопараметричні сім'ї $\mathbb{T}'_i$, $i=1,\dots,d$, лінійних операторів на згортковій алгебрі $\Gamma(\mathcal{G}'_+)$ утворюють (C_0) напівгрупи алгебраїчних автоморфізмів. Їх генераторами є оператори $\mathbb{D}'_i$, $i=1,\dots,d$.

Наслідок 4.3.1. *Однопараметричні сім'ї $\mathscr{T}_i\colon 0\le s_i\longmapsto\mathscr{T}_{s_i}$, $i=1,\dots,d$, лінійних операторів на алгебрі $\mathcal{P}(\mathcal{G}'_+)$, що визначені за правилом $\mathscr{T}_{s_i}P:=P\circ T'_{s_i}$, $P\in\mathcal{P}(\mathcal{G}'_+)$, утворюють (C_0) напівгрупи алгебраїчних автоморфізмів з генераторами $\mathscr{D}_i:=\Upsilon^{\mathcal{G}_+}\circ\mathbb{D}_i\circ(\Upsilon^{\mathcal{G}_+})^{-1}$, $i=1,\dots,d$.*

Однопараметричні сім'ї $\mathscr{T}_i'\colon 0\le s_i\longmapsto\mathscr{T}'_{s_i}$, $i=1,\dots,d$, лінійних операторів на алгебрі $\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_+)$, що визначені за правилом $\mathscr{T}'_{s_i}U:=U\circ T_{s_i}$, $U\in\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_+)$, утворюють (C_0) напівгрупи алгебраїчних автоморфізмів з генераторами $\mathscr{D}'_i:=\Psi^{\mathcal{G}_+}\circ\mathbb{D}'_i\circ(\Psi^{\mathcal{G}_+})^{-1}$, $i=1,\dots,d$.

У наступній теоремі та наслідку описано властивості введених вище операторів диференціювання.

Теорема 4.3.2. *Генератори* $\mathbb{D}'_i$, $\mathbb{D}_i$, $i = 1, \dots, d$, *є неперервними диференціюваннями на алгебрах* $\Gamma(\mathcal{G}'_+)$, $\Gamma(\mathcal{G}_+)$ *відповідно. Генератори* $\mathbb{D}'_i$, $\mathbb{D}_i$, $i = 1, \dots, d$, *задовольняють дуальне співвідношення* $\langle \mathbb{D}'_i \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p} \rangle = -\langle \boldsymbol{u}, \mathbb{D}_i \boldsymbol{p} \rangle$, $\boldsymbol{u} \in \Gamma(\mathcal{G}'_+)$, $\boldsymbol{p} \in \Gamma(\mathcal{G}_+)$.

Наслідок 4.3.2. *Оператори* $\mathscr{D}'_i$, $\mathscr{D}_i$, $i = 1, \dots, d$, *є неперервними диференціюваннями на алгебрах* $\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_+)$, $\mathcal{P}(\mathcal{G}'_+)$ *відповідно. Генератори* $\mathscr{D}'_i$, $\mathscr{D}_i$, $i = 1, \dots, d$, *задовольняють дуальне співвідношення* $\langle \mathscr{D}'_i U, P \rangle = -\langle U, \mathscr{D}_i P \rangle$, $U \in \mathcal{P}'(\mathcal{G}'_+)$, $P \in \mathcal{P}(\mathcal{G}'_+)$.

Крос-кореляцією ультрарозподілу $f \in \mathcal{G}'_+$ і ультрадиференційовної функції $\varphi \in \mathcal{G}_+$ назвемо функцію $(f \star \varphi)(s) := \langle f, T_s \varphi \rangle = \langle f(t), \varphi(t+s) \rangle$. Оператор крос-кореляції $K_f \colon \varphi \longmapsto f \star \varphi$ належить простору $\mathscr{L}(\mathcal{G}_+)$ для довільного ультрарозподілу $f \in \mathcal{G}'_+$

Для елементів тотальної підмножини простору $\Gamma(\mathcal{G}'_+)$ визначимо операцію $\big(f^{\otimes n}\big) \circledast \big(g^{\otimes n}\big) := \big((f * g)^{\otimes n}\big)$ і розширимо її на цілий простір за лінійністю та неперервністю. Легко бачити, що $\Gamma(\mathcal{G}'_+)$ є алгеброю відносно операції $\circledast$. Цю ж операцію введемо на просторі $\Gamma(\mathcal{G}_+)$, який також стає алгеброю відносно $\circledast$.

Для довільного оператора $K \in \mathscr{L}(\mathcal{G}_+)$ визначимо відповідний оператор $K^{\otimes} \in \mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{G}_+)\big)$ за правилом

$$K^{\otimes} := \big(K^{\otimes n}\big) : p = (p_n) \quad \longmapsto \quad K^{\otimes} p := \big(K^{\otimes n} p_n\big),$$

де $K^{\otimes 0} := I_{\mathbb{C}}$ — одиничний оператор, а кожен з операторів $K^{\otimes n} \in \mathscr{L}(\mathcal{G}_+^{\otimes n})$, $n \in \mathbb{N}$, визначений як лінійне та неперервне розширення відображення $\varphi^{\otimes n} \longmapsto (K\varphi)^{\otimes n}$, де $\varphi \in \mathcal{G}_+$.

Зокрема, коректно визначеними є оператори $K^{\otimes}_{\boldsymbol{u}} := \big(K^{\otimes n}_{u_n}\big) \in \mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{G}_+)\big)$ та $K^{\otimes n}_{u_n} \in \mathscr{L}(\mathcal{G}_+^{\otimes n})$, де $\boldsymbol{u} := (u_n) \in \Gamma(\mathcal{G}'_+)$ при $u_n \in \mathcal{G}_+^{\prime \otimes n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Введемо операцію, яка є розширенням крос-кореляції на простори поліноміальних ультрадиференційовних функцій та ультрарозподілів. Для довільних $\boldsymbol{u} = (u_n) \in \Gamma(\mathcal{G}'_+)$ та $\boldsymbol{p} = (p_n) \in \Gamma(\mathcal{G}_+)$ їх крос-кореляцією назвемо елемент $\boldsymbol{u} \star \boldsymbol{p} := K_{\boldsymbol{u}}^{\otimes} \boldsymbol{p} = \big(K_{u_n}^{\otimes n} p_n\big)$.

Використовуючи ізоморфізми $\Upsilon^{\mathcal{G}_+}$ і $\Psi^{\mathcal{G}_+}$ та їх обернені визначимо аналогічну операцію на поліноміальних просторах. А саме, для довільних $U \in \mathcal{P}'(\mathcal{G}'_+)$ та $P \in \mathcal{P}(\mathcal{G}'_+)$ їх крос-кореляцією назвемо елемент $U \star P := \Upsilon^{\mathcal{G}_+}(\boldsymbol{u} \star \boldsymbol{p})$, де $\boldsymbol{u} = (\Psi^{\mathcal{G}_+})^{-1} U \in \Gamma(\mathcal{G}'_+)$, $\boldsymbol{p} = (\Upsilon^{\mathcal{G}_+})^{-1} P \in \Gamma(\mathcal{G}_+)$.

Наступний результат є структурною теоремою про представлення алгебри $\big\{\Gamma(\mathcal{G}'_+), \circledast\big\}$ у вигляді комутанта поліноміального розширення напівгрупи зсувів.

Теорема 4.3.3. *Відображення*

$$\mathsf{K} : \Gamma(\mathcal{G}'_+) \ni \boldsymbol{u} \longmapsto K_{\boldsymbol{u}}^{\otimes} \in \mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{G}_+)\big)$$

здійснює алгебраїчний ізоморфізм з алгебри $\big\{\Gamma(\mathcal{G}'_+), \circledast\big\}$ *на комутант* $\big[T^{\otimes}\big]^c$ *напівгрупи* $T^{\otimes}$ *в алгебрі* $\big\{\mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{G}_+)\big), \circ\big\}$.

У четвертому параграфі поряд із класом $\mathcal{G}_+$ ультрадиференційовних функцій з компактними носіями в $\mathbb{R}^d_+$, розглянуто ширший клас $\mathcal{G}_\beta$ ультрадиференційовних функцій, заданих на всьому просторі $\mathbb{R}^d$.

Зафіксуємо довільне дійсне $\beta > 1$. Для додатного числа $h > 0$ і таких векторів $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_d)$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_d) \in \mathbb{R}^d$, що $\mu_i < \nu_i$, $i = 1, \ldots, d$, в просторі цілих функцій експоненціального типу введемо підпростір $E^h_\beta[\mu, \nu]$ функцій $\mathbb{C}^d \ni z \longmapsto \psi(z) \in \mathbb{C}$ зі скінченною нормою

$$\|\psi\|_{E^h_\beta[\mu,\nu]} := \sup_{k \in \mathbb{Z}^d_+} \sup_{z \in \mathbb{C}^d} \frac{|z^k \psi(z) e^{-H_{[\mu,\nu]}(\eta)}|}{h^{|k|} k^{k\beta}},$$

де $H_{[\mu,\nu]}$ — опорна функція множини $[\mu, \nu]$ (означення див. на стор. 196).

Твердження 4.4.1. *Кожен з просторів* $E^h_\beta[\mu, \nu]$ *є банаховим простором, а всі вкладення* $E^h_\beta[\mu, \nu] \hookrightarrow E^{h'}_\beta[\mu', \nu']$ *при* $[\mu, \nu] \subset [\mu', \nu']$, $h < h'$ *компактні.*

Введемо простір

$$E_\beta(\mathbb{C}^d) := \bigcup_{\mu \prec \nu,\, h > 0} E^h_\beta[\mu, \nu], \qquad E_\beta(\mathbb{C}^d) \simeq \liminf_{\mu \prec \nu,\, h > 0} E^h_\beta[\mu, \nu],$$

наділивши його топологією індуктивної границі відносно цих компактних вкладень.

Нехай $\mathcal{G}_\beta(\mathbb{R}^d)$ — простір ультрадиференційовних в сенсі Жевре функцій d змінних. Визначимо перетворення Фур'є-Лапласа

$$\widehat{\varphi}(z) := (F\varphi)(z) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(t,z)}\varphi(t)\,dt, \qquad \varphi \in \mathcal{G}_\beta(\mathbb{R}^d),\ z \in \mathbb{C}^d.$$

У наступній теоремі описано образ при перетворенні Фур'є-Лапласа основного простору $\mathcal{G}_\beta(\mathbb{R}^d)$ у вигляді класу цілих функцій експоненціального типу $E_\beta(\mathbb{C}^d)$. Аналогічний результат встановлений і для спряжених просторів.

Теорема 4.4.1. *Справджуються наступні топологічні ізоморфізми*

$$F(\mathcal{G}_\beta(\mathbb{R}^d)) \simeq E_\beta(\mathbb{C}^d) \ \text{ та } \ F'^{-1}(\mathcal{G}'_\beta(\mathbb{R}^d)) \simeq E'_\beta(\mathbb{C}^d).$$

Для спрощення записів введемо позначення $\mathcal{G}_\beta := \mathcal{G}_\beta(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{G}'_\beta := \mathcal{G}'_\beta(\mathbb{R}^d)$, $E_\beta := E_\beta(\mathbb{C}^d)$, $E'_\beta := E'_\beta(\mathbb{C}^d)$.

Для елементів тотальних підмножин просторів $\mathcal{G}_\beta^{\widehat{\otimes}n}$ і $\mathcal{G}'^{\widehat{\otimes}n}_\beta$ визначимо оператори $\mathcal{F}^{\otimes n}$ і $\mathcal{F}'^{\otimes n}$ такими співвідношеннями $\mathcal{F}^{\otimes n} : \varphi^{\otimes n} \longmapsto \widehat{\varphi}^{\otimes n}$, $\mathcal{F}'^{\otimes n} : f^{\otimes n} \longmapsto \widehat{f}^{\otimes n}$, $\mathcal{F}^{\otimes 0} = \mathcal{F}'^{\otimes 0} := I_\mathbb{C}$, де $\widehat{\varphi}^{\otimes n} := (F\varphi)^{\otimes n}$, $\widehat{f}^{\otimes n} := \left(F'^{-1}f\right)^{\otimes n}$, $\varphi \in \mathcal{G}_\beta$, $f \in \mathcal{G}'_\beta$. Далі розширимо ці відображення на весь відповідний простір $\mathcal{G}_\beta^{\widehat{\otimes}n}$ і $\mathcal{G}'^{\widehat{\otimes}n}_\beta$ за лінійністю та неперервністю, в результаті отримаємо $\mathcal{F}^{\otimes n} \in \mathscr{L}\big(\mathcal{G}_\beta^{\widehat{\otimes}n}, E_\beta^{\widehat{\otimes}n}\big)$ і $\mathcal{F}'^{\otimes n} \in \mathscr{L}\big(\mathcal{G}'^{\widehat{\otimes}n}_\beta, E'^{\widehat{\otimes}n}_\beta\big)$. Нарешті перетворення $\mathcal{F}^{\otimes}$ і $\mathcal{F}'^{\otimes}$ визначимо відповідно як відображення

$$\mathcal{F}^{\otimes} := \big(\mathcal{F}^{\otimes n}\big) : \Gamma(\mathcal{G}_\beta) \ni \boldsymbol{p} = \big(p_n\big) \quad \longmapsto \quad \widehat{\boldsymbol{p}} := \big(\widehat{p}_n\big) \in \Gamma(E_\beta),$$

$$\mathcal{F}'^{\otimes} := \big(\mathcal{F}'^{\otimes n}\big) : \Gamma(\mathcal{G}'_\beta) \ni \boldsymbol{u} = \big(u_n\big) \quad \longmapsto \quad \widehat{\boldsymbol{u}} := \big(\widehat{u}_n\big) \in \Gamma(E'_\beta),$$

де $p_n \in \mathcal{G}_\beta^{\widehat{\otimes}n}$, $\widehat{p}_n := \mathcal{F}^{\otimes n}p_n \in E_\beta^{\widehat{\otimes}n}$, $u_n \in \mathcal{G}'^{\widehat{\otimes}n}_\beta$, $\widehat{u}_n := \mathcal{F}'^{\otimes n}u_n \in E'^{\widehat{\otimes}n}_\beta$.

На просторах $\mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta)$ і $\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_\beta)$ оператори $\mathcal{F}^{\otimes}_{\mathcal{P}} \in \mathscr{L}\big(\mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta), \mathcal{P}(E'_\beta)\big)$ і $\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}} \in \mathscr{L}\big(\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_\beta), \mathcal{P}'(E'_\beta)\big)$ задамо формулами $\mathcal{F}^{\otimes}_{\mathcal{P}} := \Upsilon^{E_\beta} \circ \mathcal{F}^{\otimes} \circ \big(\Upsilon^{\mathcal{G}_\beta}\big)^{-1}$ і $\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}} := \Psi^{E'_\beta} \circ \mathcal{F}'^{\otimes} \circ \big(\Psi^{\mathcal{G}'_\beta}\big)^{-1}$ відповідно. Їх назвемо перетворенням Фур'є-Лапласа поліноміальних ультрадиференційовних функцій та поліноміальних ультрарозподілів відповідно.

Наступні дві теореми є аналогом теореми Пелі-Вінера.

Теорема 4.4.2. *Перетворення Фур'є-Лапласа* $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}^{\otimes}$ *діє як топологічний ізоморфізм з алгебри* $\mathcal{P}(\mathcal{G}'_{\beta})$ *на алгебру* $\mathcal{P}(E'_{\beta})$.

Теорема 4.4.3. *Перетворення Фур'є-Лапласа* $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}^{\prime\otimes}$ *діє як топологічний ізоморфізм з алгебри* $\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_{\beta})$ *на алгебру* $\mathcal{P}'(E'_{\beta})$.

За допомогою поліноміального узагальнення перетворення Лапласа у пункті 4.4.3 показано метод "перенесення" операцій з просторів $\Gamma(\mathcal{G}'_{+})$ та $\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_{+})$ на відповідні образи $\Gamma(E'_{+})$ та $\mathcal{P}'(E'_{+})$. Зокрема, це зроблено для операторів диференціювання, напівгруп зсувів та операції крос-кореляції.

У п'ятому розділі побудовано функціональне числення типу Хілле-Філліпса та його узагальнення для операторів, заданих на деякому банаховому просторі, класом символів такого числення є різні аналітичні в трубчастих областях функції скінченної чи нескінченної кількості змінних.

У першому параграфі описано підхід, що узагальнює класичне числення Хілле-Філліпса в тому сенсі, що замість алгебри мір на $\mathbb{R}_{+}$, яка розглянута в класичному випадку, використано згорткову алгебру Шварца $\mathcal{S}'_{+}$ узагальнених функцій повільного росту з носіями в конусі $\mathbb{R}^{d}_{+}$. Побудоване числення задане для генераторів $A = (A_1, \ldots, A_d)$ багатопараметричних рівномірно обмежених (C_0) напівгруп операторів, що діють в деякому банаховому просторі.

Кожний елемент $x \in E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{S}_{+}$ можна представити (не єдиним чином) у вигляді суми абсолютно збіжного ряду $x = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j x_j \otimes \varphi_j$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $x_j \in E$, $\varphi_j \in \mathcal{S}_{+}$, де $\sum_j |\lambda_j| < \infty$, а послідовності $\{x_j\}$ і $\{\varphi_j\}$ збігаються до нуля у відповідних просторах.

Для довільного $s \in \mathbb{R}^{d}_{+}$ розглянемо оператор зсуву T_s, який визначений на просторі $\mathcal{S}_{+}$ формулою $T_s : \varphi(t) \longmapsto \varphi(t+s)|_{\mathbb{R}^{d}_{+}}$ для всіх $\varphi \in \mathcal{S}_{+}$. Крос-кореляцією розподілу $f \in \mathcal{S}'_{+}$ і функції $\varphi \in \mathcal{S}_{+}$ назвемо функцію вигляду $(f \star \varphi)(t) := \langle f(s), T_s\varphi(t)\rangle = \langle f(s), \varphi(t+s)\rangle$, $t \in \mathbb{R}^{d}_{+}$. Кожному розподілу

f поставимо у відповідність оператор крос-кореляції $K_f\colon \varphi \longmapsto f\star\varphi$.

Нехай $\mathcal{S}_+(E)$ — простір нескінченно диференційовних E-значних швидко спадних функцій на $\mathbb{R}^d_+$. З ядерності простору $\mathcal{S}_+$ випливає топологічний ізоморфізм $\mathcal{S}_+(E)\simeq E\otimes_{\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+$, де $\otimes_{\mathfrak{p}}$ позначає поповнення тензорного добутку в локально опуклій проективній тензорній топології.

Нехай I — одиничний оператор в банаховому просторі E. Для довільного оператора $K\in\mathscr{L}(\mathcal{S}_+)$ рівність $(I\otimes K)x := \sum_{j\in\mathbb{N}}\lambda_j x_j\otimes K\varphi_j$, де елемент $x\in\mathcal{S}_+(E)$ представлений вигляді абсолютно збіжного ряду, однозначно визначає оператор $I\otimes K\in\mathscr{L}(\mathcal{S}_+(E))$. Тому коректно визначеними є наступні оператори

$$(I\otimes T_s)x := \sum_{j\in\mathbb{N}}\lambda_j x_j\otimes T_s\varphi_j \qquad \text{та} \qquad (I\otimes K_f)x := \sum_{j\in\mathbb{N}}\lambda_j x_j\otimes K_f\varphi_j,$$

де $s\in\mathbb{R}^d_+$, $x\in\mathcal{S}_+(E)$ і $f\in\mathcal{S}'_+$.

Узагальненою крос-кореляцією розподілу $f\in\mathcal{S}'_+$ і елемента $x\in\mathcal{S}_+(E)$ назвемо векторнозначну функцію з простору $\mathcal{S}_+(E)$ вигляду

$$(f\star x)(t) := \langle f(s),(I\otimes T_s)x(t)\rangle = \langle f(s),x(t+s)\rangle, \qquad s\in\mathbb{R}^d_+.$$

Відповідний оператор узагальненої крос-кореляції має вигляд

$$I\otimes K_f\colon \mathcal{S}_+(E)\ni x\longmapsto (I\otimes K_f)x =: f\star x\in\mathcal{S}_+(E).$$

Теорема 5.1.2. *Відображення $\mathcal{K}:\mathcal{S}'_+\ni f\longmapsto K_f\in\mathscr{L}(\mathcal{S}_+)$ здійснює ізоморфізм зі згорткової алгебри $\mathcal{S}'_+$ на комутант $[T]^c\subset\mathscr{L}(\mathcal{S}_+)$ напівгрупи зсувів T, при цьому K_δ — одиничний оператор і $K_{f*g}=K_f\circ K_g$ для всіх $f,g\in\mathcal{S}'_+$.*

Розглянемо сильно неперервну напівгрупу узагальнених зсувів $I\otimes T=\left\{I\otimes T_s\colon s\in\mathbb{R}^d_+\right\}$, визначену на просторі $\mathcal{S}_+(E)$.

Кажуть, що оператор $I\otimes K$, де $K\in\mathscr{L}(\mathcal{S}_+)$, є інваріантним відносно напівгрупи узагальнених зсувів $I\otimes T$, якщо $I\otimes(K\circ T_s)=I\otimes(T_s\circ K)$ для всіх $s\in\mathbb{R}^d_+$.

Теорема 5.1.3. *Для довільного розподілу* $f \in \mathcal{S}'_+$ *оператор* $I \otimes K_f$ *інваріантний відносно напівгрупи узагальнених зсувів* $I \otimes T$. *Навпаки, для довільного оператора* $K \in \mathscr{L}(\mathcal{S}_+)$ *такого, що* $I \otimes K$ *інваріантний відносно* $I \otimes T$, *знайдеться така єдина узагальнена функція* $f \in \mathcal{S}'_+$, *що* $K = K_f$ *і* $I \otimes K = I \otimes K_f$.

Нехай $\mathbb{C}^d_+ = \{z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}^d \colon x \in \operatorname{\mathsf{int}} \mathbb{R}^d_+\}$ — трубчаста область в $\mathbb{C}^d$. Узагальнене перетворення Фур'є $F' \colon f \longmapsto F'[f]$ ізоморфно відображає $\mathcal{S}'$ на себе [7]. Зокрема, F' визначено на $\mathcal{S}'_+$ і його образ $F'[\mathcal{S}'_+]$ — замкнутий підпростір в $\mathcal{S}'$.

Узагальнене перетворення Лапласа $\widehat{f}$ розподілу $f \in \mathcal{S}'_+$, яке визначають за формулою $\widehat{f}(z) := \langle f(t), e^{-tz} \rangle$, $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}^d_+$, є комплексною аналітичною функцією в трубчастій області $\mathbb{C}^d_+$. Для довільної функції $f \in \mathcal{S}'_+$ справедливе представлення $\widehat{f}(z) = F'\big[f(t)e^{-tx}\big](y)$. Кожна аналітична функція $\widehat{f}$ збігається до $F'[f]$ при $x \to 0$ в топології простору $\mathcal{S}'$. Відомо, що $\widehat{f * g}(z) = \widehat{f}(z) \cdot \widehat{g}(z)$ для всіх $z \in \mathbb{C}^d_+$, тому образ $\widehat{\mathcal{S}'_+}$ простору $\mathcal{S}'_+$ при відображенні $L \colon \mathcal{S}'_+ \ni f \longmapsto \widehat{f} \in \widehat{\mathcal{S}'_+}$ є мультиплікативною алгеброю аналітичних функцій на $\mathbb{C}^d_+$.

Звідси випливає, що перетворення Лапласа $\widehat{\varphi} = L[\varphi]$ функцій з простору $\mathcal{S}_+ \subset \mathcal{S}'_+$ можна визначити за формулою $\widehat{\varphi}(z) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d_+} e^{-tz}\varphi(t)\,dt$ для всіх $z \in \mathbb{C}^d_+$. Розглянемо відповідне відображення $L \colon \varphi \longmapsto L[\varphi]$ з $\mathcal{S}_+$ на образ $\widehat{\mathcal{S}_+} := L[\mathcal{S}_+]$, який наділимо індукованою топологією відносно відображення $L \colon \mathcal{S}_+ \longrightarrow \widehat{\mathcal{S}_+}$. Тоді L — ізоморфізм зі згорткової алгебри $\mathcal{S}_+$ на мультиплікативну підалгебру $\widehat{\mathcal{S}_+} \subset \widehat{\mathcal{S}'_+}$ аналітичних функцій. Використовуючи відображення L і його обернене L^{-1}, для кожного розподілу $f \in \mathcal{S}'_+$ визначимо оператор $\widehat{K}_f$ і напівгрупу $\widehat{T}$ за формулами

$$\widehat{K}_f := L \circ K_f \circ L^{-1} \in \mathscr{L}(\widehat{\mathcal{S}_+}), \qquad \widehat{T} \colon \mathbb{R}^d_+ \ni s \longmapsto \widehat{T}_s := L \circ T_s \circ L^{-1} \in \mathscr{L}(\widehat{\mathcal{S}_+}).$$

Наслідок 5.1.1. *Відображення* $\widehat{\mathcal{K}} : \widehat{\mathcal{S}'_+} \ni \widehat{f} \longmapsto \widehat{K}_f \in \mathscr{L}(\widehat{\mathcal{S}_+})$ *здійснює ізоморфізм з алгебри* $\widehat{\mathcal{S}'_+}$ *на комутант* $[\widehat{T}]^c$ *в алгебрі* $\mathscr{L}(\widehat{\mathcal{S}_+})$. *Зокрема,*

$\widehat{\mathcal{K}}[\widehat{f} \cdot \widehat{g}] = \widehat{K}_{f*g} = \widehat{K}_f \circ \widehat{K}_g$ *для всіх* $f, g \in \mathcal{S}'_+$ *і* $\widehat{\mathcal{K}}[\widehat{\delta}] = \widehat{K}_\delta$ *— одиничний оператор в* $\mathscr{L}(\widehat{\mathcal{S}_+})$.

Нехай в комплексному банаховому просторі E визначено сімейство рівномірно обмежених d-параметричних (C_0) напівгруп $\{e^{tA}\}_{t\in\mathbb{R}^d_+}$. Клас генераторів таких напівгруп позначимо символом $\mathfrak{A}$.

Нехай $\mathcal{S}_+(E)$ — простір нескінченно диференційовних E-значних швидко спадних функцій на $\mathbb{R}^d_+$. З ядерності простору $\mathcal{S}_+$ випливають топологічні ізоморфізми $\mathcal{S}_+(E) \simeq E \otimes_{\mathfrak{e}} \mathcal{S}_+ \simeq E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{S}_+$.

Розглянемо лінійне відображення

$$\mathcal{L}\colon \mathcal{S}_+(E) \ni x \longmapsto \widetilde{x} \in \widetilde{\mathcal{S}}, \qquad \text{де} \qquad \widetilde{x}(A) = \int_{\mathbb{R}^d_+} e^{tA} x(t)\, dt, \quad A \in \mathfrak{A}.$$

Елементами простору $\widetilde{\mathcal{S}}$ є функції вигляду $\widetilde{x} : \mathfrak{A} \ni A \longmapsto \widetilde{x}(A) \in E$. На $\widetilde{\mathcal{S}}$ введемо топологію проективної границі, що детально описана у пункті 5.1.3. Для кожної функції з простору $\widetilde{\mathcal{S}}$ її значення на операторі $A \in \mathfrak{A}$ можна записати у вигляді

$$\widetilde{x}(A) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j \int_{\mathbb{R}^d_+} e^{tA} x_j \varphi_j(t)\, dt = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j \widehat{\varphi}_j(A) x_j,$$

де справа стоїть збіжний в просторі E ряд.

Для кожного $A \in \mathfrak{A}$ введемо в E підпростір $\widetilde{\mathcal{S}}(A) := \{\widetilde{x}(A) : \widetilde{x} \in \widetilde{\mathcal{S}}\}$.

Визначимо d-параметричну (C_0) напівгрупу на $\widetilde{\mathcal{S}}$ за правилом

$$\widehat{I \otimes T}\colon \mathbb{R}^d_+ \ni s \longmapsto \widehat{I \otimes T_s} \in \mathscr{L}(\widetilde{\mathcal{S}}), \qquad (\widehat{I \otimes T_s})\widetilde{x}(A) = \int_{\mathbb{R}^d_+} e^{tA} (I \otimes T_s) x(t)\, dt.$$

Наступний результат гарантує щільність в банаховому просторі області визначення функціонального числення

Лема 5.1.2. *Образ відображення* $\widehat{I \otimes T_s} : \widetilde{\mathcal{S}} \ni \widetilde{x} \longmapsto \widehat{I \otimes T_s}\widetilde{x}(A) \in E$ *щільний в* E *для кожного* $s \in \mathbb{R}^d_+$ *і кожного* $A \in \mathfrak{A}$. *Як наслідок, підпростір* $\widetilde{\mathcal{S}}(A)$ *щільний в* E *для кожного* $A \in \mathfrak{A}$.

Користуючись сюр'єктивністю перетворення $L\colon \mathcal{S}'_+ \ni f \longmapsto \widehat{f} \in \widehat{\mathcal{S}'_+}$, задамо відображення $\Phi\colon \widehat{\mathcal{S}'_+} \ni \widehat{f} \longmapsto \widetilde{f} \in \mathscr{L}(\widetilde{\mathcal{S}})$, де

$$(\widetilde{f}\widetilde{x})(A) := \widetilde{f}(A)\widetilde{x}(A) = \int_{\mathbb{R}^d_+} e^{tA}(f \star x)(t)\,dt, \qquad A \in \mathfrak{A}.$$

Зауважимо, що $\widetilde{f}(A)$ для кожного фіксованого $A \in \mathfrak{A}$ діє як оператор $\widetilde{f}(A) : E \ni \widetilde{x}(A) \longmapsto (\widetilde{f}\widetilde{x})(A) \in E$, де $\widetilde{f}\widetilde{x} = \mathcal{L}\big((I \otimes K_f)x\big)$.

Наступна теорема є обґрунтуванням того, що відображення Φ можна трактувати як функціональне числення для генераторів рівномірно обмежених (C_0) напівгруп в класі $\widehat{\mathcal{S}'_+}$ аналітичних функцій d комплексних змінних.

Теорема 5.1.4. *Відображення Φ здійснює топологічний ізоморфізм з $\widehat{\mathcal{S}'_+}$ на комутативну підалгебру в $\mathscr{L}(\widetilde{\mathcal{S}})$ всіх операторів $\widehat{I \otimes K} \in \mathscr{L}(\widetilde{\mathcal{S}})$ вигляду*

$$\widehat{I \otimes K}\widetilde{x}(A) = \int_{\mathbb{R}^d_+} e^{tA}(I \otimes K)x(t)\,dt, \qquad K \in [T]^c.$$

При цьому, оператори $\widetilde{f}(A)$ володіють властивостями:

$$\widetilde{f * g}(A) = \widetilde{f}(A) \circ \widetilde{g}(A), \qquad \widetilde{\delta}(A) = I, \qquad \widetilde{\partial^k f}(A)\widetilde{x}(A) = (-1)^{|k|}\widetilde{f}(A)\widetilde{\partial^k x}(A)$$

для всіх $f, g \in \mathcal{S}'_+$, $k \in \mathbb{Z}^d_+$.

Нехай $\{G(t)\colon t \in \mathbb{R}^d_+\}$ — d-параметрична обмежена аналітична напівгрупа на комплексному банаховому просторі $(E, \|\cdot\|)$ з генератором $A = (A_1, \ldots, A_d)$. Припустимо, що всі генератори A_j, $j = 1, \ldots, d$, марґінальних аналітичних напівгруп ін'єктивні та мають щільні області визначення та образи. З [123, Твердження 2.3.13] випливає, що у цьому випадку для всіх мультиіндексів $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}^d_+$ коректно визначеними є степені операторів з відповідними щільними областями визначення

$$A^{\alpha} := A_1^{\alpha_1} \circ \ldots \circ A_d^{\alpha_d}, \qquad \mathfrak{D}(A^{\alpha}) := \bigcap_{j=1}^{d} \mathfrak{D}(A_j^{\alpha_j}),$$

$$A^{-\alpha} := A_1^{-\alpha_1} \circ \ldots \circ A_d^{-\alpha_d}, \qquad \mathfrak{D}(A^{-\alpha}) := \bigcap_{j=1}^{d} \mathfrak{D}(A_j^{-\alpha_j}).$$

Введемо позначення

$$\mathfrak{D}(A^\infty) = \bigcap_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d} \mathfrak{D}(A^\alpha).$$

Теорема 5.1.5. *Для довільного оператора* $A \in \mathfrak{A}$ *виконується вкладення* $\widetilde{S}(A) \subset \mathfrak{D}(A^\infty)$. *Крім того,*

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(A)\widetilde{\partial_j^{k_j}x}(A) &= (-1)^{k_j}A_j^{k_j}\widetilde{f}(A)\widetilde{x}(A)\\ &\quad - \sum_{l=0}^{k_j-1}(-A_j)^{k_j-l-1}\lim_{t_j\to+0}\int_{\mathbb{R}_+^{d-1}} e^{tA}\partial_j^l(f\star x)(t)\,\check{d}_jt\end{aligned}$$

для довільного $k_j \in \mathbb{Z}_+$, *де позначено* $\check{d}_jt := dt_1\ldots dt_{j-1}\,dt_{j+1}\ldots dt_d$ *для всіх* $j = 1,\ldots,d$.

У другому параграфі побудовано числення для генераторів багатопараметричних аналітичних напівгруп операторів, що діють в банаховому просторі. Алгебра символів такого числення складається з аналітичних в деякій трубчастій області функцій, які є перетвореннями Лапласа розподілів Шварца повільного росту з носіями в додатному конусі.

Нехай $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(A)\cap\mathfrak{D}(A^{-1})$ позначає щільний підпростір, наділений нормою $\|x\|_{\mathfrak{D}} := \|x\| + \sum_{j=1}^d \|A_jx\| + \sum_{j=1}^d \|A_j^{-1}x\|$. При наших припущеннях — це банаховий простір. Крім того, кожен простір $\mathfrak{D}^\alpha = \mathfrak{D}(A^\alpha)\cap\mathfrak{D}(A^{-\alpha})$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$, наділений нормою $\|x\|_{\mathfrak{D}^\alpha} = \sum_{-\alpha\preccurlyeq\mu\preccurlyeq\alpha}\|A^\mu x\|_{\mathfrak{D}}$ є повним.

Визначимо простір $\mathfrak{U} := \bigcap\left\{\mathfrak{D}^\alpha\colon \alpha \in \mathbb{Z}_+^d\right\}$ і наділимо його топологією проективної границі відносно включень $\mathfrak{D}^\alpha \hookrightarrow \mathfrak{D}^\mu$ для всіх таких $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_d)$, $\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_d)$, що $\mu_i \le \alpha_i$, $i = 1,\ldots,d$. Зауважимо, що при цьому $\mathfrak{U}$ стає простором Фреше.

Лема 5.2.3. *Нехай* $\{e^{-tA} : t \in \mathbb{R}_+^d\}$ *— обмежена аналітична напівгрупа над комплексним банаховим простором* E. *Підпростір* $\mathfrak{U}$ *є інваріантним відносно дії операторів* e^{-tA} *для довільного* $t \in \mathbb{R}_+^d$, *крім того він щільний в* E.

Лінійні оператори $\widehat{f}(A)$ з наступної теореми визначені на банаховому просторі як необмежені оператори із щільною областю визначення $\mathfrak{U}$, що складається з нескінченно гладких векторів і визначається цілими степенями генераторів напівгрупи.

Користуючись сюр'єктивністю перетворення $L\colon \mathcal{S}'_+ \ni f \longmapsto \widehat{f} \in \widehat{\mathcal{S}'_+}$, задамо відображення

$$\varPhi\colon \widehat{\mathcal{S}'_+} \ni \widehat{f} \longmapsto \widehat{f}(A) \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}, E), \quad \text{де} \quad \widehat{f}(A)x = \bigl\langle f(t), e^{-tA}x \bigr\rangle, \quad x \in \mathfrak{U}.$$

Теорема 5.2.1. *Відображення* $\varPhi$ *здійснює неперервний гомоморфізм з мультиплікативної алгебри аналітичних функцій* $\widehat{\mathcal{S}'_+}$ *в комутант напівгрупи* $\{e^{-tA} : t \in \mathbb{R}^d_+\}$. *Оператори з образу* $\varPhi\bigl[\widehat{\mathcal{S}'_+}\bigr]$ *задовольняють рівність* $\widehat{f * g}(A) = \widehat{f}(A) \circ \widehat{g}(A)$, $f, g \in \mathcal{S}'_+$, *і* $\widehat{\delta}_0(A) = I$ *— одиничний оператор.*

Гомоморфізм Φ з попередньої теореми ми розуміємо як функціональне числення в алгебрі $\widehat{\mathcal{S}'_+}$ аналітичних на $\mathbb{C}^d_+$ функцій.

Встановимо деякі диференціальні властивості операторів $\widehat{f}(A)$, що характерні для скалярного перетворення Лапласа.

Символом $\mathfrak{U} \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{S}_+$ позначимо підпростір в $E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{S}_+ \simeq \mathcal{S}_+(E)$ всіх функцій вигляду $x\colon \mathbb{R}^d_+ \ni t \longmapsto x(t) \in \mathfrak{U}$. Визначимо в банаховому просторі E підпростір $\widehat{\mathfrak{U}}$ наступним чином

$$\widehat{\mathfrak{U}} := \bigl\{\widehat{x}_A \in E\colon x \in \mathfrak{U} \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{S}_+\bigr\}, \qquad \text{де} \qquad \widehat{x}_A := \int_{\mathbb{R}^d_+} e^{-tA} x(t)\, dt.$$

Лема 5.2.4. *Підпростір* $\widehat{\mathfrak{U}} \subset \mathfrak{U}$ *щільний в* E.

Теорема 5.2.2. *Для всіх* $\alpha \in \mathbb{Z}^d_+$ *справджується рівність*

$$\widehat{\partial^\alpha f}(A)x = A^\alpha \widehat{f}(A)x, \qquad x \in \mathfrak{U}.$$

Теорема 5.2.3. *Для довільного* $\alpha \in \mathbb{N}$ *і всіх* $j = 1, \ldots, d$ *справджуються рівності*

$$\widehat{f}(A)\widehat{\partial^\alpha_j x}_A = A^\alpha_j \widehat{f}(A)\widehat{x}_A - \sum_{r=0}^{\alpha-1} A_j^{\alpha-r-1} \widehat{f}(A)\widetilde{\partial^r_j \varLambda x}_{A_j}(0), \qquad \widehat{x}_A \in \widehat{\mathfrak{U}}.$$

У третьому параграфі побудовано нескінченновимірний варіант розглянутих вище числень операторів. А саме, побудовано функціональне числення типу Хілле-Філліпса для зліченного набору генераторів (C_0) напівгруп стиску, що діють в деякому банаховому просторі.

Нехай E — комплексний банахів простір. Символом $\mathfrak{A}$ позначимо множину, елементами якої є зліченні набори $\mathbf{A} := (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n, \ldots)$ операторів, що діють в E. Для нас буде зручно переписати набір $\mathbf{A}$ в іншому вигляді. Позначимо $A_n := (\mathbf{A}_{\mathfrak{b}_n}, \ldots, \mathbf{A}_{\mathfrak{e}_n})$, де $\mathfrak{b}_n := \frac{n(n-1)}{2} + 1$, $\mathfrak{e}_n := \frac{n(n+1)}{2}$. Тоді цю зліченну систему операторів можна записати у вигляді $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots)$ або скорочено $\mathbf{A} = \big(A_n\big)$.

Нехай A_n є генератором n-параметричної (C_0) напівгрупи $\mathbb{R}_+^n \ni t \longmapsto e^{-\mathrm{i}t\cdot A_n} \in \mathscr{L}(E)$, що задовольняє умову $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+^n} \|e^{-\mathrm{i}t\cdot A_n}\|_{\mathscr{L}(E)} \leq 1$, де для довільного $t \in \mathbb{R}_+^n$ позначено $t \cdot A_n := t_1\mathbf{A}_{\mathfrak{b}_n} + \cdots + t_n\mathbf{A}_{\mathfrak{e}_n}$.

Припустимо, що оператори групи $A_n = (\mathbf{A}_{\mathfrak{b}_n}, \ldots, \mathbf{A}_{\mathfrak{e}_n})$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ комутують один з одним. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ нехай $\mathfrak{A}_n$ — множина, елементами якої є набори з n генераторів однопараметричних (C_0) напівгруп стиску.

Визначимо відображення $\mathcal{L} := (\mathcal{L}_n) \colon \Gamma(\mathcal{S}_+) \ni \boldsymbol{p} = \big(p_n\big) \longmapsto \widetilde{\boldsymbol{p}} := \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \widetilde{p}_n \in \widetilde{\mathcal{S}}$, де $\widetilde{\mathcal{S}} := \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \widetilde{\mathcal{S}}_n$. Зауважимо, що для кожного $n \in \mathbb{Z}_+$ множина $\widetilde{\mathcal{S}}_n$ визначена як простір функцій

$$\widetilde{p}_n : \mathfrak{A}_n \ni A_n \longmapsto \widetilde{p}_n(A_n) := \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-\mathrm{i}t\cdot A_n} p_n(t)\, dt \in \mathscr{L}(E)$$

для $n \in \mathbb{N}$, а $\widetilde{p}_0 := p_0 I_E \in \mathscr{L}(E)$.

Визначимо однопараметричну напівгрупу $\widetilde{T}^{\otimes} : \mathbb{R}_+ \ni s \longmapsto \widetilde{T}_s^{\otimes} \in \mathscr{L}\big(\widetilde{\mathcal{S}}\big)$ на просторі $\widetilde{\mathcal{S}}$ за правилом

$$\widetilde{T}_s^{\otimes} := \big(\widetilde{T}_s^{\otimes n}\big) : \widetilde{\boldsymbol{p}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \widetilde{p}_n \quad \longmapsto \quad \widetilde{T}_s^{\otimes} \widetilde{\boldsymbol{p}} := \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \widetilde{T}_s^{\otimes n} \widetilde{p}_n.$$

При цьому функцію $\widetilde{T}_s^{\otimes n}\widetilde{p}_n \in \widetilde{\mathcal{S}}_n$ ми визначаємо наступним чином

$$\widetilde{T}_s^{\otimes n}\widetilde{p}_n \colon A_n \longmapsto \widetilde{T}_s^{\otimes n}\widetilde{p}_n(A_n) := \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-\mathrm{i}t\cdot A_n} p_n(t+s)\,dt,$$

де для простоти позначено $p_n(t+s) := p_n(t_1+s,\dots,t_n+s)$.

Використовуючи властивості інтеграла Бохнера, можна довести, що для довільного елемента $\boldsymbol{p} = \big(p_n\big) \in \Gamma(\mathcal{S}_+)$ при $p_n = \varphi^{\otimes n} \in \mathcal{S}_+^{\widehat{\otimes} n}$, $\varphi \in \mathcal{S}_+$, справджується рівність $\widetilde{T_s^{\otimes}\boldsymbol{p}}(\mathbf{A}) = \widetilde{T}_s^{\otimes}\widetilde{\boldsymbol{p}}(\mathbf{A})$ для всіх $s \in \mathbb{R}_+$ і $\mathbf{A} := \big(A_n\big) \in \mathfrak{A}$. Звідси випливає, що оператор $\widetilde{T}_s^{\otimes}$ можна представити у вигляді $\widetilde{T}_s^{\otimes} = \mathcal{L} \circ T_s^{\otimes} \circ \mathcal{L}^{-1}$.

Визначимо операцію $\big(f^{\otimes n}\big) \circledast \big(g^{\otimes n}\big) := \big((f * g)^{\otimes n}\big)$ для елементів тотальної підмножини простору $\Gamma(\mathcal{S}_+')$ і розширимо її на весь простір за лінійністю та неперервністю. Очевидно, що $\Gamma(\mathcal{S}_+')$ є алгеброю відносно $\circledast$. Оскільки простір $\Gamma(\mathcal{S}_+)$ неперервно і щільно вкладений в $\Gamma(\mathcal{S}_+')$, а простір $\mathcal{S}_+$ є згортковою алгеброю, то простір $\Gamma(\mathcal{S}_+)$ теж є алгеброю відносно $\circledast$.

Відображення $\mathcal{L} \colon \Gamma(\mathcal{S}_+) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{S}}$ є гомоморфізмом з алгебри $\big\{\Gamma(\mathcal{S}_+), \circledast\big\}$ в алгебру операторнозначних функцій, заданих на $\mathfrak{A}$. З іншого боку, відображення $\mathcal{F}^{\otimes} : \Gamma(\mathcal{S}_+) \longrightarrow \Gamma(\widehat{\mathcal{S}}_+)$ також є гомоморфізмом. Тому відображення $\mathcal{L} \circ (\mathcal{F}^{\otimes})^{-1} \colon \Gamma(\widehat{\mathcal{S}}_+) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{S}}$ можна розуміти як "елементарне" функціональне числення. Іншими словами, оператор $\widetilde{\boldsymbol{p}}(\mathbf{A}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \widetilde{p}_n(A_n) \in \mathscr{L}(E)$ ми розуміємо як "значення" функції

$$\widehat{\boldsymbol{p}} : (\xi_1,\dots,\xi_n,\dots) \longmapsto \big(\widehat{p}_0, \widehat{p}_1(\xi_1), \widehat{p}_2(\xi_2,\xi_3), \dots, \widehat{p}_n(\xi_{\mathfrak{b}_n},\dots,\xi_{\mathfrak{e}_n}), \dots\big)$$

на зліченному наборі $\mathbf{A} := (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n, \dots) \in \mathfrak{A}$ генераторів однопараметричних (C_0) напівгруп стиску.

Визначимо відображення

$$\varPhi := \big(\varPhi_n\big) : \Gamma(\mathcal{S}_+') \ni \boldsymbol{u} = \big(u_n\big) \quad \longmapsto \quad \varPhi_{\boldsymbol{u}} := \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \varPhi_{u_n} \in \mathscr{L}\big(\widetilde{\mathcal{S}}\big),$$

де $u_n := f^{\otimes n} \in \mathcal{S}_+^{\prime\hat{\otimes} n}$, $f \in \mathcal{S}'_+$. При цьому функція $\varPhi_{u_n} \in \mathscr{L}\big(\tilde{\mathcal{S}}_n\big)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, визначена формулами

$$\varPhi_{u_n} : \widetilde{p}_n \longmapsto \varPhi_{u_n}\widetilde{p}_n, \quad \text{де} \quad (\varPhi_{u_n}\widetilde{p}_n)(A_n) := \int_{\mathbb{R}^n_+} e^{-\mathrm{i}t\cdot A_n} K_f^{\otimes n} p_n(t)\, dt, \qquad n \in \mathbb{N},$$

а $\varPhi_{u_0}$ — тотожний оператор.

Теорема 5.3.2. *Відображення $\varPhi$ є алгебраїчним ізоморфізмом з алгебри $\big\{\Gamma(\mathcal{S}'_+), \circledast\big\}$ в підалгебру комутанта $\big[\widetilde{T}^{\otimes}\big]^c$ операторів вигляду $\widetilde{K}^{\otimes} = \mathcal{L} \circ K^{\otimes} \circ \mathcal{L}^{-1} \in \mathscr{L}\big(\tilde{\mathcal{S}}\big)$, де $K \in \mathscr{L}(\mathcal{S}_+)$. Зокрема, справджується рівність $\varPhi_{\boldsymbol{u}\circledast\boldsymbol{v}} = \varPhi_{\boldsymbol{u}} \circ \varPhi_{\boldsymbol{v}}$ для всіх $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \Gamma(\mathcal{S}'_+)$, а оператор $\varPhi_{\boldsymbol{\delta}}$ діє як тотожний в $\mathscr{L}\big(\tilde{\mathcal{S}}\big)$, де $\boldsymbol{\delta} = \big(\delta^{\otimes n}\big)$. Більше того, справджується диференціальна властивість $\varPhi_{\mathbb{D}'\boldsymbol{u}}\widetilde{\boldsymbol{p}} = -\varPhi_{\boldsymbol{u}}\widetilde{\mathbb{D}\boldsymbol{p}}$ для довільних $\boldsymbol{u} \in \Gamma(\mathcal{S}'_+)$ і $\boldsymbol{p} \in \Gamma(\mathcal{S}_+)$.*

Для довільного фіксованого $\boldsymbol{p} \in \Gamma(\mathcal{S}_+)$ відображення $\Gamma(\mathcal{S}'_+) \ni \boldsymbol{u} \longmapsto \varPhi_{\boldsymbol{u}}\widetilde{\boldsymbol{p}} \in \tilde{\mathcal{S}}$ є гомоморфізмом алгебри $\big\{\Gamma(\mathcal{S}'_+), \circledast\big\}$ в алгебру операторнозначних функцій, заданих на $\mathfrak{A}$. Тому ми можемо розуміти це відображення як функціональне числення в алгебрі поліноміальних розподілів повільного росту. Функція $\varPhi_{\boldsymbol{u}}\widetilde{\boldsymbol{p}}$ операторного аргумента може бути записана у вигляді $\varPhi_{\boldsymbol{u}}\widetilde{\boldsymbol{p}} = \widetilde{\boldsymbol{u}\star\boldsymbol{p}}$. Тому оператор $\varPhi_{\boldsymbol{u}}\widetilde{\boldsymbol{p}}(\mathbf{A}) = \widetilde{\boldsymbol{u}\star\boldsymbol{p}}(\mathbf{A}) \in \mathscr{L}(E)$ можна розуміти як "значення" функції $\widehat{\boldsymbol{u}\star\boldsymbol{p}}$ нескінченної кількості змінних на зліченному наборі $\mathbf{A} := (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n, \ldots) \in \mathfrak{A}$ генераторів (C_0) напівгруп стиску.

У шостому розділі розглянуто функціональне числення в класах цілих аналітичних функцій нескінченної кількості змінних.

У першому параграфі побудовано функціональне числення для зліченного набору генераторів сильно неперервних груп операторів в класі Фур'є-образів поліноміальних ультрарозподілів, які є цілими аналітичними функціями зліченної кількості змінних. При цьому тут є суттєва відмінність в порівнянні з матеріалом п'ятого розділу. А саме, у параграфі 5.3 функціональне числення було задано над тим же банаховим простором, на якому задані вихідні оператори, а тут для зліченної кількості генераторів сильно неперервних груп операторів, заданих на гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, побудовано операторне числення, що задане на симетричному просторі Фока $\mathfrak{F}(\mathcal{H}) := \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{H}^{\widehat{\otimes} n}$.

Нагадаємо, що елементи простору $\Gamma(E_\beta) = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}_+}{}_{fin} E_\beta^{\widehat{\otimes} n}$ мають вигляд $\widehat{\boldsymbol{p}} = \big(\widehat{p}_n\big)$, де $\widehat{p}_n = F^{\otimes n} p_n \in E_\beta^{\widehat{\otimes} n}$ для деякого $\boldsymbol{p} = \big(p_n\big) \in \Gamma(\mathcal{G}_\beta)$, $p_n \in \mathcal{G}_\beta^{\widehat{\otimes} n}$ (означення просторів див. пункт 4.4.1). Для простоти у цьому параграфі розглянемо одновимірний випадок, тобто $d = 1$. Елементи простору $\Gamma(E_\beta)$ можна розуміти як функції нескінченної кількості змінних

$$\widehat{\boldsymbol{p}} : \bigtimes_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{C} \ni (z_1, \ldots, z_n, \ldots) \quad \longmapsto \quad \widehat{\boldsymbol{p}}(z_1, \ldots, z_n, \ldots) \in \mathbb{C},$$

де $\widehat{\boldsymbol{p}}(z_1, \ldots, z_n, \ldots) := \widehat{p}_0 + \widehat{p}_1(z_1) + \widehat{p}_2(z_2, z_3) + \cdots + \widehat{p}_n\big(z_{\mathfrak{b}_n}, \ldots, z_{\mathfrak{e}_n}\big) + \ldots.$ Зауважимо, що вище записаний ряд є збіжним, оскільки кожен елемент $\widehat{\boldsymbol{p}} \in \Gamma(E_\beta)$ насправді є функцією тільки від скінченної кількості змінних (ця кількість не є фіксованою і залежить від $\widehat{\boldsymbol{p}}$).

Кожна з функцій $\widehat{p}_n$ є функцією n комплексних змінних, при цьому з означення симетричного тензорного добутку випливає, що $\widehat{p}_n$ є симетричною функцією.

Нехай $\mathcal{H}$ — комплексний гільбертів простір. Розглянемо зліченний набір неперервних операторів $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n, \ldots)$, що діють в просторі $\mathcal{H}$. Жодних умов комутативності операторів такого набору ми не накладаємо.

Припустимо, що $\mathbf{A}_j$ для кожного $j \in \mathbb{N}$ генерує однопараметричну сильно неперервну групу стиску $\mathbb{R} \ni t \longmapsto e^{-\mathrm{i}t\mathbf{A}_j} \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$.

Позначимо

$$\mathscr{A}_j := \underbrace{I_{\mathcal{H}} \otimes \cdots \otimes\, I_{\mathcal{H}}}_{j} \otimes \mathbf{A}_j \otimes\, I_{\mathcal{H}} \otimes \cdots \in \mathscr{L}(\mathfrak{F}(\mathcal{H})), \qquad j \in \mathbb{N},$$

де $I_{\mathcal{H}}$ — тотожний оператор в просторі $\mathcal{H}$. За означенням приймемо $\mathscr{A}_0 := I_{\mathcal{H}} \otimes\, I_{\mathcal{H}} \otimes \cdots \in \mathscr{L}(\mathfrak{F}(\mathcal{H}))$.

Для кожного натурального n позначимо $A_n := \mathscr{A}_{\mathfrak{b}_n} \otimes \dots \otimes \mathscr{A}_{\mathfrak{e}_n}$, де $\mathfrak{b}_n := \frac{n(n-1)}{2} + 1$, $\mathfrak{e}_n := \frac{n(n+1)}{2}$. Приймемо за означенням $A_0 := \mathscr{A}_0$.

Тепер замість набору $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n, \dots)$, взагалі кажучи, не комутуючих операторів, що діють в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, розглянемо зліченний набір $A := (A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots)$ комутуючих операторів, що діють в просторі Фока $\mathfrak{F}(\mathcal{H})$. Позначимо символом $\mathscr{G}$ множину, елементами якої є зліченні набори вказаного вигляду.

Зауважимо, що для кожного $n \in \mathbb{Z}_+$ оператор A_n є тотожним оператором на $\mathcal{H}^{\widehat{\otimes} k}$ для всіх $k \neq n$. Тому, не обмежуючи загальності, можна вважати, що $A_n \in \mathscr{L}(\mathcal{H}^{\widehat{\otimes} n})$, $n \in \mathbb{Z}_+$. При цьому оператор A_n генерує сильно неперервну n-параметричну групу

$$\mathbb{R}^n \ni t = (t_1, \dots, t_n) \longmapsto e^{-\mathrm{i} t A_n} := e^{-\mathrm{i} t_1 \mathscr{A}_{\mathfrak{b}_n}} \otimes \dots \otimes e^{-\mathrm{i} t_n \mathscr{A}_{\mathfrak{e}_n}} \in \mathscr{L}(\mathfrak{F}(\mathcal{H})),$$

де $e^{-\mathrm{i} t_i \mathscr{A}_j} := \underbrace{I_{\mathcal{H}} \otimes \ldots \otimes I_{\mathcal{H}}}_{j} \otimes e^{-\mathrm{i} t_i \mathbf{A}_j} \otimes I_{\mathcal{H}} \otimes \ldots$, $i = 1, \dots, n$, $j \in \mathbb{N}$. Аналогічно, як і вище, не обмежуючи загальності можна вважати, що $e^{-\mathrm{i} t A_n} \in \mathscr{L}(\mathcal{H}^{\widehat{\otimes} n})$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Нехай $\mathscr{G}_n$ позначає множину, елементами якої є оператори вигляду $A_n = \mathscr{A}_{\mathfrak{b}_n} \otimes \dots \otimes \mathscr{A}_{\mathfrak{e}_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Приймемо за означенням $\mathscr{G}_0 := \{\mathscr{A}_0\}$.

Для кожного $n \in \mathbb{Z}_+$ визначимо множину $\widetilde{\mathcal{H}}_n := \{\widetilde{p}_n : \mathscr{G}_n \longrightarrow \mathscr{L}(\mathcal{H}^{\widehat{\otimes} n}) : p_n \in \mathcal{G}_\beta^{\widehat{\otimes} n}\}$, що складається із функцій операторного аргумента вигляду

$$\widetilde{p}_n(A_n) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\mathrm{i} t_1 \mathscr{A}_{\mathfrak{b}_n}} \otimes \dots \otimes e^{-\mathrm{i} t_n \mathscr{A}_{\mathfrak{e}_n}} p_n(t_1, \dots, t_n)\, dt_1 \dots dt_n.$$

Приймемо за означенням $\widetilde{p}_0 \colon \mathscr{G}_0 \ni A_0 \longmapsto \widetilde{p}_0(A_0) := p_0 I_{\mathbb{C}} \in \mathscr{L}(\mathbb{C})$.

Визначимо відображення

$$\mathcal{F} := (\mathcal{F}_n) \colon \Gamma(\mathcal{G}_\beta) \ni \boldsymbol{p} = \big(p_n\big) \;\longmapsto\; \widetilde{\boldsymbol{p}} := \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \widetilde{p}_n \in \widetilde{\mathcal{H}}, \qquad \text{де} \quad \widetilde{\mathcal{H}} := \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \widetilde{\mathcal{H}}_n.$$

Відображення $\mathcal{F}$ діє як гомоморфізм з алгебри $\big\{\Gamma(\mathcal{G}_\beta), \circledast\big\}$ в алгебру $\widetilde{\mathcal{H}}$ функцій операторного аргумента, визначених на $\mathscr{G}$ із значеннями в просторі операторів на просторі Фока. З іншого боку, відображення

$F^{\otimes} : \Gamma(\mathcal{G}_\beta) \longrightarrow \Gamma(E_\beta)$ також є гомоморфізмом. Тому композицію відображень $\mathcal{F} \circ (F^{\otimes})^{-1} \colon \Gamma(E_\beta) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{H}}$ ми розуміємо як функціональне числення. Іншими словами, оператор $\widetilde{\boldsymbol{p}}(A) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \widetilde{p}_n(A_n) \in \mathscr{L}(\mathfrak{F}(\mathcal{H}))$ є "значенням" функції $\widehat{\boldsymbol{p}}$ нескінченної кількості змінних на зліченному наборі $A = (A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots) \in \mathscr{G}$ операторів.

Розглянемо на просторі $\widetilde{\mathcal{H}}$ однопараметричну групу операторів $\widetilde{T}^{\otimes} : \mathbb{R} \ni s \longmapsto \widetilde{T}^{\otimes}_s \in \mathscr{L}\big(\widetilde{\mathcal{H}}\big)$, де

$$\widetilde{T}^{\otimes}_s := \big(\widetilde{T}^{\otimes n}_s\big) \colon \widetilde{\boldsymbol{p}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \widetilde{p}_n \longmapsto \widetilde{T}^{\otimes}_s \widetilde{\boldsymbol{p}} := \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \widetilde{T}^{\otimes n}_s \widetilde{p}_n.$$

Визначимо відображення

$$\mathcal{Q} : \Gamma(\mathcal{G}'_\beta) \ni \boldsymbol{u} = \big(f^{\otimes n}\big) \quad \longmapsto \quad \mathcal{Q}_{\boldsymbol{u}} := \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{Q}_{f^{\otimes n}} \in \mathscr{L}\big(\widetilde{\mathcal{H}}\big),$$

де $f \in \mathcal{G}'_\beta$. У свою чергу оператори $\mathcal{Q}_{f^{\otimes n}} \in \mathscr{L}\big(\widetilde{\mathcal{H}}_n\big)$ визначимо за допомогою формул: $(\mathcal{Q}_{f^{\otimes 0}}\widetilde{p}_0)(A_0) := I_{\mathbb{C}}$ та $\mathcal{Q}_{f^{\otimes n}} : \widetilde{p}_n \longmapsto \mathcal{Q}_{f^{\otimes n}}\widetilde{p}_n$ для кожного натурального n, де

$$(\mathcal{Q}_{f^{\otimes n}}\widetilde{p}_n)(A_n) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\mathfrak{i}t_1\mathscr{A}_{\mathfrak{b}_n}} \otimes \dots \otimes e^{-\mathfrak{i}t_n\mathscr{A}_{\mathfrak{e}_n}} K^{\otimes n}_f p_n(t_1, \dots, t_n)\, dt_1 \dots dt_n.$$

Теорема 6.1.1. *Відображення $\mathcal{Q}$ здійснює алгебраїчний ізоморфізм з алгебри $\big\{\Gamma(\mathcal{G}'_\beta), \circledast\big\}$ на підалгебру в комутанті $\big[\widetilde{T}^{\otimes}\big]^c$ операторів вигляду $\widetilde{K}^{\otimes} = \mathcal{F} \circ K^{\otimes} \circ \mathcal{F}^{-1} \in \mathscr{L}\big(\widetilde{\mathcal{H}}\big)$, де $K \in \mathscr{L}(\mathcal{G}_\beta)$. Зокрема, для всіх $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \Gamma(\mathcal{G}'_\beta)$ справджується рівність $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{u}\circledast\boldsymbol{v}} = \mathcal{Q}_{\boldsymbol{u}} \circ \mathcal{Q}_{\boldsymbol{v}}$. Крім того, оператор $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{\delta}}$ є одиничним в $\mathscr{L}\big(\widetilde{\mathcal{H}}\big)$, де $\boldsymbol{\delta} = \big(1, \delta, \dots, \delta^{\otimes n} \dots\big)$.*

При кожному фіксованому $\boldsymbol{p} \in \Gamma(\mathcal{G}_\beta)$ відображення $\mathsf{K}_{\boldsymbol{p}} : \Gamma(\mathcal{G}'_\beta) \ni \boldsymbol{u} \longmapsto \boldsymbol{u} \star \boldsymbol{p} \in \Gamma(\mathcal{G}_\beta)$ є гомоморфізмом відповідних алгебр. З іншого боку відображення $\Gamma(\mathcal{G}'_\beta) \ni \boldsymbol{u} \longmapsto \mathcal{Q}_{\boldsymbol{u}}\widetilde{\boldsymbol{p}} \in \widetilde{\mathcal{H}}$ є гомоморфізмом з алгебри $\Gamma(\mathcal{G}'_\beta)$ в алгебру операторнозначних функцій, визначених на $\mathscr{G}$. Порівнюючи означення відображень $\mathcal{F}$ та $\mathcal{Q}$, легко побачити, що функцію $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{u}}\widetilde{\boldsymbol{p}}$ операторного аргумента можна записати у вигляді $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{u}}\widetilde{\boldsymbol{p}} = \widetilde{\boldsymbol{u} \star \boldsymbol{p}}$. Звідси випливає, що оператор $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{u}}\widetilde{\boldsymbol{p}}(A) = \widetilde{\boldsymbol{u} \star \boldsymbol{p}}(A) \in \mathscr{L}(\mathfrak{F}(\mathcal{H}))$ можна розуміти як “значення” функції $\widehat{\boldsymbol{u}\star\boldsymbol{p}}\in\Gamma(E_\beta)$ нескінченної кількості змінних на зліченному наборі $(\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\dots,\mathbf{A}_n,\dots)$ генераторів однопараметричних (C_0) груп стиску.

У другому параграфі наведено застосування побудованого числення операторів до розв’язання нескінченновимірної задачі Коші для рівняння теплопровідності.

Нехай $g\in\mathcal{G}'_\beta$. Визначимо оператор зсуву на просторі $\mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta)$ за правилом $\mathscr{T}_gP(f):=P(f+g)$, $P\in\mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta)$, $f\in\mathcal{G}'_\beta$.

Визначимо згортку поліноміального ультрарозподілу $U\in\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_\beta)$ з основною функцією $P\in\mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta)$ за правилом $(U*P)(g):=\langle U,\mathscr{T}_gP\rangle$, $g\in\mathcal{G}'_\beta$, де справа записане спарювання дуальної пари $\big\langle\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_\beta),\mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta)\big\rangle$.

Для довільного поліноміального ультрарозподілу $U\in\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_\beta)$ відображення C_U, що визначене формулою $C_U:\mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta)\ni P\longmapsto U*P\in\mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta)$, назвемо асоційованим з U згортковим оператором на $\mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta)$.

Нехай $\{U_t:t\in J\}$ — сім’я елементів з простору $\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_\beta)$, J — довільний інтервал вигляду $[0,\alpha]$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha\geq 0$. Припустимо, що функція $t\longmapsto U_t$ є неперервна з J в $\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_\beta)$. Тоді функція $t\longmapsto\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}}U_t$ є неперервною з J в $\mathcal{P}'(E'_\beta)$, де $\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}}$ — поліноміальне перетворення Фур’є-Лапласа, визначене у пункті 4.4.2. Тому для кожного $t\in J$ множина $\{\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}}U_s:s\in[0,t]\}$ є компактною підмножиною в $\mathcal{P}'(E'_\beta)$. Зокрема вона обмежена. Звідси випливає, що елемент

$$\int_0^t\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}}U_s\,ds$$

належить простору $\mathcal{P}'(E'_\beta)$ для кожного $t\in J$. А, отже, в просторі $\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_\beta)$ існує єдиний елемент, який позначимо $\int_0^tU_s\,ds$, такий що

$$\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}}\int_0^tU_s\,ds=\int_0^t\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}}U_s\,ds.$$

Більше того, відображення $E_t=\int_0^tU_s\,ds$, $t\in J$, диференційовне в $\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_\beta)$ і задовольняє рівність $\frac{\partial}{\partial t}E_t=U_t$.

Довільному поліноміальному ультрарозподілу $U \in \mathcal{P}'(\mathcal{G}'_\beta)$ поставимо у відповідність формальний ряд

$$e^{*U} := \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{1}{n!} U^{*n},$$

де згортка $U^{*n} := \underbrace{U * U * \dots * U}_{n}$ визначена формулою (6.2.4).

Нехай $\{U_t : t \in J\}$ — довільна описана вище сім'я елементів з $\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_\beta)$.

Наступний результат є теоремою про існування та єдиність розв'язку згорткової задачі Коші.

Теорема 6.2.1. *Задача Коші*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} X_t = U_t * X_t, & t \in J, \\ X_0 = P, & P \in \mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta), \end{cases}$$

має єдиний розв'язок в $\mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta)$, *що задається формулою*

$$X_t = e^{* \int_0^t U_s \, ds} * P, \qquad t \in J.$$

Застосуємо цю теорему для розв'язання узагальненого рівняння теплопровідності, породженого лапласіаном Ґросса.

Визначимо оператор сліду τ за формулою

$$\left\langle \tau, \varphi \widehat{\otimes} \psi \right\rangle := \int_{\mathbb{R}^d_+} \varphi(t) \psi(t) \, dt, \qquad \varphi, \psi \in \mathcal{G}_\beta.$$

Лапласіан Ґросса Δ_G — це оператор, що поліному $P = \sum_{n=0}^m \langle \cdot^{\otimes n}, \varphi^{\otimes n} \rangle$, $\varphi \in \mathcal{G}_\beta$, степеня m ставить у відповідність поліном $\Delta_G P$ степеня $m-2$ вигляду $\Delta_G P := \sum_{n=0}^{m-2} (n+2)(n+1) \langle \tau, \varphi^{\otimes 2} \rangle \langle \cdot^{\otimes n}, \varphi^{\otimes n} \rangle$.

Теорема 6.2.2. *Лапласіан Ґросса* Δ_G *діє як згортковий оператор, а саме справджується рівність* $\frac{1}{2} \Delta_G P = U_\tau * P$, $P \in \mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta)$, *де* U_τ *— поліноміальний ультрарозподіл з простору* $\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_\beta)$, *що відповідає елементу* $(0, 0, \tau, 0, \dots) \in \Gamma(\mathcal{G}'_\beta)$.

Теорема 6.2.3. *Задача Коші*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} X_t = \frac{1}{2} \Delta_G X_t, & t \in J, \\ X_0 = P, & P \in \mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta), \end{cases}$$

для узагальненого рівняння теплопровідності, породженого лапласіаном Ґросса, має єдиний розв'язок в $\mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta)$, *що задається формулою*

$$X_t = e^{*tU_\tau} * P, \qquad t \in J.$$

Побудуємо однопараметричну напівгрупу $\{\mathsf{G}_t : t \geq 0\}$, інфінітезимальним генератором якої є оператор $\frac{1}{2}\Delta_G$. Формально цю напівгрупу можна записати у вигляді $\mathsf{G}_t = e^{t\frac{1}{2}\Delta_G}$.

Оскільки $\frac{1}{2}\Delta_G P = U_\tau * P$, то

$$\mathsf{G}_t P := \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=0}^{\left[\frac{m-n}{2}\right]} \frac{(n+2k)!}{k!n!} \frac{t^k}{2^k} \langle \tau^{\otimes k}, \varphi^{\otimes 2k} \rangle \left\langle \,\cdot\,^{\otimes n}, \varphi^{\otimes n} \right\rangle,$$

де $P = \sum_{n=0}^{m} \langle \cdot^{\otimes n}, \varphi^{\otimes n} \rangle$, $\varphi \in \mathcal{G}_\beta$.

Твердження 6.2.1. *Відображення* $\mathbb{R}_+ \ni t \longmapsto \mathsf{G}_t \in \mathscr{L}(\mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta))$ *є сильно неперервною напівгрупою операторів з генератором* $\frac{1}{2}\Delta_G$.

У третьому параграфі розглянуто абстрактний випадок алгебри символів $H_b(\mathcal{X})$ всіх аналітичних функцій обмеженого типу на деякому нескінченновимірному банаховому просторі $\mathcal{X}$.

Нехай $\mathcal{A}$ — деяка банахова алгебра з одиницею $1_{\mathcal{A}}$. Спектром комутативної топологічної алгебри $\mathcal{A}$ називають множину $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ характерів (неперервних гомоморфізмів) алгебри $\mathcal{A}$ в $\mathbb{C}$.

Відомо [100, 101], що для кожного елемента $\mathbf{a} \in \mathcal{A} \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{X}$ існує такий гомоморфізм $\theta_{\mathbf{a}} : H_b(\mathcal{X}) \longmapsto \mathcal{A}$ (позначення $\theta_{\mathbf{a}}(f) =: f_{\mathcal{A}}(\mathbf{a})$), що для кожного $h \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ виконується $h(\theta_{\mathbf{a}}(f)) = f\left([h \otimes I_{\mathcal{X}}](\mathbf{a})\right)$, де $I_{\mathcal{X}}$ — одиничний оператор в просторі $\mathcal{X}$.

Наступний результат є аналогом теореми Гільберта про нулі для поліномів від елементів банахової алгебри.

Теорема 6.3.2. *Нехай* $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$. *Тоді* $\bigcap_{k=1}^{n} \operatorname{Ker} P_k = \varnothing$ *у тому й тільки в тому випадку, коли* $\bigcap_{k=1}^{n} \operatorname{Ker}(P_k)_{\mathcal{A}} = \varnothing$ *і при цьому для* *деяких* $Q_1, \dots, Q_n \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$

$$\sum_{k=1}^{n} (P_k)_{\mathcal{A}}(\mathbf{a})\,(Q_k)_{\mathcal{A}}(\mathbf{a}) = 1_{\mathcal{A}}, \qquad \forall\, \mathbf{a} \in \mathcal{A} \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{X}.$$

Наступний результат є описом гомоморфізмів з алгебри $H_b(\mathcal{X})$ в комутативну банахову алгебру $\mathcal{A}$.

Теорема 6.3.3. *Для кожного гомоморфізму* $\Phi_0 : H_b(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{A}$ *існує така напрямленість* $\{\mathbf{a}_\alpha\} \subset \mathcal{A} \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{X}$*, що*

$$h \circ \Phi_0(P) = \lim_{\alpha} P_A([h \otimes I_{\mathcal{X}}](\mathbf{a}_\alpha))$$

для довільних $P \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ *і* $h \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Наведемо приклад, який ілюструє, що існують гомоморфізми з $H_b(\mathcal{X})$ в $\mathcal{A}$, які не подаються у вигляді функціонального числення.

Нехай $\mathcal{X} = \ell_2$, $\{a_k\}$ — деяка збіжна до елемента a послідовність в напівпростій алгебрі $\mathcal{A}$ і $\mathcal{U}$ — деякий вільний ультрафільтр на множині натуральних чисел. Нехай $\{e_k\}$ — система ортогональних базисних елементів в ℓ_2. Гомоморфізм $\Phi_{\mathcal{U}} : H_b(\ell_2) \longrightarrow \mathcal{A}$, який визначено формулою

$$\Phi_{\mathcal{U}}(f) = \lim_{\mathcal{U}} f_{\mathcal{A}}(a_k \otimes e_k),$$

є шуканим.

Розділ 2

Абстрактна теорія поліноміальних основних та узагальнених функцій

2.1 Поліноми на локально опуклих просторах

Нехай $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ — локально опуклі комплексні векторні простори. Всюди символ $\mathscr{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ позначає простір всіх неперервних лінійних операторів з $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$. Позначимо через

$$\mathcal{X}^n := \underbrace{\mathcal{X} \times \ldots \times \mathcal{X}}_{n} \quad \text{та} \quad \mathcal{X}^{\otimes n} := \underbrace{\mathcal{X} \otimes \ldots \otimes \mathcal{X}}_{n}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

n-тий декартовий та тензорний степінь простору $\mathcal{X}$ відповідно. За означенням приймемо $\mathcal{X}^0 := \mathbb{C}$, $\mathcal{X}^{\otimes 0} := \mathbb{C}$. Для довільного натурального n позначимо через $\mathscr{L}(\mathcal{X}^n, \mathcal{Y})$ — простір всіх неперервних n-лінійних операторів, що діють з $\mathcal{X}^n$ в $\mathcal{Y}$ з топологією $\mathfrak{b}$ рівномірної збіжності на обмежених множинах простору $\mathcal{X}$. За означенням приймемо $\mathscr{L}(\mathcal{X}^0, \mathcal{Y}) := \mathcal{Y}$.

Для простоти позначень будемо писати $\mathscr{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := \mathscr{L}(\mathcal{X}^1, \mathcal{Y})$ та $\mathscr{L}(\mathcal{X}) := \mathscr{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$. Всюди в дисертації $\mathcal{X}' := \mathscr{L}(\mathcal{X}, \mathbb{C})$ позначатиме сильно спряжений до $\mathcal{X}$ простір.

Символом $\mathscr{L}_{\mathfrak{s}}(\mathcal{X}^n, \mathcal{Y})$ позначимо підпростір в $\mathscr{L}(\mathcal{X}^n, \mathcal{Y})$ тих операторів, що є симетричними відносно перестановки змінних. Аналогічне поняття введемо для тензорів. На просторі $\mathcal{X}^{\otimes n}$ визначимо оператор симетризації $\mathfrak{s}_n$, який на довільний елемент $x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \in \mathcal{X}^{\otimes n}$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{X}$, діє за правилом

$$\mathfrak{s}_n(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = x_1 \widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes} x_n := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(n)}, \tag{2.1.1}$$

де $\mathfrak{S}_n$ — група перестановок множини $\{1, \ldots, n\}$. Підпростір в $\mathcal{X}^{\otimes n}$, що породжується елементами $x_1 \widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes} x_n$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{X}$, позначимо $\mathcal{X}^{\widehat{\otimes} n}$ і назвемо симетричним тензорним степенем простору $\mathcal{X}$. Елементи простору $\mathcal{X}^{\widehat{\otimes} n}$ називають симетричними тензорами. Очевидно, що кожен елемент вигляду $x \otimes \ldots \otimes x$ є симетричним тензором. Більше того, кожен елемент простору $\mathcal{X}^{\widehat{\otimes} n}$ можна представити (не обов'язково єдиним чином) у вигляді скінченної суми вигляду $\sum_i x_i \otimes \ldots \otimes x_i$. Очевидно, що оператор $\mathfrak{s}_n$ є проектуванням в просторі $\mathcal{X}^{\otimes n}$ на підпростір $\mathcal{X}^{\widehat{\otimes} n}$.

Нехай $\otimes_{\mathfrak{p}}$ (відповідно, $\widehat{\otimes}_{\mathfrak{p}}$) позначає поповнення алгебраїчного тензорного добутку $\otimes$ (відповідно, симетричного тензорного добутку $\widehat{\otimes}$) в проективній тензорній локально опуклій топології. Тоді $\mathcal{X}^{\otimes_{\mathfrak{p}} n}$ (відповідно, $\mathcal{X}^{\widehat{\otimes}_{\mathfrak{p}} n}$) позначає тензорний степінь (відповідно, симетричний тензорний степінь) простору $\mathcal{X}$, поповнений у проективній тензорній топології.

Відомо, що оператор симетричного проектування є неперервним у кожній з топологій, описаних у пункті 1.2.2 (див. [99]). Тому він може бути розширений на поповнення відповідних просторів. Це розширення ми позначатимемо тим же символом $\mathfrak{s}_n$, тобто

$$\begin{array}{rccc} \mathfrak{s}_n : & \mathcal{X}^{\otimes_{\mathfrak{p}} n} & \longrightarrow & \mathcal{X}^{\widehat{\otimes}_{\mathfrak{p}} n} \\ & \sum\limits_i x_{i1} \otimes \ldots \otimes x_{in} & \longmapsto & \sum\limits_i x_{i1} \, \widehat{\otimes} \, \ldots \, \widehat{\otimes} \, x_{in} \end{array} \tag{2.1.2}$$

Зауваження 2.1.1. Оскільки всі простори, які розглядаються в дисертації, поповнені в проективній локально опуклій топології, то для спрощення позначень ми будемо опускати індекс $\mathfrak{p}$, тобто писатимемо $\otimes$ та $\widehat{\otimes}$ замість $\otimes_{\mathfrak{p}}$ та $\widehat{\otimes}_{\mathfrak{p}}$ за винятком тих випадків, коли треба наголосити на топології, в якій здійснюється поповнення.

Нехай $A_j \in \mathscr{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $j = 1, \ldots, n$, деякі оператори. Визначимо тензорний добуток операторів $A_1 \otimes \ldots \otimes A_n$, означивши його на тензорах $x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{X}$, за правилом

$$(A_1 \otimes \ldots \otimes A_n)(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = A_1 x_1 \otimes \ldots \otimes A_n x_n,$$

і продовживши його на весь простір за лінійністю та неперервністю. Очевидно, що $A_1 \otimes \ldots \otimes A_n \in \mathscr{L}(\mathcal{X}^{\otimes n}, \mathcal{Y}^{\otimes n})$.

Зауваження 2.1.2. Для довільного оператора $A \in \mathscr{L}(\mathcal{X})$ його тензорний степінь $A^{\otimes n} := \underbrace{A \otimes \ldots \otimes A}_{n} \in \mathscr{L}(\mathcal{X}^{\widehat{\otimes} n})$, $n \in \mathbb{N}$, визначають як лінійне неперервне розширення відображення $x^{\otimes n} \longmapsto (Ax)^{\otimes n}$, де $x \in \mathcal{X}$. У дисертації ми розглядаємо лише такі простори, для яких таке розширення існує (див. [6]).

Позначимо символом $\bigtimes_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{X}^{\widehat{\otimes} n}$ локально опуклий декартовий добуток, а символом $\bigoplus_{fin \atop n \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{X}^{\widehat{\otimes} n}$ — фінітну локально опуклу пряму суму симетричних тензорних степенів $\mathcal{X}^{\widehat{\otimes} n}$ простору $\mathcal{X}$. Нагадаємо, що в прямій сумі є скінченна, але не фіксована кількість доданків. Аналогічні декартовий добуток $\bigtimes_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{X}'^{\widehat{\otimes} n}$ та фінітну пряму суму $\bigoplus_{fin \atop n \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{X}'^{\widehat{\otimes} n}$ можна побудувати для спряженого простору $\mathcal{X}'$.

Розглянемо канонічні вкладення

$$\Delta_n \colon \mathcal{X} \ni x \longmapsto (x, \ldots, x) \in \mathcal{X}^n,$$

$$\otimes_n \colon \mathcal{X}^n \ni (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \in \mathcal{X}^{\otimes n}.$$

З теореми [54, IV, 9.8] випливає наступний результат

Твердження 2.1.1. *Якщо $\mathcal{X}$ є ядерним (F) або (DF) простором, то відображення*

$$\left(\mathcal{X}^{\otimes_{\mathfrak{p}} n}\right)' \ni f_n \longmapsto f_n \circ \otimes_n \in \mathscr{L}(\mathcal{X}^n, \mathbb{C})$$

є топологічним ізоморфізмом.

Простір $\mathcal{P}_n(\mathcal{X})$ всіх n-однорідних поліномів нам зручно означити, використовуючи канонічні топологічні ізоморфізми

$$\mathcal{P}_n(\mathcal{X}) \simeq \mathscr{L}_{\mathfrak{s}}(\mathcal{X}^n, \mathbb{C}) \simeq (\mathcal{X}^{\widehat{\otimes} n})', \tag{2.1.3}$$

описані в книзі [99]. Тоді ізоморфізм

$$(\mathcal{X}^{\widehat{\otimes} n})' \ni p_n \longmapsto P_n := p_n \circ \otimes_n \circ \Delta_n \in \mathcal{P}_n(\mathcal{X}) \tag{2.1.4}$$

визначає n-однорідний поліном на $\mathcal{X}$ як композицію

$$P_n(x) = \langle\, p_n,\, x^{\otimes n}\,\rangle, \qquad x^{\otimes n} := \underbrace{x \otimes \cdots \otimes x}_{n} = (\otimes_n \circ \Delta_n)x, \qquad x \in \mathcal{X}. \tag{2.1.5}$$

Простір $\mathcal{P}_n(\mathcal{X})$ наділимо топологією $\mathfrak{b}$ рівномірної збіжності на обмежених множинах простору $\mathcal{X}$. За означенням приймемо $\mathcal{P}_0(\mathcal{X}) := \mathbb{C}$.

Довільний поліном на $\mathcal{X}$ є скінченною сумою однорідних поліномів. Простір $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ поліномів на $\mathcal{X}$ наділимо топологією $\mathfrak{b}$. Зауважимо, що $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ є топологічною алгеброю зі скалярним одиничним елементом $1 \in \mathbb{C}$ і множенням

$$P(x) \diamond Q(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \sum_{m=0}^{n} P_m(x) \cdot Q_{n-m}(x), \qquad x \in \mathcal{X}.$$

За означенням поліноми з простору $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ є неперервними. Проте на $\mathcal{X}$ можна ввести й інші топології такі, що всі поліноми в $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ залишаться неперервні. Найслабшу з таких топологій називають слабкою поліноміальною топологією (скорочено wp-топологією).

Класична теорема Гольдштейна стверджує, що для довільного нескінченновимірного банахового простору $\mathcal{X}$ знайдеться така напрямленість $\{x_\alpha\}$ з одиничної сфери, що слабко збігається до нуля. У [63, 91] доведено аналог цього результату для слабкої поліноміальної топології. Покажемо, як використати результати про ядра поліномів (див. [179]), щоб отримати такого типу теорему для слабкої поліноміальної топології окремо на комплексному і дійсному просторі.

У статті [179] доведено, що для кожного скінченного набору $P_1, \dots, P_n$ однорідних поліномів на комплексному нескінченновимірному банаховому просторі знайдеться нескінченновимірний підпростір у перетині ядер цих поліномів $\bigcap\limits_{k=1}^{n} \operatorname{Ker} P_k$.

Теорема 2.1.1. *Нехай $\mathcal{X}$ — комплексний нескінченновимірний банаховий простір. Тоді знайдеться така напрямленість $\{x_\alpha\} \subset X$, $\|x_\alpha\| = 1$, що $\lambda_\alpha x_\alpha \to 0$ у wp-топології для довільного набору чисел λ_α.*

Доведення. Позначимо символом $\mathscr{O}$ множину околів нуля у wp-топології, тобто

$$\mathscr{O} := \left\{ \mathrm{U}_{P_1,\dots,P_n}^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n} := \{x \in \mathcal{X} : |P_k(x)| < \varepsilon_k, k = 1, \dots, n\} \right\},$$

де не обмежуючи загальності ми вважаємо, що всі $P_1, \dots, P_n$ є однорідними поліномами.

Скажемо, що $\mathrm{U}_{P_1,\dots,P_n}^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n} \prec \mathrm{U}_{Q_1,\dots,Q_m}^{\delta_1,\dots,\delta_m}$, якщо $\mathrm{U}_{P_1,\dots,P_n}^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n} \supset \mathrm{U}_{Q_1,\dots,Q_m}^{\delta_1,\dots,\delta_m}$. Очевидно, що для довільних околів $\mathrm{U}_{P_1,\dots,P_n}^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}$ і $\mathrm{U}_{Q_1,\dots,Q_m}^{\delta_1,\dots,\delta_m}$ виконуються наступні "нерівності" $\mathrm{U}_{P_1,\dots,P_n}^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n} \prec \mathrm{U}_{P_1,\dots,P_n,Q_1,\dots,Q_m}^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n,\delta_1,\dots,\delta_m}$ і $\mathrm{U}_{Q_1,\dots,Q_m}^{\delta_1,\dots,\delta_m} \prec \mathrm{U}_{P_1,\dots,P_n,Q_1,\dots,Q_m}^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n,\delta_1,\dots,\delta_m}$. Тому $\mathscr{O}$ є напрямленою множиною. Таким чином, ми можемо розглянути $\mathscr{O}$ як множину індексів.

Для довільного $\alpha = \mathrm{U}_{P_1,\dots,P_n}^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n} \in \mathscr{O}$ виберемо таку точку x_α в $\bigcap\limits_{k=1}^{n} \operatorname{Ker} P_k$, що $\|x_\alpha\| = 1$. Із згаданого вище результату із статті [179] така точка завжди знайдеться. Отже, $\{x_\alpha\}$ — напрямленість в $\mathcal{X}$. Візьмемо довільний поліном $P \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ степеня n і нехай $P = P_0 + P_1 + \dots + P_n$. За побудовою напрямленості $\{x_\alpha\}$ для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\alpha_0 = \mathrm{U}_{P_1,\dots,P_n}^{\varepsilon,\dots,\varepsilon} \in \mathscr{O}$, що для всіх $\alpha \succ \alpha_0$ маємо $P(\lambda_\alpha x_\alpha) = P_0 = P(0)$, що і треба було довести. ☐

Наслідок 2.1.1. *Нехай f — аналітична функція, що рівномірно неперервна на деякій відкритій множині, яка містить замкнуту одиничну кулю простору $\mathcal{X}$. Тоді $\lim_\alpha f(x_\alpha) = f(0)$ для напрямленості $\{x_\alpha\}$ з теореми 2.1.1.*

Доведення. Нехай $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ — розклад в ряд Тейлора функції f. Оскільки f рівномірно неперервна на деякій відкритій множині, яка містить замкнуту одиничну кулю, то ряд Тейлора збігається до f рівномірно на замкнутій одиничній кулі (див. [99]). Зокрема для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке n_0, що для всіх $n > n_0$ і для всіх x, $\|x\| \le 1$, виконується $\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| < \varepsilon$. Тому якщо індекс $\alpha_0 \in \mathscr{O}$ вибраний так, що $f_1(x_{\alpha_0}) = \cdots = f_n(x_{\alpha_0}) = 0$, тоді для кожного $\alpha \ge \alpha_0$ маємо $|f(x_\alpha) - f(0)| < \varepsilon$. Отже, $\lim_\alpha f(x_\alpha) = f(0)$. □

Зауважимо, що теорема 2.1.1 взагалі кажучи не виконується у дійсному випадку. Наприклад, у дійсному просторі ℓ_2 для довільної напрямленості $\{x_\alpha\}$, $\|x_\alpha\| = 1$, і для полінома $P(x) = \sum\limits_k x_k^2$ отримаємо $P(x_\alpha) = \sum\limits_k x_{\alpha_k}^2 = \|x_\alpha\|^2 = 1 \not\to 0$. Однак, у [115] доведено існування *wp*-збіжної до нуля напрямленості з одиничної сфери дійсного простору ℓ_1.

Лема 2.1.1. *Нехай $P_1, \ldots, P_n$ — однорідні поліноми непарних степенів на нескінченновимірному дійсному просторі $\mathcal{X}$. Тоді для довільного $k \in \mathbb{N}$ існує такий лінійний підпростір $\mathcal{X}_0$, $\dim \mathcal{X}_0 = k$, що $\mathcal{X}_0 \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} P_i$.*

Доведення. Нехай $d_k = \deg P_k$, $k = 1, \ldots, n$, де за умовою $d_1, \ldots, d_n$ — непарні числа. Для довільного $k \in \mathbb{N}$ виберемо такий набір натуральних чисел $k_1, \ldots, k_n$, що $k = k_1 < \cdots < k_n$. Із результатів статті [64] випливає, що для числа k_n і непарного числа d_n існує таке $N_n \in \mathbb{N}$, що для звуження полінома P_n на $\mathbb{R}^{N_n}$ існує лінійний підпростір $\mathcal{X}_n \subset \mathbb{R}^{N_n}$, $\dim \mathcal{X}_n = k_n$, для якого виконується $P_n\big|_{\mathcal{X}_n} \equiv 0$. Для числа k_{n-1} і непарного d_{n-1} існує таке $N_{n-1} \in \mathbb{N}$, що для звуження полінома P_{n-1} на $\mathbb{R}^{N_{n-1}} \subset \mathcal{X}_n$ знайдеться лінійний підпростір $\mathcal{X}_{n-1} \subset \mathcal{X}_n$, $\dim \mathcal{X}_{n-1} = k_{n-1}$, для якого виконується $P_{n-1}\big|_{\mathcal{X}_{n-1}} \equiv 0$. Очевидно, що $\mathcal{X}_{n-1} \subset \operatorname{Ker} P_n \bigcap \operatorname{Ker} P_{n-1}$. Продовжуючи цей процес скінченну кількість раз, ми отримаємо такий лінійний підпростір $\mathcal{X}_1 =: \mathcal{X}_0$ розмірності $k_1 = k$, що $P_1\big|_{\mathcal{X}_1} \equiv 0$. За побудовою матимемо $\mathcal{X}_0 \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} P_i$. □

Для дійсного банахового простору $\mathcal{X}$ визначимо непарну слабку поліноміальну топологію (скорочено *odd-wp*-топологію) в термінах збіжності напрямленостей: скажемо, що $x_\alpha \overset{odd\text{-}wp}{\longrightarrow} x$ тоді і тільки тоді, коли $P(x_\alpha) \longrightarrow P(x)$ для довільного однорідного полінома $P \in \mathcal{P}_n(\mathcal{X})$ непарного степеня $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, що з $x_\alpha \overset{wp}{\longrightarrow} x$ випливає $x_\alpha \overset{odd\text{-}wp}{\longrightarrow} x$.

Нехай $\mathcal{P}_{odd}(\mathcal{X})$ — мінімальна алгебра, що містить всі дійсні однорідні поліноми непарного степеня і константи. Кожен $P \in \mathcal{P}_{odd}(\mathcal{X})$ можна представити у вигляді скінченної суми скінченних добутків дійсних однорідних поліномів непарного степеня. Легко бачити, що $x_\alpha \overset{odd\text{-}wp}{\longrightarrow} x$ тоді і тільки тоді, коли $P(x_\alpha) \longrightarrow P(x)$ для всіх $P \in \mathcal{P}_{odd}(\mathcal{X})$.

Теорема 2.1.2. *Нехай $\mathcal{X}$ — дійсний нескінченновимірний банаховий простір. Тоді знайдеться така напрямленість $\{x_\alpha\} \subset \mathcal{X}$, $\|x_\alpha\| = 1$, що $\lambda_\alpha x_\alpha \overset{odd\text{-}wp}{\longrightarrow} 0$ для довільного набору чисел λ_α.*

Доведення. Нехай $\mathscr{O}_{odd}$ позначає множину околів нуля в *odd-wp*-топології, тобто

$$\mathscr{O}_{odd} := \left\{ \mathrm{U}^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}_{P_1,\ldots,P_n} := \{x \in \mathcal{X} : |P_k(x)| < \varepsilon_k, k = 1, \ldots, n\} \right\},$$

де $P_1, \ldots, P_n$ — дійсні однорідні поліноми непарного степеня. Множина $\mathscr{O}_{odd}$ є напрямленою (див. доведення теореми 2.1.1).

З леми 2.1.1 випливає, що для довільного $\alpha = \mathrm{U}^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}_{P_1,\ldots,P_n} \in \mathscr{O}_{odd}$ знайдеться точка x_α в $\bigcap\limits_{k=1}^{n} \operatorname{Ker} P_k$, для якої $\|x_\alpha\| = 1$. Таким чином, $\{x_\alpha\}$ — напрямленість в $\mathcal{X}$. Для довільного $P \in \mathcal{P}_{odd}(\mathcal{X})$ знайдуться дійсні однорідні поліноми $P_1, \ldots, P_n$ непарного степеня, які визначають поліном P. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $\alpha_0 = \mathrm{U}^{\varepsilon,\ldots,\varepsilon}_{P_1,\ldots,P_n} \in \mathscr{O}_{odd}$, що для всіх $\alpha > \alpha_0$ маємо $P(\lambda_\alpha x_\alpha) = 0 = P(0)$. Отже, $\lambda_\alpha x_\alpha \to 0$ у *odd-wp*-топології. ☐

2.2 Тензорна та алгебраїчна структура просторів поліноміальних основних та узагальнених функцій

У цьому параграфі ми покажемо схему побудови поліноміальних (нелінійних) основних та узагальнених функцій, які є нескінченновимірним узагальненням класичних просторів основних функцій та розподілів. При цьому важливим є той факт, що простори, що тут розглядаються, є ядерними і належать одному з класів (F) або (DF). Далі у цьому розділі, а також у розділах 3 та 4, ми використовуватимемо результати цього параграфу при побудові поліноміальних узагальнених функцій повільного росту та поліноміальних ультрарозподілів.

Однією із (довший час нерозв'язаних) задач теорії топологічних тензорних добутків була "проблема топологій" Ґротендіка (Grothendieck's *problème des topologies*). Відомо [54, 120], що для обмежених підмножин $A \subset \mathcal{X}$ та $B \subset \mathcal{Y}$ просторів Фреше $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$ замикання лінійної оболонки $A \otimes B$ в проективному тензорному добутку $\mathcal{X} \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{Y}$ є замкненою підмножиною. У роботі [120] А. Ґротендік запитав, чи для кожної обмеженої підмножини $C \subset \mathcal{X} \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{Y}$ знайдуться такі обмежені підмножини $A \subset \mathcal{X}$ та $B \subset \mathcal{Y}$, що C міститься в замиканні лінійної оболонки $A \otimes B$?

Х. Боне, А. Ґалбіс, Х.К. Діаз, А. Періс, Б. Дірольф та ін. досліджували "проблему топологій". Вони навели ряд підкласів просторів, для яких відповідь була негативною. Для довільних просторів Фреше негативну відповідь на це питання дав Я. Таскінен у [209]. Для нас важливим є результат А. Ґротендіка [120]: якщо простори $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$ є типу (F) або (DF) і принаймні один з них ядерний, то відповідь позитивна (див. також подібний результат Х. Боне, Х.К. Діаза та Я. Таскінена [77]).

Нехай $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — довільні локально опуклі простори. Відомо [54], що спряженим до $\mathcal{X} \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{Y}$ є простір $\mathscr{L}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \mathbb{C})$ білінійних функціоналів, заданих на декартовому добутку $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. При цьому на $\mathscr{L}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \mathbb{C})$

задано топологію біобмеженої збіжності (топологія нарізно рівномірної збіжності на обмежених множинах). Легко бачити, що ця топологія є слабшою за сильну топологію $\beta(\mathscr{L}(\mathcal{X}\times\mathcal{Y},\mathbb{C}),\mathcal{X}\otimes_{\mathfrak{p}}\mathcal{Y})$ простору $\mathscr{L}(\mathcal{X}\times\mathcal{Y},\mathbb{C})$. "Проблему топологій" Ґротендіка можна переформулювати наступним чином: за яких умов ці топології співпадають?

Виявляється, що згаданий вище позитивний результат А. Ґротендіка дозволяє довести наступну теорему.

Теорема 2.2.1 ([54, Теорема 9.9]). *Нехай* $\mathcal{X}$ *— довільний локально опуклий ядерний* (F) *або* (DF) *простір. Тоді справджується топологічний ізоморфізм* $\mathcal{X}'^{\otimes n}\simeq(\mathcal{X}^{\otimes n})'$ *для довільного* $n\in\mathbb{N}$.

Ключовою у наших дослідженнях є наступна теорема, яка є "симетричним" аналогом теореми А. Ґротендіка.

Теорема 2.2.2. *Якщо* $\mathcal{X}$ *локально опуклий ядерний* (F) *або* (DF) *простір, то справджується рівність*

$$\mathcal{X}'^{\widehat{\otimes}n}\simeq(\mathcal{X}^{\widehat{\otimes}n})',\qquad n\in\mathbb{N},\tag{2.2.1}$$

для симетричних тензорних степенів.

Доведення. Оскільки простір $\mathcal{X}$ є рефлексивним, то $(\mathcal{X}^{\otimes n})''=(\mathcal{X}'^{\otimes n})'=\mathcal{X}^{\otimes n}$, тобто $\langle\,\mathcal{X}'^{\otimes n},\,\mathcal{X}^{\otimes n}\,\rangle$ — дуальна пара відносно білінійної форми

$$\langle\,f,\,x\,\rangle=\Big\langle\sum_i f_{i1}\otimes\ldots\otimes f_{in},\sum_j x_{j1}\otimes\ldots\otimes x_{jn}\Big\rangle=\sum_i\sum_j\langle\,f_{i1},\,x_{j1}\,\rangle\ldots\langle\,f_{in},\,x_{jn}\,\rangle,$$

де $f=\sum_i f_{i1}\otimes\ldots\otimes f_{in}\in\mathcal{X}'^{\otimes n}$, $x=\sum_j x_{j1}\otimes\ldots\otimes x_{jn}\in\mathcal{X}^{\otimes n}$, $f_{ik}\in\mathcal{X}'$, $x_{jk}\in\mathcal{X}$, $k=1,\ldots,n$.

Замість простору $\mathcal{X}^{\otimes n}$ в дуальній парі $\langle\,\mathcal{X}'^{\otimes n},\,\mathcal{X}^{\otimes n}\,\rangle$ розглянемо його замкнений підпростір $\mathcal{X}^{\widehat{\otimes}n}$. Відомо [54], що дуальним до $\mathcal{X}^{\widehat{\otimes}n}$ буде факторпростір $\mathcal{X}'^{\otimes n}/(\mathcal{X}^{\widehat{\otimes}n})^{\perp}$, де $(\mathcal{X}^{\widehat{\otimes}n})^{\perp}$ позначає ортогональне доповнення підпростору $\mathcal{X}^{\widehat{\otimes}n}$ відносно дуальності $\langle\mathcal{X}'^{\otimes n},\mathcal{X}^{\otimes n}\rangle$ (див. (1.2.1)).

Нехай $\mathfrak{s}'_n$ позначає спряжений оператор до оператора симетричного проектування (2.1.2). Покажемо, що ортогональне доповнення $(\mathcal{X}^{\widehat{\otimes}n})^\perp$ співпадає з ядром оператора $\mathfrak{s}'_n$. Нехай $f = \sum_i f_{i1} \otimes \ldots \otimes f_{in} \in \operatorname{Ker} \mathfrak{s}'_n \subset \mathcal{X}'^{\otimes n}$. Тоді для довільного елемента $x = \sum_j x_{j1} \widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes} x_{jn} \in \mathcal{X}^{\widehat{\otimes}n}$ маємо

$$\begin{aligned}\langle f, x\rangle &= \Big\langle \sum_i f_{i1} \otimes \ldots \otimes f_{in}, \sum_j x_{j1} \widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes} x_{jn} \Big\rangle \\ &= \sum_i \sum_j \langle\, f_{i1} \otimes \ldots \otimes f_{in},\, x_{j1} \widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes} x_{jn} \,\rangle \\ &= \sum_i \sum_j \langle\, f_{i1} \widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes} f_{in},\, x_{j1} \otimes \ldots \otimes x_{jn} \,\rangle \\ &= \Big\langle \sum_i f_{i1} \widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes} f_{in}, \sum_j x_{j1} \otimes \ldots \otimes x_{jn} \Big\rangle \\ &= \Big\langle \mathfrak{s}'_n(f), \sum_j x_{j1} \otimes \ldots \otimes x_{jn} \Big\rangle = 0.\end{aligned}$$

Звідси випливає, що $f \in (\mathcal{X}^{\widehat{\otimes}n})^\perp$, тобто $\operatorname{Ker} \mathfrak{s}'_n \subset (\mathcal{X}^{\widehat{\otimes}n})^\perp$.

Навпаки, нехай $f \in (\mathcal{X}^{\widehat{\otimes}n})^\perp \subset \mathcal{X}'^{\otimes n}$. Тоді для довільного $x \in \mathcal{X}^{\otimes n}$ маємо $\langle \mathfrak{s}'_n(f), x\rangle = \langle f, \mathfrak{s}_n(x)\rangle = 0$ оскільки $\mathfrak{s}_n(x) \in \mathcal{X}^{\widehat{\otimes}n}$. Таким чином, $f \in \operatorname{Ker} \mathfrak{s}'_n$, тобто $(\mathcal{X}^{\widehat{\otimes}n})^\perp \subset \operatorname{Ker} \mathfrak{s}'_n$. Отже, $(\mathcal{X}^{\widehat{\otimes}n})^\perp = \operatorname{Ker} \mathfrak{s}'_n$.

В результаті отримали, що дуальним до $\mathcal{X}^{\widehat{\otimes}n}$ буде факторпростір $\mathcal{X}'^{\otimes n}/\operatorname{Ker} \mathfrak{s}'_n$. Залишилось показати, що $\mathcal{X}'^{\widehat{\otimes}n} \simeq \mathcal{X}'^{\otimes n}/\operatorname{Ker} \mathfrak{s}'_n$. Ця рівність є очевидним наслідком представлення $\mathcal{X}'^{\otimes n} = \mathcal{X}'^{\widehat{\otimes}n} \oplus \operatorname{Ker} \mathfrak{s}'_n$ тензорного добутку у вигляді прямої суми його підпросторів $\mathcal{X}'^{\widehat{\otimes}n}$ та $\operatorname{Ker} \mathfrak{s}'_n$. Отже, рівність (2.2.1) доведено. □

Поліноми на локально опуклих просторах коротко описано в параграфі 2.1 та детально у книзі [99]. Нагадаємо, що символи $\mathcal{P}_n(\mathcal{X}')$ та $\mathcal{P}(\mathcal{X}')$ позначають відповідно простори n-однорідних та всіх неперервних поліномів на просторі $\mathcal{X}'$, а $\mathcal{P}'_n(\mathcal{X}')$ та $\mathcal{P}'(\mathcal{X}')$ — їх сильно спряжені.

Для спрощення записів введемо наступні позначення

$$\Gamma(\mathcal{X}) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+}{}_{fin}\, \mathcal{X}^{\widehat{\otimes}n} \qquad \text{та} \qquad \Gamma(\mathcal{X}') := \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{X}'^{\widehat{\otimes}n}.$$

Зауважимо, що ми розглядаємо випадок, коли елементи прямої суми містять лише скінченну, але не фіксовану кількість доданків.

З теореми 2.2.2 випливає, що наступна формула коректно задає білінійну форму

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{x} \rangle = \Big\langle \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} f_n, \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} x_n \Big\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \langle f_n, x_n \rangle, \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma(\mathcal{X}), \quad \boldsymbol{f} \in \Gamma(\mathcal{X}'), \tag{2.2.2}$$

де $\boldsymbol{x} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} x_n$, $x_n \in \mathcal{X}^{\widehat{\otimes} n}$ і $\boldsymbol{f} = \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} f_n$, $f_n \in \mathcal{X}'^{\widehat{\otimes} n} \simeq (\mathcal{X}^{\widehat{\otimes} n})'$. Зауважимо, що сума в правій частині рівності (2.2.2) є скінченною, хоч кількість доданків не фіксована (вона залежить від кількості доданків елемента $\boldsymbol{x} \in \Gamma(\mathcal{X})$). Звідси випливає коректність задання білінійної форми. А це, в свою чергу, коректно задає добре відому [54, 4.4] дуальність $\langle \Gamma(\mathcal{X}'), \Gamma(\mathcal{X}) \rangle$.

Наступна теорема показує тензорну структуру просторів поліномів та спряжених до них просторів. Цією тензорною структурою ми користуватимемось у всій дисертації.

Теорема 2.2.3. *Для довільного ядерного* (F) *або* (DF) *простору* $\mathcal{X}$ *справджуються наступні лінійні топологічні ізоморфізми*

$$\begin{aligned} \Upsilon_n^{\mathcal{X}} &\colon \mathcal{X}^{\widehat{\otimes} n} \longrightarrow \mathcal{P}_n(\mathcal{X}'), & \Psi_n^{\mathcal{X}} &\colon \mathcal{X}'^{\widehat{\otimes} n} \longrightarrow \mathcal{P}_n(\mathcal{X}), \\ \Upsilon^{\mathcal{X}} &\colon \Gamma(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{X}'), & \Psi^{\mathcal{X}} &\colon \Gamma(\mathcal{X}') \longrightarrow \mathcal{P}'(\mathcal{X}'). \end{aligned}$$

Доведення. З рівності (2.2.1) та з означення простору n-однорідних неперервних поліномів (див. формули (2.1.3) та (2.1.4)) легко отримати ізоморфізм $\Psi_n^{\mathcal{X}}$. Замінюючи у попередніх міркуваннях $\mathcal{X}$ на $\mathcal{X}'$, отримаємо ізоморфізм $\Upsilon_n^{\mathcal{X}}$.

Топологічні ізоморфізми

$$\Upsilon^{\mathcal{X}} : \Gamma(\mathcal{X}) \ni \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} x_n \quad \longmapsto \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \Upsilon_n^{\mathcal{X}}(x_n) \in \mathcal{P}(\mathcal{X}'), \qquad x_n \in \mathcal{X}^{\widehat{\otimes} n},$$

та

$$\Psi^{\mathcal{X}} : \Gamma(\mathcal{X}') \ni \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} f_n \quad \longmapsto \quad \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \Psi_n^{\mathcal{X}}(f_n) \in \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{P}_n(\mathcal{X}), \qquad f_n \in \mathcal{X}'^{\widehat{\otimes}n}, \tag{2.2.3}$$

діють як лінійні розширення відображень

$$\Upsilon_n^{\mathcal{X}} \colon \mathcal{X}^{\widehat{\otimes}n} \longrightarrow \mathcal{P}_n(\mathcal{X}') \qquad \text{та} \qquad \Psi_n^{\mathcal{X}} \colon \mathcal{X}'^{\widehat{\otimes}n} \longrightarrow \mathcal{P}_n(\mathcal{X})$$

відповідно. Використовуючи дуальність $\langle\, \Gamma(\mathcal{X}'), \Gamma(\mathcal{X})\,\rangle$, отримаємо ізоморфізми

$$\mathcal{P}'(\mathcal{X}') \simeq \big(\Gamma(\mathcal{X})\big)' \simeq \Gamma(\mathcal{X}') \simeq \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{P}_n(\mathcal{X}). \tag{2.2.4}$$

При цьому, ізоморфізм $\Psi^{\mathcal{X}}$ з (2.2.3) набуде свого остаточного вигляду $\Psi^{\mathcal{X}} \colon \Gamma(\mathcal{X}') \longrightarrow \mathcal{P}'(\mathcal{X}')$. □

Зауважимо, що простори $\mathcal{P}_n(\mathcal{X})$, $\mathcal{P}_n(\mathcal{X}')$, $\mathcal{P}(\mathcal{X}')$ і $\mathcal{P}'(\mathcal{X}')$ ядерні та рефлексивні. При цьому справджуються наступні рівності для відповідних дуальностей:

$$\big\langle \mathcal{P}_n(\mathcal{X}), \mathcal{P}_n(\mathcal{X}')\big\rangle = \big\langle \mathcal{X}'^{\widehat{\otimes}n}, \mathcal{X}^{\widehat{\otimes}n}\big\rangle, \qquad \big\langle \mathcal{P}'(\mathcal{X}'), \mathcal{P}(\mathcal{X}')\big\rangle = \big\langle \Gamma(\mathcal{X}'), \Gamma(\mathcal{X})\big\rangle.$$

Крім того, справджуються рівності $\Psi_n^{\mathcal{X}} = \big[(\Upsilon_n^{\mathcal{X}})'\big]^{-1}$ і $\Psi^{\mathcal{X}} = \big[(\Upsilon^{\mathcal{X}})'\big]^{-1}$.

Кожному елементу $U = \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} U_n$ з простору $\mathcal{P}'(\mathcal{X}')$ та довільному числу $m \in \mathbb{Z}_+$ можна поставити у відповідність поліном P_m, заданий на просторі $\mathcal{X}$ формулою

$$P_m(x) := \sum_{n=0}^{m} \langle\, u_n,\, x^{\otimes n}\,\rangle, \qquad x \in \mathcal{X}, \tag{2.2.5}$$

де $u_n := [\Psi_n^{\mathcal{X}}]^{-1}(U_n) \in \mathcal{X}'^{\widehat{\otimes}n} \simeq (\mathcal{X}^{\widehat{\otimes}n})'$.

Теорема 2.2.4. *Якщо простір $\mathcal{X}$ неперервно та щільно вкладений в $\mathcal{X}'$, то справджуються наступні неперервні щільні вкладення:*

$$\mathcal{P}_n(\mathcal{X}') \looparrowright \mathcal{P}_n(\mathcal{X}), \qquad \mathcal{P}(\mathcal{X}') \looparrowright \mathcal{P}'(\mathcal{X}').$$

Доведення. Нехай вкладення $\mathcal{X} \looparrowright \mathcal{X}'$ є неперервним та щільним. Тоді $\mathcal{X}^{\widehat{\otimes} n} \looparrowright \mathcal{X}'^{\widehat{\otimes} n}$, а, отже, $\mathcal{P}_n(\mathcal{X}') \looparrowright \mathcal{P}_n(\mathcal{X})$. З очевидних вкладень $\bigoplus_n \mathcal{X}^{\widehat{\otimes} n} \looparrowright \bigoplus_n \mathcal{X}'^{\widehat{\otimes} n}$ та $\bigoplus_n \mathcal{X}'^{\widehat{\otimes} n} \looparrowright \bigtimes_n \mathcal{X}'^{\widehat{\otimes} n}$ випливає, що неперервні щільні вкладення

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}') \simeq \Gamma(\mathcal{X}) \looparrowright \bigoplus_{\substack{fin \\ n \in \mathbb{Z}_+}} \mathcal{X}'^{\widehat{\otimes} n} \looparrowright \Gamma(\mathcal{X}') \simeq \mathcal{P}'(\mathcal{X}')$$

також справджуються. ☐

Твердження 2.2.1. (i) *Локально опуклий простір $\mathcal{P}'(\mathcal{X}')$ є поповненням у сильній топології множини поліномів скінченного типу вигляду*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \sum_{f_j \in \mathcal{X}'} \langle f_1 \otimes \ldots \otimes f_n, x^{\otimes n} \rangle$$

(як функцій змінної $x \in \mathcal{X}$). Спряжений простір $\mathcal{X}'$ замкнутий в $\mathcal{P}'(\mathcal{X}')$.

(ii) *Локально опуклий простір $\mathcal{P}(\mathcal{X}')$ є поповненням у топології рівномірної збіжності на обмежених множинах $\mathcal{X}'$ множини поліномів скінченного типу вигляду*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \sum_{x_j \in \mathcal{X}} \langle f^{\otimes n}, x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \rangle$$

(як функцій змінної $f \in \mathcal{X}'$). Простір $\mathcal{X}$ замкнутий в $\mathcal{P}(\mathcal{X}')$.

Доведення. Відомо [120], що елементи просторів $\mathcal{X}'^{\widehat{\otimes} n}$ та $\mathcal{X}^{\widehat{\otimes} n}$ можна наблизити лінійними комбінаціями елементів вигляду $f_1 \widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes} f_n$ та $x_1 \widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes} x_n$ відповідно, де $f_j \in \mathcal{X}'$, $x_j \in \mathcal{X}$, $j = 1, \ldots, n$. Тепер правильність обох частин (i) та (ii) твердження 2.2.1 випливає з ізоморфізмів $\Gamma(\mathcal{X}') \simeq \mathcal{P}'(\mathcal{X}')$ та $\Gamma(\mathcal{X}) \simeq \mathcal{P}(\mathcal{X}')$, встановлених в теоремі 2.2.3. ☐

Простір $\mathcal{P}(\mathcal{X}')$ є мультиплікативною алгеброю відносно множення

$$P \diamond Q := \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \sum_{m=0}^{n} P_m \cdot Q_{n-m}, \qquad P, Q \in \mathcal{P}(\mathcal{X}'),$$

де $P = \sum_n P_n$, $Q = \sum_n Q_n$, а $P_m \cdot Q_{n-m}$ позначає поточкове множення поліномів, тобто $(P_m \cdot Q_{n-m})(f) = P_m(f) \cdot Q_{n-m}(f)$, $\forall\, f \in \mathcal{X}'$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$, $m \leq n$.

Твердження 2.2.2. *Пряма сума* $\Gamma(\mathcal{X})$ *є локально опуклою алгеброю відносно операції згорткового типу*

$$\boldsymbol{p} \diamond \boldsymbol{q} := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_+} \sum_{m=0}^{n} p_m \mathbin{\widehat{\otimes}} q_{n-m}, \qquad \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \Gamma(\mathcal{X}),$$

де $\boldsymbol{p} = \bigoplus_n p_n$, $\boldsymbol{q} = \bigoplus_n q_n$, $p_n, q_n \in \mathcal{X}^{\widehat{\otimes} n}$. *При цьому відображення*

$$\Upsilon^{\mathcal{X}} \colon \bigl\{\Gamma(\mathcal{X}), \diamond\bigr\} \longrightarrow \bigl\{\mathcal{P}(\mathcal{X}'), \diamond\bigr\}$$

діє як алгебраїчний ізоморфізм.

Зауважимо, що операцію $\diamond$ згорткового типу по-іншому ще називають добутком Віка [141].

Доведення. Нам достатньо перевірити, що лінійний ізоморфізм $\Upsilon^{\mathcal{X}}$ є ще й алгебраїчним. Для всіх $p_m \in \mathcal{X}^{\widehat{\otimes} m}$ та $q_k \in \mathcal{X}^{\widehat{\otimes} k}$ маємо

$$p_m \mathbin{\widehat{\otimes}} q_k \in \mathcal{X}^{\widehat{\otimes} m} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{X}^{\widehat{\otimes} k} = \mathcal{X}^{\widehat{\otimes}(m+k)}.$$

Тому $p_m \mathbin{\widehat{\otimes}} q_{n-m} \in \mathcal{X}^{\widehat{\otimes} n}$ і

$$\langle f^{\otimes m}, p_m \rangle \cdot \langle f^{\otimes(n-m)}, q_{n-m} \rangle = \langle f^{\otimes n}, p_m \mathbin{\widehat{\otimes}} q_{n-m} \rangle.$$

Тепер з твердження 2.2.1 випливає, що $\Upsilon^{\mathcal{X}}$ — алгебраїчний ізоморфізм. □

Нехай, так як і в теоремі 2.2.4, простір $\mathcal{X}$ неперервно та щільно вкладений в $\mathcal{X}'$. Тоді згорткова операція алгебри $\bigl\{\Gamma(\mathcal{X}), \diamond\bigr\}$ може бути розширена до операції згорткового типу в просторі $\Gamma(\mathcal{X}')$

$$\boldsymbol{f} \diamond \boldsymbol{g} := \bigtimes_{n \in \mathbb{Z}_+} \Bigl(\sum_{m=0}^{n} f_m \mathbin{\widehat{\otimes}} g_{n-m}\Bigr), \qquad \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \in \Gamma(\mathcal{X}'), \tag{2.2.6}$$

де $\boldsymbol{f} = \bigtimes_n f_n$, $\boldsymbol{g} = \bigtimes_n g_n$, $f_n, g_n \in \mathcal{X}'^{\widehat{\otimes} n}$. При цьому $\Gamma(\mathcal{X}')$ теж стає топологічною згортковою алгеброю.

Твердження 2.2.3. *Множення алгебри $\mathcal{P}(\mathcal{X}')$ може бути однозначно розширене до множення в $\mathcal{P}'(\mathcal{X}')$, що задано формулою*

$$U \diamond V := \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \sum_{m=0}^{n} U_m \cdot V_{n-m}, \qquad U, V \in \mathcal{P}'(\mathcal{X}'),$$

де $U = \bigtimes_n U_n$, $V = \bigtimes_n V_n$, $U_n, V_n \in \mathcal{P}_n(\mathcal{X})$, при цьому добуток у правій частині останньої рівності є звичайним поточковим множенням двох многочленів. Таким чином, $\mathcal{P}'(\mathcal{X}')$ є топологічною алгеброю, а відображення

$$\Psi^{\mathcal{X}} \colon \big\{\Gamma(\mathcal{X}'), \diamond\big\} \longrightarrow \big\{\mathcal{P}'(\mathcal{X}'), \diamond\big\}$$

діє як алгебраїчний ізоморфізм.

Доведення. З теореми 2.2.3 та твердження 2.2.1 безпосередньо випливає, що відображення

$$\Psi^{\mathcal{X}} \colon \Gamma(\mathcal{X}') \ni \boldsymbol{f} = \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} f_n \quad \longmapsto \quad U = \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} U_n \in \mathcal{P}'(\mathcal{X}'),$$

де $U_n = \Psi^{\mathcal{X}}_n(f_n) \in \mathcal{P}_n(\mathcal{X})$, є шуканим ізоморфізмом алгебр (див. також формулу (2.2.3)). ☐

Слід відзначити, що в дисертації тензорна структура типу (2.2.1) і, як наслідок, ізоморфізми (2.2.4) використані істотним чином, зокрема, для побудови функціонального числення для зліченних наборів генераторів сильно неперервних напівгруп. В інших відомих нескінченновимірних узагальненнях класичних просторів основних функцій та розподілів [3–5], наприклад, в аналізі білого шуму, (див. [127, 140, 150, 175]), теж описано тензорну структуру типу (2.2.1) для інших ніж у дисертації класів просторів.

2.3 Оператори на просторах поліноміальних основних та узагальнених функцій

Нехай $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$ — довільні локально опуклі ядерні (F) або (DF) простори, а $A \in \mathscr{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ та $A' \in \mathscr{L}(\mathcal{Y}',\mathcal{X}')$ — пара взаємно спряжених операторів, $I_{\mathbb{C}} \in \mathscr{L}(\mathbb{C})$ — одиничний оператор на $\mathbb{C}$.

Задамо оператори $A^{\otimes n} : \mathcal{X}^{\widehat{\otimes} n} \longrightarrow \mathcal{Y}^{\widehat{\otimes} n}$ та $A'^{\otimes n} : \mathcal{Y}'^{\widehat{\otimes} n} \longrightarrow \mathcal{X}'^{\widehat{\otimes} n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, за правилом: $A^{\otimes 0} := I_{\mathbb{C}}$, $A'^{\otimes 0} := I_{\mathbb{C}}$, а для кожного натурального n оператори $A^{\otimes n}$ та $A'^{\otimes n}$ визначимо як лінійні та неперервні розширення відображень

$$x_1 \widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes}\, x_n \quad \longmapsto \quad Ax_1 \widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes}\, Ax_n, \qquad x_i \in \mathcal{X}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$y_1 \widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes}\, y_n \quad \longmapsto \quad A'y_1 \widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes}\, A'y_n, \qquad y_i \in \mathcal{Y}', \quad i = 1, \ldots, n,$$

відповідно. Відмітимо, що коректність такого означення випливає із зауваження 2.1.2.

Визначимо оператори $A^{\otimes} \in \mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{X}),\Gamma(\mathcal{Y})\big)$ та $A'^{\otimes} \in \mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{Y}'),\Gamma(\mathcal{X}')\big)$ на відповідних просторах типу Фока наступним чином:

$$\begin{aligned}
A^{\otimes} &:= \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} A^{\otimes n} : \ \Gamma(\mathcal{X}) \ni \boldsymbol{p} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} p_n \ \longmapsto \ A^{\otimes}\boldsymbol{p} := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} A^{\otimes n}p_n \in \Gamma(\mathcal{Y}),\\
A'^{\otimes} &:= \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} A'^{\otimes n} : \Gamma(\mathcal{Y}') \ni \boldsymbol{f} = \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} f_n \ \longmapsto \ A'^{\otimes}\boldsymbol{f} := \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} A'^{\otimes n}f_n \in \Gamma(\mathcal{X}'),
\end{aligned} \tag{2.3.1}$$

де $p_n \in \mathcal{X}^{\widehat{\otimes} n}$, $f_n \in \mathcal{Y}'^{\widehat{\otimes} n}$.

Теорема 2.3.1. *Наступні діаграми*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_n(\mathcal{X}') \arrow[r, "A_{\mathcal{P}}^{\otimes n}"] \arrow[d, shift left, "{[\Upsilon_n^{\mathcal{X}}]^{-1}}"] & \mathcal{P}_n(\mathcal{Y}') \arrow[d, shift left, "{[\Upsilon_n^{\mathcal{Y}}]^{-1}}"] \\
\mathcal{X}^{\widehat{\otimes} n} \arrow[r, "A^{\otimes n}"] \arrow[u, shift left, "\Upsilon_n^{\mathcal{X}}"] & \mathcal{Y}^{\widehat{\otimes} n}, \arrow[u, shift left, "\Upsilon_n^{\mathcal{Y}}"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_n(\mathcal{Y}) \arrow[r, "A_{\mathcal{P}}'^{\otimes n}"] \arrow[d, shift left, "{[\Psi_n^{\mathcal{Y}}]^{-1}}"] & \mathcal{P}_n(\mathcal{X}) \arrow[d, shift left, "{[\Psi_n^{\mathcal{X}}]^{-1}}"] \\
\mathcal{Y}'^{\widehat{\otimes} n} \arrow[r, "A'^{\otimes n}"] \arrow[u, shift left, "\Psi_n^{\mathcal{Y}}"] & \mathcal{X}'^{\widehat{\otimes} n} \arrow[u, shift left, "\Psi_n^{\mathcal{X}}"]
\end{tikzcd}$$

однозначно визначають взаємно спряжені лінійні неперервні оператори $A_{\mathcal{P}}^{\otimes n} \in \mathscr{L}\big(\mathcal{P}_n(\mathcal{X}'),\mathcal{P}_n(\mathcal{Y}')\big)$ *та* $A_{\mathcal{P}}'^{\otimes n} \in \mathscr{L}\big(\mathcal{P}_n(\mathcal{Y}),\mathcal{P}_n(\mathcal{X})\big)$ *на відповідних просторах* n*-однорідних поліномів.*

Доведення. Перш за все нагадаємо, що $\mathcal{X}^{\otimes_{\mathfrak{p}} n}$, $\mathcal{Y}^{\otimes_{\mathfrak{p}} n}$ відповідно позначають поповнення просторів $\mathcal{X}^{\otimes n}$, $\mathcal{Y}^{\otimes n}$ в локально опуклій проективній тензорній топології. Хоч раніше (див. зауваження 2.1.1) і була домовленість для спрощення позначень опускати індекс $\mathfrak{p}$, проте в межах цього доведення ми писатимемо цей індекс, щоб підкреслити різницю між такими просторами.

Зауважимо, що з теореми 2.2.3 випливає, що вище записані діаграми комутативні. Тому лінійні відображення $A_{\mathcal{P}}^{\otimes n} := \Upsilon_n^{\mathcal{Y}} \circ A^{\otimes n} \circ [\Upsilon_n^{\mathcal{X}}]^{-1}$ та $A'^{\otimes n}_{\mathcal{P}} := \Psi_n^{\mathcal{X}} \circ A'^{\otimes n} \circ [\Psi_n^{\mathcal{Y}}]^{-1}$ однозначно можна визначити за допомогою рівностей (див. формулу (2.1.5))

$$\left[A_{\mathcal{P}}^{\otimes n} P_n\right](y) := \langle \underbrace{A'y \otimes \cdots \otimes A'y}_{n}, p_n \rangle, \qquad y \in \mathcal{Y}',$$

$$\left[A'^{\otimes n}_{\mathcal{P}} Q_n\right](x) := \langle q_n, \underbrace{Ax \otimes \cdots \otimes Ax}_{n} \rangle, \qquad x \in \mathcal{X},$$

де $P_n \in \mathcal{P}_n(\mathcal{X}')$, $p_n := [\Upsilon_n^{\mathcal{X}}]^{-1}(P_n) \in \mathcal{X}^{\widehat{\otimes}_{\mathfrak{p}} n}$, $Q_n \in \mathcal{P}_n(\mathcal{Y})$, $q_n := [\Psi_n^{\mathcal{Y}}]^{-1}(Q_n) \in \mathcal{Y}'^{\widehat{\otimes}_{\mathfrak{p}} n} \simeq (\mathcal{Y}^{\widehat{\otimes}_{\mathfrak{p}} n})'$.

Із вище записаних співвідношень випливає, що для завершення доведення залишилось показати неперервність операторів $A^{\otimes n}$ та $A'^{\otimes n}$. Зауважимо, що оператори $A'^{\otimes n}$ та $A^{\otimes n}$ є взаємно спряженими, тобто

$$\langle A'y_1 \,\widehat{\otimes}\, \ldots \,\widehat{\otimes}\, A'y_n, x_1 \,\widehat{\otimes}\, \ldots \,\widehat{\otimes}\, x_n \rangle = \langle y_1 \,\widehat{\otimes}\, \ldots \,\widehat{\otimes}\, y_n, Ax_1 \,\widehat{\otimes}\, \ldots \,\widehat{\otimes}\, Ax_n \rangle,$$

де $y_1 \,\widehat{\otimes}\, \ldots \,\widehat{\otimes}\, y_n \in \mathcal{Y}'^{\widehat{\otimes} n}$, $x_1 \,\widehat{\otimes}\, \ldots \,\widehat{\otimes}\, x_n \in \mathcal{X}^{\widehat{\otimes} n}$, $y_i \in \mathcal{Y}'$, $x_i \in \mathcal{X}$, $i = 1, \ldots, n$.

З неперервності оператора A на $\mathcal{X}$ випливає, що для довільної неперервної напівнорми $q_1 \otimes \ldots \otimes q_n$ на $\mathcal{Y}^{\otimes n}$ знайдуться такі константи $C_1, \ldots, C_n$ та напівнорми $p_1, \ldots, p_n$ на $\mathcal{X}$, що

$$\begin{aligned} (q_1 \otimes \ldots \otimes q_n)(A^{\otimes n} x) &= \inf \sum_{i=1}^{m} q_1(Ax_{i_1}) \cdots q_n(Ax_{i_n}) \\ &\leq \inf \sum_{i=1}^{m} C_1 p_1(x_{i_1}) \cdots C_n p_n(x_{i_n}) \qquad (2.3.2) \\ &= C_1 \cdots C_n (p_1 \otimes \ldots \otimes p_n)(x), \end{aligned}$$

де інфімум беруть за всіма зображеннями $x = \sum_{i=1}^{m} x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_n} \in \mathcal{X}^{\otimes n}$. Звідси випливає неперервність оператора $A^{\otimes n} : \mathcal{X}^{\otimes n} \longrightarrow \mathcal{Y}^{\otimes n}$.

З щільності вкладень $\mathcal{X}^{\otimes n} \looparrowright \mathcal{X}^{\otimes_{\mathfrak{p}} n}$ та $\mathcal{Y}^{\otimes n} \looparrowright \mathcal{Y}^{\otimes_{\mathfrak{p}} n}$ випливає неперервність оператора $A^{\otimes n} : \mathcal{X}^{\otimes_{\mathfrak{p}} n} \longrightarrow \mathcal{Y}^{\otimes_{\mathfrak{p}} n}$.

Нехай $\mathfrak{s}_n$ — оператор симетризації, що заданий на $\mathcal{X}^{\otimes_{\mathfrak{p}} n}$ формулою (2.1.1). Не буде плутанини, якщо тим самим символом $\mathfrak{s}_n$ ми позначимо оператор симетризації на $\mathcal{Y}^{\otimes_{\mathfrak{p}} n}$. Тоді маємо $\mathfrak{s}_n \circ A^{\otimes n} = A^{\otimes n} \circ \mathfrak{s}_n$, оскільки оператор $A^{\otimes n}$ переводить симетричні тензори у симетричні. Оскільки на симетричних підпросторах $\mathcal{X}^{\widehat{\otimes}_{\mathfrak{p}} n}$ та $\mathcal{Y}^{\widehat{\otimes}_{\mathfrak{p}} n}$ топології індуковані із відповідних просторів $\mathcal{X}^{\otimes_{\mathfrak{p}} n}$ та $\mathcal{Y}^{\otimes_{\mathfrak{p}} n}$, то оператор симетризації є неперервним. Звідси випливає неперервність звуження $A^{\otimes n} : \mathcal{X}^{\widehat{\otimes}_{\mathfrak{p}} n} \longrightarrow \mathcal{Y}^{\widehat{\otimes}_{\mathfrak{p}} n}$.

Неперервність спряженого оператора $A'^{\otimes n} : \mathcal{Y}'^{\widehat{\otimes}_{\mathfrak{p}} n} \longrightarrow \mathcal{X}'^{\widehat{\otimes}_{\mathfrak{p}} n}$ доводиться аналогічно. □

Теорема 2.3.2. *Наступні діаграми*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(\mathcal{X}') \arrow[r, "A_{\mathcal{P}}^{\otimes}"] \arrow[d, shift left, "{[\Upsilon^{\mathcal{X}}]^{-1}}"] & \mathcal{P}(\mathcal{Y}') \arrow[d, shift left, "{[\Upsilon^{\mathcal{Y}}]^{-1}}"] \\
\Gamma(\mathcal{X}) \arrow[r, "A^{\otimes}"] \arrow[u, shift left, "\Upsilon^{\mathcal{X}}"] & \Gamma(\mathcal{Y}), \arrow[u, shift left, "\Upsilon^{\mathcal{Y}}"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{P}'(\mathcal{Y}') \arrow[r, "A_{\mathcal{P}}'^{\otimes}"] \arrow[d, shift left, "{[\Psi^{\mathcal{Y}}]^{-1}}"] & \mathcal{P}'(\mathcal{X}') \arrow[d, shift left, "{[\Psi^{\mathcal{X}}]^{-1}}"] \\
\Gamma(\mathcal{Y}') \arrow[r, "A'^{\otimes}"] \arrow[u, shift left, "\Psi^{\mathcal{Y}}"] & \Gamma(\mathcal{X}') \arrow[u, shift left, "\Psi^{\mathcal{X}}"]
\end{tikzcd}$$

однозначно визначають взаємно спряжені лінійні неперервні оператори $A_{\mathcal{P}}^{\otimes} \in \mathscr{L}\big(\mathcal{P}(\mathcal{X}'), \mathcal{P}(\mathcal{Y}')\big)$ *та* $A_{\mathcal{P}}'^{\otimes} \in \mathscr{L}\big(\mathcal{P}'(\mathcal{Y}'), \mathcal{P}'(\mathcal{X}')\big)$ *на відповідних просторах поліноміальних основних та узагальнених функцій.*

Доведення. З теореми 2.2.3 випливає, що вище записані діаграми комутативні. Тому лінійні відображення $A_{\mathcal{P}}^{\otimes} := \Upsilon^{\mathcal{Y}} \circ A^{\otimes} \circ [\Upsilon^{\mathcal{X}}]^{-1}$ та $A_{\mathcal{P}}'^{\otimes} := \Psi^{\mathcal{X}} \circ A'^{\otimes} \circ [\Psi^{\mathcal{Y}}]^{-1}$ однозначно можна визначити за допомогою рівностей

$$A_{\mathcal{P}}^{\otimes} P := \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} A_{\mathcal{P}}^{\otimes n} P_n, \qquad A_{\mathcal{P}}'^{\otimes} U := \bigtimes_{n \in \mathbb{Z}_+} A_{\mathcal{P}}'^{\otimes n} U_n,$$

де $P = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}_+} P_n \in \mathcal{P}(\mathcal{X}')$, $P_n \in \mathcal{P}_n(\mathcal{X}')$, $U = \bigtimes\limits_{n \in \mathbb{Z}_+} U_n \in \mathcal{P}'(\mathcal{Y}')$, $U_n \in \mathcal{P}_n(\mathcal{Y})$, а оператори $A_{\mathcal{P}}^{\otimes n}$ та $A_{\mathcal{P}}'^{\otimes n}$ визначені в теоремі 2.3.1. З цієї теореми та з формули (2.2.2) випливають рівності

$$\begin{aligned}\big\langle U, A_{\mathcal{P}}^{\otimes}P\big\rangle &= \Big\langle \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} U_n, \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} A_{\mathcal{P}}^{\otimes n}P_n\Big\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \big\langle U_n, A_{\mathcal{P}}^{\otimes n}P_n\big\rangle \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \big\langle A_{\mathcal{P}}'^{\otimes n}U_n, P_n\big\rangle = \Big\langle \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} A_{\mathcal{P}}'^{\otimes n}U_n, \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} P_n\Big\rangle = \big\langle A_{\mathcal{P}}'^{\otimes}U, P\big\rangle.\end{aligned}$$

тобто оператори $A_{\mathcal{P}}^{\otimes}$ та $A_{\mathcal{P}}'^{\otimes}$ є взаємно спряженими.

Крім того, у теоремі 2.3.1 доведено неперервність операторів $A_{\mathcal{P}}^{\otimes n}$ та $A_{\mathcal{P}}'^{\otimes n}$. Тепер з означень локально опуклих топологій прямої суми та декартового добутку випливає неперервність операторів $A_{\mathcal{P}}^{\otimes} \in \mathscr{L}\big(\mathcal{P}(\mathcal{X}'), \mathcal{P}(\mathcal{Y}')\big)$ та $A_{\mathcal{P}}'^{\otimes} \in \mathscr{L}\big(\mathcal{P}'(\mathcal{Y}'), \mathcal{P}'(\mathcal{X}')\big)$. □

Розглянемо тепер випадок $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$. Нехай $A \in \mathscr{L}(\mathcal{X})$ та $A' \in \mathscr{L}(\mathcal{X}')$ — пара взаємно спряжених операторів, а $\mathbf{0} \in \mathscr{L}(\mathbb{C})$ — нульовий оператор на $\mathbb{C}$.

Поряд з операторами $A^{\otimes} \in \mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{X})\big)$ та $A'^{\otimes} \in \mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{X}')\big)$ (див. формулу (2.3.1)) на відповідних просторах типу Фока можна задати інші оператори $A^{\{\otimes\}} \in \mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{X})\big)$ та $A'^{\{\otimes\}} \in \mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{X}')\big)$.

Для довільного $n \in \mathbb{Z}_+$ задамо оператори $A^{\{\otimes\}n} \in \mathscr{L}\big(\mathcal{X}^{\otimes n}\big)$ та $A'^{\{\otimes\}n} \in \mathscr{L}\big(\mathcal{X}'^{\otimes n}\big)$ за правилом: $A^{\{\otimes\}0} = \mathbf{0}$, $A'^{\{\otimes\}0} = \mathbf{0}$, а для кожного натурального n оператори $A^{\{\otimes\}n}$ і $A'^{\{\otimes\}n}$ визначимо як лінійне та неперервне розширення відображень

$$\begin{aligned} x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \quad &\longmapsto \quad \sum_{j=1}^{n} x_1 \otimes \ldots \otimes x_{j-1} \otimes Ax_j \otimes x_{j+1} \otimes \ldots \otimes x_n, \\ y_1 \otimes \ldots \otimes y_n \quad &\longmapsto \quad \sum_{j=1}^{n} y_1 \otimes \ldots \otimes y_{j-1} \otimes A'y_j \otimes y_{j+1} \otimes \ldots \otimes y_n, \end{aligned}$$

відповідно, де $x_i \in \mathcal{X}$, $y_i \in \mathcal{X}'$, $i = 1, \ldots, n$.

Тепер визначимо два оператори $A^{\{\otimes\}} \in \mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{X})\big)$ та $A'^{\{\otimes\}} \in \mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{X}')\big)$

на відповідних просторах типу Фока наступним чином:

$$\begin{array}{llcl} A^{\{\otimes\}} := \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} A^{\{\otimes\}n} : & \Gamma(\mathcal{X}) & \longrightarrow & \Gamma(\mathcal{X}) \\ & \boldsymbol{p} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} p_n & \longmapsto & A^{\{\otimes\}}\boldsymbol{p} := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} A^{\{\otimes\}n} p_n, \end{array}$$

$$\begin{array}{llcl} A'^{\{\otimes\}} := \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} A'^{\{\otimes\}n} : & \Gamma(\mathcal{X}') & \longrightarrow & \Gamma(\mathcal{X}') \\ & \boldsymbol{f} := \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} f_n & \longmapsto & A'^{\{\otimes\}}\boldsymbol{f} = \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} A'^{\{\otimes\}n} f_n, \end{array}$$

де $p_n \in \mathcal{X}^{\widehat{\otimes} n}$, $f_n \in \mathcal{X}'^{\widehat{\otimes} n}$, а оператори $A^{\{\otimes\}n}$, $A'^{\{\otimes\}n}$ тут позначають звуження на підпростори $\mathcal{X}^{\widehat{\otimes} n} \subset \mathcal{X}^{\otimes n}$, $\mathcal{X}'^{\widehat{\otimes} n} \subset \mathcal{X}'^{\otimes n}$ відповідно.

Теорема 2.3.3. *Наступні діаграми*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}_n(\mathcal{X}') \arrow[r, "A_{\mathcal{P}}^{\{\otimes\}n}"] & \mathcal{P}_n(\mathcal{X}') \\ \mathcal{X}^{\widehat{\otimes} n} \arrow[u, shift left, "\Upsilon_n^{\mathcal{X}}"] \arrow[r, "A^{\{\otimes\}n}"] & \mathcal{X}^{\widehat{\otimes} n}, \arrow[u, shift left, "\Upsilon_n^{\mathcal{X}}"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{P}_n(\mathcal{X}) \arrow[r, "A'^{\{\otimes\}n}_{\mathcal{P}}"] \arrow[d, shift left, "{[\Psi_n^{\mathcal{X}}]^{-1}}"] & \mathcal{P}_n(\mathcal{X}) \arrow[d, shift left, "{[\Psi_n^{\mathcal{X}}]^{-1}}"] \\ \mathcal{X}'^{\widehat{\otimes} n} \arrow[u, shift left, "\Psi_n^{\mathcal{X}}"] \arrow[r, "A'^{\{\otimes\}n}"] & \mathcal{X}'^{\widehat{\otimes} n} \arrow[u, shift left, "\Psi_n^{\mathcal{X}}"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}_n(\mathcal{X}') \arrow[d, shift left, "{[\Upsilon_n^{\mathcal{X}}]^{-1}}"] & \mathcal{P}_n(\mathcal{X}') \arrow[d, shift left, "{[\Upsilon_n^{\mathcal{X}}]^{-1}}"] \\ \mathcal{X}^{\widehat{\otimes} n} & \mathcal{X}^{\widehat{\otimes} n} \end{tikzcd}$$

однозначно визначають взаємно спряжені лінійні неперервні оператори $A_{\mathcal{P}}^{\{\otimes\}n} \in \mathscr{L}\big(\mathcal{P}_n(\mathcal{X}')\big)$ *та* $A'^{\{\otimes\}n}_{\mathcal{P}} \in \mathscr{L}\big(\mathcal{P}_n(\mathcal{X})\big)$ *на відповідних просторах* n*-однорідних поліномів.*

Доведення. З теореми 2.2.3 випливає, що вище записані діаграми комутативні. Тому лінійні відображення $A_{\mathcal{P}}^{\{\otimes\}n} := \Upsilon_n^{\mathcal{X}} \circ A^{\{\otimes\}n} \circ [\Upsilon_n^{\mathcal{X}}]^{-1}$ та $A'^{\{\otimes\}n}_{\mathcal{P}} := \Psi_n^{\mathcal{X}} \circ A'^{\{\otimes\}n} \circ [\Psi_n^{\mathcal{X}}]^{-1}$ однозначно можна визначити за допомогою рівностей

$$\begin{aligned} \big[A_{\mathcal{P}}^{\{\otimes\}n} P_n\big](y) &:= n\langle A'y \,\widehat{\otimes}\, y^{\widehat{\otimes}(n-1)}, p_n\rangle, \qquad && y \in \mathcal{X}', \\ \big[A'^{\{\otimes\}n}_{\mathcal{P}} Q_n\big](x) &:= n\langle q_n, Ax \,\widehat{\otimes}\, x^{\widehat{\otimes}(n-1)}\rangle, \qquad && x \in \mathcal{X}, \end{aligned}$$

де $P_n \in \mathcal{P}_n(\mathcal{X}')$, $p_n := [\Upsilon_n^{\mathcal{X}}]^{-1}(P_n) \in \mathcal{X}^{\widehat{\otimes}_{\mathfrak{p}} n}$, $Q_n \in \mathcal{P}_n(\mathcal{X})$, $q_n := [\Psi_n^{\mathcal{X}}]^{-1}(Q_n) \in \mathcal{X}'^{\widehat{\otimes} n} \simeq (\mathcal{X}^{\widehat{\otimes} n})'$.

Як і вище, достатньо довести неперервність операторів $A^{\{\otimes\}n}$, $A'^{\{\otimes\}n}$. Зауважимо, що в цьому випадку доведення відрізнятиметься від доведення теореми 2.3.1 тільки тим, що в оцінці типу (2.3.2) буде тільки одна константа C. Решта частина доведення повторюється практично без змін. $\square$

Теорема 2.3.4. *Наступні діаграми*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(\mathcal{X}') \arrow[r, "A_{\mathcal{P}}^{\{\otimes\}}"] \arrow[d, shift left, "{[\Upsilon^{\mathcal{X}}]^{-1}}"] & \mathcal{P}(\mathcal{X}') \arrow[d, shift left, "{[\Upsilon^{\mathcal{X}}]^{-1}}"] & \mathcal{P}'(\mathcal{X}') \arrow[r, "A_{\mathcal{P}}^{\prime\{\otimes\}}"] \arrow[d, shift left, "{[\Psi^{\mathcal{X}}]^{-1}}"] & \mathcal{P}'(\mathcal{X}') \arrow[d, shift left, "{[\Psi^{\mathcal{X}}]^{-1}}"] \\
\Gamma(\mathcal{X}) \arrow[r, "A^{\{\otimes\}}"] \arrow[u, shift left, "\Upsilon^{\mathcal{X}}"] & \Gamma(\mathcal{X}), \arrow[u, shift left, "\Upsilon^{\mathcal{X}}"] & \Gamma(\mathcal{X}') \arrow[r, "A^{\prime\{\otimes\}}"] \arrow[u, shift left, "\Psi^{\mathcal{X}}"] & \Gamma(\mathcal{X}') \arrow[u, shift left, "\Psi^{\mathcal{X}}"]
\end{tikzcd}$$

однозначно визначають взаємно спряжені лінійні неперервні оператори $A_{\mathcal{P}}^{\{\otimes\}} \in \mathscr{L}\big(\mathcal{P}(\mathcal{X}')\big)$ *та* $A_{\mathcal{P}}^{\prime\{\otimes\}} \in \mathscr{L}\big(\mathcal{P}'(\mathcal{X}')\big)$ *на відповідних просторах поліноміальних основних та узагальнених функцій.*

Доведення. Еквівалентним означенням відображень $A_{\mathcal{P}}^{\{\otimes\}} := \Upsilon^{\mathcal{X}} \circ A^{\{\otimes\}} \circ [\Upsilon^{\mathcal{X}}]^{-1}$ та $A_{\mathcal{P}}^{\prime\{\otimes\}} := \Psi^{\mathcal{X}} \circ A^{\prime\{\otimes\}} \circ [\Psi^{\mathcal{X}}]^{-1}$ можна вважати рівності

$$A_{\mathcal{P}}^{\{\otimes\}} P := \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} A_{\mathcal{P}}^{\{\otimes\}n} P_n, \qquad A_{\mathcal{P}}^{\prime\{\otimes\}} U := \bigtimes_{n \in \mathbb{Z}_+} A_{\mathcal{P}}^{\prime\{\otimes\}n} U_n,$$

де $P = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}_+} P_n \in \mathcal{P}(\mathcal{X}')$, $P_n \in \mathcal{P}_n(\mathcal{X}')$, $U = \bigtimes\limits_{n \in \mathbb{Z}_+} U_n \in \mathcal{P}'(\mathcal{X}')$, $U_n \in \mathcal{P}_n(\mathcal{X})$, а оператори $A_{\mathcal{P}}^{\otimes n}$ та $A_{\mathcal{P}}^{\prime\otimes n}$ визначені в теоремі 2.3.3. $\square$

Теорема 2.3.5. *Для довільної пари взаємно спряжених операторів* $A \in \mathscr{L}(\mathcal{X})$ *та* $A' \in \mathscr{L}(\mathcal{X}')$ *оператори* $A^{\otimes} \in \mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{X})\big)$, $A'^{\otimes} \in \mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{X}')\big)$, $A_{\mathcal{P}}^{\otimes} \in \mathscr{L}\big(\mathcal{P}(\mathcal{X}')\big)$ *та* $A_{\mathcal{P}}^{\prime\otimes} \in \mathscr{L}\big(\mathcal{P}'(\mathcal{X}')\big)$ *є неперервними автоморфізмами відповідних алгебр.*

Доведення. Неперервність кожного з цих операторів вже доведена вище. Залишилось показати, що вони зберігають алгебраїчну операцію.

З означення оператора $A^{\otimes n}$ випливає, що його дію на елементарні тензори можна записати так:

$$\begin{aligned}
A^{\otimes n}[x_1 \widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes} x_n] &= Ax_1 \widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes} Ax_n \\
&= (Ax_1 \widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes} Ax_m) \widehat{\otimes} (Ax_{m+1} \widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes} Ax_n) \\
&= A^{\otimes m}[x_1 \widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes} x_m] \widehat{\otimes} A^{\otimes(n-m)}[x_{m+1} \widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes} x_n],
\end{aligned}$$

для всіх $x_i \in \mathcal{X}$, $i = 1, \ldots, n$, $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$.

Тому рівність

$$A^{\otimes n}[p_m \mathbin{\widehat{\otimes}} q_{n-m}] = A^{\otimes m}[p_m] \mathbin{\widehat{\otimes}} A^{\otimes(n-m)}[q_{n-m}]$$

справджується для довільних $p_m \in \mathcal{X}^{\widehat{\otimes} m}$ і $q_{n-m} \in \mathcal{X}^{\widehat{\otimes}(n-m)}$, $n, m \in \mathbb{N}$, $m < n$. При цьому очевидно, що $A^{\otimes 0}(p_0 \mathbin{\widehat{\otimes}} q_0) = A^{\otimes 0}p_0 \mathbin{\widehat{\otimes}} A^{\otimes 0}q_0$ для довільних $p_0, q_0 \in \mathcal{X}^{\widehat{\otimes} 0} = \mathbb{C}$.

Звідси отримуємо

$$\begin{aligned} A^{\otimes}(\boldsymbol{p} \diamond \boldsymbol{q}) &= A^{\otimes}\Big(\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_+} \sum_{m=0}^{n} p_m \mathbin{\widehat{\otimes}} q_{n-m} \Big) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_+} \Big(A^{\otimes n} \sum_{m=0}^{n} p_m \mathbin{\widehat{\otimes}} q_{n-m} \Big) \\ &= \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_+} \sum_{m=0}^{n} A^{\otimes n}[p_m \mathbin{\widehat{\otimes}} q_{n-m}] = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_+} \sum_{m=0}^{n} \big(A^{\otimes m}[p_m] \mathbin{\widehat{\otimes}} A^{\otimes(n-m)}[q_{n-m}] \big) \\ &= \Big(\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_+} A^{\otimes n} p_n \Big) \diamond \Big(\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_+} A^{\otimes n} q_n \Big) = A^{\otimes}\boldsymbol{p} \diamond A^{\otimes}\boldsymbol{q}, \quad \forall\, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \Gamma(\mathcal{X}), \end{aligned}$$

де $\boldsymbol{p} = \bigoplus_n p_n$, $\boldsymbol{q} = \bigoplus_n q_n$, $p_n, q_n \in \mathcal{X}^{\widehat{\otimes} n}$.

Вище було доведено (див. твердження 2.2.2), що відображення $\Upsilon^{\mathcal{X}}$ є топологічним ізоморфізмом алгебр. Враховуючи цей факт та означення відображення $A^{\otimes}_{\mathcal{P}} := \Upsilon^{\mathcal{X}} \circ A^{\otimes} \circ [\Upsilon^{\mathcal{X}}]^{-1}$, для довільних поліномів $P, Q \in \mathcal{P}(\mathcal{X}')$ з останньої доведеної рівності отримуємо

$$\begin{aligned} A^{\otimes}_{\mathcal{P}}(P \diamond Q) &= (\Upsilon^{\mathcal{X}} A^{\otimes} [\Upsilon^{\mathcal{X}}]^{-1})(P \diamond Q) = (\Upsilon^{\mathcal{X}} A^{\otimes})([\Upsilon^{\mathcal{X}}]^{-1} P \diamond [\Upsilon^{\mathcal{X}}]^{-1} Q) \\ &= \Upsilon^{\mathcal{X}}(A^{\otimes}(\boldsymbol{p} \diamond \boldsymbol{q})) = \Upsilon^{\mathcal{X}}(A^{\otimes}\boldsymbol{p} \diamond A^{\otimes}\boldsymbol{q}) = \Upsilon^{\mathcal{X}} A^{\otimes}\boldsymbol{p} \diamond \Upsilon^{\mathcal{X}} A^{\otimes}\boldsymbol{q} \\ &= (\Upsilon^{\mathcal{X}} A^{\otimes} [\Upsilon^{\mathcal{X}}]^{-1})(P) \diamond (\Upsilon^{\mathcal{X}} A^{\otimes} [\Upsilon^{\mathcal{X}}]^{-1})(Q) = A^{\otimes}_{\mathcal{P}} P \diamond A^{\otimes}_{\mathcal{P}} Q, \end{aligned}$$

де $\boldsymbol{p} := [\Upsilon^{\mathcal{X}}]^{-1} P \in \Gamma(\mathcal{X})$, $\boldsymbol{q} := [\Upsilon^{\mathcal{X}}]^{-1} Q \in \Gamma(\mathcal{X})$.

Отже, оператори $A^{\otimes} \in \mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{X})\big)$ та $A^{\otimes}_{\mathcal{P}} \in \mathscr{L}\big(\mathcal{P}(\mathcal{X}')\big)$ є неперервними автоморфізмами, що і треба було довести.

Доведення для спряжених операторів $A'^{\otimes} \in \mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{X}')\big)$ та $A'^{\otimes}_{\mathcal{P}} \in \mathscr{L}\big(\mathcal{P}'(\mathcal{X}')\big)$ аналогічне. □

Теорема 2.3.6. *Для довільної пари взаємно спряжених операторів* $A \in \mathscr{L}(\mathcal{X})$ *та* $A' \in \mathscr{L}(\mathcal{X}')$ *оператори* $A^{\{\otimes\}} \in \mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{X})\big)$, $A'^{\{\otimes\}} \in \mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{X}')\big)$,

$A_{\mathcal{P}}^{\{\otimes\}} \in \mathscr{L}\big(\mathcal{P}(\mathcal{X}')\big)$ та $A_{\mathcal{P}}'^{\{\otimes\}} \in \mathscr{L}\big(\mathcal{P}'(\mathcal{X}')\big)$ є неперервними диференціюваннями відповідних алгебр.

Доведення. Знову доведення достатньо провести для операторів $A^{\{\otimes\}} \in \mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{X})\big)$ та $A_{\mathcal{P}}^{\{\otimes\}} \in \mathscr{L}\big(\mathcal{P}(\mathcal{X}')\big)$. Для інших двох доведення аналогічне.

Покажемо спочатку, що оператор $A^{\{\otimes\}n}$ діє як диференціювання, тобто для нього справджується правило Лейбніца. На елементарних тензорах це випливає з рівностей

$$\begin{aligned}
A^{\{\otimes\}n}[x_1 \otimes \ldots \otimes x_n] &= \sum_{j=1}^{n} x_1 \otimes \ldots \otimes x_{j-1} \otimes Ax_j \otimes x_{j+1} \otimes \ldots \otimes x_n \\
&= \sum_{j=1}^{m} (x_1 \otimes \ldots \otimes Ax_j \otimes \ldots \otimes x_m) \otimes (x_{m+1} \otimes \ldots \otimes x_n) \\
&\qquad + \sum_{j=m+1}^{n} (x_1 \otimes \ldots \otimes x_m) \otimes (x_{m+1} \otimes \ldots \otimes Ax_j \otimes \ldots \otimes x_n) \\
&= \Big(\sum_{j=1}^{m} x_1 \otimes \ldots \otimes Ax_j \otimes \ldots \otimes x_m\Big) \otimes (x_{m+1} \otimes \ldots \otimes x_n) \\
&\qquad + (x_1 \otimes \ldots \otimes x_m) \otimes \Big(\sum_{j=m+1}^{n} x_{m+1} \otimes \ldots \otimes Ax_j \otimes \ldots \otimes x_n\Big) \\
&= A^{\{\otimes\}m}[x_1 \otimes \cdots \otimes x_m] \otimes (x_{m+1} \otimes \ldots \otimes x_n) \\
&\qquad + (x_1 \otimes \ldots \otimes x_m) \otimes A^{\{\otimes\}(n-m)}[x_{m+1} \otimes \cdots \otimes x_n]
\end{aligned}$$

для довільних $x_i \in \mathcal{X}$, $i = 1, \ldots, n$, $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$, звідки отримуємо рівність

$$A^{\{\otimes\}n}[p_m \otimes q_{n-m}] = A^{\{\otimes\}m}[p_m] \otimes q_{n-m} + p_m \otimes A^{\{\otimes\}(n-m)}[q_{n-m}]$$

для довільних $p_m \in \mathcal{X}^{\otimes m}$ і $q_{n-m} \in \mathcal{X}^{\otimes(n-m)}$, $n, m \in \mathbb{N}$, $m < n$. При цьому очевидно, що $A^{\{\otimes\}0}(p_0 \otimes q_0) = A^{\{\otimes\}0}p_0 \otimes q_0 + p_0 \otimes A^{\{\otimes\}0}q_0$ для довільних $p_0, q_0 \in \mathcal{X}^{\otimes 0} = \mathbb{C}$.

З останньої рівності випливає, що оператор $A^{\{\otimes\}n}$ можна подати у вигляді

$$A^{\{\otimes\}n} = A^{\{\otimes\}m} \otimes I_{\mathcal{X}}^{\otimes(n-m)} + I_{\mathcal{X}}^{\otimes m} \otimes A^{\{\otimes\}(n-m)} \qquad (2.3.3)$$

для довільних $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$, де $I_{\mathcal{X}}^{\otimes k}$, $k = 1, \ldots, n-1$, — k-тий тензорний степінь одиничного оператора $I_{\mathcal{X}} \in \mathscr{L}(\mathcal{X})$.

Нехай $\mathfrak{s}_n : \mathcal{X}^{\otimes n} \longrightarrow \mathcal{X}^{\widehat{\otimes} n}$ — оператор симетризації (див. (2.1.1)). Легко переконатись, що оператор $A^{\{\otimes\}n}$ комутує з $\mathfrak{s}_n$. Дійсно

$$\begin{aligned} A^{\{\otimes\}n}(\mathfrak{s}_n[x_1 \otimes \ldots \otimes x_n]) &= A^{\{\otimes\}n}\Big(\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(n)}\Big) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(j-1)} \otimes Ax_{\sigma(j)} \otimes x_{\sigma(j+1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(n)} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{j=1}^{n} x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(j-1)} \otimes Ax_{\sigma(j)} \otimes x_{\sigma(j+1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(n)} \\ &= \mathfrak{s}_n\Big(\sum_{j=1}^{n} x_1 \otimes \ldots \otimes Ax_j \otimes \ldots \otimes x_n\Big) = \mathfrak{s}_n\big(A^{\{\otimes\}n}[x_1 \otimes \ldots \otimes x_n]\big). \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Визначимо оператор

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}_{\{n,m\}} : \quad & \mathcal{X}^{\otimes n} && \longrightarrow && \mathcal{X}^{\widehat{\otimes} m} \otimes \mathcal{X}^{\widehat{\otimes}(n-m)} \\ & x_1 \otimes \cdots \otimes x_n && \longmapsto && (x_1 \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} x_m) \otimes (x_{m+1} \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} x_n), \end{aligned}$$

де $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$, який симетризує перших m та останніх $n - m$ співмножників. Зрозуміло, що цей оператор діє як одиничний на елементах вигляду $p_m \otimes q_{n-m}$, де $p_m \in \mathcal{X}^{\widehat{\otimes} m}$ і $q_{n-m} \in \mathcal{X}^{\widehat{\otimes}(n-m)}$. На образі оператора $\mathfrak{s}_{\{n,m\}}$ задамо оператор

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}_{(n,m)} : \ & \mathcal{X}^{\widehat{\otimes} m} \otimes \mathcal{X}^{\widehat{\otimes}(n-m)} && \longrightarrow && \mathcal{X}^{\widehat{\otimes} n} \\ & p_m \otimes q_{n-m} && \longmapsto && p_m \widehat{\otimes} q_{n-m}, \qquad m, n \in \mathbb{N}, \quad m < n. \end{aligned}$$

Зрозуміло, що оператор симетризації $\mathfrak{s}_n$ можна зобразити у вигляді композиції $\mathfrak{s}_n = \mathfrak{s}_{(n,m)} \circ \mathfrak{s}_{\{n,m\}}$, $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$. Звідси враховуючи формули (2.3.3) та (2.3.4) отримуємо

$$\begin{aligned} A^{\{\otimes\}n} \circ \mathfrak{s}_n = \mathfrak{s}_n \circ A^{\{\otimes\}n} &= \mathfrak{s}_n \circ \big(A^{\{\otimes\}m} \otimes I_{\mathcal{X}}^{\otimes(n-m)} + I_{\mathcal{X}}^{\otimes m} \otimes A^{\{\otimes\}(n-m)}\big) \\ &= \mathfrak{s}_{(n,m)} \circ \mathfrak{s}_{\{n,m\}} \circ \big(A^{\{\otimes\}m} \otimes I_{\mathcal{X}}^{\otimes(n-m)} + I_{\mathcal{X}}^{\otimes m} \otimes A^{\{\otimes\}(n-m)}\big) \\ &= \mathfrak{s}_{(n,m)} \circ \big(A^{\{\otimes\}m} \otimes I_{\mathcal{X}}^{\otimes(n-m)} + I_{\mathcal{X}}^{\otimes m} \otimes A^{\{\otimes\}(n-m)}\big) \circ \mathfrak{s}_{\{n,m\}}. \end{aligned}$$

Тепер для довільних $p_m \in \mathcal{X}^{\widehat{\otimes} m}$ і $q_{n-m} \in \mathcal{X}^{\widehat{\otimes}(n-m)}$, $n, m \in \mathbb{N}$, $m < n$, правильними є рівності

$$\begin{aligned}
A^{\{\otimes\}n}[p_m \mathbin{\widehat{\otimes}} q_{n-m}] &= A^{\{\otimes\}n} \circ \mathfrak{s}_n[p_m \otimes q_{n-m}] \\
&= \big(\mathfrak{s}_{(n,m)} \circ \big(A^{\{\otimes\}m} \otimes I_{\mathcal{X}}^{\otimes(n-m)} + I_{\mathcal{X}}^{\otimes m} \otimes A^{\{\otimes\}(n-m)}\big) \circ \mathfrak{s}_{\{n,m\}}\big)[p_m \otimes q_{n-m}] \\
&= \big(\mathfrak{s}_{(n,m)} \circ \big(A^{\{\otimes\}m} \otimes I_{\mathcal{X}}^{\otimes(n-m)} + I_{\mathcal{X}}^{\otimes m} \otimes A^{\{\otimes\}(n-m)}\big)\big)[p_m \otimes q_{n-m}] \\
&= \mathfrak{s}_{(n,m)}\big(A^{\{\otimes\}m} p_m \otimes q_{n-m} + p_m \otimes A^{\{\otimes\}(n-m)} q_{n-m}\big) \\
&= A^{\{\otimes\}m} p_m \mathbin{\widehat{\otimes}} q_{n-m} + p_m \mathbin{\widehat{\otimes}} A^{\{\otimes\}(n-m)} q_{n-m},
\end{aligned}$$

тобто оператор $A^{\{\otimes\}n}$ задовольняє правило Лейбніца.

З означення оператора $A^{\{\otimes\}}$ отримуємо

$$\begin{aligned}
A^{\{\otimes\}}[\boldsymbol{p} \diamond \boldsymbol{q}] &= A^{\{\otimes\}}\Big(\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_+} \sum_{m=0}^{n} p_m \mathbin{\widehat{\otimes}} q_{n-m}\Big) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_+} \Big(\sum_{m=0}^{n} A^{\{\otimes\}n}[p_m \mathbin{\widehat{\otimes}} q_{n-m}]\Big) \\
&= \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_+} \Big(\sum_{m=0}^{n} A^{\{\otimes\}m} p_m \mathbin{\widehat{\otimes}} q_{n-m} + p_m \mathbin{\widehat{\otimes}} A^{\{\otimes\}(n-m)} q_{n-m}\Big) \\
&= \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_+} \Big(\sum_{m=0}^{n} A^{\{\otimes\}m} p_m \mathbin{\widehat{\otimes}} q_{n-m}\Big) + \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_+} \Big(\sum_{m=0}^{n} p_m \mathbin{\widehat{\otimes}} A^{\{\otimes\}(n-m)} q_{n-m}\Big) \\
&= A^{\{\otimes\}}[\boldsymbol{p}] \diamond \boldsymbol{q} + \boldsymbol{p} \diamond A^{\{\otimes\}}[\boldsymbol{q}], \qquad \forall\, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \Gamma(\mathcal{X}),
\end{aligned}$$

де $\boldsymbol{p} = \bigoplus_n p_n$, $\boldsymbol{q} = \bigoplus_n q_n$, $p_n, q_n \in \mathcal{X}^{\widehat{\otimes} n}$.

Відображення $\Upsilon^{\mathcal{X}} : \Gamma(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{X}')$ є топологічним ізоморфізмом алгебр, тому для оператора $A_{\mathcal{P}}^{\{\otimes\}} := \Upsilon^{\mathcal{X}} \circ A^{\{\otimes\}} \circ [\Upsilon^{\mathcal{X}}]^{-1}$ та довільних поліномів $P, Q \in \mathcal{P}(\mathcal{X}')$ з останньої рівності отримуємо

$$\begin{aligned}
A_{\mathcal{P}}^{\{\otimes\}}(P \diamond Q) &= (\Upsilon^{\mathcal{X}} A^{\{\otimes\}} [\Upsilon^{\mathcal{X}}]^{-1})(P \diamond Q) = (\Upsilon^{\mathcal{X}} A^{\{\otimes\}})([\Upsilon^{\mathcal{X}}]^{-1} P \diamond [\Upsilon^{\mathcal{X}}]^{-1} Q) \\
&= \Upsilon^{\mathcal{X}}(A^{\{\otimes\}}[\boldsymbol{p} \diamond \boldsymbol{q}]) = \Upsilon^{\mathcal{X}}(A^{\{\otimes\}}[\boldsymbol{p}] \diamond \boldsymbol{q} + \boldsymbol{p} \diamond A^{\{\otimes\}}[\boldsymbol{q}]) \\
&= \Upsilon^{\mathcal{X}} A^{\{\otimes\}}[\boldsymbol{p}] \diamond \Upsilon^{\mathcal{X}} \boldsymbol{q} + \Upsilon^{\mathcal{X}} \boldsymbol{p} \diamond \Upsilon^{\mathcal{X}} A^{\{\otimes\}}[\boldsymbol{q}] \\
&= (\Upsilon^{\mathcal{X}} A^{\{\otimes\}} [\Upsilon^{\mathcal{X}}]^{-1}) P \diamond Q + P \diamond (\Upsilon^{\mathcal{X}} A^{\{\otimes\}} [\Upsilon^{\mathcal{X}}]^{-1}) Q \\
&= A_{\mathcal{P}}^{\{\otimes\}} P \diamond Q + P \diamond A_{\mathcal{P}}^{\{\otimes\}} Q,
\end{aligned}$$

де $\boldsymbol{p} := [\Upsilon^{\mathcal{X}}]^{-1} P \in \Gamma(\mathcal{X})$, $\boldsymbol{q} := [\Upsilon^{\mathcal{X}}]^{-1} Q \in \Gamma(\mathcal{X})$. □

У просторі $\mathscr{L}(\Gamma(\mathcal{X}))$ неперервних лінійних операторів з $\Gamma(\mathcal{X})$ в себе розглянемо підалгебру $\mathscr{L}_D(\Gamma(\mathcal{X}))$ тих операторів, які залишають простори $\mathcal{X}^{\widehat{\otimes} n}$ інваріантними, тобто

$$\mathscr{L}_D(\Gamma(\mathcal{X})) := \begin{pmatrix} \mathscr{L}(\mathcal{X}^{\widehat{\otimes} 0}) & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \mathscr{L}(\mathcal{X}^{\widehat{\otimes} 1}) & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathscr{L}(\mathcal{X}^{\widehat{\otimes} n}) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \tag{2.3.5}$$

де, очевидно, $\mathcal{X}^{\widehat{\otimes} 0} = \mathbb{C}$ і $\mathcal{X}^{\widehat{\otimes} 1} = \mathcal{X}$. Використовуючи ізоморфізм $\Upsilon^{\mathcal{X}}$, ми будемо асоціювати відповідні операторні алгебри, а саме $\mathscr{L}(\Gamma(\mathcal{X})) \simeq \mathscr{L}(\mathcal{P}(\mathcal{X}'))$ і $\mathscr{L}_D(\Gamma(\mathcal{X})) \simeq \mathscr{L}_D(\mathcal{P}(\mathcal{X}'))$.

Аналогічно, у просторі $\mathscr{L}(\Gamma(\mathcal{X}'))$ розглянемо підалгебру $\mathscr{L}_D(\Gamma(\mathcal{X}'))$ тих операторів, які залишають простори $\mathcal{X}'^{\widehat{\otimes} n}$ інваріантними, тобто

$$\mathscr{L}_D(\Gamma(\mathcal{X}')) := \begin{pmatrix} \mathscr{L}(\mathcal{X}'^{\widehat{\otimes} 0}) & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \mathscr{L}(\mathcal{X}'^{\widehat{\otimes} 1}) & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathscr{L}(\mathcal{X}'^{\widehat{\otimes} n}) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \tag{2.3.6}$$

де, очевидно, $\mathcal{X}'^{\widehat{\otimes} 0} = \mathbb{C}$ і $\mathcal{X}'^{\widehat{\otimes} 1} = \mathcal{X}'$. Використовуючи ізоморфізм $\Psi^{\mathcal{X}}$, ми будемо асоціювати відповідні операторні алгебри, а саме $\mathscr{L}(\Gamma(\mathcal{X}')) \simeq \mathscr{L}(\mathcal{P}'(\mathcal{X}'))$ і $\mathscr{L}_D(\Gamma(\mathcal{X}')) \simeq \mathscr{L}_D(\mathcal{P}'(\mathcal{X}'))$.

З означень введених у цьому параграфі операторів випливає, що всі вони належать до відповідних “діагональних” алгебр. Наприклад, $A'^{\otimes} \in \mathscr{L}_D(\Gamma(\mathcal{X}'))$, $A^{\{\otimes\}} \in \mathscr{L}_D(\Gamma(\mathcal{X}))$, $A'^{\otimes}_{\mathcal{P}} \in \mathscr{L}_D(\mathcal{P}'(\mathcal{X}'))$, $A^{\{\otimes\}}_{\mathcal{P}} \in \mathscr{L}_D(\mathcal{P}(\mathcal{X}'))$.

Висновки до розділу 2

У другому розділі дисертації розвинуто загальний підхід до побудови поліноміальних основних функцій та поліноміальних розподілів на основі теорії ядерних (F) або (DF) просторів. Таке поліноміальне розширення можна розглядати як узагальнення класичних просторів основних та узагальнених функцій на випадок нескінченної кількості змінних, що буде використано при побудові функціонального численнях у розділах 5 та 6. Крім того, результати цього розділу явно і неявно використовуються у всій дисертації.

Зауважимо, що наш підхід відрізняється від інших відомих та широко вживаних узагальнень класичних просторів [3–5]. Основною відмінністю є використання теорії дуальності та теорії тензорних добутків Ґротендіка замість концепції трійок Гельфанда.

У цьому розділі встановлено структурні теореми для просторів поліномів та спряжених до них просторів; введено потрібні для подальших досліджень лінійні неперервні оператори на цих просторах та досліджено їхні властивості.

У теоремі 2.2.3 описано тензорну структуру поліноміальних основних та узагальнених функцій, заданих на ядерних (F) або (DF) просторах. При цьому суттєво використано ключову у наших дослідженнях теорему 2.2.2, в якій встановлено топологічний ізоморфізм $\mathcal{X}'^{\widehat{\otimes}n} \simeq (\mathcal{X}^{\widehat{\otimes}n})'$, $n \in \mathbb{N}$, що є “симетричним” аналогом відповідного ізоморфізму А. Ґротендіка.

У теоремі 2.2.4 отримано умову, за якої простір $\mathcal{P}(\mathcal{X}')$ щільно вкладаються у простір $\mathcal{P}'(\mathcal{X}')$. Твердження 2.2.1 дозволяє аргументувати наявність терміну “поліноміальний” у назві нових просторів, а саме, тут доведено, що кожен з просторів основних функцій $\mathcal{P}(\mathcal{X}')$ і узагальнених функцій $\mathcal{P}'(\mathcal{X}')$ є поповненням у відповідній топології множини поліномів скінченного типу.

У твердженнях 2.2.2 та 2.2.3 показано, що простори $\mathcal{P}(\mathcal{X}')$ і $\mathcal{P}'(\mathcal{X}')$ поліноміальних основних і узагальнених функцій, а також відповідні простори $\Gamma(\mathcal{X})$ і $\Gamma(\mathcal{X}')$ з тензорною структурою типу Фока утворюють локально опуклі алгебри. При цьому така алгебраїчна структура існує незалежно від того, чи вихідний простір є алгеброю чи ні.

У параграфі 2.3 введено ряд потрібних для подальших досліджень операторів, що діють на просторах поліноміальних основних та узагальнених функцій, а також на відповідних просторах типу Фока, та доведено їх лінійність та неперервність. Спочатку це зроблено на n-однорідних поліномах (теореми 2.3.1, 2.3.3), а відтак на просторі всіх поліномів (теореми 2.3.2, 2.3.4). У теоремах 2.3.5 та 2.3.6 доведено основні властивості введених операторів. Зауважимо, що однорідні доданки у відповідних просторах поліномів чи просторах типу Фока є інваріантні відносно дії цих операторів. Іншими словами, кожен такий оператор належить відповідній діагональній алгебрі вигляду (2.3.5) чи (2.3.6).

Результати розділу 2 опубліковані в роботах [45, 161, 201].

Розділ 3

Поліноміальні узагальнені функції повільного росту

3.1 Простір поліноміальних основних та узагальнених функцій повільного росту

Узагальнені функції Шварца давно стали класичним інструментом математичної фізики. Проте ряд задач, наприклад, квантової теорії поля (див. [78]), вимагають поліноміального узагальнення поняття узагальненої функції. У роботі [48] автором дисертації побудовано поліноміальні основні та узагальнені функції повільного росту та розглянуто поліноміальне узагальнення операції крос-кореляції і перетворення Фур'є.

У цьому параграфі ми вводимо клас $\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+)$ поліноміальних повільно зростаючих узагальнених функцій, що є узагальненням простору $\mathcal{S}'_+$ класичних розподілів Шварца з носіями в $\mathbb{R}_+$. При цьому простір $\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+)$ з точністю до ізоморфізму асоціюється із алгеброю $\bigtimes_n \mathcal{S}'^{\widehat{\otimes} n}_+$ "коефіцієнтів", що дозволяє ввести на $\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+)$ структуру алгебри.

Зауважимо, що є інші широко відомі нескінченновимірні узагальнення класичних просторів розподілів, які використовують методи гауссівського аналізу білого шуму і концепцію трійок Гельфанда (див., наприклад, [127, 150, 175]).

3.1.1 Простори швидко спадних функцій та розподілів повільного росту

У цьому пункті введемо класичні простори Шварца швидко спадних функцій та розподілів повільного росту. При цьому нам зручно буде паралельно ввести два простори основних функцій $\mathcal{S}$ та $\mathcal{S}_+$, заданих відповідно на $\mathbb{R}$ та $\mathbb{R}_+$.

До простору $\mathcal{S} := \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (відп. $\mathcal{S}_+ := \mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$) віднесемо всі нескінченно диференційовні в $\mathbb{R}$ (відп. в $\mathbb{R}_+$) функції $\varphi(t)$, які разом з усіма похідними спадають до нуля при $|t| \to \infty$ (відп. при $t \to \infty$) швидше, ніж будь-який степінь $|t|^{-1}$. Іншими словами, $\varphi \in \mathcal{S}$ (відп. $\varphi \in \mathcal{S}_+$), якщо для довільних $m, k \in \mathbb{Z}_+$ знайдеться така константа $C = C(k, m, \varphi)$, що виконується оцінка

$$|t^k \varphi^{(m)}(t)| \le C, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R} \qquad (\text{відп. } \forall\, t \in \mathbb{R}_+).$$

Кажуть, що послідовність $\{\varphi_n\}$ функцій з $\mathcal{S}$ (відп. $\mathcal{S}_+$) збіжна при $n \to \infty$ до нуля в $\mathcal{S}$ (відп. в $\mathcal{S}_+$), якщо для всіх $m, k \in \mathbb{Z}_+$ послідовність $\{t^k \varphi_n^{(m)}(t)\}$ збігається до нуля рівномірно на $\mathbb{R}$ (відп. на $\mathbb{R}_+$).

В просторах $\mathcal{S}$ та $\mathcal{S}_+$ можна ввести структуру зліченно нормованого простору. Для цього задамо норми за формулами

$$\|\varphi\|_p := \sup_{0 \le m \le p} \sup_{t \in \mathbb{R}} (1 + t^2)^{p/2} |\varphi^{(m)}(t)|, \qquad \varphi \in \mathcal{S}, \qquad p \in \mathbb{Z}_+,$$

$$\|\varphi\|_p := \sup_{0 \le m \le p} \sup_{t \in \mathbb{R}_+} (1 + t^2)^{p/2} |\varphi^{(m)}(t)|, \qquad \varphi \in \mathcal{S}_+, \qquad p \in \mathbb{Z}_+.$$

Зауважимо, що в подальшому ці два простори і норми в них не будуть зустрічатися одночасно, тому однакове позначення для норм у цих просторах не буде вносити плутанини і з контексту буде зрозуміло про яку норму йдеться.

Очевидно, що виконуються нерівності

$$\|\varphi\|_0 \le \|\varphi\|_1 \le \|\varphi\|_2 \le \ldots, \qquad \varphi \in \mathcal{S} \qquad (\text{відп. } \varphi \in \mathcal{S}_+). \tag{3.1.1}$$

Визначену вище збіжність в просторах $\mathcal{S}$ та $\mathcal{S}_+$ тепер можна задати так: послідовність $\{\varphi_n\}$ функцій з $\mathcal{S}$ (відп. з $\mathcal{S}_+$) збіжна при $n \to \infty$ до нуля в $\mathcal{S}$ (відп. в $\mathcal{S}_+$), якщо для всіх $p \in \mathbb{Z}_+$ виконується $\|\varphi_n\|_p \to 0$ при $n \to \infty$.

Через $\mathcal{S}_p$ (відп. $\mathcal{S}_{+p}$) позначимо поповнення простору $\mathcal{S}$ (відп. $\mathcal{S}_+$) за нормою $\|\cdot\|_p$. Відомо [7], що $\mathcal{S}_p$ та $\mathcal{S}_{+p}$ — банахові простори для кожного $p \in \mathbb{Z}_+$. Легко бачити, що справедливими є наступні теоретико-множинні включення

$$\mathcal{S}_0 \supset \mathcal{S}_1 \supset \mathcal{S}_2 \supset \ldots, \qquad \mathcal{S}_{+0} \supset \mathcal{S}_{+1} \supset \mathcal{S}_{+2} \supset \ldots, \tag{3.1.2}$$

при цьому, кожне відображення природного вкладення $\mathcal{S}_{p+1} \hookrightarrow \mathcal{S}_p$ (відп. $\mathcal{S}_{+(p+1)} \hookrightarrow \mathcal{S}_{+p}$), $p \in \mathbb{Z}_+$, є неперервним в силу (3.1.1). Більше того, кожне таке вкладення є компактним (див. [7, 13]).

Це означає, що з кожної нескінченної обмеженої множини в $\mathcal{S}_{p+1}$ (відп. $\mathcal{S}_{+(p+1)}$) можна вибрати збіжну в $\mathcal{S}_p$ (відп. $\mathcal{S}_{+p}$) послідовність. Тому простір Шварца $\mathcal{S} := \bigcap_{p\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{S}_p$ (відп. $\mathcal{S}_+ := \bigcap_{p\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{S}_{+p}$) нескінченно диференційовних швидко спадних функцій на $\mathbb{R}$ (відп. на $\mathbb{R}_+$) можна наділити топологією проективної границі $\lim\limits_{p\to\infty} \operatorname{pr} \mathcal{S}_p$ (відп. $\lim\limits_{p\to\infty} \operatorname{pr} \mathcal{S}_{+p}$). Нагадаємо, що у цьому випадку збіжність послідовності означає її збіжність у кожному $\mathcal{S}_p$ (відп. $\mathcal{S}_{+p}$), що, очевидно, співпадає із введеним раніше означенням. Як наслідок звідси отримуємо, що простори $\mathcal{S}$ та $\mathcal{S}_+$ — монтелеві ядерні (FS) простори [13, 54, 146]. Зокрема, вони бочкові (див. [54, §7.1]).

Відомо [27, 189], що нескінченно гладку функцію, задану на підпросторі, можна продовжити на весь простір із збереженням класу гладкості. Ми ж доводимо, що швидко спадну функцію, задану на $\mathbb{R}_+$, можна продовжити на всю вісь зберігши крім нескінченної гладкості ще й властивість швидкого спадання. При цьому доведення існування вказаного оператора продовження є конструктивним. Цей результат неявно використовується практично у всій дисертації.

Теорема 3.1.1. *Існує лінійний неперервний оператор розширення*

$$\Lambda\colon \mathcal{S}_+ \ni \varphi \longmapsto \Lambda\varphi \in \mathcal{S}$$

такий, що $\Lambda\varphi(t) = \varphi(t)$ *для всіх* $t \in \mathbb{R}_+$.

Доведення. Нехай $\mathbb{R} \ni \tau \longmapsto \chi(\tau)$ — довільна нескінченно гладка функція на $\mathbb{R}$, що рівна 1 на $[0,1]$ і 0 для $\tau \geq 2$.

В роботі [189] показано існування послідовності дійсних чисел $\{a_r\}$, що задовольняє для всіх $k \in \mathbb{Z}_+$ наступні умови:

(i) $\sum_{r\in\mathbb{Z}_+} |a_r| 2^{rk} < \infty$;

(ii) $\sum_{r\in\mathbb{Z}_+} a_r(-2^r)^k = 1$.

Покажемо, що образ $\operatorname{Im}\Lambda$ лінійного оператора

$$\Lambda\colon \varphi(t) \longmapsto \begin{cases} \varphi(t), & t \in [0,+\infty), \\ \sum_{r\in\mathbb{Z}_+} a_r \chi(-2^r t)\varphi(-2^r t), & t \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

складається із нескінченно диференційовних швидко спадних на $\mathbb{R}$ функцій.

Дійсно, оскільки $-2^r \to -\infty$ при $r \to \infty$, то сума в означенні оператора Λ скінченна для $t < 0$. Більше того, з (i) та (ii) випливає рівність

$$\lim_{t\to -0} (\Lambda\varphi)^{(m)}(t) = (\Lambda\varphi)^{(m)}(0) = \lim_{t\to +0} (\Lambda\varphi)^{(m)}(t)$$

для всіх $m \in \mathbb{Z}_+$, тобто функція $\Lambda\varphi$ нескінченно диференційовна.

З властивості (i) випливає існування такої константи $M_p > 0$, що

$$\sup_{0\leq m\leq p} \sup_{t\in\mathbb{R}} (1+t^2)^{p/2} |(\Lambda\varphi)^{(m)}(t)| \leq M_p \sup_{0\leq m\leq p} \sup_{t\in\mathbb{R}_+} (1+t^2)^{p/2} |(\Lambda\varphi)^{(m)}(t)|.$$

Ця нерівність очевидна для $t \geq 0$. Для кожного $t \in (-\infty, 0)$ переконуємось у її правильності безпосередніми обчисленнями

$$\begin{aligned} &(1+t^2)^{p/2} |(\Lambda\varphi)^{(m)}(t)| \\ &\qquad \leq (1+t^2)^{p/2} \sum_{r\in\mathbb{Z}_+} |a_r| 2^{rm} \sum_{k=0}^{m} C_m^k \big|\chi^{(k)}\big(-2^r t\big)\big| \big|\varphi^{(m-k)}(-2^r t)\big| \\ &\qquad \leq M_p \sup_{0\leq m\leq p} \sup_{t\in\mathbb{R}_+} (1+t^2)^{p/2} \big|\varphi^{(m)}(t)\big|, \end{aligned}$$

де константа

$$M_p = \max_{m \leq p} \sum_{r \in \mathbb{Z}_+} |a_r| 2^{rm} \sum_{k=0}^{m} C_m^k \sup_{\tau \in [0,2]} |\chi^{(k)}(\tau)|$$

залежить від $\{a_r\}$ та χ, але не залежить від t (тут C_m^k — біноміальні коефіцієнти). Отже, для довільного $p \in \mathbb{Z}_+$ оператор Λ задовольняє нерівність

$$\|\Lambda\varphi\|_p \leq C_p \|\varphi\|_p, \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}_+,$$

що означає неперервність лінійного оператора $\Lambda : \mathcal{S}_+ \longrightarrow \mathcal{S}$. □

Сильно спряжений до $\mathcal{S}$ простір $\mathcal{S}'$ називають простором узагальнених функцій повільного росту. Збіжність в просторі $\mathcal{S}'$ визначають як слабку збіжність послідовності функціоналів.

Нехай $\mathcal{S}'_p$ позначає сильно спряжений простір до банахового простору $\mathcal{S}_p$, $p \in \mathbb{Z}_+$. Будь-яка узагальнена функція повільного росту допускає продовження як лінійний неперервний функціонал з деякого простору $\mathcal{S}'_p$, при цьому виконується нерівність

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq \|f\|_{-p} \|\varphi\|_p, \qquad \varphi \in \mathcal{S}, \tag{3.1.3}$$

де $\|f\|_{-p}$ позначає норму функціоналу f в просторі $\mathcal{S}'_p$. В цьому випадку кажуть, що узагальнена функція f має скінченний порядок p. Таким чином, справедливими є двоїсті до (3.1.2) включення, а саме

$$\mathcal{S}'_0 \subset \mathcal{S}'_1 \subset \mathcal{S}'_2 \subset \ldots,$$

при цьому кожне природне вкладення $\mathcal{S}'_p \hookrightarrow \mathcal{S}'_{p+1}$, $p \in \mathbb{Z}_+$, є компактним [7, 13]. З теорії двоїстості випливає, що простір $\mathcal{S}' = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{S}'_p$ можна наділити топологією індуктивної границі $\liminf_{p \to \infty} \mathcal{S}'_p$. При цьому простір $\mathcal{S}'$ стає монтелевим ядерним (DFS) простором.

3.1.2 Поліноміальне розширення узагальнених функцій повільного росту

Метою цього пункту є побудова поліноміальних основних та узагальнених функцій повільного росту. При цьому для простоти тут розглядаємо одновимірний випадок базового простору, багатовимірний варіант для випадку ультрадиференційовних функцій буде описаний у розділі 4.

Нехай $\mathcal{S} := \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}' := \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ позначають класичні простори Шварца швидко спадних функцій та узагальнених функцій повільного росту відповідно (див. пункт 3.1.1). Відомо [7], що $\mathcal{S}$ є ядерним (F) простором, а $\mathcal{S}'$ — ядерним (DF) простором.

Розглянемо в $\mathcal{S}'$ замкнений підпростір $\mathcal{S}'_+$ тих розподілів, які тотожно рівні нульовому функціоналу на півосі $(-\infty, 0)$. З теорії ядерних просторів [31] випливає, що $\mathcal{S}'_+$ є ядерним (DF) простором. Крім того, $\mathcal{S}'_+$ є згортковою алгеброю з одиницею δ, де δ — дельта функція Дірака [7].

Нехай $\mathcal{S}'^{\circ}_+$ — поляра підпростору $\mathcal{S}'_+$ відносно двоїстості $\langle\, \mathcal{S}', \mathcal{S}\,\rangle$. Зауважимо, що в цьому випадку $\mathcal{S}'^{\circ}_+$ співпадає з ортогональним доповненням $\mathcal{S}'^{\perp}_+$ і є замкненим підпростором в $\mathcal{S}$ [54]. Тоді дуальним до $\mathcal{S}'_+$ буде факторпростір

$$\mathcal{S}/\mathcal{S}'^{\circ}_+ := \{\varphi + \mathcal{S}'^{\circ}_+ \colon \varphi \in \mathcal{S}\}\,. \tag{3.1.4}$$

Нехай $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ позначає функцію Хевісайда, що є характеристичною функцією додатної півосі. Ядро оператора множення на цю функцію

$$\Theta \colon \mathcal{S} \ni \varphi \longmapsto \theta\varphi \in \mathcal{S}'_+$$

співпадає з полярою $\mathcal{S}'^{\circ}_+$. Тому для його образу $\Theta[\mathcal{S}]$ правильним є топологічний ізоморфізм $\mathcal{S}/\mathcal{S}'^{\circ}_+ \simeq \Theta[\mathcal{S}]$. Більше того, використовуючи методи статті [49] можна показати, що насправді справджуються наступні топологічні ізоморфізми

$$\mathcal{S}_{+} \simeq \mathcal{S}/\mathcal{S}_{+}'^{\circ} \simeq \Theta[\mathcal{S}]. \tag{3.1.5}$$

Тому кожну швидко спадну функцію $\varphi \in \mathcal{S}_{+}$ можна розуміти як елемент факторпростору $\mathcal{S}/\mathcal{S}_{+}'^{\circ}$, або як регулярний розподіл повільного росту з $\mathcal{S}_{+}'$. Таким чином дуальна пара $\langle\, \mathcal{S}', \mathcal{S}\,\rangle$ індукує нову двоїстість $\langle\, \mathcal{S}_{+}', \mathcal{S}_{+}\,\rangle$ із звичайним спарюванням $\langle\, f, \varphi\,\rangle$.

Означення наступних двох операцій є майже очевидним, проте суттєвим тут є той факт, що вони не виводять за межі простору $\mathcal{S}_{+}$. Точніше, що в точці $t = 0$ справа не порушується умова нескінченної гладкості. Для того, щоб це показати, ми використовуємо ізоморфізм $\mathcal{S}_{+} \simeq \mathcal{S}/\mathcal{S}_{+}'^{\circ}$.

Множина $\mathcal{S}_{+}'^{\circ}$ є ідеалом в алгебрі $\mathcal{S}$, інваріантним відносно лівосторонніх зсувів. Тому у просторі $\mathcal{S}_{+}$ коректно визначено однопараметричну сім'ю операторів лівостороннього зсуву

$$T_s \colon \mathcal{S}_{+} \ni \varphi(t) \longmapsto \varphi(t+s) \in \mathcal{S}_{+}, \qquad s \geq 0, \qquad t \in \mathbb{R}_{+}.$$

Відомо [38], що відображення $T : 0 \leq s \longmapsto T_s \in \mathscr{L}(\mathcal{S}_{+})$ задає сильно неперервну напівгрупу.

Ідеал $\mathcal{S}_{+}'^{\circ}$ є також інваріантним відносно оператора диференціювання $D := \frac{d}{dt}$, тому коректно визначеним є оператор

$$D \colon \mathcal{S}_{+} \ni \varphi \longmapsto D\varphi = \varphi' \in \mathcal{S}_{+}.$$

Нехай $T' \colon 0 \leq s \longmapsto T_s' \in \mathscr{L}(\mathcal{S}_{+}')$ позначає спряжену до T напівгрупу, а D' — спряжений до D оператор відносно дуальної пари $\langle\, \mathcal{S}_{+}', \mathcal{S}_{+}\,\rangle$.

Зауважимо, що простір $\mathcal{S}_{+}$ неперервно і щільно вкладається у простір $\mathcal{S}_{+}'$ (це випливає із щільності вкладення $\mathcal{S} \looparrowright \mathcal{S}'$).

Отже, ми можемо розглянути простір поліномів $\mathcal{P}(\mathcal{S}_{+}')$ і його спряжений $\mathcal{P}'(\mathcal{S}_{+}')$, для яких згідно із теоремою 2.2.4 виконується неперервне щільне вкладення $\mathcal{P}(\mathcal{S}_{+}') \looparrowright \mathcal{P}'(\mathcal{S}_{+}')$. Крім того, $\langle\, \mathcal{P}'(\mathcal{S}_{+}'), \mathcal{P}(\mathcal{S}_{+}')\,\rangle$ — дуальна пара.

Елементи просторів $\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$ і $\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+)$ ми називатимемо поліноміальними швидко спадними функціями та поліноміальними розподілами повільного росту відповідно.

Зауваження 3.1.1. Дамо деякі пояснення щодо термінології. Позначимо символом Lin процес переходу від простору до його сильно спряженого, тобто до простору лінійних неперервних функціоналів. Нехай Polin позначає процес переходу від деякого простору до простору неперервних поліноміальних функціоналів. Тоді для рефлексивного простору $\mathcal{S}_+$ можна зобразити таку схему

$$\mathcal{S}_+ \quad \overset{\mathsf{Lin}}{\rightsquigarrow} \quad \mathcal{S}'_+ \quad \overset{\mathsf{Lin}}{\rightsquigarrow} \quad (\mathcal{S}'_+)' = \mathcal{S}_+ \quad \overset{\mathsf{Lin}}{\rightsquigarrow} \quad \mathcal{S}'_+.$$

Тепер замінимо на другому кроці процес Lin на процес Polin. Отримаємо іншу схему

$$\mathcal{S}_+ \quad \overset{\mathsf{Lin}}{\rightsquigarrow} \quad \mathcal{S}'_+ \quad \overset{\mathsf{Polin}}{\rightsquigarrow} \quad \mathcal{P}(\mathcal{S}'_+) \quad \overset{\mathsf{Lin}}{\rightsquigarrow} \quad \mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+).$$

Тепер зрозуміло, що простір $\mathcal{S}_+$ є лінійним підпростором $\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$, оскільки простір всіх поліномів містить в собі зокрема і однорідні поліноми першого порядку, тобто лінійні функціонали. Це пояснює, чому елементи простору $\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$ ми називатимемо (основними) поліноміальними швидко спадними функціями. Зрозуміло, що елементи спряженого до $\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$ простору $\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+)$ природно називати (поліноміальними) узагальненими функціями.

Аналогічно як і в параграфі 2.2 для спрощення записів введемо позначення

$$\Gamma(\mathcal{S}_+) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+}{}_{fin}\, \mathcal{S}_+^{\widehat{\otimes} n} \qquad \text{і} \qquad \Gamma(\mathcal{S}'_+) := \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{S}_+^{\prime\widehat{\otimes} n}.$$

Нагадаємо, що елементи прямої суми $\Gamma(\mathcal{S}_+)$ містять скінченну, але не фіксовану кількість доданків.

З теореми 2.2.3 випливає, що справджуються наступні топологічні ізоморфізми

$$\Upsilon^{\mathcal{S}_+}\colon \Gamma(\mathcal{S}_+) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{S}'_+), \qquad \Psi^{\mathcal{S}_+}: \Gamma(\mathcal{S}'_+) \longrightarrow \mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+). \tag{3.1.6}$$

Всюди далі елементи просторів $\Gamma(\mathcal{S}_+)$ і $\Gamma(\mathcal{S}'_+)$ ми писатимемо у вигляді

$$\boldsymbol{p} = \bigoplus_{n=0}^{m} p_n = (p_0, p_1, \dots, p_m, 0, \dots) \in \Gamma(\mathcal{S}_+), \qquad m \in \mathbb{N},$$
$$\boldsymbol{u} = \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} u_n = (u_0, u_1, \dots, u_n, \dots) \in \Gamma(\mathcal{S}'_+),$$

відповідно, де $p_n \in \mathcal{S}_+^{\widehat{\otimes} n}$ і $u_n \in \mathcal{S}_+^{\prime\widehat{\otimes} n}$ для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$. Жирний шрифт буде використовуватись виключно для елементів просторів типу Фока $\Gamma(\mathcal{S}_+)$ і $\Gamma(\mathcal{S}'_+)$. Для спрощення позначень ми часто писатимемо $\big(p_n\big)$ і $\big(u_n\big)$ замість $\bigoplus_{n=0}^{m} p_n$ і $\bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} u_n$ відповідно.

Зауважимо, що наступні системи елементів

$$\begin{aligned} &\big\{\big(1, \varphi, \varphi^{\otimes 2}, \dots, \varphi^{\otimes n}, 0, \dots\big) : \varphi \in \mathcal{S}_+, n \in \mathbb{N}\big\}, \\ &\big\{\big(1, f, f^{\otimes 2}, \dots, f^{\otimes n}, f^{\otimes(n+1)}, \dots\big) : f \in \mathcal{S}'_+\big\} \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

є тотальними підмножинами в $\Gamma(\mathcal{S}_+)$ та $\Gamma(\mathcal{S}'_+)$ відповідно.

Дамо деякі роз'яснення, що стосуються ізоморфізмів (3.1.6). Виберемо деякий елемент $\boldsymbol{p} := (p_0, p_1, \dots, p_m, 0, \dots)$ з простору $\Gamma(\mathcal{S}_+)$. Тоді відповідний поліном з простору $\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$ має вигляд

$$P := \sum_{k=0}^{m} \big\langle \cdot ^{\otimes k}, p_k \big\rangle = \sum_{k=0}^{m} P_k,$$

де $P_k := \big\langle \cdot ^{\otimes k}, p_k \big\rangle$ — k-однорідний поліноміальний функціонал над $\mathcal{S}'_+$. Зокрема при $p_k = \varphi^{\otimes k}$ для деякого $\varphi \in \mathcal{S}_+$ отримаємо

$$P = \sum_{k=0}^{m} \big\langle \cdot ^{\otimes k}, \varphi^{\otimes k} \big\rangle = 1 + \big\langle \cdot, \varphi \big\rangle + \big\langle \cdot, \varphi \big\rangle^2 + \dots + \big\langle \cdot, \varphi \big\rangle^m.$$

Аналогічна ситуація з відповідністю між елементами з просторів $\Gamma(\mathcal{S}'_+)$ та $\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+)$. А саме, нехай $\boldsymbol{u} := (u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots) \in \Gamma(\mathcal{S}'_+)$. Тоді відповідний елемент з простору $\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+)$ має вигляд

$$U := \Big(u_0, \big\langle u_1, \cdot \big\rangle, \big\langle u_2, \cdot^{\otimes 2} \big\rangle, \dots, \big\langle u_n, \cdot^{\otimes n} \big\rangle, \dots\Big) = \Big(U_0, U_1, U_2, \dots, U_n, \dots\Big),$$

де $U_0 := u_0 \in \mathbb{C}$, $U_k := \big\langle u_k, \cdot^{\otimes k} \big\rangle$ — k-однорідний поліном над простором $\mathcal{S}_+$. Зокрема при $u_k = f^{\otimes k}$ для деякого розподілу $f \in \mathcal{S}'_+$ отримаємо

$$\begin{aligned} U &= \Big(1, \langle f, \cdot \rangle, \langle f^{\otimes 2}, \cdot^{\otimes 2} \rangle, \ldots, \langle f^{\otimes n}, \cdot^{\otimes n} \rangle, \ldots \Big) \\ &= \Big(1, \langle f, \cdot \rangle, \langle f, \cdot \rangle^2, \ldots, \langle f, \cdot \rangle^n, \ldots \Big). \end{aligned}$$

Поліноміальний розподіл $U = \Big(u_0, \big\langle u_1, \cdot \big\rangle, \big\langle u_2, \cdot^{\otimes 2} \big\rangle, \ldots, \big\langle u_n, \cdot^{\otimes n} \big\rangle, \ldots \Big)$ діє на елемент $P = \sum_{k=0}^{m} \big\langle \cdot^{\otimes k}, p_k \big\rangle$ як лінійний та неперервний функціонал за формулою

$$\big\langle U, P \big\rangle := \sum_{k=0}^{m} \big\langle u_k, p_k \big\rangle,$$

де $\big\langle u_0, p_0 \big\rangle := u_0 \cdot p_0 \in \mathbb{C}$.

Бачимо, що поліноміальні функція P та розподіл U повністю визначаються своїми “коефіцієнтами” $\boldsymbol{p}$ та $\boldsymbol{u}$ відповідно, а також і навпаки. Тому часто простори типу Фока $\Gamma(\mathcal{S}_+)$ та $\Gamma(\mathcal{S}'_+)$ (або аналогічні до них) ми будемо називати просторами “коефіцієнтів”.

3.2 Оператори диференціювання та зсуву в просторі поліноміальних розподілів повільного росту

У цьому параграфі введемо поліноміальне узагальнення операторів диференціювання та зсуву. Покажемо, що поліноміальна похідна генерує поліноміальну напівгрупу зсувів, що є аналогом класичного результату.

Для кожного $s \in \mathbb{R}_+$ визначимо на просторі поліномів $\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$ оператор $\mathscr{T}_s$, що діє за правилом

$$\mathscr{T}_s : \mathcal{P}(\mathcal{S}'_+) \ni P \longmapsto P \circ T'_s \in \mathcal{P}(\mathcal{S}'_+).$$

Тепер “перенесемо” його на відповідний простір “коефіцієнтів”, а саме, оператор $\mathbb{T}_s \in \Gamma(\mathcal{S}_+)$, $s \in \mathbb{R}_+$, визначимо за формулою

$$\mathbb{T}_s := [\Upsilon^{\mathcal{S}_+}]^{-1} \circ \mathscr{T}_s \circ \Upsilon^{\mathcal{S}_+}.$$

Зауважимо, що $\mathbb{T}_s$ — це єдиний (для кожного $s \in \mathbb{R}_+$) оператор, що задовольняє рівність

$$\bigl[\Upsilon^{\mathcal{S}_+}\,\mathbb{T}_s\,[\Upsilon^{\mathcal{S}_+}]^{-1}(P)\bigr](f) = P(T'_s f),$$

де $P = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} P_n \in \mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$, $f \in \mathcal{S}'_+$, яку можна прийняти за еквівалентне означення.

Теорема 3.2.1. *Однопараметрична сім'я $\{\mathbb{T}_s : s \in \mathbb{R}_+\}$ лінійних операторів, що діють на алгебрі $\{\Gamma(\mathcal{S}_+), \diamond\}$, є одностайно неперервною (C_0) напівгрупою алгебраїчних автоморфізмів. Її генератором є оператор $\mathbb{D}$, що належить діагональній підалгебрі $\mathscr{L}_D(\Gamma(\mathcal{S}_+))$ і на довільний елемент вигляду $\boldsymbol{p} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \varphi^{\otimes n} \in \Gamma(\mathcal{S}_+)$, де $\varphi \in \mathcal{S}_+$, діє за правилом $\mathbb{D}\boldsymbol{p} := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} D^{\{\otimes\}n}\varphi^{\otimes n}$, де*

$$D^{\{\otimes\}n}\varphi^{\otimes n} := \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\varphi\otimes\cdots\otimes\varphi\otimes D\varphi}_{j} \otimes \underbrace{\varphi\otimes\cdots\otimes\varphi}_{n-j}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

а $D^{\{\otimes\}0}$ — нульовий оператор.

Доведення. Нагадаємо, що $\mathcal{S}_{+p}$ позначає поповнення простору $\mathcal{S}_+$ за нормою

$$\|\varphi\|_p := \sup_{0\le m\le p}\,\sup_{t\in\mathbb{R}_+}(1+t^2)^{p/2}|\varphi^{(m)}(t)|, \qquad \varphi \in \mathcal{S}_+, \qquad p \in \mathbb{Z}_+.$$

Відомо [7] (див. також пункт 3.1.1), що простір $\mathcal{S}_+$ може бути зображений у вигляді проективної границі $\mathcal{S}_+ = \lim\limits_{p\to\infty}\operatorname{pr}\mathcal{S}_{+p}$, причому кожне вкладення $\mathcal{S}_{+(p+1)} \hookrightarrow \mathcal{S}_{+p}$, $p \in \mathbb{Z}_+$, є компактним (див. [7,13]). Використовуючи відому [120] властивість комутативності проективних границь із проективними тензорними добутками отримаємо

$$\mathcal{S}_+^{\widehat{\otimes}n} = \bigl(\lim_{p\to\infty}\operatorname{pr}\mathcal{S}_{+p}\bigr)^{\widehat{\otimes}n} = \lim_{p\to\infty}\operatorname{pr}\mathcal{S}_{+p}^{\widehat{\otimes}n}. \tag{3.2.1}$$

Система функцій

$$p_n = \varphi^{\otimes n} : (t_1,\ldots,t_n) \longmapsto \varphi(t_1)\otimes\cdots\otimes\varphi(t_n), \tag{3.2.2}$$

де $\varphi \in \mathcal{S}_+$, є тотальною підмножиною в $\mathcal{S}_+^{\widehat{\otimes} n}$.

З теореми 2.2.3 випливають рівності

$$\begin{aligned}\big[\Upsilon^{\mathcal{S}_+}\,\mathbb{T}_s\,[\Upsilon^{\mathcal{S}_+}]^{-1}(P)\big](f) &= P(T_s'f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\big\langle (T_s'f)^{\otimes n}, p_n\big\rangle \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\big\langle T_s'f\otimes\cdots\otimes T_s'f, \varphi\otimes\cdots\otimes\varphi\big\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\big\langle T_s'f,\varphi\big\rangle^n \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\big\langle f, T_s\varphi\big\rangle^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\big\langle f^{\otimes n}, (T_s\varphi)^{\otimes n}\big\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\big\langle f^{\otimes n}, T_s^{\otimes n}p_n\big\rangle.\end{aligned}$$

Для кожного n розглянемо напівгрупу $T^{\otimes n} := \{T_s^{\otimes n} : s \in \mathbb{R}_+\}$ на тотальній підмножині (3.2.2) в просторі $\mathcal{S}_+^{\widehat{\otimes} n}$. Оскільки оператор T_s здійснює лівосторонній зсув, то, очевидно, маємо

$$\begin{aligned}\|T_s\varphi\|_p &= \sup_{0\le m\le p}\sup_{t\in\mathbb{R}_+}(1+t^2)^{p/2}|\varphi^{(m)}(t+s)| \\ &\le \sup_{0\le m\le p}\sup_{t\in\mathbb{R}_+}(1+t^2)^{p/2}|\varphi^{(m)}(t)| = \|\varphi\|_p, \qquad \forall\, p\in\mathbb{Z}_+.\end{aligned}$$

Звідси, а також із регулярності проективної границі (3.2.1), випливає одностайна неперервність напівгрупи $T^{\otimes n}$ в просторі $\mathcal{S}_+^{\widehat{\otimes} n}$ для кожного $n \in \mathbb{Z}_+$. Використовуючи (C_0) властивість напівгрупи $\{T_s : s \in \mathbb{R}_+\}$, легко довести цю ж властивість для $\{T_s^{\otimes n} : s \in \mathbb{R}_+\}$. Тому одностайна неперервність та сильна неперервність напівгрупи $\{\mathbb{T}_s : s \in \mathbb{R}_+\}$ випливає із властивостей топології прямої суми.

Знайдемо генератор напівгрупи $\{T_s^{\otimes n} : s \in \mathbb{R}_+\}$ для кожного $n \in \mathbb{Z}_+$. Для $n = 0$ тривіально, тому для кожного $n \in \mathbb{N}$ і фіксованого $p_n = \varphi^{\otimes n}$ маємо

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\big[T_s^{\otimes n}p_n\big]\Big|_{s=0} &= \frac{d}{ds}\big[\underbrace{T_s\varphi\otimes\cdots\otimes T_s\varphi}_{n}\big]\Big|_{s=0} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\underbrace{T_s\varphi\otimes\cdots\otimes T_s\varphi\otimes\frac{d}{ds}T_s\varphi}_{j}\otimes\underbrace{T_s\varphi\otimes\cdots\otimes T_s\varphi}_{n-j}\Bigg|_{s=0} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\underbrace{\varphi\otimes\cdots\otimes\varphi\otimes D\varphi}_{j}\otimes\underbrace{\varphi\otimes\cdots\otimes\varphi}_{n-j} = D^{\{\otimes\}n}p_n,\end{aligned}$$

оскільки відомо, що генератором звичайної напівгрупи зсувів є оператор диференціювання D, який є лінійним і неперервним в просторі $\mathcal{S}_+$ [7]. Тому оператор $D^{\{\otimes\}n}$ належить простору $\mathscr{L}\big(\mathcal{S}_+^{\widehat{\otimes}n}\big)$. Для завершення доведення залишилось використати те, що кожен елемент $\boldsymbol{p} \in \Gamma(\mathcal{S}_+)$ можна апроксимувати лінійною комбінацією елементів (3.2.2). □

Оператор диференціювання $\mathbb{D}$, визначений в теоремі 3.2.1 можна природним чином "перенести" на простір поліноміальних основних функцій, а саме, задамо оператор $\mathscr{D} \in \mathscr{L}(\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+))$ формулою $\mathscr{D} := \Upsilon^{\mathcal{S}_+} \circ \mathbb{D} \circ [\Upsilon^{\mathcal{S}_+}]^{-1}$.

Елементи вигляду $\boldsymbol{p}_m := (1, \varphi, \varphi^{\otimes 2} \dots, \varphi^{\otimes m}, 0 \dots) \in \Gamma(\mathcal{S}_+)$ утворюють тотальну підмножину в $\Gamma(\mathcal{S}_+)$. Тому множина відповідних поліномів

$$P_m := \sum_{k=0}^{m} \big\langle \,\cdot\,^{\otimes k}, \varphi^{\otimes k} \big\rangle = 1 + \langle \cdot\,, \varphi\rangle + \langle \cdot\,, \varphi\rangle^2 + \dots + \langle \cdot\,, \varphi\rangle^m$$

утворює тотальну підмножину в просторі $\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$.

Наслідок 3.2.1. *Оператор $\mathscr{D}$ діє на елементи тотальної підмножини простору $\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$ за формулою*

$$\mathscr{D}P_m := \sum_{k=1}^{m} k\langle \cdot\,, D\varphi\rangle\langle \cdot\,, \varphi\rangle^{k-1} = \langle \cdot\,, D\varphi\rangle \sum_{k=1}^{m} k\langle \cdot\,, \varphi\rangle^{k-1}.$$

Доведення. Легко перевірити правильність наступних рівностей

$$\begin{aligned}
\mathscr{D}P_m = (\Upsilon^{\mathcal{S}_+}\mathbb{D})(\boldsymbol{p}_m) = \Upsilon^{\mathcal{S}_+}\Big(\bigoplus_{k=0}^{m} D^{\{\otimes\}k}\varphi^{\otimes k}\Big) &= \sum_{k=0}^{m} \big\langle \,\cdot\,^{\otimes k}, D^{\{\otimes\}k}\varphi^{\otimes k} \big\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{m} \Big\langle \,\cdot\,^{\otimes k}, \sum_{j=1}^{k} \underbrace{\varphi \otimes \dots \otimes \varphi \otimes D\varphi}_{j} \otimes \underbrace{\varphi \otimes \dots \otimes \varphi}_{k-j} \Big\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} \big\langle \,\cdot\,^{\otimes k}, \underbrace{\varphi \otimes \dots \otimes \varphi \otimes D\varphi}_{j} \otimes \underbrace{\varphi \otimes \dots \otimes \varphi}_{k-j} \big\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} \big\langle \cdot\,, \varphi\big\rangle^{j-1}\big\langle \cdot\,, D\varphi\big\rangle\big\langle \cdot\,, \varphi\big\rangle^{k-j} \\
&= \sum_{k=1}^{m} k\langle \cdot\,, D\varphi\rangle\langle \cdot\,, \varphi\rangle^{k-1} = \langle \cdot\,, D\varphi\rangle \sum_{k=1}^{m} k\langle \cdot\,, \varphi\rangle^{k-1}.
\end{aligned}$$

□

Для кожного $s \in \mathbb{R}_+$ визначимо на просторі $\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+)$ поліноміальних розподілів повільного росту оператор $\mathscr{T}'_s$, що діє за правилом

$$\begin{array}{rccc} \mathscr{T}'_s : & \mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+) & \longrightarrow & \mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+) \\ & U = \bigtimes\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} U_n & \longmapsto & \mathscr{T}'_s U := \bigtimes\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} (U_n \circ T_s), \end{array}$$

де кожен U_n ми розуміємо як n-однорідний поліном з простору $\mathcal{P}_n(\mathcal{S}_+)$.

За допомогою ізоморфізмів, аналогічних до доведених у теоремі 2.2.3, задамо відповідний оператор на просторі "коефіцієнтів" $\Gamma(\mathcal{S}'_+)$, а саме, оператор $\mathbb{T}'_s \in \Gamma(\mathcal{S}'_+)$, $s \in \mathbb{R}_+$, визначимо за формулою

$$\mathbb{T}'_s := [\Psi^{\mathcal{S}_+}]^{-1} \circ \mathscr{T}'_s \circ \Psi^{\mathcal{S}_+}.$$

Зауважимо, що еквівалентним означенням оператора $\mathbb{T}'_s$ можна вважати рівність

$$\left[\Psi^{\mathcal{S}_+}\, \mathbb{T}'_s\, [\Psi^{\mathcal{S}_+}]^{-1}(U)\right](\varphi) = U(T_s\varphi),$$

де $U = \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} U_n \in \mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+)$, $\varphi \in \mathcal{S}_+$.

Теорема 3.2.2. *Однопараметрична сім'я* $\{\mathbb{T}'_s : s \in \mathbb{R}_+\}$ *лінійних операторів, що діють на алгебрі* $\{\Gamma(\mathcal{S}'_+), \diamond\}$, *є одностайно неперервною* (C_0) *напівгрупою алгебраїчних автоморфізмів. Її генератором є оператор* $\mathbb{D}'$, *що належить діагональній підалгебрі* $\mathscr{L}_D(\Gamma(\mathcal{S}'_+))$ *і на довільний елемент вигляду* $\boldsymbol{f} = \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} f^{\otimes n} \in \Gamma(\mathcal{S}'_+)$, *де* $f \in \mathcal{S}'_+$, *діє за правилом* $\mathbb{D}'\boldsymbol{f} := \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} D'^{\{\otimes\}n} f^{\otimes n}$, *де*

$$D'^{\{\otimes\}n} f^{\otimes n} := \sum_{j=1}^{n} \underbrace{f \otimes \cdots \otimes f \otimes D'f}_{j} \otimes \underbrace{f \otimes \cdots \otimes f}_{n-j}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

а $D'^{\{\otimes\}0}$ *— нульовий оператор.*

Доведення. Зауважимо, що дана теорема є у певному сенсі двоїста до теореми 3.2.1. Мається на увазі, що використовуючи теорію двоїстості, дуальність $\langle\, \Gamma(\mathcal{S}'_+, \Gamma(\mathcal{S}_+)\,\rangle$ та рівність $\langle\, D'f, \varphi\,\rangle = -\langle\, f, D\varphi\,\rangle$, $f \in \mathcal{S}'_+$, $\varphi \in \mathcal{S}_+$, легко звести доведення цієї теореми до випадку, розглянутого в теоремі 3.2.1. ☐

Оператор диференціювання $\mathscr{D}' \in \mathscr{L}(\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+))$, що відповідає визначеному в теоремі 3.2.2 оператору $\mathbb{D}'$, має вигляд $\mathscr{D}' := \Psi^{\mathcal{S}_+} \circ \mathbb{D}' \circ [\Psi^{\mathcal{S}_+}]^{-1}$.

Легко бачити, що елементу $\boldsymbol{f} = (1, f, f^{\otimes 2}, \dots, f^{\otimes n}, \dots) \in \Gamma(\mathcal{S}'_+)$ відповідає елемент $U = (1, U_1, U_2, \dots, U_n, \dots) \in \mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+)$, де $U_n = \langle f^{\otimes n}, \cdot^{\otimes n}\rangle = \langle f, \cdot\rangle^n$ — n-однорідний поліном над $\mathcal{S}_+$, при цьому множини таких елементів утворюють тотальні підмножини відповідних просторів.

Наслідок 3.2.2. *Оператор* $\mathscr{D}'$ *діє на елементи тотальної підмножини простору* $\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+)$ *за формулою*

$$\mathscr{D}'U := \big(0, \langle D'f, \cdot\rangle, 2\langle D'f, \cdot\rangle U_1, \dots, n\langle D'f, \cdot\rangle U_{n-1}, \dots\big).$$

Доведення. Безпосередньо переконуємося у правильності твердження:

$$\begin{aligned}
\mathscr{D}'U = (\Psi^{\mathcal{S}_+}\,\mathbb{D}')(\boldsymbol{f}) &= \Psi^{\mathcal{S}_+}\Big(\bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} D'^{\{\otimes\}n} f^{\otimes n}\Big) = \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \big\langle D'^{\{\otimes\}n} f^{\otimes n}, \cdot^{\otimes n}\big\rangle \\
&= 0 \times \bigtimes_{n\in\mathbb{N}} \Big\langle \sum_{j=1}^{n} \underbrace{f\otimes\cdots\otimes f\otimes D'f}_{j} \otimes \underbrace{f\otimes\cdots\otimes f}_{n-j}, \cdot^{\otimes n}\Big\rangle \\
&= 0 \times \bigtimes_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{n} \big\langle \underbrace{f\otimes\cdots\otimes f\otimes D'f}_{j} \otimes \underbrace{f\otimes\cdots\otimes f}_{n-j}, \cdot^{\otimes n}\big\rangle \\
&= 0 \times \bigtimes_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{n} \langle f, \cdot\rangle^{j-1}\langle D'f, \cdot\rangle\langle f, \cdot\rangle^{n-j} \\
&= \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} n\langle D'f, \cdot\rangle\langle f, \cdot\rangle^{n-1} = \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} n\langle D'f, \cdot\rangle U_{n-1}.
\end{aligned}$$

□

Щоб проілюструвати ситуацію наведемо діаграми, які показують взаємозв'язок між напівгрупами та їх генераторами, описаними в теоремах 3.2.1, 3.2.2 та наслідках 3.2.1, 3.2.2:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+) \arrow[r, "\mathscr{T}_s \quad \mathscr{D}"] \arrow[d, shift left, "{[\Upsilon^{\mathcal{S}_+}]^{-1}}"] & \mathcal{P}(\mathcal{S}'_+) \arrow[d, shift left, "{[\Upsilon^{\mathcal{S}_+}]^{-1}}"] \\
\Gamma(\mathcal{S}_+) \arrow[r, "\mathbb{T}_s \quad \mathbb{D}"] \arrow[u, shift left, "\Upsilon^{\mathcal{S}_+}"] & \Gamma(\mathcal{S}_+), \arrow[u, shift left, "\Upsilon^{\mathcal{S}_+}"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+) \arrow[r, "\mathscr{T}'_s \quad \mathscr{D}'"] \arrow[d, shift left, "{[\Psi^{\mathcal{S}_+}]^{-1}}"] & \mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+) \arrow[d, shift left, "{[\Psi^{\mathcal{S}_+}]^{-1}}"] \\
\Gamma(\mathcal{S}'_+) \arrow[r, "\mathbb{T}'_s \quad \mathbb{D}'"] \arrow[u, shift left, "\Psi^{\mathcal{S}_+}"] & \Gamma(\mathcal{S}'_+). \arrow[u, shift left, "\Psi^{\mathcal{S}_+}"]
\end{tikzcd}$$

Оператори $\mathbb{D}$, $\mathbb{D}'$, $\mathscr{D}$ та $\mathscr{D}'$ природно назвати поліноміальними похідними, оскільки вони є генераторами відповідних поліноміальних напівгруп зсувів. Більше того, ці оператори, будучи заданими на відповідних алгебрах, задовольняють правило Лейбніца.

Теорема 3.2.3. *Оператори* $\mathbb{D}$ *та* $\mathbb{D}'$ *є неперервними диференціюваннями в сенсі правила Лейбніца на згорткових алгебрах* $\{\Gamma(\mathcal{S}_+),\diamond\}$ *та* $\{\Gamma(\mathcal{S}'_+),\diamond\}$ *відповідно.*

Доведення. Нехай $\boldsymbol{p}=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+}\varphi^{\otimes n}\in\Gamma(\mathcal{S}_+)$ і $\boldsymbol{q}=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+}\psi^{\otimes n}\in\Gamma(\mathcal{S}_+)$, де $\varphi,\psi\in\mathcal{S}_+$. Нам потрібно показати, що виконується рівність

$$\mathbb{D}(\boldsymbol{p}\diamond\boldsymbol{q})=\mathbb{D}\boldsymbol{p}\diamond\boldsymbol{q}+\boldsymbol{p}\diamond\mathbb{D}\boldsymbol{q}.$$

Згідно з означенням добутку Віка маємо

$$\boldsymbol{p}\diamond\boldsymbol{q}=\Big(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+}\varphi^{\otimes n}\Big)\diamond\Big(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+}\psi^{\otimes n}\Big)=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+}\sum_{k=0}^{n}\varphi^{\otimes k}\otimes\psi^{\otimes(n-k)}.$$

Нехай $D_{\{n,j\}}$ позначає оператор, що на довільний елемент вигляду $\varphi^{\otimes n}\in\mathcal{S}_+^{\widehat{\otimes}n}$ діє за правилом

$$D_{\{n,j\}}[\varphi^{\otimes n}]:=\underbrace{\varphi\otimes\cdots\otimes\varphi\otimes D\varphi}_{j}\otimes\underbrace{\varphi\otimes\cdots\otimes\varphi}_{n-j}.$$

Далі безпосередньо переконуємося у правильності потрібної рівності:

$$\begin{aligned}\mathbb{D}(\boldsymbol{p}\diamond\boldsymbol{q})&=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+}D^{\{\otimes\}n}\sum_{k=0}^{n}\varphi^{\otimes k}\otimes\psi^{\otimes(n-k)}=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{n}D_{\{n,j\}}[\varphi^{\otimes k}\otimes\psi^{\otimes(n-k)}]\\&=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+}\sum_{k=0}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{k}D_{\{k,j\}}[\varphi^{\otimes k}]\otimes\psi^{\otimes(n-k)}+\sum_{j=1}^{n-k}\varphi^{\otimes k}\otimes D_{\{n-k,j\}}[\psi^{\otimes(n-k)}]\Big)\\&=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+}\sum_{k=0}^{n}\Big(\big(D^{\{\otimes\}k}\varphi^{\otimes k}\big)\otimes\psi^{\otimes(n-k)}\Big)+\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+}\sum_{k=0}^{n}\Big(\varphi^{\otimes k}\otimes\big(D^{\{\otimes\}(n-k)}\psi^{\otimes(n-k)}\big)\Big)\\&=\mathbb{D}\boldsymbol{p}\diamond\boldsymbol{q}+\boldsymbol{p}\diamond\mathbb{D}\boldsymbol{q}.\end{aligned}$$

Для довільних $\boldsymbol{f}=\bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+}f^{\otimes n}\in\Gamma(\mathcal{S}'_+)$ і $\boldsymbol{g}=\bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+}g^{\otimes n}\in\Gamma(\mathcal{S}'_+)$, де $f,g\in\mathcal{S}'_+$, рівність

$$\mathbb{D}'(\boldsymbol{f}\diamond\boldsymbol{g})=\mathbb{D}'\boldsymbol{f}\diamond\boldsymbol{g}+\boldsymbol{f}\diamond\mathbb{D}'\boldsymbol{g}$$

доводиться аналогічно. □

Наслідок 3.2.3. *Оператори* $\mathscr{D}$ *та* $\mathscr{D}'$ *є неперервними диференціюваннями на алгебрах* $\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$ *та* $\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+)$ *відповідно, тобто виконуються рівності*

$$\mathscr{D}'(U \diamond V) = \mathscr{D}'U \diamond V + U \diamond \mathscr{D}'V, \qquad U, V \in \mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+),$$
$$\mathscr{D}(P \diamond Q) = \mathscr{D}P \diamond Q + P \diamond \mathscr{D}Q, \qquad P, Q \in \mathcal{P}(\mathcal{S}'_+).$$

Теорема 3.2.4. *Поліноміальні похідні* $\mathbb{D}'$ *та* $\mathbb{D}$ *як оператори, що задані на спряжених просторах* $\Gamma(\mathcal{S}'_+)$ *та* $\Gamma(\mathcal{S}_+)$, *задовольняють дуальне співвідношення*

$$\langle \mathbb{D}'\boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}\rangle = -\langle \boldsymbol{u}, \mathbb{D}\boldsymbol{p}\rangle, \qquad \forall\, \boldsymbol{u} \in \Gamma(\mathcal{S}'_+), \quad \forall\, \boldsymbol{p} \in \Gamma(\mathcal{S}_+).$$

Доведення. Правильність потрібного співвідношення відразу слідує із рівностей $\langle D'f, \varphi\rangle = -\langle f, D\varphi\rangle$ та

$$\begin{aligned}\Big\langle D'^{\{\otimes\}n} f^{\otimes n}, \varphi^{\otimes n}\Big\rangle &= \Big\langle \sum_{j=1}^{n} \underbrace{f \otimes \dots \otimes f \otimes D'f}_{j} \otimes \underbrace{f \otimes \dots \otimes f}_{n-j}, \varphi^{\otimes n}\Big\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} \big\langle f, \varphi\big\rangle^{j-1} \big\langle D'f, \varphi\big\rangle \big\langle f, \varphi\big\rangle^{n-j} \\ &= -\sum_{j=1}^{n} \big\langle f, \varphi\big\rangle^{j-1} \big\langle f, D\varphi\big\rangle \big\langle f, \varphi\big\rangle^{n-j} \\ &= -\Big\langle f^{\otimes n}, \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\varphi \otimes \dots \otimes \varphi \otimes D\varphi}_{j} \otimes \underbrace{\varphi \otimes \dots \otimes \varphi}_{n-j} \Big\rangle \\ &= -\big\langle f^{\otimes n}, D^{\{\otimes\}n} \varphi^{\otimes n}\big\rangle,\end{aligned}$$

для довільних $f \in \mathcal{S}'_+$, $\varphi \in \mathcal{S}_+$. Залишилось зауважити, що множини елементів вигляду $\bigtimes_{n \in \mathbb{Z}_+} f^{\otimes n}$ та $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_+} \varphi^{\otimes n}$ є тотальними у просторах $\Gamma(\mathcal{S}'_+)$ та $\Gamma(\mathcal{S}_+)$ відповідно. □

Наслідок 3.2.4. *Поліноміальні похідні* $\mathscr{D}'$ *та* $\mathscr{D}$ *як оператори, що задані на спряжених просторах* $\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+)$ *та* $\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$, *задовольняють дуальне співвідношення*

$$\langle \mathscr{D}'U, P\rangle = -\langle U, \mathscr{D}P\rangle, \qquad \forall\, U \in \mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+), \quad \forall\, P \in \mathcal{P}(\mathcal{S}'_+).$$

3.3 Перетворення Фур'є поліноміальних основних та узагальнених функцій

У параграфі 2.3 ми описали метод розширення довільного лінійного неперервного оператора до деякого оператора на просторі поліноміальних розподілів. У цьому параграфі, спираючись на цей метод, ми покажемо як розширити перетворення Фур'є на простір поліноміальних узагальнених функцій повільного росту.

3.3.1 Перетворення Фур'є функцій з основного простору

Відомо [7], що для довільної функції $\varphi \in \mathcal{S}$ пряме та обернене перетворення Фур'є

$$F\big[\varphi(t)\big](\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\mathrm{i}t\xi}\varphi(t)\,dt, \qquad F^{-1}\big[\psi(\xi)\big](t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}t\xi}\psi(\xi)\,d\xi,$$

здійснює топологічний ізоморфізм простору $\mathcal{S}$ на себе. Поляра $\mathcal{S}_+'^{\circ}$ підпростору $\mathcal{S}_+'$ відносно дуальної пари $\langle\, \mathcal{S}', \mathcal{S}\,\rangle$ співпадає з його ортогональним доповненням $\mathcal{S}_+'^{\perp}$ і є замкненим підпростором в $\mathcal{S}$. Тому Фур'є образ $F[\mathcal{S}_+'^{\circ}]$ поляри $\mathcal{S}_+'^{\circ}$ є замкненим підпростором в $\mathcal{S}$.

Побудуємо факторпростір

$$\mathcal{S}/F\big[\mathcal{S}_+'^{\circ}\big] := \{\varphi + F\big[\mathcal{S}_+'^{\circ}\big] : \varphi \in \mathcal{S}\}.$$

Порівнюючи це з означенням факторпростору $\mathcal{S}/\mathcal{S}_+'^{\circ}$ (див. формулу (3.1.4)), легко переконатися, що $F[\mathcal{S}/\mathcal{S}_+'^{\circ}] = \mathcal{S}/F\big[\mathcal{S}_+'^{\circ}\big]$.

З іншого боку, враховуючи топологічні ізоморфізми $\mathcal{S}_+ \simeq \mathcal{S}/\mathcal{S}_+'^{\circ} \simeq \Theta[\mathcal{S}]$ (див. формулу (3.1.5)), кожен елемент (клас еквівалентності) факторпростору $\mathcal{S}/\mathcal{S}_+'^{\circ}$ можна розглядати як однозначно визначену функцію $\varphi \in L^1(\mathbb{R}_+)\bigcap L^2(\mathbb{R}_+)$, яка є звуженням довільного представника цього класу еквівалентності на $\mathbb{R}_+$, тобто як функцію з простору $\mathcal{S}_+$. Очевидно, що пряме та обернене перетворення Фур'є в просторі $\mathcal{S}_+$ матимуть вигляд

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi}(\xi) := F_+\big[\varphi(t)\big](\xi) := \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\mathrm{i}t\xi}\varphi(t)\,dt,\\ F_+^{-1}\big[\widehat{\varphi}(\xi)\big](t) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}t\xi}\widehat{\varphi}(\xi)\,d\xi,\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

для всіх $\xi \in \mathbb{R}$ і $t \in \mathbb{R}_+$.

Для довільної функції $\varphi \in \mathcal{S}'^{\circ}_+$, очевидно, виконується $\widehat{\varphi}(\xi) \equiv 0$. Тому ядро перетворення F_+, заданого на просторі $\mathcal{S}_+$, який топологічно ізоморфний до $\mathcal{S}/\mathcal{S}'^{\circ}_+$, є тривіальним. Позначимо $\widehat{\mathcal{S}}_+ := F_+\big[\mathcal{S}_+\big]$ — образ простору $\mathcal{S}_+$ при прямому перетворенні Фур'є (3.3.1). З вище сказаного випливає, що відображення $F_+ \colon \mathcal{S}_+ \longmapsto \widehat{\mathcal{S}}_+$ є ін'єктивним. Користуючись цією ін'єктивністю, простір $\widehat{\mathcal{S}}_+$ наділимо індукованою перетворенням F_+ топологією, тобто

$$\|\widehat{\varphi}\|_p := \|\varphi\|_p, \qquad \forall\, p \in \mathbb{Z}_+, \qquad \widehat{\varphi} \in \widehat{\mathcal{S}}_+, \qquad \varphi \in \mathcal{S}_+. \tag{3.3.2}$$

Звідси випливає, що простір $\widehat{\mathcal{S}}_+$ є монтелевим ядерним (F) простором. Зокрема, він бочковий. Крім того, справджується топологічний ізоморфізм $\widehat{\mathcal{S}}_+ \simeq \mathcal{S}/F\big[\mathcal{S}'^{\circ}_+\big]$.

Нехай $F'_+ \colon \widehat{\mathcal{S}}'_+ \longmapsto \mathcal{S}'_+$ — спряжене до F_+ відображення, де $\widehat{\mathcal{S}}'_+$ — сильно спряжений до $\widehat{\mathcal{S}}_+$ простір. Простір $\widehat{\mathcal{S}}'_+$ є монтелевим ядерним (DF) простором як сильно спряжений до (F) простору $\widehat{\mathcal{S}}_+$.

Перетворення

$$\mathcal{F}' := 2\pi(F'_+)^{-1} \colon \mathcal{S}'_+ \ni f \longmapsto \widehat{f} := \mathcal{F}'[f] \in \widehat{\mathcal{S}}'_+ \tag{3.3.3}$$

назвемо *узагальненим перетворенням Фур'є* розподілів з класу $\mathcal{S}'_+$. Відображення $\mathcal{F}'$ є неперервним у сильній топології простору $\mathcal{S}'_+$.

Для спрощення позначень (і з питань симетрії відносно двоїстості) позначимо $\mathcal{F} := F_+$. Тоді білінійна форма

$$\langle \mathcal{F}'f, \mathcal{F}\varphi\rangle = 2\pi\langle F'_+(F'_+)^{-1}f, \varphi\rangle = 2\pi\langle f, \varphi\rangle,$$

де $f \in \mathcal{S}'_+$, $\varphi \in \mathcal{S}_+$, визначає нову дуальність $\langle\, \widehat{\mathcal{S}}'_+, \widehat{\mathcal{S}}_+ \,\rangle$.

Відомо, що простір $\mathcal{S}'_+$ є згортковою алгеброю з одиницею δ, де $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$ — функціонал Дірака. Зрозуміло, що $\widehat{\delta * f} = \widehat{f} = \widehat{f * \delta}$. Тому, простір $\widehat{\mathcal{S}}'_+$ є комутативною мультиплікативною алгеброю з одиницею $\widehat{\delta}$ відносно множення $\widehat{(f * g)} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$, $f, g \in \mathcal{S}'_+$. Неважко показати, що $\widehat{\delta} = 1$. Дійсно, використавши другу з формул (3.3.1), маємо

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}'\delta, \mathcal{F}\varphi \rangle &= 2\pi \langle \delta, \varphi \rangle = 2\pi\varphi(0) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}t\xi}\, \widehat{\varphi}(\xi)\, d\xi \,\bigg|_{t=0} = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\xi)\, d\xi = \langle 1, \mathcal{F}\varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}_+.\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

3.3.2 Узагальнені граничні значення Фур'є-образів згорткової алгебри $\mathcal{S}'_+$

В цьому пункті доведемо аналог теореми Пелі-Вінера про зображення Фур'є-образу згорткової алгебри $\mathcal{S}'_+$ у вигляді мультиплікативної алгебри аналітичних функцій комплексної змінної.

В роботі [159] з точністю до топологічного ізоморфізму описано Фур'є-образ алгебри розподілів Шварца з носіями в довільному конусі в термінах операторів. Подібну теорему ми доводимо в параграфі 4.2 для ультрарозподілів. Тут ми розглянемо іншу інтерпретацію мультиплікативної алгебри $\widehat{\mathcal{S}}'_+$, а саме, покажемо зображення елементів з $\widehat{\mathcal{S}}'_+$ у вигляді узагальнених граничних значень перетворення Фур'є-Лапласа розподілів Шварца з носіями в $\mathbb{R}_+$. З цією метою встановимо аналог теореми Пелі-Вінера для класу типу Харді-Лебега, що характеризує елементи алгебри $\widehat{\mathcal{S}}'_+$ як деякі аналітичні функції.

На просторі основних функцій $\mathcal{S}_+$ визначимо оператор множення на експоненту

$$\mathcal{Q}_\eta : \mathcal{S}_+ \ni \varphi(t) \longmapsto e^{-\eta t}\varphi(t) \in \mathcal{S}_+$$

для кожного $\eta \geq 0$.

Лема 3.3.1. *Відображення* $\mathcal{Q} : \mathbb{R}_+ \ni \eta \longmapsto \mathcal{Q}_\eta \in \mathscr{L}(\mathcal{S}_+)$ *задає одностайно неперервну* (C_0) *напівгрупу операторів над простором* $\mathcal{S}_+$.

Доведення. Напівгрупові властивості перевірити легко. Очевидно, що $\mathcal{Q}_0$ — тотожній оператор. Для довільних $\eta, \mu \in \mathbb{R}_+$ та функції $\varphi \in \mathcal{S}_+$ маємо $\mathcal{Q}_{\eta+\mu}\varphi(t) = e^{-(\eta+\mu)t}\varphi(t) = e^{-\eta t}e^{-\mu t}\varphi(t) = (\mathcal{Q}_\eta \circ \mathcal{Q}_\mu)\varphi(t)$.

Доведемо сильну неперервність напівгрупи. Для довільних $p \in \mathbb{Z}_+$ та $\varphi \in \mathcal{S}_+$ маємо

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{Q}_\eta\varphi - \varphi\|_p &= \sup_{0\le m\le p}\sup_{t\in\mathbb{R}_+}(1+t^2)^{p/2}\big|(\mathcal{Q}_\eta\varphi - \varphi)^{(m)}(t)\big| \\
&= \sup_{0\le m\le p}\sup_{t\in\mathbb{R}_+}(1+t^2)^{p/2}\big|(e^{-\eta t}\varphi(t))^{(m)} - \varphi^{(m)}(t)\big| \\
&= \sup_{0\le m\le p}\sup_{t\in\mathbb{R}_+}(1+t^2)^{p/2}\Big|\sum_{k=0}^{m} C_m^k(-\eta)^k e^{-\eta t}\varphi^{(m-k)}(t) - \varphi^{(m)}(t)\Big| \\
&\le \sup_{0\le m\le p}\sup_{t\in\mathbb{R}_+}(1+t^2)^{p/2}|\varphi^{(m)}(t)|\Big|\sum_{k=0}^{m} C_m^k(-\eta)^k - 1\Big| \\
&= \|\varphi\|_p \sup_{0\le m\le p}\big|(1-\eta)^m - 1\big| \xrightarrow[\eta\to 0]{} 0.
\end{aligned}$$

Звідси випливає сильна неперервність та поточкова обмеженість напівгрупи $\mathcal{Q}$. Одностайна неперервність цієї напівгрупи слідує з бочковості простору $\mathcal{S}_+$ та теореми Банаха-Штейнгауза. ☐

На Фур'є-образі $\widehat{\mathcal{S}}_+$ визначимо оператор

$$\widehat{\mathcal{Q}}_\eta \, : \, \widehat{\varphi}(\xi) \longmapsto \widehat{\varphi}(\xi - \mathrm{i}\eta), \qquad \xi \in \mathbb{R}, \qquad \eta \in \mathbb{R}_+.$$

Лема 3.3.2. *Відображення* $\widehat{\mathcal{Q}} : \mathbb{R}_+ \ni \eta \longmapsto \widehat{\mathcal{Q}}_\eta \in \mathscr{L}(\widehat{\mathcal{S}}_+)$ *задає одностайно неперервну* (C_0) *напівгрупу операторів над простором* $\widehat{\mathcal{S}}_+$.

Доведення. Напівгрупові властивості очевидні. Доведемо сильну неперервність напівгрупи $\widehat{\mathcal{Q}}$. Для довільних $\varphi \in \mathcal{S}_+$ та $\eta \in \mathbb{R}_+$ маємо

$$\widehat{\mathcal{Q}_\eta\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\mathrm{i}t\xi}e^{-\eta t}\varphi(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\mathrm{i}t(\xi-\mathrm{i}\eta)}\varphi(t)\,dt = \widehat{\varphi}(\xi - \mathrm{i}\eta) = \widehat{\mathcal{Q}}_\eta\widehat{\varphi}(\xi).$$

Тому для довільного $p \in \mathbb{Z}_+$ і кожної функції $\widehat{\varphi} \in \widehat{\mathcal{S}}_+$, де $\varphi \in \mathcal{S}_+$, використовуючи рівність (3.3.2), отримаємо

$$\|\widehat{\mathcal{Q}}_\eta \widehat{\varphi} - \widehat{\varphi}\|_p = \|\widehat{\mathcal{Q}_\eta \varphi} - \widehat{\varphi}\|_p = \|\widehat{\mathcal{Q}_\eta \varphi - \varphi}\|_p = \|\mathcal{Q}_\eta \varphi - \varphi\|_p$$

для всіх $\eta \in \mathbb{R}_+$. З леми 3.3.1 випливає, що $\|\widehat{\mathcal{Q}}_\eta \widehat{\varphi} - \widehat{\varphi}\|_p \to 0$ при $\eta \to 0$, що еквівалентно сильній неперервності напівгрупи $\widehat{\mathcal{Q}}$.

Аналогічно, поточкова обмеженість напівгрупи $\widehat{\mathcal{Q}}$ випливає з відповідної властивості напівгрупи $\mathcal{Q}$.

Оскільки простір $\widehat{\mathcal{S}}_+$ є бочковим, то за теоремою Банаха-Штейнгауза $\widehat{\mathcal{Q}}$ є одностайно неперервною напівгрупою операторів над $\widehat{\mathcal{S}}_+$. ☐

Нехай $\mathbb{C}_- := \big\{z = \xi - \mathrm{i}\eta \in \mathbb{C} : \xi \in \mathbb{R}, \eta > 0\big\}$ позначає відкриту нижню комплексну півплощину.

Лема 3.3.3. *Кожну функцію $\widehat{\varphi}(\xi) \in \widehat{\mathcal{S}}_+$ единим чином можна аналітично продовжити у півплощину $\mathbb{C}_-$ до функції $\widehat{\varphi}(z)$, яка має вигляд*

$$L[\varphi](z) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\mathrm{i}tz} \varphi(t)dt, \quad z \in \mathbb{C}_-.$$

При цьому для довільного $\xi \in \mathbb{R}$ задовольняється граничне співвідношення $\widehat{\varphi}(\xi) = \lim_{\eta \to 0} \widehat{\varphi}(z)$, $z = \xi - \mathrm{i}\eta \in \mathbb{C}_-$.

Доведення. Твердження є безпосереднім наслідком класичної теореми Пелі-Вінера для класу Харді-Лебега (див. [17, ст. 226]). ☐

Розширимо сім'ю операторів $\{\mathcal{Q}_\eta : \eta \in \mathbb{R}_+\}$ на простір $\mathcal{S}'_+$ природним способом

$$\langle \mathcal{Q}_\eta f, \varphi \rangle := \langle f, \mathcal{Q}_\eta \varphi \rangle, \qquad \varphi \in \mathcal{S}_+, \qquad f \in \mathcal{S}'_+.$$

Для кожного розподілу $f \in \mathcal{S}'_+$ визначимо узагальнене перетворення Фур'є-Лапласа за формулою

$$\mathcal{L}[f](z) := \mathcal{F}'[\mathcal{Q}_\eta f](\xi) = \widehat{\mathcal{Q}_\eta f}(\xi), \qquad z = \xi - \mathrm{i}\eta \in \mathbb{C}_-,$$

де $\mathcal{F}'$ — узагальнене перетворення Фур'є, визначене формулою (3.3.3).

Будемо казати, що аналітична у відкритій нижній півплощині $\mathbb{C}_-$ функція $g(z)$ належить алгебрі $\mathcal{H}'_-$, якщо вона задовольняє дві умови:

1) для кожного фіксованого $\eta > 0$ функція $\xi \longmapsto g(\xi - \mathfrak{i}\eta)$ належить простору $\widehat{\mathcal{S}}'_+$;

2) сукупність $\{g(\xi - \mathfrak{i}\eta) : 0 < \eta < \mu\}$ обмежена в просторі $\widehat{\mathcal{S}}'_+$ для кожного скінченного дійсного додатного числа μ.

Теорема 3.3.1. *Узагальнене перетворення Фур'є-Лапласа здійснює алгебраїчний ізоморфізм згорткової алгебри $\mathcal{S}'_+$ в мультиплікативну алгебру $\mathcal{H}'_-$. Зокрема, виконується рівність $\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f] \cdot \mathcal{L}[g]$, $f, g \in \mathcal{S}'_+$, і $\mathcal{L}[\delta]$ є одиничною функцією алгебри $\mathcal{H}'_-$.*

Доведення. Зауважимо, що для $\varphi \in \mathcal{S}_+$ і кожного фіксованого $\eta \in \mathbb{R}_+$ формула

$$\langle \widehat{\mathcal{Q}_\eta f},\, \widehat{\varphi} \rangle = 2\pi \langle \mathcal{Q}_\eta f,\, \varphi \rangle = 2\pi \langle f,\, \mathcal{Q}_\eta \varphi \rangle = \langle \widehat{f},\, \widehat{\mathcal{Q}_\eta \varphi} \rangle \tag{3.3.5}$$

однозначно визначає $\widehat{\mathcal{Q}_\eta f}$ як лінійний та неперервний функціонал на просторі $\widehat{\mathcal{S}}_+$. Справді, однозначність є наслідком відокремлюваності двоїстості $\langle\, \mathcal{S}'_+,\, \mathcal{S}_+ \,\rangle$, а неперервність є наслідком неперервності функціоналу $\widehat{f}$ на $\widehat{\mathcal{S}}_+$.

З іншого боку, оскільки $\mathcal{F}'$ здійснює топологічний ізоморфізм згорткової алгебри $\mathcal{S}'_+$ на мультиплікативну алгебру $\widehat{\mathcal{S}}'_+$, то з означення відображення $\mathcal{L}$ випливає, що $\mathcal{L}[f]$ є узагальненим перетворенням Фур'є розподілу $\mathcal{Q}_\eta f \in \mathcal{S}'_+$, а тому є елементом простору $\mathcal{S}'_+$ для кожного фіксованого $\eta > 0$.

Покажемо, що формула (3.3.5) визначає продовження функціоналу $\widehat{f} \in \widehat{\mathcal{S}}'_+$ в простір $\mathcal{H}'_-$. З леми 3.3.1 випливає, що для довільної функції $\varphi \in \mathcal{S}_+$ сукупність $\{\mathcal{Q}_\eta \varphi : 0 < \eta < \mu\}$ є обмеженою в $\mathcal{S}_+$ для кожного скінченного дійсного $\mu > 0$. Тоді із співвідношення (3.3.5) випливає, що сукупність $\{\widehat{\mathcal{Q}_\eta f} : 0 < \eta < \mu\}$ є обмеженою в слабкій топології простору

$\widehat{\mathcal{S}}'_+$. Оскільки $\widehat{\mathcal{S}}'_+$ — монтелевий простір (див. пункт 3.3.1 та [22]), то для кожного скінченного дійсного додатного μ ця сукупність є обмеженою в сильній топології.

Аналітичність функції $\mathcal{F}'[\mathcal{Q}_\eta f](\xi)$ при $\eta > 0$ випливає з теореми [181, IX.16].

Для довільних розподілів $f, g \in \mathcal{S}'_+$ і функції $\varphi \in \mathcal{S}_+$ справджуються рівності

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{Q}_\eta(f * g), \varphi\rangle &= \langle f * g, \mathcal{Q}_\eta \varphi\rangle = \langle f(s), \langle g(t), e^{-\eta(t+s)}\varphi(t+s)\rangle\rangle \\ &= \langle f(s), e^{-\eta s}\langle g(t), e^{-\eta t}\varphi(t+s)\rangle\rangle \\ &= \langle e^{-\eta s} f(s), \langle e^{-\eta t} g(t), \varphi(t+s)\rangle\rangle = \langle \mathcal{Q}_\eta f * \mathcal{Q}_\eta g, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Звідси отримуємо

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f * g](z) &= \mathcal{F}'[\mathcal{Q}_\eta(f * g)](\xi) = \mathcal{F}'[\mathcal{Q}_\eta f * \mathcal{Q}_\eta g](\xi) \\ &= \mathcal{F}'[\mathcal{Q}_\eta f](\xi) \cdot \mathcal{F}'[\mathcal{Q}_\eta g](\xi) = \mathcal{L}[f](z) \cdot \mathcal{L}[g](z).\end{aligned}$$

Зокрема при $g = \delta$ отримаємо $\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[f * \delta] = \mathcal{L}[\delta * f] = \mathcal{L}[f] \cdot \mathcal{L}[\delta] = \mathcal{L}[\delta] \cdot \mathcal{L}[f]$, тобто $\mathcal{L}[\delta]$ є одиничною функцією в $\mathcal{H}'_-$, оскільки δ — одиниця згорткової алгебри $\mathcal{S}'_+$. □

Фур'є-образи $\widehat{\mathcal{S}}'_+$ можна трактувати як узагальнені граничні значення аналітичних функцій алгебри $\mathcal{H}'_-$, тобто правильним є наступне твердження.

Наслідок 3.3.1. *Для довільної функції $g \in \mathcal{H}'_-$ існує єдиний розподіл $\widehat{f} \in \widehat{\mathcal{S}}'_+$ такий, що в сильній топології простору $\widehat{\mathcal{S}}'_+$ справедлива рівність*

$$\lim_{\eta \to +0} g(\xi - \mathrm{i}\eta) = \widehat{f}(\xi).$$

Доведення. Твердження є наслідком теореми 3.3.1 і сильної неперервності напівгрупи $\mathcal{Q}_\eta$. □

3.3.3 Поліноміальне розширення перетворення Фур'є та його властивості

У цьому пункті розширимо звичайне та узагальнене перетворення Фур'є на алгебри "коефіцієнтів" $\Gamma(\mathcal{S}_+)$ і $\Gamma(\mathcal{S}'_+)$ та на відповідні поліноміальні алгебри $\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$ і $\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+)$, використавши тензорну структуру цих просторів та метод параграфу 2.3.

Для поліноміального перетворення Фур'є на цих просторах доведено ряд властивостей. Деякі з них є поліноміальними аналогами відомих властивостей (див. теореми 3.3.2, 3.3.3 та наслідки з них), інші є такими, що не мають аналогів у класичних просторах (див. теорему 3.3.4 та наслідок 3.3.4).

Визначимо оператор $\mathcal{F}'^{\otimes} \in \mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{S}'_+), \Gamma(\widehat{\mathcal{S}}'_+)\big)$, де $\Gamma(\widehat{\mathcal{S}}'_+) := \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{S}'^{\widehat{\otimes}n}_+$, за правилом

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{F}'^{\otimes} := \bigtimes\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{F}'^{\otimes n} : & \Gamma(\mathcal{S}'_+) & \longrightarrow & \Gamma(\widehat{\mathcal{S}}'_+) \\ & \boldsymbol{u} = \bigtimes\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} u_n & \longmapsto & \mathcal{F}'^{\otimes}\boldsymbol{u} := \bigtimes\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{F}'^{\otimes n} u_n, \end{array}$$

де $\mathcal{F}'^{\otimes 0} := I_{\mathbb{C}}$ — одиничний оператор в $\mathscr{L}(\mathbb{C})$, а кожний оператор $\mathcal{F}'^{\otimes n}$, $n \in \mathbb{N}$, є n-тим тензорним степенем оператора $\mathcal{F}'$ (див. параграф 2.3).

Комутативна діаграма

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+) \arrow[r, "\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}}"] \arrow[d, shift left, "{[\Psi^{\mathcal{S}_+}]^{-1}}"] & \mathcal{P}'(\widehat{\mathcal{S}}'_+) \arrow[d, shift left, "{[\Psi^{\widehat{\mathcal{S}}_+}]^{-1}}"] \\ \Gamma(\mathcal{S}'_+) \arrow[r, "\mathcal{F}'^{\otimes}"] \arrow[u, shift left, "\Psi^{\mathcal{S}_+}"] & \Gamma(\widehat{\mathcal{S}}'_+) \arrow[u, shift left, "\Psi^{\widehat{\mathcal{S}}_+}"] \end{tikzcd}$$

однозначно визначає поліноміальне розширення

$$\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}} : \mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+) \ni U = \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} U_n \quad \longmapsto \quad \widehat{U} := \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{F}'^{\otimes n}_{\mathcal{P}}(U_n) \in \mathcal{P}'(\widehat{\mathcal{S}}'_+),$$

узагальненого перетворення Фур'є $\mathcal{F}'$, де $U_n \in \mathcal{P}_n(\mathcal{S}_+)$, а $\mathcal{F}'^{\otimes n}_{\mathcal{P}}$ — n-однорідна компонента відображення $\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}}$, тобто перетворення, що однозначно визначається комутативною діаграмою

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_n(\mathcal{S}_+) \arrow[r, "\mathcal{F}'^{\otimes n}_{\mathcal{P}}"] \arrow[d, shift left, "{[\Psi_n^{\mathcal{S}_+}]^{-1}}"] & \mathcal{P}_n(\widehat{\mathcal{S}}_+) \arrow[d, shift left, "{[\Psi_n^{\widehat{\mathcal{S}}_+}]^{-1}}"] \\
\mathcal{S}'^{\widehat{\otimes} n}_+ \arrow[u, shift left, "\Psi_n^{\mathcal{S}_+}"] \arrow[r, "\mathcal{F}'^{\otimes n}"] & \widehat{\mathcal{S}}'^{\widehat{\otimes} n}_+ . \arrow[u, shift left, "\Psi_n^{\widehat{\mathcal{S}}_+}"]
\end{tikzcd}$$

Відображення $\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}}$ ми назвемо *поліноміальним узагальненням перетворенням Фур'є*. Слід зауважити, що це відображення належить діагональній підалгебрі $\mathscr{L}_D\big(\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+), \mathcal{P}'(\widehat{\mathcal{S}}'_+)\big)$. Більше того, перетворення $\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}}$ діє як сюр'єктивний топологічний ізоморфізм з $\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+)$ на $\mathcal{P}'(\widehat{\mathcal{S}}'_+)$.

З теореми 2.2.4 випливає, що звуження

$$\mathcal{F}^{\otimes}_{\mathcal{P}} := \mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}} \,|_{\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)}$$

на щільну підалгебру $\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+) \subset \mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+)$ діє як алгебраїчний ізоморфізм

$$\mathcal{F}^{\otimes}_{\mathcal{P}} \ : \ \mathcal{P}(\mathcal{S}'_+) \ni P = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} P_n \quad \longmapsto \quad \widehat{P} := \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{F}^{\otimes n}_{\mathcal{P}}(P_n) \in \mathcal{P}(\widehat{\mathcal{S}}'_+),$$

де $P_n \in \mathcal{P}_n(\mathcal{S}'_+)$, $\mathcal{F}^{\otimes n}_{\mathcal{P}} := \mathcal{F}'^{\otimes n}_{\mathcal{P}} \,|_{\mathcal{P}_n(\mathcal{S}'_+)}$.

Приклад 3.3.1. *Розглянемо елемент* $\boldsymbol{\delta} := (1, \delta, \delta^{\otimes 2}, \ldots, \delta^{\otimes n}, \ldots) \in \Gamma(\mathcal{S}'_+)$, *де* δ *— дельта функціонал Дірака. Йому відповідає елемент з простору* $\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+)$ *вигляду*

$$U_{\boldsymbol{\delta}} := \big(1, \langle \delta, \cdot \rangle, \langle \delta^{\otimes 2}, \cdot^{\otimes 2} \rangle, \ldots, \langle \delta^{\otimes n}, \cdot^{\otimes n} \rangle, \ldots\big),$$

де $\langle \delta^{\otimes n}, \cdot^{\otimes n} \rangle$, $n \in \mathbb{N}$, *—* n*-однорідний поліном над* $\mathcal{S}_+$, *який для довільного* $\varphi \in \mathcal{S}_+$ *діє за правилом* $\langle \delta^{\otimes n}, \varphi^{\otimes n} \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle^n = \varphi^n(0)$.

Обчислимо поліноміальне перетворення Фур'є елемента $U_{\boldsymbol{\delta}}$. *З формули* (3.3.4) *випливає, що для довільного* $n \in \mathbb{N}$ *матимемо*

$$\mathcal{F}'^{\otimes n}\big[\delta^{\otimes n}\big] = 1 \otimes \ldots \otimes 1 = 1^{\otimes n}.$$

Тому остаточно отримаємо

$$\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}}[U_{\boldsymbol{\delta}}] = \big(1, \langle 1, \cdot \rangle, \langle 1^{\otimes 2}, \cdot^{\otimes 2} \rangle, \ldots, \langle 1^{\otimes n}, \cdot^{\otimes n} \rangle, \ldots\big),$$

де $\langle 1^{\otimes n}, \cdot^{\otimes n} \rangle$ — *n-однорідний поліном над* $\widehat{\mathcal{S}}_+$, *який для довільного* $\psi \in \widehat{\mathcal{S}}_+$ *діє за правилом*

$$\langle 1^{\otimes n}, \psi^{\otimes n} \rangle = \langle 1, \psi \rangle^n = \left(\int_{\mathbb{R}} \psi(\xi)\, d\xi \right)^n.$$

Приклад 3.3.2. *Знайдемо узагальнене перетворення Фур'є функції Хевісайда* $\theta(x)$.

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}'\theta, \mathcal{F}\varphi \rangle &= 2\pi \langle \theta, \varphi \rangle = 2\pi \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(t)\, dt \\ &= 2\pi \int_{\mathbb{R}_+} e^{-it\xi}\, \varphi(t)\, dt \bigg|_{\xi=0} = 2\pi \widehat{\varphi}(0) = 2\pi \langle \delta, \mathcal{F}\varphi \rangle. \end{aligned}$$

Отримали $\mathcal{F}'\theta = 2\pi\delta$.

Розглянемо тепер елемент $\boldsymbol{\theta} := \big(1, \frac{1}{2\pi}\theta, \ldots, \frac{1}{(2\pi)^n}\theta^{\otimes n}, \ldots\big) \in \Gamma(\mathcal{S}'_+)$ *і відповідний йому елемент з простору* $\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+)$ *вигляду*

$$U_{\boldsymbol{\theta}} := \left(1, \frac{1}{2\pi}\langle \theta, \cdot \rangle, \frac{1}{(2\pi)^2}\langle \theta^{\otimes 2}, \cdot^{\otimes 2} \rangle, \ldots, \frac{1}{(2\pi)^n}\langle \theta^{\otimes n}, \cdot^{\otimes n} \rangle, \ldots \right),$$

де $\langle \theta^{\otimes n}, \cdot^{\otimes n} \rangle$, $n \in \mathbb{N}$, — *n-однорідний поліном над* $\mathcal{S}_+$, *який для довільного* $\varphi \in \mathcal{S}_+$ *діє за правилом*

$$\langle \theta^{\otimes n}, \varphi^{\otimes n} \rangle = \langle \theta, \varphi \rangle^n = \left(\int_{\mathbb{R}_+} \varphi(t)\, dt \right)^n.$$

Знайдемо тепер поліноміальне перетворення Фур'є елемента $U_{\boldsymbol{\theta}}$. *Для довільного* $n \in \mathbb{N}$ *маємо*

$$\mathcal{F}'^{\otimes n}\big[\theta^{\otimes n}\big] = (\mathcal{F}'\theta)^{\otimes n} = (2\pi)^n \delta^{\otimes n}.$$

Тому остаточно отримаємо

$$\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}}[U_{\boldsymbol{\theta}}] = \big(1, \langle \delta, \cdot \rangle, \langle \delta^{\otimes 2}, \cdot^{\otimes 2} \rangle, \ldots, \langle \delta^{\otimes n}, \cdot^{\otimes n} \rangle, \ldots \big) = U_{\boldsymbol{\delta}}.$$

Приклад 3.3.3. *Приклад 3.3.1 є частковим випадком більш загального. Розглянемо елемент* $\boldsymbol{\delta}_t := (1, \delta_t, \delta_t^{\otimes 2}, \ldots, \delta_t^{\otimes n}, \ldots) \in \Gamma(\mathcal{S}'_+)$, *де* δ_t — *дельта функціонал Дірака, зосереджений в точці* $t \in \mathbb{R}_+$, *та відповідний елемент з простору* $\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+)$ *вигляду*

$$U_{\boldsymbol{\delta}_t} := \big(1, \langle \delta_t, \cdot \rangle, \langle \delta_t^{\otimes 2}, \cdot^{\otimes 2} \rangle, \ldots, \langle \delta_t^{\otimes n}, \cdot^{\otimes n} \rangle, \ldots \big),$$

де $\langle \delta_t^{\otimes n}, \cdot^{\otimes n} \rangle$, $n \in \mathbb{N}$, — n-*однорідний поліном над* $\mathcal{S}_+$, *який діє за правилом* $\langle \delta_t^{\otimes n}, \varphi^{\otimes n} \rangle = \langle \delta_t, \varphi \rangle^n = \varphi^n(t)$, $\forall\, \varphi \in \mathcal{S}_+$.

Легко бачити, що $\widehat{\delta}_t = e^{\mathrm{i}t\cdot}$. *Дійсно, використавши другу з формул* (3.3.1), *матимемо*

$$\langle \mathcal{F}'\delta_t, \mathcal{F}\varphi \rangle = 2\pi\langle \delta_t, \varphi \rangle = 2\pi\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}t\xi}\, \widehat{\varphi}(\xi)\, d\xi = \langle e^{\mathrm{i}t\cdot}, \mathcal{F}\varphi \rangle, \qquad \varphi \in \mathcal{S}_+. \tag{3.3.6}$$

Знайдемо тепер поліноміальне перетворення Фур'є елемента $U_{\boldsymbol{\delta}_t}$. *З формули* (3.3.4) *випливає, що для довільного натурального* n *отримаємо рівність* $\mathcal{F}'^{\otimes n}\big[\delta_t^{\otimes n}\big] = (e^{\mathrm{i}t\cdot})^{\otimes n}$. *Тому остаточно*

$$\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}}[U_{\boldsymbol{\delta}_t}] = \big(1, \langle e^{\mathrm{i}t\cdot}, \cdot \rangle, \langle (e^{\mathrm{i}t\cdot})^{\otimes 2}, \cdot^{\otimes 2} \rangle, \ldots, \langle (e^{\mathrm{i}t\cdot})^{\otimes n}, \cdot^{\otimes n} \rangle, \ldots\big),$$

де n-*однорідний поліном* $\langle (e^{\mathrm{i}t\cdot})^{\otimes n}, \cdot^{\otimes n} \rangle$ *для кожного натурального* n *діє (див. формулу* (3.3.6)*) за правилом* $\langle (e^{\mathrm{i}t\cdot})^{\otimes n}, \widehat{\varphi}^{\otimes n} \rangle = (2\pi\varphi)^n$ *для довільного* $\widehat{\varphi} \in \widehat{\mathcal{S}}_+$ *при* $\varphi \in \mathcal{S}_+$. *Очевидно, що при* $t = 0$ *отримаємо той же результат, що і у прикладі 3.3.1.*

На просторі $\widehat{\mathcal{S}}'_+$ задамо похідну за звичною формулою

$$\langle D'_\xi \widehat{f}, \widehat{\varphi} \rangle = -\langle \widehat{f}, D_\xi \widehat{\varphi} \rangle, \qquad \forall\, \widehat{\varphi} \in \mathcal{S}_+,$$

де D_ξ — звичайна похідна за змінною ξ. Далі розширимо цей оператор на простір $\Gamma(\widehat{\mathcal{S}}'_+)$ описаним вище способом, а саме $\mathbb{D}'_\xi \in \mathscr{L}\big(\Gamma(\widehat{\mathcal{S}}'_+)\big)$ оператор, що на довільний елемент вигляду $\widehat{\boldsymbol{u}} = \big(\widehat{f}^{\otimes n}\big) \in \Gamma(\widehat{\mathcal{S}}'_+)$, де $\widehat{f} \in \widehat{\mathcal{S}}'_+$, діє за правилом

$$\mathbb{D}'_\xi \widehat{\boldsymbol{u}} := \bigtimes_{n \in \mathbb{Z}_+} D'^{\{\otimes\}n}_\xi \widehat{f}^{\otimes n},$$

де

$$D'^{\{\otimes\}n}_\xi f^{\otimes n} := \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\widehat{f} \,\widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes}\, \widehat{f} \,\widehat{\otimes}\, D'_\xi \widehat{f}}_{j} \,\widehat{\otimes}\, \underbrace{\widehat{f} \,\widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes}\, \widehat{f}}_{n-j}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

а $D'^{\{\otimes\}0}_\xi$ — нульовий оператор.

За цією ж схемою розширимо оператор $\mathcal{M} : \mathcal{S}'_+ \ni f \longmapsto \mathrm{i}tf \in \mathcal{S}'_+$ множення на незалежну змінну на простір $\Gamma(\mathcal{S}'_+)$, тобто визначимо оператор $\mathbb{M} \in \mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{S}'_+)\big)$ за правилом

$$\begin{array}{rlcl} \mathbb{M} := \bigtimes\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{M}^{\{\otimes\}n} : & \Gamma(\mathcal{S}'_+) & \longrightarrow & \Gamma(\mathcal{S}'_+) \\ & \boldsymbol{u} = \bigtimes\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} f^{\otimes n} & \longmapsto & \mathbb{M}\boldsymbol{u} := \bigtimes\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{M}^{\{\otimes\}n} f^{\otimes n}, \end{array}$$

де $\mathcal{M}^{\{\otimes\}0}$ — нульовий оператор, а кожен оператор $\mathcal{M}^{\{\otimes\}n}$, $n \in \mathbb{N}$, визначається рівністю $\mathcal{M}^{\{\otimes\}n} f^{\otimes n} := \sum\limits_{j=1}^{n} \underbrace{f \mathbin{\widehat{\otimes}} \ldots \mathbin{\widehat{\otimes}} f \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{M}f}_{j} \mathbin{\widehat{\otimes}} \underbrace{f \mathbin{\widehat{\otimes}} \ldots \mathbin{\widehat{\otimes}} f}_{n-j}$.

Теорема 3.3.2. *Для довільного елемента* $\boldsymbol{u} \in \Gamma(\mathcal{S}'_+)$ *справджується рівність*

$$\mathbb{D}'_\xi[\mathcal{F}'^{\otimes}[\boldsymbol{u}]] = \mathcal{F}'^{\otimes}[\mathbb{M}\boldsymbol{u}], \qquad (3.3.7)$$

Доведення. Легко бачити, що

$$D_\xi \mathcal{F}[\varphi(t)] = \int_{\mathbb{R}_+} (-\mathrm{i}t) e^{-\mathrm{i}t\xi} \varphi(t)\, dt = -\mathcal{F}[(\mathrm{i}t)\varphi(t)], \qquad \varphi \in \mathcal{S}_+.$$

Тому правильними є наступні рівності

$$\begin{aligned} \langle D'_\xi \mathcal{F}'[f(t)], \mathcal{F}[\varphi(t)]\rangle &= -\langle \mathcal{F}'[f(t)], D_\xi \mathcal{F}[\varphi(t)]\rangle = \langle \mathcal{F}'[f(t)], \mathcal{F}[(\mathrm{i}t)\varphi(t)]\rangle \\ &= 2\pi\langle f(t), (\mathrm{i}t)\varphi(t)\rangle = 2\pi\langle (\mathrm{i}t) f(t), \varphi(t)\rangle \\ &= \langle \mathcal{F}'[(\mathrm{i}t) f(t)], \mathcal{F}[\varphi(t)]\rangle, \end{aligned}$$

звідки $D'_\xi \mathcal{F}'[f] = \mathcal{F}'[\mathcal{M}f]$.

Зрозуміло, що достатньо переконатись, що рівність (3.3.7) виконується на елементах тотальної підмножини. Тому не обмежуючи загальності візьмемо $\boldsymbol{u} = \big(f^{\otimes n}\big) \in \Gamma(\mathcal{S}'_+)$, де $f \in \mathcal{S}'_+$. Тоді враховуючи означення оператора $\mathbb{D}'_\xi$ отримаємо

$$\begin{aligned} \mathbb{D}'_\xi[\mathcal{F}'^{\otimes}[\boldsymbol{u}]] &= \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} D'^{\{\otimes\}n}_\xi[\mathcal{F}'^{\otimes n}[f^{\otimes n}]] \\ &= 0 \times \bigtimes_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\mathcal{F}'[f] \mathbin{\widehat{\otimes}} \ldots \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{F}'[f] \mathbin{\widehat{\otimes}} D'_\xi \mathcal{F}'[f]}_{j} \mathbin{\widehat{\otimes}} \underbrace{\mathcal{F}'[f] \mathbin{\widehat{\otimes}} \ldots \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{F}'[f]}_{n-j} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 0 \times \bigtimes_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\mathcal{F}'[f]\,\widehat{\otimes}\dots\widehat{\otimes}\,\mathcal{F}'[f]\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{F}'[\mathcal{M}f]}_{j}\;\widehat{\otimes}\;\underbrace{\mathcal{F}'[f]\,\widehat{\otimes}\dots\widehat{\otimes}\,\mathcal{F}'[f]}_{n-j}\\
&= 0 \times \bigtimes_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}'^{\otimes n} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{f\,\widehat{\otimes}\dots\widehat{\otimes}\,f\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{M}f}_{j}\;\widehat{\otimes}\;\underbrace{f\,\widehat{\otimes}\dots\widehat{\otimes}\,f}_{n-j}\\
&= 0 \times \bigtimes_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}'^{\otimes n}\mathcal{M}^{\{\otimes\}n} f^{\otimes n} = \mathcal{F}'^{\otimes}[\mathbb{M}\boldsymbol{u}],
\end{aligned}
$$

що і треба було довести. $\square$

Зауважимо, що рівність (3.3.7), є аналогом відомої властивості перетворення Фур'є $D^{\alpha}F[f(t)] = F[(it)^{\alpha}f(t)]$ при $\alpha = 1$ (див. [7]). Варто відзначити, що аналогу іншої рівності $F[D^{\alpha}f](\xi) = (-\mathfrak{i}\xi)^{\alpha}F[f](\xi)$ у нашому випадку не існує. Це пояснюється тим, що ми розглядаємо випадок узагальнених функцій, заданих на півосі, тому формула інтегрування частинами, яка використовується в доведенні, буде породжувати позаінтегральні доданки, які залежатимуть від значення основної функції в нулі.

Комутативні діаграми

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+) \arrow[r, "\mathscr{M}"] \arrow[d, shift left, "{[\Psi^{\mathcal{S}_+}]^{-1}}"] & \mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+) \arrow[d, shift left, "{[\Psi^{\mathcal{S}_+}]^{-1}}"] & \qquad & \mathcal{P}'(\widehat{\mathcal{S}}'_+) \arrow[r, "\mathscr{D}'_\xi"] \arrow[d, shift left, "{[\Psi^{\widehat{\mathcal{S}}_+}]^{-1}}"] & \mathcal{P}'(\widehat{\mathcal{S}}'_+) \arrow[d, shift left, "{[\Psi^{\widehat{\mathcal{S}}_+}]^{-1}}"] \\
\Gamma(\mathcal{S}'_+) \arrow[r, "\mathbb{M}"] \arrow[u, shift left, "\Psi^{\mathcal{S}_+}"] & \Gamma(\mathcal{S}'_+) \arrow[u, shift left, "\Psi^{\mathcal{S}_+}"] & & \Gamma(\widehat{\mathcal{S}}'_+) \arrow[r, "\mathbb{D}'_\xi"] \arrow[u, shift left, "\Psi^{\widehat{\mathcal{S}}_+}"] & \Gamma(\widehat{\mathcal{S}}'_+) \arrow[u, shift left, "\Psi^{\widehat{\mathcal{S}}_+}"]
\end{tikzcd}
\qquad (3.3.8)
$$

однозначно визначають оператори $\mathscr{M} := \Psi^{\mathcal{S}_+} \circ \mathbb{M} \circ [\Psi^{\mathcal{S}_+}]^{-1}$ та $\mathscr{D}'_\xi := \Psi^{\widehat{\mathcal{S}}_+} \circ \mathbb{D}'_\xi \circ [\Psi^{\widehat{\mathcal{S}}_+}]^{-1}$ на просторах $\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+)$ та $\mathcal{P}'(\widehat{\mathcal{S}}'_+)$ відповідно. Для цих операторів справедливе наступне твердження, яке, очевидно, є наслідком теореми 3.3.2.

Наслідок 3.3.2. *Для довільного елемента* $U \in \mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+)$ *справджується рівність*

$$\mathscr{D}'_\xi[\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}}[U]] = \mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}}[\mathscr{M}U]. \tag{3.3.9}$$

Зауважимо, що оскільки справджуються неперервні щільні вкладення $\Gamma(\mathcal{S}_+) \looparrowright \Gamma(\mathcal{S}'_+)$ та $\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+) \looparrowright \mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+)$, то властивості, аналогічні до (3.3.7) та (3.3.9), залишаються правильними і для елементів просторів $\Gamma(\mathcal{S}_+)$ та $\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$.

Для елементів тотальних підмножин просторів $\Gamma(\mathcal{S}_+)$ та $\Gamma(\widehat{\mathcal{S}}_+)$ визначимо операції

$$\big(\varphi^{\otimes n}\big) \circledast \big(\psi^{\otimes n}\big) := \big((\varphi * \psi)^{\otimes n}\big) \qquad \text{і} \qquad \big(\widehat{\varphi}^{\otimes n}\big) \odot \big(\widehat{\psi}^{\otimes n}\big) := \big((\widehat{\varphi} \cdot \widehat{\psi})^{\otimes n}\big)$$

відповідно, де $\varphi, \psi \in \mathcal{S}_+$, $\widehat{\varphi}, \widehat{\psi} \in \widehat{\mathcal{S}}_+$. Далі розширимо їх на простори $\Gamma(\mathcal{S}'_+)$ і $\Gamma(\widehat{\mathcal{S}}'_+)$ за лінійністю та неперервністю. Легко бачити, що $\Gamma(\mathcal{S}'_+)$ є алгеброю відносно операції $\circledast$ з одиничним елементом $\big(\delta^{\otimes n}\big)$, а $\Gamma(\widehat{\mathcal{S}}'_+)$ є алгеброю відносно операції $\odot$ з одиничним елементом $\big(1^{\otimes n}\big)$.

Теорема 3.3.3. *Поліноміальне перетворення Фур'є* $\mathcal{F}'^{\otimes}$ *є гомоморфізмом алгебр* $\{\Gamma(\mathcal{S}'_+), \circledast\}$ *та* $\{\Gamma(\widehat{\mathcal{S}}'_+), \odot\}$ *тобто*

$$\mathcal{F}'^{\otimes}[\boldsymbol{u} \circledast \boldsymbol{v}] = \mathcal{F}'^{\otimes}[\boldsymbol{u}] \odot \mathcal{F}'^{\otimes}[\boldsymbol{v}], \qquad \forall\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \Gamma(\mathcal{S}'_+).$$

Доведення. Знову доведення проведемо лише на елементах тотальних підмножин. Нехай $\boldsymbol{u} = \big(f^{\otimes n}\big), \boldsymbol{v} = \big(g^{\otimes n}\big) \in \Gamma(\mathcal{S}'_+)$, де $f, g \in \mathcal{S}'_+$. Тоді

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'^{\otimes}[\boldsymbol{u} \circledast \boldsymbol{v}] = \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{F}'^{\otimes n}[(f * g)^{\otimes n}] &= \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} (\mathcal{F}'[f * g])^{\otimes n} \\ &= \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} (\mathcal{F}'[f] \cdot \mathcal{F}'[g])^{\otimes n} = \mathcal{F}'^{\otimes}[\boldsymbol{u}] \odot \mathcal{F}'^{\otimes}[\boldsymbol{v}]. \end{aligned}$$

□

За допомогою комутативних діаграм, подібних до (3.3.8), операції $\circledast$ та $\odot$ легко "перенести" на відповідні простори поліноміальних розподілів. Тому очевидним наслідком останньої теореми є твердження.

Наслідок 3.3.3. *Поліноміальне перетворення Фур'є* $\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}}$ *є гомоморфізмом алгебр* $\{\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+), \circledast\}$ *та* $\{\mathcal{P}'(\widehat{\mathcal{S}}'_+), \odot\}$ *тобто*

$$\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}}[U \circledast V] = \mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}}[U] \odot \mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}}[V], \qquad \forall\, U, V \in \mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+).$$

Зауважимо, що останні два твердження є аналогом відомої властивості перетворення Фур'є, яка стверджує, що таке перетворення згортку переводить у множення.

Проте алгебри поліноміальних розподілів мають ще "свою" згортку, точніше операцію згорткового типу $\diamond$, яку ще називають добутком Віка. Виявляється, поліноміальне перетворення Фур'є зберігає добуток Віка, тобто правильним є наступний результат.

Теорема 3.3.4. *Поліноміальне перетворення Фур'є $\mathcal{F}'^{\otimes}$ є гомоморфізмом алгебр $\{\Gamma(\mathcal{S}'_+), \diamond\}$ та $\{\Gamma(\widehat{\mathcal{S}}'_+), \diamond\}$, тобто*

$$\mathcal{F}'^{\otimes}[\boldsymbol{u} \diamond \boldsymbol{v}] = \mathcal{F}'^{\otimes}[\boldsymbol{u}] \diamond \mathcal{F}'^{\otimes}[\boldsymbol{v}], \qquad \forall\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \Gamma(\mathcal{S}'_+).$$

Доведення. Безпосередньо переконуємось у правильності наступних рівностей

$$\begin{aligned}\mathcal{F}'^{\otimes}[\boldsymbol{u} \diamond \boldsymbol{v}] &= \mathcal{F}'^{\otimes}\Big[\bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \sum_{k=0}^{n} f^{\otimes k} \otimes g^{\otimes(n-k)}\Big] = \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{F}'^{\otimes n}\Big[\sum_{k=0}^{n} f^{\otimes k} \otimes g^{\otimes(n-k)}\Big] \\ &= \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \sum_{k=0}^{n} (\mathcal{F}'[f])^{\otimes k} \otimes (\mathcal{F}'[g])^{\otimes(n-k)} = \mathcal{F}'^{\otimes}[\boldsymbol{u}] \diamond \mathcal{F}'^{\otimes}[\boldsymbol{v}],\end{aligned}$$

для довільних $\boldsymbol{u} = \big(f^{\otimes n}\big), \boldsymbol{v} = \big(g^{\otimes n}\big) \in \Gamma(\mathcal{S}'_+)$, де $f, g \in \mathcal{S}'_+$. □

Вище було показано, що простір $\mathcal{P}'(\mathcal{X}')$ для абстрактного $\mathcal{X}'$ є алгеброю відносно операції $\diamond$ (див. твердження 2.2.3). Наступний результат є наслідком теореми 3.3.4.

Наслідок 3.3.4. *Поліноміальне перетворення Фур'є $\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}}$ є гомоморфізмом алгебр $\{\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+), \diamond\}$ та $\{\mathcal{P}'(\widehat{\mathcal{S}}'_+), \diamond\}$, тобто*

$$\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}}[U \diamond V] = \mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}}[U] \diamond \mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}}[V], \qquad \forall\, U, V \in \mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+).$$

3.4 Диференційовність за Ґато поліноміальних основних та узагальнених функцій

Багато задач прикладної математики можуть бути змодельовані і відповідно розв'язані в рамках теорії лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій чи розподілів) [7]. Проте ця теорія має недолік: в загальному простори узагальнених функцій не мають алгебраїчної структури. Однак деякі задачі (наприклад, квантової теорії поля) вимагають такої структури. Більше того, часто потрібне нелінійне узагальнення концепції розподілів [78].

У дослідженнях теорії білого шуму [137, 138, 175] розглянуто деякий оператор на просторі Фока як функцію від операторів народження та знищення. Ці два оператори інколи називають квантовим білим шумом.

Мета цього параграфу дослідити диференційовність за Ґато поліноміальних основних $P \in \mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$ та узагальнених функцій $U \in \mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+)$ та елементів відповідних просторів типу Фока $\Gamma(\mathcal{S}_+)$ та $\Gamma(\mathcal{S}'_+)$. Ми виведемо точні формули для оператора зсуву та похідної Ґато. Інша ціль — встановити зв'язок похідної Ґато з квантовим білим шумом на просторах $\Gamma(\mathcal{S}_+)$ та $\Gamma(\mathcal{S}'_+)$, а також з диференціюваннями на цих просторах (див. параграф 3.2 та статті [48, 161]). Зауважимо, що у підсумку наші результати узгоджуються з аналогічними результатами інших авторів [137, 138].

Результати даного параграфу можуть бути використані у нескінченновимірному стохастичному аналізі (див. наприклад [71, 141] та цитування там).

3.4.1 Оператори народження та знищення

У квантовій теорії поля (див., наприклад, [175]) елемент

$$\phi_f = \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{f^{\otimes n}}{n!} = \Big(1, f, \frac{f^{\otimes 2}}{2!}, \dots, \frac{f^{\otimes n}}{n!}, \dots\Big) \in \Gamma(\mathcal{S}'_+), \qquad f \in \mathcal{S}'_+,$$

зазвичай називають експоненціальним (або когерентним) вектором. Зокрема елемент $\phi_0 = (1, 0, 0, \dots)$ називають вакуумом.

Визначимо вектор

$$\phi_{\varphi,m} = \Big(1, \varphi, \frac{\varphi^{\otimes 2}}{2!}, \dots, \frac{\varphi^{\otimes m}}{m!}, 0, \dots\Big) \in \Gamma(\mathcal{S}_+), \qquad \varphi \in \mathcal{S}_+, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, що $\phi_{\varphi,0}$ є вакуумом. Зауважимо, що в просторі $\Gamma(\mathcal{S}_+)$ множина $\{\phi_{\varphi,m} : \varphi \in \mathcal{S}_+, m \in \mathbb{Z}_+\}$ є тотальною.

Оператором знищення a_t в точці $t \in \mathbb{R}_+$ називають єдиний оператор в $\mathscr{L}(\Gamma(\mathcal{S}_+))$, що володіє властивістю

$$a_t \phi_{\varphi,m} = \varphi(t)\phi_{\varphi,m-1}, \qquad \varphi \in \mathcal{S}_+, \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{3.4.1}$$

Оператором народження $a'_t \in \mathscr{L}(\Gamma(\mathcal{S}'_+))$ в точці $t \in \mathbb{R}_+$ називають спряжений оператор до оператора знищення відносно дуальної пари $\langle \Gamma(\mathcal{S}'_+), \Gamma(\mathcal{S}_+)\rangle$. Його можна визначити за допомогою формули

$$a'_t : (1, f, f^{\otimes 2}, \dots, f^{\otimes n}, \dots) \quad \longmapsto \quad (0, \delta_t, 2\delta_t \widehat{\otimes} f, \dots, (n+1)\delta_t \widehat{\otimes} f^{\otimes n}, \dots).$$

3.4.2 Оператор зсуву та похідна Ґато

Нехай $P \in \mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$ — неперервний поліном. Визначимо оператор зсуву за правилом

$$\mathscr{T}_g P(f) = P(f + g), \qquad f \in \mathcal{S}'_+,$$

де $g \in \mathcal{S}'_+$ — довільний розподіл повільного росту. Відомо [137, 175], що $\mathscr{T}_g \in \mathscr{L}(\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+))$ для будь-якого $g \in \mathcal{S}'_+$.

З теореми 2.2.3 випливає, що відображення $\Upsilon^{\mathcal{S}_+} : \Gamma(\mathcal{S}_+) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$ здійснює топологічний ізоморфізм. Тому оператор $\mathbb{T}_g := (\Upsilon^{\mathcal{S}_+})^{-1} \circ \mathscr{T}_g \circ \Upsilon^{\mathcal{S}_+}$ коректно заданий на просторі $\Gamma(\mathcal{S}_+)$, більше того $\mathbb{T}_g \in \mathscr{L}(\Gamma(\mathcal{S}_+))$.

Символом $\circledcirc_k$ позначимо (праве) k-скорочення [137] симетричного тензорного добутку, а саме $g^{\otimes k} \circledcirc_k \varphi^{\otimes s} := \langle g, \varphi\rangle^k \varphi^{\otimes(s-k)}$, $k \le s$.

Для довільного $\varphi \in \mathcal{S}_+$ позначимо $\boldsymbol{\varphi}_m := (1, \varphi, \varphi^{\otimes 2}, \dots, \varphi^{\otimes m}, 0, \dots) \in \Gamma(\mathcal{S}_+)$, $m \in \mathbb{N}$. Оператор $\mathbb{T}_g$ діє на елемент $\boldsymbol{\varphi}_m$ за правилом

$$\mathbb{T}_g \boldsymbol{\varphi}_m = \left(\Big(\sum_{i=k}^{m} \frac{i!}{k!(i-k)!} g^{\otimes(i-k)} \circledcirc_{i-k} \varphi^{\otimes i} \Big)_{k=0}^{m}, 0, \dots \right), \qquad (3.4.2)$$

або в розгорнутому вигляді

$$\begin{aligned}\mathbb{T}_g \boldsymbol{\varphi}_m = \Big(&1 + \langle g, \varphi \rangle + \langle g, \varphi \rangle^2 + \dots + \langle g, \varphi \rangle^m, \\ &\varphi + 2\langle g, \varphi \rangle \varphi + 3\langle g, \varphi \rangle^2 \varphi + \dots + m\langle g, \varphi \rangle^{m-1} \varphi, \dots, \\ &\varphi^{\otimes k} + (k+1)\langle g, \varphi \rangle \varphi^{\otimes k} + \dots + \frac{m!}{k!(m-k)!} \langle g, \varphi \rangle^{m-k} \varphi^{\otimes k}, \dots, \\ &\varphi^{\otimes(m-1)} + m\langle g, \varphi \rangle \varphi^{\otimes(m-1)}, \varphi^{\otimes m}, 0, \dots \Big).\end{aligned}$$

Доведемо рівність (3.4.2). Нехай $P_{\varphi,m}$ — поліном, що відповідає елементу $\boldsymbol{\varphi}_m$, тобто $P_{\varphi,m} = \sum_{k=0}^{m} \langle \,\cdot\,^{\otimes k}, \varphi^{\otimes k} \rangle = \sum_{k=0}^{m} \langle \,\cdot\,, \varphi \rangle^k$. Тоді прямі обчислення дають наступний результат

$$\begin{aligned}\mathscr{T}_g P_{\varphi,m}(f) &= P_{\varphi,m}(f+g) = 1 + \langle f+g, \varphi \rangle + \langle f+g, \varphi \rangle^2 + \dots + \langle f+g, \varphi \rangle^m \\ &= 1 + \langle f, \varphi \rangle + \langle g, \varphi \rangle + \langle f, \varphi \rangle^2 + 2\langle f, \varphi \rangle \langle g, \varphi \rangle + \langle g, \varphi \rangle^2 + \dots \\ &\quad + \langle f, \varphi \rangle^m + m\langle f, \varphi \rangle^{m-1} \langle g, \varphi \rangle + \dots + \langle g, \varphi \rangle^m \\ &= 1 + \langle g, \varphi \rangle + \langle g, \varphi \rangle^2 + \dots + \langle g, \varphi \rangle^m \\ &\quad + \langle f, \varphi \rangle + 2\langle g, \varphi \rangle \langle f, \varphi \rangle + \dots + m\langle g, \varphi \rangle^{m-1} \langle f, \varphi \rangle + \dots \\ &\quad + \langle f, \varphi \rangle^k + (k+1)\langle g, \varphi \rangle \langle f, \varphi \rangle^k + \dots + C_m^k \langle g, \varphi \rangle^{m-k} \langle f, \varphi \rangle^k + \dots \\ &\quad + \langle f, \varphi \rangle^{m-1} + m\langle g, \varphi \rangle \langle f, \varphi \rangle^{m-1} + \langle f, \varphi \rangle^m \\ &= \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{i=k}^{m} \frac{i!}{k!(i-k)!} \langle g, \varphi \rangle^{i-k} \right) \langle f, \varphi \rangle^k,\end{aligned} \qquad (3.4.3)$$

який еквівалентний до (3.4.2). Тут C_m^k позначає біноміальний коефіцієнт.

Кажуть, що поліном $P \in \mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$ (відповідно елемент $\boldsymbol{p} \in \Gamma(\mathcal{S}_+)$) є диференційовним за Ґато, якщо для довільного $g \in \mathcal{S}'_+$ оператор зсуву $\mathscr{T}_{\varepsilon g} P$ (відповідно $\mathbb{T}_{\varepsilon g} p$) визначений для для всіх ε, де $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, і якщо

$$\mathscr{D}_g P := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathscr{T}_{\varepsilon g} P - P}{\varepsilon} \qquad \Big(\text{відповідно } \mathbb{D}_g \boldsymbol{p} := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathbb{T}_{\varepsilon g} \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}}{\varepsilon}\Big),$$

де збіжність в $\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$ (відповідно в $\Gamma(\mathcal{S}_+)$) ми розуміємо в топології рівномірної збіжності на обмежених множинах (відповідно у топології прямої суми).

Оператор $\mathscr{D}_g$ (відповідно $\mathbb{D}_g$) називають похідною Ґато полінома P (відповідно елемента $\boldsymbol{p}$) у напрямку g.

3.4.3 Диференційовність за Ґато основних поліноміальних функцій

Нехай $P_{\varphi,m} = \sum_{k=0}^{m} \langle \,\cdot\,^{\otimes k}, \varphi^{\otimes k} \rangle = \sum_{k=0}^{m} \langle \,\cdot\,, \varphi \rangle^k$ — поліном з простору $\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$, що відповідає елементу $\boldsymbol{\varphi}_m = (1, \varphi, \ldots, \varphi^{\otimes m}, 0, \ldots)$, де $\varphi \in \mathcal{S}_+$.

Зауважимо, що для того, щоб визначити деяку операцію в просторі типу Фока $\Gamma(\mathcal{S}_+)$ часто достатньо задати її на тотальній підмножині $\{\boldsymbol{\varphi}_m : \varphi \in \mathcal{S}_+, m \in \mathbb{Z}_+\}$. Аналогічно на просторі поліномів $\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$ це достатньо зробити на тотальній підмножині $\{P_{\varphi,m} : \varphi \in \mathcal{S}_+, m \in \mathbb{Z}_+\}$.

Теорема 3.4.1. *Кожен поліном з простору $\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$ є диференційовним за Ґато, при цьому*

$$\mathscr{D}_g P_{\varphi,m} = \sum_{k=0}^{m-1} (k+1) \langle g, \varphi \rangle \langle \,\cdot\,^{\otimes k}, \varphi^{\otimes k} \rangle = \sum_{k=0}^{m-1} (k+1) \langle g, \varphi \rangle \langle \,\cdot\,, \varphi \rangle^k. \qquad (3.4.4)$$

Доведення. Використовуючи (3.4.3), можемо записати

$$\frac{\mathscr{T}_{\varepsilon g} P_{\varphi,m}(f) - P_{\varphi,m}(f)}{\varepsilon} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{m} \left(\sum\limits_{i=k}^{m} \frac{i!}{k!(i-k)!} \varepsilon^{i-k} \langle g, \varphi \rangle^{i-k} \right) \langle f, \varphi \rangle^k - \sum\limits_{k=0}^{m} \langle f, \varphi \rangle^k}{\varepsilon}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{\left(\sum\limits_{i=k}^{m} \frac{i!}{k!(i-k)!} \varepsilon^{i-k} \langle g, \varphi \rangle^{i-k} \right) \langle f, \varphi \rangle^k - \langle f, \varphi \rangle^k}{\varepsilon}$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\sum\limits_{i=k+1}^{m} \frac{i!}{k!(i-k)!} \varepsilon^{i-k} \langle g, \varphi \rangle^{i-k} \langle f, \varphi \rangle^k}{\varepsilon}$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1}(k+1)\langle g,\varphi\rangle\langle f,\varphi\rangle^k$$
$$+ \sum_{k=0}^{m-2}\sum_{i=k+2}^{m}\frac{i!}{k!(i-k)!}\varepsilon^{i-k-1}\langle g,\varphi\rangle^{i-k}\langle f,\varphi\rangle^k.$$

Очевидно, що друга сума прямує до нуля при $\varepsilon \to 0$, оскільки в цій сумі $i-k-1 \geq 1$, тому формула (3.4.4) доведена. □

Наслідок 3.4.1. *Кожен елемент з простору* $\Gamma(\mathcal{S}_+)$ *є диференційовним за Ґато, при цьому*

$$\mathbb{D}_g\boldsymbol{\varphi}_m = \big((kg \circledcirc_1 \varphi^{\otimes k})_{k=1}^m, 0, \dots\big) = \big(\langle g,\varphi\rangle, \dots, m\langle g,\varphi\rangle\varphi^{\otimes(m-1)}, 0, \dots\big) \tag{3.4.5}$$

для всіх $\boldsymbol{\varphi}_m = (1, \varphi, \dots, \varphi^{\otimes m}, 0, \dots) \in \Gamma(\mathcal{S}_+)$, *де* $\varphi \in \mathcal{S}_+$.

Наслідок 3.4.2. *Кожен елемент* $\phi_{\varphi,m} \in \Gamma(\mathcal{S}_+)$ *є диференційовним за Ґато, при цьому* $\mathbb{D}_g\phi_{\varphi,m} = \langle g,\varphi\rangle\phi_{\varphi,m-1}$.

Наслідок 3.4.3. *Для* $g = \delta_t$ *отримаємо* $\mathbb{D}_{\delta_t}\phi_{\varphi,m} = \varphi(t)\phi_{\varphi,m-1}$, *отже,* $\mathbb{D}_{\delta_t} = a_t$ *є оператором знищення* (3.4.1) *в точці* $t \in \mathbb{R}_+$.

З твердження 2.2.2 випливає, що простір $\Gamma(\mathcal{S}_+)$ є алгеброю відносно добутку Віка

$$\boldsymbol{p} \diamond \boldsymbol{q} := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+}\sum_{k=0}^{n} p_k\widehat{\otimes}q_{n-k}, \qquad \boldsymbol{p} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} p_n, \qquad \boldsymbol{q} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} q_n.$$

Теорема 3.4.2. *Для кожного* $g \in \mathcal{S}'_+$ *похідна Ґато* $\mathbb{D}_g$ *є неперервним диференціюванням алгебри* $\big\{\Gamma(\mathcal{S}_+), \diamond\big\}$, *тобто*

$$\mathbb{D}_g(\boldsymbol{p} \diamond \boldsymbol{q}) = \mathbb{D}_g\boldsymbol{p} \diamond \boldsymbol{q} + \boldsymbol{p} \diamond \mathbb{D}_g\boldsymbol{q}, \qquad \boldsymbol{p},\boldsymbol{q} \in \Gamma(\mathcal{S}_+).$$

Доведення. Нехай $\boldsymbol{p} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+}\varphi^{\otimes n}$, $\boldsymbol{q} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+}\psi^{\otimes n}$, де $\varphi, \psi \in \mathcal{S}_+$. Безпосередньо із означень легко отримати рівності

$$\mathbb{D}_g\boldsymbol{p} \diamond \boldsymbol{q} = \Big(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} n\langle g,\varphi\rangle\varphi^{\otimes(n-1)}\Big) \diamond \Big(1 \oplus \bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\psi^{\otimes n}\Big)$$
$$= \bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{n} k\langle g,\varphi\rangle(\varphi^{\otimes(k-1)}\widehat{\otimes}\psi^{\otimes(n-k)}).$$

Аналогічно

$$\boldsymbol{p} \diamond \mathbb{D}_g \boldsymbol{q} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} k\langle g,\psi\rangle(\psi^{\otimes(k-1)}\widehat{\otimes}\varphi^{\otimes(n-k)}).$$

Тому, додаючи дві останні формули, отримаємо

$$\begin{aligned}
&\mathbb{D}_g\boldsymbol{p}\diamond\boldsymbol{q} + \boldsymbol{p}\diamond\mathbb{D}_g\boldsymbol{q} \\
&\quad= \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} \Big[k\langle g,\varphi\rangle\big(\varphi^{\otimes(k-1)}\widehat{\otimes}\psi^{\otimes(n-k)}\big) + k\langle g,\psi\rangle\big(\psi^{\otimes(k-1)}\widehat{\otimes}\varphi^{\otimes(n-k)}\big)\Big] \\
&\quad= \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \Big[n\langle g,\psi\rangle\psi^{\otimes(n-1)} + \big(\langle g,\varphi\rangle\psi^{\otimes(n-1)} + (n-1)\langle g,\psi\rangle\varphi\widehat{\otimes}\psi^{\otimes(n-2)}\big) + \ldots \\
&\qquad\qquad + \big(\langle g,\psi\rangle\varphi^{\otimes(n-1)} + (n-1)\langle g,\varphi\rangle\psi\widehat{\otimes}\varphi^{\otimes(n-2)}\big) + n\langle g,\varphi\rangle\varphi^{\otimes(n-1)}\Big] \\
&\quad= \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \Big[ng \circledcirc_1 \psi^{\otimes n} + ng \circledcirc_1 \big(\varphi\widehat{\otimes}\psi^{\otimes(n-1)}\big) + \ldots \\
&\qquad\qquad + ng \circledcirc_1 \big(\psi\widehat{\otimes}\varphi^{\otimes(n-1)}\big) + ng \circledcirc_1 \varphi^{\otimes n}\Big] \\
&\quad= \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} ng \circledcirc_1 \Big(\sum_{k=0}^{n}\big(\varphi^{\otimes k}\widehat{\otimes}\psi^{\otimes(n-k)}\big)\Big) = \mathbb{D}_g(\boldsymbol{p}\diamond\boldsymbol{q}).
\end{aligned}$$

□

Простір $\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$ є топологічною алгеброю зі скалярною одиницею і множенням

$$P \diamond Q = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}^{fin} \sum_{k=0}^{n} P_k \cdot Q_{n-k}.$$

Тут і далі символ $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}_+}^{fin}$ означає, що сума містить скінченну, але не фіксовану, кількість доданків.

Оскільки відображення $\Upsilon^{\mathcal{S}_+}\colon \Gamma(\mathcal{S}_+) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$ здійснює топологічний ізоморфізм з алгебри $\{\Gamma(\mathcal{S}_+),\diamond\}$ в алгебру $\{\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+),\ \diamond\ \}$, то $\Upsilon^{\mathcal{S}_+}(\boldsymbol{p}\diamond\boldsymbol{q}) = P\diamond Q$, де $P = \Upsilon^{\mathcal{S}_+}(\boldsymbol{p})$, $Q = \Upsilon^{\mathcal{S}_+}(\boldsymbol{q})$. Звідси випливає наступне твердження.

Наслідок 3.4.4. *Для кожного $g \in \mathcal{S}'_+$ похідна Ґато $\mathscr{D}_g$ є неперервним диференціюванням алгебри $\{\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+),\diamond\}$, тобто*

$$\mathscr{D}_g(P\diamond Q) = \mathscr{D}_g P\diamond Q + P\diamond\mathscr{D}_g Q, \qquad P,Q \in \mathcal{P}(\mathcal{S}'_+).$$

3.4.4 Диференційовність за Ґато поліноміальних розподілів повільного росту

Для довільного розподілу $g \in \mathcal{S}'_+$ нехай $\mathbb{D}'_g$ та $\mathscr{D}'_g$ позначають спряжені оператори до похідних Ґато відносно дуальних пар $\big\langle \Gamma(\mathcal{S}'_+), \Gamma(\mathcal{S}_+) \big\rangle$ та $\big\langle \mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+), \mathcal{P}(\mathcal{S}'_+) \big\rangle$ відповідно.

Теорема 3.4.3. *Оператор* $\mathbb{D}'_g \in \mathscr{L}(\Gamma(\mathcal{S}'_+))$ *є лінійним та неперервним в* $\Gamma(\mathcal{S}'_+)$*, при цьому на довільний елемент* $\boldsymbol{u} = \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} f_n \in \Gamma(\mathcal{S}'_+)$ *він діє за правилом*

$$\mathbb{D}'_g \boldsymbol{u} = \mathbb{D}'_g \Big[\bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} f_n \Big] = \big(0, f_0 g, 2g\widehat{\otimes} f_1, 3g\widehat{\otimes} f_2, \ldots, (n+1)g\widehat{\otimes} f_n, \ldots\big).$$

Доведення. З наслідку 3.4.1 випливає лінійність і неперервність оператора $\mathbb{D}'_g$. Використовуючи означення похідної Ґато та формулу (3.4.5), за допомогою безпосередніх обчислень отримуємо

$$\begin{aligned}\Big\langle \mathbb{D}'_g \Big[\bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} f_n \Big], \boldsymbol{p} \Big\rangle &= \Big\langle \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} f_n, \mathbb{D}_g \Big[\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} p_n \Big] \Big\rangle = \Big\langle \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} f_n, \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} ng \circledcirc_1 p_n \Big\rangle \\ &= \big\langle (f_0, f_1, f_2, \ldots), (g \circledcirc_1 p_1, 2g \circledcirc_1 p_2, 3g \circledcirc_1 p_3, \ldots) \big\rangle \\ &= 0 + \sum_{n\in\mathbb{N}}^{fin} n \big\langle g\widehat{\otimes} f_{n-1}, p_n \big\rangle = \Big\langle 0 \times \bigtimes_{n\in\mathbb{N}} ng\widehat{\otimes} f_{n-1}, \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} p_n \Big\rangle \\ &= \big\langle (0, f_0 g, 2g\widehat{\otimes} f_1, 3g\widehat{\otimes} f_2, \ldots, (n+1)g\widehat{\otimes} f_n, \ldots), \boldsymbol{p} \big\rangle\end{aligned}$$

для довільного $\boldsymbol{p} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} p_n \in \Gamma(\mathcal{S}_+)$. □

Як наслідок при $g = \delta_t$ отримаємо наступне твердження.

Наслідок 3.4.5. *Оператор* $\mathbb{D}'_{\delta_t}$ *є оператором народження* a'_t *в точці* $t \in \mathbb{R}_+$

$$\mathbb{D}'_{\delta_t} \Big[\bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} f^{\otimes n} \Big] = \big(0, \delta_t, 2\delta_t\widehat{\otimes} f, 3\delta_t\widehat{\otimes} f^{\otimes 2}, \ldots, (n+1)\delta_t\widehat{\otimes} f^{\otimes n}, \ldots\big).$$

Наслідок 3.4.6. *Оператор* $\mathscr{D}'_g$ *є лінійним та неперервним оператором в просторі* $\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+)$.

З результатів параграфу 2.2 випливає, що простір $\Gamma(\mathcal{S}'_+)$ є алгеброю відносно операції згорткового типу (добутку Віка)

$$\boldsymbol{u}\diamond\boldsymbol{v}=\bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+}\sum_{k=0}^{n}f_k\widehat{\otimes}h_{n-k},\qquad \boldsymbol{u}=\bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+}f_n,\qquad \boldsymbol{v}=\bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+}h_n.$$

Теорема 3.4.4. *Для кожного розподілу $g\in\mathcal{S}'_+$ узагальнена похідна Ґато $\mathbb{D}'_g$ є неперервним диференціюванням алгебри $\big\{\Gamma(\mathcal{S}'_+),\diamond\big\}$, тобто*

$$\mathbb{D}'_g(\boldsymbol{u}\diamond\boldsymbol{v})=\mathbb{D}'_g\boldsymbol{u}\diamond\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\diamond\mathbb{D}'_g\boldsymbol{v},\qquad \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\Gamma(\mathcal{S}'_+).$$

Доведення. Нехай $\boldsymbol{u}=\bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+}f^{\otimes n}$, $\boldsymbol{v}=\bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+}h^{\otimes n}$, де $f,h\in\mathcal{S}'_+$. Аналогічно до того, як це було зроблено у доведенні теореми 3.4.2, безпосередньо з означень отримуємо формули

$$\mathbb{D}'_g\boldsymbol{u}\diamond\boldsymbol{v}=0\times\bigtimes_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{n}kg\widehat{\otimes}f^{\otimes(k-1)}\widehat{\otimes}h^{\otimes(n-k)}$$

та

$$\boldsymbol{u}\diamond\mathbb{D}'_g\boldsymbol{v}=0\times\bigtimes_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{n}kg\widehat{\otimes}h^{\otimes(k-1)}\widehat{\otimes}f^{\otimes(n-k)}.$$

Звідси отримуємо потрібне

$$\mathbb{D}'_g\boldsymbol{u}\diamond\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\diamond\mathbb{D}'_g\boldsymbol{v}=0\times\bigtimes_{n\in\mathbb{N}}(n+1)g\widehat{\otimes}\sum_{k=1}^{n}f^{\otimes(k-1)}\widehat{\otimes}h^{\otimes(n-k)}=\mathbb{D}'_g(\boldsymbol{u}\diamond\boldsymbol{v}).$$

□

Множення в алгебрі $\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$ можна однозначно продовжити до множення в $\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+)$, тому $\big\{\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+),\ \diamond\ \big\}$ є алгеброю (див. параграф 2.2).

Наслідок 3.4.7. *Для кожного розподілу $g\in\mathcal{S}'_+$ узагальнена похідна Ґато $\mathscr{D}'_g$ є неперервним диференціюванням алгебри $\big\{\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+),\diamond\big\}$.*

3.4.5 Зв'язок із диференціюваннями на просторах типу Фока

В параграфі 3.2 введено оператор диференціювання $\mathbb{D}$ на просторі типу Фока $\Gamma(\mathcal{S}_+)$. Там же доведено, що цей оператор генерує сильно неперервну напівгрупу поліноміальних зсувів на просторі $\Gamma(\mathcal{S}_+)$. Більше того, оператор $\mathbb{D}$ є неперервним диференціюванням на цьому просторі (див. теорему 3.2.3).

Зараз ми дещо модифікуємо означення оператора $\mathbb{D}$. Зафіксуємо деяке $t \in \mathbb{R}_+$ і визначимо оператор $\mathbb{D}(t) \in \Gamma(\mathcal{S}_+)$ за правилом

$$\mathbb{D}(t)\boldsymbol{\varphi}_m := \bigoplus_{k=1}^{m} D_t^{\{\otimes\}_k}[\varphi^{\otimes k}] = \big(\varphi'(t), \varphi'(t)\otimes\varphi + \varphi\otimes\varphi'(t), \dots, D_t^{\{\otimes\}_m}\varphi^{\otimes m}, 0, \dots\big)$$

для довільного елемента $\boldsymbol{\varphi}_m = (1, \varphi, \varphi^{\otimes 2}, \dots, \varphi^{\otimes m}, 0, \dots)$, $\varphi \in \mathcal{S}_+$, де

$$D_t^{\{\otimes\}_k}[\varphi^{\otimes k}] := \sum_{j=1}^{k} \underbrace{\varphi \otimes \cdots \otimes \varphi \otimes \varphi'(t)}_{j} \otimes \underbrace{\varphi \otimes \cdots \otimes \varphi}_{k-j}, \qquad k = 1, \dots, m.$$

Зрозуміло, що якщо “звільнити” фіксовану змінну t, то отримаємо означення оператора $\mathbb{D}$ з параграфу 3.2.

Оскільки змінна t фіксована, то $\varphi'(t)$ — константа, тому

$$\mathbb{D}(t)\Big[\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \varphi^{\otimes n}\Big] = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} n\varphi'(t)\varphi^{\otimes(n-1)}. \tag{3.4.6}$$

Теорема 3.4.5. *При $g = -\delta_t'$ отримаємо рівність $\mathbb{D}_{-\delta_t'} = \mathbb{D}(t)$ для довільного фіксованого $t \in \mathbb{R}_+$.*

Доведення. Для елемента $\boldsymbol{\varphi}_m = (1, \varphi, \varphi^{\otimes 2}, \dots, \varphi^{\otimes m}, 0, \dots) \in \Gamma(\mathcal{S}_+)$, де $\varphi \in \mathcal{S}_+$, з тотальної підмножини та довільного фіксованого $t \in \mathbb{R}_+$ отримаємо наступний результат

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}_{-\delta_t'}\boldsymbol{\varphi}_m &= \big(\langle -\delta_t', \varphi\rangle, 2\langle -\delta_t', \varphi\rangle\varphi, 3\langle -\delta_t', \varphi\rangle\varphi^{\otimes 2}, \dots, m\langle -\delta_t', \varphi\rangle\varphi^{\otimes(m-1)}, 0, \dots\big) \\
&= \big(\langle \delta_t, \varphi'\rangle, 2\langle \delta_t, \varphi'\rangle\varphi, 3\langle \delta_t, \varphi'\rangle\varphi^{\otimes 2}, \dots, m\langle \delta_t, \varphi'\rangle\varphi^{\otimes(m-1)}, 0, \dots\big) \\
&= \big(\varphi'(t), 2\varphi'(t)\varphi, 3\varphi'(t)\varphi^{\otimes 2}, \dots, m\varphi'(t)\varphi^{\otimes(m-1)}, 0, \dots\big),
\end{aligned}$$

який, очевидно, співпадає з (3.4.6). □

Висновки до розділу 3

Третій розділ присвячений опису структури, властивостей простору поліноміальних основних швидко спадних функцій та відповідних поліноміальних розподілів повільного росту, а також основних операцій на цих просторах.

У параграфі 3.1 введено простори лінійних основних та узагальнених функцій з носіями на додатній півосі. При цьому основною тут є теорема 3.1.1 типу Сілі, яка гарантує можливість продовження швидко спадної функції з півосі на всю вісь, зберігши при цьому крім нескінченної гладкості (класична теорема Сілі), ще й властивість швидкого спадання. Ця теорема неявно використовується у цьому розділі та у розділі 5.

Відтак на основі абстрактної теорії, розвинутої в другому розділі, введено простори поліноміальних основних швидко спадних функцій та поліноміальних розподілів повільного росту.

У параграфі 3.2 означено поліноміальне узагальнення операторів диференціювання та зсуву та показано, що поліноміальна похідна генерує поліноміальну напівгрупу зсувів, як і в лінійному випадку.

У теоремах 3.2.1, 3.2.2 та їх наслідках 3.2.1, 3.2.2 показано, що напівгрупи зсувів діють на відповідних просторах як алгебраїчні автоморфізми. При цьому явно виписано вигляд їх генераторів. Зауважимо, що ці генератори є операторами вигляду $A^{\{\otimes\}}$, які описані у розділі 2.

Показано, що генератори напівгруп зсувів є неперервними диференціюваннями відповідних алгебр, що задовольняють подібні до класичних дуальні співвідношення (теореми 3.2.3, 3.2.4 та наслідки 3.2.3, 3.2.4).

Параграф 3.3 присвячений інтегральним перетворенням у просторах лінійних та поліноміальних основних та узагальнених функцій. У пункті 3.3.2 доведено аналог теореми Пелі-Вінера для одного класу типу Харді-Лебега про зображення Фур'є-образу згорткової алгебри $\mathcal{S}'_+$ у вигляді мультиплікативної алгебри аналітичних функцій комплексної змінної. У пункті 3.3.3, спираючись на описаний в параграфі 2.3 метод, розширено перетворення Фур'є на простір поліноміальних основних швидко спадних функцій та розподілів повільного росту. Наведено кілька прикладів.

Звичайне перетворення Фур'є володіє властивістю $D^{\alpha}F[f] = F[(it)^{\alpha}f]$. Для поліноміального перетворення Фур'є доведено аналогічну властивість для $\alpha = 1$ (див. теорему 3.3.2 та наслідок 3.3.2).

Як відомо, класичне перетворення Фур'є згортку переводить у множення. У теоремі 3.3.3 та наслідку 3.3.3 доведено аналог вказаної властивості. Простори поліноміальних основних та узагальнених функцій мають ще й "свою" алгебраїчну операцію — добуток Віка. Виявляється, що перетворення Фур'є зберігає цю операцію (див. теорему 3.3.4 та наслідок 3.3.4). Зрозуміло, що класичного аналогу цієї властивості немає.

У параграфі 3.4 досліджено диференційовність за Ґато поліноміальних основних та узагальнених функцій та елементів відповідних просторів типу Фока. Встановлено зв'язок похідної Ґато з квантовим білим шумом на просторах $\Gamma(\mathcal{S}_+)$ та $\Gamma(\mathcal{S}'_+)$, а також з диференціюваннями на цих просторах. При цьому оператори зсуву та похідної Ґато записані у вигляді явних формул (3.4.2), (3.4.3), (3.4.4), (3.4.5).

У наслідку 3.4.3 показано, що похідна Ґато за напрямком δ_t є оператором знищення (3.4.1) в точці $t \in \mathbb{R}_+$. Показано, що похідна Ґато є неперервним диференціюванням (у сенсі правила Лейбніца) відповідної алгебри (див. теорему 3.4.2 та наслідок 3.4.4). Аналогічні результати отримано і для простору поліноміальних розподілів та відповідного простору "коефіцієнтів". У теоремі 3.4.5 встановлено зв'язок похідної Ґато з введеними в параграфі 3.2 диференціюваннями.

Результати розділу 3 опубліковані в роботах [36, 40, 45, 48, 196] та анонсовано в [46, 47, 50, 51, 191, 192, 195]. Для їх доведення використано ідеї та методи з робіт [22, 49, 205].

Розділ 4

Поліноміальні ультрарозподіли

4.1 Простір ультрадиференційовних функцій Жевре та ультрарозподілів Рум'є

У цьому параграфі розглянемо означення та основні властивості локально опуклого простору нескінченно диференційовних функцій d дійсних змінних, що належать до так званого класу Жевре, а також спряженого простору ультрарозподілів Рум'є. Слід відмітити, що такі класи функцій та розподілів природно зустрічаються в розв'язках звичайних лінійних диференціальних рівнянь, коефіцієнтами яких є дійсні аналітичні функції. Детальнішу інформацію про ці класи можна знайти в роботах [146–149].

4.1.1 Означення та основні властивості

Розглянемо d-вимірний додатний конус $\mathbb{R}_+^d = \underbrace{[0,\infty) \times \ldots \times [0,\infty)}_{d}$ та його внутрішність $\operatorname{\mathsf{int}} \mathbb{R}_+^d = \underbrace{(0,\infty) \times \ldots \times (0,\infty)}_{d}$.

Надалі будемо використовувати позначення: $t^k = t_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot t_d^{k_d}$, $k^{k\beta} = k_1^{k_1\beta} \cdot \ldots \cdot k_d^{k_d\beta}$, $|k| = k_1 + \cdots + k_d$ для довільних $k = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}_+^d$, $t = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d$ і довільного дійсного $\beta > 1$. Нехай $\partial^k = \partial_1^{k_1} \ldots \partial_d^{k_d}$, де $\partial_j^{k_j} = \partial^{k_j}/\partial t_j^{k_j}$ $(j = 1, \ldots, d)$. Для $\mu, \nu \in \mathbb{R}^d$, відношення $\mu \prec \nu$ (відповідно,

$\mu \succ \nu$) означає $\mu_1 < \nu_1, \ldots, \mu_d < \nu_d$ (відповідно, $\mu_1 > \nu_1, \ldots, \mu_d > \nu_d$). Позначимо $[\mu, \nu] = \times_{j=1}^{d} [\mu_j, \nu_j]$ та $(\mu, \nu) = \times_{j=1}^{d} (\mu_j, \nu_j)$ для довільних $\mu \prec \nu$. Всюди далі символ $t \to \infty$ (відповідно, $t \to 0$) означає $t_j \to \infty$ (відповідно, $t_j \to 0$) для всіх $j = 1, \ldots, n$.

Нехай $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^d)$ позначає клас нескінченно диференційовних комплексно значних функцій φ, заданих в $\operatorname{int} \mathbb{R}_+^d$, таких що $\partial^k \varphi$ для всіх $k \in \mathbb{Z}_+^d$ мають неперервні границі на межі конуса $\mathbb{R}_+^d$.

Зафіксуємо довільне дійсне $\beta > 1$. Функцію $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^d)$ називають (див. [146]) ультрадиференційовною в сенсі Жевре, якщо для кожної множини $[\mu, \nu] \subset \operatorname{int} \mathbb{R}_+^d$ існують такі константи $h > 0$ і $C > 0$, що нерівність

$$\sup_{t \in [\mu, \nu]} |\partial^k \varphi(t)| \leq C h^{|k|} k^{k\beta}$$

виконується для всіх $k \in \mathbb{Z}_+^d$. Векторний простір всіх ультрадиференційовних в $\operatorname{int} \mathbb{R}_+^d$ в сенсі Жевре функцій позначимо $\mathcal{E}_+^\beta := \mathcal{E}^\beta(\mathbb{R}_+^d)$. Вперше такий клас функцій був введений М.Жевре у його дослідженнях властивостей розв'язків рівняння теплопровідності. Зауважимо, що вище наведене означення має сенс для довільного додатного β, проте при $\beta = 1$ згідно із теоремою Прінгшейма отримаємо клас дійсних аналітичних функцій (див. [146]), а при $\beta < 1$ згідно із теоремою Данжуа-Карлемана — клас квазіаналітичних функцій (див. [129]).

Згідно з теоремою Сілі (див. [189]) кожна функція $\varphi \in \mathcal{E}_+^\beta$ має таке нескінченно диференційовне продовження $\tilde{\varphi}$ на $\mathbb{R}^d$, що $\partial^k \tilde{\varphi}(t) = \partial^k \varphi(t)$ для всіх $k \in \mathbb{Z}_+^d$ і $t \in \mathbb{R}_+^d$. Позначимо $\mathcal{G}_+^\beta \subset \mathcal{E}_+^\beta$ підпростір ультрадиференційовних в сенсі Жевре функцій з компактними носіями. В подальшому для спрощення позначень ми писатимемо $\mathcal{G}_+$ замість $\mathcal{G}_+^\beta$, опускаючи фіксоване число β.

Введемо на просторі $\mathcal{G}_+$ топологію. Для цього при фіксованому $h > 0$ розглянемо підпростір $\mathcal{G}_\nu^h \subset \mathcal{G}_+$ всіх функцій φ, носії яких розміщені в

$[0,\nu]$ і таких, що існує така константа $C = C(\varphi) > 0$, що нерівність

$$\sup_{t\in[0,\nu]} |\partial^k \varphi(t)| \leq C h^{|k|} k^{k\beta}$$

виконується для всіх $k \in \mathbb{Z}_+^d$. Таким чином, простір ультрадиференційовних функцій з компактними носіями в $[0,\nu]$ ми визначили як

$$\mathcal{G}_\nu^h := \left\{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^d) : \operatorname{supp}\varphi \subset [0,\nu], \|\varphi\|_{\mathcal{G}_\nu^h} < \infty\right\},$$

де норма визначена наступним чином

$$\|\varphi\|_{\mathcal{G}_\nu^h} := \sup_{k\in\mathbb{Z}_+^d} \sup_{t\in[0,\nu]} \frac{|\partial^k \varphi(t)|}{h^{|k|} k^{k\beta}}.$$

Зауважимо, що в просторі $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^d)$ нескінченно диференційовних функцій d дійсних змінних локально опукла топологія рівномірної збіжності на обмежених множинах може бути визначена за допомогою напівнорм

$$p_{k,\nu}(\varphi) := \sup_{t\in[0,\nu]} |\partial^k \varphi(t)|, \qquad \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^d), \quad k \in \mathbb{Z}_+^d, \quad \nu \in \mathbb{R}_+^d.$$

При цьому всі вкладення $\mathcal{G}_\nu^h \hookrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^d)$ неперервні. Правильність наступного твердження випливає з міркувань у книзі [146, стор. 38–40].

Твердження 4.1.1. *Кожен $\mathcal{G}_\nu^h$ є банаховим простором, при цьому вкладення $\mathcal{G}_\nu^h \hookrightarrow \mathcal{G}_\nu^l$ при $h < l$ компактні. Більше того, якщо $\mu \prec \nu$, то $\mathcal{G}_\mu^h$ — замкнутий підпростір в $\mathcal{G}_\nu^h$.*

З твердження 4.1.1 випливає, що на множині банахових просторів

$$\left\{\mathcal{G}_\nu^h : \ \nu \in \mathbb{R}_+^d, \ h > 0\right\}$$

можна встановити частковий порядок і розглянути цю множину як індуктивну систему відносно компактних вкладень $\mathcal{G}_\mu^h \hookrightarrow \mathcal{G}_\nu^l$ при $h < l$ і $\mu \prec \nu$. Тому на просторі $\mathcal{G}_+ = \bigcup\limits_{\nu\succ 0,\, h>0} \mathcal{G}_\nu^h$ введемо топологію індуктивної границі відносно вказаних вище компактних вкладень

$$\mathcal{G}_+ = \operatorname*{lim\,ind}_{\nu,h\to\infty} \mathcal{G}_\nu^h. \tag{4.1.1}$$

Зауважимо, що простір $\mathcal{G}_+$ є топологічною алгеброю відносно поточкового множення, причому (див. [146, стор. 41]) $\|\varphi\psi\|_{\mathcal{G}_\nu^{h+l}} \le \|\varphi\|_{\mathcal{G}_\nu^h}\|\psi\|_{\mathcal{G}_\nu^l}$.

Елементи сильно спряженого до $\mathcal{G}_+$ простору $\mathcal{G}'_+$ називають ультрарозподілами Рум'є з носіями в $\mathbb{R}_+^d$.

Простір $\mathcal{G}'_+$ є згортковою алгеброю з дельта функціоналом Дірака δ в якості одиниці. Нагадаємо, що згортку узагальнених функцій визначають за формулою $\langle f * g, \varphi\rangle = \langle f, g \star \varphi\rangle$, де $(g \star \varphi)(x) := \langle g, \varphi(\cdot + x)\rangle$ для довільних $f, g \in \mathcal{G}'_+$ та $\varphi \in \mathcal{G}_+$ (див. [146, 2.5]).

Твердження 4.1.2 ([146]). *Простори $\mathcal{G}_+$ та $\mathcal{G}'_+$ є непорожніми локально опуклими ядерними рефлексивними просторами. Більше того, $\mathcal{G}_+$ — є (DFS) простором, а $\mathcal{G}'_+$ — (FS) простором.*

4.1.2 Ультрадиференційовні функції і ω-ультрарозподіли

Далі у параграфі 4.3 буде розвинуто теорію поліноміальних ультрарозподілів на основі введеного вище простору $\mathcal{G}'_+$. У статті [20] автор дисертації у співавторстві з В.Лозинською збудували таку теорію на основі інших класів ультрарозподілів. У цьому пункті ми наведемо лише ті означення та основні факти про ω-ультрарозподіли, що доведені в роботі [20], які забезпечують можливість використання таких просторів для побудови відповідних поліноміальних розширень.

Нехай $v(t) : [0,\infty) \to [0,\infty)$ — така неперервна зростаюча функція, що $v|_{[0,1]} \equiv 0$. Функцію $\omega(t) := v(|t|)$ назвемо ваговою, якщо вона задовольняє наступні умови:

(а) існує таке $L \ge 1$, що $\omega(2t) \le L(1 + \omega(t))$ для всіх $t \ge 0$,

(б) $\int\limits_1^\infty \dfrac{\omega(t)}{1+t^2}\,dt < \infty$,

(в) $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\ln(1+t)}{\omega(t)} = 0$, (г) функція $[0,\infty) \ni t \longmapsto \omega(e^t) \in [0,\infty)$ є опуклою.

Зауважимо, що будь-яка вагова функція ω є парною і для всіх $t, s \in \mathbb{R}$ задовольняє нерівність

$$\omega(t+s) \le L(1+\omega(t)+\omega(s)). \tag{4.1.2}$$

Нехай ω — вагова функція і $K \subset \mathbb{R}$ — компактна множина. Для довільного $\lambda > 0$ визначимо банаховий простір

$$\mathcal{D}_\lambda(K) = \Big\{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) : \operatorname{supp}\varphi \subset K \text{ i } \|\varphi\|_\lambda := \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi}(t)| e^{\lambda\omega(t)} dt < \infty\Big\}, \tag{4.1.3}$$

де $\widehat{\varphi}(t)$ — перетворення Фур'є функції φ.

Розглянемо простір $\mathcal{D}_{\{\omega\}}(K) := \lim\limits_{\lambda\to 0}\operatorname{ind} \mathcal{D}_\lambda(K)$, наділений топологією індуктивної границі, та простір $\mathcal{D}_{(\omega)}(K) := \lim\limits_{\lambda\to\infty}\operatorname{pr} \mathcal{D}_\lambda(K)$, наділений топологією проективної границі. Для відкритої множини $\Omega \subset \mathbb{R}$ визначимо

$$\mathcal{D}_{\{\omega\}}(\Omega) := \lim_{K}\operatorname{ind} \mathcal{D}_{\{\omega\}}(K) \qquad \text{i} \qquad \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) := \lim_{K}\operatorname{ind} \mathcal{D}_{(\omega)}(K),$$

де індуктивні границі беруться по всіх компактних підмножинах Ω. Простори $\mathcal{D}_{\{\omega\}}(\Omega)$ і $\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ наділимо відповідними топологіями індуктивної границі.

Елементи простору $\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ (відповідно $\mathcal{D}_{\{\omega\}}(\Omega)$) називають основними ω-ультрадиференційовними функціями типу Берлінга (відповідно типу Рум'є).

Твердження 4.1.3 ([81]). *Нехай $K \subset \mathbb{R}$ — компактна множина. Тоді*

(1) простір $\mathcal{D}_{\{\omega\}}(K)$ є ядерним (DF) простором, зокрема, він — повний і рефлексивний;

(2) простір $\mathcal{D}_{(\omega)}(K)$ є ядерним простором Фреше.

Твердження 4.1.4 ([81]). *Нехай ω і σ — такі вагові функції, що $\sigma = o(\omega)$. Тоді вкладення*

$$\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}_{\{\omega\}}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}_{(\sigma)}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$$

є неперервними і секвенційно щільними для кожної відкритої множини $\Omega \subset \mathbb{R}$, *де* $\mathcal{D}(\Omega)$ *— класичний простір основних функцій Шварца.*

Нехай $\mathcal{D}'_{(\omega)}$, $\mathcal{D}'_{\{\omega\}}$ — сильно спряжені простори до $\mathcal{D}_{(\omega)}$, $\mathcal{D}_{\{\omega\}}$ відповідно. Елементи простору $\mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$ називають ω-ультрарозподілами типу Берлінга, елементи $\mathcal{D}'_{\{\omega\}}(\Omega)$ — ω-ультрарозподілами типу Рум'є. З теорії двоїстості та твердження 4.1.3 випливає, що $\mathcal{D}'_{\{\omega\}}(K)$ є ядерним (F) простором, а $\mathcal{D}'_{(\omega)}(K)$ — ядерним (DF) простором.

З означення просторів $\mathcal{D}_{\{\omega\}}(\Omega)$ і $\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ випливає, що для довільної функції $\varphi \in \mathcal{D}_{\{\omega\}}(\Omega)$ (відповідно $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$) знайдеться такий компакт $K \subset \mathbb{R}$, що $\varphi \in \mathcal{D}_{\{\omega\}}(K)$ (відповідно $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(K)$); при цьому для деякого $\lambda > 0$ (відповідно для всіх $\lambda > 0$) справджується нерівність $\|\varphi\|_\lambda < \infty$ (див. (4.1.3)).

Надалі для скорочення записів обидва простори $\mathcal{D}_{\{\omega\}} := \mathcal{D}_{\{\omega\}}(\Omega)$ і $\mathcal{D}_{(\omega)} := \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ будемо позначати одним символом $\mathcal{D}_*$, маючи на увазі, що $*$ може приймати значення $\{\omega\}$ або (ω).

Нехай D — оператор диференціювання на просторі основних ω-ультрадиференційовних функцій $\mathcal{D}_*$. В подальшому нам буде потрібний наступний результат.

Лема 4.1.1. *Оператор диференціювання* D *на просторі основних* ω*-ультрадиференційовних функцій* $\mathcal{D}_*$ *є лінійним та неперервним.*

Доведення. Лінійність цього оператора очевидна. Покажемо його неперервність. З нерівності (4.1.2) та умови (в) (див. означення вагової функції) випливає

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\ln|t|}{\lambda\omega(t)}+1\right) &= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{\ln|t|}{\omega(t-1)}\cdot\frac{\omega(t-1)}{\lambda\omega(t)}+1\right)\\ &\le \lim_{t\to\infty}\left(\frac{\ln|t|}{\omega(t-1)}\cdot\frac{1+\omega(t)}{\lambda\omega(t)}+1\right)=1.\end{aligned}$$

Тому знайдеться така константа $C > 1$, що $\frac{\ln|t|}{\lambda\omega(t)} + 1 < C$ при $|t| > 1$. З нерівностей

$$\begin{aligned}\|D\varphi\|_\lambda &= \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi}(t)|\,|it|e^{\lambda\omega(t)}dt\\ &= \int_{-1}^{1} |\widehat{\varphi}(t)|\,|it|e^{\lambda\omega(t)}dt + \int_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} |\widehat{\varphi}(t)|\,|it|e^{\lambda\omega(t)}dt\end{aligned}$$

$$\le \int_{-1}^{1} |\widehat{\varphi}(t)|\,e^{C\lambda\omega(t)}dt + \int_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} |\widehat{\varphi}(t)|\,e^{\ln|t|+\lambda\omega(t)}dt$$
$$= \int_{-1}^{1} |\widehat{\varphi}(t)|\,e^{C\lambda\omega(t)}dt + \int_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} |\widehat{\varphi}(t)|\,e^{\lambda\omega(t)\left(\frac{\ln|t|}{\lambda\omega(t)}+1\right)}dt$$
$$\le \int_{-1}^{1} |\widehat{\varphi}(t)|\,e^{C\lambda\omega(t)}dt + \int_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} |\widehat{\varphi}(t)|\,e^{C\lambda\omega(t)}dt = \|\varphi\|_{C\lambda}$$

випливає неперервність оператора диференціювання D в просторі $\mathcal{D}_*$. $\square$

4.2 Структурні теореми для операторів, інваріантних відносно багатопараметричних напівгруп

Відома теорема Шварца про структуру операторів, що комутують з операторами зсуву [188] стверджує, що кожний неперервний лінійний оператор $L\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^d)$, що комутує з групою зсувів $\tau_s\colon \varphi(t) \longmapsto \varphi(t-s)$, $s \in \mathbb{R}^d$, необхідно є згортковим оператором з деяким розподілом Шварца $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, тобто, $L\varphi = f * \varphi$. Хермандер в [130] встановлює подібну структурну теорему для інваріантних відносно зсувів операторів, що діють в просторі $L^p(\mathbb{R}^d)$. Такі оператори над просторами основних та узагальнених функцій були розглянуті в оглядовій статті [208]. Розширення результату Хермандера на простори Лоренца та Харді були розглянуті в роботах [86] та [214] відповідно. Структура операторів, що діють з простору Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ в простір $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ розподілів повільного росту і комутують з дискретною напівгрупою зсувів, була об'єктом розгляду в статті [106]. Інваріантні відносно зсувів оператори над простором поліноміальних ультрарозподілів були розглянуті в статті [161] та будуть описані нижче в пункті 4.3.2. Інші результати на цю тематику та відповідні посилання можна знайти в [89, 117, 132, 220].

У цьому параграфі ми узагальнимо структурні теореми для двох випадків: для (C_0) напівгруп зсувів і для довільних (C_0) напівгруп стиску. Тут описано інваріантні відносно зсувів оператори в скалярному (теореми 4.2.1, 4.2.2) та операторному (теорема 4.2.3) випадках.

Звернемо увагу, що оскільки ми розглядаємо функції та розподіли в конусі $\mathbb{R}^d_+$, а не в $\mathbb{R}^d$, як у класичному випадку, то інваріантність характеризується за допомогою крос-кореляції, а не згортки, як у класичному випадку.

Нехай $S \subset \mathscr{L}(\mathcal{X})$ — деяка підмножина в просторі всіх неперервних лінійних операторів на $\mathcal{X}$.

Означення 4.2.1. Комутантом множини S називають множину операторів, що визначена за правилом

$$[S]^c := \big\{B \in \mathscr{L}(\mathcal{X})\colon B \circ A = A \circ B, \forall A \in S\big\}.$$

4.2.1 Оператори, які комутують з напівгрупами зсувів

Розглянемо d-параметричну (C_0) напівгрупу зсувів на просторі $\mathcal{G}_+$, визначену за правилом

$$T\colon \mathbb{R}^d_+ \ni s \longmapsto T_s \in \mathscr{L}(\mathcal{G}_+), \quad T_s\varphi(t) := \varphi(t+s), \quad t \in \mathbb{R}^d_+, \quad \varphi \in \mathcal{G}_+. \tag{4.2.1}$$

Очевидно, що $\operatorname{supp}\varphi(\,\cdot+s) = \operatorname{supp}\varphi - s$ для довільної функції φ, визначеної на $\mathbb{R}^d$. Тому, $\operatorname{supp} T_s\varphi = (\operatorname{supp}\varphi - s) \cap \mathbb{R}^d_+$, де $s \in \mathbb{R}^d_+$. Отже, для всіх $s \in \mathbb{R}^d_+$ та всіх індексів $\nu \in \mathbb{R}^d_+$ та $h > 0$ виконуються нерівності $\|T_s\varphi\|_{\mathcal{G}^h_\nu} \le \|\varphi\|_{\mathcal{G}^h_\nu}$. Очевидно, що кожна похідна ∂_j, $j = 1, \ldots, n$, генерує відповідну марґінальну однопараметричну напівгрупу

$$T^{(j)}_{s_j} : [0, \infty) \ni s_j \longmapsto T_{(0,\ldots,0,s_j,0,\ldots,0)} \in \mathscr{L}(\mathcal{G}_+).$$

З регулярності (див. [54]) індуктивної границі (4.1.1) випливає, що напівгрупа T є одностайно обмежена. Тому T є одностайно неперервна за теоремою Банаха-Штейнгауза.

Означення 4.2.2. Для довільного ультрарозподілу $f \in \mathcal{G}'_+$ оператор крос-кореляції над простором $\mathcal{G}_+$ визначимо за правилом

$$K_f \colon \mathcal{G}_+ \ni \varphi \longmapsto K_f\varphi, \qquad K_f\varphi(s) := \langle f, T_s\varphi\rangle, \qquad s \in \mathbb{R}^d_+. \tag{4.2.2}$$

Теорема 4.2.1. *Відображення $\mathcal{K} \colon \mathcal{G}'_+ \ni f \longmapsto K_f \in \mathscr{L}(\mathcal{G}_+)$ здійснює топологічний ізоморфізм зі згорткової алгебри $\mathcal{G}'_+$ на комутант $[T]^c$ напівгрупи зсувів T, тобто $K_{f*g} = K_f \circ K_g$, $f, g \in \mathcal{G}'_+$, де $*$ позначає згортку в $\mathcal{G}'_+$. Зокрема, K_δ — одиничний оператор в $\mathscr{L}(\mathcal{G}_+)$.*

Доведення. Перевіримо, що K_f — лінійний неперервний оператор. Очевидно, що $\operatorname{supp} K_f\varphi \neq \varnothing \Leftrightarrow \exists s : \operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp}\varphi(\,\cdot + s) \neq \varnothing \Leftrightarrow \exists\, t_0 \in \operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp}\varphi(\,\cdot + s)$. Оскільки $t_0 \in \operatorname{supp}\varphi(\,\cdot + s) \Leftrightarrow t_0 + s \in \operatorname{supp}\varphi \Leftrightarrow s \in \operatorname{supp}\varphi - t_0$, то $s \in \operatorname{supp}\varphi - \operatorname{supp} f$. Таким чином,

$$\operatorname{supp} K_f\varphi \subset (\operatorname{supp}\varphi - \operatorname{supp} f) \cap \mathbb{R}^d_+ \subset [0, \nu]$$

для деякого $\nu \succ 0$.

Доведемо, що $K_f \in \mathscr{L}(\mathcal{G}_+)$. Нехай $\{\varphi_m\} \subset \mathcal{G}_+$ — деяка послідовність, для якої існує така множина $[0, \nu] \subset \mathbb{R}^d_+$, що $\operatorname{supp}\varphi_m \subset [0, \nu]$ для всіх $m \in \mathbb{N}$ і

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{t\in[0,\nu]} \frac{|\partial^k \varphi_m(t)|}{h^{|k|} k^{k\beta}} = 0$$

для всіх $k \in \mathbb{Z}^d_+$ і деякого $h > 0$. З неперервності розподілу $f \in \mathcal{G}'_+$ та оператора $T_s \in \mathscr{L}(\mathcal{G}_+)$ випливає, що $\partial^k K_f\varphi = K_f \partial^k\varphi$ для всіх $k \in \mathbb{Z}^d_+$. Отже, ми отримали

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{t\in[0,\nu]} \frac{|\partial^k K_f\varphi_m(t)|}{h^{|k|} k^{k\beta}} = \left| \left\langle f, \lim_{m\to\infty} \sup_{t\in[0,\nu]} \frac{\partial^k \varphi_m(\,\cdot + t)}{h^{|k|} k^{k\beta}} \right\rangle \right| = 0$$

для всіх $k \in \mathbb{Z}^d_+$ і деякого $h > 0$. Використовуючи (4.1.1), отримаємо $K_f \in \mathscr{L}(\mathcal{G}_+)$.

Наступні рівності

$$(K_f T_s\varphi)(t) = \langle f(r), \varphi(r+t+s)\rangle = T_s\langle f(r), \varphi(r+t)\rangle = (T_s K_f\varphi)(t) \quad (4.2.3)$$

справджуються для всіх $t, s \in \mathbb{R}^d_+$ і $\varphi \in \mathcal{G}_+$. Отже, для довільного розподілу $f \in \mathcal{G}'_+$ маємо $K_f \in [T]^c$.

Тепер нехай $K \in \mathscr{L}(\mathcal{G}_+)$ — довільний оператор, що задовольняє рівність

$$(KT_s)\varphi(t) = (T_s K)\varphi(t), \qquad \varphi \in \mathcal{G}_+, \quad t, s \in \mathbb{R}^d_+. \qquad (4.2.4)$$

Визначимо функціонал f_0 формулою $\langle f_0, \varphi\rangle := (K\varphi)(0)$. Його лінійність та неперервність випливають з відповідних властивостей оператора $K \in \mathscr{L}(\mathcal{G}_+)$, тобто $f_0 \in \mathcal{G}'_+$. З означення крос-кореляції випливає $(K_{f_0}\varphi)(0) = \langle f_0, \varphi\rangle$, тобто

$$(K\varphi)(0) = (K_{f_0}\varphi)(0)$$

для всіх $\varphi \in \mathcal{G}_+$. Підставляючи в останню рівність $T_s\varphi$ замість φ і використовуючи властивість (4.2.4), отримаємо $K = K_{f_0}$, а, отже, образ відображення $\mathcal{K}$ співпадає з комутантом $[T]^c$.

Якщо $K_f\varphi(s) = \langle f, T_s\varphi\rangle = 0$ для всіх $\varphi \in \mathcal{G}_+$, то $f = 0$. Отже, відображення $\mathcal{K}$ ін'єктивне.

Оскільки $\mathcal{G}_+$ — монтелевий простір [54, IV.5], то на просторі $\mathscr{L}(\mathcal{G}_+)$ топології рівномірної збіжності на компактах і на обмежених множинах співпадають. З бочковості просторів $\mathcal{G}'_+$ і $\mathcal{G}_+$ [54, II.7] випливає, що відображення $\mathcal{G}'_+ \times \mathcal{G}_+ \ni (f, \varphi) \longmapsto K_f\varphi \in \mathcal{G}_+$ неперервне, бо воно нарізно неперервне. Отже, $\mathcal{K}$ — неперервне відображення. Більше того, $\mathcal{K}$ має замкнутий образ $[T]^c$. Оскільки $\mathcal{G}_+$ — ядерний (DFS) простір, то $\mathscr{L}(\mathcal{G}_+) \simeq \mathcal{G}_+ \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{G}'_+$ (див. [54, IV.9.4]), де $\mathcal{G}'_+$ — простір Фреше як сильно спряжений до (DFS) простору. Тому справджується ізоморфізм

$$\mathcal{G}_+ \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{G}'_+ \simeq \liminf_{h,\nu\to\infty} \mathcal{G}^h_\nu \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{G}'_+$$

завдяки (4.1.1).

З іншого боку, в $\mathcal{G}'_+$ існує така зліченна база замкнутих абсолютно опуклих обмежених множин $\{B_n\}$, що $\mathcal{G}'_+ = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$, де $\mathcal{B}_n := \mathbb{C}\cdot B_n$ — підпростір, наділений нормою $\|x\|_n = \inf\{|\lambda|\colon x\in\lambda B_n\}$. З повноти $\mathcal{G}'_+$ і замкнутості B_n випливає, що $\mathcal{B}_n$ — банаховий простір для всіх $n\in\mathbb{N}$. З обмеженості B_n випливає, що вкладення $\mathcal{B}_n \hookrightarrow \mathcal{G}'_+$ неперервні [54, II.8.4]. Таким чином, канонічне відображення $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{ind}\mathcal{B}_n \longrightarrow \mathcal{G}'_+$ неперервне. Як наслідок ми отримаємо ізоморфізм

$$\mathcal{G}_+\otimes_{\mathfrak{p}}\mathcal{G}'_+ \simeq \lim_{h,\nu,n\to\infty}\operatorname{ind}\mathcal{G}^h_\nu\otimes_{\mathfrak{p}}\mathcal{B}_n,$$

тобто $\mathscr{L}(\mathcal{G}_+)$ — ультраборнологічний простір [134]. Остаточно, з теореми 1.2.1 про відкрите відображення у формі, описаній в [33], випливає, що $\mathcal{K}$ — топологічний ізоморфізм з $\mathcal{G}'_+$ на $[T]^c$.

Доведемо рівність $K_{f*g} = K_f\circ K_g$. З означення згортки випливає

$$\begin{aligned}(K_{f*g}\varphi)(t) = \langle f*g, T_t\varphi\rangle &= \big\langle f(r), \langle g(s), \varphi(t+r+s)\rangle\big\rangle\\ &= \langle f, T_t(K_g\varphi)\rangle = (K_fK_g)\varphi(t),\end{aligned}$$

де $t,r,s\in\mathbb{R}^d_+$. Зокрема, $K_f\circ K_\delta = K_{f*\delta} = K_f = K_{\delta*f} = K_\delta\circ K_f$ для всіх $f\in\mathcal{G}'_+$, тобто K_δ — одиничний оператор. ☐

Нехай $E := (E,\|\cdot\|)$ — комплексний банаховий простір. Позначимо $E\otimes_{\mathfrak{p}}\mathcal{G}_+$ — поповнення алгебраїчного тензорного добутку $E\otimes\mathcal{G}_+$ у проективній тензорній топології. Елементи простору $E\otimes_{\mathfrak{p}}\mathcal{G}_+$ ми можемо трактувати як E-значні ультрадиференційовні функції $x : t\longmapsto x(t)$ з компактними носіями в $\mathbb{R}^d_+$. З відомого (див. формулу (1.2.2), також [120]) ізоморфізму Ґротендіка $E\otimes_{\mathfrak{p}}\lim\limits_{h,\nu\to\infty}\operatorname{ind}\mathcal{G}^h_\nu \simeq \lim\limits_{h,\nu\to\infty}\operatorname{ind}E\otimes_{\mathfrak{p}}\mathcal{G}^h_\nu$ випливає ізоморфізм

$$E\otimes_{\mathfrak{p}}\mathcal{G}_+ \simeq \lim_{h,\nu\to\infty}\operatorname{ind}E\otimes_{\mathfrak{p}}\mathcal{G}^h_\nu.$$

Таким чином, для кожного $x\in E\otimes_{\mathfrak{p}}\mathcal{G}_+$ існують такі $\nu\in\mathbb{R}^d_+$ та $h>0$, що $x\in E\otimes_{\mathfrak{p}}\mathcal{G}^h_\nu$, де кожен з просторів $E\otimes_{\mathfrak{p}}\mathcal{G}^h_\nu$ наділений нормою

$$\|x\|_{E\otimes_{\mathfrak{p}}\mathcal{G}^h_\nu} = \sup_{k\in\mathbb{Z}^d_+,\ t\in[0,\nu]}\frac{\|\partial^k x(t)\|}{h^{|k|}k^{k\beta}}.$$

Отже, з теореми 1.2.2 про представлення елементів проективного тензорного добутку (див. також [54, теорема III.6.4]) випливає, що кожен $x \in E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{G}_+$ можна (взагалі кажучи, неоднозначно) розвинути в абсолютно збіжний ряд

$$x = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j x_j \otimes \varphi_j, \qquad \lambda_j \in \mathbb{C}, \quad x_j \in E, \quad \varphi_j \in \mathcal{G}_\nu^h, \tag{4.2.5}$$

для деяких $\nu \in \mathbb{R}_+^d$ і $h > 0$, де $\sum_j |\lambda_j| < \infty$ і послідовності $\{x_j\}$ та $\{\varphi_j\}$ збігаються до нуля у відповідних просторах.

Нехай I_E позначає тотожний оператор в $\mathscr{L}(E)$. Розглянемо довільний оператор $K \in \mathscr{L}(\mathcal{G}_+)$. Використовуючи розвинення (4.2.5), ми можемо визначити тензорний добуток $I_E \otimes K \in \mathscr{L}(E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{G}_+)$ наступним чином

$$(I_E \otimes K)x = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j x_j \otimes K\varphi_j. \tag{4.2.6}$$

У випадку $K = T_s$ ми часто використовуватимемо коротке та зрозуміле позначення $x(t+s)$ замість $(I_E \otimes T_s)x(t)$. Аналогічним чином ми можемо визначити дію

$$\langle f, x\rangle := \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j x_j \langle f, \varphi_j\rangle \tag{4.2.7}$$

для довільного ультрарозподілу $f \in \mathcal{G}_+'$ і векторнозначної ультрадиференційовної функції $x \in E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{G}_+$. Добре відомо [54, III.6.4], що ці означення не залежать від представлення функції $x \in E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{G}_+$ у вигляді ряду (4.2.5).

Скажемо, що оператор $I_E \otimes K$, де $K \in \mathscr{L}(\mathcal{G}_+)$, є інваріантним відносно операторів зсуву $I_E \otimes T = \left\{I_E \otimes T_s \colon s \in \mathbb{R}_+^d\right\}$, якщо

$$I_E \otimes (K \circ T_s) = I_E \otimes (T_s \circ K) \quad \text{для всіх} \quad s \in \mathbb{R}_+^d.$$

Означення 4.2.3. Для довільного ультрарозподілу $f \in \mathcal{G}_+'$ оператор крос-кореляції над простором $E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{G}_+$ визначимо за правилом

$$I_E \otimes K_f \colon E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{G}_+ \ni x \longmapsto (I_E \otimes K_f)x.$$

Зауважимо, що використовуючи неперервність функціонала $f \in \mathcal{G}'_+$, дію оператора $I_E \otimes K_f$ можна записати у вигляді

$$
\begin{aligned}
(I_E \otimes K_f)x(s) &= \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j x_j \otimes K_f\varphi_j(s) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j x_j \otimes \langle f, T_s\varphi_j\rangle \\
&= \Big\langle f, \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j x_j \otimes T_s\varphi_j \Big\rangle = \langle f, (I_E \otimes T_s)x\rangle = \langle f, x(\,\cdot\, + s)\rangle,
\end{aligned}
$$

де $s \in \mathbb{R}^d_+$.

Теорема 4.2.2. *Для довільного ультрарозподілу $f \in \mathcal{G}'_+$ оператор $I_E \otimes K_f$ є інваріантним відносно операторів зсуву $I_E \otimes T$. Навпаки, для довільного такого оператора $K \in \mathscr{L}(\mathcal{G}_+)$, що $I_E \otimes K$ є інваріантним відносно $I_E \otimes T$, існує єдиний такий ультрарозподіл $f \in \mathcal{G}'_+$, що*

$$
K\varphi = K_f\varphi \qquad i \qquad (I_E \otimes K)x = (I_E \otimes K_f)x
$$

для всіх $\varphi \in \mathcal{G}_+$ і $x \in E \otimes_\mathfrak{p} \mathcal{G}_+$.

Доведення. Розкладаючи елемент $x \in E\otimes_\mathfrak{p}\mathcal{G}_+$ в ряд (4.2.5) і враховуючи рівності (4.2.3), отримаємо

$$
\sum_j \lambda_j x_j \otimes (K_f T_s)\varphi_j = \sum_j \lambda_j x_j \otimes (T_s K_f)\varphi_j
$$

для всіх $f \in \mathcal{G}'_+$ і $x \in E \otimes_\mathfrak{p} \mathcal{G}_+$. Звідси отримуємо $I_E \otimes (K_f \circ T_s) = I_E \otimes (T_s \circ K_f)$, тобто оператор $I_E \otimes K_f$ інваріантний відносно операторів зсуву $I_E \otimes T$.

Навпаки, нехай $K \in \mathscr{L}(\mathcal{G}_+)$ — оператор, який задовольняє рівність $I_E \otimes (K \circ T_s) = I_E \otimes (T_s \circ K)$ для всіх $s \in \mathbb{R}^d_+$. Для довільного $\varphi \in \mathcal{G}_+$ визначимо функціонал $f_0\colon \varphi \longmapsto (K\varphi)(0)$. З означень (4.2.6) та (4.2.7) випливає

$$
[(I_E \otimes K)x](0) = \langle f_0, x\rangle = [(I_E \otimes K_{f_0})x](0).
$$

Підставляючи в останню рівність $(I_E \otimes T_s)x$ замість x і використовуючи те, що $I_E \otimes K$ інваріантний відносно операторів зсуву $I_E \otimes T$, отримаємо $(I_E \otimes K)x = (I_E \otimes K_{f_0})x$ для всіх $x \in E \otimes_\mathfrak{p} \mathcal{G}_+$. Звідси, як наслідок, отримаємо рівність $K = K_{f_0}$. □

4.2.2 Оператори, які комутують з довільними напівгрупами стиску

Сильно неперервну напівгрупу $\{G_t : t \in \mathbb{R}_+^d\}$ операторів, заданих на комплексному банаховому просторі $(E, \|\cdot\|)$, називають напівгрупою стиску, якщо вона задовольняє умову

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+^d} \|G_t\|_{\mathscr{L}(E)} \leq 1. \tag{4.2.8}$$

Розглянемо множину d-параметричних (C_0) напівгруп стиску і нехай $\mathscr{G}$ позначає множину їхніх генераторів. Для того, щоб підкреслити той факт, що напівгрупу $\{G_t : t \in \mathbb{R}_+^d\}$ генерує оператор $A \in \mathscr{G}$ ми писатимемо $\{G_t(A) : t \in \mathbb{R}_+^d\}$. Розглянемо простір $\widehat{\mathcal{G}}$ всіх E-значних функцій

$$\widehat{x} \colon \mathscr{G} \ni A \longmapsto \widehat{x}(A) \in E, \quad \text{де} \quad \widehat{x}(A) := \int_{\mathbb{R}_+^d} G_t(A)x(t)\,dt, \tag{4.2.9}$$

де $x \in E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{G}_+$. Зауважимо, що остання формула задає відоме функціональне числення Хілле-Філліпса [38, розділ 15]. Інтеграл у формулі (4.2.9), який ми розуміємо у сенсі Бохнера, є коректно визначеним, оскільки $t \longmapsto G_t(A)x(t)$ є неперервною E-значною функцією з компактним носієм.

Визначимо лінійне відображення

$$\mathcal{F}_{\mathscr{G}} \colon E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{G}_+ \ni x \longmapsto \widehat{x} \in \widehat{\mathcal{G}}.$$

Зауважимо, що це відображення можна розуміти як операторний аналог перетворення Фур'є, введеного в параграфі 3.3, а індекс $\mathscr{G}$ в позначенні відображає той факт, що областю визначення функцій $\widehat{x}$ є клас $\mathscr{G}$ генераторів сильно неперервних напівгруп стиску.

З теореми [38, 15.2.1] та припущення (4.2.8) випливає, що відображення $\mathcal{F}_{\mathscr{G}}$ — ізоморфізм. Дійсно, напівгрупи $\mathbb{R}_+^d \ni t \longmapsto e^{-(\lambda,t)}I_E$ для довільного $\operatorname{Re}\lambda \in \mathsf{int}\,\mathbb{R}_+^d$ задовольняють умову (4.2.8). Тому їх генератори $-\lambda I_E$ належать класу $\mathscr{G}$. Зауважимо, що

$$\widehat{x}(-\lambda I_E) = \int_{\mathbb{R}^d_+} e^{-(\lambda,t)} x(t)\, dt$$

є перетворенням Лапласа E-значної функції $x \in E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{G}_+$. Зокрема, звідси випливає, що якщо $\widehat{x} \equiv 0$, то $x \equiv 0$, тобто $\operatorname{Ker} \mathcal{F}_{\mathscr{G}} = \{0\}$.

Простір $\widehat{\mathcal{G}}$ наділимо найсильнішою локально опуклою топологією, індукованою топологією в $\mathcal{G}$ та відображенням $\mathcal{F}_{\mathscr{G}}$. А саме, нехай

$$\widehat{\mathcal{G}^h_\nu} = \big\{\widehat{x} \colon x \in E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{G}^h_\nu\big\}$$

позначає образ простору $E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{G}^h_\nu$ при перетворенні $\mathcal{F}_{\mathscr{G}}$. Зауважимо, що $\widehat{\mathcal{G}^h_\nu}$ є банаховим простором з топологією, індукованою відображенням $x \longmapsto \widehat{x}$ при фіксованих h і ν. Тоді з формули (4.1.1) випливає, що $\widehat{\mathcal{G}}$ має структуру індуктивної границі $\widehat{\mathcal{G}} = \varinjlim\limits_{h,\nu\to\infty} \operatorname{ind} \widehat{\mathcal{G}^h_\nu}$ відносно неперервних вкладень $\widehat{\mathcal{G}^h_\nu} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{G}^l_\mu}$ при $h < l$ і $\nu \prec \mu$. Таким чином, відображення $\mathcal{F}_{\mathscr{G}}$ — топологічний ізоморфізм.

Розглянемо d-параметричну напівгрупу на просторі $\widehat{\mathcal{G}}$

$$\widehat{T} \colon \mathbb{R}^d_+ \ni s \longmapsto \widehat{T}_s \in \mathscr{L}(\widehat{\mathcal{G}}), \qquad \widehat{T}_s = \mathcal{F}_{\mathscr{G}} \circ (I_E \otimes T_s) \circ \mathcal{F}^{-1}_{\mathscr{G}}, \tag{4.2.10}$$

де $\mathcal{F}^{-1}_{\mathscr{G}}$ — обернене до $\mathcal{F}_{\mathscr{G}}$ відображення. Оскільки $\mathcal{F}_{\mathscr{G}}$ топологічний ізоморфізм і відображення $\mathbb{R}^d_+ \ni s \longmapsto (I_E \otimes T_s)x \in E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{G}_+$ неперервне для всіх $x \in E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{G}_+$, то напівгрупа $\widehat{T}$ на просторі $\widehat{\mathcal{G}}$ володіє (C_0) властивістю і її генератор щільно заданий.

Теорема 4.2.3. *Відображення*

$$\mathcal{G}'_+ \ni f \longmapsto \widehat{K}_f \in \mathscr{L}(\widehat{\mathcal{G}}), \qquad \text{де} \qquad \widehat{K}_f := \mathcal{F}_{\mathscr{G}} \circ (I_E \otimes K_f) \circ \mathcal{F}^{-1}_{\mathscr{G}},$$

здійснює алгебраїчний ізоморфізм зі згорткової алгебри $\mathcal{G}'_+$ на комутант $[\widehat{T}]^c$ напівгрупи $\widehat{T}$, що складається з усіх операторів на $\widehat{\mathcal{G}}$ вигляду $\widehat{K} = \mathcal{F}_{\mathscr{G}} \circ (I_E \otimes K) \circ \mathcal{F}^{-1}_{\mathscr{G}}$ для деякого $K \in \mathscr{L}(\mathcal{G}_+)$. Зокрема, справджується рівність

$$\widehat{K}_{f*g} = \widehat{K}_f \circ \widehat{K}_g$$

для всіх $f, g \in \mathcal{G}'_+$, *а* $\widehat{K}_\delta$ *— одиничний оператор в* $\mathscr{L}(\widehat{\mathcal{G}})$.

Доведення. Для довільного ультрарозподілу $f \in \mathcal{G}'_+$ наступна діаграма

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathcal{G}} \arrow[r, "\widehat{K}_f"] \arrow[d, shift left, "\mathcal{F}_{\mathscr{G}}^{-1}"] & \widehat{\mathcal{G}} \arrow[d, shift left, "\mathcal{F}_{\mathscr{G}}^{-1}"] \\
E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{G}_+ \arrow[r, "I_E \otimes K_f"] \arrow[u, shift left, "\mathcal{F}_{\mathscr{G}}"] & E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{G}_+ \arrow[u, shift left, "\mathcal{F}_{\mathscr{G}}"]
\end{tikzcd}$$

комутативна. З неперервності відображень $I_E \otimes K_f$ та $\mathcal{F}_{\mathscr{G}}$ і відкритості перетворення $\mathcal{F}_{\mathscr{G}}^{-1}$ випливає $\widehat{K}_f \in \mathscr{L}(\widehat{\mathcal{G}})$. Звідси слідує, що рівності

$$[\mathcal{F}_{\mathscr{G}}(I_E \otimes K_f)x](A) = \int_{\mathbb{R}^d_+} G_t(A)(I_E \otimes K_f)x(t)\,dt = \widehat{K}_f \widehat{x}(A)$$

справджуються для всіх $A \in \mathscr{G}$. Як наслідок, правильними є рівності

$$\widehat{K}_f \widehat{T}_r \widehat{x}(A) = \int_{\mathbb{R}^d_+} G_t(A)(I_E \otimes K_f)x(t+r)\,dt = \widehat{T}_r \widehat{K}_f \widehat{x}(A)$$

для всіх $r \in \mathbb{R}^d_+$ і $\widehat{x} \in \widehat{\mathcal{G}}$. Отже, для довільного $f \in \mathcal{G}'_+$ отримуємо, що $\widehat{K}_f$ належить комутанту напівгрупи $\widehat{T}$ в $\mathscr{L}(\widehat{\mathcal{G}})$.

Навпаки, нехай $\widehat{K} = \mathcal{F}_{\mathscr{G}} \circ (I_E \otimes K) \circ \mathcal{F}_{\mathscr{G}}^{-1}$ належить комутанту $[\widehat{T}]^c$ напівгрупи $\widehat{T}$. Тоді

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\mathscr{G}} \circ (I_E \otimes (K \circ T_s)) \circ \mathcal{F}_{\mathscr{G}}^{-1} &= \mathcal{F}_{\mathscr{G}} \circ (I_E \otimes K) \circ (I_E \otimes T_s) \circ \mathcal{F}_{\mathscr{G}}^{-1} \\
&= \mathcal{F}_{\mathscr{G}} \circ (I_E \otimes K) \circ \mathcal{F}_{\mathscr{G}}^{-1} \circ \mathcal{F}_{\mathscr{G}} \circ (I_E \otimes T_s) \circ \mathcal{F}_{\mathscr{G}}^{-1} \\
&= \widehat{K} \circ \widehat{T}_s = \widehat{T}_s \circ \widehat{K} \\
&= \mathcal{F}_{\mathscr{G}} \circ (I_E \otimes T_s) \circ \mathcal{F}_{\mathscr{G}}^{-1} \circ \mathcal{F}_{\mathscr{G}} \circ (I_E \otimes K) \circ \mathcal{F}_{\mathscr{G}}^{-1} \\
&= \mathcal{F}_{\mathscr{G}} \circ (I_E \otimes T_s) \circ (I_E \otimes K) \circ \mathcal{F}_{\mathscr{G}}^{-1} \\
&= \mathcal{F}_{\mathscr{G}} \circ (I_E \otimes (T_s \circ K)) \circ \mathcal{F}_{\mathscr{G}}^{-1},
\end{aligned}$$

тобто $K \in [T]^c$. Згідно з теоремою 4.2.1 знайдеться такий єдиний ультрарозподіл $f \in \mathcal{G}'_+$, що $K = K_f$, тобто $\widehat{K}\widehat{x} = \widehat{K}\mathcal{F}_{\mathscr{G}}x = \mathcal{F}_{\mathscr{G}}(I_E \otimes K_f)x = \widehat{K}_f\widehat{x}$, $\widehat{x} \in \widehat{\mathcal{G}}$. Отже, $\widehat{K} = \widehat{K}_f$.

Оскільки $K_\delta = I_E$, то ми отримаємо

$$\widehat{K}_\delta = \mathcal{F}_{\mathscr{G}} \circ (I_E \otimes K_\delta) \circ \mathcal{F}_{\mathscr{G}}^{-1} = \mathcal{F}_{\mathscr{G}} \circ \mathcal{F}_{\mathscr{G}}^{-1},$$

таким чином $\widehat{K}_\delta$ — одиничний оператор в $\mathscr{L}(\widehat{\mathcal{G}})$.

З теорем 4.2.1 і 4.2.2 випливають рівності

$$\begin{aligned}\widehat{K}_f\widehat{K}_g\widehat{x}(A) &= \int_{\mathbb{R}^d_+} G_t(A)(I_E\otimes K_fK_g)x(t)\,dt\\ &= \int_{\mathbb{R}^d_+} G_t(A)(I_E\otimes K_{f*g})x(t)\,dt = \widehat{K}_{f*g}\widehat{x}(A),\end{aligned}$$

таким чином, відображення $f \longmapsto \widehat{K}_f$ — алгебраїчний ізоморфізм. $\square$

Зауважимо, що аналогічно як і в доведенні теорем 4.2.1, 4.2.2 можна довести, що алгебраїчний ізоморфізм в теоремі 4.2.3 є топологічним.

4.3 Простір поліноміальних ультрарозподілів

Алгебри ультрарозподілів із симетричною тензорною операцією множення використовуються в фізиці (див. наприклад [78]). Це стало поштовхом для досліджень, пов'язаних з поліноміальним розширенням крос-кореляції і відповідного числення операторів, описаного в параграфі 6.1.

У цьому параграфі досліджуємо деякі властивості топологічної алгебри $\mathcal{P}(\mathcal{G}'_+)$ неперервних скалярних поліномів на згортковій алгебрі $\mathcal{G}'_+$ ультрарозподілів Рум'є, носії яких розміщені в додатному конусі $\mathbb{R}^d_+$, а також властивості сильно спряженого простору $\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_+)$ поліноміальних ультрарозподілів. Алгебра $\mathcal{G}'_+$ топологічно вкладена в $\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_+)$, отже $\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_+)$ можна розглядати як поліноміальне розширення алгебри ультрарозподілів Рум'є.

Використовуючи теорію двоїстості ядерних локально опуклих просторів та їх тензорних добутків, ми дуальну пару $\langle\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_+),\mathcal{P}(\mathcal{G}'_+)\rangle$ лінеаризуємо з допомогою іншої пари $\langle\Gamma(\mathcal{G}'_+),\Gamma(\mathcal{G}_+)\rangle$, яка складається з відповідних згорткових топологічних алгебр поліноміальних коефіцієнтів. Відповідна теорія у випадку довільних ядерних (F) або (DF) просторів викладена у параграфі 2.2.

Зауважимо, що результати цього параграфу можуть бути адаптовані до інших класів ультрарозподілів, зокрема, до так званих ω-ультрарозподілів типу Берлінга і Рум'є (див. пункт 4.1.2 та [20]).

У параграфі 4.1 було введено класи ультрадиференційовних функцій $\mathcal{G}_+$ та ультрарозподілів $\mathcal{G}'_+$, зосереджених на додатному конусі $\mathbb{R}^d_+$. Тут ми покажемо як представити ці простори, використовуючи поняття факторпростору. Нехай $\mathcal{G}(\mathbb{R}^d)$ позначає простір всіх ультрадиференційовних на $\mathbb{R}^d$ функцій, $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^d)$ — сильно спряжений до $\mathcal{G}(\mathbb{R}^d)$ простір всіх ультрарозподілів Рум'є, заданих на $\mathbb{R}^d$ (див. [183]).

Введений в параграфі 4.1 клас ультрарозподілів $\mathcal{G}'_+$ є замкнутим підпростором в $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^d)$. Нехай $[\mathcal{G}'_+]^\perp$ позначає ортогональне доповнення підпростору $\mathcal{G}'_+$ відносно двоїстості $\langle \mathcal{G}'(\mathbb{R}^d), \mathcal{G}(\mathbb{R}^d)\rangle$. Тоді факторпростір

$$\mathcal{G}(\mathbb{R}^d)\big/ [\mathcal{G}'_+]^\perp = \big\{\varphi + [\mathcal{G}'_+]^\perp \colon \varphi \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^d)\big\}$$

є двоїстим до $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^d_+)$ (див. [54]). Нехай $\theta_{\mathbb{R}^d_+}$ — характеристична функція конуса $\mathbb{R}^d_+$. Оператор

$$\Theta\colon \mathcal{G}(\mathbb{R}^d) \ni \varphi \longmapsto \theta_{\mathbb{R}^d_+}\varphi \in \mathcal{G}'(\mathbb{R}^d_+), \tag{4.3.1}$$

де $\theta_{\mathbb{R}^d_+}\varphi$ ми розуміємо як регулярний функціонал з $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^d_+)$, має ядро $[\mathcal{G}'_+]^\perp$. Таким чином, образ $\Theta[\mathcal{G}(\mathbb{R}^d)]$ топологічно ізоморфний до факторпростору $\mathcal{G}(\mathbb{R}^d)\big/ [\mathcal{G}'_+]^\perp$, тобто $\mathcal{G}(\mathbb{R}^d)\big/ [\mathcal{G}'_+]^\perp \simeq \Theta[\mathcal{G}(\mathbb{R}^d)]$. Оскільки $[\mathcal{G}'_+]^\perp$ — замкнутий ідеал в $\mathcal{G}(\mathbb{R}^d)$, то факторпростір $\mathcal{G}(\mathbb{R}^d)\big/ [\mathcal{G}'_+]^\perp$ є топологічною алгеброю і Θ — алгебраїчний ізоморфізм. Більше того, використовуючи методи статті [49] можна показати, що насправді справджуються наступні топологічні ізоморфізми

$$\mathcal{G}_+ \simeq \mathcal{G}(\mathbb{R}^d)\big/ [\mathcal{G}'_+]^\perp \simeq \Theta[\mathcal{G}(\mathbb{R}^d)].$$

Тому кожну ультрадиференційовну функцію $\varphi \in \mathcal{G}_+$ можна розуміти як елемент факторпростору $\mathcal{G}(\mathbb{R}^d)\big/\,[\mathcal{G}'_+]^{\perp}$, або як регулярний ультрарозподіл з $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^d_+)$.

Ідеал $[\mathcal{G}'_+]^{\perp}$ алгебри $\mathcal{G}(\mathbb{R}^d)$ є інваріантним відносно зсувів вздовж конуса $\mathbb{R}^d_+$, тому для довільного $i = 1, \ldots, d$ однопараметрична сім'я операторів

$$T_{s_i}\colon \varphi(t_1, \ldots, t_d) \longmapsto \varphi(t_1, \ldots, t_{i-1}, t_i + s_i, t_{i+1}, \ldots, t_d), \qquad s_i \geq 0,$$

де $(t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d_+$, утворює напівгрупу $T_i\colon 0 \leq s_i \longmapsto T_{s_i} \in \mathscr{L}(\mathcal{G}_+)$ на просторі $\mathcal{G}_+$. Очевидно, що T_i для кожного $i = 1, \ldots, d$ є марґінальною напівгрупою d-параметричної напівгрупи T (див. (4.2.1)), причому $T = T_1 \circ \cdots \circ T_d$, і напівгрупи T_i, $i = 1, \ldots, d$, комутують одна з одною.

Оскільки ідеал $[\mathcal{G}'_+]^{\perp}$ також інваріантний відносно частинних похідних $\partial_i := \frac{\partial}{\partial t_i}$, $i = 1, \ldots, d$, то оператор ∂_i коректно визначений на алгебрі $\mathcal{G}_+$. Зауважимо, що оператор ∂_i є генератором напівгрупи T_i.

Для всіх $i = 1, \ldots, d$ нехай $T'_i\colon 0 \leq s_i \longmapsto T'_{s_i}$ позначає спряжену до T_i напівгрупу, а ∂'_i — спряжений до ∂_i оператор відносно двоїстості $\langle \mathcal{G}'_+, \mathcal{G}_+ \rangle$.

Нагадаємо (див. твердження 4.1.2), що $\mathcal{G}_+$ — ядерний (DFS) простір, а $\mathcal{G}'_+$ — ядерний (FS) простір. Очевидно, що всі результати параграфу 2.2 при $\mathcal{X} = \mathcal{G}_+$ і $\mathcal{X}' = \mathcal{G}'_+$ ми можемо застосувати до дуальної пари $\langle \mathcal{P}'(\mathcal{G}'_+), \mathcal{P}(\mathcal{G}'_+) \rangle$, де $\mathcal{P}(\mathcal{G}'_+)$ — простір поліномів, $\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_+)$ — його спряжений. Зокрема, з того, що справджується щільне вкладення $\mathcal{G}_+ \looparrowright \mathcal{G}'_+$ випливає щільне вкладення $\mathcal{P}(\mathcal{G}'_+) \looparrowright \mathcal{P}'(\mathcal{G}'_+)$ згідно з теоремою 2.2.4.

Аналогічно як і в параграфі 2.2 для спрощення записів введемо позначення

$$\Gamma(\mathcal{G}_+) := \bigoplus\nolimits_{fin}\limits_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{G}_+^{\widehat{\otimes} n} \qquad \text{і} \qquad \Gamma(\mathcal{G}'_+) := \bigtimes_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{G}'^{\widehat{\otimes} n}_+.$$

Нагадаємо, що елементи прямої суми $\Gamma(\mathcal{G}_+)$ містять скінченну, але не фіксовану кількість доданків.

З теореми 2.2.3 випливає, що справджуються наступні топологічні ізоморфізми

$$\Upsilon^{\mathcal{G}_+} \colon \Gamma(\mathcal{G}_+) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{G}'_+), \qquad \Psi^{\mathcal{G}_+} : \Gamma(\mathcal{G}'_+) \longrightarrow \mathcal{P}'(\mathcal{G}'_+). \tag{4.3.2}$$

Елементи просторів $\mathcal{P}(\mathcal{G}'_+)$ і $\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_+)$ ми називатимемо поліноміальними ультрадиференційовними функціями та поліноміальними ультрарозподілами відповідно.

Всюди далі елементи просторів $\Gamma(\mathcal{G}_+)$ і $\Gamma(\mathcal{G}'_+)$ ми писатимемо у вигляді

$$\bigoplus_{n=0}^{m} p_n = (p_0, p_1, \dots, p_m, 0, \dots) \in \Gamma(\mathcal{G}_+), \qquad m \in \mathbb{N},$$
$$\bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} f_n = (f_0, f_1, \dots, f_n, \dots) \in \Gamma(\mathcal{G}'_+),$$

відповідно, де $p_n \in \mathcal{G}_+^{\widehat{\otimes} n}$ і $f_n \in \mathcal{G}_+'^{\widehat{\otimes} n}$ для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$. Для спрощення позначень ми часто писатимемо $\big(p_n\big)$ і $\big(f_n\big)$ замість $\bigoplus_{n=0}^{m} p_n$ і $\bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} f_n$ відповідно.

4.3.1 Диференціювання у просторі поліноміальних ультрарозподілів

У цьому пункті в теоремі 4.3.1 ми описуємо узагальнені диференціювання в просторах $\Gamma(\mathcal{G}_+)$ і $\Gamma(\mathcal{G}'_+)$ та в теоремі 4.3.2 досліджуємо їх властивості. Диференціальні оператори породжують поліноміальні узагальнення напівгруп зсувів вздовж конуса $\mathbb{R}^d_+$.

Зауважимо, що наступні системи елементів

$$\begin{gathered} \big\{\big(1, \varphi, \varphi^{\otimes 2}, \dots, \varphi^{\otimes n}, 0, \dots\big) : \varphi \in \mathcal{G}_+, n \in \mathbb{N}\big\}, \\ \big\{\big(1, f, f^{\otimes 2}, \dots, f^{\otimes n}, f^{\otimes(n+1)}, \dots\big) : f \in \mathcal{G}'_+\big\} \end{gathered} \tag{4.3.3}$$

є тотальними підмножинами в $\Gamma(\mathcal{G}_+)$ та $\Gamma(\mathcal{G}'_+)$ відповідно. Відомо, що для того, щоб означити лінійні неперервні оператори на просторах $\Gamma(\mathcal{G}_+)$ чи $\Gamma(\mathcal{G}'_+)$, достатньо задати їх на відповідній тотальній підмножині (4.3.3).

З результатів параграфу 2.3 випливає, що наступні означення операторів є коректними.

Визначимо оператори $\mathbb{D}_i \in \mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{G}_+)\big)$ та $\mathbb{D}'_i \in \mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{G}'_+)\big)$, $i = 1, \ldots, d$, наступним чином

$$\begin{array}{lccc} \mathbb{D}_i : & (1, \varphi, \ldots, \varphi^{\otimes n}, 0, \ldots) & \longmapsto & \Big(0, \partial_i \varphi, \ldots, \partial_i^{\{\otimes\} n} \varphi^{\otimes n}, 0, \ldots\Big), \\ \mathbb{D}'_i : & (1, f, \ldots, f^{\otimes n}, \ldots) & \longmapsto & \Big(0, \partial'_i f, \ldots, \partial_i'^{\{\otimes\} n} f^{\otimes n}, \ldots\Big), \end{array}$$

де оператори $\partial_i^{\{\otimes\} n}$ та $\partial_i'^{\{\otimes\} n}$ діють за правилами

$$\partial_i^{\{\otimes\} n} \varphi^{\otimes n} := \sum_{j=1}^{n} \varphi^{\otimes (j-1)} \otimes \partial_i \varphi \otimes \varphi^{\otimes (n-j)},$$

$$\partial_i'^{\{\otimes\} n} f^{\otimes n} := \sum_{j=1}^{n} f^{\otimes (j-1)} \otimes \partial'_i f \otimes f^{\otimes (n-j)}.$$

Для кожного $i = 1, \ldots, d$ на просторах $\Gamma(\mathcal{G}_+)$ та $\Gamma(\mathcal{G}'_+)$ визначимо однопараметричні сім'ї

$$\mathbb{T}_i : 0 \le s_i \longmapsto \mathbb{T}_{s_i} \in \mathscr{L}(\Gamma(\mathcal{G}_+)) \qquad \text{та} \qquad \mathbb{T}'_i : 0 \le s_i \longmapsto \mathbb{T}'_{s_i} \in \mathscr{L}(\Gamma(\mathcal{G}'_+))$$

операторів, що діють за правилами

$$\begin{array}{lccc} \mathbb{T}_{s_i} : & \Gamma(\mathcal{G}_+) & \longrightarrow & \Gamma(\mathcal{G}_+) \\ & (1, \varphi, \ldots, \varphi^{\otimes n}, 0, \ldots) & \longmapsto & \Big(1, T_{s_i} \varphi, \ldots, T_{s_i}^{\otimes n} \varphi^{\otimes n}, 0, \ldots\Big), \end{array}$$

$$\begin{array}{lccc} \mathbb{T}'_{s_i} : & \Gamma(\mathcal{G}'_+) & \longrightarrow & \Gamma(\mathcal{G}'_+) \\ & (1, f, \ldots, f^{\otimes n}, \ldots) & \longmapsto & \Big(1, T'_{s_i} f, \ldots, T_{s_i}'^{\otimes n} f^{\otimes n}, \ldots\Big), \end{array}$$

де оператори $T_{s_i}^{\otimes n}$, $T_{s_i}'^{\otimes n}$ визначені як тензорні степені відповідних операторів, тобто $T_{s_i}^{\otimes n} \varphi^{\otimes n} := (T_{s_i} \varphi)^{\otimes n}$ і $T_{s_i}'^{\otimes n} f^{\otimes n} := (T'_{s_i} f)^{\otimes n}$.

Теорема 4.3.1. *(i) Однопараметричні сім'ї* $\mathbb{T}_i$, $i = 1, \ldots, d$, *лінійних операторів на згортковій алгебрі* $\Gamma(\mathcal{G}_+)$ *утворюють* (C_0) *напівгрупи алгебраїчних автоморфізмів.*

Їх генераторами є оператори $\mathbb{D}_i$, $i = 1, \ldots, d$, *котрі належать діагональній підалгебрі* $\mathscr{L}_D(\Gamma(\mathcal{G}_+))$ *(див. формулу* (2.3.5)*).*

(ii) Однопараметричні сім'ї $\mathbb{T}'_i$, $i = 1, \ldots, d$, *лінійних операторів на згортковій алгебрі* $\Gamma(\mathcal{G}'_+)$ *утворюють* (C_0) *напівгрупи алгебраїчних автоморфізмів.*

Їх генераторами є оператори $\mathbb{D}'_i$, $i = 1, \ldots, d$, *котрі належать діагональній підалгебрі* $\mathscr{L}_D(\Gamma(\mathcal{G}'_+))$ *(див. формулу* (2.3.6)*).*

Доведення. (i) З результатів статті [28] випливає справедливість топологічного ізоморфізму

$$\mathcal{G}_+ \simeq \mathcal{G}_{\mathbb{R}_+}^{\otimes_{\mathfrak{p}} d} := \underbrace{\mathcal{G}(\mathbb{R}_+) \otimes_{\mathfrak{p}} \cdots \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{G}(\mathbb{R}_+)}_{d},$$

звідки отримуємо $\mathcal{G}_+^{\widehat{\otimes}_{\mathfrak{p}} n} \simeq \big[\mathcal{G}_{\mathbb{R}_+}^{\otimes_{\mathfrak{p}} d}\big]^{\widehat{\otimes}_{\mathfrak{p}} n}$.

З матеріалу параграфу 4.1 при $d = 1$ випливає, що для фіксованого дійсного $\beta > 1$ і довільних додатних дійсних чисел h, η простір

$$\mathcal{G}_\eta^h(\mathbb{R}_+) := \big\{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}_+) : \operatorname{supp}\varphi \subset [0, \eta], \|\varphi\|_{\mathcal{G}_\eta^h(\mathbb{R}_+)} < \infty\big\},$$

що наділений нормою

$$\|\varphi\|_{\mathcal{G}_\eta^h(\mathbb{R}_+)} := \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \sup_{t \in [0,\eta]} \frac{|\partial^k \varphi(t)|}{h^k k^{k\beta}},$$

є банаховим простором, причому включення $\mathcal{G}_\eta^h(\mathbb{R}_+) \looparrowright \mathcal{G}_{\eta'}^{h'}(\mathbb{R}_+)$ при $h < h'$ і $\eta < \eta'$ компактні. Тому простір $\mathcal{G}(\mathbb{R}_+)$ можна зобразити у вигляді індуктивної границі (див. [155])

$$\mathcal{G}(\mathbb{R}_+) \simeq \limind_{\eta, h \to \infty} \mathcal{G}_\eta^h(\mathbb{R}_+).$$

Використовуючи відому (див. [120]) властивість комутативності індуктивної границі з проективним тензорним добутком, а також неперервність та відкритість оператора симетризації $\mathfrak{s}_n$ (див. формулу (2.1.2)), отримаємо

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_+^{\widehat{\otimes}_{\mathfrak{p}} n} &\simeq [\mathcal{G}_{\mathbb{R}_+}^{\otimes_{\mathfrak{p}} d}]^{\widehat{\otimes}_{\mathfrak{p}} n} \simeq \big[\underbrace{\mathcal{G}(\mathbb{R}_+) \otimes_{\mathfrak{p}} \cdots \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{G}(\mathbb{R}_+)}_{d}\big]^{\widehat{\otimes}_{\mathfrak{p}} n} \\
&\simeq \big[\limind_{\nu_1, h \to \infty} \mathcal{G}_{\nu_1}^h(\mathbb{R}_+) \otimes_{\mathfrak{p}} \cdots \otimes_{\mathfrak{p}} \limind_{\nu_d, h \to \infty} \mathcal{G}_{\nu_d}^h(\mathbb{R}_+)\big]^{\widehat{\otimes}_{\mathfrak{p}} n} \qquad (4.3.4) \\
&\simeq \limind_{\nu, h \to \infty} \big[\mathcal{G}_{\nu_1}^h(\mathbb{R}_+) \otimes_{\mathfrak{p}} \ldots \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{G}_{\nu_d}^h(\mathbb{R}_+)\big]^{\widehat{\otimes}_{\mathfrak{p}} n}
\end{aligned}$$

для довільних $h > 0$ і $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_d) \in \operatorname{int} \mathbb{R}^d_+$. Беручи до уваги поляризаційну формулу, отримуємо що множина функцій

$$\psi^{\otimes n} \colon (t_1^1, \dots, t_d^1, \dots, t_1^n, \dots, t_d^n) \longmapsto \psi(t_1^1, \dots, t_d^1) \cdot \ldots \cdot \psi(t_1^n, \dots, t_d^n), \quad (4.3.5)$$

де $\psi(t_1^j, \dots, t_d^j) = \varphi_1(t_1^j) \cdot \ldots \cdot \varphi_d(t_d^j)$, $j = 1, \dots, n$, і $\varphi_i \in \mathcal{G}^h_{\nu_i}(\mathbb{R}_+)$, $i = 1, \dots, d$, є тотальною підмножиною в $\mathcal{G}_+^{\widehat{\otimes}_\mathfrak{p} n}$.

Розглянемо оператори $T_{s_i}^{\otimes n}$ на тотальній підмножині (4.3.5). Очевидно, що $T_{s_i}\psi(t_1^j, \dots, t_d^j) = \varphi_1(t_1^j) \cdot \ldots \cdot \mathcal{T}_{s_i}\varphi_i(t_i^j) \cdot \ldots \cdot \varphi_d(t_d^j)$, де оператор зсуву $\mathcal{T}_{s_i}$ заданий на функції однієї змінної природним чином $\mathcal{T}_{s_i}\varphi_i(t_i^j) = \varphi_i(t_i^j + s_i)$. Легко бачити, що

$$\operatorname{supp}(\mathcal{T}_{s_i}\varphi_i) = (\operatorname{supp}\varphi_i - s_i) \cap [0, \infty), \qquad s_i \geq 0.$$

Тому справджуються наступні нерівності

$$\|\mathcal{T}_{s_i}\varphi_i\|_{\mathcal{G}^h_\eta(\mathbb{R}_+)} \leq \|\varphi_i\|_{\mathcal{G}^h_\eta(\mathbb{R}_+)}, \qquad \varphi_i \in \mathcal{G}^h_\eta(\mathbb{R}_+), \quad i = 1, \dots, d,$$

для всіх $h > 0$, $\eta > 0$, $s_i \geq 0$.

Остання оцінка означає, що оператори $\mathcal{T}_{s_i}$ є стискаючими. Звідси випливає, що така оцінка може бути перенесена на довільні елементи простору $\mathcal{G}_+^{\widehat{\otimes} n}$. Тепер з регулярності індуктивної границі (4.3.4) випливає, що множина операторів $T_{s_i}^{\otimes n}$ одностайно обмежена на $\mathcal{G}_+^{\widehat{\otimes}_\mathfrak{p} n}$. В останньому міркуванні використано бочковість простору $\mathcal{G}_+^{\widehat{\otimes}_\mathfrak{p} n}$, а також принцип рівномірної обмеженості Банаха-Штейнгауза. Як наслідок, множина операторів $T_{s_i}^{\otimes n}$ одностайно неперервна на $\mathcal{G}_+^{\widehat{\otimes}_\mathfrak{p} n}$ для всіх n (див., наприклад, [17]).

Неважко перевірити напівгрупові властивості однопараметричних сімейств $s_i \longmapsto T_{s_i}^{\otimes n}$, $i = 1, \dots, d$, операторів для всіх натуральних n. Гладкість функції $\partial_{s_i}^k T_{s_i}^{\otimes n} \psi^{\otimes n}$, $k \in \mathbb{Z}_+$ за змінною $s_i \geq 0$ дозволяє застосувати теорему Лагранжа про середнє значення в диференціальному численні, звідки випливає (C_0) властивість кожної з напівгруп $s_i \longmapsto T_{s_i}^{\otimes n}$,

$i = 1, \ldots, d$, заданих на $\mathcal{G}_+^{\widehat{\otimes}_{\mathfrak{p}} n}$. Остаточно одностайна неперервність та (C_0) властивість напівгруп $\mathbb{T}_i$, $i = 1, \ldots, d$, на $\Gamma(\mathcal{G}_+)$ випливає безпосередньо з властивостей топології прямої суми.

Доведемо, що оператори $\mathbb{D}_i$, $i = 1, \ldots, d$, належать діагональній підалгебрі $\mathscr{L}_D(\Gamma(\mathcal{G}_+))$.

Кажуть, що послідовність M_k задовольняє послаблену властивість стабільності відносно диференціальних операторів, якщо знайдуться такі константи G, $H > 0$, що $M_{k+1} \le G H^k M_k$ для всіх $k \in \mathbb{Z}_+$. Відомо [147], що послідовність Жевре $M_k = k^{k\beta}$ при $\beta > 1$ задовольняє цю властивість при $G = H = 2^\beta$, тобто виконується нерівність

$$(k+1)^{(k+1)\beta} \le 2^{(k+1)\beta} k^{k\beta}.$$

Звідси випливає

$$\begin{aligned}
\|\varphi_i'\|_{\mathcal{G}_\eta^h(\mathbb{R}_+)} &= \sup_{k\in\mathbb{Z}_+} \sup_{t\in[0,\eta]} \frac{|\partial^{k+1}\varphi(t)|}{h^k k^{k\beta}} \\
&= h \sup_{k\in\mathbb{Z}_+} \sup_{t\in[0,\eta]} \frac{(k+1)^{(k+1)\beta}|\partial^{k+1}\varphi(t)|}{k^{k\beta}h^{k+1}(k+1)^{(k+1)\beta}} \\
&\le h \sup_{k\in\mathbb{Z}_+} \sup_{t\in[0,\eta]} \frac{2^{(k+1)\beta}|\partial^{k+1}\varphi(t)|}{h^{k+1}(k+1)^{(k+1)\beta}} \\
&= h \sup_{k\in\mathbb{Z}_+} \sup_{t\in[0,\eta]} \frac{|\partial^{k+1}\varphi(t)|}{(h2^{-\beta})^{k+1}(k+1)^{(k+1)\beta}} = h\|\varphi_i\|_{\mathcal{G}_\eta^l(\mathbb{R}_+)},
\end{aligned}$$

де $l = h2^{-\beta}$. Це означає, що $\partial_i^{\{\otimes\}n} \in \mathscr{L}(\mathcal{G}_+^{\widehat{\otimes}_{\mathfrak{p}} n})$, звідки отримуємо, що $\mathbb{D}_i \in \mathscr{L}_D(\Gamma(\mathcal{G}_+))$ для всіх $i = 1, \ldots, d$.

Покажемо, що генераторами цих напівгруп є оператори $\mathbb{D}_i, i = 1, \ldots, d$. Знайдемо похідну в нулі на однорідних доданках, що складаються з елементів тотальної підмножини (4.3.5) простору $\mathcal{G}_+^{\widehat{\otimes}_{\mathfrak{p}} n}$. Для цього розглянемо різницю

$$\begin{aligned} T_{s_i}^{\otimes n}\psi^{\otimes n} - \psi^{\otimes n} &= (T_{s_i}\psi)^{\otimes n} - \psi^{\otimes n} \\ &= \prod_{j=1}^{n} \varphi_1(t_1^j)\ldots \mathcal{T}_{s_i}\varphi_i(t_i^j)\ldots \varphi_d(t_d^j) - \prod_{j=1}^{n} \varphi_1(t_1^j)\ldots\varphi_d(t_d^j) \\ &= \Big(\prod_{j=1}^{n} \mathcal{T}_{s_i}\varphi_i(t_i^j) - \prod_{j=1}^{n}\varphi_i(t_i^j)\Big)\prod_{j=1}^{n}\prod_{k=1,k\neq i}^{d}\varphi_k(t_k^j). \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

Тепер перетворимо різницю, що стоїть в дужках в останньому виразі, додавши і віднявши у ній один і той же вираз

$$\begin{aligned} &\mathcal{T}_{s_i}\varphi_i(t_i^1)\ldots\mathcal{T}_{s_i}\varphi_i(t_i^n) - \varphi_i(t_i^1)\ldots\varphi_i(t_i^n) \\ &\quad= \mathcal{T}_{s_i}\varphi_i(t_i^1)\ldots\mathcal{T}_{s_i}\varphi_i(t_i^n) - \varphi_i(t_i^1)\mathcal{T}_{s_i}\varphi_i(t_i^2)\ldots\mathcal{T}_{s_i}\varphi_i(t_i^n) \\ &\qquad+ \varphi_i(t_i^1)\mathcal{T}_{s_i}\varphi_i(t_i^2)\ldots\mathcal{T}_{s_i}\varphi_i(t_i^n) - \varphi_i(t_i^1)\ldots\varphi_i(t_i^n) \\ &\quad= \big(\mathcal{T}_{s_i}\varphi_i(t_i^1) - \varphi_i(t_i^1)\big)\mathcal{T}_{s_i}\varphi_i(t_i^2)\ldots\mathcal{T}_{s_i}\varphi_i(t_i^n) \\ &\qquad+ \varphi_i(t_i^1)\big(\mathcal{T}_{s_i}\varphi_i(t_i^2)\ldots\mathcal{T}_{s_i}\varphi_i(t_i^n) - \varphi_i(t_i^2)\ldots\varphi_i(t_i^n)\big). \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

Очевидно, що якщо перший доданок останнього виразу поділити на s_i і перейти до границі при $s_i \to 0$, то користуючись гладкістю функції φ_i в результаті отримаємо $\varphi_i'(t_i^1)\varphi_i(t_i^2)\ldots\varphi_i(t_i^n)$. У дужках другого доданку в останньому виразі формули (4.3.7) стоїть різниця $\mathcal{T}_{s_i}\varphi_i(t_i^2)\ldots\mathcal{T}_{s_i}\varphi_i(t_i^n) - \varphi_i(t_i^2)\ldots\varphi_i(t_i^n)$, з якою поступатимемо аналогічно: будемо додавати і віднімати доданки, ділити на s_i та переходити до границі при $s_i \to 0$. Зробивши таку процедуру скінченну кількість раз остаточно отримаємо такий результат

$$\mathcal{T}_{s_i}\varphi_i(t_i^1)\ldots\mathcal{T}_{s_i}\varphi_i(t_i^n) - \varphi_i(t_i^1)\ldots\varphi_i(t_i^n) = \sum_{j=1}^{n}\varphi_i(t_i^1)\ldots\varphi_i'(t_i^j)\ldots\varphi_i(t_i^n).$$

Тепер, якщо формулу (4.3.6) поділити на s_i і перейти до границі при $s_i \to 0$, то враховуючи останній результат матимемо

$$\frac{\partial}{\partial s_i}T_{s_i}^{\otimes n}\psi^{\otimes n}\Big|_{s_i=0} = \partial_i^{\{\otimes\}n}\psi^{\otimes n}.$$

Залишилось врахувати, що довільний елемент прямої суми $\Gamma(\mathcal{G}_+)$ можна наблизити лінійними комбінаціями функцій з тотальної підмножини (4.3.5). Отже, враховуючи властивості топології прямої суми, остаточно отримуємо, що оператори $\mathbb{D}_i$ є генераторами напівгруп $\mathbb{T}_i$, $i = 1, \ldots, d$.

Частина (ii) теореми випливає з вище доведеного та властивостей двоїстості $\langle \Gamma(\mathcal{G}'_+), \Gamma(\mathcal{G}_+) \rangle$. $\square$

Наслідок 4.3.1. (i) *Однопараметричні сім'ї* $\mathscr{T}_i \colon 0 \leq s_i \longmapsto \mathscr{T}_{s_i}$, $i = 1, \ldots, d$, *лінійних операторів на алгебрі* $\mathcal{P}(\mathcal{G}'_+)$, *що визначені за правилом*

$$\mathscr{T}_{s_i} P := P \circ T'_{s_i}, \qquad P \in \mathcal{P}(\mathcal{G}'_+),$$

утворюють (C_0) *напівгрупи алгебраїчних автоморфізмів з генераторами* $\mathscr{D}_i := \Upsilon^{\mathcal{G}_+} \circ \mathbb{D}_i \circ (\Upsilon^{\mathcal{G}_+})^{-1}$, $i = 1, \ldots, d$.

(ii) *Однопараметричні сім'ї* $\mathscr{T}'_i \colon 0 \leq s_i \longmapsto \mathscr{T}'_{s_i}$, $i = 1, \ldots, d$, *лінійних операторів на алгебрі* $\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_+)$, *що визначені за правилом*

$$\mathscr{T}'_{s_i} U := U \circ T_{s_i}, \qquad U \in \mathcal{P}'(\mathcal{G}'_+),$$

утворюють (C_0) *напівгрупи алгебраїчних автоморфізмів з генераторами* $\mathscr{D}'_i := \Psi^{\mathcal{G}_+} \circ \mathbb{D}'_i \circ (\Psi^{\mathcal{G}_+})^{-1}$, $i = 1, \ldots, d$.

Щоб проілюструвати ситуацію наведемо діаграми, які показують взаємозв'язок між напівгрупами та їх генераторами, описаними в теоремі 4.3.1 та наслідку 4.3.1.

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(\mathcal{G}_+) \arrow[r, "\mathbb{D}_i \ \mathbb{T}_i"] & \Gamma(\mathcal{G}_+) \arrow[d, "\Upsilon^{\mathcal{G}_+}"] \\
\mathcal{P}(\mathcal{G}'_+) \arrow[u, "(\Upsilon^{\mathcal{G}_+})^{-1}"] \arrow[r, "\mathscr{D}_i \ \mathscr{T}_i"] & \mathcal{P}(\mathcal{G}'_+)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Gamma(\mathcal{G}'_+) \arrow[r, "\mathbb{D}'_i \ \mathbb{T}'_i"] & \Gamma(\mathcal{G}'_+) \arrow[d, "\Psi^{\mathcal{G}_+}"] \\
\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_+) \arrow[u, "(\Psi^{\mathcal{G}_+})^{-1}"] \arrow[r, "\mathscr{D}'_i \ \mathscr{T}'_i"] & \mathcal{P}'(\mathcal{G}'_+)
\end{tikzcd}
\tag{4.3.8}$$

Теорема 4.3.2. (i) *Генератори* $\mathbb{D}'_i$, $\mathbb{D}_i$, $i = 1, \ldots, d$, *є неперервними диференціюваннями на алгебрах* $\Gamma(\mathcal{G}'_+)$, $\Gamma(\mathcal{G}_+)$ *відповідно, тобто виконуються* *рівності*

$$\begin{aligned} \mathbb{D}'_i(\boldsymbol{u}\diamond\boldsymbol{v}) &= \mathbb{D}'_i\boldsymbol{u}\diamond\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\diamond\mathbb{D}'_i\boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\Gamma(\mathcal{G}'_+),\\ \mathbb{D}_i(\boldsymbol{p}\diamond\boldsymbol{q}) &= \mathbb{D}_i\boldsymbol{p}\diamond\boldsymbol{q}+\boldsymbol{p}\diamond\mathbb{D}_i\boldsymbol{q}, \qquad \boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\in\Gamma(\mathcal{G}_+). \end{aligned} \tag{4.3.9}$$

(ii) *Генератори* $\mathbb{D}'_i$, $\mathbb{D}_i$, $i=1,\dots,d$, *задовольняють дуальне співвідношення*

$$\langle\mathbb{D}'_i\boldsymbol{u},\boldsymbol{p}\rangle = -\langle\boldsymbol{u},\mathbb{D}_i\boldsymbol{p}\rangle, \qquad \boldsymbol{u}\in\Gamma(\mathcal{G}'_+), \quad \boldsymbol{p}\in\Gamma(\mathcal{G}_+).$$

Доведення. (i) Неперервність операторів $\mathbb{D}'_i$, $\mathbb{D}_i$, $i=1,\dots,d$, випливає з міркувань, наведених у параграфі 2.3.

Доведемо першу з формул (4.3.9) безпосереднім обчисленням. Друга доводиться аналогічно.

Нехай $\boldsymbol{u} := \big(f^{\otimes n}\big)$, $\boldsymbol{v} := \big(g^{\otimes n}\big)$, $f,g\in\mathcal{G}'_+$, — елементи тотальної підмножини (4.3.3) простору $\Gamma(\mathcal{G}'_+)$. Тоді

$$\mathbb{D}'_i(\boldsymbol{u}\diamond\boldsymbol{v}) = 0\times\bigtimes_{n\in\mathbb{N}}\Big(\sum_{m=0}^{n}\partial_i'^{\{\otimes\}n}(f^{\otimes m}\widehat{\otimes}g^{\otimes(n-m)})\Big). \tag{4.3.10}$$

Але

$$\begin{aligned} \partial_i'^{\{\otimes\}n}(f^{\otimes m}\widehat{\otimes}g^{\otimes(n-m)}) &= \Big(\sum_{j=1}^{m} f^{\otimes(j-1)}\otimes\partial'_i f\otimes f^{\otimes(m-j)}\Big)\widehat{\otimes}g^{\otimes(n-m)}\\ &\quad + f^{\otimes m}\widehat{\otimes}\Big(\sum_{j=1}^{n-m} g^{\otimes(j-1)}\otimes\partial'_i g\otimes g^{\otimes(n-m-j)}\Big)\\ &= \partial_i'^{\{\otimes\}m}f^{\otimes m}\widehat{\otimes}g^{\otimes(n-m)} + f^{\otimes m}\widehat{\otimes}\partial_i'^{\{\otimes\}(n-m)}g^{\otimes(n-m)}. \end{aligned}$$

Підставимо отриману рівність в (4.3.10), після цього отримаємо

$$\begin{aligned} \mathbb{D}'_i(\boldsymbol{u}\diamond\boldsymbol{v}) &= 0\times\bigtimes_{n\in\mathbb{N}}\Big(\sum_{m=0}^{n}\big[\partial_i'^{\{\otimes\}m}f^{\otimes m}\widehat{\otimes}g^{\otimes(n-m)} + f^{\otimes m}\widehat{\otimes}\partial_i'^{\{\otimes\}(n-m)}g^{\otimes(n-m)}\big]\Big)\\ &= 0\times\bigtimes_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m=0}^{n}\partial_i'^{\{\otimes\}m}f^{\otimes m}\widehat{\otimes}g^{\otimes(n-m)}\\ &\qquad + 0\times\bigtimes_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m=0}^{n} f^{\otimes m}\widehat{\otimes}\partial_i'^{\{\otimes\}(n-m)}g^{\otimes(n-m)}\\ &= \mathbb{D}'_i\boldsymbol{u}\diamond\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\diamond\mathbb{D}'_i\boldsymbol{v}. \end{aligned}$$

Залишилось нагадати, що лінійними комбінаціями елементів підмножини (4.3.3) можна наблизити будь-який елемент простору $\Gamma(\mathcal{G}'_+)$.

Доведемо частину (ii). Виберемо довільні $f \in \mathcal{G}'_+$, $\varphi \in \mathcal{G}_+$. Нагадаємо, що $\langle \partial'_i f, \varphi\rangle = -\langle f, \partial_i \varphi\rangle$. Далі переконуємось безпосередньо у правильності потрібного дуального співвідношення на елементах тотальних підмножин (4.3.3) просторів $\Gamma(\mathcal{G}'_+)$ та $\Gamma(\mathcal{G}_+)$ вигляду $\boldsymbol{u} := \bigtimes_n f^{\otimes n}$ і $\boldsymbol{p} := \bigoplus_{j=0}^m \varphi^{\otimes j}$. А саме, правильними є наступні рівності

$$\begin{aligned}\langle \mathbb{D}'_i \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}\rangle &= \Big\langle 0 \times \bigtimes_{n\in\mathbb{N}} \partial_i'^{\{\otimes\}n} f^{\otimes n}, \bigoplus_{j=0}^m \varphi^{\otimes j}\Big\rangle = \sum_{j=1}^m \langle \partial_i'^{\{\otimes\}j} f^{\otimes j}, \varphi^{\otimes j}\rangle \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^j \big\langle f^{\otimes(k-1)} \otimes \partial'_i f \otimes f^{\otimes(j-k)}, \varphi^{\otimes j}\big\rangle \\ &= -\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^j \big\langle f^{\otimes j}, \varphi^{\otimes(k-1)} \otimes \partial_i \varphi \otimes \varphi^{\otimes(j-k)}\big\rangle \\ &= -\sum_{j=1}^m \langle f^{\otimes j}, \partial_i^{\{\otimes\}j} \varphi^{\otimes j}\rangle = -\langle \boldsymbol{u}, \mathbb{D}_i \boldsymbol{p}\rangle.\end{aligned}$$

Залишилось застосувати твердження про апроксимацію елементів просторів $\Gamma(\mathcal{G}'_+)$ та $\Gamma(\mathcal{G}_+)$ лінійними комбінаціями елементів систем (4.3.3). ☐

Враховуючи означення операторів $\mathscr{D}'_i$, $\mathscr{D}_i$, $i = 1, \ldots, d$ (див. також діаграми (4.3.8)), легко отримати наступний наслідок з теореми 4.3.2.

Наслідок 4.3.2. (i) *Оператори* $\mathscr{D}'_i$, $\mathscr{D}_i$, $i = 1, \ldots, d$, *є неперервними диференціюваннями на алгебрах* $\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_+)$, $\mathcal{P}(\mathcal{G}'_+)$ *відповідно, тобто виконуються рівності*

$$\mathscr{D}'_i(U \diamond V) = \mathscr{D}'_i U \diamond V + U \diamond \mathscr{D}'_i V, \qquad U, V \in \mathcal{P}'(\mathcal{G}'_+),$$

$$\mathscr{D}_i(P \diamond Q) = \mathscr{D}_i P \diamond Q + P \diamond \mathscr{D}_i Q, \qquad P, Q \in \mathcal{P}(\mathcal{G}'_+).$$

(ii) *Генератори* $\mathscr{D}'_i$, $\mathscr{D}_i$, $i = 1, \ldots, d$, *задовольняють дуальне співвідношення*

$$\langle \mathscr{D}'_i U, P\rangle = -\langle U, \mathscr{D}_i P\rangle, \qquad U \in \mathcal{P}'(\mathcal{G}'_+), \quad P \in \mathcal{P}(\mathcal{G}'_+).$$

4.3.2 Поліноміальне розширення крос-кореляції

У цьому пункті введемо операцію, яку можна трактувати як розширення крос-кореляції, введеної в параграфі 4.2 на простори поліноміальних основних та узагальнених функцій. Також доведемо теорему 4.3.3 про зображення елементів алгебри $\Gamma(\mathcal{G}'_+)$ у вигляді операторів, що належать комутанту поліноміальної напівгрупи зсувів. Зауважимо, що така теорема є узагальненням теореми 4.2.1 на поліноміальний випадок.

Нагадаємо, що простір $\Gamma(\mathcal{G}'_+)$ є згортковою алгеброю відносно операції $\diamond$ (див. формулу (2.2.6)). Проте на цьому просторі можна ввести іншу операцію, відносно якої $\Gamma(\mathcal{G}'_+)$ теж є алгеброю. Саме ця нова операція буде потрібна нам для доведення теореми 4.3.3.

Для елементів тотальної підмножини (4.3.3) простору $\Gamma(\mathcal{G}'_+)$ визначимо операцію

$$\big(f^{\otimes n}\big) \circledast \big(g^{\otimes n}\big) := \big((f * g)^{\otimes n}\big)$$

і розширимо її на весь простір $\Gamma(\mathcal{G}'_+)$ за лінійністю та неперервністю.

Легко бачити, що $\Gamma(\mathcal{G}'_+)$ є алгеброю відносно операції $\circledast$ з одиничним елементом $\big(\delta^{\otimes n}\big)$. Цю ж операцію введемо на просторі $\Gamma(\mathcal{G}_+)$, який також стає алгеброю відносно $\circledast$.

Для довільного оператора $K \in \mathscr{L}(\mathcal{G}_+)$ визначимо відповідний оператор $K^{\otimes} \in \mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{G}_+)\big)$ за правилом

$$K^{\otimes} := \big(K^{\otimes n}\big) : p = (p_n) \quad \longmapsto \quad K^{\otimes}p := \big(K^{\otimes n}p_n\big), \tag{4.3.11}$$

де $K^{\otimes 0} := I_{\mathbb{C}}$ — одиничний оператор, а кожен з операторів $K^{\otimes n} \in \mathscr{L}(\mathcal{G}_+^{\widehat{\otimes} n})$, $n \in \mathbb{N}$, визначений як лінійне та неперервне розширення відображення $\varphi^{\otimes n} \longmapsto (K\varphi)^{\otimes n}$, де $\varphi \in \mathcal{G}_+$.

Нехай $T\colon \mathbb{R}_+^d \ni s \longmapsto T_s \in \mathscr{L}(\mathcal{G}_+)$ позначає d-параметричну (C_0) напівгрупу зсувів

$$T_s\varphi(t) := \varphi(t+s), \quad t \in \mathbb{R}_+^d, \qquad \varphi \in \mathcal{G}_+.$$

Тоді відображення $T^{\otimes n}:\mathbb{R}^d_+\ni s\longmapsto T^{\otimes n}_s\in\mathscr{L}(\mathcal{G}_+^{\widehat{\otimes}n})$ коректно визначене. Легко перевірити, що $T^{\otimes n}$ — d-параметрична напівгрупа операторів. Позначимо $T^{\otimes}_s:=\big(T^{\otimes n}_s\big)$, $s\in\mathbb{R}^d_+$. Відображення

$$T^{\otimes}:\mathbb{R}^d_+\ni s\longmapsto T^{\otimes}_s\in\mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{G}_+)\big) \tag{4.3.12}$$

називатимемо поліноміальною напівгрупою зсувів.

Крос-кореляцією ультрарозподілу $f\in\mathcal{G}'_+$ і ультрадиференційовної функції $\varphi\in\mathcal{G}_+$ назвемо функцію

$$(f\star\varphi)(s):=\langle f,T_s\varphi\rangle=\langle f(t),\varphi(t+s)\rangle$$

(див. також формулу (4.2.2)).

Твердження 4.3.1. *Крос-кореляція ультрарозподілу і ультрадиференційовної функції є ультрадиференційовною функцією.*

Доведення. Покажемо, що функція $f\star\varphi$ нескінченно гладка. Зауважимо, що на границі конуса $\mathbb{R}^d_+$ визначені тільки односторонні похідні із внутрішності конуса. Позначимо $\phi:=f\star\varphi$. Візьмемо довільне $s^{(0)}=(s^0_1,\dots,s^0_d)\in\mathbb{R}^d_+$. Нехай $\{s^{(m)}\}_{m=1}^\infty=\{(s^m_1,\dots,s^m_d)\}_{m=1}^\infty$ — послідовність, що збігається до $s^{(0)}$ в $\mathbb{R}^d_+$. Оскільки f — лінійний неперервний функціонал над простором $\mathcal{G}'_+$, то маємо

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\phi(s^{(m)})=\lim_{m\to\infty}\langle f,\varphi(\cdot+s^{(m)})\rangle&=\langle f,\lim_{m\to\infty}\varphi(\cdot+s^{(m)})\rangle\\&=\langle f,\varphi(\cdot+s^{(0)})\rangle=\phi(s^{(0)}).\end{aligned}$$

Далі

$$\begin{aligned}\partial_j\phi(s^{(0)})&=\lim_{m\to\infty}\frac{\phi(s^{(m)})-\phi(s^{(0)})}{s^m_j-s^0_j}=\lim_{m\to\infty}\frac{\langle f,\varphi(\cdot+s^{(m)})\rangle-\langle f,\varphi(\cdot+s^{(0)})\rangle}{s^m_j-s^0_j}\\&=\Big\langle f,\lim_{m\to\infty}\frac{\varphi(\cdot+s^{(m)})-\varphi(\cdot+s^{(0)})}{s^m_j-s^0_j}\Big\rangle=\langle f,\partial_j\varphi(\cdot+s^{(0)})\rangle\\&=(f\star\partial_j\varphi)(s^{(0)}),\end{aligned}$$

де ∂_j означає оператор частинної похідної за j-тою змінною, $j = 1, \ldots, d$. Для вищих похідних доведення аналогічне.

Те, що носій функції $f \star \varphi$ лежить в $[0, \nu]$ для деякого $\nu \succ 0$ випливає з доведення теореми 4.2.1. Там же доведено, що $f \star \varphi \in \mathcal{G}_+$. $\square$

Користуючись неперервністю функціоналів f і g та означеннями оператора зсуву та згортки розподілів [7], легко бачити, що

$$\begin{aligned} (f \star T_s\varphi)(t) &= \langle\, f,\, T_tT_s\varphi \,\rangle = \langle\, f(p),\, \varphi(p+s+t) \,\rangle \\ &\qquad\qquad = (f \star \varphi)(s+t) = T_s(f \star \varphi)(t) \\ ((f * g) \star \varphi)(t) &= \langle\, f * g,\, \varphi(\,\cdot\, + t) \,\rangle = \langle\, f(s),\, \langle\, g(p),\, \varphi(s+p+t) \,\rangle \,\rangle \\ &= \langle\, f(s),\, (g \star \varphi)(s+t) \,\rangle = (f \star (g \star \varphi))(t) \end{aligned} \tag{4.3.13}$$

для всіх $s \in \mathbb{R}^d_+$, $f, g \in \mathcal{G}'_+$ і $\varphi \in \mathcal{G}_+$.

Звідси випливає, що оператор крос-кореляції $K_f \colon \varphi \longmapsto f \star \varphi$ належить простору $\mathscr{L}(\mathcal{G}_+)$ для довільного ультрарозподілу $f \in \mathcal{G}'_+$ (див. також теорему 4.2.1).

Враховуючи означення (4.3.11) маємо

$$K^{\otimes}_{\boldsymbol{u}} := \bigl(K^{\otimes n}_{u_n}\bigr) \in \mathscr{L}\bigl(\Gamma(\mathcal{G}_+)\bigr) \quad \text{та} \quad K^{\otimes n}_{u_n} \in \mathscr{L}(\mathcal{G}^{\otimes n}_+), \tag{4.3.14}$$

де $\boldsymbol{u} := (u_n) \in \Gamma(\mathcal{G}'_+)$ при $u_n \in \mathcal{G}'^{\otimes n}_+$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Введемо операцію, яка є розширенням крос-кореляції, означеної в параграфі 4.2, на простори поліноміальних ультрадиференційовних функцій та ультрарозподілів. Для довільних $\boldsymbol{u} = (u_n) \in \Gamma(\mathcal{G}'_+)$ та $\boldsymbol{p} = (p_n) \in \Gamma(\mathcal{G}_+)$ їх крос-кореляцією назвемо елемент

$$\boldsymbol{u} \star \boldsymbol{p} := K^{\otimes}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{p} = \bigl(K^{\otimes n}_{u_n} p_n\bigr).$$

Використовуючи ізоморфізми $\Upsilon^{\mathcal{G}_+} : \Gamma(\mathcal{G}_+) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{G}'_+)$ і $\Psi^{\mathcal{G}_+} : \Gamma(\mathcal{G}'_+) \longrightarrow \mathcal{P}'(\mathcal{G}'_+)$ та їх обернені визначимо аналогічну операцію на поліноміальних просторах. А саме, для довільних $U \in \mathcal{P}'(\mathcal{G}'_+)$ та $P \in \mathcal{P}(\mathcal{G}'_+)$ їх крос-кореляцією назвемо елемент

$$U \star P := \Upsilon^{\mathcal{G}_+}(\boldsymbol{u} \star \boldsymbol{p}), \tag{4.3.15}$$

де $\boldsymbol{u} = (\Psi^{\mathcal{G}_+})^{-1}U \in \Gamma(\mathcal{G}'_+)$, $\boldsymbol{p} = (\Upsilon^{\mathcal{G}_+})^{-1}P \in \Gamma(\mathcal{G}_+)$.

Твердження 4.3.2. *Для довільних* $\boldsymbol{u} \in \Gamma(\mathcal{G}'_+)$ *і* $\boldsymbol{p} \in \Gamma(\mathcal{G}_+)$ *крос-кореляція* $\boldsymbol{u} \star \boldsymbol{p}$ *належить простору* $\Gamma(\mathcal{G}_+)$.

Доведення. Нехай $\boldsymbol{u} = (u_n) \in \Gamma(\mathcal{G}'_+)$ і $\boldsymbol{p} = (p_n) \in \Gamma(\mathcal{G}_+)$. Оскільки за означенням $\boldsymbol{u} \star \boldsymbol{p} = \big(K_{u_n}^{\otimes n} p_n\big)$, то нам достатньо перевірити, що $K_{u_n}^{\otimes n} p_n \in \mathcal{G}_+^{\otimes n}$ для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$. У випадку $n = 0$ це очевидно. Якщо $n = 1$, то, як вище показано, функція $\langle u_1, \mathcal{T}_s p_1 \rangle = (u_1 \star p_1)(s)$ належить простору $\mathcal{G}_+$. Розглянемо випадок $n > 1$. Не обмежуючи загальності візьмемо $u_n = f^{\otimes n}$ і $p_n = \varphi^{\otimes n}$, де $f \in \mathcal{G}'_+$, $\varphi \in \mathcal{G}_+$. Тоді функція

$$K_{u_n}^{\otimes n} p_n = \big\langle f^{\otimes n}, T_s^{\otimes n} \varphi^{\otimes n} \big\rangle = \big\langle f^{\otimes n}, (T_s \varphi)^{\otimes n} \big\rangle = \big\langle f, T_s \varphi \big\rangle^{\otimes n} = (f \star \varphi)^{\otimes n}$$

належить простору $\mathcal{G}_+^{\otimes n}$ як n-тий тензорний степінь функції з $\mathcal{G}_+$. ☐

Наслідок 4.3.3. *Для довільних* $U \in \mathcal{P}'(\mathcal{G}'_+)$ *та* $P \in \mathcal{P}(\mathcal{G}'_+)$ *крос-кореляція* $U \star P$ *належить простору* $\mathcal{P}(\mathcal{G}'_+)$.

Комутантом $\big[T^{\otimes}\big]^c \subset \mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{G}_+)\big)$ поліноміальної напівгрупи зсувів $T^{\otimes}$ назвемо множину

$$\big[T^{\otimes}\big]^c := \big\{K^{\otimes} \in \mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{G}_+)\big) : K^{\otimes} \circ T_s^{\otimes} = T_s^{\otimes} \circ K^{\otimes}, \forall\, s \in \mathbb{R}_+\big\},$$

де оператор $K^{\otimes}$ визначений вище формулою (4.3.11).

Теорема 4.3.3. *Відображення*

$$\mathsf{K} : \Gamma(\mathcal{G}'_+) \ni \boldsymbol{u} \longmapsto K_{\boldsymbol{u}}^{\otimes} \in \mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{G}_+)\big)$$

здійснює алгебраїчний ізоморфізм з алгебри $\big\{\Gamma(\mathcal{G}'_+), \circledast\big\}$ *на комутант* $\big[T^{\otimes}\big]^c$ *напівгрупи* $T^{\otimes}$ *в алгебрі* $\big\{\mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{G}_+)\big), \circ\big\}$. *Зокрема, справджується наступне співвідношення*

$$K_{\boldsymbol{u} \circledast \boldsymbol{v}}^{\otimes} = K_{\boldsymbol{u}}^{\otimes} \circ K_{\boldsymbol{v}}^{\otimes}, \qquad \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \Gamma(\mathcal{G}'_+).$$

Доведення. Оскільки оператор $K_{\boldsymbol{u}}^{\otimes}$ є лінійним та неперервним, то нам достатньо розглянути лише елементи з тотальних підмножин (4.3.3).

Виберемо довільні $\boldsymbol{p} = (\varphi^{\otimes n}) \in \Gamma(\mathcal{G}_+)$ та $\boldsymbol{u} = (f^{\otimes n}), \boldsymbol{v} = (g^{\otimes n}) \in \Gamma(\mathcal{G}_+')$, де $\varphi \in \mathcal{G}_+$, $f, g \in \mathcal{G}_+'$. З означень операцій $\circledast$ та $\star$, а також з рівностей (4.3.13) випливає

$$\begin{aligned} K_{\boldsymbol{u}\circledast\boldsymbol{v}}^{\otimes}\boldsymbol{p} &= \Big(\big\langle (f*g)^{\otimes n}, T_s^{\otimes n}\varphi^{\otimes n}\big\rangle\Big) = \Big(\big((f*g)\star\varphi\big)^{\otimes n}\Big) \\ &= \Big(\big(f\star(g\star\varphi)\big)^{\otimes n}\Big) = \Big(\big\langle f, T_s(g\star\varphi)\big\rangle^{\otimes n}\Big) = \Big(\big\langle f^{\otimes n}, T_s^{\otimes n}(g\star\varphi)^{\otimes n}\big\rangle\Big) \\ &= K_{\boldsymbol{u}}^{\otimes}K_{\boldsymbol{v}}^{\otimes}\boldsymbol{p}. \end{aligned}$$

Використовуючи (4.3.13), отримаємо

$$\begin{aligned} K_{\boldsymbol{u}}^{\otimes}T_s^{\otimes}\boldsymbol{p} &= \big(f^{\otimes n}\big)\star\big(T_s^{\otimes n}\varphi^{\otimes n}\big) = \big(f^{\otimes n}\big)\star\big((T_s\varphi)^{\otimes n}\big) \\ &= \big((f\star T_s\varphi)^{\otimes n}\big) = \big((T_s(f\star\varphi))^{\otimes n}\big) = \big(T_s^{\otimes n}(f\star\varphi)^{\otimes n}\big) \\ &= \big(T_s^{\otimes n}K_{u_n}^{\otimes n}\varphi^{\otimes n}\big) = T_s^{\otimes}K_{\boldsymbol{u}}^{\otimes}\boldsymbol{p} \end{aligned}$$

для всіх $s \in \mathbb{R}_+$. Отже, оператор $K_{\boldsymbol{u}}^{\otimes}$ належить комутанту $\big[T^{\otimes}\big]^c$ для довільного $\boldsymbol{u} \in \Gamma(\mathcal{G}_+')$.

Навпаки, нехай $K \in \mathscr{L}(\mathcal{G}_+)$ — такий оператор, що $K^{\otimes} \in \big[T^{\otimes}\big]^c$. Покажемо, що знайдеться такий елемент $\boldsymbol{w} \in \Gamma(\mathcal{G}_+')$, що $K^{\otimes} = K_{\boldsymbol{w}}^{\otimes}$. Шуканим елементом є $\boldsymbol{w} := (1, h, \dots, h^{\otimes n}, \dots)$, де ультрарозподіл $h \in \mathcal{G}_+'$ визначений співвідношенням $\langle h, \varphi\rangle := (K\varphi)(0)$, $\varphi \in \mathcal{G}_+$. Оскільки $(h\star\varphi)(s) = \langle h, T_s\varphi\rangle = (KT_s\varphi)(0) = (K\varphi)(s)$, то

$$K_{\boldsymbol{w}}^{\otimes}\boldsymbol{p} = \big((h\star\varphi)^{\otimes n}\big) = \big((K\varphi)^{\otimes n}\big) = \big(K^{\otimes n}\varphi^{\otimes n}\big) = K^{\otimes}\boldsymbol{p}.$$

Таким чином $K^{\otimes} = K_{\boldsymbol{w}}^{\otimes}$. Отже, образом відображення K є комутант $\big[T^{\otimes}\big]^c$ напівгрупи $T^{\otimes}$ (див. формулу (4.3.12)). ☐

Твердження 4.3.3. *Для довільних* $\boldsymbol{u} \in \Gamma(\mathcal{G}_+')$ *і* $\boldsymbol{p} \in \Gamma(\mathcal{G}_+)$ *справджуються наступні рівності*

$$(\mathbb{D}_i'\boldsymbol{u})\star\boldsymbol{p} = -\boldsymbol{u}\star(\mathbb{D}_i\boldsymbol{p}), \qquad i = 1, \dots, d.$$

Доведення. Знову, як і вище, достатньо розглянути елементи з тотальних підмножин (4.3.3). Для довільних $\boldsymbol{u} = \big(f^{\otimes n}\big) \in \Gamma(\mathcal{G}'_+)$ та $\boldsymbol{p} = \big(\varphi^{\otimes n}\big) \in \Gamma(\mathcal{G}_+)$, де $f \in \mathcal{S}'_+$, $\varphi \in \mathcal{S}_+$, маємо

$$\begin{aligned}
(\mathbb{D}'_i\boldsymbol{u}) \star \boldsymbol{p} &= \bigtimes_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{n} (f \star \varphi)^{\otimes(j-1)} \otimes (\partial'_i f \star \varphi) \otimes (f \star \varphi)^{\otimes(n-j)} \\
&= - \bigtimes_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{n} (f \star \varphi)^{\otimes(j-1)} \otimes (f \star \partial_i\varphi) \otimes (f \star \varphi)^{\otimes(n-j)} \\
&= - \bigtimes_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{n} \langle f, T_s\varphi\rangle^{\otimes(j-1)} \otimes \langle f, T_s\partial_i\varphi\rangle \otimes \langle f, T_s\varphi\rangle^{\otimes(n-j)} \\
&= - \bigtimes_{n\in\mathbb{N}} \Big\langle f^{\otimes n}, \sum_{j=1}^{n} (T_s\varphi)^{\otimes(j-1)} \otimes T_s\partial_i\varphi \otimes (T_s\varphi)^{\otimes(n-j)}\Big\rangle \\
&= - \bigtimes_{n\in\mathbb{N}} \Big\langle f^{\otimes n}, T_s^{\otimes n} \sum_{j=1}^{n} \varphi^{\otimes(j-1)} \otimes \partial_i\varphi \otimes \varphi^{\otimes(n-j)}\Big\rangle = -\boldsymbol{u} \star (\mathbb{D}_i\boldsymbol{p}).
\end{aligned}$$

Твердження доведено. □

Наслідок 4.3.4. *Для довільних* $U \in \mathcal{P}'(\mathcal{G}'_+)$ *і* $P \in \mathcal{P}(\mathcal{G}'_+)$ *справджуються наступні рівності*

$$(\mathscr{D}'_i U) \star P = -U \star (\mathscr{D}_i P), \qquad i = 1, \ldots, d.$$

Доведення. Нехай $\boldsymbol{u} = (\Psi^{\mathcal{G}_+})^{-1}U \in \Gamma(\mathcal{G}'_+)$ і $\boldsymbol{p} = (\Upsilon^{\mathcal{G}_+})^{-1}P \in \Gamma(\mathcal{G}_+)$. Тоді, враховуючи означення операторів $\mathscr{D}'_i := \Psi^{\mathcal{G}_+} \circ \mathbb{D}'_i \circ (\Psi^{\mathcal{G}_+})^{-1}$ і $\mathscr{D}_i := \Upsilon^{\mathcal{G}_+} \circ \mathbb{D}_i \circ (\Upsilon^{\mathcal{G}_+})^{-1}$ та формулу (4.3.15) отримаємо

$$\begin{aligned}
(\mathscr{D}'_i U) \star P &= \Upsilon^{\mathcal{G}_+}\big((\Psi^{\mathcal{G}_+})^{-1}\mathscr{D}'_i U \star (\Upsilon^{\mathcal{G}_+})^{-1}P\big) \\
&= \Upsilon^{\mathcal{G}_+}\big((\Psi^{\mathcal{G}_+})^{-1}\Psi^{\mathcal{G}_+}\mathbb{D}'_i(\Psi^{\mathcal{G}_+})^{-1}U \star (\Upsilon^{\mathcal{G}_+})^{-1}P\big) = \Upsilon^{\mathcal{G}_+}\big((\mathbb{D}'_i\boldsymbol{u}) \star \boldsymbol{p}\big) \\
&= -\Upsilon^{\mathcal{G}_+}\big(\boldsymbol{u} \star (\mathbb{D}_i\boldsymbol{p})\big) = -\Upsilon^{\mathcal{G}_+}\big((\Psi^{\mathcal{G}_+})^{-1}U \star (\Upsilon^{\mathcal{G}_+})^{-1}\Upsilon^{\mathcal{G}_+}\mathbb{D}_i(\Upsilon^{\mathcal{G}_+})^{-1}P\big) \\
&= -\Upsilon^{\mathcal{G}_+}\big((\Psi^{\mathcal{G}_+})^{-1}U \star (\Upsilon^{\mathcal{G}_+})^{-1}\mathscr{D}_i P\big) = -U \star (\mathscr{D}_i P).
\end{aligned}$$

□

4.4 Інтегральні перетворення поліноміальних ультрарозподілів

У цьому параграфі поряд із класом $\mathcal{G}_+$ ультрадиференційовних функцій з компактними в $\mathbb{R}^d_+$ носіями, ми додатково вводимо ширший клас $\mathcal{G}_\beta$ ультрадиференційовних функцій, що визначені на всьому просторі $\mathbb{R}^d$.

Тут ми розглянемо перетворення Фур'є-Лапласа та Лапласа спочатку на просторах ультрадиференційовних функцій, а потім розширимо ці відображення на відповідні простори поліноміальних ультрарозподілів. Зауважимо, що для випадку перетворення Фур'є-Лапласа описано образ основного простору (див. наслідок 4.4.1 та теорему 4.4.1), а також доведено теорему 4.4.2 типу Пелі-Вінера для поліноміальних ультрарозподілів.

4.4.1 Перетворення Фур'є-Лапласа лінійних ультрадиференційовних функцій Жевре та ультрарозподілів Рум'є

У цьому пункті введемо клас $E_\beta(\mathbb{C}^d)$ (див. формулу (4.4.3)) цілих функцій експоненціального типу, який, як пізніше буде доведено, є образом при перетворенні Фур'є-Лапласа функцій з основного простору $\mathcal{G}_\beta(\mathbb{R}^d)$ (див. формулу (4.4.5)).

Нехай M — деяка множина в $\mathbb{R}^d$. Опорною функцією множини M називають функцію

$$H_M(x) = \sup_{t\in M}(t, x), \qquad x \in \mathbb{R}^d,$$

де $(t, x) = t_1x_1 + \dots + t_dx_d$ — скалярний добуток. Функція $H_M(\eta)$ опукла, напівнеперервна знизу і може приймати значення $+\infty$. Якщо M — обмежена множина, то її опорна функція неперервна.

Нехай $B_r \subset \mathbb{C}^d$ позначає кулю радіуса $r > 0$. Простір $E(\mathbb{C}^d)$ цілих функцій експоненціального типу d комплексних змінних наділимо локально опуклою топологією рівномірної збіжності на компактних множинах, що може бути визначена системою напівнорм

$$p_{r,M}(\psi) := \sup_{z\in B_r} |\psi(z)| e^{-H_M(\eta)},$$

де $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_d) \in \mathbb{R}^d$ — уявна частина $z = (z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{C}^d$.

Зафіксуємо довільне дійсне $\beta > 1$. Для додатного числа $h > 0$ і таких векторів $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_d)$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_d) \in \mathbb{R}^d$, що $\mu \prec \nu$, в просторі цілих функцій експоненціального типу введемо підпростір $E^h_\beta[\mu, \nu]$ функцій $\mathbb{C}^d \ni z \longmapsto \psi(z) \in \mathbb{C}$ зі скінченною нормою

$$\|\psi\|_{E^h_\beta[\mu,\nu]} := \sup_{k\in\mathbb{Z}^d_+} \sup_{z\in\mathbb{C}^d} \frac{|z^k \psi(z) e^{-H_{[\mu,\nu]}(\eta)}|}{h^{|k|} k^{k\beta}}. \tag{4.4.1}$$

Оскільки для довільних $r > 0$ та $\psi \in E^h_\beta[\mu, \nu]$ виконується нерівність $p_{r,[\mu,\nu]}(\psi) \leq \|\psi\|_{E^h_\beta[\mu,\nu]}$, то вкладення $E^h_\beta[\mu, \nu] \hookrightarrow E(\mathbb{C}^d)$ неперервні.

Твердження 4.4.1. *Кожен з просторів $E^h_\beta[\mu, \nu]$ є банаховим простором, а всі вкладення*

$$E^h_\beta[\mu, \nu] \hookrightarrow E^{h'}_\beta[\mu', \nu'] \qquad \textit{при} \qquad [\mu, \nu] \subset [\mu', \nu'],\ h < h',$$

компактні.

Доведення. Доведемо повноту простору $E^h_\beta[\mu, \nu]$. Нехай $\{\psi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ — фундаментальна послідовність в $E^h_\beta[\mu, \nu]$, тобто для кожного як завгодно малого $\varepsilon > 0$ знайдеться номер $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, починаючи з якого $(\forall\, m, n > N_\varepsilon)$ виконується нерівність $\|\psi_m - \psi_n\|_{E^h_\beta[\mu,\nu]} < \varepsilon$.

З очевидної нерівності

$$\sup_{z\in B_r} \frac{|z^k \psi(z)|}{h^{|k|} k^{k\beta}}\, e^{-H_{[\mu,\nu]}(\eta)} \leq \|\psi\|_{E^h_\beta[\mu,\nu]}, \qquad \psi \in E^h_\beta[\mu, \nu],$$

яка виконується для всіх $k \in \mathbb{Z}^d_+$ і $r > 0$, випливає, що послідовність $\{\phi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, де $\phi_m(z) := \dfrac{z^k \psi_m(z)}{h^{|k|} k^{k\beta}}$, є фундаментальною в просторі цілих функцій експоненціального типу. Тому для довільних $k \in \mathbb{Z}_+^d$ і $r > 0$ маємо

$$\sup_{z\in B_r} \frac{|z^k(\psi_m(z) - \psi_n(z))|}{h^{|k|}k^{k\beta}}\, e^{-H_{[\mu,\nu]}(\eta)} < \varepsilon, \quad \forall\, m, n > N_\varepsilon. \tag{4.4.2}$$

Оскільки послідовність $\{\phi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ фундаментальна, то вона обмежена в $E(\mathbb{C}^d)$. З теореми Бернштейна [29, теорема 3.3.6] про компактність випливає, що існує така підпослідовність $\{\phi_{k_m}\}_{k_m\in\mathbb{N}}$ і функція $\phi \in E(\mathbb{C}^d)$, що виконується

$$\lim_{k_m\to\infty} \sup_{z\in B_r} \frac{|z^k(\psi_{k_m}(z) - \psi(z))|}{h^{|k|}k^{k\beta}}\, e^{-H_{[\mu,\nu]}(\eta)} = 0, \qquad k \in \mathbb{Z}_+^d, \quad r > 0.$$

Тому, переходячи в (4.4.2) до границі при $m = k_m \to \infty$, для всіх $k \in \mathbb{Z}_+^d$ і $r > 0$ отримаємо нерівність

$$\sup_{z\in B_r} \frac{|z^k(\psi(z) - \psi_n(z))|}{h^{|k|}k^{k\beta}}\, e^{-H_{[\mu,\nu]}(\eta)} < \varepsilon,$$

яка справджується для всіх $n > N_\varepsilon$, зокрема при $n = N_\varepsilon + 1$. Звідси та з нерівності трикутника отримуємо

$$\sup_{z\in B_r} \frac{|z^k\psi(z)|}{h^{|k|}k^{k\beta}}\, e^{-H_{[\mu,\nu]}(\eta)} \le \sup_{z\in B_r} \frac{|z^k\psi_{N_\varepsilon+1}(z)|}{h^{|k|}k^{k\beta}}\, e^{-H_{[\mu,\nu]}(\eta)} + \varepsilon.$$

Знайшовши в останній нерівності точну верхню грань по k і r, отримаємо

$$\|\psi\|_{E_\beta^h[\mu,\nu]} \le \|\psi_{N_\varepsilon+1}\|_{E_\beta^h[\mu,\nu]} + \varepsilon,$$

звідки $\psi \in E_\beta^h[\mu,\nu]$. Отже, простір $E_\beta^h[\mu,\nu]$ повний.

Компактність вкладень $E_\beta^h[\mu,\nu] \looparrowright E_\beta^{h'}[\mu',\nu']$ при $[\mu,\nu] \subset [\mu',\nu']$, $h < h'$ випливає з очевидної нерівності $e^{-H_{[\mu',\nu']}} \le e^{-H_{[\mu,\nu]}}$ та міркувань, наведених у книзі [146, стор. 38–40]. □

Введемо простір $E_\beta(\mathbb{C}^d) := \bigcup\limits_{\mu\prec\nu,\, h>0} E_\beta^h[\mu,\nu]$, наділивши його топологією індуктивної границі

$$E_\beta(\mathbb{C}^d) = \liminf_{\mu\prec\nu,\, h>0} E_\beta^h[\mu,\nu], \tag{4.4.3}$$

відносно компактних вкладень, доведених у твердженні 4.4.1.

Аналогічно до того, як це зроблено у параграфі 4.1, введемо простори ультрадиференційовних функцій на $\mathbb{R}^d$.

Нескінченно диференційовну комплекснозначну функцію φ, задану на $\mathbb{R}^d$, називають ультрадиференційовною в сенсі Жевре, якщо для кожної множини $[\mu,\nu]\subset\mathbb{R}^d$ існують такі константи $h>0$ і $C>0$, що нерівність

$$\sup_{t\in[\mu,\nu]}|\partial^k\varphi(t)|\le Ch^{|k|}k^{k\beta} \tag{4.4.4}$$

виконується для всіх $k\in\mathbb{Z}_+^d$.

Для фіксованого $h>0$ розглянемо підпростір $\mathcal{G}_\beta^h[\mu,\nu]$ всіх функцій φ, носії яких розміщені в $[\mu,\nu]\subset\mathbb{R}^d$ і таких, що існує така константа $C=C(\varphi)>0$, що нерівність (4.4.4) виконується для всіх $k\in\mathbb{Z}_+^d$. Таким чином, простір ультрадиференційовних функцій з компактними носіями ми визначили як

$$\mathcal{G}_\beta^h[\mu,\nu]:=\big\{\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^d):\operatorname{supp}\varphi\subset[\mu,\nu],\|\varphi\|_{\mathcal{G}_\beta^h[\mu,\nu]}<\infty\big\},$$

де норма визначена наступним чином

$$\|\varphi\|_{\mathcal{G}_\beta^h[\mu,\nu]}:=\sup_{k\in\mathbb{Z}_+^d}\sup_{t\in[\mu,\nu]}\frac{|\partial^k\varphi(t)|}{h^{|k|}k^{k\beta}}.$$

Аналогічним до твердження 4.1.1 є

Твердження 4.4.2. *Кожен $\mathcal{G}_\beta^h[\mu,\nu]$ є банаховим простором, при цьому вкладення $\mathcal{G}_\beta^h[\mu,\nu]\looparrowright\mathcal{G}_\beta^l[\mu,\nu]$ при $h<l$ компактні. Більше того, якщо $[\mu,\nu]\subset[\mu',\nu']$, то $\mathcal{G}_\beta^h[\mu,\nu]$ – замкнутий підпростір в $\mathcal{G}_\beta^h[\mu',\nu']$.*

З твердження 4.4.2 випливає, що на множині банахових просторів

$$\big\{\mathcal{G}_\beta^h[\mu,\nu]:\ [\mu,\nu]\subset\mathbb{R}^d,\ h>0\big\}$$

можна встановити частковий порядок і розглянути цю множину як індуктивну систему відносно вказаних вище компактних вкладень. Тому можна ввести простір $\mathcal{G}_\beta(\mathbb{R}^d) := \bigcup\limits_{\mu\prec\nu,\, h>0} \mathcal{G}_\beta^h[\mu,\nu]$ наділивши його топологією індуктивної границі

$$\mathcal{G}_\beta(\mathbb{R}^d) = \liminf_{\mu\prec\nu,\, h>0} \mathcal{G}_\beta^h[\mu,\nu]. \qquad (4.4.5)$$

На введених просторах визначимо перетворення Фур'є-Лапласа

$$\widehat{\varphi}(z) := (F\varphi)(z) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(t,z)}\varphi(t)\,dt, \qquad \varphi \in \mathcal{G}_\beta(\mathbb{R}^d),\ z \in \mathbb{C}^d. \qquad (4.4.6)$$

Нашим завданням є показати, що $\widehat{\varphi}(z) \in E_\beta(\mathbb{C}^d)$, більше того, що відображення $F : \mathcal{G}_\beta(\mathbb{R}^d) \longrightarrow E_\beta(\mathbb{C}^d)$ сюр'єктивне.

Спочатку доведемо допоміжне твердження. Розглянемо індуктивні границі банахових просторів вигляду

$$E_\beta[\mu,\nu] := \bigcup_{h>0} \mathcal{G}_\beta^h[\mu,\nu], \qquad E_\beta[\mu,\nu] \simeq \liminf_{h\to\infty} \mathcal{G}_\beta^h[\mu,\nu],$$

та

$$\mathcal{G}_\beta[\mu,\nu] := \bigcup_{h>0} \mathcal{G}_\beta^h[\mu,\nu], \qquad \mathcal{G}_\beta[\mu,\nu] \simeq \liminf_{h\to\infty} \mathcal{G}_\beta^h[\mu,\nu].$$

Твердження 4.4.3. *Образом простору* $\mathcal{G}_\beta[\mu,\nu]$ *при відображенні* (4.4.6) *є простір* $E_\beta[\mu,\nu]$.

Доведення. Нехай $\varphi \in \mathcal{G}_\beta[\mu,\nu]$. Враховуючи відомі властивості перетворення Фур'є-Лапласа, отримуємо $\widehat{\partial^k\varphi}(z) = z^k\widehat{\varphi}(z)$ для всіх $k \in \mathbb{Z}_+^d$. Тому для всіх z та k маємо

$$\begin{aligned}|z^k\widehat{\varphi}(z)| = \Big|\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(t,z)}\partial^k\varphi(t)\,dt\Big| &\le \int_{[\mu,\nu]} |e^{-i(t,\xi)}e^{(t,\eta)}\partial^k\varphi(t)|\,dt\\ &\le h^{|k|}k^{k\beta}e^{H_{[\mu,\nu]}(\eta)}\|\varphi\|_{\mathcal{G}_\beta^h[\mu,\nu]}\int_{[\mu,\nu]} dt,\end{aligned}$$

звідки отримуємо

$$\|\widehat{\varphi}\|_{E_\beta^h[\mu,\nu]} \le C\|\varphi\|_{\mathcal{G}_\beta^h[\mu,\nu]}, \qquad (4.4.7)$$

де $C = \prod_{j=1}^d(\nu_j - \mu_j)$. Отже, $F(\mathcal{G}_\beta^h[\mu,\nu]) \subset E_\beta^h[\mu,\nu]$.

Навпаки, нехай $\psi \in E_\beta^h[\mu,\nu]$. Відомо, що норма простору $E_\beta^h[\mu,\nu]$ може бути задана за формулою

$$\|\psi\|_{E_\beta^h[\mu,\nu]} := \sup_{k\in\mathbb{Z}_+^d} \sup_{z\in\mathbb{C}^d} \frac{|z^k\psi(z)e^{-H_{[\mu,\nu]}(\eta)}|}{h^{|k|}|k|!^\beta},$$

причому відомо (див., наприклад, [8, Розділ II, §2.6] або [146, Розділ 2, §2.1]), що топологія, яка породжується цією нормою, еквівалентна до раніше заданої (див. (4.4.1)). Звідси випливає, що для кожної функції $\psi \in E_\beta^h[\mu,\nu]$ знайдеться така константа C, що виконується нерівність

$$|z^k\psi(z)| \le Ch^{|k|}|k|!^\beta e^{H_{[\mu,\nu]}(\eta)} \tag{4.4.8}$$

для всіх $z \in \mathbb{C}^d$.

Маємо очевидну нерівність

$$e^{\beta t^{1/\beta}} = \left(e^{t^{1/\beta}}\right)^\beta = \Big(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{m/\beta}}{m!}\Big)^\beta \ge \frac{|t|^m}{m!^\beta},$$

яка виконується для всіх $t \in \mathbb{R}$ та $m \in \mathbb{Z}_+$. Зокрема при $t = |z|/h$ і $m = |k|$, отримаємо

$$e^{\beta\left(\frac{|z|}{h}\right)^{1/\beta}} \ge \frac{|z|^{|k|}}{h^{|k|}|k|!^\beta}.$$

Звідси та з нерівності $|z^k| \le |z|^{|k|}$ випливає,

$$\frac{h^{|k|}|k|!^\beta}{|z^k|}\, e^{H_{[\mu,\nu]}(\eta)} \ge \frac{e^{H_{[\mu,\nu]}(\eta)}}{e^{(L|z|)^{1/\beta}}},$$

де $L = \frac{\beta^\beta}{h}$. Таким чином, ми отримали, що якщо функція ψ задовольняє нерівність (4.4.8), тобто належить простору $E_\beta^h[\mu,\nu]$, то вона задовольняє нерівність $|\psi(z)| \le Ce^{-(L|z|)^{1/\beta}+H_{[\mu,\nu]}(\eta)}$. З теореми [146, 2.22] випливає, що існує така функція $\varphi \in \mathcal{G}_\beta[\mu,\nu]$, що $\widehat{\varphi} = \psi$, тобто $E_\beta^h[\mu,\nu] \subset F(\mathcal{G}_\beta^h[\mu,\nu])$.

Отже, ми довели $F(\mathcal{G}_\beta^h[\mu,\nu]) = E_\beta^h[\mu,\nu]$. З довільності константи $h > 0$ та властивостей індуктивної границі отримуємо потрібну рівність

$$F(\mathcal{G}_\beta[\mu,\nu]) = E_\beta[\mu,\nu].$$

☐

Безпосереднім наслідком твердження 4.4.3 та властивостей індуктивної границі є наступний результат.

Наслідок 4.4.1. *Образом простору* $\mathcal{G}_\beta(\mathbb{R}^d)$ *при відображенні* F *є простір* $E_\beta(\mathbb{C}^d)$.

Звідси випливає, що ми можемо розглянути обернене до спряженого перетворення

$$F'^{-1} : \mathcal{G}'_\beta(\mathbb{R}^d) \longrightarrow E'_\beta(\mathbb{C}^d),$$

де $\mathcal{G}'_\beta(\mathbb{R}^d)$ та $E'_\beta(\mathbb{C}^d)$ позначають простори лінійних та неперервних функціоналів на $\mathcal{G}_\beta(\mathbb{R}^d)$ та $E_\beta(\mathbb{C}^d)$ відповідно. У спряжених просторах $\mathcal{G}'_\beta(\mathbb{R}^d)$ та $E'_\beta(\mathbb{C}^d)$, як звично, ми задаємо сильну топологію.

Теорема 4.4.1. *Справджуються наступні топологічні ізоморфізми*

$$F(\mathcal{G}_\beta(\mathbb{R}^d)) \simeq E_\beta(\mathbb{C}^d) \qquad \textit{та} \qquad F'^{-1}(\mathcal{G}'_\beta(\mathbb{R}^d)) \simeq E'_\beta(\mathbb{C}^d).$$

Доведення. З нерівності (4.4.7) випливає, що відображення

$$F : \mathcal{G}_\beta[\mu, \nu] \ni \varphi \longmapsto \widehat{\varphi} \in E_\beta[\mu, \nu]$$

неперервне. З твердження 4.4.3 отримуємо сюр'єктивність цього відображення. Тому з теореми Банаха про відкрите відображення у версії, поданій у [12, теорема 6.7.2], випливає топологічний ізоморфізм $F(\mathcal{G}_\beta[\mu, \nu]) \simeq E_\beta[\mu, \nu]$. Враховуючи довільність множини $[\mu, \nu]$ та властивості індуктивних границь, отримуємо потрібні топологічні ізоморфізми. ☐

4.4.2 Теорема типу Пелі-Вінера для поліноміальних ультрадиференційовних функцій та ультрарозподілів

Формулою (4.4.6) було визначено перетворення Фур'є-Лапласа $F : \mathcal{G}_\beta(\mathbb{R}^d) \longrightarrow E_\beta(\mathbb{C}^d)$, що разом із оберненим до спряженого відображенням $F'^{-1} : \mathcal{G}'_\beta(\mathbb{R}^d) \longrightarrow E'_\beta(\mathbb{C}^d)$ діють як топологічні ізоморфізми. Для спрощення записів введемо позначення $\mathcal{G}_\beta := \mathcal{G}_\beta(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{G}'_\beta := \mathcal{G}'_\beta(\mathbb{R}^d)$, $E_\beta := E_\beta(\mathbb{C}^d)$, $E'_\beta := E'_\beta(\mathbb{C}^d)$.

Користуючись теоремою 2.2.3 та тензорною структурою просторів

$$\Gamma(\mathcal{G}_\beta) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+}{}_{fin}\, \mathcal{G}_\beta^{\widehat{\otimes}n} \qquad \text{і} \qquad \Gamma(\mathcal{G}'_\beta) := \mathop{\times}\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{G}_\beta'^{\widehat{\otimes}n}$$

розширимо перетворення F і F'^{-1} до відображень $\mathcal{F}^{\otimes}$ і $\mathcal{F}'^{\otimes}$, заданих на $\Gamma(\mathcal{G}_\beta)$ і $\Gamma(\mathcal{G}'_\beta)$ відповідно.

Спочатку для довільних елементів тотальних підмножин просторів $\mathcal{G}_\beta^{\widehat{\otimes}n}$ і $\mathcal{G}_\beta'^{\widehat{\otimes}n}$ вигляду $\varphi^{\otimes n}$ і $f^{\otimes n}$, де $\varphi \in \mathcal{G}_\beta$, $f \in \mathcal{G}'_\beta$, визначимо оператори $\mathcal{F}^{\otimes n}$ і $\mathcal{F}'^{\otimes n}$ співвідношеннями

$$\mathcal{F}^{\otimes n} : \varphi^{\otimes n} \longmapsto \widehat{\varphi}^{\otimes n}, \qquad \mathcal{F}'^{\otimes n} : f^{\otimes n} \longmapsto \widehat{f}^{\otimes n}, \qquad \mathcal{F}^{\otimes 0} = \mathcal{F}'^{\otimes 0} := I_{\mathbb{C}},$$

де $\widehat{\varphi}^{\otimes n} := (F\varphi)^{\otimes n}$, $\widehat{f}^{\otimes n} := \big(F'^{-1}f\big)^{\otimes n}$. Далі розширимо відображення $\mathcal{F}^{\otimes n}$ і $\mathcal{F}'^{\otimes n}$ на весь відповідний простір $\mathcal{G}_\beta^{\widehat{\otimes}n}$ і $\mathcal{G}_\beta'^{\widehat{\otimes}n}$ за лінійністю та неперервністю, в результаті отримаємо $\mathcal{F}^{\otimes n} \in \mathscr{L}\big(\mathcal{G}_\beta^{\widehat{\otimes}n}, E_\beta^{\widehat{\otimes}n}\big)$ і $\mathcal{F}'^{\otimes n} \in \mathscr{L}\big(\mathcal{G}_\beta'^{\widehat{\otimes}n}, E_\beta'^{\widehat{\otimes}n}\big)$. Нарешті перетворення $\mathcal{F}^{\otimes}$ і $\mathcal{F}'^{\otimes}$ визначимо відповідно як відображення

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F}^{\otimes} := \big(\mathcal{F}^{\otimes n}\big) : \Gamma(\mathcal{G}_\beta) \ni \boldsymbol{p} = \big(p_n\big) & \longmapsto & \widehat{\boldsymbol{p}} := \big(\widehat{p}_n\big) \in \Gamma(E_\beta), \\ \mathcal{F}'^{\otimes} := \big(\mathcal{F}'^{\otimes n}\big) : \Gamma(\mathcal{G}'_\beta) \ni \boldsymbol{u} = \big(u_n\big) & \longmapsto & \widehat{\boldsymbol{u}} := \big(\widehat{u}_n\big) \in \Gamma(E'_\beta), \end{array} \tag{4.4.9}$$

де $p_n \in \mathcal{G}_\beta^{\widehat{\otimes}n}$, $\widehat{p}_n := \mathcal{F}^{\otimes n}p_n \in E_\beta^{\widehat{\otimes}n}$, $u_n \in \mathcal{G}_\beta'^{\widehat{\otimes}n}$, $\widehat{u}_n := \mathcal{F}'^{\otimes n}u_n \in E_\beta'^{\widehat{\otimes}n}$.

Комутативні діаграми

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta) \arrow[r, "\mathcal{F}^{\otimes}_{\mathcal{P}}"] \arrow[d, "\big(\Upsilon^{\mathcal{G}_\beta}\big)^{-1}"'] & \mathcal{P}(E'_\beta) & \text{та} & \mathcal{P}'(\mathcal{G}'_\beta) \arrow[r, "\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}}"] \arrow[d, "\big(\Psi^{\mathcal{G}'_\beta}\big)^{-1}"'] & \mathcal{P}'(E'_\beta) \\ \Gamma(\mathcal{G}_\beta) \arrow[r, "\mathcal{F}^{\otimes}"] & \Gamma(E_\beta) \arrow[u, "\Upsilon^{E_\beta}"'] & & \Gamma(\mathcal{G}'_\beta) \arrow[r, "\mathcal{F}'^{\otimes}"] & \Gamma(E'_\beta) \arrow[u, "\Psi^{E'_\beta}"'] \end{tikzcd} \tag{4.4.10}$$

задають оператори $\mathcal{F}^{\otimes}_{\mathcal{P}} \in \mathscr{L}\big(\mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta), \mathcal{P}(E'_\beta)\big)$ та $\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}} \in \mathscr{L}\big(\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_\beta), \mathcal{P}'(E'_\beta)\big)$ відповідно, які ми назвемо (поліноміальним) перетворенням Фур'є-Лапласа поліноміальних ультрадиференційовних функцій та поліноміальних ультрарозподілів відповідно.

Доведемо теорему, що є аналогом теореми Пелі-Вінера.

Теорема 4.4.2. *Поліноміальне перетворення Фур'є-Лапласа* $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}^{\otimes}$ *діє як топологічний ізоморфізм з алгебри* $\mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta)$ *на алгебру* $\mathcal{P}(E'_\beta)$.

Доведення. З теореми 2.2.3 та комутативності першої з діаграм (4.4.10) випливає, що для доведення теореми достатньо показати, що відображення $\mathcal{F}^{\otimes} : \Gamma(\mathcal{G}_\beta) \longrightarrow \Gamma(E_\beta)$ є топологічним ізоморфізмом.

З теореми 4.4.1 та наслідку 4.4.1 випливають рівності $\operatorname{Ker} F = \{0\}$ і $\operatorname{Ker} F^{-1} = \{0\}$.

Розглянемо оператори

$$I_{\mathcal{G}_\beta} \otimes F : \mathcal{G}_\beta \otimes \mathcal{G}_\beta \longrightarrow \mathcal{G}_\beta \otimes E_\beta, \qquad F \otimes I_{E_\beta} : \mathcal{G}_\beta \otimes E_\beta \longrightarrow E_\beta \otimes E_\beta,$$

$$I_{E_\beta} \otimes F^{-1} : E_\beta \otimes E_\beta \longrightarrow E_\beta \otimes \mathcal{G}_\beta, \qquad F^{-1} \otimes I_{\mathcal{G}_\beta} : E_\beta \otimes \mathcal{G}_\beta \longrightarrow \mathcal{G}_\beta \otimes \mathcal{G}_\beta.$$

Оскільки простори $\mathcal{G}_\beta$ та E_β є ядерними (DF) просторами, то з твердження 1.2.2 випливають рівності

$$\operatorname{Ker}(I_{\mathcal{G}_\beta} \otimes F) = \{0\}, \qquad \operatorname{Ker}(F \otimes I_{E_\beta}) = \{0\},$$

$$\operatorname{Ker}(I_{E_\beta} \otimes F^{-1}) = \{0\}, \qquad \operatorname{Ker}(F^{-1} \otimes I_{\mathcal{G}_\beta}) = \{0\}.$$

Звідси отримуємо, що композиції цих операторів мають тривіальні ядра, тобто

$$\operatorname{Ker}\big((F \otimes I_{E_\beta}) \circ (I_{\mathcal{G}_\beta} \otimes F)\big) = \operatorname{Ker}(F \otimes F) = \{0\},$$

$$\operatorname{Ker}\big((F^{-1} \otimes I_{\mathcal{G}_\beta}) \circ (I_{E_\beta} \otimes F^{-1})\big) = \operatorname{Ker}(F^{-1} \otimes F^{-1}) = \{0\}.$$

Повторивши індуктивно такі ж міркування скінченну кількість раз, отримаємо

$$\operatorname{Ker} \mathcal{F}^{\otimes n} = \operatorname{Ker}\big(\underbrace{F \otimes \cdots \otimes F}_{n}\big) = \{0\},$$

$$\operatorname{Ker}(F^{-1})^{\otimes n} = \operatorname{Ker}\big(\underbrace{F^{-1} \otimes \cdots \otimes F^{-1}}_{n}\big) = \{0\},$$

для кожного натурального n. При цьому відображення $\mathcal{F}^{\otimes n}$, $(F^{-1})^{\otimes n}$ є неперервними як тензорні добутки неперервних операторів. Оскільки $(\mathcal{F}^{\otimes n})^{-1} = (F^{-1})^{\otimes n}$, то $\mathcal{F}^{\otimes n} : \mathcal{G}_\beta^{\widehat{\otimes} n} \longrightarrow E_\beta^{\widehat{\otimes} n}$ — топологічний ізоморфізм. Те, що $\mathcal{F}^{\otimes} : \Gamma(\mathcal{G}_\beta) \longrightarrow \Gamma(E_\beta)$ є топологічним ізоморфізмом впливає з властивостей топології прямої суми. ☐

Теорема 4.4.3. *Поліноміальне перетворення Фур'є-Лапласа* $\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}}$ *діє як топологічний ізоморфізм з алгебри* $\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_\beta)$ *на алгебру* $\mathcal{P}'(E'_\beta)$.

Доведення. Зрозуміло, що цю теорему можна довести аналогічним способом. Зауважимо, що єдиною відмінністю в міркуваннях є те, що на останньому кроці слід використати властивості топології прямого добутку. □

4.4.3 Перетворення Лапласа поліноміальних ультрарозподілів

У параграфі 4.1 було введено класи ультрадиференційовних функцій $\mathcal{G}_+$ та ультрарозподілів $\mathcal{G}'_+$, зосереджених на додатному конусі $\mathbb{R}^d_+$.

В теоремі 4.4.1 показано, що перетворення F'^{-1} здійснює топологічний ізоморфізм $F'^{-1}\colon \mathcal{G}'_\beta(\mathbb{R}^d) \longrightarrow E'_\beta(\mathbb{C}^d)$. Образ $E'_+ := F'^{-1}(\mathcal{G}'_+)$ підпростору $\mathcal{G}'_+ \subset \mathcal{G}'_\beta(\mathbb{R}^d)$ при цьому відображенні є замкнутим підпростором в $E'_\beta(\mathbb{C}^d)$.

Узагальненим перетворенням Лапласа назвемо відображення

$$L'\colon \mathcal{G}'_+ \ni f \longmapsto \widehat{f} \in E'_+, \qquad L' := F'^{-1}\,|_{\mathcal{G}'_+}\,. \tag{4.4.11}$$

Відображення L' є неперервним у відповідній сильній топології. Тому E'_+ — ядерний (F) простір. Оскільки простір $\mathcal{G}'_+$ є згортковою алгеброю, то простір E'_+ є мультиплікативною алгеброю відносно множення

$$\widehat{(f * g)} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}, \qquad f, g \in \mathcal{G}'_+,$$

одиницею цієї алгебри є $\widehat{\delta}$, де $\delta \in \mathcal{G}'_+$ — функціонал Дірака.

В теоремі 4.4.1 доведено, що перетворення Фур'є-Лапласа здійснює топологічний ізоморфізм $F\colon \mathcal{G}_\beta(\mathbb{R}^d) \longrightarrow E_\beta(\mathbb{C}^d)$. Якщо розглянути перетворення F на просторі $\mathcal{G}_+$, то отримаємо звичайне перетворення Лапласа $L\colon \mathcal{G}_+ \ni \varphi \longmapsto \widehat{\varphi} \in E_+$, де

$$\widehat{\varphi}(z) = \int_{\mathbb{R}^d_+} e^{-i(t,z)}\varphi(t)\, dt.$$

Нагадаємо, що з точністю до топологічного ізоморфізму простір $\mathcal{G}_+$ може бути представлений як фактор простір $\mathcal{G}_\beta(\mathbb{R}^d)\big/\,[\mathcal{G}'_+]^\perp$ (див. параграф 4.3). Легко бачити, що образ $E_+ := L(\mathcal{G}_+)$ простору $\mathcal{G}_+$ при перетворенні Лапласа буде топологічно ізоморфний фактор-простору $E_\beta(\mathbb{C}^d)\big/F\left([\mathcal{G}'_+]^\perp\right)$.

Зауважимо, що кожен елемент простору E_+ можна розуміти як узагальнене перетворення Лапласа $L'(\Theta(\varphi))$ регулярного ультрарозподілу $\Theta(\varphi) \in \mathcal{G}'_+$, де $\varphi \in \mathcal{G}_\beta(\mathbb{R}^d)$, а оператор Θ визначений формулою (4.3.1).

Таким чином, перетворення Лапласа L є звуженням відображення L'. З міркувань дуальності випливає, що справджується топологічний ізоморфізм

$$L\colon \mathcal{G}_+ \ni \varphi \longmapsto \widehat{\varphi} \in E_+, \qquad L := L'\,|_{\mathcal{G}_+},$$

при цьому E_+ — ядерний (DF) простір. Функція $\widehat{\varphi}$ є аналітичною в деякій трубчастій області [88].

Використовуючи тензорну структуру простору $\Gamma(\mathcal{G}'_+) := \times_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{G}'^{\widehat{\otimes}n}_+$ розширимо узагальнене перетворення Лапласа на цей простір наступним чином. Спочатку для довільного елемента $f^{\otimes n} \in \mathcal{G}'^{\widehat{\otimes}n}_+$, де $f \in \mathcal{G}'_+$, з тотальної підмножини визначимо оператор $L'^{\otimes n}$ за правилами

$$L'^{\otimes n} : f^{\otimes n} \longmapsto \widehat{f}^{\otimes n} \quad \text{і} \quad L'^{\otimes 0} := I_{\mathbb{C}}.$$

Потім розширимо його на весь простір $\mathcal{G}'^{\widehat{\otimes}n}_+$ за лінійністю та неперервністю, отримаємо $L'^{\otimes n} \in \mathscr{L}\big(\mathcal{G}'^{\widehat{\otimes}n}_+, E'^{\widehat{\otimes}n}_+\big)$. Остаточно, оператор $L'^{\otimes}$ визначимо як відображення

$$\begin{array}{rccl} L'^{\otimes} = \big(L'^{\otimes n}\big) : & \Gamma(\mathcal{G}'_+) & \longrightarrow & \Gamma(E'_+) := \displaystyle\mathop{\times}_{n\in\mathbb{Z}_+} E'^{\widehat{\otimes}n}_+ \\ & \boldsymbol{u} = \big(u_n\big) & \longmapsto & \widehat{\boldsymbol{u}} := \big(\widehat{u}_n\big), \end{array}$$

де $\widehat{u}_n := L'^{\otimes n}(u_n)$.

Аналогічним способом визначимо оператори $L^{\otimes n} \in \mathscr{L}\big(\mathcal{G}'^{\widehat{\otimes}n}_+, E'^{\widehat{\otimes}n}_+\big)$ та $L^{\otimes} = \big(L^{\otimes n}\big) \in \mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{G}_+), \Gamma(E_+)\big)$. Легко перевірити, що $L^{\otimes}$ та $L'^{\otimes}$ є гомоморфізмами відповідних згорткових алгебр.

Використовуючи теорему 2.2.3 розширимо перетворення $L'^{\otimes}$ на алгебру $\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_+)$ наступним чином.

Комутативні діаграми

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_n(\mathcal{G}_+) \arrow[r, "L'^{\otimes n}_{\mathcal{P}}"] \arrow[d, "\left(\Psi_n^{\mathcal{G}'_+}\right)^{-1}"'] & \mathcal{P}_n(E_+) \\
\mathcal{G}'^{\widehat{\otimes}n}_+ \arrow[r, "L'^{\otimes n}"] & E'^{\widehat{\otimes}n}_+ \arrow[u, "\Psi_n^{E'_+}"']
\end{tikzcd}
\quad \text{та} \quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_+) \arrow[r, "L'^{\otimes}_{\mathcal{P}}"] \arrow[d, "\left(\Psi^{\mathcal{G}'_+}\right)^{-1}"'] & \mathcal{P}'(E'_+) \\
\Gamma(\mathcal{G}'_+) \arrow[r, "L'^{\otimes}"] & \Gamma(E'_+) \arrow[u, "\Psi^{E'_+}"']
\end{tikzcd}$$

(в однорідному та загальному випадках відповідно) однозначно визначають поліноміальне розширення узагальненого перетворення Лапласа

$$L'^{\otimes}_{\mathcal{P}} : \mathcal{P}'(\mathcal{G}'_+) \ni U = \big(U_n\big) \longmapsto \widehat{U} := \big(\widehat{U}_n\big) \in \mathcal{P}'(E'_+),$$

де $U_n \in \mathcal{P}_n(\mathcal{G}_+)$, $\widehat{U}_n := L'^{\otimes n}_{\mathcal{P}}(U_n) \in \mathcal{P}_n(E_+)$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Аналогічно до (2.3.5) та (2.3.6) введемо в просторах $\mathscr{L}(\Gamma(\mathcal{G}'_+), \Gamma(E'_+))$ і $\mathscr{L}(\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_+), \mathcal{P}'(E'_+))$ підалгебри $\mathscr{L}_D(\Gamma(\mathcal{G}'_+), \Gamma(E'_+))$ і $\mathscr{L}_D(\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_+), \mathcal{P}'(E'_+))$ тих операторів, які зберігають однорідність доданків, тобто

$$\mathscr{L}_D(\Gamma(\mathcal{G}'_+), \Gamma(E'_+)) := \begin{pmatrix} \mathscr{L}(\mathbb{C}) & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \mathscr{L}(\mathcal{G}'_+, E'_+) & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathscr{L}(\mathcal{G}'^{\widehat{\otimes}n}_+, E'^{\widehat{\otimes}n}_+) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

і

$$\mathscr{L}_D(\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_+),\mathcal{P}'(E'_+)) := \begin{pmatrix} \mathscr{L}(\mathbb{C}) & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \mathscr{L}(\mathcal{G}'_+,E'_+) & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathscr{L}(\mathcal{P}_n(\mathcal{G}_+),\mathcal{P}_n(E_+)) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Твердження 4.4.4. *Оператори* $L'^{\otimes}$ *та* $L'^{\otimes}_{\mathcal{P}}$ *належать діагональним підалгебрам* $\mathscr{L}_D(\Gamma(\mathcal{G}'_+), \Gamma(E'_+))$ *і* $\mathscr{L}_D(\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_+), \mathcal{P}'(E'_+))$ *відповідно. Більше* *того, ці відображення діють як алгебраїчні ізоморфізми, що зберігають множення.*

Доведення. Правильність твердження слідує із вище записаних означень та тверджень 2.2.2 та 2.2.3. $\square$

З теореми 2.2.3 та тверджень 2.2.2 і 2.2.3 випливає, що звуження

$$L^{\otimes} := L'^{\otimes} \mid_{\Gamma(\mathcal{G}_+)}, \qquad L^{\otimes}_{\mathcal{P}} := L'^{\otimes}_{\mathcal{P}} \mid_{\mathcal{P}(\mathcal{G}'_+)}$$

на щільні підалгебри $\Gamma(\mathcal{G}_+) \subset \Gamma(\mathcal{G}'_+)$ і $\mathcal{P}(\mathcal{G}'_+) \subset \mathcal{P}'(\mathcal{G}'_+)$ відповідно діють як алгебраїчні ізоморфізми

$$\begin{array}{rccc} L^{\otimes}: & \Gamma(\mathcal{G}_+) & \longrightarrow & \Gamma(E_+), \\ & \boldsymbol{q} = \big(q_n\big) & \longmapsto & \widehat{\boldsymbol{q}} := \big(\widehat{q}_n\big), \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} L^{\otimes}_{\mathcal{P}}: & \mathcal{P}(\mathcal{G}'_+) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E'_+), \\ & P = \sum_n P_n & \longmapsto & \widehat{P} = \sum_n \widehat{P}_n, \end{array}$$

де $q_n \in \mathcal{G}_+^{\widehat{\otimes} n}$, $P_n \in \mathcal{P}_n(\mathcal{G}'_+)$, $\widehat{q}_n := L^{\otimes n}(q_n) \in E_+^{\widehat{\otimes} n}$, $\widehat{P}_n := L^{\otimes n}_{\mathcal{P}}(P_n) \in \mathcal{P}_n(E'_+)$, $L^{\otimes n}_{\mathcal{P}} := L'^{\otimes n}_{\mathcal{P}} \mid_{\mathcal{P}_n(\mathcal{G}'_+)}$.

Для кожного $i = 1, \ldots, d$ на просторах $\Gamma(E_+)$ та $\Gamma(E'_+)$ визначимо однопараметричні сім'ї

$$\widehat{\mathbb{T}}_i : 0 \le s_i \longmapsto \widehat{\mathbb{T}}_{s_i} \in \mathscr{L}(\Gamma(E_+)) \qquad \text{та} \qquad \widehat{\mathbb{T}}'_i : 0 \le s_i \longmapsto \widehat{\mathbb{T}}'_{s_i} \in \mathscr{L}(\Gamma(E'_+))$$

операторів, що діють за правилами

$$\begin{array}{rccc} \widehat{\mathbb{T}}_{s_i}: & \Gamma(E_+) & \longrightarrow & \Gamma(E_+) \\ & (1, \widehat{\varphi}, \ldots, \widehat{\varphi}^{\otimes n}, 0, \ldots) & \longmapsto & \Big(1, \widehat{T}_{s_i}\widehat{\varphi}, \ldots, \widehat{T}^{\otimes n}_{s_i}\widehat{\varphi}^{\otimes n}, 0, \ldots\Big), \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \widehat{\mathbb{T}}'_{s_i}: & \Gamma(E'_+) & \longrightarrow & \Gamma(E'_+) \\ & (1, \widehat{f}, \ldots, \widehat{f}^{\otimes n}, \ldots) & \longmapsto & \Big(1, \widehat{T}'_{s_i}\widehat{f}, \ldots, \widehat{T}'^{\otimes n}_{s_i}\widehat{f}^{\otimes n}, \ldots\Big), \end{array}$$

де $\widehat{T}_{s_i} := L \circ T_{s_i} \circ L^{-1}$, $\widehat{T}'_{s_i} := L' \circ T'_{s_i} \circ (L')^{-1}$, T_{s_i}, T'_{s_i} — оператори зсувів, визначені в параграфі 4.3, а оператори $\widehat{T}^{\otimes n}_{s_i}$ і $\widehat{T}'^{\otimes n}_{s_i}$ визначені як тензорні степені відповідних операторів, тобто

$$\widehat{T}^{\otimes n}_{s_i}\widehat{\varphi}^{\otimes n} := (\widehat{T}_{s_i}\widehat{\varphi})^{\otimes n} \qquad \text{і} \qquad \widehat{T}'^{\otimes n}_{s_i}\widehat{f}^{\otimes n} := (\widehat{T}'_{s_i}\widehat{f})^{\otimes n}.$$

Нагадаємо, що у пункті 4.3.1 було визначено оператори диференціювання $\mathbb{D}_i \in \mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{G}_+)\big)$ та $\mathbb{D}'_i \in \mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{G}'_+)\big)$. Користуючись тим, що відображення $L^{\otimes}$ та $L'^{\otimes}$ є ізоморфізмами, визначимо оператори

$$\widehat{\mathbb{D}}_i := L^{\otimes} \circ \mathbb{D}_i \circ (L^{\otimes})^{-1} \in \mathscr{L}\big(\Gamma(E_+)\big) \quad \text{і} \quad \widehat{\mathbb{D}}'_i := L'^{\otimes} \circ \mathbb{D}'_i \circ (L'^{\otimes})^{-1} \in \mathscr{L}\big(\Gamma(E'_+)\big).$$

З теореми 4.3.1 та твердження 4.4.4 відразу слідує наступне твердження.

Наслідок 4.4.2. *(i) Оператори $\widehat{\mathbb{D}}_i$ належать діагональній підалгебрі $\mathscr{L}_D(\Gamma(E_+))$ і є генераторами однопараметричних (C_0) напівгруп алгебраїчних автоморфізмів $\widehat{\mathbb{T}}_i$, $i = 1, \ldots, d$, на згортковій алгебрі $\Gamma(E_+)$.*

(ii) Оператори $\widehat{\mathbb{D}}'_i$ належать діагональній підалгебрі $\mathscr{L}_D(\Gamma(E'_+))$ і є генераторами однопараметричних (C_0) напівгруп алгебраїчних автоморфізмів $\widehat{\mathbb{T}}'_i$, $i = 1, \ldots, d$, на згортковій алгебрі $\Gamma(E'_+)$.

Для довільного елемента $\widehat{\boldsymbol{u}} \in \Gamma(E'_+)$ визначимо лінійний оператор

$$\widehat{K}^{\otimes}_{\widehat{\boldsymbol{u}}} : \Gamma(E_+) \ni \widehat{\boldsymbol{q}} \longmapsto L^{\otimes}(\boldsymbol{u} \star \boldsymbol{q}) \in \Gamma(E_+),$$

де $\boldsymbol{q} = (L^{\otimes})^{-1}\widehat{\boldsymbol{q}} \in \Gamma(\mathcal{G}_+)$, $\boldsymbol{u} = (L'^{\otimes})^{-1}\widehat{\boldsymbol{u}} \in \Gamma(\mathcal{G}'_+)$.

Визначимо d-параметричну сім'ю відображень

$$\widehat{T}^{\otimes} : \mathbb{R}^d_+ \ni s \longmapsto \widehat{T}^{\otimes}_s \in \mathscr{L}\big(\Gamma(E_+)\big),$$

де $\widehat{T}^{\otimes}_s := L^{\otimes} \circ T^{\otimes}_s \circ (L^{\otimes})^{-1}$, а $T^{\otimes}_s$ — оператори поліноміальної напівгрупи зсувів, визначеної формулою (4.3.12).

Наступне твердження є наслідком теореми 4.3.3 та наслідку 4.4.2.

Наслідок 4.4.3. *Відображення*

$$\widehat{\mathsf{K}} : \Gamma(E'_+) \ni \widehat{\boldsymbol{u}} \longmapsto \widehat{K}^{\otimes}_{\widehat{\boldsymbol{u}}} \in \mathscr{L}\big(\Gamma(E_+)\big)$$

здійснює алгебраїчний ізоморфізм зі згорткової алгебри $\Gamma(E'_+)$ на комутант $\big[\widehat{T}^{\otimes}\big]^c$ напівгрупи $\widehat{T}^{\otimes}$ в алгебрі операторів $\mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{G}_+)\big)$.

Зауважимо, що комутативна діаграма

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(\mathcal{G}'_+) \arrow[r, "\mathsf{K}"] \arrow[d, "L'^{\otimes}"'] & \left[T^{\otimes}\right]^c \arrow[d] \\
\Gamma(E'_+) \arrow[r, "\widehat{\mathsf{K}}"] & \left[\widehat{T}^{\otimes}\right]^c
\end{tikzcd}$$

визначає алгебраїчний ізоморфізм відповідних комутантів, де K та $\widehat{\mathsf{K}}$ — відображення з теореми 4.3.3 та наслідку 4.4.3 відповідно.

Висновки до розділу 4

У четвертому розділі розглянуто випадок, коли абстрактний ядерний простір $\mathcal{X}$ замінено на один з просторів ультрадиференційовних функцій. В основному ми використовуємо простір $\mathcal{G}_+$ функцій з класу Жевре, що мають компактні носії, зосереджені у додатному конусі $\mathbb{R}^d_+$. При цьому, на відміну від розділу 3, тут ми розглядаємо клас основних функцій багатьох змінних.

У пункті 4.1.2 розглянуто так звані ω-ультрарозподіли та відповідний клас основних функцій і показано, що такі класи функцій теж можуть бути основою для побудови поліноміальних узагальнень класичних просторів.

Параграф 4.2 присвячений доведенню структурних теорем для операторів, що діють в просторах лінійних ультрадиференційовних функцій і які комутують з багатопараметричними напівгрупами.

Використовуючи поняття крос-кореляції, у теоремі 4.2.1 доведено, що згорткову алгебру $\mathcal{G}'_+$ ультрарозподілів Рум'є можна ізоморфно представити як комутант напівгрупи зсувів. У теоремі 4.2.2 доведено векторнозначний варіант цього результату.

У пункті 4.2.2 розглянуто загальніший випадок довільної напівгрупи стиску. При цьому доведено теорему 4.2.3, де показано, що згорткова алгебра $\mathcal{G}'_+$ має ізоморфне представлення у вигляді комутанта напівгрупи

$\widehat{T}$ (див. формулу (4.2.10)) над простором E-значних функцій, аргументами яких є оператори. Цю теорему можна розуміти як обґрунтування існування узагальненого функціонального числення типу Хілле-Філліпса у класі Фур'є образів векторнозначних ультрадиференційовних функцій. Узагальнення якраз полягає в тому, що тут розглядаються не звичайні функції, а відображення, що задані на множині генераторів багатопараметричних напівгруп стиску.

У параграфі 4.3 побудовано поліноміальні основні ультрадиференційовні функції і поліноміальні ультрарозподіли та вивчено їх властивості. Зокрема, показано, що оператори диференціювання на поліноміальних просторах генерують поліноміальні сильно неперервні багатопараметричні напівгрупи зсувів (теорема 4.3.1 та наслідок 4.3.1). Крім того, у теоремі 4.3.2 та наслідку 4.3.2 описано властивості поліноміальних операторів диференціювання.

Для поліноміального узагальнення крос-кореляції доведено її диференціальні властивості (твердження 4.3.3 та наслідок 4.3.4) та структурну теорему 4.3.3 про представлення алгебри "коефіцієнтів" $\left\{\Gamma(\mathcal{G}'_+), \circledast\right\}$ у вигляді комутанта поліноміальної напівгрупи зсувів.

У параграфі 4.4 поряд із класом $\mathcal{G}_+$ ультрадиференційовних функцій з компактними в $\mathbb{R}^d_+$ носіями, розглянуто ширший клас $\mathcal{G}_\beta$ ультрадиференційовних функцій, заданих на всьому просторі $\mathbb{R}^d$. Тут розглянуто перетворення Фур'є-Лапласа та Лапласа спочатку на просторах ультрадиференційовних функцій, а потім розширено ці відображення на відповідні простори поліноміальних ультрарозподілів. Зауважимо, що для випадку перетворення Фур'є-Лапласа повністю описано образ основного простору у вигляді певного класу цілих функцій експоненціального типу (див. наслідок 4.4.1 та теорему 4.4.1), а також доведено теореми 4.4.2, 4.4.3 типу Пелі-Вінера для поліноміальних ультрадиференційовних основних та узагальнених функцій.

За допомогою поліноміального узагальнення перетворення Лапласа у пункті 4.4.3 показано метод “перенесення” операцій з просторів $\Gamma(\mathcal{G}'_+)$ та $\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_+)$ на відповідні образи $\Gamma(E'_+)$ та $\mathcal{P}'(E'_+)$. Зокрема, це зроблено для операторів диференціювання, напівгруп зсувів та операції крос-кореляції (наслідки 4.4.2, 4.4.3).

Результати розділу 4 опубліковані в роботах [20,160,202] та анонсовано в [23, 197, 200, 203]. Для їх доведення використано ідеї та методи з робіт [22, 35, 49, 159].

Розділ 5

Функціональне числення для скінченних та зліченних наборів операторів

5.1 Функціональне числення типу Хілле-Філліпса для генераторів багатопараметричних напівгруп операторів

Функціональне числення Хілле-Філліпса, що побудоване в [38], надає змісту символу $f(A)$ у випадку, коли A — генератор (C_0) напівгрупи $\mathbb{R}_+ \ni t \longmapsto T(t) \in \mathscr{L}(E)$ в деякому банаховому просторі E, а f належить алгебрі $\mathcal{A}_\omega$ комплекснозначних аналітичних функцій вигляду $f(z) = \displaystyle\int_0^\infty e^{tz}\, \mu(dt)$, $\operatorname{Re} z \leq \omega$, де μ належить згортковій алгебрі мір на $[0, \infty)$. При цьому функціональне числення розглядається як відображення $\Phi_A \colon f \longmapsto f(A)$, де $f(A)x = \int_0^\infty T(t)x\, \mu(dt)$, $x \in E$, що здійснює алгебраїчний ізоморфізм з алгебри символів $\mathcal{A}_\omega$ в алгебру $\mathscr{L}(E)$ лінійних неперервних операторів.

Е. Нельсон [173] та А. Балакрішнан [67] розширили таке числення на ширші класи аналітичних функцій. А.Р. Міротін в роботах [25, 26] побудував функціональне числення для функцій Бернштейна і дослідив його властивості. Застосування числення Хілле-Філліпса в гідрології, зокрема, в моделюванні руху приповерхневих вод розглянуто в [66].

У цьому параграфі описано побудову аналогу функціонального числення Хілле-Філліпса для генераторів $A=(A_1,\dots,A_d)$ d-параметричних рівномірно обмежених (C_0) напівгруп $e^{tA}=e^{t_1A_1+\dots+t_dA_d}$, що діють в деякому банаховому просторі E. Замість алгебри мір на $[0,\infty)$, яка розглянута в класичному численні, ми використовуємо згорткову алгебру Шварца $\mathcal{S}'_+ := \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d_+)$ узагальнених функцій повільного росту, носії яких розміщені в додатному конусі $\mathbb{R}^d_+$. В цьому випадку алгебра символів числення типу Хілле-Філліпса складається з аналітичних в трубчастій комплексній області $\mathbb{C}^d_+ = \left\{z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}^d \colon x \in \operatorname{int}\mathbb{R}^d_+\right\}$ функцій $\widehat{f}$, що є перетвореннями Лапласа розподілів з $\mathcal{S}'_+$. Функціональне числення $\Phi_A\colon \widehat{f} \longmapsto \widehat{f}(A)$ (див. теорему 5.1.4) ми визначаємо за формулами

$$\widehat{f}(A)\widehat{x}_A = \int_{\mathbb{R}^d_+} e^{tA}(f\star x)(t)\,dt, \qquad \widetilde{x} = \int_{\mathbb{R}^d_+} e^{tA}x(t)\,dt,$$

де $f\star x$ позначає узагальнення крос-кореляції (див. формулу (5.1.2)) розподілу $f\in\mathcal{S}'_+$ і E-значної функції x, носій $\operatorname{supp} x$ якої лежить в додатному конусі $\mathbb{R}^d_+$. Простір $\widetilde{\mathcal{S}}$ всіх елементів $\widetilde{x}$ щільний в E (лема 5.1.2). На відміну від класичного випадку оператор $\widehat{f}(A)$ необмежений на E та має щільну область визначення $\widetilde{\mathcal{S}}$. Крім того, справджується рівність

$$\widehat{\partial^k f}(A)\widetilde{x} = (-1)^{|k|}\widehat{f}(A)\widehat{\partial^k x}_A, \qquad k\in\mathbb{Z}^d_+,$$

причому для знаходження виразу з правої сторони останньої рівності можна скористатися теоремою 5.1.5.

Отримані результати проілюстровано на прикладах, зокрема, розглянуто випадок d-параметричної напівгрупи Ґаусса.

Аналогічні результати для іншого класу символів опубліковані у статті [37].

5.1.1 Теорема типу Сілі

Для довільних $t, s \in \mathbb{C}^d$ (або $t, s \in \mathbb{R}^d$) та мультиіндексів $m, k \in \mathbb{Z}_+^d$ ми використовуватимемо такі позначення: $ts := t_1 s_1 + \ldots + t_d s_d$, $|t| := \sqrt{t\bar{t}}$, $|k| := k_1 + \cdots + k_d$, $m! := m_1! \ldots m_d!$, $t^m = t_1^{m_1} \ldots t_d^{m_d}$ і $\partial^k := \partial_1^{k_1} \cdots \partial_d^{k_d}$, де $\partial_j^{k_j} := \frac{\partial^{k_j}}{\partial t_j^{k_j}}$, $j = 1, \ldots, d$. Для довільних мультиіндексів $m, k \in \mathbb{Z}_+^d$ запис $m \preccurlyeq k$ означає $m_j \leq k_j$ для всіх $j = 1, \ldots, d$. Стандартний ортонормований базис в $\mathbb{R}^d$ позначатимемо $e_1, \ldots, e_d$.

Нехай $\{e^{tA}\}_{t \in \mathbb{R}_+^d}$ — довільна d-параметрична сильно неперервна напівгрупа з генератором $A = (A_1, \ldots, A_d)$ (див. пункт 1.2.3). Оператори напівгрупи ми розуміємо як композиції $e^{tA} := e^{t_1 A_1} \circ \ldots \circ e^{t_d A_d}$, де $\{e^{t_j A_j}\}_{t_j \in \mathbb{R}_+}$, $j = 1, \ldots, d$, позначає відповідну однопараметричну марґінальну напівгрупу.

Нехай $\mathcal{S}^{\alpha,\beta}$ позначає банаховий простір функцій на $\mathbb{R}^d$ зі скінченною нормою

$$\|\varphi\|_{\mathcal{S}^{\alpha,\beta}} := \max_{m \preccurlyeq \alpha;\, k \preccurlyeq \beta} \sup_{t \in \mathbb{R}^d} \left| t^m \partial^k \varphi(t) \right|, \qquad \alpha, \beta, m, k \in \mathbb{Z}_+^d.$$

Кожне вкладення $\mathcal{S}^{\alpha,\beta} \looparrowright \mathcal{S}^{\eta,\gamma}$ при $\eta \preccurlyeq \alpha$ і $\gamma \preccurlyeq \beta$ цілком неперервне (див. [7, 13]). Тому простір Шварца $\mathcal{S} := \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \bigcap_{\alpha,\beta \in \mathbb{Z}_+^d} \mathcal{S}^{\alpha,\beta}$ нескінченно диференційовних швидко спадних функцій на $\mathbb{R}^d$ можна наділити топологією проективної границі $\lim\limits_{\alpha,\beta} \operatorname{pr} \mathcal{S}^{\alpha,\beta}$ відносно цих вкладень. Як наслідок, $\mathcal{S}$ — монтелевий ядерний (FS) простір [13, 146], а його сильно спряжений простір $\mathcal{S}' := \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ розподілів Шварца повільного росту є монтелевим ядерним (DFS) простором.

Нехай $\mathcal{S}'_+$ — замкнутий підпростір в $\mathcal{S}'$ тих розподілів, носії яких містяться в $\mathbb{R}_+^d$. Відомо, що $\mathcal{S}'_+$ — алгебра відносно згортки розподілів, яку визначають за формулою $\langle\, f * g, \varphi \,\rangle = \langle\, f(s), \langle\, g(p), \varphi(p+s) \,\rangle \,\rangle$, $\varphi \in \mathcal{S}$ [7]. Одиничним елементом цієї алгебри є функціонал Дірака δ.

Визначимо простір $\mathcal{S}_+^{\alpha,\beta} = \{\psi|_{\mathbb{R}_+^d} : \psi \in \mathcal{S}^{\alpha,\beta}\}$, і наділимо його нормою

$$\|\varphi\|_{\mathcal{S}_+^{\alpha,\beta}} := \max_{m\preccurlyeq\alpha;\, k\preccurlyeq\beta} \sup_{t\in\mathbb{R}_+^d} \left|t^m\partial^k\varphi(t)\right|, \qquad \alpha,\beta,m,k\in\mathbb{Z}_+^d.$$

Тут $\psi|_{\mathbb{R}_+^d}$ позначає звуження функції ψ на конус $\mathbb{R}_+^d$. Зауважимо, що всі похідні $\partial^k\varphi(t)$ в точках границі конуса $\mathbb{R}_+^d$ ми розуміємо як односторонні, причому всі вони можуть бути неперервно продовжені на весь простір $\mathbb{R}^d$ зі збереженням властивості швидкого спадання (див. наступну теорему). Позначимо $\mathcal{S}_+ := \bigcap\{\mathcal{S}_+^{\alpha,\beta} : \alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+^d\}$ і наділимо цей простір топологією проективної границі $\lim\limits_{\alpha,\beta}\operatorname{pr}\mathcal{S}_+^{\alpha,\beta}$ відносно компактних вкладень $\mathcal{S}_+^{\alpha,\beta} \looparrowright \mathcal{S}_+^{\eta,\gamma}$ при $\eta\preccurlyeq\alpha$ і $\gamma\preccurlyeq\beta$.

Теорема 5.1.1. *Існує лінійний неперервний оператор розширення*

$$\Lambda\colon \mathcal{S}_+ \ni \varphi \longmapsto \Lambda\varphi \in \mathcal{S}$$

такий, що $\Lambda\varphi(t) = \varphi(t)$ *для всіх* $t\in\mathbb{R}_+^d$.

Доведення. Для довільної функції $\varphi\in\mathcal{S}_+$, зафіксувавши перших $d-1$ змінних, визначимо функцію $\varphi_d : [0,+\infty) \ni t_d \longmapsto \varphi(t_1,\dots,t_d)$ змінної t_d. В теоремі 3.1.1 показано, що знайдуться нескінченно гладка функція $\mathbb{R}\ni\tau\longmapsto\chi(\tau)$ та послідовність дійсних чисел $\{a_r\}$ такі, що образ $\operatorname{Im}\Lambda_d$ лінійного оператора

$$\Lambda_d\colon \varphi_d(t_d) \longmapsto \begin{cases} \varphi_d(t_d), & t_d\in[0,+\infty),\\ \sum_{r\in\mathbb{Z}_+} a_r\chi(-2^r t_d)\varphi_d(-2^r t_d), & t_d\in(-\infty,0)\end{cases}$$

складається з нескінченно диференційовних швидко спадних на $\mathbb{R}$ функцій. При цьому існує така константа $M_{\beta_d}>0$, що

$$\max_{m_d\le\alpha_d;\, k_d\le\beta_d}\sup_{t_d\in\mathbb{R}}\left|t_d^{m_d}\partial_d^{k_d}\Lambda_d\varphi_d(t_d)\right| \le M_{\beta_d}\max_{m_d\le\alpha_d;\, k_d\le\beta_d}\sup_{t_d\in[0,\infty)}\left|t_d^{m_d}\partial_d^{k_d}\varphi_d(t_d)\right|,$$

де константа M_{β_d} залежить від $\{a_r\}$ та χ, але не залежить від фіксованих змінних.

Для тих самих $\{a_r\}$ і χ ми можемо рекурсивно визначити подібним чином оператори $\Lambda_{d-1},\dots,\Lambda_1$ відносно змінних $t_{d-1},\dots,t_1$, причому кожен оператор Λ_j визначений на образі $\operatorname{Im}\Lambda_{j+1}$ попередньо розглянутого оператора. Отримаємо

$$\Lambda_j\circ\ldots\circ\Lambda_d\colon \mathcal{S}_+\ni\varphi\longmapsto\left\{\begin{array}{r}\varphi_j(t_j):\ t_j\in[0,\infty),\\ \sum_{r\in\mathbb{Z}_+}a_r\chi(-2^rt_j)\varphi_j(-2^rt_j):\ t_j\in(-\infty,0),\end{array}\right.$$

де $\varphi_j\colon[0,\infty)\ni t_j\longmapsto(\Lambda_{j+1}\circ\ldots\circ\Lambda_d)\varphi(t_1,\dots,t_j,\dots,t_d)$, $j=d-1,\dots,2,1$, — функція змінної t_j з фіксованими іншими змінними. Аналогічно, існує така незалежна від фіксованих змінних константа M_{β_j}, що

$$\max_{m_j\le\alpha_j;\,k_j\le\beta_j}\sup_{t_j\in\mathbb{R}}\left|t_j^{m_j}\partial_j^{k_j}\Lambda_j\varphi_j(t_j)\right|\le M_{\beta_j}\max_{m_j\le\alpha_j;\,k_j\le\beta_j}\sup_{t_j\in[0,\infty)}\left|t_j^{m_j}\partial_j^{k_j}\varphi_j(t_j)\right|.$$

При цьому функція $(\Lambda_j\circ\ldots\circ\Lambda_d)\varphi$ змінних $(t_j,\dots,t_d)\in\mathbb{R}^{d-j+1}$ є нескінченно диференційовною для всіх $j=1,\dots,d-1$.

Підставляючи $t_{j+1}^{m_{j+1}}\ldots t_d^{m_d}\partial_{j+1}^{k_{j+1}}\ldots\partial_d^{k_d}\varphi_j$ замість φ_j і використовуючи почергово по $j=d,\dots,1$ попередні нерівності отримаємо

$$\max_{m\preccurlyeq\alpha;\,k\preccurlyeq\beta}\sup_{t\in\mathbb{R}^d}|t^m\partial^k\Lambda\varphi(t)|\le C_{\beta_1}\ldots C_{\beta_d}\max_{m\preccurlyeq\alpha;\,k\preccurlyeq\beta}\sup_{t\in\mathbb{R}_+^d}|t^m\partial^k\varphi(t)|,\quad\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+^d,$$

де $\Lambda:=\Lambda_1\circ\ldots\circ\Lambda_d$. Таким чином, оператор розширення Λ — лінійне неперервне відображення з $\mathcal{S}_+$ в $\mathcal{S}$. □

Використовуючи теорему 5.1.1, визначимо дію узагальненої функції $f\in\mathcal{S}_+'$ на основну $\varphi\in\mathcal{S}_+$ за правилом $\langle f,\varphi\rangle=\langle f,\Lambda\varphi\rangle$. Це означення є коректним, оскільки оператор Λ змінює основну функцію поза межами носія узагальненої.

Нехай $(E,\|\cdot\|)$ — комплексний банаховий простір, а $E\otimes_{\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+$ — тензорний добуток просторів. Нагадаємо, що символ $\otimes_{\mathfrak{p}}$ позначає поповнення алгебраїчного тензорного добутку $\otimes$ в проективній тензорній топології (див. [54]). Наступна лема показує структуру елементів цього простору, яка нами буде використана в доведеннях теорем.

Лема 5.1.1. *Кожен елемент* $x \in E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{S}_+$ *можна представити (взагалі кажучи, не єдиним чином) у вигляді суми абсолютно збіжного ряду*

$$x = \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j x_j \otimes \varphi_j, \qquad \lambda_j \in \mathbb{C}, \quad x_j \in E, \quad \varphi_j \in \mathcal{S}_+, \tag{5.1.1}$$

де $\sum_j |\lambda_j| < \infty$, *а послідовності* $\{x_j\}$ *і* $\{\varphi_j\}$ *збігаються до нуля у відповідних просторах.*

Доведення. Виберемо в $\mathcal{S}_+$ базу замкнутих абсолютно опуклих обмежених множин B_γ таких, що $\mathcal{S}_+ = \bigcup_\gamma \mathfrak{B}_\gamma$, де $\mathfrak{B}_\gamma = \mathbb{C} \cdot B_\gamma$ — підпростір з нормою $\|x\|_\gamma = \inf\{|\lambda| \colon x \in \lambda B_\gamma\}$. З повноти $\mathcal{S}_+$ і замкнутості B_γ слідує, що $\mathfrak{B}_\gamma$ — банахові простори. З обмеженості B_γ випливає, що кожне вкладення $\mathfrak{B}_\gamma \looparrowright \mathcal{S}_+$ неперервне. Таким чином, поповнений проективний тензорний добуток банахових просторів $E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathfrak{B}_\gamma$ неперервно вкладений в $E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{S}_+$. З теореми 1.2.2 (див. також [54, III.6.4]) про представлення елементів проективного тензорного добутку банахових просторів випливає, що кожен елемент $x \in E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathfrak{B}_\gamma$ можна представити у вигляді (5.1.1). З неперервності вкладення $E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathfrak{B}_\gamma \looparrowright E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{S}_+$ слідує абсолютна збіжність ряду (5.1.1) в $E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{S}_+$. ☐

5.1.2 Крос-кореляція та напівгрупи зсувів

Для довільного $s \in \mathbb{R}^d_+$ розглянемо оператор зсуву T_s, який визначений на просторі $\mathcal{S}_+$ формулою $T_s : \varphi(t) \longmapsto \varphi(t+s)|_{\mathbb{R}^d_+}$ для всіх $\varphi \in \mathcal{S}_+$. Легко показати, що $T = \{T_s \colon s \in \mathbb{R}^d_+\}$ — d-параметрична (C_0) напівгрупа. Крос-кореляцією розподілу $f \in \mathcal{S}'_+$ і функції $\varphi \in \mathcal{S}_+$ назвемо функцію вигляду

$$(f \star \varphi)(t) := \langle f(s), T_s\varphi(t)\rangle = \langle f(s), \varphi(t+s)\rangle, \qquad t \in \mathbb{R}^d_+.$$

Кожному розподілу f поставимо у відповідність оператор крос-кореляції $K_f \colon \varphi \longmapsto f \star \varphi$. В теоремі 5.1.2 буде показано, що $K_f \in \mathscr{L}(\mathcal{S}_+)$.

Нехай $\mathcal{S}^{\alpha,\beta}(E)$ — простір нескінченно диференційовних векторнозначних функцій $x:\mathbb{R}^d\ni t\longmapsto x(t)\in E$ зі скінченною нормою

$$\|x\|_{\mathcal{S}^{\alpha,\beta}(E)}:=\max_{m\preccurlyeq\alpha;\,k\preccurlyeq\beta}\sup_{t\in\mathbb{R}^d}\left\|t^m\partial^k x(t)\right\|,\qquad \alpha,\beta,m,k\in\mathbb{Z}_+^d.$$

Простір $\mathcal{S}(E):=\bigcap_{\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+^d}\mathcal{S}^{\alpha,\beta}(E)$ нескінченно диференційовних векторнозначних швидко спадних функцій на $\mathbb{R}^d$ наділимо топологією проективної границі $\lim\limits_{\alpha,\beta}\operatorname{pr}\mathcal{S}^{\alpha,\beta}(E)$ відносно компактних вкладень $\mathcal{S}^{\alpha,\beta}(E)\looparrowright\mathcal{S}^{\eta,\gamma}(E)$ при $\eta\preccurlyeq\alpha$ і $\gamma\preccurlyeq\beta$.

Відомо [187], що простори $\mathcal{S}(E)$ та $E\otimes_{\mathfrak{e}}\mathcal{S}$ топологічно ізоморфні, де символ $\otimes_{\mathfrak{e}}$ позначає поповнення тензорного добутку в ін'єктивній тензорній локально опуклій топології. З ядерності $\mathcal{S}$ випливають топологічні ізоморфізми $\mathcal{S}(E)\simeq E\otimes_{\mathfrak{e}}\mathcal{S}\simeq E\otimes_{\mathfrak{p}}\mathcal{S}$.

Визначимо простір $\mathcal{S}_+^{\alpha,\beta}(E)=\left\{x|_{\mathbb{R}_+^d}:x\in\mathcal{S}^{\alpha,\beta}(E)\right\}$ і наділимо його нормою

$$\|x\|_{\mathcal{S}_+^{\alpha,\beta}(E)}:=\max_{m\preccurlyeq\alpha;\,k\preccurlyeq\beta}\sup_{t\in\mathbb{R}_+^d}\left\|t^m\partial^k x(t)\right\|,\qquad \alpha,\beta,m,k\in\mathbb{Z}_+^d.$$

Зауважимо, що всі похідні $\partial^k x(t)$ в точках границі конуса $\mathbb{R}_+^d$ ми розуміємо як односторонні. Простір $\mathcal{S}_+(E)=\bigcap\left\{\mathcal{S}_+^{\alpha,\beta}(E):\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+^d\right\}$ наділимо топологією проективної границі $\lim\limits_{\alpha,\beta}\operatorname{pr}\mathcal{S}_+^{\alpha,\beta}(E)$ відносно компактних вкладень $\mathcal{S}_+^{\alpha,\beta}(E)\looparrowright\mathcal{S}_+^{\eta,\gamma}(E)$ при $\eta\preccurlyeq\alpha$ і $\gamma\preccurlyeq\beta$. Очевидно, що $\mathcal{S}_+(E)$ є замкнутим підпростором в $\mathcal{S}(E)$.

Оскільки замкнуті підпростори ядерних просторів теж ядерні, то $\mathcal{S}_+(E)\simeq E\otimes_{\mathfrak{e}}\mathcal{S}_+\simeq E\otimes_{\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+$. Тому кожен елемент $x\in\mathcal{S}_+(E)\simeq E\otimes_{\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+$ можна представити як абсолютно збіжний ряд $x=\sum_{j\in\mathbb{N}}\lambda_j x_j\otimes\varphi_j$ вигляду (5.1.1), де $\varphi_j\in\mathcal{S}_+$. Як наслідок, для довільного розподілу $f\in\mathcal{S}'_+$ та векторнозначної функції $x\in\mathcal{S}_+(E)$ ми можемо однозначно визначити оператор $\mathcal{S}_+(E)\ni x\longmapsto\langle f,\,x\rangle\in E$ наступним чином

$$\langle f,\,x\rangle=\sum_{j\in\mathbb{N}}\lambda_j\langle f,\varphi_j\rangle x_j.$$

Нехай I — одиничний оператор в банаховому просторі E. Зауважимо, що для спрощення позначень у цьому параграфі писатимемо I замість I_E, як це було раніше.

В силу леми 5.1.1 для $K \in \mathscr{L}(\mathcal{S}_+)$ рівність $(I \otimes K)x := \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j x_j \otimes K\varphi_j$, де елемент $x \in \mathcal{S}_+(E)$ представлений вигляді (5.1.1), однозначно визначає оператор $I \otimes K \in \mathscr{L}(\mathcal{S}_+(E))$. Таким чином, коректно визначеними є наступні оператори

$$(I \otimes T_s)x := \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j x_j \otimes T_s\varphi_j \qquad \text{та} \qquad (I \otimes K_f)x := \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j x_j \otimes K_f\varphi_j,$$

де $s \in \mathbb{R}^d_+$, $x \in \mathcal{S}_+(E)$ і $f \in \mathcal{S}'_+$. Простір $\mathcal{S}_+(E)$ інваріантний відносно дії цих операторів.

Узагальненою крос-кореляцією розподілу $f \in \mathcal{S}'_+$ і елемента $x \in \mathcal{S}_+(E)$ назвемо векторнозначну функцію з простору $\mathcal{S}_+(E)$ вигляду

$$(f \star x)(t) := \langle f(s), (I \otimes T_s)x(t)\rangle = \langle f(s), x(t+s)\rangle, \qquad s \in \mathbb{R}^d_+. \tag{5.1.2}$$

Відповідний оператор узагальненої крос-кореляції має вигляд

$$I \otimes K_f \colon \mathcal{S}_+(E) \ni x \longmapsto (I \otimes K_f)x =: f \star x \in \mathcal{S}_+(E).$$

Теорема 5.1.2. *Відображення $\mathcal{K} : \mathcal{S}'_+ \ni f \longmapsto K_f \in \mathscr{L}(\mathcal{S}_+)$ здійснює ізоморфізм зі згорткової алгебри $\mathcal{S}'_+$ на комутант $[T]^c \subset \mathscr{L}(\mathcal{S}_+)$ напівгрупи зсувів T, при цьому K_δ — одиничний оператор і*

$$K_{f*g} = K_f \circ K_g, \qquad \forall\, f, g \in \mathcal{S}'_+. \tag{5.1.3}$$

Доведення. З неперервності $f \in \mathcal{S}'_+$ і означення узагальненої похідної слідують рівності $\partial^k(f \star \varphi) = f \star \partial^k\varphi = (-1)^{|k|}(\partial^k f \star \varphi)$ для довільних $\varphi \in \mathcal{S}_+$ та $k \in \mathbb{Z}^d_+$. Тому $f \star \varphi$ — нескінченно диференційовна функція. Звідси отримуємо

$$\partial^k(f \star x) = f \star \partial^k x = (-1)^{|k|}(\partial^k f \star x), \qquad x \in \mathcal{S}_+(E), \quad k \in \mathbb{Z}^d_+. \tag{5.1.4}$$

Напівгрупа T неперервна на $\mathcal{S}_+$, оскільки

$$\|T_s\varphi\|_{\mathcal{S}_+^{\alpha,\beta}} = \max_{m\preccurlyeq\alpha;\, k\preccurlyeq\beta} \sup_{t\in\mathbb{R}_+^d} \left|t^m\partial^k(T_s\varphi)(t)\right| \le \max_{m\preccurlyeq\alpha;\, k\preccurlyeq\beta} \sup_{t\in\mathbb{R}_+^d} \left|t^m\partial^k\varphi(t)\right| = \|\varphi\|_{\mathcal{S}_+^{\alpha,\beta}}$$

для довільних $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+^d$, $s\in\mathbb{R}_+^d$ і $\varphi\in\mathcal{S}_+$. З неперервності функціоналу f випливає, що для довільних $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+^d$ існує така константа $C>0$, що $\|K_f\varphi\|_{\mathcal{S}_+^{\alpha,\beta}}\le C\|\varphi\|_{\mathcal{S}_+^{\alpha,\beta}}$.

Доведемо, що носій функції $f\star\varphi$ знаходиться в $\mathbb{R}_+^d$. Зауважимо, що

$$f\star\varphi\not\equiv 0 \Leftrightarrow \exists\, s : \operatorname{supp} f\cap\operatorname{supp}\varphi(\cdot+s)\ne\varnothing \Leftrightarrow \exists\, t\in\operatorname{supp} f\cap\operatorname{supp}\varphi(\cdot+s).$$

Оскільки $t\in\operatorname{supp}\varphi(\cdot+s)$ $\Leftrightarrow$ $t+s\in\operatorname{supp}\varphi$ $\Leftrightarrow$ $s\in\operatorname{supp}\varphi-t$ і $t\in\operatorname{supp} f$, то використовуючи те, що за означенням $s\in\mathbb{R}_+^d$, отримаємо $s\in(\operatorname{supp}\varphi-\operatorname{supp} f)\cap\mathbb{R}_+^d$. Звідси

$$\operatorname{supp}(f\star\varphi)\subset(\operatorname{supp}\varphi-\operatorname{supp} f)\cap\mathbb{R}_+^d\subset\mathbb{R}_+^d.$$

Таким чином, для довільного $f\in\mathcal{S}'_+$ маємо $K_f\in\mathscr{L}(\mathcal{S}_+)$.

Для довільної функції $\varphi\in\mathcal{S}_+$ і довільних $s,r\in\mathbb{R}_+^d$ справджуються рівності

$$(K_fT_s)\varphi=\langle f(r),(T_rT_s)\varphi(t)\rangle=T_s\langle f(r),T_r\varphi(t)\rangle=(T_sK_f)\varphi. \tag{5.1.5}$$

Звідси для всіх $f\in\mathcal{S}'_+$ маємо $K_f\in[T]^c$.

Нехай $K\in\mathscr{L}(\mathcal{S}_+)$ — довільний оператор з комутативною властивістю $K\circ T_s=T_s\circ K$ для всіх $s\in\mathbb{R}_+^d$. Функціонал $f\colon\varphi\longmapsto(K\varphi)(0)$ належить простору $\mathcal{S}'_+$. Легко бачити, що $(K\varphi)(0)=\langle f,\varphi\rangle=(f\star\varphi)(0)$, тобто $(K\varphi)(0)=(K_f\varphi)(0)$. Підставимо в останню рівність $T_s\varphi$ замість φ і використаємо комутативну властивість. В результаті отримаємо, що образ відображення $\mathcal{K}$ співпадає з комутантом $[T]^c$.

Оскільки $\mathcal{S}_+$ — монтелевий простір [54, IV.5], то на просторі $\mathscr{L}(\mathcal{S}_+)$ топології рівномірної збіжності на компактах і на обмежених множинах співпадають. Відображення $\mathcal{S}'_+\times\mathcal{S}_+\ni(f,\varphi)\longmapsto(K_f\varphi)\in\mathcal{S}_+$ нарізно неперервне. З теореми Банаха-Штейнгауза і бочковості просторів $\mathcal{S}'_+$ та $\mathcal{S}_+$ [54, II.7] випливає, що це відображення одностайно неперервне. Як наслідок, $\mathcal{K}$ — неперервне відображення, яке має замкнутий образ $[T]^c$.

З іншого боку, з ядерності простору $\mathcal{S}_+$ слідує топологічний ізоморфізм $\mathscr{L}(\mathcal{S}_+) \simeq \mathcal{S}_+ \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{S}'_+$. Оскільки $\mathcal{S}'_+$ — ядерний (DFS) простір як замкнутий підпростір ядерного (DFS) простору $\mathcal{S}'$ [146], то в $\mathcal{S}'_+$ існує зліченна база замкнутих абсолютно опуклих обмежених множин B'_γ таких, що $\mathcal{S}'_+ = \bigcup_{\gamma\in\mathbb{N}} \mathfrak{B}'_\gamma$, де $\mathfrak{B}'_\gamma := \mathbb{C} \cdot B'_\gamma$ — простір з нормою $\|x\|_\gamma = \inf\left\{|\lambda| \colon x \in \lambda B'_\gamma\right\}$. З повноти $\mathcal{S}'_+$ і замкнутості B'_γ випливає, що $\mathfrak{B}'_\gamma$ — банахові простори. З обмеженості B'_γ слідує, що вкладення $\mathfrak{B}'_\gamma \hookrightarrow \mathcal{S}'_+$ неперервні. Значить, з теореми 1.2.1 про відкрите відображення для ультраборнологічних просторів (див. також [33]) випливає ізоморфізм $\lim\limits_{\gamma\to\infty}\operatorname{ind} \mathfrak{B}'_\gamma \simeq \mathcal{S}'_+$ для відповідної індуктивної границі просторів. Нехай $\mathfrak{B}_\gamma \subset \mathcal{S}_+$ — банахові простори з доведення леми 5.1.1. Аналогічно можна довести ізоморфізм $\lim\limits_{\gamma\to\infty}\operatorname{ind} \mathfrak{B}_\gamma \simeq \mathcal{S}_+$. Значить $\mathcal{S}_+ \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{S}'_+ \simeq \lim\limits_{\gamma\to\infty}\operatorname{ind} \mathfrak{B}_\gamma \otimes_{\mathfrak{p}} \mathfrak{B}'_\gamma$, тобто $\mathscr{L}(\mathcal{S}_+)$ — ультраборнологічний простір. З вище згаданої теореми про відкрите відображення слідує, що $\mathcal{K}$ — топологічний ізоморфізм з $\mathcal{S}'_+$ на $[T]^c$.

Перевіримо властивість (5.1.3). Для довільних $f, g \in \mathcal{S}'_+$, $\varphi \in \mathcal{S}_+$ маємо

$$\begin{aligned}(K_f K_g)\varphi(t) &= \langle f(q), T_q \langle g(p), T_p \varphi(t)\rangle\rangle = \langle f(q), \langle g(p), \varphi(t+p+q)\rangle\rangle \\ &= \langle f(q), \langle g(p), \varphi(t+(p+q))\rangle\rangle = \langle (f*g)(s), \varphi(t+s)\rangle = (K_{f*g}\varphi)(t).\end{aligned}$$

Зокрема, $K_f \circ K_\delta = K_{f*\delta} = K_f = K_{\delta * f} = K_\delta \circ K_f$ для всіх $f \in \mathcal{S}'_+$, значить, K_δ — одиничний оператор в $\mathscr{L}(\mathcal{S}_+)$. Таким чином, $\mathcal{K}$ — ізоморфізм алгебр. □

Розглянемо сильно неперервну напівгрупу узагальнених зсувів $I \otimes T = \left\{I \otimes T_s \colon s \in \mathbb{R}^d_+\right\}$, визначену на просторі $\mathcal{S}_+(E)$.

Кажуть, що оператор $I \otimes K$, де $K \in \mathscr{L}(\mathcal{S}_+)$, є інваріантним відносно напівгрупи узагальнених зсувів $I \otimes T$, якщо

$$I \otimes (K \circ T_s) = I \otimes (T_s \circ K) \quad \text{для всіх } s \in \mathbb{R}^d_+.$$

Теорема 5.1.3. *Для довільного розподілу* $f \in \mathcal{S}'_+$ *оператор* $I \otimes K_f$ *інваріантний відносно напівгрупи узагальнених зсувів* $I \otimes T$. *Навпаки, для довільного оператора* $K \in \mathscr{L}(\mathcal{S}_+)$ *такого, що* $I \otimes K$ *інваріантний відносно* $I \otimes T$, *знайдеться така єдина узагальнена функція* $f \in \mathcal{S}'_+$, *що* $K = K_f$ *і* $I \otimes K = I \otimes K_f$.

Доведення. З властивості (5.1.3) випливає рівність $(I \otimes K_f) \circ (I \otimes K_g) = I \otimes (K_f \circ K_g) = I \otimes K_{f * g}$. З формули (5.1.5) слідує, що для довільного $f \in \mathcal{S}'_+$ оператор узагальненої крос-кореляції $I \otimes K_f$ інваріантний відносно $I \otimes T$, тобто $[I \otimes (K_f T_s)]x = [I \otimes (T_s K_f)]x$ для всіх векторнозначних функцій $x \in \mathcal{S}_+(E)$.

Навпаки, нехай $K \in \mathscr{L}(\mathcal{S}_+)$ — такий довільний оператор, що $I \otimes K$ інваріантний відносно $I \otimes T$. Визначимо функціонал $f \colon \mathcal{S}_+ \ni \varphi \longmapsto (K\varphi)(0)$. Маємо $[(I \otimes K)x](0) = \langle f, x \rangle = (f \star x)(0) = [(I \otimes K_f)x](0)$ для всіх $x \in \mathcal{S}_+(E)$. Підставимо сюди $(I \otimes T_s)x$ замість x і використаємо інваріантність. В результаті отримаємо $[I \otimes (T_s K)x](0) = [I \otimes (K T_s)x](0) = (f \star x)(s)$. Таким чином, $[(I \otimes K)x](t) = [(I \otimes K_f)x](t)$ для всіх x, тобто $I \otimes K = I \otimes K_f$. □

5.1.3 Алгебра символів та функціональне числення

Нехай $\mathbb{C}^d_+ = \left\{ z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}^d \colon x \in \operatorname{int} \mathbb{R}^d_+ \right\}$ — трубчаста область в $\mathbb{C}^d$. Перетворення Фур'є $F' \colon f \longmapsto F'[f]$ ізоморфно відображає $\mathcal{S}'$ на себе. Зокрема, F' визначено на $\mathcal{S}'_+$ і його образ $F'[\mathcal{S}'_+]$ — замкнутий підпростір в $\mathcal{S}'$. Узагальнене перетворення Лапласа $\widehat{f}$ розподілу $f \in \mathcal{S}'_+$, яке визначають за формулою

$$\widehat{f}(z) := \langle f(t), e^{-tz} \rangle, \qquad z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}^d_+, \tag{5.1.6}$$

є комплексною аналітичною функцією в трубчастій області $\mathbb{C}^d_+$. Покажемо, що для довільної функції $f \in \mathcal{S}'_+$ справедливе представлення

$$\widehat{f}(z) = F'\big[f(t)e^{-tx}\big](y).$$

Дійсно, нехай $\varphi \in \mathcal{S}_+$. Тоді для довільного $x \in \operatorname{int}\mathbb{R}^d_+$ маємо

$$\begin{aligned}\big\langle F'[f(t)e^{-tx}](y), \varphi(y)\big\rangle &= \big\langle f(t)e^{-tx}, F[\varphi(y)](t)\big\rangle = \big\langle f(t), e^{-tx}F[\varphi(y)](t)\big\rangle \\ &= \left\langle f(t), e^{-tx}\int_{\mathbb{R}^d_+} \varphi(y)e^{-\mathrm{i}ty}\,dy\right\rangle = \left\langle f(t), \int_{\mathbb{R}^d_+} \varphi(y)e^{-t(x+\mathrm{i}y)}\,dy\right\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^d_+} \langle f(t), e^{-tz}\rangle\,\varphi(y)\,dy = \langle \widehat{f}(x+\mathrm{i}y), \varphi(y)\rangle.\end{aligned}$$

Кожна аналітична функція $\widehat{f}$ збігається до $F'[f]$ при $x \to 0$ в топології простору $\mathcal{S}'$. Відомо, що $\widehat{f * g}(z) = \widehat{f}(z)\cdot\widehat{g}(z)$ для всіх $z \in \mathbb{C}^d_+$, тому образ $\widehat{\mathcal{S}'_+}$ простору $\mathcal{S}'_+$ при відображенні $L\colon \mathcal{S}'_+ \ni f \longmapsto \widehat{f} \in \widehat{\mathcal{S}'_+}$ є мультиплікативною алгеброю аналітичних функцій на $\mathbb{C}^d_+$ (див. [7, §9]). Всюди далі в цьому параграфі простір $\widehat{\mathcal{S}'_+}$ ми наділяємо топологією, індукованою узагальненим перетворенням Лапласа.

Формулу (5.1.6) можна використовувати для визначення перетворення Лапласа $\widehat{\varphi} = L[\varphi]$ функцій з простору $\mathcal{S}_+ \subset \mathcal{S}'_+$, а саме, нехай $\widehat{\varphi}(z) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d_+} e^{-tz}\varphi(t)\,dt$ для всіх $z \in \mathbb{C}^d_+$. Розглянемо відповідне відображення $L\colon \varphi \longmapsto L[\varphi]$ з $\mathcal{S}_+$ на образ $\widehat{\mathcal{S}_+} := L[\mathcal{S}_+]$, який також наділимо індукованою топологією відносно відображення $L\colon \mathcal{S}_+ \longrightarrow \widehat{\mathcal{S}_+}$. Тоді L — ізоморфізм зі згорткової алгебри $\mathcal{S}_+$ на мультиплікативну підалгебру $\widehat{\mathcal{S}_+} \subset \widehat{\mathcal{S}'_+}$ аналітичних функцій. Використовуючи відображення L і його обернене L^{-1}, для кожного розподілу $f \in \mathcal{S}'_+$ визначимо оператор $\widehat{K}_f$ і напівгрупу $\widehat{T}$ за формулами

$$\widehat{K}_f := L\circ K_f\circ L^{-1} \in \mathscr{L}(\widehat{\mathcal{S}_+}), \qquad \widehat{T}\colon \mathbb{R}^d_+ \ni s \longmapsto \widehat{T}_s := L\circ T_s\circ L^{-1} \in \mathscr{L}(\widehat{\mathcal{S}_+}).$$

Оскільки функція $T_s\varphi$, $s \in \mathbb{R}^d_+$, належить простору $\mathcal{S}_+$, то для довільного розподілу $f \in \mathcal{S}'_+$ отримаємо

$$\begin{aligned}\widehat{K}_f\widehat{\varphi}(z) &= \int_{\mathbb{R}^d_+} e^{-tz}\langle f(s), T_s\varphi(t)\rangle\,dt \\ &= \left\langle f(s), \int_{\mathbb{R}^d_+} e^{-tz}T_s\varphi(t)\,dt\right\rangle = \big\langle f(s), \widehat{T}_s\widehat{\varphi}(z)\big\rangle.\end{aligned}$$

Більше того, для всіх $f, g \in \mathcal{S}'_+$ справджуються рівності

$$\begin{aligned}\big(\widehat{K}_f\widehat{K}_g\big)\widehat{\varphi}(z) &= \int_{\mathbb{R}^d_+} e^{-tz}\,\langle f(q), \langle g(p), \varphi(t+p+q)\rangle\rangle\,dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^d_+} e^{-tz}\,\langle (f*g)(s), \varphi(t+s)\rangle\,dt = \widehat{K}_{f*g}\widehat{\varphi}(z).\end{aligned}$$

Таким чином, з вище сказаного і теореми 5.1.2 отримуємо наступний результат.

Наслідок 5.1.1. *Відображення* $\widehat{\mathcal{K}} : \widehat{\mathcal{S}'_+} \ni \widehat{f} \longmapsto \widehat{K}_f \in \mathscr{L}(\widehat{\mathcal{S}_+})$ *здійснює ізоморфізм з алгебри* $\widehat{\mathcal{S}'_+}$ *на комутант* $[\widehat{T}]^c$ *в алгебрі* $\mathscr{L}(\widehat{\mathcal{S}_+})$. *Зокрема,* $\widehat{\mathcal{K}}[\widehat{f}\cdot\widehat{g}] = \widehat{K}_{f*g} = \widehat{K}_f \circ \widehat{K}_g$ *для всіх* $f, g \in \mathcal{S}'_+$ *і* $\widehat{\mathcal{K}}[\widehat{\delta}] = \widehat{K}_\delta$ *– одиничний оператор в* $\mathscr{L}(\widehat{\mathcal{S}_+})$.

Нехай в комплексному банаховому просторі E визначено сім'ю рівномірно обмежених d-параметричних (C_0) напівгруп $\{e^{tA}\}_{t\in\mathbb{R}^d_+}$, тобто існує така константа $M > 0$, що для всіх $t \in \mathbb{R}^d_+$ виконується нерівність $\|e^{tA}\|_{\mathscr{L}(E)} \le M$. Клас генераторів таких напівгруп позначимо $\mathfrak{A}$.

Спочатку розглянемо елементарне числення типу Хілле-Філліпса, тобто відображення, яке функції $\widehat{\varphi}$ комплексного аргумента ставить у відповідність функцію $\widetilde{\varphi}$ операторного аргумента, де

$$\widetilde{\varphi}(A) := \int_{\mathbb{R}^d_+} e^{tA}\varphi(t)\,dt, \qquad \varphi \in \mathcal{S}_+.$$

З сюр'єктивності відображення $\varphi \longmapsto \widehat{\varphi}$ випливає, що $\widehat{\varphi} \longmapsto \widetilde{\varphi}$ — неперервний ізоморфізм з мультиплікативної алгебри аналітичних функцій $\widehat{\mathcal{S}_+}$ в алгебру $\mathscr{L}(E)$-значних функцій [38, теорема 15.2.1]. З властивостей інтеграла Бохнера випливають нерівності

$$\|\widetilde{\varphi}(A)\|_{\mathscr{L}(E)} \le M\int_{\mathbb{R}^d_+} |\varphi(t)|\,dt \le MC\int_{\mathbb{R}^d_+} \frac{dt}{(1+|t|^2)^{k/2}}$$

для кожного $A \in \mathfrak{A}$, де $C = \sup_{t\in\mathbb{R}^d_+}(1+|t|^2)^{k/2}|\varphi(t)| < \infty$, оскільки $\varphi \in \mathcal{S}_+$. Зауважимо, що інтеграл в правій частині останньої нерівності збігається для всіх $k > d$. Як наслідок, коректно заданою є функція $\widetilde{\varphi} : \mathfrak{A} \ni A \longmapsto \widetilde{\varphi}(A) \in \mathscr{L}(E)$.

Розглянемо лінійне відображення

$$\mathcal{L}\colon \mathcal{S}_+(E) \ni x \longmapsto \widetilde{x} \in \widetilde{\mathcal{S}}, \qquad \text{де} \qquad \widetilde{x}(A) = \int_{\mathbb{R}^d_+} e^{tA}x(t)\,dt, \quad A \in \mathfrak{A}.$$

Елементами простору $\widetilde{\mathcal{S}}$ є функції вигляду $\widetilde{x} : \mathfrak{A} \ni A \longmapsto \widetilde{x}(A) \in E$. Використовуючи лему 5.1.1 та формулу (5.1.1), для кожного $A \in \mathfrak{A}$ підінтегральну функцію $e^{tA}x(t)$ у вище записаному інтегралі можна подати у вигляді ряду $\sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j e^{tA} x_j \varphi_j(t)$ (див. теорему 1.2.2). Тому для кожної функції з простору $\widetilde{\mathcal{S}}$ її значення на операторі $A \in \mathfrak{A}$ можна записати у вигляді

$$\widetilde{x}(A) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j \int_{\mathbb{R}^d_+} e^{tA} x_j \varphi_j(t)\,dt = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j \widehat{\varphi}_j(A) x_j,$$

де справа стоїть збіжний в просторі E ряд.

Для кожного $A \in \mathfrak{A}$ введемо в E підпростір $\widetilde{\mathcal{S}}(A) := \{\widetilde{x}(A) : \widetilde{x} \in \widetilde{\mathcal{S}}\}$.

На $\widetilde{\mathcal{S}}$ задамо індуковану відображенням $\mathcal{L}$ локально опуклу топологію. А саме, нехай

$$\widetilde{\mathcal{S}}^{\alpha,\beta} := \big\{\widetilde{x} : x \in \mathcal{S}^{\alpha,\beta}_+(E)\big\}$$

позначає банаховий простір, наділений топологією, що визначається нормами $\|\widetilde{x}\|_{\widetilde{\mathcal{S}}^{\alpha,\beta}} := \|x\|_{\mathcal{S}^{\alpha,\beta}_+(E)}$ при фіксованих $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^d_+$.

Простір $\widetilde{\mathcal{S}} = \bigcap\big\{\widetilde{\mathcal{S}}^{\alpha,\beta} : \alpha, \beta \in \mathbb{Z}^d_+\big\}$ наділимо топологією проективної границі $\lim\limits_{\alpha,\beta}\operatorname{pr}\widetilde{\mathcal{S}}^{\alpha,\beta}$ відносно вкладень $\widetilde{\mathcal{S}}^{\alpha,\beta} \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{S}}^{\eta,\gamma}$ при $\eta \preccurlyeq \alpha$ і $\gamma \preccurlyeq \beta$.

Визначимо d-параметричну напівгрупу на $\widetilde{\mathcal{S}}$ за правилом

$$\widehat{I\otimes T}\colon \mathbb{R}^d_+ \ni s \longmapsto \widehat{I\otimes T_s} \in \mathscr{L}(\widetilde{\mathcal{S}}), \qquad (\widehat{I\otimes T_s})\widetilde{x}(A) = \int_{\mathbb{R}^d_+} e^{tA}(I\otimes T_s)x(t)\,dt.$$

Очевидно, що

$$\begin{aligned}(\widehat{I\otimes T_s})\widetilde{x}(A)-\widetilde{x}(A)&=\int_{\mathbb{R}^d_+}e^{tA}(I\otimes T_s)x(t)\,dt-\int_{\mathbb{R}^d_+}e^{tA}x(t)\,dt\\&=\int_{\mathbb{R}^d_+}e^{tA}\big((I\otimes T_s)x(t)-x(t)\big)\,dt.\end{aligned}$$

З означення індукованої топології на $\widetilde{\mathcal{S}}^{\alpha,\beta}$ і сильної неперервності напівгрупи $I\otimes T$ випливають рівності

$$\lim_{\mathbb{R}^d_+\ni s\to 0}\big\|(\widehat{I\otimes T_s})\widetilde{x}-\widetilde{x}\big\|_{\widetilde{\mathcal{S}}^{\alpha,\beta}}=\lim_{\mathbb{R}^d_+\ni s\to 0}\|(I\otimes T_s)x-x\|_{\mathcal{S}^{\alpha,\beta}_+(E)}=0$$

для всіх $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}^d_+$. Таким чином, $\widehat{I\otimes T}$ — (C_0) напівгрупа на $\widetilde{\mathcal{S}}$.

Лема 5.1.2. *Образ відображення* $\widehat{I\otimes T_s}:\widetilde{\mathcal{S}}\ni\widetilde{x}\longmapsto\widehat{I\otimes T_s}\widetilde{x}(A)\in E$ *щільний в* E *для кожного* $s\in\mathbb{R}^d_+$ *і кожного* $A\in\mathfrak{A}$. *Як наслідок, підпростір* $\widetilde{\mathcal{S}}(A)$ *щільний в* E *для кожного* $A\in\mathfrak{A}$.

Доведення. Припустимо протилежне, нехай існує таке $s_0\in\mathbb{R}^d_+$, що образ вказаного відображення не щільний в E для деякого A_0. Тоді за теоремою Гана-Банаха знайдеться такий ненульовий функціонал $e'\in E'$, що виконується рівність $\langle e',\widehat{I\otimes T_{s_0}}\widetilde{x}(A_0)\rangle=0$ для всіх $\widetilde{x}\in\widetilde{\mathcal{S}}$.

З властивостей інтеграла Бохнера [38, 3.7] випливає

$$\big\langle e',\widehat{I\otimes T_{s_0}}\widetilde{x}(A_0)\big\rangle=\int_{\mathbb{R}^d_+}\big\langle e',e^{tA_0}(I\otimes T_{s_0})x(t)\big\rangle\,dt$$

для всіх $x\in\mathcal{S}_+(E)$. Не обмежуючи загальності, елемент x з простору $\mathcal{S}_+(E)\simeq E\otimes_{\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+$ ми можемо вибрати у вигляді $y\otimes\varphi$, де $y\in E$, $\varphi\in\mathcal{S}_+$ і $\operatorname{supp}\varphi\subset O^d_\varepsilon\subset\mathbb{R}^d_+$. Тут позначено $O^d_\varepsilon:=\bigtimes_{i=1}^d[0,\varepsilon]$, $\varepsilon>0$. Тоді

$$\int_{O^d_\varepsilon}\langle e',e^{tA_0}y\rangle T_{s_0}\varphi(t)\,dt=0.$$

Оскільки φ можна вибирати довільним чином, то з основної леми варіаційного числення слідує $\langle x',e^{tA_0}y\rangle\equiv 0$ для всіх $t\in O^d_\varepsilon$. Користуючись (C_0) властивістю напівгрупи $\{e^{tA_0}\}_{t\in\mathbb{R}^d_+}$, при $t=0$ отримаємо $\langle e',y\rangle=0$ для всіх $y\in E$, звідки $e'=0$, що протирічить припущенню.

Оскільки $\widehat{I\otimes T_s}\widetilde{x}\in\widetilde{\mathcal{S}}$ для всіх $\widetilde{x}\in\widetilde{\mathcal{S}}$ і $s\in\mathbb{R}_+^d$, то правильним є включення $\{\widehat{I\otimes T_s}\widetilde{x}(A):\widetilde{x}\in\widetilde{\mathcal{S}},s\in\mathbb{R}_+^d\}\subset\widetilde{\mathcal{S}}(A)$, звідки слідує щільність підпростору $\widetilde{\mathcal{S}}(A)$ в E для кожного $A\in\mathfrak{A}$. □

Наступна теорема є основною в цьому параграфі. У ній побудовано відображення, яке ми трактуємо як функціональне числення для генераторів рівномірно обмежених (C_0) напівгруп в класі $\widehat{\mathcal{S}'_+}$ аналітичних функцій d комплексних змінних.

Із сюр'єктивності перетворення $L\colon\mathcal{S}'_+\ni f\longmapsto\widehat{f}\in\widehat{\mathcal{S}'_+}$ випливає коректність визначення відображення $\Phi\colon\widehat{\mathcal{S}'_+}\ni\widehat{f}\longmapsto\widetilde{f}\in\mathscr{L}(\widetilde{\mathcal{S}})$, де

$$(\widetilde{f}\widetilde{x})(A):=\widetilde{f}(A)\widetilde{x}(A)=\int_{\mathbb{R}_+^d}e^{tA}(f\star x)(t)\,dt,\qquad A\in\mathfrak{A}.\tag{5.1.7}$$

Враховуючи означення відображень $I\otimes K_f$ та $\mathcal{L}$, функцію $\widetilde{f}\widetilde{x}\in\widetilde{\mathcal{S}}$ можна представити у вигляді $\widetilde{f}\widetilde{x}=\mathcal{L}\big((I\otimes K_f)x\big)$ або $\widetilde{f}\widetilde{x}=\widetilde{f\star x}$.

Зауважимо, що $\widetilde{f}(A)$ для кожного фіксованого $A\in\mathfrak{A}$ діє як оператор

$$\widetilde{f}(A):E\ni\widetilde{x}(A)\longmapsto(\widetilde{f}\widetilde{x})(A)\in E.\tag{5.1.8}$$

Теорема 5.1.4. *Відображення* Φ *здійснює топологічний ізоморфізм з* $\widehat{\mathcal{S}'_+}$ *на комутативну підалгебру в* $\mathscr{L}(\widetilde{\mathcal{S}})$ *всіх операторів вигляду*

$$\begin{aligned}&\widehat{I\otimes K}:\widetilde{\mathcal{S}}\ni\widetilde{x}\longmapsto\widehat{I\otimes K}\widetilde{x}\in\widetilde{\mathcal{S}},\qquad \textit{де}\\&\widehat{I\otimes K}\widetilde{x}(A)=\int_{\mathbb{R}_+^d}e^{tA}(I\otimes K)x(t)\,dt,\qquad K\in[T]^c.\end{aligned}\tag{5.1.9}$$

При цьому, оператори вигляду (5.1.8) *володіють властивостями:*

$$\widetilde{\delta}(A)=I,\qquad\widetilde{f*g}(A)=\widetilde{f}(A)\circ\widetilde{g}(A),\qquad f,g\in\mathcal{S}'_+,\tag{5.1.10}$$

$$\widetilde{\partial^kf}(A)\widetilde{x}(A)=(-1)^{|k|}\widetilde{f}(A)\widetilde{\partial^kx}(A),\qquad k\in\mathbb{Z}_+^d.\tag{5.1.11}$$

Доведення. Функція $\mathbb{R}_+^d\ni s\longmapsto(I\otimes T_s)x\in\mathcal{S}_+(E)$ при $x\in\mathcal{S}_+(E)$ неперервна, тому з властивостей інтеграла Бохнера і означення напівгрупи

$\widehat{I\otimes T}$ випливає, що для довільного розподілу $f \in \mathcal{S}'_+$ (див. [38, 3.7]) справджуються наступні рівності

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(A)\widetilde{x}(A) &= \int_{\mathbb{R}^d_+} e^{tA}(f \star x)(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}^d_+} e^{tA}\langle f(s), (I\otimes T_s)x(t)\rangle dt \\ &= \left\langle f(s), \int_{\mathbb{R}^d_+} e^{tA}(I\otimes T_s)x(t)\,dt \right\rangle = \big\langle f(s), (\widehat{I\otimes T_s})\widetilde{x}(A)\big\rangle,\end{aligned} \tag{5.1.12}$$

для кожного $A \in \mathfrak{A}$, звідки $\mathcal{L}\circ(I\otimes K_f) = \widetilde{f}\circ\mathcal{L}$. Таким чином, наступна діаграма

$$\begin{tikzcd}\widetilde{\mathcal{S}} \ni \widetilde{x} \arrow[r, "\widetilde{f}"] & \widetilde{f}\widetilde{x} \in \widetilde{\mathcal{S}} \\ \mathcal{S}_+(E) \ni x \arrow[u, "\mathcal{L}"] \arrow[r, "I\otimes K_f"] & f\star x \in \mathcal{S}_+(E) \arrow[u, "\mathcal{L}"]\end{tikzcd}$$

комутативна, тобто оператор $\widetilde{f} := \mathcal{L}\circ(I\otimes K_f)\circ\mathcal{L}^{-1}$ коректно визначений на $\widetilde{\mathcal{S}}$. З неперервності $I\otimes K_f$ та $\mathcal{L}$, а також з відкритості $\mathcal{L}$ випливає, що $\widetilde{f} \in \mathscr{L}(\widetilde{\mathcal{S}})$.

Аналогічно як це зроблено в доведенні теореми 5.1.2, легко показати, що відображення $\mathcal{S}'_+ \times \mathcal{S}_+(E) \ni (f, x) \longmapsto f \star x \in \mathcal{S}_+(E)$ нарізно неперервне. З неперервності перетворення Лапласа L та відображення $\mathcal{L}$ випливає, що

$$\Psi\colon \widehat{\mathcal{S}'_+} \times \widetilde{\mathcal{S}} \ni (\widehat{f}, \widetilde{x}) \longmapsto \widetilde{f}\widetilde{x} \in \widetilde{\mathcal{S}}$$

теж нарізно неперервне відображення. За теоремою Банаха-Штейнгауза Ψ одностайно неперервне. А це еквівалентне до неперервності відображення $\Phi\colon \widehat{\mathcal{S}'_+} \longrightarrow \mathscr{L}(\widetilde{\mathcal{S}})$.

З формули (5.1.12) випливає, що рівності

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(A)(\widehat{I\otimes T_r})\widetilde{x}(A) &= \big\langle f(s), (\widehat{I\otimes T_s})(\widehat{I\otimes T_r})\widetilde{x}(A)\big\rangle\\ &= \left\langle f(s), \int_{\mathbb{R}^d_+} e^{tA}(I\otimes T_s)(I\otimes T_r)x(t)\,dt\right\rangle\\ &= \int_{\mathbb{R}^d_+} e^{tA}(f\star x)(t+r)\,dt\\ &= \widehat{I\otimes T_r}\int_{\mathbb{R}^d_+} e^{tA}(f\star x)(t)\,dt = (\widehat{I\otimes T_r})\widetilde{f}(A)\widetilde{x}(A)\end{aligned}$$

справджуються для всіх $r\in\mathbb{R}^d_+$ і $\widetilde{x}\in\widetilde{\mathcal{S}}$. Звідси слідує, що для кожного розподілу $f\in\mathcal{S}'_+$ оператор $\widetilde{f}$ належить підалгебрі операторів вигляду (5.1.9).

Навпаки, для довільного оператора $K\in\mathscr{L}(\mathcal{S}_+)$ такого, що $I\otimes K$ інваріантний відносно $I\otimes T$, з теореми 5.1.3 випливає, що знайдеться така єдина узагальнена функція $f\in\mathcal{S}'_+$, що $I\otimes K = I\otimes K_f$. Звідси слідує, що кожен оператор $\widehat{I\otimes K}$ можна представити у вигляді (5.1.7). Тому образ Φ співпадає з підалгеброю операторів вигляду (5.1.9).

Для того, щоб показати, що Φ — топологічний ізоморфізм, достатньо застосувати теорему 1.2.1 про відкрите відображення з роботи [33] аналогічно до того, як це зроблено в доведенні теореми 5.1.2.

Користуючись напівгруповою властивістю сімейства операторів $\widehat{I\otimes T}$, легко довести рівності (5.1.10). Дійсно, відображення Φ діє як алгебраїчний ізоморфізм, оскільки

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(A)\widetilde{g}(A)\widetilde{x}(A) &= \left\langle f(r), \widehat{I\otimes T_r}\,\big\langle g(t), (\widehat{I\otimes T_t})\widetilde{x}(A)\big\rangle\right\rangle\\ &= \left\langle f(r), \big\langle g(t), (\widehat{I\otimes T_{r+t}})\widetilde{x}(A)\big\rangle\right\rangle\\ &= \big\langle (f*g)(s), (\widehat{I\otimes T_s})\widetilde{x}(A)\big\rangle = \widetilde{f*g}(A)\widetilde{x}(A).\end{aligned}$$

Оператор $\widetilde{\delta}(A)$ — тотожний в $\mathscr{L}(\widetilde{\mathcal{S}})$, оскільки для $f=\delta$ маємо

$$\widetilde{\delta}(A)\widetilde{x}(A) = \int_{\mathbb{R}^d_+} e^{tA}(\delta\star x)(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}^d_+} e^{tA}x(t)\,dt = \widetilde{x}(A).$$

Залишилось довести властивість (5.1.11). Використовуючи рівності (5.1.4), отримаємо

$$\begin{aligned}\widetilde{\partial^k f}(A)\widetilde{x}(A) &= \int_{\mathbb{R}^d_+} e^{tA}(\partial^k f \star x)(t)\,dt \\ &= (-1)^{|k|}\int_{\mathbb{R}^d_+} e^{tA}(f \star \partial^k x)(t)\,dt = (-1)^{|k|}\widetilde{f}(A)\widetilde{\partial^k x}(A).\end{aligned}$$

□

Введемо позначення $\mathfrak{D}(A^\infty) = \bigcap_{\alpha\in\mathbb{Z}^d_+}\mathfrak{D}(A^\alpha)$, де $\mathfrak{D}(A^\alpha) := \bigcap_{j=1}^d \mathfrak{D}(A_j^{\alpha_j})$, а $\mathfrak{D}(A_j^{\alpha_j})$ — область визначення оператора $A_j^{\alpha_j}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}^d_+$.

Теорема 5.1.5. *Для довільного оператора* $A \in \mathfrak{A}$ *виконується вкладення* $\widetilde{\mathcal{S}}(A) \subset \mathfrak{D}(A^\infty)$. *Крім того,*

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(A)\widetilde{\partial_j^{k_j} x}(A) &= (-1)^{k_j}A_j^{k_j}\widetilde{f}(A)\widetilde{x}(A) \\ &\quad - \sum_{l=0}^{k_j-1}(-A_j)^{k_j-l-1}\lim_{t_j\to+0}\int_{\mathbb{R}^{d-1}_+} e^{tA}\partial_j^l(f\star x)(t)\,\check{d}_j t\end{aligned}$$

для довільного $k_j \in \mathbb{Z}_+$, *де позначено* $\check{d}_j t := dt_1 \dots dt_{j-1}\,dt_{j+1}\dots dt_d$ *для всіх* $j = 1, \dots, d$.

Доведення. Інтегруючи частинами за змінною $t_j \in [0, \infty)$, отримаємо

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{t_jA_j}\partial_j^1 x(t)\,dt_j &= \lim_{t_j\to+\infty} e^{t_jA_j}x(t) - \lim_{t_j\to+0} e^{t_jA_j}x(t) - A_j\int_0^\infty e^{t_jA_j}x(t)\,dt_j \\ &= -A_j\int_0^\infty e^{t_jA_j}x(t)\,dt_j - x(t_1, \dots, t_{j-1}, 0, t_{j+1}, \dots, t_d),\end{aligned}$$

оскільки функція $x \in \mathcal{S}_+(E)$ швидко спадає до нуля на нескінченності. Зауважимо, що в останній рівності існування границь випливає із сильної неперервності напівгрупи $\{e^{tA}\}_{t\in\mathbb{R}^d_+}$ і неперервності функції $x \in \mathcal{S}_+(E)$. Як наслідок, отримуємо

$$\widetilde{\partial_j^1 x}(A) = \int_{\mathbb{R}^d_+} e^{tA}\partial_j^1 x(t)\,dt = -A_j\widetilde{x}(A) - \lim_{t_j\to+0}\int_{\mathbb{R}^{d-1}_+} e^{tA}x(t)\,\check{d}_j t,$$

для всіх $j = 1, \dots, d$. Звідси $\widetilde{x}(A) \in \mathfrak{D}(A_j)$. Проводячи аналогічні міркування з усіма похідними та індексами, отримаємо $\widetilde{x}(A) \in \mathfrak{D}(A^\infty)$ для всіх $\widetilde{x} \in \widetilde{\mathcal{S}}$.

Використовуючи рівність (5.1.4) та інтегруючи частинами k_j раз за змінною $t_j \in [0, \infty)$, отримаємо

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(A)\widetilde{\partial_j^{k_j} x}(A) &= \int_{\mathbb{R}_+^d} e^{tA}\big(f \star \partial_j^{k_j} x\big)(t)\, dt \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^d} e^{tA}\partial_j^{k_j}(f \star x)(t)\, dt = (-1)^{k_j} A_j^{k_j}\widetilde{f}(A)\widetilde{x}(A) \\ &\quad - \sum_{l=0}^{k_j-1}(-A_j)^{k_j-l-1}\lim_{t_j \to +0}\int_{\mathbb{R}_+^{d-1}} e^{tA}\partial_j^l(f \star x)(t)\, \check{d}_j t.\end{aligned}$$

$\square$

Приклад 5.1.1. *Нехай* $E = L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p \le \infty$, *і* $A = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \xi_d}\right)$. *Розглянемо спочатку функцію вигляду* $x\colon \mathbb{R}^d \ni t \longmapsto y \otimes \varphi(t) \in L_p(\mathbb{R}^d)$, *де* $y \in L_p(\mathbb{R}^d)$ *і* $\varphi \in \mathcal{S}_+$, *яка належить простору* $\mathcal{S}_+(L_p(\mathbb{R}^d)) \simeq L_p(\mathbb{R}^d) \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{S}_+$.

Відомо, що оператор A *генерує напівгрупу зсувів, тому*

$$e^{tA}x = e^{t_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \ldots + t_d \frac{\partial}{\partial \xi_d}} y(\xi)\varphi(t) = y(\xi + t)\varphi(t),$$

і елемент $\widetilde{x}(A)$ *в цьому випадку є функцією з* $L_p(\mathbb{R}^d)$ *вигляду*

$$\widetilde{x}(A)(\xi) = \int_{\mathbb{R}_+^d} y(\xi + t)\varphi(t)\, dt.$$

Для довільного $f \in \mathcal{S}'_+$ *крос-кореляція має вигляд* $(f \star x)(\xi, t) = y(\xi)(f \star \varphi)(t)$. *Тепер розглянемо довільний елемент* $x \in L_p(\mathbb{R}^d) \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{S}_+$. *Використовуючи формулу* (5.1.1), *отримаємо*

$$\widetilde{x}(A)(\xi) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j \int_{\mathbb{R}_+^d} e^{tA} y_j(\xi)\varphi_j(t)\, dt = \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j \int_{\mathbb{R}_+^d} y_j(\xi + t)\varphi_j(t)\, dt,$$

а крос-кореляція матиме вигляд $(f \star x)(\xi, t) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j y_j(\xi)(f \star \varphi_j)(t)$ *для всіх* $f \in \mathcal{S}'_+$.

З формули (5.1.12) *випливає, що на щільному підпросторі* $\widetilde{\mathcal{S}}(A) \subset L_p(\mathbb{R}^d)$ *оператори* $\widetilde{f}(A)$ *(див. формулу* (5.1.8)*) діють за правилом*

$$\widetilde{f}(A)\widetilde{x}(A) = (f \,\widehat{\star}\, \widetilde{x})(A), \qquad \text{де}$$

$$(f \,\widehat{\star}\, \widetilde{x})(A)(\xi) := \big\langle f(s), (\widehat{I \otimes T_s})\widetilde{x}(A)(\xi)\big\rangle, \qquad \xi \in \mathbb{R}^d,$$

для всіх $\widetilde{x}(A) \in \widetilde{\mathcal{S}}(A) \subset L_p(\mathbb{R}^d)$.

Використовуючи формулу (5.1.11) *і теорему 5.1.5, для всіх* $j = 1, \dots, d$ *отримаємо*

$$\begin{aligned}\widetilde{\partial_j^1 f}(A)\widetilde{x}(A)(\xi) &= \frac{\partial}{\partial \xi_j}(f \mathbin{\widehat{\star}} \widetilde{x})(A)(\xi) + \lim_{t_j \to +0} \int_{\mathbb{R}_+^{d-1}} e^{tA}(f \star x)(\xi, t)\, \check{d}_j t \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi_j}(f \mathbin{\widehat{\star}} \widetilde{x})(A)(\xi) + \lim_{t_j \to +0} \left\langle f(s), \int_{\mathbb{R}_+^{d-1}} e^{tA} x(\xi, t+s)\, \check{d}_j t \right\rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi_j}(f \mathbin{\widehat{\star}} \widetilde{x})(A)(\xi) + \lim_{t_j \to +0} (f \mathbin{\widehat{\star}} \check{x})(A)(\xi, t_j),\end{aligned}$$

де $\check{x}(A)(\xi, t_j) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^{d-1}} e^{tA} x(\xi, t)\, \check{d}_j t.$

Розглянемо тепер частинний випадок, а саме, нехай лінійний оператор $\widetilde{\partial_j^1 f}(A)$ *заданий на підпросторі* $\check{\mathfrak{D}}[\widetilde{\partial_j^1 f}(A)] \subset L_p(\mathbb{R}^d)$ *функцій* $\widetilde{x}(A)$, *що задовольняють умову*

$$\lim_{t_j \to +0} \check{x}(A)(\xi, t_j) = \check{x}_j(A)(\xi) \in L_p(\mathbb{R}^d),$$

де $\check{x}_j(A)(\xi) \in L_p(\mathbb{R}^d)$ — *наперед задані фіксовані функції. Позначимо* $\mathrm{div} := \sum_{j=1}^d \partial_j^1$. *Тоді для кожної функції* $\widetilde{x}(A) \in \bigcap_{j=1}^d \check{\mathfrak{D}}[\widetilde{\partial_j^1 f}(A)]$ *отримаємо формулу*

$$\widetilde{\mathrm{div}\, f}(A)\widehat{x}(A)(\xi) = \mathrm{div}(f \mathbin{\widehat{\star}} \widetilde{x})(A)(\xi) + \sum_{j=1}^d (f \mathbin{\widehat{\star}} \check{x}_j)(A)(\xi).$$

Зокрема, при $f = \delta$ *отримаємо* $\widetilde{\mathrm{div}\, \delta}(A)\widetilde{x}(A) = \mathrm{div}\, \widetilde{x}(A) + \sum_{j=1}^d \check{x}_j(A)$.

Приклад 5.1.2. *Нехай знову* $E = L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p \le \infty$, *але оператор виберемо інший, а саме* $A = \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2}, \dots, \frac{\partial^2}{\partial \xi_d^2}\right)$. *Ядро Гауса-Вейєрштрасса позначимо так*

$$\mathfrak{g}_t(\zeta) = \prod_{j=1}^d \frac{1}{\sqrt{4\pi t_j}} e^{-\frac{\zeta_j^2}{4t_j}}.$$

Використовуючи властивості Гама функції, для довільного $t \in \mathsf{int}\, \mathbb{R}_+^d$ *функцію* $e^{tA}y$ *можна записати у вигляді узагальненого перетворення*

Вейєрштрасса

$$\begin{aligned} e^{tA}y(\xi) = e^{t_1\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2}+\ldots+t_d\frac{\partial^2}{\partial\xi_d^2}}y(\xi) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}_+^d}\frac{1}{m!}\frac{\partial^{2|m|}y(\xi)}{\partial\xi_1^{2m_1}\ldots\partial\xi_d^{2m_d}}t^m \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}_+^d}\frac{1}{(2m)!}\frac{\partial^{2|m|}y(\xi)}{\partial\xi_1^{2m_1}\ldots\partial\xi_d^{2m_d}}\frac{2^d(2m-1)!}{(m-1)!}t^m \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}_+^d}\frac{1}{k!}\frac{\partial^{|k|}y(\xi)}{\partial\xi_1^{k_1}\ldots\partial\xi_d^{k_d}}\int_{\mathbb{R}^d}\mathfrak{g}_t(\zeta)(-\zeta)^k\,d\zeta \\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\mathfrak{g}_t(\zeta)\sum_{k\in\mathbb{Z}_+^d}\frac{1}{k!}\frac{\partial^{|k|}y(\xi)}{\partial\xi_1^{k_1}\ldots\partial\xi_d^{k_d}}(-\zeta)^k\,d\zeta \\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\mathfrak{g}_t(\zeta)y(\xi-\zeta)\,d\zeta = (\mathfrak{g}_t * y)(\xi), \end{aligned} \tag{5.1.13}$$

де $y\colon \mathbb{R}^d \ni \xi \longmapsto y(\xi)$ *— довільна обмежена ціла функція. Оскільки множина таких функцій щільна в* $L_p(\mathbb{R}^d)$*, то рівність* $e^{tA}y = \mathfrak{g}_t * y$ *виконується для всіх* $y \in L_p(\mathbb{R}^d)$*. Зокрема, якщо* $x \in L_p(\mathbb{R}^d) \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{S}_+$*, то функції вигляду* $\widetilde{x}(A)(\xi) = \int_{\mathbb{R}_+^d}\left[\mathfrak{g}_t * x(\cdot,t)\right](\xi)\,dt$, $\xi \in \mathbb{R}^d$*, утворюють щільний підпростір* $\widetilde{\mathcal{S}}(A)$ *в* $L_p(\mathbb{R}^d)$*. В цьому випадку формула операторного числення набирає вигляду*

$$\widetilde{f}(A)\widetilde{x}(A) = \big\langle f(t), \mathfrak{g}_t * \widetilde{x}(A)\big\rangle, \qquad f \in \mathcal{S}'_+, \quad \widetilde{x} \in \widetilde{\mathcal{S}}, \quad A \in \mathfrak{A}.$$

5.2 Застосування перетворення Лапласа узагальнених функцій повільного росту до побудови функціонального числення для генераторів аналітичних напівгруп операторів

Однією із характеристик аналітичних напівгруп є те, що їхні генератори є так званими секторіальними операторами. Такі оператори відіграють важливу роль в теорії еліптичних і параболічних диференціальних рівнянь з частинними похідними. Зауважимо, що в роботі [72] показано, що кожна аналітична напівгрупа є сильно неперервною.

В роботах [18, 123] (серед багатьох інших) побудовано функціональне числення для аналітичних напівгруп операторів, яке базується на використанні інтеграла Ріса-Данфорда та інтегральної формули Коші.

Ми ж використовуємо дещо інший підхід. А саме, у статті автора [24], використовуючи узагальнене перетворення Лапласа, побудовано операторне числення для генераторів однопараметричних аналітичних напівгруп операторів, що діють в банаховому просторі. Алгебра символів такого числення складається з аналітичних у півплощині функцій, які є перетвореннями Лапласа розподілів Шварца повільного росту з носіями в додатній півосі. Метою цього параграфу є побудова багатовимірного аналогу згаданого числення.

Узагальнене перетворення Лапласа $\widehat{f}$ розподілу $f \in \mathcal{S}'_+$ є аналітичною функцією

$$\widehat{f}(z) = \big\langle f(t), e^{-tz} \big\rangle, \qquad f \in \mathcal{S}'_+, \tag{5.2.1}$$

що визначена в трубчастій області

$$\mathbb{C}^d_+ := \big\{ z = x + iy \in \mathbb{C}^d \colon x \in \operatorname{int} \mathbb{R}^d_+, y \in \mathbb{R}^d \big\}.$$

Добре відомо [7, II.9], що множина $\widehat{\mathcal{S}'_+} = \big\{ \widehat{f} \colon f \in \mathcal{S}'_+ \big\}$ є алгеброю відносно поточкового множення $\widehat{f}(z) \cdot \widehat{g}(z) = \widehat{f * g}(z)$ для всіх $z \in \mathbb{C}^d_+$, де символом $*$ позначено звичайну згортку розподілів.

Ми використовуємо узагальнене перетворення Лапласа

$$L \colon \mathcal{S}'_+ \ni f \longmapsto \widehat{f} \in \widehat{\mathcal{S}'_+}$$

для побудови функціонального числення для набору ін'єктивних генераторів $A = (A_1, \ldots, A_d)$ d-параметричних аналітичних напівгруп

$$\mathbb{R}^d_+ \ni (t_1, \ldots, t_d) = t \longmapsto e^{-tA} = e^{-(t_1 A_1 + \cdots + t_d A_d)}$$

обмежених операторів, що діють в комплексному банаховому просторі E. Як клас символів такого числення ми використовуємо мультиплікативну алгебру $\widehat{\mathcal{S}'_+}$ аналітичних функцій (5.2.1).

Функціональне числення $\varPhi$: $\widehat{f} \longmapsto \widehat{f}(A)$ при фіксованому A визначене за формулою

$$\widehat{f}(A)x = \big\langle f(t), e^{-tA}x \big\rangle, \quad x \in \mathfrak{U}, \tag{5.2.2}$$

де $\mathfrak{U}$ — щільний в E підпростір нескінченно гладких векторів, що визначається як перетин областей визначення цілих степенів генераторів. Як результат лінійні оператори $\widehat{f}(A)$ визначені на E як необмежені оператори із спільною областю визначення $\mathfrak{U}$. Більше того, відображення $\varPhi$ є алгебраїчним гомоморфізмом мультиплікативної алгебри $\widehat{\mathcal{S}'_+}$ на комутативну підалгебру $\mathscr{L}(\mathfrak{U}, E)$ (див. теорему 5.2.1).

Зауважимо, що на відміну від класичного функціонального числення [38] або його узагальнень [9, 25] (див. також параграф 5.1), ми не використовуємо жодного інтегрального представлення функцій з класу символів.

Зауважимо, що тут напівгрупу ми позначаємо дещо іншим чином, ніж ми це робили у параграфі 5.1, додавши знак мінуса. Це зроблено виключно для того, щоб формула функціонального числення (5.2.2) формально стала схожою на формулу перетворення Лапласа (5.2.1). Зрозуміло, що це питання лише позначень і це жодним чином не обмежує загальності.

Диференціальні властивості алгебраїчного гомоморфізму $\varPhi$ описані в теоремах 5.2.2 і 5.2.3. Використовуючи теорему 5.2.1, в прикладі 5.2.1 визначено довільний дійсний степінь оператора. Застосування числення до d-параметричної напівгрупи Ґаусса-Вейєрштрасса розглянуто в прикладах 5.2.2 і 5.2.3. Інші дослідження, що стосуються цієї тематики, можна знайти у [25, 123, 160, 173].

5.2.1 Допоміжні твердження

В наступному пункті ми матимемо справу із E-значними нескінченно гладкими функціями вигляду $x\colon t \longmapsto x(t) \in E$ для різних областей визначення, де $E := (E, \|\cdot\|)$ — комплексний банаховий простір. У цьому пункті ми зберемо факти, які в подальшому будуть використані. Зауважимо, що всі простори та відповідні норми, які тут використовуємо, були введені у параграфі 5.1. Тому тут ми зупинимось тільки на деяких відмінностях та нових доведеннях.

Лема 5.2.1. *Існує лінійний неперервний оператор продовження*

$$\varLambda\colon \mathcal{S}_+(E) \ni x_+ \longmapsto \varLambda x_+ \in \mathcal{S}(E)$$

такий, що $\varLambda x_+(t) = x_+(t)$ *для всіх* $t \in \mathbb{R}^d_+$.

Ця допоміжна лема, що є узагальненням відомої теореми про продовження функцій з підпростору на весь простір (див. [27, 189]), доведена в параграфі 5.1 (див. також [157, лема 1]). Тут ми сформулювали іншу інтерпретацію цього результату.

Розглянемо поповнені проективні тензорні добутки $E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{S}$ і $E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{S}_+$, наділені відповідно сім'ями норм

$$\|x\|_{E\otimes_{\mathfrak{p}}\mathcal{S}^{\alpha,\beta}} := \inf \sum_{j\in\mathbb{N}} |\lambda_j| \|x_j\| \|\varphi_j\|_{\mathcal{S}^{\alpha,\beta}}, \quad \|x\|_{E\otimes_{\mathfrak{p}}\mathcal{S}^{\alpha,\beta}_+} := \inf \sum_{j\in\mathbb{N}} |\lambda_j| \|x_j\| \|\varphi_j\|_{\mathcal{S}^{\alpha,\beta}_+},$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+$, де обидва вище записані інфімуми беруть по всіх представленнях елемента $x \in E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{S}$ (відповідно $x \in E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{S}_+$) у вигляді абсолютно збіжного ряду

$$x = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j x_j \otimes \varphi_j, \quad \lambda_j \in \mathbb{C}, \quad x_j \in E, \quad \varphi_j \in \mathcal{S} \ (\text{відповідно } \varphi_j \in \mathcal{S}_+), \tag{5.2.3}$$

такого, що $\sum_j |\lambda_j| < \infty$, а $\{\varphi_j\}$, $\{x_j\}$ — послідовності, що збігаються до нуля у відповідних просторах.

Лема 5.2.2. *Справджуються наступні топологічні ізоморфізми*

$$\mathcal{S}_+(E) \simeq E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{S}_+, \qquad \mathcal{S}(E) \simeq E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{S}. \tag{5.2.4}$$

Як наслідок, кожен елемент з $\mathcal{S}(E)$ *чи* $\mathcal{S}_+(E)$ *можна розкласти (не єдиним чином) в абсолютно збіжний ряд вигляду* (5.2.3).

Доведення. У роботі [187] доведено ізоморфізм

$$\mathcal{S}(E) \simeq E \otimes_{\mathfrak{e}} \mathcal{S},$$

де $\otimes_{\mathfrak{e}}$ позначає тензорний добуток, поповнений в ін'єктивній топології. Тому мають місце наступні топологічні ізоморфізми

$$E \otimes_{\mathfrak{e}} \mathcal{S} \simeq E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{S}, \qquad \mathcal{S}(E) \simeq E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{S}$$

завдяки ядерності простору $\mathcal{S}$ [54, IV.9.4, наслідок 2]. З теореми 1.2.2 (див. також [54, III.6.4]) про вигляд елементів проективного тензорного добутку випливає, що кожен $x \in E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{S}$ можна представити (не єдиним чином) у вигляді абсолютно збіжного ряду виду (5.2.3).

З леми 5.2.1 випливає, що звуження $\mathcal{S}(E) \ni x \longmapsto x_+ \in \mathcal{S}_+(E)$ є сюр'єктивним та неперервним. Тому кожен елемент $x_+ \in \mathcal{S}_+(E)$ також можна представити у вигляді абсолютно збіжного ряду виду (5.2.3). Отже, $x_+ \in E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{S}_+$ і для всіх $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+$

$$\|x_+\|_{\mathcal{S}_+^{\alpha,\beta}(E)} \le \inf \sum_{j\in\mathbb{N}} |\lambda_j| \|x_j\| \|\varphi_j\|_{\mathcal{S}_+^{\alpha,\beta}} = \|x_+\|_{E\otimes_{\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+^{\alpha,\beta}},$$

оскільки x_+ не залежить від представлення у вигляді ряду в $E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{S}_+$. Як наслідок останньої нерівності і теореми про відкрите відображення отримуємо перший з ізоморфізмів (5.2.4). □

5.2.2 Операторне узагальнення перетворення Лапласа

Нехай $G = \{G(t) \colon t \in \mathbb{R}_+^d\}$ — d-параметрична обмежена аналітична напівгрупа на комплексному банаховому просторі $(E, \|\cdot\|)$ з генератором $A = (A_1, \dots, A_d)$. Всюди в цьому параграфі ми припускаємо, що виконується наступна умова *всі генератори* A_j *марґінальних аналітичних напівгруп ін'єктивні та мають щільні області визначення та образи, тобто*

$$\overline{\mathfrak{D}(A_j)} = \overline{\operatorname{Im} A_j} = E, \quad j = 1, \ldots, d.$$

Відомо [123], що в такому випадку $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(A^{-1})$ є щільним підпростором з нормою

$$\|x\|_{\mathfrak{D}} := \|x\| + \sum_{j=1}^{d} \|A_j x\| + \sum_{j=1}^{d} \|A_j^{-1} x\|.$$

Для того, щоб підкреслити, що d-параметрична обмежена напівгрупа G генерується $A = (A_1, \ldots, A_d)$ ми будемо вживати позначення

$$e^{-tA} := e^{-t_1 A_1} \circ \cdots \circ e^{-t_d A_d},$$

де $e^{-t_j A_j}$ позначає відповідну марґінальну обмежену напівгрупу з генератором A_j, $j = 1, \ldots, d$.

Із наших припущень та попередніх зауважень випливає, що

1) існує така константа $M > 0$, що $\|e^{-tA}\| \leq M$ для всіх $t \in \mathbb{R}_+^d$;

2) для всіх мультиіндексів $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ коректно визначеними є степені операторів з відповідними щільними областями визначення

$$A^{\alpha} := A_1^{\alpha_1} \circ \ldots \circ A_d^{\alpha_d}, \qquad \mathfrak{D}(A^{\alpha}) := \bigcap_{j=1}^{d} \mathfrak{D}(A_j^{\alpha_j}),$$

$$A^{-\alpha} := A_1^{-\alpha_1} \circ \ldots \circ A_d^{-\alpha_d}, \qquad \mathfrak{D}(A^{-\alpha}) := \bigcap_{j=1}^{d} \mathfrak{D}(A_j^{-\alpha_j}).$$

Більше того, $A_i^{\alpha_i} \circ A_j^{\alpha_j} = A_j^{\alpha_j} \circ A_i^{\alpha_i}$ на $\mathfrak{D}(A^{\alpha})$ і $A_i^{-\alpha_i} \circ A_j^{-\alpha_j} = A_j^{-\alpha_j} \circ A_i^{-\alpha_i}$ на $\mathfrak{D}(A^{-\alpha})$ для всіх $i, j = 1, \ldots, d$;

3) кожен простір $\mathfrak{D}^{\alpha} = \mathfrak{D}(A^{\alpha}) \cap \mathfrak{D}(A^{-\alpha})$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$, наділений нормою

$$\|x\|_{\mathfrak{D}^{\alpha}} = \sum_{-\alpha \preccurlyeq \mu \preccurlyeq \alpha} \|A^{\mu} x\|_{\mathfrak{D}}$$

є повним, оскільки звуження на $\mathfrak{D}$ всіх $A_j^{\pm\alpha_j}$ є обмеженими операторами, що комутують між собою.

Визначимо простір $\mathfrak{U} := \bigcap \left\{ \mathfrak{D}^\alpha \colon \alpha \in \mathbb{Z}_+^d \right\}$ і наділимо його топологією проективної границі $\lim\operatorname{pr} \mathfrak{D}^\alpha$ відносно включень $\mathfrak{D}^\alpha \looparrowright \mathfrak{D}^\mu$ для всіх $\mu \preccurlyeq \alpha$. Зауважимо, що при цьому $\mathfrak{U}$ стає простором Фреше.

Лема 5.2.3. *Нехай $G = \{e^{-tA} : t \in \mathbb{R}_+^d\}$ — обмежена аналітична напівгрупа над комплексним банаховим простором E. Підпростір $\mathfrak{U}$ є інваріантним відносно дії операторів e^{-tA} для довільного $t \in \mathbb{R}_+^d$, крім того він щільний в E.*

Доведення. Перетин образів $\bigcap_{t \in \mathbb{R}_+^d} \operatorname{Im} e^{-tA}$ міститься в $\mathfrak{U}$ [181, теорема X.53]. Звідси випливають рівності

$$A^{-\alpha} e^{-tA} A^\alpha x = A^{-\alpha} A^\alpha e^{-tA} x = e^{-tA} x = e^{-tA} A^{-\alpha} A^\alpha x.$$

Тому для всіх елементів $x \in \mathfrak{D}(A^\alpha)$ і $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$, $t \in \mathbb{R}_+^d$ виконується рівність $A^{-\alpha} e^{-tA} x = e^{-tA} A^{-\alpha} x$. Отже, підпростір $\mathfrak{U}$ є інваріантним відносно дії операторів e^{-tA} для кожного $t \in \mathbb{R}_+^d$.

Не обмежуючи загальності, можна припустити [123], що резольвентні множини $\rho(A_j)$ і $\rho(A_j^{-1})$ містять $(0, \infty)$ та існує така константа $C > 0$, що

$$\sup_{t_j > 0} \left\| t_j (t_j + A_j^{\pm 1})^{-1} \right\| \leq C, \quad j = 1, \ldots, d. \tag{5.2.5}$$

Зауважимо, що звідси зокрема випливає, що марґінальні напівгрупи, що генеруються операторами A_j та A_j^{-1}, є аналітичні [96].

Перевіримо, що вкладення $\mathfrak{D}^\alpha \looparrowright \mathfrak{D}$ є щільним. Очевидною є така рівність

$$t_j (t_j + A_j)^{-1} x + 1/t_j \left[t_j (t_j + A_j)^{-1} \right] A_j x = x.$$

Підставляючи її саму в себе багато раз, отримаємо

$$\left[t_j (t_j + A_j)^{-1} \right]^{\alpha_j} x + \frac{1}{t_j} \sum_{m=1}^{\alpha_j} \left[t_j \left(t_j + A_j \right)^{-1} \right]^m A_j x = x.$$

З припущення (5.2.5) та щільності вкладення $\mathfrak{D}(A_j) \looparrowright E$ випливає

$$\lim_{t_j \to \infty} \left[t_j (t_j + A_j)^{-1} \right]^{\alpha_j} x = x \quad \text{для всіх} \quad x \in E.$$

Отже, вкладення $\mathfrak{D}(A_j^{\alpha_j}) \looparrowright E$ є щільним для всіх $\alpha_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, d$. Беручи до уваги те, що кожен обернений оператор A_j^{-1} також генерує аналітичну марґінальну напівгрупу (див. [96]), ми аналогічно отримаємо щільне вкладення $\mathfrak{D}(A_j^{-\alpha_j}) \looparrowright E$. Як наслідок, всі вкладення $\mathfrak{D}^\alpha \looparrowright E$ щільні. Замінюючи в попередніх міркуваннях E на $\mathfrak{D}^\mu$ при $\mu \preccurlyeq \alpha$, ми отримаємо щільне вкладення $\mathfrak{D}^\alpha \looparrowright \mathfrak{D}^\mu$.

Для продовження доведення нам потрібна буде теорема Ріхтера (див. [9, теорема 1.1] або [182]):

> *нехай* $\big\{E_k \colon k \in \mathbb{Z}\big\}$ *— такі банахові простори, що всі вкладення* $E_{k+1} \looparrowright E_k$ *є неперервні та щільні. Тоді вкладення* $\bigcap \big\{E_k \colon k \in \mathbb{Z}\big\} \looparrowright E_0$ *є щільним.*

Застосовуючи цю теорему до послідовності просторів

$$\big\{E_k = \mathfrak{D}^\alpha \colon \alpha = (k, \dots, k), k \in \mathbb{Z}\big\},$$

отримаємо, що вкладення $\mathfrak{U} = \bigcap \big\{E_k \colon k \in \mathbb{Z}\big\} \looparrowright E_0 = E$ є щільним. ☐

Позначимо $\mathscr{L}(\mathfrak{U}, E)$ простір необмежених лінійних операторів над E, що мають спільну область визначення $\mathfrak{U}$ і які діють з $\mathfrak{U}$ в E неперервно. Простір $\mathscr{L}(\mathfrak{U}, E)$ наділимо сильною операторною топологією.

Оскільки за лемою 5.2.3 маємо $e^{-tA}\mathfrak{U} \subset \mathfrak{U}$ для кожного $t \in \mathbb{R}_+^d$, то композиція $B \circ e^{-tA}$ належить $\mathscr{L}(\mathfrak{U}, E)$ для довільного оператора $B \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}, E)$. Комутативну підалгебру

$$\big\{B \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}, E) \colon e^{-tA} \circ B = B \circ e^{-tA}, \forall t \in \mathbb{R}_+^d\big\}$$

називають комутантом напівгрупи $\{e^{-tA} : t \in \mathbb{R}_+^d\}$.

Теорема 5.2.1. *Відображення*

$$\varPhi \colon \widehat{\mathcal{S}'_+} \ni \widehat{f} \longmapsto \widehat{f}(A) \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}, E), \quad \text{де} \quad \widehat{f}(A)x = \big\langle f(t), e^{-tA}x \big\rangle, \quad x \in \mathfrak{U}, \tag{5.2.6}$$

здійснює неперервний гомоморфізм з мультиплікативної алгебри аналітичних функцій $\widehat{\mathcal{S}'_+}$ *в комутант напівгрупи* $\{e^{-tA} : t \in \mathbb{R}^d_+\}$*. Оператори з образу* $\varPhi\big[\widehat{\mathcal{S}'_+}\big]$ *задовольняють рівність*

$$\widehat{f * g}(A) = \widehat{f}(A) \circ \widehat{g}(A), \qquad f, g \in \mathcal{S}'_+,$$

і $\widehat{\delta}_0(A) = I$ *— одиничний оператор.*

Доведення. З [181, теорема X.53] випливає, що для довільної обмеженої аналітичної напівгрупи $\{e^{-tA} : t \in \mathbb{R}^d_+\}$ існує така константа $M_0 > 0$, що нерівність

$$\big\|(tA)^{\alpha} e^{-tA} x\big\| \le M_0 \|x\|$$

справджується для всіх $x \in E$, $t \in \mathbb{R}^d_+$ та $\alpha \in \mathbb{Z}^d_+$.

Очевидно, що для довільного $\gamma \in \mathbb{Z}^d_+$ існує така константа K_γ, що виконується нерівність $(1+t)^\gamma \le K_\gamma (1 + t^\gamma)$ для всіх $t \in \mathbb{R}^d_+$. Зауважимо, що $t^\mu/(1+t)^\mu \le 1$ для всіх $t \in \mathbb{R}^d_+$ і $\mu \in \mathbb{Z}^d_+$.

Перевіримо, що відображення (5.2.6) коректно задано. Для довільного фіксованого $x \in E$ позначимо через ω_x наступну E-значну функцію

$$\omega_x \colon \mathbb{R}^d_+ \ni t \longmapsto e^{-tA} x \in E.$$

З вище сказаного випливає, що нерівності

$$\begin{aligned}
\big\|\omega_x\big\|_{\mathcal{S}^{\alpha,\beta}_+(E)} &= \max_{\substack{0 \preccurlyeq \mu \preccurlyeq \alpha \\ 0 \preccurlyeq \nu \preccurlyeq \beta}} \sup_{t \in \mathbb{R}^d_+} \big\|t^\mu \partial^\nu e^{-tA} x\big\| \le \max_{\substack{0 \preccurlyeq \mu \preccurlyeq \alpha \\ 0 \preccurlyeq \nu \preccurlyeq \beta}} \sup_{t \in \mathbb{R}^d_+} \big\|t^\mu A^\nu e^{-tA} x\big\|_{\mathfrak{D}} \\
&= \max_{\substack{0 \preccurlyeq \mu \preccurlyeq \alpha \\ 0 \preccurlyeq \nu \preccurlyeq \beta}} \sup_{t \in \mathbb{R}^d_+} \left\|\frac{t^\mu}{(1+t)^\mu} (1+t)^\mu A^\nu e^{-tA} x\right\|_{\mathfrak{D}} \le \max_{\substack{0 \preccurlyeq \mu \preccurlyeq \alpha \\ 0 \preccurlyeq \nu \preccurlyeq \beta}} \sup_{t \in \mathbb{R}^d_+} \big\|(1+t)^\mu A^\nu e^{-tA} x\big\|_{\mathfrak{D}} \\
&\le \max_{0 \preccurlyeq \nu \preccurlyeq \gamma} \sup_{t \in \mathbb{R}^d_+} \big\|(1+t)^\gamma A^\nu e^{-tA} x\big\|_{\mathfrak{D}} \le K_\gamma \max_{0 \preccurlyeq \nu \preccurlyeq \gamma} \sup_{t \in \mathbb{R}^d_+} \big\|(1+t^\gamma) A^\nu e^{-tA} x\big\|_{\mathfrak{D}} \\
&= K_\gamma \max_{0 \preccurlyeq \nu \preccurlyeq \gamma} \sup_{t \in \mathbb{R}^d_+} \big\|e^{-tA} A^\nu x + (tA)^\gamma e^{-tA} A^{\nu-\gamma} x\big\|_{\mathfrak{D}} \\
&\le K_\gamma M \max_{0 \preccurlyeq \nu \preccurlyeq \gamma} \|A^\nu x\|_{\mathfrak{D}} + K_\gamma M_0 \max_{0 \preccurlyeq \nu \preccurlyeq \gamma} \|A^{\nu-\gamma} x\|_{\mathfrak{D}} \le K_\gamma (M + M_0) \|x\|_{\mathfrak{D}^\gamma}
\end{aligned} \tag{5.2.7}$$

справджуються для всіх $x \in \mathfrak{D}^\gamma$, де $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_d)$ і $\gamma_j = \max\{\alpha_j, \beta_j\}$, $j = 1, \dots, d$. Тому для кожного $x \in \mathfrak{U} = \bigcap \mathfrak{D}^\gamma$ функція ω_x належить простору $\mathcal{S}_+(E)$.

За лемою 5.2.2 існує розклад

$$\omega_x = \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j x_j \otimes \varphi_j, \tag{5.2.8}$$

де $x_j \in E$ і $\varphi_j \in \mathcal{S}_+$. Із абсолютної збіжності цього ряду в $\mathcal{S}_+(E)$ випливає, що

$$\varLambda \circ \omega_x = \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j x_j \otimes \varLambda \varphi_j,$$

де $\varLambda$ — оператор розширення з леми 5.2.1 (тут $\varLambda$ застосований до скалярних функцій). Таким чином, дія

$$\langle f, \varLambda \circ \omega_x \rangle := \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j \langle f, \varLambda \varphi_j \rangle x_j$$

коректно визначена. Відомо, що це означення не залежить від представлення у вигляді ряду (5.2.8). Оскільки носій розподілу $f \in \mathcal{S}'_+$ міститься в $\mathbb{R}^d_+$, а оператор

$$\varLambda : \mathcal{S}_+ \ni \varphi_j \longmapsto \varLambda \varphi_j \in \mathcal{S}$$

змінює функцію φ_j поза межами $\mathbb{R}^d_+$, то це означення не залежить від $\varLambda$. Тому ми писатимемо

$$\langle f, \omega_x \rangle = \langle f(t), e^{-tA} x \rangle$$

замість $\langle f, \varLambda \circ \omega_x \rangle$. Отже, відображення (5.2.6) однозначно визначає лінійний оператор $\widehat{f}(A) \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}, E)$.

Перевіримо його неперервність. Відомо (див. [54, IV.9.4 наслідок 1]), що з ядерності простору $\mathcal{S}_+$ випливає ізоморфізм $E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{S}_+ \simeq \mathscr{L}(\mathcal{S}'_+, E)$. Таким чином з леми 5.2.2 отримаємо ізоморфізм

$$\mathcal{S}_+(E) \simeq \mathscr{L}(\mathcal{S}'_+, E). \tag{5.2.9}$$

Тому кожну функцію $\omega_x \in \mathcal{S}_+(E)$, $x \in \mathfrak{U}$, можна ототожнити з лінійним неперервним оператором

$$\Omega_x : \mathcal{S}'_+ \ni f \longmapsto \langle f, \omega_x \rangle \in E, \qquad x \in \mathfrak{U},$$

що належить простору $\mathscr{L}(\mathcal{S}'_+, E)$ згідно з (5.2.9). Отже, для кожної пари $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^d_+$ існує така константа $C_{\alpha,\beta}$, що

$$\|\langle f, \omega_x \rangle\| \leq C_{\alpha,\beta} \|f\|_{\mathcal{S}^{\alpha,\beta}_+} \|\omega_x\|_{\mathcal{S}^{\alpha,\beta}_+(E)}, \qquad x \in \mathfrak{U},$$

де $\|f\|_{\mathcal{S}^{\alpha,\beta}_+}$ — норма звуження $f\big|_{\mathcal{S}^{\alpha,\beta}_+}$. З нерівностей (5.2.7) випливає, що $\widehat{f}(A) \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}, E)$. Остаточно, неперервність відображення $\varPhi$ слідує з неперервності перетворення Лапласа $L\colon \mathcal{S}'_+ \longrightarrow \widehat{\mathcal{S}'_+}$.

Перевіримо, що $\varPhi$ є алгебраїчним гомоморфізмом. Спочатку припустимо, що розподіл $g \in \mathcal{S}'_+$ є регулярним, тобто лінійну форму $\langle g, \omega_x \rangle$ можна представити у вигляді інтеграла Бохнера. Використовуючи відомі властивості інтеграла, отримаємо

$$\begin{aligned}\widehat{f * g}(A)x = \langle f * g, \omega_x \rangle &= \Big\langle f(t), \big\langle g(s), e^{-(s+t)A} x \big\rangle \Big\rangle \\ &= \Big\langle f(t), e^{-tA} \big\langle g(s), e^{-sA} x \big\rangle \Big\rangle = \big[\widehat{f}(A) \circ \widehat{g}(A)\big] x\end{aligned}$$

для всіх $x \in \mathfrak{U}$. Лема 5.2.3 гарантує, що підпростір $\mathfrak{U}$ є інваріантним відносно дії операторів e^{-tA} для довільного $t \in \mathbb{R}^d_+$. Отже, композиція операторів в останній формулі коректно визначена. Оскільки згортка є комутативною в алгебрі $\mathcal{S}'_+$, ми отримаємо $\widehat{f}(A) \circ \widehat{g}(A) = \widehat{g}(A) \circ \widehat{f}(A)$ для довільного регулярного g. Наближаючи довільний розподіл $g \in \mathcal{S}'_+$ регулярними та використовуючи неперервність відображення $\varPhi \circ L$ з $\mathcal{S}'_+$ в $\mathscr{L}(\mathfrak{U}, E)$, отримаємо потрібну властивість для всіх $f, g \in \mathcal{S}'_+$.

Для функціонала Дірака $\delta_t \in \mathcal{S}'_+$, зосередженого в точці $t \in \mathbb{R}^d_+$, із (5.2.6) отримаємо

$$\widehat{\delta}_t(A)x = e^{-tA}x \qquad \text{для всіх} \qquad x \in \mathfrak{U}.$$

Таким чином, $\widehat{\delta}_0(A)$ — одиничний оператор на E. Для довільних $f \in \mathcal{S}'_+$ та $t \in \mathbb{R}^d_+$ маємо

$$\widehat{f}(A)\circ e^{-tA} = \widehat{f}(A)\circ\widehat{\delta}_t(A) = \widehat{f * \delta_t}(A) = \widehat{\delta_t * f}(A) = \widehat{\delta}_t(A)\circ\widehat{f}(A) = e^{-tA}\circ\widehat{f}(A).$$

Отже, оператори з образу $\Phi\big[\widehat{\mathcal{S}'_+}\big]$ належать комутанту аналітичної напівгрупи $\{e^{-tA} : t \in \mathbb{R}^d_+\}$. □

Гомоморфізм Φ з теореми 5.2.1 ми розуміємо як функціональне числення в алгебрі $\widehat{\mathcal{S}'_+}$ аналітичних на $\mathbb{C}^d_+$ функцій.

Приклад 5.2.1. *Розглянемо випадок $n = 1$. Нехай A — деякий (ін'єктивний) генератор обмеженої аналітичної однопараметричної напівгрупи на банаховому просторі E. Визначимо узагальнені функції (див. [7, 4.8])*

$$f_\sigma(\tau) = \begin{cases} \dfrac{\theta(\tau)\tau^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)}, & \sigma > 0, \\[2ex] f'_{\sigma+1}(\tau), & \sigma \le 0, \end{cases}$$

де θ — характеристична функція півосі $\mathbb{R}_+$. Якщо $\sigma > 0$, то

$$\begin{aligned} \widehat{f}_\sigma(z) = \big\langle f_\sigma(\tau), e^{-\tau z}\big\rangle = \int_0^\infty \frac{\tau^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)} e^{-\tau z}\, d\tau\Big|_{\tau z = v} \\ = \frac{1}{z^\sigma\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty v^{\sigma-1}e^{-v}\, dv = \frac{\Gamma(\sigma)}{z^\sigma\Gamma(\sigma)} = z^{-\sigma} \end{aligned}$$

для всіх $z \in \mathbb{C}_+$. Якщо $\sigma < 0$, то знайдеться таке натуральне число $\alpha \in \mathbb{N}$, що $\sigma + \alpha > 0$. Тоді

$$\widehat{f}_\sigma(z) = L\left[f^{(\alpha)}_{\sigma+\alpha}\right](z) = z^\alpha L\left[f_{\sigma+\alpha}\right](z) = z^\alpha z^{-(\sigma+\alpha)} = z^{-\sigma}, \qquad z \in \mathbb{C}_+.$$

Якщо ж $\sigma = 0$, то $\widehat{f}_0(z) = \widehat{\delta}_0(z) \equiv 1$ для всіх $z \in \mathbb{C}_+$.

Таким чином, застосовуючи числення (5.2.6) для довільного $\sigma \in \mathbb{R}$ отримаємо

$$\widehat{f}_\sigma(A)x = \big\langle f_\sigma(\tau), e^{-\tau A}x\big\rangle =: A^{-\sigma}x, \qquad x \in \mathfrak{U}.$$

Отже, використовуючи теорему 5.2.1, ми можемо визначити довільний дійсний степінь оператора над щільним підпростором $\mathfrak{U}$.

Приклад 5.2.2. *Нехай* $E = L_2(\mathbb{R}^d)$ *— простір квадратично інтегровних комплексних функцій* $y\colon \mathbb{R}^d \ni \xi \longmapsto y(\xi)$ *і*

$$-A = D_\xi^2 := \left(D_{\xi_1}^2, \ldots, D_{\xi_d}^2\right), \qquad \text{де} \qquad D_{\xi_j}^2 = \frac{\partial^2}{\partial {\xi_j}^2}, \quad j = 1, \ldots, d.$$

Розглянемо щільний підпростір $H_2(\mathbb{R}^d) \subset L_2(\mathbb{R}^d)$ *квадратично інтегровних функцій, що мають ціле аналітичне продовження на* $\mathbb{C}^d$*. Відомо (див. [104]), що оператор* D_ξ^2 *є ін'єктивним на* $H_2(\mathbb{R}^d)$*.*

Розглянемо ядро Ґаусса

$$\mathfrak{g}_t(\zeta) = \prod_{j=1}^{d} \frac{1}{2\sqrt{\pi t_j}}\, e^{-\frac{\zeta_j^2}{4t_j}}, \quad \zeta \in \mathbb{R}^d, \quad t \in \operatorname{\mathsf{int}} \mathbb{R}_+^d.$$

Використовуючи відому рівність для Ґама функції

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathfrak{g}_t(\zeta)(-\zeta)^{2\alpha}\, d\zeta = \frac{2^d(2\alpha-1)!}{(\alpha-1)!} t^\alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{N}^d,$$

та формулу (5.1.13) *отримаємо, що рівність*

$$e^{-tA} y(\xi) = (\mathfrak{g}_t * y)(\xi) \tag{5.2.10}$$

справджуються для всіх $y \in H_2(\mathbb{R}^d)$*. Оскільки підпростір* $H_2(\mathbb{R}^d)$ *є щільним в* $L_2(\mathbb{R}^d)$*, то дія операторів* e^{-tA} *може бути записана у вигляді перетворення Вейєрштрасса*

$$e^{tD_\xi^2} y = (\mathfrak{g}_t * y)(\xi) \qquad \text{для всіх} \quad y \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

Остаточно, формула функціонального числення набере вигляду

$$\widehat{f}(-D_\xi^2) y(\xi) = \big\langle f(t), (\mathfrak{g}_t * y)(\xi) \big\rangle,$$

для всіх $f \in S'_+$*,* $y \in W_2^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathfrak{U}$*, де*

$$W_2^\infty(\mathbb{R}^d) = \bigcap \left\{ W_2^{2\alpha}(\mathbb{R}^d) \colon \alpha \in \mathbb{Z} \right\}$$

є простором Соболєва нескінченного порядку (див. [104]).

5.2.3 Диференціальні властивості

У цьому пункті встановимо деякі диференціальні властивості операторів $\widehat{f}(A)$, що характерні для скалярного перетворення Лапласа.

Нехай виконуються всі припущення пункту 5.2.2.

Символом $\mathfrak{U}\otimes_{\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+$ позначимо підпростір в $E\otimes_{\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+\simeq\mathcal{S}_+(E)$ функцій вигляду $x\colon\mathbb{R}^d_+\ni t\longmapsto x(t)\in\mathfrak{U}$. Визначимо в банаховому просторі E підпростір $\widehat{\mathfrak{U}}$ наступним чином

$$\widehat{\mathfrak{U}}:=\left\{\widehat{x}_A\in E\colon x\in\mathfrak{U}\otimes_{\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+\right\},\qquad\text{де}\qquad\widehat{x}_A:=\int_{\mathbb{R}^d_+}e^{-tA}x(t)\,dt.$$

Якщо $x=y\otimes\varphi$ при $y\in\mathfrak{U}$ і $\varphi\in\mathcal{S}_+$, то

$$\widehat{x}_A=\widehat{\varphi}(A)y,\qquad\text{де}\qquad\widehat{\varphi}(A)=\int_{\mathbb{R}^d_+}\varphi(t)e^{-tA}\,dt.$$

Зауважимо, що $\widehat{\varphi}(A)$ — обмежений лінійний оператор на E, визначений класичним функціональним численням Хілле-Філліпса [38] як значення перетворення Лапласа $\widehat{\varphi}=L[\varphi]$ на генераторі A.

Лема 5.2.4. *Підпростір* $\widehat{\mathfrak{U}}\subset\mathfrak{U}$ *щільний в* E.

Доведення. Розглянемо $\mathfrak{U}$-значну функцію $x=y\otimes\varphi$, де $y\in\mathfrak{U}$ і $\varphi\in\mathcal{S}_+$, що належить простору $\mathfrak{U}\otimes_{\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+$. З інтегрального представлення $\widehat{x}_A$ випливає

$$\|\widehat{x}_A\|_{\mathfrak{D}^\alpha}\le M\,\|y\|_{\mathfrak{D}^\alpha}\,\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^d_+)}$$

для всіх $\alpha\in\mathbb{Z}^d_+$. Отже, $\widehat{x}_A\in\mathfrak{U}$ для всіх $x=y\otimes\varphi$, де $y\in\mathfrak{U}$ і $\varphi\in\mathcal{S}_+$.

Припустимо, що $\widehat{\mathfrak{U}}$ не є щільним в E. Тоді за теоремою Гана-Банаха знайдеться такий ненульовий функціонал $x'\in E'$, що $\langle x',\widehat{x}_A\rangle=0$ для всіх $x=y\otimes\varphi$, де $y\in\mathfrak{U}$ і $\varphi\in\mathcal{S}_+$. З відомих властивостей інтеграла Бохнера (див. [38, 3.7]) випливає, що

$$\langle x',\widehat{x}_A\rangle=\int_{\mathbb{R}^d_+}\langle x',e^{-tA}y\rangle\varphi(t)\,dt=0$$

для всіх $\varphi \in \mathcal{S}_+$. Таким чином, для довільного $y \in \mathfrak{U}$ дійсна аналітична функція $t \longmapsto \langle x', e^{-tA}y \rangle$ повинна бути тотожно нульова на $\mathbb{R}^d_+$, в іншому випадку можна вибрати таку функцію $\varphi \in \mathcal{S}_+$, щоб величина $\langle x', \widehat{x}_A \rangle$ була відмінна від нуля.

Зокрема для $t = 0$ отримаємо, що рівність $\langle x', y \rangle = 0$ справджується для всіх $y \in \mathfrak{U}$. Підпростір $\mathfrak{U}$ щільний в E за лемою 5.2.3. Звідси випливає $x' = 0$, що протирічить вибору функціоналу x'. $\square$

Формула функціонального числення з теореми 5.2.1 дозволяє встановити деякі нові диференціальні властивості операторів $\widehat{f}(A)$.

Теорема 5.2.2. *Для довільного* $\alpha \in \mathbb{Z}^d_+$ *справджується рівність*

$$\widehat{\partial^\alpha f}(A)x = A^\alpha \widehat{f}(A)x, \qquad x \in \mathfrak{U}.$$

Доведення. З леми 5.2.3 випливає $A^\alpha e^{-tA}x = e^{-tA}A^\alpha x$ для всіх $t \in \mathbb{R}^d_+$, $\alpha \in \mathbb{Z}^d_+$ і $x \in \mathfrak{U}$. Тому

$$\begin{aligned}\widehat{\partial^\alpha f}(A)x = \langle \partial^\alpha f(t), e^{-tA}x \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle f(t), (-A)^\alpha e^{-tA}x \rangle \\ &= \langle f(t), e^{-tA}A^\alpha x \rangle = \widehat{f}(A)A^\alpha x = A^\alpha \widehat{f}(A)x.\end{aligned}$$

$\square$

Для кожної функції $x\colon \mathbb{R}^d_+ \ni t = (t_1, \ldots, t_d) \longmapsto x(t_1, \ldots, t_d) \in \mathfrak{U}$, що належить $\mathfrak{U} \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{S}_+$ визначимо $\mathfrak{U}$-значні функції $\widetilde{x}_{A_j}\colon \mathbb{R}_+ \ni \tau \longmapsto \widetilde{x}_{A_j}(\tau) \in \mathfrak{U}$, $j = 1, \ldots, d$, наступним чином

$$\widetilde{x}_{A_j}(\tau) := \int_{\mathbb{R}^{d-1}_+} e^{-tA}x(t)\, d\check{t}_j,$$

де $d\check{t}_j := dt_1 \ldots dt_{j-1}\, dt_{j+1} \ldots dt_d$, $j = 1, \ldots, d$. Зауважимо, що інтеграл в останній формулі ми розуміємо в наступному сенсі

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^{d-1}_+} e^{-tA}x(t)\, d\check{t}_j \\ &\qquad = e^{-\tau A_j} \int_{\mathbb{R}^{d-1}_+} e^{-\sum\limits_{k=1}^{j-1} t_k A_k - \sum\limits_{k=j+1}^{n} t_k A_k} x(t_1, \ldots, t_{j-1}, \tau, t_{j+1}, \ldots, t_d)\, d\check{t}_j.\end{aligned}$$

Теорема 5.2.3. *Для довільного* $\alpha \in \mathbb{N}$ *і всіх* $j = 1, \dots, d$ *справджуються рівності*

$$\widehat{f}(A)\widehat{\partial_j^\alpha x}_A = A_j^\alpha \widehat{f}(A)\widehat{x}_A - \sum_{r=0}^{\alpha-1} A_j^{\alpha-r-1}\widehat{f}(A)\widetilde{\partial_j^r \Lambda x}_{A_j}(0), \qquad \widehat{x}_A \in \widehat{\mathfrak{U}}. \quad (5.2.11)$$

Доведення. З леми 5.2.4 випливає, що оператор $\widehat{f}(A)$ в рівностях (5.2.11) щільно заданий. Виберемо довільний елемент $x \in \mathfrak{U} \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{S}_+ \subset \mathcal{S}_+(E)$. Тоді з означення простору $\mathcal{S}_+(E)$ для довільного $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ отримуємо

$$\lim_{t_j \uparrow \infty} \partial_j^\alpha x(t_1, \dots, t_d) = 0, \qquad j = 1, \dots, d.$$

Більше того, з леми 5.2.1 маємо

$$\lim_{t_j \downarrow 0} \partial_j^\alpha x(t_1, \dots, t_d) = (\partial_j^\alpha \Lambda x)(t_1, \dots, t_{j-1}, 0, t_{j+1}, \dots, t_d).$$

З обмеженості та неперервності напівгрупи $\{e^{-tA} : t \in \mathbb{R}_+^d\}$ випливають рівності

$$\begin{aligned} &\lim_{t_j \uparrow \infty} e^{-tA}\partial_j^\alpha x(t) = 0 \quad \text{і} \\ &\lim_{t_j \downarrow 0} e^{-tA}\partial_j^\alpha x(t_1, \dots, t_d) = (\partial_j^\alpha \Lambda x)(t_1, \dots, t_{j-1}, 0, t_{j+1}, \dots, t_d) \end{aligned}$$

для всіх $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ і $j = 1, \dots, d$. Інтегруючи частинами за змінною t_j і використовуючи останні рівності, отримаємо

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-t_j A_j}\partial_j^1 x(t)\, dt_j &= A_j \int_0^\infty e^{-t_j A_j} x(t)\, dt_j + \lim_{t_j \uparrow \infty} e^{-t_j A_j} x(t) - \lim_{t_j \downarrow 0} e^{-t_j A_j} x(t) \\ &= A_j \int_0^\infty e^{-t_j A_j} x(t)\, dt_j - (\Lambda x)(t_1, \dots, t_{j-1}, 0, t_{j+1}, \dots, t_d). \end{aligned}$$

Продовжуючи рекурсивно та інтегруючи за іншими змінними, отримаємо

$$\begin{aligned} \widehat{\partial_j^\alpha x}_A = \int_{\mathbb{R}_+^d} e^{-tA}\partial_j^\alpha x(t)\, dt &= A_j^\alpha \widehat{x}_A - \sum_{r=0}^{\alpha-1} A_j^{\alpha-r-1} \lim_{t_j \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}_+^{d-1}} e^{-tA}\partial_j^r x(t)\, d\check{t}_j \\ &= A_j^\alpha \widehat{x}_A - \sum_{r=0}^{\alpha-1} A_j^{\alpha-r-1}\widetilde{\partial_j^r \Lambda x}_{A_j}(0). \end{aligned}$$

Залишилось подіяти розподілом $f \in \mathcal{S}'_+$ на обидві частини останньої рівності і застосувати теорему 5.2.1. В результаті отримаємо

$$\begin{aligned}\widehat{f}(A)\widehat{\partial_j^\alpha x}_A &= \left\langle f(t), e^{-tA}A_j^\alpha \widehat{x}_A\right\rangle \\ &\qquad - \sum_{r=0}^{\alpha-1}\left\langle f(s), e^{-sA}A_j^{\alpha-r-1}\lim_{t_j\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}_+^{d-1}} e^{-tA}\partial_j^r x(t)\,d\check{t}_j\right\rangle \\ &= A_j^\alpha \widehat{f}(A)\widehat{x}_A - \sum_{r=0}^{\alpha-1} A_j^{\alpha-r-1}\widehat{f}(A)\widetilde{\partial_j^r \Lambda x}_{A_j}(0).\end{aligned}$$

□

Приклад 5.2.3. *Розглянемо генератор* $A = -D_\xi^2$ *напівгрупи* (5.2.10), *визначеної на просторі Соболєва* $W_2^\infty(\mathbb{R}^d)$ *(див. приклад 5.2.2).*

Нехай $x \in \mathcal{S}_+$ *і* $y \in W_2^\infty(\mathbb{R}^d)$ *— довільні функції. Для кожної функції*

$$w\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^d \ni (\xi,t) \longmapsto w(x,t) := y(\xi)x(t) \in \mathbb{C},$$

що належить простору $W_2^\infty(\mathbb{R}^d)\otimes_{\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+$ *маємо*

$$\widehat{\partial_j^1 w}_A(\xi) = D_{\xi_j}^2 \widehat{w}_A(\xi) - \widetilde{w}_{A_j}(\xi), \qquad j = 1,\dots,d,$$

де функції $\widehat{\partial_j^1 w}_A$, $\widehat{w}_A$ *з простору Соболєва* $W_2^\infty(\mathbb{R}^d)$ *мають вигляд*

$$\widehat{\partial_j^1 w}_A(\xi) = \int_{\mathbb{R}_+^d} (\mathfrak{g}_t * y)(\xi)\partial_j^1 x(t)\,dt, \qquad \widehat{w}_A(\xi) = \int_{\mathbb{R}_+^d} (\mathfrak{g}_t * y)(\xi)x(t)\,dt,$$

а функцію $\widetilde{w}_{A_j} \in W_2^\infty(\mathbb{R}^d)$ *можна подати у вигляді*

$$\widetilde{w}_{A_j}(\xi) = \int_{\mathbb{R}_+^{d-1}} (\mathfrak{g}_t * y)(\xi)\check{x}_j(t)\,d\check{t}_j,$$

де $\check{x}_j(t) := x(t_1,\dots,t_{j-1},0,t_{j+1},\dots,t_d)$.

Застосувавши формулу (5.2.11), *отримаємо*

$$\widehat{f}(A)\widehat{\partial_j^1 w}_A(\xi) = D_{\xi_j}^2 \widehat{f}(A)\widehat{w}_A(\xi) - \left\langle f(t), (\mathfrak{g}_t * \widetilde{w}_{A_j})(\xi)\right\rangle, \qquad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

5.3 Операторне числення в класі поліноміальних узагальнених функцій повільного росту над банаховим простором

Функціональне числення Хілле-Філліпса для функцій однієї та багатьох змінних було предметом розгляду в роботах Е. Хілле, Р. Філліпса, А. Міротіна, О. Лопушанського та автора дисертації (див., наприклад, [25, 38, 157] та посилання там). Випадок функцій нескінченної кількості змінних досліджений менше. У цьому контексті слід згадати книгу [34], що присвячена спектральним питанням (серед них і функціональне числення) зліченних наборів самоспряжених операторів на гільбертовому просторі.

Основна мета цього параграфу — це побудова функціонального числення типу Хілле-Філліпса для зліченного набору генераторів сильно неперервних напівгруп стиску, що діють в деякому банаховому просторі.

Тензорні алгебри над простором швидко спадних функцій з тензорним добутком в якості множення (так звані алгебри Борхерса-Улмана) ефективно використовуються в квантовій теорії поля (див., наприклад, [78, 215]). Такі алгебри мають еквівалентну структуру поліномів з поточковим множенням [99]. Це було поштовхом для дослідження проблем, пов'язаних поліноміальним розширенням крос-кореляції (ультра)розподілів, диференціювань і відповідного функціонального числення [158, 161]. Елементи алгебр Борхерса-Улмана можна трактувати як функціонали на просторах нескінченно гладких функцій нескінченної кількості змінних. Ми можемо розуміти таку алгебру як простір поліноміальних розподілів з тензорною структурою. В цьому параграфі ми розглянемо таку структуру для одного спеціального випадку.

Використовуючи техніку Ґротендіка [120], ми вводимо поліноміальне розширення крос-кореляції і доводимо теорему 5.3.1 про ізоморфне представлення алгебри поліноміальних розподілів у вигляді комутанта поліноміальної напівгрупи зсувів (див. формулу (5.3.3)) в просторі лінійних неперервних операторів на $\bigoplus_n \mathcal{S}_+^{\widehat{\otimes} n}$. У твердженні 5.3.2 ми доводимо диференціальну властивість поліноміальної крос-кореляції, яка суттєво використовується в основній теоремі 5.3.2 цього параграфу.

У пункті 5.3.2 ми розширюємо узагальнене перетворення Фур'є на простір поліноміальних основних та узагальнених функцій. Елементи образу цього відображення ми розуміємо як функції та функціонали нескінченної кількості змінних (див. зауваження 5.3.1 та 5.3.2) відповідно.

Побудовані поліноміальні основні та узагальнені функції ми застосовуємо до операторних напівгруп нескінченної кількості параметрів. А саме, ми будуємо функціональне числення для зліченної системи генераторів (C_0) напівгруп стиску і доводимо його властивості (див. зауваження 5.3.3 і теорему 5.3.2). Це числення є нескінченновимірним аналогом числення, побудованого в параграфі 5.1 (див. також [157]). В якості прикладу ми розглядаємо нескінченновимірну напівгрупу Ґаусса, яка генерується зліченним набором операторів другого диференціювання.

5.3.1 Основні відомості про поліноміальні розподіли повільного росту

Нехай $\mathcal{S}_+$ позначає простір Шварца швидко спадних функцій на $\mathbb{R}_+$, а $\mathcal{S}'_+$ — спряжений простір розподілів повільного росту з носіями в $\mathbb{R}_+$. Відомо (див. [146, 207]), що що $\mathcal{S}_+$ є ядерним (FS) простором, а $\mathcal{S}'_+$ — ядерним (DFS) простором. Ці факти суттєво використовуються в наших дослідженнях.

Зауважимо, що сильна топологія на $\mathcal{S}'_+$ співпадає з топологією Маккі і топологією індуктивної границі (див. [54, IV.4, IV.5]). Нехай δ_t позначає дельта функцію Дірака, зосереджену в точці $t \in \mathbb{R}_+$. Відомо [7], що $\mathcal{S}'_+$ є топологічною алгеброю з одиницею $\delta := \delta_0$ відносно згортки.

Головні об'єкти дослідження у цьому параграфі — це алгебри $\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$ і $\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+)$ поліноміальних основних та узагальнених функцій, що мають тензорну структуру вигляду $\bigoplus_{fin}\limits_{n\in\mathbb{Z}_+}\mathcal{S}_+^{\widehat{\otimes}n}$ і $\mathop{\times}\limits_{n\in\mathbb{Z}_+}\mathcal{S}_+^{\prime\widehat{\otimes}n}$ відповідно. Для зручності читача коротко повторимо деякі факти, які описані в пункті 3.1.2 (для детальнішої інформації див. [99]).

Щоб визначити локально опуклий простір $\mathcal{P}_n(\mathcal{S}'_+)$ n-однорідних поліномів на $\mathcal{S}'_+$ ми використовуємо канонічний топологічний лінійний ізоморфізм $\mathcal{P}_n(\mathcal{S}'_+)\simeq(\mathcal{S}_+^{\prime\widehat{\otimes}n})'$. А саме, для довільного функціоналу $p_n\in(\mathcal{S}_+^{\prime\widehat{\otimes}n})'$ визначимо n-однорідний поліном $P_n\in\mathcal{P}_n(\mathcal{S}'_+)$ за наступною формулою $P_n(f):=\langle p_n, f^{\otimes n}\rangle$, $f\in\mathcal{S}'_+$. Приймемо за означенням $\mathcal{P}_0(\mathcal{S}'_+):=\mathbb{C}$. Простір $\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$ всіх неперервних поліномів на $\mathcal{S}'_+$ визначають як скінченну комплексну лінійну оболонку всіх $\mathcal{P}_n(\mathcal{S}'_+)$, $n\in\mathbb{Z}_+$. Простори $\mathcal{P}_n(\mathcal{S}'_+)$, $n\in\mathbb{Z}_+$, $\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$ наділяємо локально опуклою топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах простору розподілів $\mathcal{S}'_+$. Позначимо символом $\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+)$ сильно спряжений простір до $\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$. Як і в параграфі 2.2 для спрощення записів введемо позначення

$$\Gamma(\mathcal{S}_+):=\bigoplus_{fin}\limits_{n\in\mathbb{Z}_+}\mathcal{S}_+^{\widehat{\otimes}n}\qquad\text{і}\qquad\Gamma(\mathcal{S}'_+):=\mathop{\times}\limits_{n\in\mathbb{Z}_+}\mathcal{S}_+^{\prime\widehat{\otimes}n}.$$

З теореми 2.2.3 (див. також [161, твердження 2.1]) випливає, що справджуються наступні топологічні ізоморфізми

$$\Upsilon:\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)\longrightarrow\Gamma(\mathcal{S}_+),\qquad\Psi:\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+)\longrightarrow\Gamma(\mathcal{S}'_+).\tag{5.3.1}$$

Нагадаємо, що елементи просторів $\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$ і $\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+)$ ми називаємо поліноміальними основними та узагальненими функціями відповідно. Елементи просторів типу Фока $\Gamma(\mathcal{S}_+)$ і $\Gamma(\mathcal{S}'_+)$ ми писатимемо у вигляді

$$\boldsymbol{p}=\bigoplus_{n=0}^{m}p_n=(p_0,p_1,\dots,p_m,0,\dots)\in\Gamma(\mathcal{S}_+),\qquad m\in\mathbb{N},$$
$$\boldsymbol{u}=\mathop{\times}\limits_{n\in\mathbb{Z}_+}u_n=(u_0,u_1,\dots,u_n,\dots)\in\Gamma(\mathcal{S}'_+),$$

відповідно, або спрощено $\big(p_n\big)$, $\big(u_n\big)$, де $p_n \in \mathcal{S}_+^{\widehat{\otimes} n}$ і $u_n \in \mathcal{S}_+'^{\widehat{\otimes} n}$ для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$. Жирний шрифт буде використовуватись виключно для елементів просторів $\Gamma(\mathcal{S}_+)$ і $\Gamma(\mathcal{S}'_+)$.

Визначимо операцію

$$\big(f^{\otimes n}\big) \circledast \big(g^{\otimes n}\big) := \big((f * g)^{\otimes n}\big)$$

для елементів тотальної підмножини (3.1.7) простору $\Gamma(\mathcal{S}'_+)$ і розширимо її на весь простір за лінійністю та неперервністю. Очевидно, що $\Gamma(\mathcal{S}'_+)$ стає алгеброю з одиничним елементом $\big(\delta^{\otimes n}\big)$ відносно введеної операції $\circledast$. Оскільки $\Gamma(\mathcal{S}_+)$ неперервно і щільно вкладений в $\Gamma(\mathcal{S}'_+)$ (див. [161]) і простір $\mathcal{S}_+$ є згортковою алгеброю (див. [7]), то простір $\Gamma(\mathcal{S}_+)$ теж є алгеброю відносно $\circledast$.

За аналогією з формулою (4.3.11) визначимо оператор $K^{\otimes} \in \mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{S}_+)\big)$ за правилом

$$K^{\otimes} := \big(K^{\otimes n}\big) : \boldsymbol{p} = (p_n) \quad \longmapsto \quad K^{\otimes}\boldsymbol{p} := \big(K^{\otimes n} p_n\big), \tag{5.3.2}$$

де $K \in \mathscr{L}(\mathcal{S}_+)$, $K^{\otimes 0} := I_{\mathbb{C}}$, а кожен оператор $K^{\otimes n} \in \mathscr{L}(\mathcal{S}_+^{\widehat{\otimes} n})$ визначений як лінійне та неперервне розширення відображення $\varphi^{\otimes n} \longmapsto (K\varphi)^{\otimes n}$, $\varphi \in \mathcal{S}_+$, $n \in \mathbb{N}$.

Розглянемо однопараметричну (C_0) напівгрупу зсувів

$$T\colon \mathbb{R}_+ \ni s \longmapsto T_s \in \mathscr{L}(\mathcal{S}_+), \quad T_s\varphi(t) := \varphi(t+s), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi \in \mathcal{S}_+.$$

Легко перевірити, що $T^{\otimes n} : \mathbb{R}_+ \ni s \longmapsto T_s^{\otimes n} \in \mathscr{L}(\mathcal{S}_+^{\widehat{\otimes} n})$ — однопараметрична напівгрупа операторів. З означення (5.3.2) випливає, що коректно визначеним є відображення $T_s^{\otimes} := \big(T_s^{\otimes n}\big)$, $s \in \mathbb{R}_+$. Функцію

$$T^{\otimes} : \mathbb{R}_+ \ni s \longmapsto T_s^{\otimes} \in \mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{S}_+)\big) \tag{5.3.3}$$

назвемо поліноміальною напівгрупою зсувів.

Крос-кореляцією розподілу $f \in \mathcal{S}'_+$ і функції $\varphi \in \mathcal{S}_+$ називають функцію $(f \star \varphi)(s) := \langle f, T_s\varphi\rangle = \langle f(t), \varphi(t+s)\rangle$. Аналогічно як це зроблено в [204] легко показати, що

$$f \star \varphi \in \mathcal{S}_+ \tag{5.3.4}$$

для довільних $f \in \mathcal{S}'_+$ і $\varphi \in \mathcal{S}_+$. З неперервності розподілу $f \in \mathcal{S}'_+$ та оператора $T_s \in \mathscr{L}(\mathcal{S}_+)$ випливає, що функція $f \star \varphi$ нескінченно гладка на $\mathbb{R}_+$ (див. також доведення теореми 4.2.1), при цьому виконується рівність

$$\frac{d^n}{ds^n}(f \star \varphi) = \langle\, f,\, \frac{d^n}{ds^n} T_s \varphi \,\rangle.$$

Покажемо, що $f \star \varphi$ — швидко спадна функція. Дійсно, для довільного $p \in \mathbb{Z}_+$ з теореми Шварца (див. [7, ст. 93]) та з нерівності (3.1.3) випливає

$$\begin{aligned} \|f \star \varphi\|_p &= \sup_{0 \le m \le p} \sup_{s \in \mathbb{R}_+} (1 + s^2)^{p/2} |(f \star \varphi)^{(m)}(s)| \\ &= \sup_{0 \le m \le p} \sup_{s \in \mathbb{R}_+} (1 + s^2)^{p/2} \big|\big\langle f, \varphi^{(m)}(\cdot + s)\big\rangle\big| \\ &\le \|f\|_{-r} \sup_{0 \le m \le p} \sup_{s \in \mathbb{R}_+} (1 + s^2)^{p/2} \|\varphi^{(m)}(\cdot + s)\|_r \\ &\le \|f\|_{-r} \sup_{0 \le m \le p} \sup_{s \in \mathbb{R}_+} (1 + s^2)^{p/2} \sup_{0 \le n \le r} \sup_{t \in \mathbb{R}_+} (1 + t^2)^{r/2} |\varphi^{(m+n)}(t + s)| \\ &\le \|f\|_{-r} \sup_{0 \le k \le p+r} \sup_{x \in \mathbb{R}_+} (1 + x^2)^{(p+r)/2} |\varphi^{(k)}(x)| = \|f\|_{-r} \|\varphi\|_{p+r} < \infty, \end{aligned}$$

де r — порядок узагальненої функції $f \in \mathcal{S}'_+$ (див. [7]).

З доведеної вище нерівності $\|f \star \varphi\|_p \le \|f\|_{-r} \|\varphi\|_{p+r}$ та з (5.3.4) випливає, що оператор крос-кореляції $K_f \colon \varphi \longmapsto f \star \varphi$ належить простору $\mathscr{L}(\mathcal{S}_+)$ для довільного розподілу $f \in \mathcal{S}'_+$. З означення (5.3.2) (див. також (4.3.14)) випливає, що

$$K_{\boldsymbol{u}}^{\otimes} := \big(K_{u_n}^{\otimes n}\big) \in \mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{S}_+)\big) \quad \text{і} \quad K_{u_n}^{\otimes n} \in \mathscr{L}(\mathcal{S}_+^{\widehat{\otimes} n}), \tag{5.3.5}$$

де $\boldsymbol{u} := (u_n) \in \Gamma(\mathcal{S}'_+)$, $u_n \in \mathcal{S}'^{\widehat{\otimes} n}_+$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Крос-кореляцію поліноміального розподілу $\boldsymbol{u} = (u_n) \in \Gamma(\mathcal{S}'_+)$ і поліноміальної основної функції $\boldsymbol{p} = (p_n) \in \Gamma(\mathcal{S}_+)$ визначимо за формулою

$$\boldsymbol{u} \star \boldsymbol{p} := K_{\boldsymbol{u}}^{\otimes} \boldsymbol{p} = \big(K_{u_n}^{\otimes n} p_n\big).$$

Твердження 5.3.1. *Для довільних елементів* $\boldsymbol{u} \in \Gamma(\mathcal{S}'_+)$ *і* $\boldsymbol{p} \in \Gamma(\mathcal{S}_+)$ *їхня крос-кореляція* $\boldsymbol{u} \star \boldsymbol{p}$ *є поліноміальною основною функцією, що належить простору* $\Gamma(\mathcal{S}_+)$.

Доведення. З урахуванням (5.3.4) це твердження легко довести за аналогією із доведенням твердження 4.3.2. ☐

Комутантом $\big[T^{\otimes}\big]^c \subset \mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{S}_+)\big)$ поліноміальної напівгрупи зсувів $T^{\otimes}$ назвемо множину

$$\big[T^{\otimes}\big]^c := \big\{K^{\otimes} \in \mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{S}_+)\big) : K^{\otimes} \circ T^{\otimes}_s = T^{\otimes}_s \circ K^{\otimes}, \forall\, s \in \mathbb{R}_+\big\},$$

де оператор $K^{\otimes}$ визначений формулою (5.3.2).

Теорема 5.3.1. *Відображення* $\Gamma(\mathcal{S}'_+) \ni \boldsymbol{u} \longmapsto K^{\otimes}_{\boldsymbol{u}} \in \mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{S}_+)\big)$ *здійснює алгебраїчний ізоморфізм з алгебри* $\big\{\Gamma(\mathcal{S}'_+), \circledast\big\}$ *на комутант* $\big[T^{\otimes}\big]^c$ *напівгрупи* $T^{\otimes}$ *в алгебрі* $\big\{\mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{S}_+)\big), \circ\big\}$.

Доведення. Доведення проведемо за тією ж схемою, що і в теоремі 4.3.3. Нехай елементи $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \Gamma(\mathcal{S}'_+)$ і $\boldsymbol{p} \in \Gamma(\mathcal{S}_+)$ представлені у вигляді $\boldsymbol{u} = (f^{\otimes n})$, $\boldsymbol{v} = (g^{\otimes n})$ і $\boldsymbol{p} = (\varphi^{\otimes n})$, де $f, g \in \mathcal{S}'_+$, $\varphi \in \mathcal{S}_+$, відповідно. Покажемо, що вказане у теоремі відображення є гомоморфізмом алгебр, а саме, доведемо рівність

$$K^{\otimes}_{\boldsymbol{u} \circledast \boldsymbol{v}} = K^{\otimes}_{\boldsymbol{u}} \circ K^{\otimes}_{\boldsymbol{v}}, \qquad \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \Gamma(\mathcal{S}'_+). \tag{5.3.6}$$

З означення операцій $\circledast$ та $\star$, а також з (4.3.13), випливають рівності

$$\begin{aligned} K^{\otimes}_{\boldsymbol{u} \circledast \boldsymbol{v}} \boldsymbol{p} = \Big(\big\langle (f * g)^{\otimes n}, T^{\otimes n}_s \varphi^{\otimes n} \big\rangle\Big) &= \Big(\big((f * g) \star \varphi\big)^{\otimes n}\Big) \\ &= \Big(\big(f \star (g \star \varphi)\big)^{\otimes n}\Big) = \Big(\big\langle f, T_s(g \star \varphi)\big\rangle^{\otimes n}\Big) \\ &= \Big(\big\langle f^{\otimes n}, T^{\otimes n}_s (g \star \varphi)^{\otimes n} \big\rangle\Big) = K^{\otimes}_{\boldsymbol{u}} K^{\otimes}_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{p}. \end{aligned}$$

Тепер покажемо, що образом відображення $\boldsymbol{u} \longmapsto K^{\otimes}_{\boldsymbol{u}}$ є комутант

$\left[T^{\otimes}\right]^c$. Використовуючи (4.3.13), отримаємо

$$\begin{aligned} K^{\otimes}_{\boldsymbol{u}} T^{\otimes}_s \boldsymbol{p} = \left(f^{\otimes n}\right) \star \left(T^{\otimes n}_s \varphi^{\otimes n}\right) &= \left(f^{\otimes n}\right) \star \left((T_s\varphi)^{\otimes n}\right) \\ &= \left((f \star T_s\varphi)^{\otimes n}\right) = \left((T_s(f \star \varphi))^{\otimes n}\right) \\ &= \left(T^{\otimes n}_s (f \star \varphi)^{\otimes n}\right) = \left(T^{\otimes n}_s K^{\otimes n}_{f_n} \varphi^{\otimes n}\right) = T^{\otimes}_s K^{\otimes}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{p} \end{aligned}$$

для всіх $s \in \mathbb{R}_+$. Отже, для довільного розподілу $\boldsymbol{u} \in \Gamma(\mathcal{S}'_+)$ оператор $K^{\otimes}_{\boldsymbol{u}}$ належить комутанту $\left[T^{\otimes}\right]^c$.

Навпаки, виберемо такий оператор $K \in \mathscr{L}(\mathcal{S}_+)$, що $K^{\otimes} \in \left[T^{\otimes}\right]^c$. Визначимо узагальнену функцію $h \in \mathcal{S}'_+$ за правилом $\langle h, \varphi\rangle := (K\varphi)(0)$, $\varphi \in \mathcal{S}_+$. Покажемо, що для елемента $\boldsymbol{w} := (1, h, \ldots, h^{\otimes n}, \ldots)$ виконується рівність $K^{\otimes} = K^{\otimes}_{\boldsymbol{w}}$. Оскільки $(h \star \varphi)(s) = \langle h, T_s\varphi\rangle = (KT_s\varphi)(0) = (K\varphi)(s)$, то

$$K^{\otimes}_{\boldsymbol{w}} \boldsymbol{p} = \left((h \star \varphi)^{\otimes n}\right) = \left((K\varphi)^{\otimes n}\right) = \left(K^{\otimes n} \varphi^{\otimes n}\right) = K^{\otimes} \boldsymbol{p}.$$

Отже, $K^{\otimes} = K^{\otimes}_{\boldsymbol{w}}$, звідки випливає, що образ відображення $\Gamma(\mathcal{S}'_+) \ni \boldsymbol{u} \longmapsto K^{\otimes}_{\boldsymbol{u}} \in \mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{S}_+)\big)$ співпадає з комутантом $\left[T^{\otimes}\right]^c$. ☐

Нехай D та D' позначають оператор диференціювання та узагальненого диференціювання на просторах функцій $\mathcal{S}_+$ та розподілів $\mathcal{S}'_+$ відповідно, тобто $\langle D'f, \varphi\rangle = -\langle f, D\varphi\rangle$, $f \in \mathcal{S}'_+$, $\varphi \in \mathcal{S}_+$.

В теоремах 3.2.1 та 3.2.2 було введено оператори $\mathbb{D} \in \mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{S}_+)\big)$ та $\mathbb{D}' \in \mathscr{L}\big(\Gamma(\mathcal{S}'_+)\big)$ і показано, що ці оператори є неперервними диференціюваннями на відповідних просторах.

Твердження 5.3.2. *Для довільних елементів* $\boldsymbol{u} \in \Gamma(\mathcal{S}'_+)$ *та* $\boldsymbol{p} \in \Gamma(\mathcal{S}_+)$ *виконується наступна рівність*

$$(\mathbb{D}'\boldsymbol{u}) \star \boldsymbol{p} = -\boldsymbol{u} \star (\mathbb{D}\boldsymbol{p}).$$

Доведення. Для елементів $\boldsymbol{u} \in \Gamma(\mathcal{S}'_+)$ і $\boldsymbol{p} \in \Gamma(\mathcal{S}_+)$, що представлені у вигляді $\boldsymbol{u} = (f^{\otimes n})$ і $\boldsymbol{p} = (\varphi^{\otimes n})$, де $f \in \mathcal{S}'_+$, $\varphi \in \mathcal{S}_+$, відповідно, потрібна рівність перевіряється безпосередньо (див. доведення твердження 4.3.3).

Залишилось зауважити, що елементи вигляду $\boldsymbol{u} = (f^{\otimes n})$ і $\boldsymbol{p} = (\varphi^{\otimes n})$, $f \in \mathcal{S}'_+$, $\varphi \in \mathcal{S}_+$, утворюють тотальну підмножину у відповідному просторі (див. (3.1.7)) $\square$

5.3.2 Перетворення Фур'є поліноміальних розподілів повільного росту

Оскільки кожен елемент простору $\mathcal{S}_+$ можна розуміти як функцію $\varphi \in L^1(0,\infty) \cap L^2(0,\infty)$, то пряме та обернене перетворення Фур'є можна визначити за формулами (див. також (3.3.1))

$$F_+ : \varphi \longmapsto \widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\mathrm{i}t\xi} \varphi(t)\, dt, \qquad \xi \in \mathbb{R},$$

$$F_+^{-1} : \widehat{\varphi} \longmapsto \varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}t\xi} \widehat{\varphi}(\xi)\, d\xi, \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

Нехай $\widehat{\mathcal{S}}_+ := F_+[\mathcal{S}_+]$ позначає образ простору $\mathcal{S}_+$ відносно відображення F_+. Відомо [2], що $\widehat{\mathcal{S}}_+ \subset L^2(\mathbb{R})$. Використовуючи ін'єктивність відображення F_+, наділимо простір $\widehat{\mathcal{S}}_+$ індукованою топологією. Таким чином, $\widehat{\mathcal{S}}_+$ — ядерний (FS) простір (див. [54]). Для сильно спряжених просторів визначено спряжене відображення $F'_+ \colon \widehat{\mathcal{S}}'_+ \longmapsto \mathcal{S}'_+$. Як і в параграфі 3.3 (див. формулу (3.3.3)) відображення

$$\mathcal{F}' := 2\pi (F'_+)^{-1} \colon \mathcal{S}'_+ \ni f \longmapsto \widehat{f} := \mathcal{F}'[f] \in \widehat{\mathcal{S}}'_+$$

назвемо узагальненим перетворенням Фур'є розподілів з класу $\mathcal{S}'_+$.

Позначимо $\mathcal{F} := F_+$. Тоді білінійна форма

$$\langle \mathcal{F}' f, \mathcal{F}\varphi \rangle = 2\pi \langle F'_+ (F'_+)^{-1} f, \varphi \rangle = 2\pi \langle f, \varphi \rangle,$$

де $f \in \mathcal{S}'_+$, $\varphi \in \mathcal{S}_+$, визначає нову дуальність $\langle\, \widehat{\mathcal{S}}'_+, \widehat{\mathcal{S}}_+ \,\rangle$.

Простір $\widehat{\mathcal{S}}'_+$ є ядерним (DFS) простором як сильно спряжений до ядерного (FS) простору $\widehat{\mathcal{S}}_+$ (див. [54]).

Позначимо $\Gamma(\widehat{\mathcal{S}}_+) := \bigoplus_{fin \atop n \in \mathbb{Z}_+} \widehat{\mathcal{S}}_+^{\widehat{\otimes} n}$ і $\Gamma(\widehat{\mathcal{S}}'_+) := \mathop{\times}\limits_{n \in \mathbb{Z}_+} \widehat{\mathcal{S}}_+^{\prime \widehat{\otimes} n}$. Для довільних елементів $\widehat{\boldsymbol{u}} = \big(\widehat{f}^{\otimes n}\big)$, $\widehat{\boldsymbol{v}} = \big(\widehat{h}^{\otimes n}\big) \in \Gamma(\widehat{\mathcal{S}}'_+)$, $f, h \in \mathcal{S}'_+$, з тотальної підмножини визначимо операцію

$$\widehat{\boldsymbol{u}}\,\widehat{\circledast}\,\widehat{\boldsymbol{v}} := \big((\widehat{f}\cdot\widehat{h})^{\otimes n}\big),$$

а відтак розширимо її на весь простір $\Gamma(\widehat{\mathcal{S}}'_+)$ за лінійністю та неперервністю. Очевидно, що $\Gamma(\widehat{\mathcal{S}}'_+)$ — алгебра відносно операції $\widehat{\circledast}$. Аналогічно як і вище ми можемо індукувати цю операцію на простір $\Gamma(\widehat{\mathcal{S}}_+)$, який теж стає алгеброю відносно цієї операції.

З теореми 2.2.3 випливає, що справджуються наступні топологічні ізоморфізми

$$\widehat{\Upsilon} : \mathcal{P}(\widehat{\mathcal{S}}'_+) \longrightarrow \Gamma(\widehat{\mathcal{S}}_+) \qquad \text{і} \qquad \widehat{\Psi} : \mathcal{P}'(\widehat{\mathcal{S}}'_+) \longrightarrow \Gamma(\widehat{\mathcal{S}}'_+).$$

Використовуючи ізоморфізми (5.3.1) ми можемо розширити відображення $\mathcal{F}$ на простір $\Gamma(\mathcal{S}_+)$ наступним чином. Спочатку для довільного $\varphi^{\otimes n} \in \mathcal{S}_+^{\widehat{\otimes} n}$, $\varphi \in \mathcal{S}_+$, визначимо перетворення $\mathcal{F}^{\otimes_n}$ за правилами

$$\mathcal{F}^{\otimes_n} : \varphi^{\otimes n} \longmapsto \widehat{\varphi}^{\otimes n} \quad \text{і} \quad \mathcal{F}^{\otimes_0} := I_{\mathbb{C}}.$$

Потім, розширимо $\mathcal{F}^{\otimes_n}$ на весь простір $\mathcal{S}_+^{\widehat{\otimes} n}$ за лінійністю та неперервністю, отримаємо $\mathcal{F}^{\otimes_n} \in \mathscr{L}\big(\mathcal{S}_+^{\widehat{\otimes} n}, \widehat{\mathcal{S}}_+^{\widehat{\otimes} n}\big)$. Остаточно відображення $\mathcal{F}^{\otimes}$ визначимо за формулою

$$\mathcal{F}^{\otimes} = \big(\mathcal{F}^{\otimes_n}\big) : \Gamma(\mathcal{S}_+) \ni \boldsymbol{p} = \big(p_n\big) \quad \longmapsto \quad \widehat{\boldsymbol{p}} := \big(\widehat{p}_n\big) \in \Gamma(\widehat{\mathcal{S}}_+),$$

де $\widehat{p}_n := \mathcal{F}^{\otimes_n} p_n$. Легко перевірити, що $\mathcal{F}^{\otimes}$ є гомоморфізмом відповідних алгебр.

Зауваження 5.3.1. Зауважимо, що $\widehat{\varphi}^{\otimes n}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ ми розуміємо як функцію n змінних вигляду $\mathbb{R}^n \ni (\xi_1, \ldots, \xi_n) \longmapsto \widehat{\varphi}(\xi_1)\cdot\ldots\cdot\widehat{\varphi}(\xi_n) \in \mathbb{C}$, яку можна записати у вигляді інтеграла

$$\widehat{\varphi}^{\otimes n}(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-\mathrm{i}(t_1\xi_1+\cdots+t_n\xi_n)}\varphi(t_1)\cdot\ldots\cdot\varphi(t_n)\,dt_1\ldots dt_n.$$

Тому елементи простору $\Gamma(\widehat{\mathcal{S}}_+)$ можна розуміти як функції нескінченної кількості змінних

$$\widehat{\boldsymbol{p}} : (\xi_1, \dots, \xi_n, \dots) \longmapsto \big(\widehat{p}_0, \widehat{p}_1(\xi_1), \widehat{p}_2(\xi_2, \xi_3), \dots, \widehat{p}_n(\xi_{\mathfrak{b}_n}, \dots, \xi_{\mathfrak{e}_n}), \dots\big), \tag{5.3.7}$$

де $\mathfrak{b}_n := \frac{n(n-1)}{2} + 1$, $\mathfrak{e}_n := \frac{n(n+1)}{2}$. Проте зауважимо, що насправді кожна функція $\widehat{\boldsymbol{p}} \in \Gamma(\widehat{\mathcal{S}}_+)$ залежить від скінченної (залежної від $\widehat{\boldsymbol{p}}$), але не фіксованої кількості змінних. Це пояснюється тим, що для кожного $\widehat{\boldsymbol{p}}$ послідовність в правій частині (5.3.7) є скінченною.

Визначимо оператор $\mathcal{F}'^{\otimes}$ за правилом

$$\mathcal{F}'^{\otimes} := (\mathcal{F}'^{\otimes_n}) : \Gamma(\mathcal{S}'_+) \ni \boldsymbol{u} = \big(u_n\big) \quad \longmapsto \quad \widehat{\boldsymbol{u}} := \big(\widehat{u}_n\big) \in \Gamma(\widehat{\mathcal{S}}'_+),$$

де $\widehat{u}_n := \mathcal{F}'^{\otimes_n} u_n \in \widehat{\mathcal{S}}'^{\widehat{\otimes} n}_+$, $\mathcal{F}'^{\otimes_0} := I_{\mathbb{C}}$, а кожен оператор $\mathcal{F}'^{\otimes_n} : \mathcal{S}'^{\widehat{\otimes} n}_+ \longrightarrow \widehat{\mathcal{S}}'^{\widehat{\otimes} n}_+$, $n \in \mathbb{N}$, визначений як лінійне та неперервне розширення відображення $f^{\otimes n} \longmapsto (\mathcal{F}' f)^{\otimes n}$, $f \in \mathcal{S}'_+$.

Зауваження 5.3.2. Із зауваження 5.3.1 випливає, що $\widehat{u}_n \in \widehat{\mathcal{S}}'^{\widehat{\otimes} n}_+ \simeq (\widehat{\mathcal{S}}^{\widehat{\otimes} n}_+)'$ є функціоналом n “змінних” вигляду

$$\widehat{p}_n(\xi_1, \dots, \xi_n) \longmapsto \langle \widehat{u}_n, \widehat{p}_n \rangle := \langle \widehat{u}_n(\xi_1, \dots, \xi_n), \widehat{p}_n(\xi_1, \dots, \xi_n) \rangle \in \mathbb{C}$$

де $\widehat{p}_n \in \widehat{\mathcal{S}}^{\widehat{\otimes} n}_+$. Тому довільний елемент $\widehat{\boldsymbol{u}} = \big(\widehat{u}_n\big) \in \Gamma(\widehat{\mathcal{S}}'_+)$ ми розуміємо як функціонал нескінченної кількості “змінних” у наступному сенсі (див. також формулу (5.3.7))

$$\begin{array}{llcl} \widehat{\boldsymbol{u}} : & \Gamma(\widehat{\mathcal{S}}_+) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \widehat{\boldsymbol{p}}(\xi_1, \dots, \xi_n, \dots) = \big(\widehat{p}_n(\xi_{\mathfrak{b}_n}, \dots, \xi_{\mathfrak{e}_n})\big) & \longmapsto & \langle \widehat{\boldsymbol{u}}, \widehat{\boldsymbol{p}} \rangle := \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}_+} \langle \widehat{u}_n, \widehat{p}_n \rangle. \end{array}$$

5.3.3 Нескінченнопараметрична напівгрупа операторів та відповідне функціональне числення

Нехай E — комплексний банахів простір. Розглянемо зліченний набір $\mathbf{A} := (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n, \dots)$ операторів, що діють в E. Для нас буде зручно переписати цей набір в іншому вигляді. Позначимо $A_n := (\mathbf{A}_{\mathfrak{b}_n}, \dots, \mathbf{A}_{\mathfrak{e}_n})$, де $\mathfrak{b}_n := \frac{n(n-1)}{2} + 1$, $\mathfrak{e}_n := \frac{n(n+1)}{2}$. За означенням приймемо $A_0 := \varnothing$. Легко бачити, що $A_1 = \mathbf{A}_1$, $A_2 := (\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3)$, $A_3 := (\mathbf{A}_4, \mathbf{A}_5, \mathbf{A}_6)$ і т.д. В загальному A_n є сукупністю наступних, ще не записаних раніше, n операторів системи $\mathbf{A}$. Тоді цю зліченну систему операторів можна записати у вигляді $\mathbf{A} = (A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots)$ або скорочено $\mathbf{A} = \big(A_n\big)$.

Припустимо, що A_n є генератором (див. [38,82]) n-параметричної (C_0) напівгрупи $\mathbb{R}^n_+ \ni t \longmapsto e^{-\mathrm{i}t\cdot A_n} \in \mathscr{L}(E)$, що задовольняє умову

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^n_+} \|e^{-\mathrm{i}t\cdot A_n}\|_{\mathscr{L}(E)} \leq 1, \tag{5.3.8}$$

де для довільного $t \in \mathbb{R}^n_+$ позначено $t \cdot A_n := t_1\mathbf{A}_{\mathfrak{b}_n} + \dots + t_n\mathbf{A}_{\mathfrak{e}_n}$.

Припустимо, що оператори групи $A_n = (\mathbf{A}_{\mathfrak{b}_n}, \dots, \mathbf{A}_{\mathfrak{e}_n})$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ комутують один з одним. Зауважимо, що в цьому випадку (див. [38, 82]) напівгрупу можна записати у вигляді композиції комутуючих однопараметричних марґінальних напівгруп

$$e^{-\mathrm{i}t\cdot A_n} = e^{-\mathrm{i}t_1\mathbf{A}_{\mathfrak{b}n}} \circ \dots \circ e^{-\mathrm{i}t_n\mathbf{A}_{\mathfrak{e}n}}.$$

Символом $\mathfrak{A}$ позначимо множину, елементами якої є зліченні системи описаних вище операторів. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ нехай $\mathfrak{A}_n$ — множина, елементами якої є набори з n генераторів однопараметричних (C_0) напівгруп, що задовольняють умову (5.3.8).

Визначимо відображення

$$\mathcal{L} := (\mathcal{L}_n)\colon \Gamma(\mathcal{S}_+) \ni \boldsymbol{p} = \big(p_n\big) \quad\longmapsto\quad \widetilde{\boldsymbol{p}} := \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \widetilde{p}_n \in \widetilde{\mathcal{S}}, \tag{5.3.9}$$

де $\widetilde{\mathcal{S}} := \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \widetilde{\mathcal{S}}_n$. Зауважимо, що для кожного $n \in \mathbb{Z}_+$ множина $\widetilde{\mathcal{S}}_n$ визначена як простір функцій

$$\widetilde{p}_n : \mathfrak{A}_n \ni A_n \longmapsto \widetilde{p}_n(A_n) := \int_{\mathbb{R}^n_+} e^{-\mathrm{i}t\cdot A_n} p_n(t)\, dt \in \mathscr{L}(E), \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{5.3.10}$$

де інтеграл ми розуміємо у сенсі Бохнера, а $\widetilde{p}_0 := p_0 I_E \in \mathscr{L}(E)$.

Оскільки для операторів зліченного набору $\mathbf{A}$ виконується умова (5.3.8), то на підставі теореми 1.1.1 можемо стверджувати, що всі відображення $\mathcal{L}_n : p_n \longmapsto \widetilde{p}_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, є ізоморфізмами. Справді, напівгрупи $\{e^{-\mathrm{i}(\lambda,t)} I_E : t \in \mathbb{R}^n_+\}$ при $-\operatorname{Im}\lambda \in \mathsf{int}\,\mathbb{R}^n_+$ задовольняють умову (5.3.8). Тому їх генератори $(-\mathbf{i}\lambda_1 I_E, \ldots, -\mathbf{i}\lambda_n I_E)$ належать множині $\mathfrak{A}_n$. Зауважимо, що

$$\widetilde{p}_n(-\mathbf{i}\lambda_1 I_E, \ldots, -\mathbf{i}\lambda_n I_E) = \int_{\mathbb{R}^n_+} e^{-\lambda\cdot t} p_n(t)\, dt$$

є перетворенням Лапласа функції $p_n \in \mathcal{S}_+^{\widehat{\otimes} n}$. Звідси зокрема випливає, що якщо $\widetilde{p}_n \equiv 0$, то $p_n \equiv 0$, тобто $\operatorname{Ker}\mathcal{L}_n = \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$. Отже, $\operatorname{Ker}\mathcal{L} = \{0\}$ і відображення $\mathcal{L}$ є ізоморфізмом.

Зауваження 5.3.3. Відображення $\mathcal{L}\colon \Gamma(\mathcal{S}_+) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{S}}$ є гомоморфізмом з алгебри $\big\{\Gamma(\mathcal{S}_+), \circledast\big\}$ в алгебру операторнозначних функцій, заданих на $\mathfrak{A}$. З іншого боку, відображення $\mathcal{F}^{\otimes} : \Gamma(\mathcal{S}_+) \longrightarrow \Gamma(\widehat{\mathcal{S}}_+)$ також є гомоморфізмом. Тому відображення

$$\mathcal{L} \circ (\mathcal{F}^{\otimes})^{-1}\colon \Gamma(\widehat{\mathcal{S}}_+) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{S}}$$

можна розуміти як “елементарне” функціональне числення. Іншими словами, оператор $\widetilde{\boldsymbol{p}}(\mathbf{A}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \widetilde{p}_n(A_n) \in \mathscr{L}(E)$ ми розуміємо як “значення” функції $\widehat{\boldsymbol{p}}$ нескінченної кількості змінних (див. (5.3.7)) на зліченному наборі $\mathbf{A} := (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n, \ldots) \in \mathfrak{A}$ генераторів однопараметричних (C_0) напівгруп стиску.

Визначимо однопараметричну напівгрупу $\widetilde{T}^{\otimes} : \mathbb{R}_+ \ni s \longmapsto \widetilde{T}^{\otimes}_s \in \mathscr{L}\big(\widetilde{\mathcal{S}}\big)$ на просторі $\widetilde{\mathcal{S}}$ за правилом

$$\widetilde{T}^{\otimes}_s := \big(\widetilde{T}^{\otimes n}_s\big)\colon \widetilde{\boldsymbol{p}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \widetilde{p}_n \quad\longmapsto\quad \widetilde{T}^{\otimes}_s \widetilde{\boldsymbol{p}} := \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \widetilde{T}^{\otimes n}_s \widetilde{p}_n.$$

При цьому функцію $\widetilde{T}^{\otimes n}_s \widetilde{p}_n \in \widetilde{\mathcal{S}}_n$ ми визначаємо наступним чином

$$\widetilde{T}^{\otimes n}_s \widetilde{p}_n\colon A_n \longmapsto \widetilde{T}^{\otimes n}_s \widetilde{p}_n(A_n) := \int_{\mathbb{R}^n_+} e^{-\mathrm{i}t\cdot A_n} p_n(t+s)\, dt,$$

де для простоти позначено $p_n(t+s) := p_n(t_1+s, \ldots, t_n+s)$. Зауважимо, що функція $\widetilde{p}_n$ операторного аргумента визначена раніше формулою (5.3.10).

Використовуючи властивості інтеграла Бохнера (див. [38, 3.7]), для довільного елемента $\boldsymbol{p} = \big(p_n\big) \in \Gamma(\mathcal{S}_+)$ при $p_n = \varphi^{\otimes n} \in \mathcal{S}_+^{\widehat{\otimes} n}$, $\varphi \in \mathcal{S}_+$, отримуємо, що справджуються наступні рівності

$$\begin{aligned}\widetilde{T_s^{\otimes}\boldsymbol{p}}(\mathbf{A}) = \mathcal{L}\big[\big(T_s^{\otimes n} p_n\big)\big](\mathbf{A}) &= \mathcal{L}\big[\big((T_s\varphi)^{\otimes n}\big)\big](\mathbf{A}) \\ &= I_E + \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-\mathrm{i}t\cdot A_n}\varphi(t_1+s)\cdot\ldots\cdot\varphi(t_n+s)\,dt \\ &= \widetilde{p}_0(A_0) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{T}_s^{\otimes n}\widetilde{p}_n(A_n) = \widetilde{T}_s^{\otimes}\widetilde{\boldsymbol{p}}(\mathbf{A})\end{aligned}$$

для всіх $s \in \mathbb{R}_+$ і $\mathbf{A} := \big(A_n\big) \in \mathfrak{A}$.

Звідси випливає, що оператор $\widetilde{T}_s^{\otimes}$ можна представити у вигляді $\widetilde{T}_s^{\otimes} = \mathcal{L} \circ T_s^{\otimes} \circ \mathcal{L}^{-1}$. З неперервності відображень $T_s^{\otimes}$ і $\mathcal{L}$, а також з відкритості перетворення $\mathcal{L}$ випливає, що напівгрупа $\widetilde{T}^{\otimes} : \mathbb{R}_+ \ni s \longmapsto \widetilde{T}_s^{\otimes} \in \mathscr{L}\big(\widetilde{\mathcal{S}}\big)$ володіє (C_0) властивістю.

Комутантом напівгрупи $\widetilde{T}^{\otimes}$ назвемо множину

$$\big[\widetilde{T}^{\otimes}\big]^c := \big\{\widetilde{T} \in \mathscr{L}\big(\widetilde{\mathcal{S}}\big) : \widetilde{T} \circ \widetilde{T}_s^{\otimes} = \widetilde{T}_s^{\otimes} \circ \widetilde{T}, \forall s \in \mathbb{R}_+\big\}.$$

Визначимо відображення

$$\varPhi := \big(\varPhi_n\big) : \Gamma(\mathcal{S}_+') \ni \boldsymbol{u} = \big(u_n\big) \quad \longmapsto \quad \varPhi_{\boldsymbol{u}} := \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \varPhi_{u_n} \in \mathscr{L}\big(\widetilde{\mathcal{S}}\big) \qquad (5.3.11)$$

де $u_n := f^{\otimes n} \in \mathcal{S}_+'^{\widehat{\otimes} n}$, $f \in \mathcal{S}_+'$. При цьому функція $\varPhi_{u_n} \in \mathscr{L}\big(\widetilde{\mathcal{S}}_n\big)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, визначена формулами

$$\varPhi_{u_n} : \widetilde{p}_n \longmapsto \varPhi_{u_n}\widetilde{p}_n, \quad \text{де} \quad (\varPhi_{u_n}\widetilde{p}_n)(A_n) := \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-\mathrm{i}t\cdot A_n} K_f^{\otimes n} p_n(t)\,dt, \qquad n \in \mathbb{N},$$

а $\varPhi_{u_0}$ — тотожний оператор. Зауважимо, що функція $\widetilde{p}_n$ операторного аргумента визначена формулою (5.3.10), а оператор $K_f^{\otimes n}$ — формулами (5.3.2) та (5.3.5).

Теорема 5.3.2. *Відображення $\varPhi$, визначене формулою* (5.3.11)*, є алгебраїчним ізоморфізмом з алгебри $\big\{\Gamma(\mathcal{S}'_+), \circledast\big\}$ в підалгебру комутанта $\big[\widetilde{T}^{\otimes}\big]^c$ операторів вигляду $\widetilde{K}^{\otimes} = \mathcal{L} \circ K^{\otimes} \circ \mathcal{L}^{-1} \in \mathscr{L}\big(\widetilde{\mathcal{S}}\big)$, де $K \in \mathscr{L}(\mathcal{S}_+)$. Зокрема, справджується рівність $\varPhi_{\boldsymbol{u}\circledast\boldsymbol{v}} = \varPhi_{\boldsymbol{u}} \circ \varPhi_{\boldsymbol{v}}$ для всіх $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \Gamma(\mathcal{S}'_+)$, а оператор $\varPhi_{\boldsymbol{\delta}}$ діє як тотожний в $\mathscr{L}\big(\widetilde{\mathcal{S}}\big)$, де $\boldsymbol{\delta} = \big(\delta^{\otimes n}\big)$.*

Більше того, справджується наступна диференціальна властивість $\varPhi_{\mathbb{D}'\boldsymbol{u}}\widetilde{\boldsymbol{p}} = -\varPhi_{\boldsymbol{u}}\widetilde{\mathbb{D}\boldsymbol{p}}$ для довільних $\boldsymbol{u} \in \Gamma(\mathcal{S}'_+)$ і $\boldsymbol{p} \in \Gamma(\mathcal{S}_+)$.

Доведення. Для довільних $\boldsymbol{u} = \big(u_n\big) \in \Gamma(\mathcal{S}'_+)$ при $u_n := f^{\otimes n}$, $f \in \mathcal{S}'_+$ і $\boldsymbol{p} = \big(p_n\big) \in \Gamma(\mathcal{S}_+)$ справджуються наступні рівності

$$\begin{aligned}(\varPhi_{\boldsymbol{u}}\widetilde{\boldsymbol{p}})(\mathbf{A}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}(\varPhi_{u_n}\widetilde{p}_n)(A_n) &= I_E + \sum_{n\in\mathbb{N}}\int_{\mathbb{R}^n_+} e^{-\mathrm{i}t\cdot A_n}K_f^{\otimes n}p_n(t)\,dt \\ &= \mathcal{L}\big[\big(K_f^{\otimes n}p_n\big)\big](\mathbf{A}) = \widetilde{K_{\boldsymbol{u}}^{\otimes}\boldsymbol{p}}(\mathbf{A})\end{aligned} \tag{5.3.12}$$

для всіх $\mathbf{A} := \big(A_n\big) \in \mathfrak{A}$. Звідси випливає, що відображення $\varPhi_{\boldsymbol{u}}$ можна представити вигляді $\varPhi_{\boldsymbol{u}} = \mathcal{L} \circ K_{\boldsymbol{u}}^{\otimes} \circ \mathcal{L}^{-1}$. З неперервності відображень $K_{\boldsymbol{u}}^{\otimes}$ і $\mathcal{L}$, а також з відкритості $\mathcal{L}$ випливає, що $\varPhi_{\boldsymbol{u}} \in \mathscr{L}\big(\widetilde{\mathcal{S}}\big)$ для всіх $\boldsymbol{u} \in \Gamma(\mathcal{S}'_+)$. Далі, з рівностей

$$\begin{aligned}(\varPhi_{\boldsymbol{u}}\widetilde{T}_s^{\otimes}\widetilde{\boldsymbol{p}})(\mathbf{A}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}(\varPhi_{u_n}\widetilde{T}_s^{\otimes n}\widetilde{p}_n)(A_n) &= I_E + \sum_{n\in\mathbb{N}}\int_{\mathbb{R}^n_+} e^{-\mathrm{i}t\cdot A_n}K_f^{\otimes n}T_s^{\otimes n}p_n(t)\,dt \\ &= I_E + \sum_{n\in\mathbb{N}}\int_{\mathbb{R}^n_+} e^{-\mathrm{i}t\cdot A_n}T_s^{\otimes n}K_f^{\otimes n}p_n(t)\,dt \\ &= I_E + \sum_{n\in\mathbb{N}}\widetilde{T}_s^{\otimes n}\int_{\mathbb{R}^n_+} e^{-\mathrm{i}t\cdot A_n}K_f^{\otimes n}p_n(t)\,dt \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}(\widetilde{T}_s^{\otimes n}\varPhi_{u_n}\widetilde{p}_n)(A_n) = (\widetilde{T}_s^{\otimes}\varPhi_{\boldsymbol{u}}\widetilde{\boldsymbol{p}})(\mathbf{A}),\end{aligned}$$

що виконуються для всіх $s \in \mathbb{R}_+$, $\widetilde{\boldsymbol{p}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\widetilde{p}_n \in \widetilde{\mathcal{S}}$ і $\mathbf{A} := \big(A_n\big) \in \mathfrak{A}$, випливає, що для довільного $\boldsymbol{u} \in \Gamma(\mathcal{S}'_+)$ оператор $\varPhi_{\boldsymbol{u}}$ належить комутанту $\big[\widetilde{T}^{\otimes}\big]^c$.

Доведемо обернене твердження. Нехай $\widetilde{K}^{\otimes} = \mathcal{L} \circ K^{\otimes} \circ \mathcal{L}^{-1} \in \mathscr{L}\big(\widetilde{\mathcal{S}}\big)$ при $K \in \mathscr{L}(\mathcal{S}_+)$ належить комутанту $\big[\widetilde{T}^{\otimes}\big]^c$. Тоді

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \circ K^{\otimes} \circ T_s^{\otimes} \circ \mathcal{L}^{-1} =&\mathcal{L} \circ K^{\otimes} \circ \mathcal{L}^{-1} \circ \mathcal{L} \circ T_s^{\otimes} \circ \mathcal{L}^{-1} = \widetilde{K}^{\otimes} \circ \widetilde{T}_s^{\otimes} = \widetilde{T}_s^{\otimes} \circ \widetilde{K}^{\otimes} \\ =&\mathcal{L} \circ T_s^{\otimes} \circ \mathcal{L}^{-1} \circ \mathcal{L} \circ K^{\otimes} \circ \mathcal{L}^{-1} = \mathcal{L} \circ T_s^{\otimes} \circ K^{\otimes} \circ \mathcal{L}^{-1},\end{aligned}$$

звідки слідує, що оператор $K^{\otimes}$ належить комутанту напівгрупи $T_s^{\otimes}$. З доведення теореми 5.3.1 випливає, що знайдеться такий єдиний розподіл $f \in \mathcal{S}'_+$, що $K = K_f$ і $K^{\otimes} = K_{\boldsymbol{u}}^{\otimes}$, де $\boldsymbol{u} = \big(f^{\otimes n}\big)$. Отже, $\widetilde{K}^{\otimes} = \widetilde{K}_{\boldsymbol{u}}^{\otimes}$.

З рівності (5.3.6) випливає

$$\begin{aligned}\varPhi_{\boldsymbol{u}\circledast\boldsymbol{v}} = \mathcal{L} \circ K_{\boldsymbol{u}\circledast\boldsymbol{v}}^{\otimes} \circ \mathcal{L}^{-1} &= \mathcal{L} \circ K_{\boldsymbol{u}}^{\otimes} \circ K_{\boldsymbol{v}}^{\otimes} \circ \mathcal{L}^{-1} \\ &= \mathcal{L} \circ K_{\boldsymbol{u}}^{\otimes} \circ \mathcal{L}^{-1} \circ \mathcal{L} \circ K_{\boldsymbol{v}}^{\otimes} \circ \mathcal{L}^{-1} = \varPhi_{\boldsymbol{u}} \circ \varPhi_{\boldsymbol{v}}.\end{aligned}$$

Як наслідок, ми отримаємо рівності $\varPhi_{\boldsymbol{\delta}} \circ \varPhi_{\boldsymbol{u}} = \varPhi_{\boldsymbol{\delta}\circledast\boldsymbol{u}} = \varPhi_{\boldsymbol{u}} = \varPhi_{\boldsymbol{u}\circledast\boldsymbol{\delta}} = \varPhi_{\boldsymbol{u}} \circ \varPhi_{\boldsymbol{\delta}}$, тобто $\varPhi_{\boldsymbol{\delta}} \in \mathscr{L}\big(\widetilde{\mathcal{S}}\big)$ діє як одиничний оператор.

Залишилось довести диференціальну властивість $\varPhi_{\mathbb{D}'\boldsymbol{u}}\widetilde{\boldsymbol{p}} = -\varPhi_{\boldsymbol{u}}\widetilde{\mathbb{D}\boldsymbol{p}}$. З рівностей (5.3.12) випливає $\varPhi_{\boldsymbol{u}}\widetilde{\boldsymbol{p}} = \widetilde{\boldsymbol{u} \star \boldsymbol{p}}$. Тому, використовуючи твердження 5.3.2, отримуємо

$$\varPhi_{\mathbb{D}'\boldsymbol{u}}\widetilde{\boldsymbol{p}} = (\widetilde{\mathbb{D}'\boldsymbol{u}) \star} \boldsymbol{p} = -\boldsymbol{u} \widetilde{\star (\mathbb{D}}\boldsymbol{p}) = -\varPhi_{\boldsymbol{u}}\widetilde{\mathbb{D}\boldsymbol{p}}.$$

Теорема доведена. ☐

Зауваження 5.3.4. Для довільного фіксованого $\boldsymbol{p} \in \Gamma(\mathcal{S}_+)$ відображення $\Gamma(\mathcal{S}'_+) \ni \boldsymbol{u} \longmapsto \varPhi_{\boldsymbol{u}}\widetilde{\boldsymbol{p}} \in \widetilde{\mathcal{S}}$ є гомоморфізмом алгебри $\big\{\Gamma(\mathcal{S}'_+), \circledast\big\}$ в алгебру операторнозначних функцій, заданих на $\mathfrak{A}$. Тому ми можемо розуміти це відображення як функціональне числення в алгебрі поліноміальних розподілів повільного росту. Легко бачити, що функція $\varPhi_{\boldsymbol{u}}\widetilde{\boldsymbol{p}}$ операторного аргумента може бути записана у вигляді $\varPhi_{\boldsymbol{u}}\widetilde{\boldsymbol{p}} = \widetilde{\boldsymbol{u} \star \boldsymbol{p}}$ (див. (5.3.9)). З рівностей (5.3.12) випливає, що оператор $\varPhi_{\boldsymbol{u}}\widetilde{\boldsymbol{p}}(\mathbf{A}) = \widetilde{\boldsymbol{u} \star \boldsymbol{p}}(\mathbf{A}) \in \mathscr{L}(E)$ можна розуміти як “значення” функції $\widehat{\boldsymbol{u} \star \boldsymbol{p}}$ нескінченної кількості змінних на зліченному наборі $\mathbf{A} := (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n, \dots) \in \mathfrak{A}$ генераторів (C_0) напівгруп стиску.

Приклад 5.3.1. *Розглянемо випадок зліченного набору операторів другого диференціювання. Нехай* $H_n := L^2_{sym}(\mathbb{R}^n) \simeq L^2(\mathbb{R})^{\widehat{\otimes} n}$, $n \in \mathbb{N}$, *позначає простір комплекснозначних інтегровних в квадраті симетричних функцій* $y(\xi) = y(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. *За означенням приймемо* $H_0 := \mathbb{C}$. *Відомо, що симетричний простір Фока* $H := \bigoplus\limits_{n \in \mathbb{Z}_+} H_n$ *є гільбертовим простором (див., наприклад, [175]). Як і вище, нехай* $\mathfrak{b}_n = \frac{n(n-1)}{2} + 1$, $\mathfrak{e}_n = \frac{n(n+1)}{2}$. *Визначимо оператори* $\mathbf{D}^2_{n,m} : H \longrightarrow H$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{b}_n \leq m \leq \mathfrak{e}_n$, *за правилом*

$$\mathbf{D}^2_{n,m} := 0_{H_0} \otimes \cdots \otimes 0_{H_{n-1}} \otimes \frac{\partial^2}{\partial \xi_m^2} \otimes 0_{H_{n+1}} \otimes \ldots,$$

де 0_{H_n}, $n \in \mathbb{Z}_+$, *позначають нульові оператори у відповідних просторах.*

Побудуємо "елементарне" функціональне числення в алгебрі поліноміальних основних функцій для зліченного набору операторів

$$\mathbf{D}^2 := (\mathbf{D}^2_{1,1}, \mathbf{D}^2_{2,1}, \mathbf{D}^2_{2,2}, \ldots, \mathbf{D}^2_{n,\mathfrak{b}_n}, \ldots, \mathbf{D}^2_{n,\mathfrak{e}_n} \ldots).$$

Позначимо $D^2_n := (\mathbf{D}^2_{n,\mathfrak{b}_n}, \ldots, \mathbf{D}^2_{n,\mathfrak{e}_n})$. *Легко бачити, що* D^2_n, $n \in \mathbb{N}$, *генерує напівгрупу*

$$\mathbb{R}^n_+ \ni t = (t_1, \ldots, t_n) \longmapsto e^{-\mathrm{i}t \cdot D^2_n} \in \mathscr{L}(H),$$

де

$$e^{-\mathrm{i}t \cdot D^2_n} := I_{H_0} \otimes \ldots \otimes I_{H_{\mathfrak{b}_n - 1}} \otimes e^{-\mathrm{i}t_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2_{\mathfrak{b}_n}}} \circ \ldots \circ e^{-\mathrm{i}t_n \frac{\partial^2}{\partial \xi^2_{\mathfrak{e}_n}}} \otimes I_{H_{\mathfrak{e}_n + 1}} \otimes \ldots$$

Позначимо

$$\mathfrak{g}_n(t, \zeta) := \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4\pi t_j}} e^{-\frac{\zeta_j^2}{4t_j}}.$$

З прикладу 5.1.2 випливає, що напівгрупа $e^{-\mathrm{i}t \cdot D^2_n}$ *діє за правилом*

$$e^{-\mathrm{i}t \cdot D^2_n} y = \big(y_0, \ldots, y_{n-1}, \mathfrak{g}_n(-\mathrm{i}t, \cdot\,) * y_n, y_{n+1}, \ldots\big)$$

для довільних $y = (y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots) \in H$.

Виберемо довільний елемент $\boldsymbol{p} = \big(p_n\big) \in \Gamma(\mathcal{S}_+)$. *Якщо ми "підставимо" зліченний набір* $\mathbf{D}^2$ *операторів замість змінних функції* $\widehat{\boldsymbol{p}}$ *(див.* (5.3.7)*),* *ми отримаємо оператор, що діє за правилом*

$$\begin{aligned}\widetilde{\boldsymbol{p}}(\mathbf{D}^2)y(\xi_1,\xi_2,\dots) =& y_0+\sum_{n\in\mathbb{N}}\widetilde{p}_n(D_n^2)y_n(\xi_{\mathfrak{b}_n},\dots,\xi_{\mathfrak{e}_\mathfrak{n}})\\ =& y_0+\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_{\mathbb{R}_+^n}(\mathfrak{g}_n(-\mathfrak{i}t,\,\cdot\,)*y_n)(\xi_{\mathfrak{b}_n},\dots,\xi_{\mathfrak{e}_\mathfrak{n}})p_n(t)\,dt,\end{aligned}$$

де $y(\xi_1,\xi_2,\dots)=\big(y_0,y_1(\xi_1),y_2(\xi_2,\xi_3),\dots,y_n(\xi_{\mathfrak{b}_n},\dots,\xi_{\mathfrak{e}_n}),\dots\big)\in H$ *— функція нескінченної кількості змінних.*

Висновки до розділу 5

У п'ятому розділі дисертації побудовано функціональне числення типу Хілле-Філліпса та його узагальнення у трьох різних варіантах. Проте всіх їх об'єднує той факт, що класом символів є аналітичні в деяких трубчастих областях функції скінченної чи нескінченної кількості змінних. При цьому результатом такого числення є оператори, задані на деякому банаховому просторі.

Перший варіант числення побудовано у параграфі 5.1. Описаний тут підхід дозволяє побудувати аналог класичного числення Хілле-Філліпса, а саме, замість алгебри мір на $\mathbb{R}_+$, яка розглянута в класичному випадку, ми використали згорткову алгебру Шварца $\mathcal{S}'_+$ узагальнених функцій повільного росту з носіями в конусі $\mathbb{R}^d_+$. Побудоване числення (див. теорему 5.1.4) задане для генераторів $A=(A_1,\dots,A_d)$ багатопараметричних рівномірно обмежених (C_0) напівгруп операторів, що діють в деякому банаховому просторі. На відміну від класичного випадку оператор $\widehat{f}(A)$ необмежений на банаховому просторі, проте має щільну область визначення (лема 5.1.2). При цьому побудоване числення володіє диференціальними властивостями, відсутніми у класичному випадку (див. формулу (5.1.11) та теорему 5.1.5). Отримані результати проілюстровані на двох прикладах, зокрема, розглянуто випадок d-параметричної напівгрупи Ґаусса. В обидвох випадках виписано явні формули дії операторів вигляду

$\widetilde{f}(A)$.

У параграфі 5.2 побудовано другий варіант операторного числення. А саме, використовуючи узагальнене перетворення Лапласа, побудовано числення для генераторів багатопараметричних аналітичних напівгруп операторів, що діють в банаховому просторі. Алгебра символів такого числення складається з аналітичних в деякій трубчастій області функцій, які є перетвореннями Лапласа розподілів Шварца повільного росту з носіями в додатному конусі.

Функціональне числення $\varPhi\colon \widehat{f} \longmapsto \widehat{f}(A)$ при фіксованому A, що визначене за формулою $\widehat{f}(A)x = \big\langle f(t), e^{-tA}x\big\rangle$, є операторним аналогом добре відомої формули для перетворення Лапласа. Як результат лінійні оператори $\widehat{f}(A)$ визначені на банаховому просторі (див. теорему 5.2.1) як необмежені оператори із щільною областю визначення $\mathfrak{U}$, що складається з нескінченно гладких векторів і визначається цілими степенями генераторів напівгрупи. Більше того, відображення $\varPhi$ є алгебраїчним гомоморфізмом мультиплікативної алгебри $\widehat{\mathcal{S}'_+}$ на комутативну підалгебру $\mathscr{L}(\mathfrak{U}, E)$ (див. теорему 5.2.1). Зауважимо, що на відміну від класичного функціонального числення або його узагальнень, ми не використовуємо інтегрального представлення функцій з класу символів, що є новим підходом в літературі. Диференціальні властивості алгебраїчного гомоморфізму $\varPhi$ описані в теоремах 5.2.2 і 5.2.3. В прикладі 5.2.1 визначено довільний дійсний степінь оператора. Застосування числення до d-параметричної напівгрупи Ґаусса-Вейєрштрасса розглянуто в прикладах 5.2.2 і 5.2.3.

Основна відмінність третього варіанту числення, яке побудовано в параграфі 5.3, — це його нескінченновимірність. А саме, тут побудовано функціональне числення типу Хілле-Філліпса для зліченного набору генераторів сильно неперервних напівгруп стиску, що діють в деякому банаховому просторі. Використовуючи техніку розділу 2 ми вводимо поліноміальне розширення крос-кореляції і доводимо теорему 5.3.1 про ізоморфне представлення алгебри поліноміальних розподілів у вигляді комутанта поліноміальної напівгрупи зсувів (див. формулу (5.3.3)). У твердженні 5.3.2 ми доводимо диференціальну властивість поліноміальної крос-кореляції, яка суттєво використовується в основній теоремі 5.3.2 цього параграфу. Елементи образу поліноміального перетворення Фур'є ми розуміємо як функції та функціонали нескінченної кількості змінних (див. зауваження 5.3.1 та 5.3.2) відповідно. Побудовані поліноміальні основні та узагальнені функції ми застосовуємо до операторних напівгруп нескінченної кількості параметрів. А саме, ми будуємо функціональне числення для зліченної системи генераторів (C_0) напівгруп стиску і встановлюємо його властивості (див. зауваження 5.3.3 і теорему 5.3.2). Нескінченновимірна напівгрупа Ґаусса, яка генерується зліченним набором операторів другого диференціювання, використана для ілюстрації побудованого числення.

Результати розділу 5 опубліковані в роботах [24,156,157,198] та анонсовано в [41,42,44,52,53,193,194,199]. Для їх доведення суттєво використано ідеї та методи з робіт [37, 204].

Розділ 6

Функціональне числення в класах цілих аналітичних функцій нескінченної кількості змінних

6.1 Операторне числення в класі поліноміальних ультрарозподілів над симетричним простором Фока

У цьому параграфі побудуємо функціональне числення для зліченного набору генераторів сильно неперервних груп операторів в класі поліноміальних ультрарозподілів. Зауважимо, що в цьому параграфі є суттєва відмінність у порівнянні з матеріалом параграфу 5.3. Якщо раніше функціональне числення було задано над тим же банаховим простором, на якому задані вихідні оператори, то тут маємо дещо іншу ситуацію. А саме, для зліченної кількості генераторів сильно неперервних груп операторів, заданих на гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, ми будуємо операторне числення, що задане на симетричному просторі Фока $\mathfrak{F}(\mathcal{H}) := \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{H}^{\widehat{\otimes} n}$.

6.1.1 Симетричні функції нескінченної кількості змінних

У пункті 4.4.2 було визначено простір $\Gamma(E_\beta) = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}_+}{}_{fin} E_\beta^{\widehat{\otimes} n}$, елементи якого мають вигляд $\widehat{\boldsymbol{p}} = \big(\widehat{p}_n\big)$, де $\widehat{p}_n = F^{\otimes n} p_n \in E_\beta^{\widehat{\otimes} n}$ для деякого $\boldsymbol{p} =$

$\big(p_n\big) \in \Gamma(\mathcal{G}_\beta)$, $p_n \in \mathcal{G}_\beta^{\widehat{\otimes} n}$ (див. формули (4.4.9) та (4.4.10)). Для простоти у цьому параграфі розглянемо одновимірний випадок, тобто візьмемо $d = 1$ у всіх потрібних тут формулах пункту 4.4.2. Зауважимо, що у цьому випадку для кожного $n \in \mathbb{N}$ елемент $\widehat{p}_n$ є функцією n комплексних змінних $\mathbb{C}^n \ni (z_1, \ldots, z_n) \longmapsto \widehat{p}_n(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}$. Нехай для спрощення записів $p_n = \varphi^{\otimes n} \in \mathcal{G}_\beta^{\widehat{\otimes} n}$ для деякої функції $\varphi \in \mathcal{G}_\beta$. Тоді функцію $\widehat{p}_n = \widehat{\varphi}^{\otimes n}$ можна записати у вигляді

$$\widehat{p}_n(z_1, \ldots, z_n) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\mathrm{i} t_1 z_1} \varphi(t_1)\, dt_1 \cdot \ldots \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-\mathrm{i} t_n z_n} \varphi(t_n)\, dt_n,$$

де $z_j \in \mathbb{C}$, $t_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$. Тому елементи простору $\Gamma(E_\beta)$ можна розуміти як функції нескінченної кількості змінних

$$\widehat{\boldsymbol{p}} : \bigtimes_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{C} \ni (z_1, \ldots, z_n, \ldots) \quad \longmapsto \quad \widehat{\boldsymbol{p}}(z_1, \ldots, z_n, \ldots) \in \mathbb{C}, \tag{6.1.1}$$

де $\widehat{\boldsymbol{p}}(z_1, \ldots, z_n, \ldots) := \widehat{p}_0 + \widehat{p}_1(z_1) + \widehat{p}_2(z_2, z_3) + \cdots + \widehat{p}_n(z_{\mathfrak{b}_n}, \ldots, z_{\mathfrak{e}_n}) + \ldots$, $\widehat{p}_0 \in \mathbb{C}$, $\mathfrak{b}_n := \frac{n(n-1)}{2} + 1$, $\mathfrak{e}_n := \frac{n(n+1)}{2}$.

Зробимо два суттєві зауваження щодо функцій вигляду (6.1.1). По перше, кожен елемент $\widehat{\boldsymbol{p}} \in \Gamma(E_\beta)$ насправді є функцією тільки від скінченної кількості змінних (ця кількість не є фіксованою і залежить від $\widehat{\boldsymbol{p}}$). Це пояснюється тим, що елементи простору $\Gamma(E_\beta)$ є фінітними послідовностями. Крім того, це гарантує збіжність “ряду”, що стоїть в правій частині означення (6.1.1). По друге, як зазначалось вище, кожна з функцій $\widehat{p}_n$ є функцією n комплексних змінних. При цьому з означення симетричного тензорного добутку випливає, що $\widehat{p}_n(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ є симетричною функцією, тобто

$$\widehat{p}_n(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \widehat{p}_n\big(z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}, \ldots, z_{\sigma(n)}\big),$$

де σ — довільна перестановка множини $\{1, \ldots, n\}$.

6.1.2 Сильно неперервні групи операторів нескінченної кількості параметрів

Нехай $\mathcal{H}$ — комплексний гільбертів простір. Нехай задано зліченний набір операторів

$$(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n, \ldots), \tag{6.1.2}$$

що діють в просторі $\mathcal{H}$. Жодних умов комутативності операторів цього набору ми не накладаємо.

Припустимо, що $\mathbf{A}_j$ для кожного $j \in \mathbb{N}$ генерує однопараметричну сильно неперервну групу $\mathbb{R} \ni t \longmapsto e^{-\mathrm{i}t\mathbf{A}_j} \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ (див. пункт 1.2.3, також [38]), що задовольняє умову

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|e^{-\mathrm{i}t\mathbf{A}_j}\|_{\mathscr{L}(\mathcal{H})} \leq 1. \tag{6.1.3}$$

Позначимо

$$\mathscr{A}_j := \underbrace{I_{\mathcal{H}} \otimes \cdots \otimes I_{\mathcal{H}}}_{j} \otimes \mathbf{A}_j \otimes I_{\mathcal{H}} \otimes \cdots \in \mathscr{L}(\mathfrak{F}(\mathcal{H})), \qquad j \in \mathbb{N},$$

де $I_{\mathcal{H}}$ — тотожний оператор в просторі $\mathcal{H}$. За означенням приймемо $\mathscr{A}_0 := I_{\mathcal{H}} \otimes I_{\mathcal{H}} \otimes \cdots \in \mathscr{L}(\mathfrak{F}(\mathcal{H}))$.

Для кожного натурального n позначимо $A_n := \mathscr{A}_{\mathfrak{b}_n} \otimes \cdots \otimes \mathscr{A}_{\mathfrak{e}_n}$, де $\mathfrak{b}_n := \frac{n(n-1)}{2} + 1$, $\mathfrak{e}_n := \frac{n(n+1)}{2}$. Зауважимо, що A_n є тензорним добутком рівно n операторів, оскільки, як легко перевірити, $\mathfrak{e}_n - \mathfrak{b}_n + 1 = n$. Приймемо за означенням $A_0 := \mathscr{A}_0$.

Тепер замість набору (6.1.2), взагалі кажучи, не комутуючих операторів, що діють в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, розглянемо зліченний набір комутуючих операторів, що діють в просторі Фока $\mathfrak{F}(\mathcal{H})$, а саме

$$A := (A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots). \tag{6.1.4}$$

Зауважимо, що для кожного $n \in \mathbb{Z}_+$ оператор A_n є тотожним оператором на $\mathcal{H}^{\widehat{\otimes} k}$ для всіх $k \neq n$. Тому не обмежуючи загальності можна вважати, що $A_n \in \mathscr{L}(\mathcal{H}^{\widehat{\otimes} n})$, $n \in \mathbb{Z}_+$. При цьому кожен оператор A_n генерує сильно неперервну n-параметричну групу

$$\mathbb{R}^n \ni t = (t_1, \dots, t_n) \longmapsto e^{-\mathfrak{i}tA_n} := e^{-\mathfrak{i}t_1 \mathscr{A}_{\mathfrak{b}n}} \otimes \dots \otimes e^{-\mathfrak{i}t_n \mathscr{A}_{\mathfrak{e}n}} \in \mathscr{L}(\mathfrak{F}(\mathcal{H})), \tag{6.1.5}$$

де

$$e^{-\mathfrak{i}t_i \mathscr{A}_j} := \underbrace{I_{\mathcal{H}} \otimes \ldots \otimes I_{\mathcal{H}}}_{j} \otimes e^{-\mathfrak{i}t_i \mathbf{A}_j} \otimes I_{\mathcal{H}} \otimes \ldots, \qquad i = 1, \dots, n, \quad j \in \mathbb{N}, \tag{6.1.6}$$

а кожна однопараметрична група $e^{-\mathfrak{i}t_i \mathbf{A}_j}$ задовольняє умову (6.1.3). Аналогічно, не обмежуючи загальності можна вважати, що $e^{-\mathfrak{i}tA_n} \in \mathscr{L}(\mathcal{H}^{\widehat{\otimes} n})$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Нехай $\mathscr{G}$ позначає множину, елементами якої є зліченні системи операторів вигляду (6.1.4), а $\mathscr{G}_n$ — множину, елементами якої є оператори вигляду $A_n = \mathscr{A}_{\mathfrak{b}_n} \otimes \dots \otimes \mathscr{A}_{\mathfrak{e}_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Приймемо за означенням $\mathscr{G}_0 := \{\mathscr{A}_0\}$.

6.1.3 Функціональне числення для зліченного набору генераторів (C_0) груп в класі поліноміальних ультрарозподілів

Для кожного $n \in \mathbb{Z}_+$ визначимо множину

$$\widetilde{\mathcal{H}}_n := \{\widetilde{p}_n : \mathscr{G}_n \longrightarrow \mathscr{L}(\mathcal{H}^{\widehat{\otimes} n}) : p_n \in \mathcal{G}_\beta^{\widehat{\otimes} n}\},$$

що складається із функцій операторного аргумента вигляду

$$\widetilde{p}_n(A_n) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\mathfrak{i}t_1 \mathscr{A}_{\mathfrak{b}n}} \otimes \dots \otimes e^{-\mathfrak{i}t_n \mathscr{A}_{\mathfrak{e}n}} p_n(t_1, \dots, t_n)\, dt_1 \dots dt_n, \tag{6.1.7}$$

де інтеграли ми розуміємо у сенсі Бохнера. Приймемо за означенням $\widetilde{p}_0 \colon \mathscr{G}_0 \ni A_0 \longmapsto \widetilde{p}_0(A_0) := p_0 I_{\mathbb{C}} \in \mathscr{L}(\mathbb{C})$.

Визначимо відображення

$$\mathcal{F} := (\mathcal{F}_n) \colon \Gamma(\mathcal{G}_\beta) \ni \boldsymbol{p} = \big(p_n\big) \quad \longmapsto \quad \widetilde{\boldsymbol{p}} := \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \widetilde{p}_n \in \widetilde{\mathcal{H}}, \tag{6.1.8}$$

де $\widetilde{\mathcal{H}} := \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\widetilde{\mathcal{H}}_n$. З умови (6.1.3) та [38, теорема 15.2.1] випливає, що всі відображення $\mathcal{F}_n : p_n \longmapsto \widetilde{p}_n$, $n\in\mathbb{Z}_+$, є ізоморфізмами.

Зауважимо, що $\widetilde{\mathcal{H}}$ є алгеброю функцій

$$\widetilde{\mathcal{H}} := \{\widetilde{\boldsymbol{p}} : \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{L}(\mathfrak{F}(\mathcal{H})) : \boldsymbol{p}\in\Gamma(\mathcal{G}_\beta)\},$$

з “поточковим” множенням, що задається рівністю

$$(\widetilde{\boldsymbol{p}}\cdot\widetilde{\boldsymbol{q}})(A) := \widetilde{\boldsymbol{p}}(A)\circ\widetilde{\boldsymbol{q}}(A).$$

Зауваження 6.1.1. Відображення $\mathcal{F}\colon \Gamma(\mathcal{G}_\beta)\longrightarrow\widetilde{\mathcal{H}}$ діє як гомоморфізм з алгебри $\big\{\Gamma(\mathcal{G}_\beta),\circledast\big\}$ в алгебру $\widetilde{\mathcal{H}}$ функцій операторного аргумента, визначених на $\mathscr{G}$ із значеннями в просторі операторів на просторі Фока. З іншого боку, відображення $F^{\otimes} : \Gamma(\mathcal{G}_\beta)\longrightarrow\Gamma(E_\beta)$ згідно з результатами пункту 4.4.2 також є гомоморфізмом. Тому відображення

$$\mathcal{F}\circ(F^{\otimes})^{-1}\colon \Gamma(E_\beta)\longrightarrow\widetilde{\mathcal{H}}$$

ми можемо розуміти як “елементарне” функціональне числення. Іншими словами, оператор $\widetilde{\boldsymbol{p}}(A) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\widetilde{p}_n(A_n)\in\mathscr{L}(\mathfrak{F}(\mathcal{H}))$ ми розуміємо як “значення” функції $\widehat{\boldsymbol{p}}$ нескінченної кількості змінних (див. (6.1.1)) на зліченному наборі $A = (A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots)\in\mathscr{G}$ операторів (див. (6.1.4)). Вище описану ситуацію зображає наступна діаграма.

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(E_\beta)\ni\widehat{\boldsymbol{p}} \arrow[dr, "\mathcal{F}\circ(F^{\otimes})^{-1}"'] & \boldsymbol{p}\in\Gamma(\mathcal{G}_\beta) \arrow[l, "F^{\otimes}"'] \arrow[d, "\mathcal{F}"'] \\
& \widetilde{\boldsymbol{p}}\in\widetilde{\mathcal{H}}
\end{tikzcd}$$

З теореми 2.2.3 випливає, що відображення $\Upsilon^{\mathcal{G}_\beta}\colon \Gamma(\mathcal{G}_\beta)\longrightarrow\mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta)$ є топологічним ізоморфізмом. Враховуючи його, можна стверджувати, що діаграма

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta) \arrow[dr, "\mathcal{F}_{\mathcal{P}}"'] & \Gamma(\mathcal{G}_\beta) \arrow[l, "\Upsilon^{\mathcal{G}_\beta}"'] \arrow[d, "\mathcal{F}"'] \\
& \widetilde{\mathcal{H}}
\end{tikzcd}$$

де $\mathcal{F}_{\mathcal{P}} := \mathcal{F} \circ (\Upsilon^{\mathcal{G}_\beta})^{-1}$, є комутативною і відображення $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ можна розуміти як функціональне числення в просторі поліноміальних ультрадиференційовних функцій.

Визначимо аналог напівгрупи зсувів, а саме розглянемо однопараметричну групу $\widetilde{T}^{\otimes} : \mathbb{R} \ni s \longmapsto \widetilde{T}^{\otimes}_s \in \mathscr{L}\big(\widetilde{\mathcal{H}}\big)$ на просторі $\widetilde{\mathcal{H}}$, де

$$\widetilde{T}^{\otimes}_s := \big(\widetilde{T}^{\otimes n}_s\big) : \widetilde{\boldsymbol{p}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \widetilde{p}_n \quad \longmapsto \quad \widetilde{T}^{\otimes}_s \widetilde{\boldsymbol{p}} := \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \widetilde{T}^{\otimes n}_s \widetilde{p}_n.$$

При цьому функція $\widetilde{T}^{\otimes n}_s \widetilde{p}_n \in \widetilde{\mathcal{H}}_n$ визначена як відображення

$$\widetilde{T}^{\otimes n}_s \widetilde{p}_n : \mathscr{G}_n \ni A_n \longmapsto \widetilde{T}^{\otimes n}_s \widetilde{p}_n(A_n) \in \mathscr{L}(\mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}),$$

де

$$\widetilde{T}^{\otimes n}_s \widetilde{p}_n(A_n) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\mathrm{i} t_1 \mathscr{A}_{\mathfrak{b}_n}} \otimes \cdots \otimes e^{-\mathrm{i} t_n \mathscr{A}_{\mathfrak{e}_n}} p_n(t_1 + s, \ldots, t_n + s)\, dt_1 \ldots dt_n.$$

Використовуючи властивості інтеграла Бохнера (див. [38, 3.7]), отримаємо, що для всіх $s \in \mathbb{R}$ та $A = \big(A_n\big) \in \mathscr{G}$ і довільного елемента $\boldsymbol{p} = \big(p_n\big) \in \Gamma(\mathcal{G}_\beta)$, $p_n = \varphi^{\otimes n} \in \mathcal{G}_\beta^{\hat{\otimes} n}$, $\varphi \in \mathcal{G}_\beta$, виконуються наступні рівності

$$\begin{aligned}
\widetilde{T^{\otimes}_s \boldsymbol{p}}(A) &= \mathcal{F}\big[\big(T^{\otimes n}_s p_n\big)\big](A) = \mathcal{F}\big[\big((T_s\varphi)^{\otimes n}\big)\big](A) \\
&= I_{\mathbb{C}} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\mathrm{i} t_1 \mathscr{A}_{\mathfrak{b}_n}} \otimes \cdots \otimes e^{-\mathrm{i} t_n \mathscr{A}_{\mathfrak{e}_n}} (T_s\varphi)^{\otimes n}(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n \\
&= I_{\mathbb{C}} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\mathrm{i} t_1 \mathscr{A}_{\mathfrak{b}_n}} \otimes \cdots \otimes e^{-\mathrm{i} t_n \mathscr{A}_{\mathfrak{e}_n}} \bigtimes_{k=1}^{n} \varphi(t_k + s)\, dt_1 \ldots dt_n \\
&= I_{\mathbb{C}} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\mathrm{i} t_1 \mathscr{A}_{\mathfrak{b}_n}} \otimes \cdots \otimes e^{-\mathrm{i} t_n \mathscr{A}_{\mathfrak{e}_n}} p_n(t_1 + s, \ldots, t_n + s)\, dt_1 \ldots dt_n \\
&= \widetilde{p}_0(A_0) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \widetilde{T}^{\otimes n}_s \widetilde{p}_n(A_n) = \widetilde{T}^{\otimes}_s \widetilde{\boldsymbol{p}}(A),
\end{aligned}$$

де $T^{\otimes}_s = \big(T^{\otimes n}_s\big)$, $s \in \mathbb{R}$, — оператори поліноміальної групи зсувів, що визначається подібно до (4.3.12).

Звідси отримуємо, що оператор $\widetilde{T}^{\otimes}_s$ можна представити у такому вигляді $\widetilde{T}^{\otimes}_s = \mathcal{F} \circ T^{\otimes}_s \circ \mathcal{F}^{-1}$. З неперервності відображень $T^{\otimes}_s$ та $\mathcal{F}$ та відкритості перетворення $\mathcal{F}$ випливає, що відображення

$$\widetilde{T}^{\otimes} : \mathbb{R} \ni s \longmapsto \widetilde{T}^{\otimes}_s \in \mathscr{L}\big(\widetilde{\mathcal{H}}\,\big)$$

є (C_0) групою операторів.

Комутантом групи $\widetilde{T}^{\otimes}$ назвемо множину

$$\big[\widetilde{T}^{\otimes}\big]^c := \big\{\widetilde{T} \in \mathscr{L}\big(\widetilde{\mathcal{H}}\,\big) : \widetilde{T} \circ \widetilde{T}^{\otimes}_s = \widetilde{T}^{\otimes}_s \circ \widetilde{T}, \forall s \in \mathbb{R}\big\}.$$

Для кожного $n \in \mathbb{Z}_+$ введемо оператори $\mathcal{Q}_{f^{\otimes n}} \in \mathscr{L}\big(\widetilde{\mathcal{H}}_n\,\big)$, де $f \in \mathcal{G}'_\beta$, за допомогою формул: $(\mathcal{Q}_{f^{\otimes 0}}\widetilde{p}_0)(A_0) := I_{\mathbb{C}}$ та $\mathcal{Q}_{f^{\otimes n}} : \widetilde{p}_n \longmapsto \mathcal{Q}_{f^{\otimes n}}\widetilde{p}_n$, $n \in \mathbb{N}$, де

$$(\mathcal{Q}_{f^{\otimes n}}\widetilde{p}_n)(A_n) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\mathrm{i}t_1\mathscr{A}_{\mathfrak{b}_n}} \otimes \dots \otimes e^{-\mathrm{i}t_n\mathscr{A}_{\mathfrak{e}_n}} K_f^{\otimes n} p_n(t_1, \dots, t_n)\, dt_1 \dots dt_n.$$

Тут функція $\widetilde{p}_n$ операторного аргумента визначена за формулою (6.1.7), а означення оператора $K_f^{\otimes n}$ подано в (4.3.11) та (4.3.14).

Визначимо відображення

$$\mathcal{Q} : \Gamma(\mathcal{G}'_\beta) \ni \boldsymbol{u} = \big(f^{\otimes n}\big) \quad \longmapsto \quad \mathcal{Q}_{\boldsymbol{u}} := \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{Q}_{f^{\otimes n}} \in \mathscr{L}\big(\widetilde{\mathcal{H}}\,\big). \tag{6.1.9}$$

Теорема 6.1.1. *Відображення $\mathcal{Q}$, що визначене формулою* (6.1.9), *здійснює алгебраїчний ізоморфізм з алгебри $\big\{\Gamma(\mathcal{G}'_\beta), \circledast\big\}$ на підалгебру в комутанті $\big[\widetilde{T}^{\otimes}\big]^c$ операторів вигляду $\widetilde{K}^{\otimes} = \mathcal{F} \circ K^{\otimes} \circ \mathcal{F}^{-1} \in \mathscr{L}\big(\widetilde{\mathcal{H}}\,\big)$, де $K \in \mathscr{L}(\mathcal{G}_\beta)$. Зокрема, рівність $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{u} \circledast \boldsymbol{v}} = \mathcal{Q}_{\boldsymbol{u}} \circ \mathcal{Q}_{\boldsymbol{v}}$ справджується для всіх $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \Gamma(\mathcal{G}'_\beta)$. Крім того, оператор $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{\delta}}$ є одиничним в $\mathscr{L}\big(\widetilde{\mathcal{H}}\,\big)$, де $\boldsymbol{\delta} = \big(1, \delta, \dots, \delta^{\otimes n} \dots\big)$.*

Доведення. Нехай $\boldsymbol{u} = \big(u_n\big) \in \Gamma(\mathcal{G}'_\beta)$ і $\boldsymbol{p} = \big(p_n\big) \in \Gamma(\mathcal{G}_\beta)$, де $u_n = f^{\otimes n}$, $f \in \mathcal{G}'_\beta$. Тоді для всіх $A = \big(A_n\big) \in \mathscr{G}$ справедливими є наступні рівності

$$\begin{aligned}(\mathcal{Q}_{\boldsymbol{u}}\widetilde{\boldsymbol{p}})(A) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} (\mathcal{Q}_{u_n}\widetilde{p}_n)(A_n) \\ &= I_{\mathbb{C}} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\mathrm{i}t_1\mathscr{A}_{\mathfrak{b}_n}} \otimes \dots \otimes e^{-\mathrm{i}t_n\mathscr{A}_{\mathfrak{e}_n}} K_f^{\otimes n} p_n(t_1, \dots, t_n)\, dt_1 \dots dt_n \\ &= \mathcal{F}\big[K_f^{\otimes n} p_n\big](A) = \widetilde{K_{\boldsymbol{u}}^{\otimes}\boldsymbol{p}}(A),\end{aligned} \tag{6.1.10}$$

де $K^{\otimes}_{\boldsymbol{u}} = \big(K^{\otimes n}_f\big)$. Це означає, що відображення $\mathcal{Q}$ можна представити у вигляді $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{u}} = \mathcal{F} \circ K^{\otimes}_{\boldsymbol{u}} \circ \mathcal{F}^{-1}$. З неперервності відображень $K^{\otimes}_{\boldsymbol{u}}$ та $\mathcal{F}$ та відкритості відображення $\mathcal{F}$ випливає, що $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{u}} \in \mathscr{L}\big(\widetilde{\mathcal{H}}\big)$ для всіх $\boldsymbol{u} \in \Gamma(\mathcal{G}'_\beta)$. Звідси випливає, що рівності

$$\begin{aligned}
(\mathcal{Q}_{\boldsymbol{u}}\widetilde{T}^{\otimes}_s\widetilde{\boldsymbol{p}})(A) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}(\mathcal{Q}_{u_n}\widetilde{T}^{\otimes n}_s\widetilde{p}_n)(A_n)\\
&= I_{\mathbb{C}} + \sum_{n\in\mathbb{N}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\mathfrak{i}t_1\mathscr{A}_{\mathfrak{b}_n}}\otimes\cdots\otimes e^{-\mathfrak{i}t_n\mathscr{A}_{\mathfrak{e}_n}}K^{\otimes n}_f p_n(t_1+s,\ldots,t_n+s)\,dt\\
&= I_{\mathbb{C}} + \sum_{n\in\mathbb{N}}\widetilde{T}^{\otimes n}_s\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\mathfrak{i}t_1\mathscr{A}_{\mathfrak{b}_n}}\otimes\cdots\otimes e^{-\mathfrak{i}t_n\mathscr{A}_{\mathfrak{e}_n}}K^{\otimes n}_f p_n(t_1,\ldots,t_n)\,dt\\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}(\widetilde{T}^{\otimes n}_s\mathcal{Q}_{u_n}\widetilde{p}_n)(A_n) = (\widetilde{T}^{\otimes}_s\mathcal{Q}_{\boldsymbol{u}}\widetilde{\boldsymbol{p}})(A), \qquad dt := dt_1\ldots dt_n,
\end{aligned}$$

справджуються для всіх $s \in \mathbb{R}$, $\widetilde{\boldsymbol{p}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\widetilde{p}_n \in \widetilde{\mathcal{H}}$ і $A := \big(A_n\big) \in \mathscr{G}$. Отже, для всіх $\boldsymbol{u} \in \Gamma(\mathcal{G}'_\beta)$ оператор $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{u}}$ належить комутанту $\big[\widetilde{T}^{\otimes}\big]^c$.

Навпаки, нехай задано оператор вигляду $\widetilde{K}^{\otimes} = \mathcal{F}\circ K^{\otimes}\circ\mathcal{F}^{-1} \in \mathscr{L}\big(\widetilde{\mathcal{H}}\big)$, де $K \in \mathscr{L}(\mathcal{G}_\beta)$ належить комутанту $\big[\widetilde{T}^{\otimes}\big]^c$. Тоді

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\circ K^{\otimes}\circ T^{\otimes}_s\circ\mathcal{F}^{-1} =& \mathcal{F}\circ K^{\otimes}\circ\mathcal{F}^{-1}\circ\mathcal{F}\circ T^{\otimes}_s\circ\mathcal{F}^{-1} = \widetilde{K}^{\otimes}\circ\widetilde{T}^{\otimes}_s = \widetilde{T}^{\otimes}_s\circ\widetilde{K}^{\otimes}\\
=& \mathcal{F}\circ T^{\otimes}_s\circ\mathcal{F}^{-1}\circ\mathcal{F}\circ K^{\otimes}\circ\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}\circ T^{\otimes}_s\circ K^{\otimes}\circ\mathcal{F}^{-1}.
\end{aligned}$$

Звідси випливає, що оператор $K^{\otimes}$ належить комутанту групи $T^{\otimes}_s$.

Визначимо ультрарозподіл $f_0 \in \mathcal{G}'_\beta$ за правилом $\langle f_0, \varphi\rangle := (K\varphi)(0)$ для довільного $\varphi \in \mathcal{G}_\beta$. Легко бачити, що для цього ультрарозподілу маємо $(f_0 \star \varphi)(s) = \langle f_0, T_s\varphi\rangle = (KT_s\varphi)(0) = (K\varphi)(s)$. Тому для елемента $\boldsymbol{w} := (1, f_0, \ldots, f_0^{\otimes n}, \ldots)$ справджуються наступні рівності

$$K^{\otimes}_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{p} = \big((f_0\star\varphi)^{\otimes n}\big) = \big((K\varphi)^{\otimes n}\big) = \big(K^{\otimes n}\varphi^{\otimes n}\big) = K^{\otimes}\boldsymbol{p}$$

для довільного $\boldsymbol{p} := (1, \varphi, \ldots, \varphi^{\otimes n}, \ldots)$, $\varphi \in \mathcal{G}_\beta$. Таким чином $K^{\otimes} = K^{\otimes}_{\boldsymbol{w}}$. Звідси випливає рівність $\widetilde{K}^{\otimes} = \widetilde{K}^{\otimes}_{\boldsymbol{w}}$. Це завершує доведення опису образу відображення $\mathcal{Q}$.

З рівності $K^{\otimes}_{\boldsymbol{u}\circledast\boldsymbol{v}} = K^{\otimes}_{\boldsymbol{u}} \circ K^{\otimes}_{\boldsymbol{v}}$ (див. доведення теореми 4.3.3) випливає справедливість наступних рівностей

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_{\boldsymbol{u}\circledast\boldsymbol{v}} = \mathcal{F} \circ K^{\otimes}_{\boldsymbol{u}\circledast\boldsymbol{v}} \circ \mathcal{F}^{-1} &= \mathcal{F} \circ K^{\otimes}_{\boldsymbol{u}} \circ K^{\otimes}_{\boldsymbol{v}} \circ \mathcal{F}^{-1}\\ &= \mathcal{F} \circ K^{\otimes}_{\boldsymbol{u}} \circ \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} \circ K^{\otimes}_{\boldsymbol{v}} \circ \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{Q}_{\boldsymbol{u}} \circ \mathcal{Q}_{\boldsymbol{v}}.\end{aligned}$$

Оскільки елемент $\boldsymbol{\delta} = \left(\delta^{\otimes n}\right)$ є одиницею алгебри $\left\{\Gamma(\mathcal{G}'_\beta), \circledast\right\}$, то очевидними є наступні рівності $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{\delta}} \circ \mathcal{Q}_{\boldsymbol{u}} = \mathcal{Q}_{\boldsymbol{\delta}\circledast\boldsymbol{u}} = \mathcal{Q}_{\boldsymbol{u}} = \mathcal{Q}_{\boldsymbol{u}\circledast\boldsymbol{\delta}} = \mathcal{Q}_{\boldsymbol{u}} \circ \mathcal{Q}_{\boldsymbol{\delta}}$, тобто, $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{\delta}} \in \mathscr{L}\big(\widetilde{\mathcal{H}}\,\big)$ — одиничний оператор. □

Теорема 6.1.2. *Для всіх* $\boldsymbol{u} \in \Gamma(\mathcal{G}'_\beta)$ *і* $\boldsymbol{p} \in \Gamma(\mathcal{G}_\beta)$ *відображення* $\mathcal{Q}$ *володіє властивістю* $\mathcal{Q}_{\mathbb{D}'\boldsymbol{u}}\widetilde{\boldsymbol{p}} = -\mathcal{Q}_{\boldsymbol{u}}\widetilde{\mathbb{D}\boldsymbol{p}}$.

Доведення. Формулу (6.1.10) можна записати у вигляді $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{u}}\widetilde{\boldsymbol{p}} = \widetilde{\boldsymbol{u}\star\boldsymbol{p}}$. Тому використовуючи твердження 4.3.3, отримаємо

$$\mathcal{Q}_{\mathbb{D}'\boldsymbol{u}}\widetilde{\boldsymbol{p}} = \widetilde{(\mathbb{D}'\boldsymbol{u})\star\boldsymbol{p}} = -\widetilde{\boldsymbol{u}\star(\mathbb{D}\boldsymbol{p})} = -\mathcal{Q}_{\boldsymbol{u}}\widetilde{\mathbb{D}\boldsymbol{p}}.$$

□

Зауваження 6.1.2. З теореми 4.3.3 випливає, що при кожному фіксованому $\boldsymbol{p} \in \Gamma(\mathcal{G}_\beta)$ відображення $\mathsf{K}_{\boldsymbol{p}} : \Gamma(\mathcal{G}'_\beta) \ni \boldsymbol{u} \longmapsto \boldsymbol{u}\star\boldsymbol{p} \in \Gamma(\mathcal{G}_\beta)$ є гомоморфізмом відповідних алгебр. З іншого боку відображення $\Gamma(\mathcal{G}'_\beta) \ni \boldsymbol{u} \longmapsto \mathcal{Q}_{\boldsymbol{u}}\widetilde{\boldsymbol{p}} \in \widetilde{\mathcal{H}}$ є гомоморфізмом з алгебри $\Gamma(\mathcal{G}'_\beta)$ в алгебру операторнозначних функцій, визначених на $\mathscr{G}$. Порівнюючи означення відображень $\mathcal{F}$ та $\mathcal{Q}$ (див. формули (6.1.8) та (6.1.9) відповідно), легко побачити, що функцію $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{u}}\widetilde{\boldsymbol{p}}$ операторного аргумента можна записати у вигляді $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{u}}\widetilde{\boldsymbol{p}} = \widetilde{\boldsymbol{u}\star\boldsymbol{p}}$. Звідси та з формули (6.1.10) випливає, що оператор $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{u}}\widetilde{\boldsymbol{p}}(A) = \widetilde{\boldsymbol{u}\star\boldsymbol{p}}(A) \in \mathscr{L}(\mathfrak{F}(\mathcal{H}))$ можна розуміти як "значення" функції $\widehat{\boldsymbol{u}\star\boldsymbol{p}} \in \Gamma(E_\beta)$ нескінченної кількості змінних (див. формулу (4.4.9)) на зліченному наборі $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n, \ldots)$ генераторів однопараметричних (C_0) груп стиску.

Сказане вище ілюструє наступна діаграма.

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(\mathcal{G}'_\beta) \ni \boldsymbol{u} \arrow[r, "\mathsf{K}_{\boldsymbol{p}}"] \arrow[dr, "\mathcal{F}\circ\mathsf{K}_{\boldsymbol{p}}"'] & \boldsymbol{u}\star\boldsymbol{p} \in \Gamma(\mathcal{G}_\beta) \arrow[r, "F^{\otimes}"] \arrow[d, "\mathcal{F}"'] & \widehat{\boldsymbol{u}\star\boldsymbol{p}} \in \Gamma(E_\beta) \arrow[dl, "\mathcal{F}\circ(F^{\otimes})^{-1}"] \\
 & \widetilde{\boldsymbol{u}\star\boldsymbol{p}} \in \widetilde{\mathcal{H}} &
\end{tikzcd}$$

З теореми 2.2.3 випливає, що відображення $\Psi^{\mathcal{G}_\beta}\colon \Gamma(\mathcal{G}'_\beta) \longrightarrow \mathcal{P}'(\mathcal{G}'_\beta)$ здійснює топологічний ізоморфізм. Тому діаграма

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_\beta) \arrow[dr] & \Gamma(\mathcal{G}'_\beta) \arrow[l, "\Psi^{\mathcal{G}_\beta}"'] \arrow[d, "\mathcal{F}\circ\mathsf{K}_{\boldsymbol{p}}"] \\
 & \widetilde{\mathcal{H}}
\end{tikzcd}$$

є комутативною і відображення $\mathcal{F} \circ \mathsf{K}_{\boldsymbol{p}} \circ (\Psi^{\mathcal{G}_\beta})^{-1}$ можна розуміти як функціональне числення в алгебрі поліноміальних ультрарозподілів.

6.2 Застосування функціонального числення до розв'язання задачі Коші для нескінченновимірного рівняння теплопровідності

У роботі [119] Л. Ґросс запровадив нескінченновимірний лапласіан, що зараз називається лапласіаном Ґросса, і дослідив відповідну задачу Коші. З того часу такі задачі вивчаються у різних класах функцій та розподілів (див., наприклад, [84,153,154]). Метою цього параграфу є проілюструвати застосування побудованого числення операторів до розв'язання нескінченновимірної задачі Коші для рівняння теплопровідності, породженого лапласіаном Ґросса.

6.2.1 Згортка поліноміальних ультрарозподілів

У цьому пункті будемо використовувати матеріал пунктів 4.4.1 та 4.4.2, при цьому збережемо введені там позначення.

У нескінченновимірному комплексному аналізі згортковий оператор на просторі основних функцій $\mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta)$ є неперервним лінійним оператором з $\mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta)$ в себе, що комутує із оператором зсуву (див. параграфи 4.2 та 4.3).

Нехай $g \in \mathcal{G}'_\beta$. Визначимо оператор зсуву на просторі $\mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta)$ за правилом $\mathscr{T}_g P(f) := P(f+g)$, $P \in \mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta)$, $f \in \mathcal{G}'_\beta$. Легко бачити, що $\mathscr{T}_g$ є неперервним лінійним оператором з $\mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta)$ в себе.

Нагадаємо, що символ $\circledcirc_k$ позначає (праве) k-скорочення [137] симетричного тензорного добутку, а саме $g^{\otimes k} \circledcirc_k \varphi^{\otimes s} := \langle g, \varphi \rangle^k \varphi^{\otimes(s-k)}$, $k \le s$, $g \in \mathcal{G}'_\beta$, $\varphi \in \mathcal{G}_\beta$.

Покажемо, що оператор зсуву $\mathscr{T}_g$ для всіх $g \in \mathcal{G}'_\beta$ діє за правилом

$$P = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+}^{fin} \langle \cdot^{\otimes n}, p_n \rangle \quad \longmapsto \quad \mathscr{T}_g P = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+}^{fin} \langle \cdot^{\otimes n}, q_n \rangle,$$

де $p_n, q_n \in \mathcal{G}_\beta^{\widehat{\otimes} n}$, $n = 0, 1, \ldots, m$, $m = \deg P$, а коефіцієнти q_n можна обчислити за формулою

$$q_n = \sum_{k=0}^{m-n} \frac{(n+k)!}{n!k!} g^{\otimes k} \circledcirc_k p_{n+k}.$$

Це достатньо показати для поліномів вигляду $P_{\varphi,m} = \sum_{k=0}^{m} \langle \ \cdot^{\otimes k}, \varphi^{\otimes k} \rangle$, де $(1, \varphi, \varphi^{\otimes 2}, \ldots, \varphi^{\otimes m}, 0, \ldots) \in \Gamma(\mathcal{G}_\beta)$, $\varphi \in \mathcal{G}_\beta$, $m \in \mathbb{Z}_+$.

Безпосередні обчислення дають потрібний результат

$$\begin{aligned}
\mathscr{T}_g P_{\varphi,m}(f) &= P_{\varphi,m}(f+g) = \sum_{k=0}^{m} \langle (f+g)^{\otimes k}, \varphi^{\otimes k} \rangle = \sum_{k=0}^{m} \sum_{n=0}^{k} C_k^n \langle f^{\otimes n} \widehat{\otimes} g^{\otimes(k-n)}, \varphi^{\otimes k} \rangle \\
&= \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=n}^{m} C_k^n \langle f^{\otimes n} \widehat{\otimes} g^{\otimes(k-n)}, \varphi^{\otimes k} \rangle = \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=0}^{m-n} C_{n+k}^n \langle f^{\otimes n} \widehat{\otimes} g^{\otimes k}, \varphi^{\otimes(n+k)} \rangle \\
&= \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=0}^{m-n} C_{n+k}^n \Big\langle f^{\otimes n}, \langle g, \varphi \rangle^k \varphi^{\otimes n} \Big\rangle = \sum_{n=0}^{m} \Big\langle f^{\otimes n}, \sum_{k=0}^{m-n} C_{n+k}^n \langle g, \varphi \rangle^k \varphi^{\otimes n} \Big\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{m} \Big\langle f^{\otimes n}, \sum_{k=0}^{m-n} C_{n+k}^n g^{\otimes k} \circledcirc_k \varphi^{\otimes(n+k)} \Big\rangle.
\end{aligned} \tag{6.2.1}$$

Зауважимо, що у вище записаних рівностях ми поміняли знаки сум місцями, а потім перенумерували одну із внутрішніх сум.

Визначимо згортку поліноміального ультрарозподілу $U \in \mathcal{P}'(\mathcal{G}'_\beta)$ з основною функцією $P \in \mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta)$ за правилом

$$(U * P)(g) := \langle U, \mathscr{T}_g P \rangle, \qquad g \in \mathcal{G}'_\beta,$$

де справа записане спарювання дуальної пари $\big\langle \mathcal{P}'(\mathcal{G}'_\beta), \mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta) \big\rangle$ (див. теорему 2.2.3 та формулу (2.2.2)).

Якщо $U \in \mathcal{P}'(\mathcal{G}'_\beta)$ та $P \in \mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta)$ представлені у вигляді $U = \bigtimes\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} \langle u_n, \cdot^{\otimes n} \rangle$ та $P = \sum\limits_{n=0}^{m} \langle \cdot^{\otimes n}, p_n \rangle$ відповідно, то згортка може бути записана у явному вигляді

$$\begin{aligned}(U * P)(g) &= \sum_{n=0}^{m} \Big\langle u_n, \sum_{k=0}^{m-n} C_{n+k}^{n} g^{\otimes k} \circledcirc_k p_{n+k} \Big\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=0}^{m-n} C_{n+k}^{n} \langle u_n \widehat{\otimes} g^{\otimes k}, p_{n+k} \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{m} \sum_{n=0}^{m-k} C_{n+k}^{n} \langle g^{\otimes k}, u_n \circledcirc_n p_{n+k} \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{m} \Big\langle g^{\otimes k}, \sum_{n=0}^{m-k} C_{n+k}^{n} u_n \circledcirc_n p_{n+k} \Big\rangle.\end{aligned} \tag{6.2.2}$$

Зрозуміло, що

$$q_k = \sum_{n=0}^{m-k} C_{n+k}^{n} u_n \circledcirc_n p_{n+k}$$

належить простору $\mathcal{G}_\beta^{\widehat{\otimes} k}$ для кожного $k = 0, 1, \ldots, m$, звідки випливає, що згортка $U * P$ є поліномом з простору $\mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta)$.

Для довільного поліноміального ультрарозподілу $U \in \mathcal{P}'(\mathcal{G}'_\beta)$ відображення C_U, що визначене формулою

$$C_U : \mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta) \ni P \longmapsto U * P \in \mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta),$$

назвемо асоційованим з U згортковим оператором на $\mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta)$.

Покажемо, що композиція двох згорткових операторів C_V та C_U, асоційованих з довільними $V, U \in \mathcal{P}'(\mathcal{G}'_\beta)$, знову є згортковим оператором, асоційованим з деяким поліноміальним ультрарозподілом, який позначимо $V * U$. Дійсно, якщо $V, U \in \mathcal{P}'(\mathcal{G}'_\beta)$ та $P \in \mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta)$ представлені у вигляді $V = \bigtimes\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} \langle g^{\otimes n}, \cdot^{\otimes n}\rangle$, $U = \bigtimes\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} \langle f^{\otimes n}, \cdot^{\otimes n}\rangle$ та $P = \sum\limits_{n=0}^{m} \langle \cdot^{\otimes n}, \varphi^{\otimes n}\rangle$ відповідно, де $f, g \in \mathcal{G}'_\beta$, $\varphi \in \mathcal{G}_\beta$, то використовуючи формулу (6.2.2), отримаємо рівності

$$\begin{aligned}
(C_V \circ C_U)(P) = V * (U * P) &= \sum_{n=0}^{m} \Big\langle \cdot^{\otimes n}, \sum_{j=0}^{m-n} C_{n+j}^{j} g^{\otimes j} \circledcirc_j q_{n+j} \Big\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{m} \Big\langle \cdot^{\otimes n}, \sum_{j=0}^{m-n} C_{n+j}^{j} g^{\otimes j} \circledcirc_j \Big(\sum_{k=0}^{m-n-j} C_{n+j+k}^{k} f^{\otimes k} \circledcirc_k \varphi^{\otimes (n+j+k)} \Big) \Big\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{m} \Big\langle \cdot^{\otimes n}, \sum_{j=0}^{m-n} \sum_{k=0}^{m-n-j} C_{n+j}^{j} C_{n+j+k}^{k} \langle g, \varphi\rangle^{j} \langle f, \varphi\rangle^{k} \varphi^{\otimes n} \Big\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{m} \Big\langle \cdot^{\otimes n}, \sum_{j+k=0}^{m-n} \frac{(n+j+k)!}{n!j!k!} (g^{\otimes j} \widehat{\otimes} f^{\otimes k}) \circledcirc_{j+k} \varphi^{\otimes (n+j+k)} \Big\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{m} \Big\langle \cdot^{\otimes n}, \sum_{s=0}^{m-n} \frac{(n+s)!}{n!s!} \sum_{j+k=s} \frac{s!}{j!k!} (g^{\otimes j} \widehat{\otimes} f^{\otimes k}) \circledcirc_s \varphi^{\otimes (n+s)} \Big\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{m} \sum_{s=0}^{m-n} \frac{(n+s)!}{n!s!} \sum_{j+k=s} \frac{s!}{j!k!} \big\langle \cdot^{\otimes n}, (g^{\otimes j} \widehat{\otimes} f^{\otimes k}) \circledcirc_s \varphi^{\otimes (n+s)} \big\rangle \\
&= \sum_{s=0}^{m} \sum_{n=0}^{m-s} \frac{(n+s)!}{n!s!} \sum_{j+k=s} \frac{s!}{j!k!} \big\langle \cdot^{\otimes n} \widehat{\otimes} g^{\otimes j} \widehat{\otimes} f^{\otimes k}, \varphi^{\otimes (n+s)} \big\rangle \\
&= \sum_{s=0}^{m} \Big\langle \sum_{j+k=s} \frac{s!}{j!k!} g^{\otimes j} \widehat{\otimes} f^{\otimes k}, \sum_{n=0}^{m-s} C_{n+s}^{s} (\cdot^{\otimes n}) \circledcirc_n \varphi^{\otimes (n+s)} \Big\rangle.
\end{aligned}$$

Звідси випливає, що композиція $C_V \circ C_U$ є згортковим оператором на $\mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta)$, асоційованим з елементом

$$V * U := \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \Big\langle \sum_{j+k=n} \frac{n!}{j!k!} g^{\otimes j} \widehat{\otimes} f^{\otimes k}, \cdot^{\otimes n} \Big\rangle \in \mathcal{P}'(\mathcal{G}'_\beta). \tag{6.2.3}$$

Довільному поліноміальному ультрарозподілу $U \in \mathcal{P}'(\mathcal{G}'_\beta)$ поставимо у відповідність формальний ряд

$$e^{*U} := \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{1}{n!} U^{*n}, \tag{6.2.4}$$

де $U^{*n} := \underbrace{U * U * \cdots * U}_{n}$. Зауважимо, що кожна частинна сума цього ряду належить простору $\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_\beta)$.

6.2.2 Узагальнене рівняння теплопровідності, породжене лапласіаном Ґросса

Нехай $\{U_t : t \in J\}$ — сім'я елементів з простору $\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_\beta)$, J — довільний інтервал вигляду $[0,\alpha]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$. Припустимо, що функція $t \longmapsto U_t$ є неперервна з J в $\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_\beta)$. Тоді функція $t \longmapsto \mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}} U_t$ є неперервною з J в $\mathcal{P}'(E'_\beta)$, де відображення $\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}}$ визначено раніше другою з діаграм (4.4.10). Тому для кожного $t \in J$ множина $\{\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}} U_s : s \in [0,t]\}$ є компактною підмножиною в $\mathcal{P}'(E'_\beta)$. Зокрема вона обмежена. Звідси випливає, що елемент

$$\int_0^t \mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}} U_s \, ds$$

належить простору $\mathcal{P}'(E'_\beta)$ для кожного $t \in J$. А, отже, в просторі $\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_\beta)$ існує єдиний елемент, який позначимо $\int_0^t U_s \, ds$, такий що

$$\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}} \int_0^t U_s \, ds = \int_0^t \mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathcal{P}} U_s \, ds.$$

Більше того, відображення $E_t = \int_0^t U_s \, ds$, $t \in J$, диференційовне в $\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_\beta)$ і задовольняє рівність

$$\frac{\partial}{\partial t} E_t = U_t.$$

Нехай $\{U_t : t \in J\}$ — довільна описана вище сім'я елементів з $\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_\beta)$. Розглянемо задачу Коші

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} X_t = U_t * X_t, & t \in J, \\ X_0 = P, & P \in \mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta). \end{cases} \tag{6.2.5}$$

Теорема 6.2.1. *Задача Коші* (6.2.5) *має єдиний розв'язок в* $\mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta)$*, що задається формулою*

$$X_t = e^{*\int_0^t U_s\,ds} * P, \qquad t \in J, \tag{6.2.6}$$

де $e^{*\int_0^t U_s\,ds}$ *ми розуміємо в сенсі формули* (6.2.4).

Доведення. Використовуючи ітераційний процес Пікара, розв'язок X_t задачі Коші (6.2.5) можна формально записати у вигляді (6.2.6). Зауважимо, що поліном $P \in \mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta)$ містить скінченну кількість доданків, тому згортка формального ряду $e^{*\int_0^t U_s\,ds}$ (див. (6.2.4)) з цим поліномом коректно визначена. Це пояснюється тим, що на значення виразу $e^{*\int_0^t U_s\,ds} * P$ впливає тільки деяка частинна сума ряду $e^{*\int_0^t U_s\,ds}$, яка, як зазначено вище, є елементом простору $\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_\beta)$, при цьому кількість доданків залежить від степеня полінома P. З формули (6.2.2) та зауваження після неї випливає, що розв'язок (6.2.6) належить простору $\mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta)$. □

Застосуємо теорему 6.2.1 для розв'язання узагальненого рівняння теплопровідності, породженого лапласіаном Ґросса.

Визначимо оператор сліду τ за формулою

$$\langle \tau, \varphi\widehat{\otimes}\psi \rangle := \int_{\mathbb{R}^d_+} \varphi(t)\psi(t)\,dt, \qquad \varphi, \psi \in \mathcal{G}_\beta.$$

Неважко перевірити, що $\tau \in \mathscr{L}(\mathcal{G}_\beta^{\widehat{\otimes}2}, \mathbb{C}) = (\mathcal{G}_\beta^{\widehat{\otimes}2})' \simeq \mathcal{G}'^{\widehat{\otimes}2}_\beta$.

Лапласіан Ґросса Δ_G — це оператор (див., наприклад, [153]), що поліному $P = \sum_{n=0}^m \langle \cdot^{\otimes n}, \varphi^{\otimes n} \rangle$, $\varphi \in \mathcal{G}_\beta$, степеня m ставить у відповідність поліном $\Delta_G P$ степеня $m-2$ вигляду

$$\Delta_G P := \sum_{n=0}^{m-2} (n+2)(n+1) \langle \tau, \varphi^{\otimes 2} \rangle \langle \,\cdot\,^{\otimes n}, \varphi^{\otimes n} \rangle.$$

Теорема 6.2.2. *Лапласіан Ґросса* Δ_G *діє як згортковий оператор, а саме справджується рівність*

$$\frac{1}{2}\Delta_G P = C_\tau * P, \qquad P \in \mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta),$$

де C_τ *— поліноміальний ультрарозподіл з простору* $\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_\beta)$*, що відповідає елементу* $(0,0,\tau,0,\dots)\in\Gamma(\mathcal{G}'_\beta)$.

Доведення. Елемент C_τ можна записати у явному вигляді

$$C_\tau = \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \langle u_{\tau,n}, \cdot^{\otimes n}\rangle = \big(0,0,\langle\tau,\cdot^{\otimes 2}\rangle,0,\dots\big),$$

де $u_{\tau,n}=\tau$ при $n=2$ і $u_{\tau,n}=0$ при $n\neq 2$.

Нехай поліном $P\in\mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta)$ записаний у вигляді $P=\sum_{n=0}^m\langle\cdot^{\otimes n},\varphi^{\otimes n}\rangle$, $\varphi\in\mathcal{G}_\beta$. Тепер, використовуючи рівності (6.2.2), отримаємо потрібний результат

$$\begin{aligned}
C_\tau * P &= \sum_{n=0}^m \Big\langle \cdot^{\otimes n}, \sum_{k=0}^{m-n} C_{n+k}^k u_{\tau,k}\circledcirc_k \varphi^{\otimes(n+k)}\Big\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{m-2}\big\langle \cdot^{\otimes n}, C_{n+2}^2\tau\circledcirc_2\varphi^{\otimes(n+2)}\big\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{m-2} C_{n+2}^2\big\langle\tau,\varphi^{\otimes 2}\big\rangle\big\langle\cdot^{\otimes n},\varphi^{\otimes n}\big\rangle = \frac{1}{2}\Delta_G P.
\end{aligned}$$

□

Теорема 6.2.3. *Задача Коші*

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial t}X_t = \frac{1}{2}\Delta_G X_t, & t\in J,\\ X_0 = P, & P\in\mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta),\end{cases}$$

для узагальненого рівняння теплопровідності, породженого лапласіаном Ґросса, має єдиний розв'язок в $\mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta)$*, що задається формулою*

$$X_t = e^{*tC_\tau} * P,\qquad t\in J.$$

Доведення. З теореми 6.2.2 випливає, що узагальнене рівняння теплопровідності можна записати у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial t}X_t = C_\tau * X_t.$$

З теореми 6.2.1 слідує, що розв'язок нової задачі Коші має вигляд

$$X_t = e^{*\int_0^t C_\tau\, ds} * P = e^{*tC_\tau} * P.$$

Знайдемо його явний вигляд. Для цього обчислимо згортку $(tC_\tau)^{*n}$, використовуючи формулу (6.2.3). При $n = 2$ отримаємо

$$\begin{aligned}(tC_\tau) * (tC_\tau) &= \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \Big\langle t^2 \sum_{j+k=n} \frac{n!}{j!k!} u_{\tau,j} \widehat{\otimes} u_{\tau,k},\, \cdot^{\otimes n} \Big\rangle \\ &= \big(0,0,0,0,\frac{4!}{2!2!} t^2 \langle \tau^{\otimes 2},\, \cdot^{\otimes 4}\rangle, 0, \dots\big),\end{aligned}$$

оскільки $u_{\tau,n}$ відмінне від нуля тільки при $n = 2$. Методом математичної індукції легко показати, що

$$(tC_\tau)^{*n} = \big(\underbrace{0,\dots,0}_{2n}, \frac{(2n)!}{2^n} t^n \langle \tau^{\otimes n},\, \cdot^{\otimes 2n}\rangle, 0, \dots\big).$$

Звідси та з формули (6.2.4) отримуємо

$$\begin{aligned} e^{*tC_\tau} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{1}{n!} (tC_\tau)^{*n} = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{1}{n!} \big(\underbrace{0,\dots,0}_{2n}, \frac{(2n)!}{2^n} t^n \langle \tau^{\otimes n},\, \cdot^{\otimes 2n}\rangle, 0, \dots\big) \\ &= \big(1, 0, t\langle \tau,\, \cdot^{\otimes 2}\rangle, 0, 3t^2\langle \tau^{\otimes 2},\, \cdot^{\otimes 4}\rangle, 0, \dots, 0, \underbrace{\frac{(2n)!}{n!} \frac{t^n}{2^n} \langle \tau^{\otimes n},\, \cdot^{\otimes 2n}\rangle}_{2n\text{-те місце}}, 0, \dots\big), \end{aligned} \tag{6.2.7}$$

де на всіх непарних місцях стоять нулі (нагадаємо, що нумерація елементів починається з нуля).

Залишилось, використовуючи формулу (6.2.2), знайти згортку $e^{*tC_\tau} * P$. Нехай поліном $P \in \mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta)$ записаний у вигляді $P = \sum_{n=0}^m \langle \cdot^{\otimes n}, \varphi^{\otimes n}\rangle$, $\varphi \in \mathcal{G}_\beta$. Для довільного $n \in \mathbb{Z}_+$ позначимо $e_{2n} := \frac{(2n)!}{n!} \frac{t^n}{2^n} \tau^{\otimes n}$ і $e_{2n+1} := 0$. Тоді e^{*tC_τ} скорочено можна записати у вигляді $e^{*tC_\tau} = \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \langle e_n,\, \cdot^{\otimes n}\rangle$.

Безпосередні обчислення дають наступний результат

$$\begin{aligned} e^{*tC_\tau} * P &= \sum_{n=0}^{m} \Big\langle \,\cdot\,^{\otimes n}, \sum_{k=0}^{m-n} C_{n+k}^{k} e_k \circledcirc_k \varphi^{\otimes(n+k)} \Big\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{m} \Big\langle \,\cdot\,^{\otimes n}, \sum_{k=0}^{\left[\frac{m-n}{2}\right]} C_{n+2k}^{2k} e_{2k} \circledcirc_{2k} \varphi^{\otimes(n+2k)} \Big\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{m} \Big\langle \,\cdot\,^{\otimes n}, \sum_{k=0}^{\left[\frac{m-n}{2}\right]} \frac{(n+2k)!}{(2k)!n!} \frac{(2k)!}{k!} \frac{t^k}{2^k} \langle \tau^{\otimes k}, \varphi^{\otimes 2k} \rangle \varphi^{\otimes n} \Big\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=0}^{\left[\frac{m-n}{2}\right]} \frac{(n+2k)!}{k!n!} \frac{t^k}{2^k} \langle \tau^{\otimes k}, \varphi^{\otimes 2k} \rangle \big\langle \,\cdot\,^{\otimes n}, \varphi^{\otimes n} \big\rangle, \end{aligned}$$

де символ $[\,\cdot\,]$ позначає цілу частину числа.

Отже, розв'язок задачі Коші для узагальненого рівняння теплопровідності, породженого лапласіаном Ґросса, має вигляд

$$X_t = \sum_{n=0}^{m} \Big\langle \,\cdot\,^{\otimes n}, \sum_{k=0}^{\left[\frac{m-n}{2}\right]} \frac{(n+2k)!}{k!n!} \frac{t^k}{2^k} \tau^{\otimes k} \circledcirc_{2k} p_{n+2k} \Big\rangle, \qquad (6.2.8)$$

якщо поліном P з початкової умови задачі Коші з теореми 6.2.3 записаний у вигляді $P = \sum_{n=0}^{m} \langle \,\cdot\,^{\otimes n}, p_n \rangle$, $p_n \in \mathcal{G}_\beta^{\widehat{\otimes} n}$. □

6.2.3 Напівгрупа, породжена лапласіаном Ґросса

Побудуємо однопараметричну напівгрупу $\{\mathsf{G}_t : t \geq 0\}$, генератором якої є оператор $\frac{1}{2}\Delta_G$. Формально цю напівгрупу можна записати у вигляді

$$\mathsf{G}_t = e^{t\frac{1}{2}\Delta_G}.$$

Оскільки $\frac{1}{2}\Delta_G P = C_\tau * P$, то з результатів попереднього пункту випливає

$$\mathsf{G}_t P := \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=0}^{\left[\frac{m-n}{2}\right]} \frac{(n+2k)!}{k!n!} \frac{t^k}{2^k} \langle \tau^{\otimes k}, \varphi^{\otimes 2k} \rangle \big\langle \,\cdot\,^{\otimes n}, \varphi^{\otimes n} \big\rangle, \qquad (6.2.9)$$

де $P = \sum_{n=0}^{m} \langle \,\cdot\,^{\otimes n}, \varphi^{\otimes n} \rangle$, $\varphi \in \mathcal{G}_\beta$.

Твердження 6.2.1. *Відображення*

$$\mathbb{R}_+ \ni t \longmapsto \mathsf{G}_t \in \mathscr{L}(\mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta)),$$

де G_t *задано формулою* (6.2.9), *є сильно неперервною напівгрупою операторів з генератором* $\frac{1}{2}\Delta_G$.

Доведення. Оскільки формулу (6.2.9) можна переписати у вигляді

$$\mathsf{G}_t P = P + \sum_{n=0}^{m-2} \sum_{k=1}^{\left[\frac{m-n}{2}\right]} \frac{(n+2k)!}{k!n!} \frac{t^k}{2^k} \langle \tau^{\otimes k}, \varphi^{\otimes 2k} \rangle \big\langle \,\cdot\, ^{\otimes n}, \varphi^{\otimes n} \big\rangle, \tag{6.2.10}$$

то рівність $\mathsf{G}_0 = I_{\mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta)}$ стає очевидною.

З формул (6.2.3), (6.2.7) та з рівностей

$$\mathsf{G}_t \mathsf{G}_s = e^{t\frac{1}{2}\Delta_G} e^{s\frac{1}{2}\Delta_G} = e^{*tC_\tau} * e^{*sC_\tau} = e^{*(t+s)C_\tau} = e^{(t+s)\frac{1}{2}\Delta_G} = \mathsf{G}_{t+s}$$

випливає напівгрупова властивість $\mathsf{G}_t \mathsf{G}_s = \mathsf{G}_{t+s}$.

Для того, щоб довести сильну неперервність напівгрупи, потрібно показати, що для довільного $P \in \mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta)$ функція $t \longmapsto \mathsf{G}_t P$ є неперервною. Використовуючи представлення (6.2.10) запишемо

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \sup_f |\mathsf{G}_t P - P| &= \lim_{t\to 0} \sup_f \Big| \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=1}^{\left[\frac{m-n}{2}\right]} \frac{(n+2k)!}{k!n!} \frac{t^k}{2^k} \langle \tau^{\otimes k}, \varphi^{\otimes 2k} \rangle \big\langle f^{\otimes n}, \varphi^{\otimes n} \big\rangle \Big| \\
&\le \lim_{t\to 0} \sup_f \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=1}^{\left[\frac{m-n}{2}\right]} \frac{(n+2k)!}{k!n!} \frac{|t|^k}{2^k} \big| \langle \tau^{\otimes k}, \varphi^{\otimes 2k} \rangle \big| \big| \big\langle f^{\otimes n}, \varphi^{\otimes n} \big\rangle \big| \\
&= \sum_{n=0}^{m} \sup_f \big| \big\langle f^{\otimes n}, \varphi^{\otimes n} \big\rangle \big| \lim_{t\to 0} \sum_{k=1}^{\left[\frac{m-n}{2}\right]} \frac{(n+2k)!}{k!n!} \frac{|t|^k}{2^k} \big| \langle \tau^{\otimes k}, \varphi^{\otimes 2k} \rangle \big| = 0,
\end{aligned}$$

звідки отримуємо потрібне.

Залишилось показати, що генератором напівгрупи G_t є лапласіан Ґросса. Для цього перепишемо наступну різницю, знову скориставшись представленням (6.2.10)

$$\frac{\mathsf{G}_t P - P}{t} - \frac{1}{2}\Delta_G P = \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=1}^{\left[\frac{m-n}{2}\right]} \frac{(n+2k)!}{k!n!} \frac{t^{k-1}}{2^k} \langle \tau^{\otimes k}, \varphi^{\otimes 2k} \rangle \Big\langle \,\cdot\, ^{\otimes n}, \varphi^{\otimes n} \Big\rangle \\ - \sum_{n=0}^{m-2} \frac{(n+2)(n+1)}{2} \Big\langle \tau, \varphi^{\otimes 2} \Big\rangle \Big\langle \,\cdot\, ^{\otimes n}, \varphi^{\otimes n} \Big\rangle.$$

Зауважимо, що при $n = m-1$ і при $n = m$ маємо $\left[\frac{m-n}{2}\right] = 0$, тому в першому доданку внутрішня сума вироδиться. Як наслідок, останню рівність продовжимо наступним чином

$$\frac{\mathsf{G}_t P - P}{t} - \frac{1}{2}\Delta_G P = \sum_{n=0}^{m-2} \Bigg(\sum_{k=1}^{\left[\frac{m-n}{2}\right]} \frac{(n+2k)!}{k!n!} \frac{t^{k-1}}{2^k} \langle \tau^{\otimes k}, \varphi^{\otimes 2k} \rangle \\ - \frac{(n+2)(n+1)}{2} \Big\langle \tau, \varphi^{\otimes 2} \Big\rangle \Bigg) \Big\langle \,\cdot\, ^{\otimes n}, \varphi^{\otimes n} \Big\rangle.$$

Легко бачити, що при $k = 1$ вираз $\frac{(n+2k)!}{k!n!} \frac{t^{k-1}}{2^k} \langle \tau^{\otimes k}, \varphi^{\otimes 2k} \rangle$ буде рівний $\frac{(n+2)(n+1)}{2} \big\langle \tau, \varphi^{\otimes 2} \big\rangle$, тому

$$\frac{\mathsf{G}_t P - P}{t} - \frac{1}{2}\Delta_G P = \sum_{n=0}^{m-2} \Bigg(\sum_{k=2}^{\left[\frac{m-n}{2}\right]} \frac{(n+2k)!}{k!n!} \frac{t^{k-1}}{2^k} \langle \tau^{\otimes k}, \varphi^{\otimes 2k} \rangle \Bigg) \Big\langle \,\cdot\, ^{\otimes n}, \varphi^{\otimes n} \Big\rangle.$$

Аналогічно як і вище зауважимо, що при $n = m-2$ і при $n = m-3$ маємо $\left[\frac{m-n}{2}\right] = 1$, тому при цих значеннях n вираз втрачає сенс, а, отже, остаточно отримуємо

$$\frac{\mathsf{G}_t P - P}{t} - \frac{1}{2}\Delta_G P = \sum_{n=0}^{m-4} \Bigg(\sum_{k=2}^{\left[\frac{m-n}{2}\right]} \frac{(n+2k)!}{k!n!} \frac{t^{k-1}}{2^k} \langle \tau^{\otimes k}, \varphi^{\otimes 2k} \rangle \Bigg) \Big\langle \,\cdot\, ^{\otimes n}, \varphi^{\otimes n} \Big\rangle.$$

З останньої формули легко отримуємо потрібний результат

$$\lim_{t\to 0} \sup_f \left| \frac{\mathsf{G}_t P(f) - P(f)}{t} - \frac{1}{2}\Delta_G P(f) \right| \\ \le \sum_{n=0}^{m-4} \sup_f \left| \Big\langle f^{\otimes n}, \varphi^{\otimes n} \Big\rangle \right| \lim_{t\to 0} \sum_{k=2}^{\left[\frac{m-n}{2}\right]} \frac{(n+2k)!}{k!n!} \frac{|t|^{k-1}}{2^k} |\langle \tau^{\otimes k}, \varphi^{\otimes 2k} \rangle| = 0.$$

□

Наслідок 6.2.1. *Задача Коші*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}X_t = \frac{1}{2}\Delta_G X_t, & t \in J, \\ X_0 = P, & P \in \mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta), \end{cases}$$

для узагальненого рівняння теплопровідності, породженого лапласіаном Ґросса, має єдиний розв'язок в $\mathcal{P}(\mathcal{G}'_\beta)$, *що задається формулою*

$$X_t = \mathsf{G}_t P, \qquad t \in J.$$

6.3 Функціональне числення і гомоморфізми в алгебрах аналітичних функцій на нескінченновимірних просторах

У цьому параграфі ми опишемо гомоморфізми з алгебри $H_b(\mathcal{X})$ аналітичних функцій обмеженого типу на банаховому просторі $\mathcal{X}$ в комутативну банахову алгебру $\mathcal{A}$ і покажемо, що не кожен гомоморфізм з $H_b(\mathcal{X})$ в $\mathcal{A}$ задається функціональним численням. В кінці параграфу наведемо приклад такого гомоморфізму.

6.3.1 Означення і попередні відомості

Нехай $\mathfrak{F}$ — деяка алгебра функцій на комплексному банаховому нескінченновимірному просторі $\mathcal{X}$, яка містить константи (ми будемо називати її алгеброю символів) і $\mathcal{A}$ — деяка банахова алгебра з одиницею $1_{\mathcal{A}}$.

Під функціональним численням для банахової алгебри $\mathcal{A}$ в алгебрі символів $\mathfrak{F}$ часто розуміють сім'ю гомоморфізмів $\{\Phi_{\mathbf{a}} \,|\, \Phi_{\mathbf{a}} : \mathfrak{F} \to \mathcal{A}\}$, де $\mathbf{a}$ — деякий набір елементів з $\mathcal{A}$. При цьому цю сім'ю визначає деяка "природна" залежність $\mathbf{a} \mapsto \Phi_{\mathbf{a}}$, що ставить у відповідність кожній функції f з алгебри символів $\mathfrak{F}$ "значення" цієї функції на $\mathbf{a}$. Точне значення вказаних понять можна розкрити для конкретних алгебр символів. Так, наприклад, якщо $\mathfrak{F}$ — алгебра аналітичних функцій на деякій відкритій множині в $\mathbb{C}^n$, то $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{A}^n$ і гомоморфізми $\Phi_{\mathbf{a}}$ задовольняють умову

$$\Phi_{\mathbf{a}}\left(\sum_{k=1}^{n} c_k t_k\right) = \sum_{k=1}^{n} c_k a_k, \qquad (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^n, \quad (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Зауважимо, що декартовий степінь $\mathcal{A}^n$ алгебри $\mathcal{A}$ природно ототожнюють з тензорним добутком $\mathcal{A} \otimes \mathbb{C}^n$.

У випадку, коли $\mathfrak{F}$ — алгебра аналітичних функцій на деякому нескінченновимірному банаховому просторі $\mathcal{X}$, як набори $\mathbf{a}$ використовують елементи топологічного тензорного добутку $\mathcal{A} \otimes_{\gamma} \mathcal{X}$, поповненого в деякій топології γ тензорного добутку. При цьому проективна топологія дає можливість отримати функціональне числення в алгебрі символів $H_b(\mathcal{X})$ всіх аналітичних функцій обмеженого типу на $\mathcal{X}$ (див. [100, 101]).

Нагадаємо, що $f : \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ називають *аналітичною функцією* на $\mathcal{X}$, якщо f є неперервним відображенням з $\mathcal{X}$ в $\mathbb{C}$ і звуження f на кожен скінченновимірний підпростір в $\mathcal{X}$ є аналітичною функцією від багатьох змінних. Аналітичну функцію називають функцією *обмеженого типу*, якщо вона є обмеженою на обмежених підмножинах в $\mathcal{X}$. Простір всіх аналітичних функцій обмеженого типу на $\mathcal{X}$ позначають $H_b(\mathcal{X})$.

Аналітичну функцію P називають *n-однорідним поліномом*, якщо $P(\lambda x) = \lambda^n P(x)$ для довільного $\lambda \in \mathbb{C}$. Простір аналітичних n-однорідних поліномів позначають $\mathcal{P}_n(\mathcal{X})$. Довільний поліном на $\mathcal{X}$ є скінченною сумою однорідних поліномів. Простір усіх неперервних поліномів на $\mathcal{X}$ позначають $\mathcal{P}(\mathcal{X})$.

Кожну функцію $f \in H_b(\mathcal{X})$ можна подати у вигляді

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x),$$

де $f_n \in \mathcal{P}_n(\mathcal{X})$, при цьому ряд справа збігається рівномірно на обмежених множинах. Детальніше про аналітичні функції на банахових просторах можна дізнатись із монографій [99, 171] (див. також параграф 1.2).

Спектром комутативної топологічної алгебри $\mathcal{A}$ називають множину $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ характерів (неперервних гомоморфізмів) алгебри $\mathcal{A}$ в $\mathbb{C}$. Кожен характер природно ототожнюють з його ядром, яке є максимальним ідеалом в $\mathcal{A}$.

Спектр $\mathcal{M}_b := \mathcal{M}\left(H_b(\mathcal{X})\right)$ алгебри $H_b(\mathcal{X})$ досліджувався в роботах [63, 223, 224]. Зокрема, Р. Арон, Б. Коул та Т. Гамелін у роботі [63] довели, що для довільного $\varphi \in \mathcal{M}_b$ існує така напрямленість $\{x_\alpha\} \subset \mathcal{X}$, що $\varphi(P) = \lim_\alpha P(x_\alpha)$ для довільного полінома P. У роботах [100, 101] Ш. Дінін, Р. Харте, С. Тейлор показали, що для кожного елемента $\mathbf{a} \in \mathcal{A} \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{X}$ існує такий гомоморфізм

$$\theta_{\mathbf{a}} : H_b(\mathcal{X}) \longmapsto \mathcal{A}$$

(позначення $\theta_{\mathbf{a}}(f) =: f_{\mathcal{A}}(\mathbf{a})$), що для кожного $h \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ виконується

$$h(\theta_{\mathbf{a}}(f)) = f\left([h \otimes I_{\mathcal{X}}](\mathbf{a})\right).$$

Тут $\mathcal{A} \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{X}$ позначає тензорний добуток банахових просторів $\mathcal{A}$ і $\mathcal{X}$, поповнений у проективній тензорній локально опуклій топології, а $I_{\mathcal{X}}$ — одиничний оператор в просторі $\mathcal{X}$. Гомоморфізм $\theta_{\mathbf{a}}$ має таку властивість, що для кожного лінійного функціонала $x' \in \mathcal{X}'$ виконується рівність $\theta_{\mathbf{a}}(x') = [1_{\mathcal{A}} \otimes x'](\mathbf{a}) = \sum_k a_k x'(x_k)$, а для кожного n-однорідного полінома $P \in \mathcal{P}_n(\mathcal{X})$ виконується $\theta_{\mathbf{a}}(P) = [1_{\mathcal{A}} \otimes P](\mathbf{a}) = \sum_k a_k^n P(x_k)$, де $\mathbf{a} = \sum_k a_k \otimes x_k \in \mathcal{A} \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{X}$. Таким чином, для кожного елемента $\mathbf{a} \in \mathcal{A} \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{X}$ існує функціональне числення для $\mathcal{A}$ в алгебрі символів $H_b(\mathcal{X})$ і $\theta_{\mathbf{a}}$ можна розглядати як гомоморфізм "значення" f в точці $\mathbf{a}$. У цьому параграфі покажемо, що для довільного гомоморфізму $\Phi : H_b(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{A}$ існує така напрямленість $\{\mathbf{a}_\alpha\} \subset \mathcal{A} \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{X}$, що

$$h \circ \Phi(P) = \lim_\alpha \theta_{\mathbf{a}_\alpha}(P).$$

6.3.2 Теорема про гомоморфізми з алгебри аналітичних функцій обмеженого типу в комутативну банахову алгебру

У роботі [15] (див. також [223]) доведено аналог теореми Гільберта про нулі для поліномів на банаховому просторі.

Теорема 6.3.1 ([15]). *Нехай* $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ *і* $\bigcap_{k=1}^n \operatorname{Ker} P_k = \varnothing$. *Тоді існують такі поліноми* $Q_1, \dots, Q_n \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$, *що*

$$\sum_{k=1}^n P_k(x)Q_k(x) = 1$$

для всіх $x \in \mathcal{X}$.

Наслідок 6.3.1. *Для довільного характера* $\varphi \in \mathcal{M}_b$ *і скінченного набору поліномів* $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ *існує такий елемент* $x_0 \in \mathcal{X}$, *що* $\varphi(P_k) = P_k(x_0)$, $k = 1, \dots, n$.

Доведення. Нехай $\lambda_k = \varphi(P_k)$. Якщо елемента x_0 не існує, то поліноми $\{P_k - \lambda_k\}_{k=1}^n$ не мають спільних нулів у $\mathcal{X}$. Тому, за теоремою 6.3.1, маємо

$$\sum_{k=1}^n (P_k(x) - \lambda_k)Q_k(x) = 1, \qquad \forall\, x \in \mathcal{X},$$

для деяких $Q_1, \dots, Q_n \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$. Застосувавши до цієї рівності гомоморфізм φ отримаємо

$$0 = \sum_{k=1}^n (\varphi(P_k) - \lambda_k)\varphi(Q_k) = 1.$$

Отримана суперечність доводить наслідок. □

Наступне твердження є аналогом теореми 6.3.1 для поліномів від елементів алгебри.

Теорема 6.3.2. *Нехай* $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$. *Тоді* $\bigcap_{k=1}^n \operatorname{Ker} P_k = \varnothing$ *у тому і тільки в тому випадку, коли* $\bigcap_{k=1}^n \operatorname{Ker}(P_k)_{\mathcal{A}} = \varnothing$ *і при цьому для деяких* $Q_1, \dots, Q_n \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$

$$\sum_{k=1}^n (P_k)_{\mathcal{A}}(\mathbf{a})\,(Q_k)_{\mathcal{A}}(\mathbf{a}) = 1_{\mathcal{A}}, \qquad \forall\, \mathbf{a} \in \mathcal{A} \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{X}. \tag{6.3.1}$$

Доведення. Якщо $\bigcap_{k=1}^n \operatorname{Ker} P_k = \varnothing$, то згідно з теоремою 6.3.1 існують такі поліноми $Q_1, \ldots, Q_n \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$, що $\sum_{k=1}^n P_k Q_k \equiv 1$. Застосувавши до цієї тотожності гомоморфізм $\theta_{\mathbf{a}}$, отримаємо рівність (6.3.1). Оскільки вона виконується для довільних $\mathbf{a} \in \mathcal{A} \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{X}$, то $\bigcap_{k=1}^n \operatorname{Ker} (P_k)_{\mathcal{A}} = \varnothing$.

Навпаки, якщо виконується рівність (6.3.1), то для $\mathbf{a} = 1_{\mathcal{A}} \otimes x$ маємо

$$\sum_{k=1}^n (P_k)_{\mathcal{A}} (1_{\mathcal{A}} \otimes x) (Q_k)_{\mathcal{A}} (1_{\mathcal{A}} \otimes x) = \sum_{k=1}^n P_k(x) Q_k(x) = 1,$$

тому поліноми $P_1, \ldots, P_n$ не мають спільних нулів. ☐

Наслідок 6.3.2. *Для довільного гомоморфізму* $\Phi : H_b(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{A}$, *скінченного набору поліномів* $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ *і характерів* $h_1, \ldots, h_m \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ *існує такий елемент* $\mathbf{a}_0 \in \mathcal{A} \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{X}$, *що*

$$h_j \circ \Phi(P_k) = (P_k)_{\mathcal{A}}([h_j \otimes I_{\mathcal{X}}](\mathbf{a}_0)), \qquad k = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Доведення. Оскільки $h_j \circ \Phi \in \mathcal{M}_b$, то для кожного $j = 1, \ldots, m$ існує такий елемент $x_j \in \mathcal{X}$, що $h_j \circ \Phi(P_k) = P_k(x_j)$, $k = 1, \ldots, n$. Тепер виберемо елементи $a_1, \ldots, a_m \in \mathcal{A}$ так, щоб $h_k(a_j) = \delta_{kj}$, де δ_{kj} — символ Кронекера. Тоді $\mathbf{a}_0 = \sum_{j=1}^m a_j \otimes x_j$ — шуканий елемент. ☐

Теорема 6.3.3. *Для кожного гомоморфізму* $\Phi_0 : H_b(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{A}$ *існує така напрямленість* $\{\mathbf{a}_\alpha\} \subset \mathcal{A} \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{X}$, *що*

$$h \circ \Phi_0(P) = \lim_{\alpha} P_A([h \otimes I_{\mathcal{X}}](\mathbf{a}_\alpha)) \tag{6.3.2}$$

для довільних $P \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ *і* $h \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Доведення. Розглянемо на множині $\mathcal{M}(H_b(\mathcal{X}), \mathcal{A})$ всіх гомоморфізмів з $H_b(\mathcal{X})$ в $\mathcal{A}$ систему множин

$$\mathfrak{A} = \big\{U^{P_1,\ldots,P_n,h_1,\ldots,h_m}_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n,\delta_1,\ldots,\delta_m} : P_k \in \mathcal{P}(\mathcal{X}), h_j \in \mathcal{M}(\mathcal{A}),$$
$$\varepsilon_k > 0, \delta_j > 0, k = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m\big\},$$

де

$$U^{P_1,\ldots,P_n,h_1,\ldots,h_m}_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n,\delta_1,\ldots,\delta_m} = \big\{\Phi \in \mathcal{M}(H_b(\mathcal{X}), \mathcal{A}) : |h_j \circ \Phi(P_k) - h_j \circ \Phi_0(P_k)| < \varepsilon_k + \delta_j,$$
$$k = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m\big\}.$$

Ця сім'я є частково впорядкованою відносно включення. Розглянемо її як множину індексів. Для кожного $\alpha \in \mathfrak{A}$ позначимо $\mathbf{a}_\alpha$ такий елемент з $\mathcal{A} \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{X}$, що $\theta_{\mathbf{a}_\alpha} \in \mathcal{A}$. Згідно з наслідком 6.3.2 такий вибір можна здійснити. Тоді за побудовою для будь-якого $\varepsilon > 0$ і для довільних $P \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ і $h \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ знайдеться такий індекс $\alpha_0 \in \mathfrak{A}$, що для довільного $\alpha > \alpha_0$ справджується нерівність

$$\left| h \circ \Phi_0(P) - P_{\mathcal{A}}([h \otimes I_{\mathcal{X}}](\mathbf{a}_\alpha)) \right| < \varepsilon.$$

Отже, виконується рівність (6.3.2). □

Зауважимо, що система множин $\mathfrak{A}$, що вибрана для кожного гомоморфізму $\Phi \in \mathcal{M}(H_b(\mathcal{X}), \mathcal{A})$, є базою деякої топології на $\mathcal{M}(H_b(\mathcal{X}), \mathcal{A})$. Якщо алгебра $\mathcal{A}$ напівпроста, тобто елементи з $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ розділяють точки $\mathcal{A}$, то ця топологія є гаусдорфовою. У цьому випадку кожна напрямленість $\{\mathbf{a}_\alpha\} \subset \mathcal{A} \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{X}$ збігається в цій топології і породжує комплексний гомоморфізм (не обов'язково неперервний) з $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ в $\mathcal{A}$ за формулою (6.3.2). Якщо ця напрямленість обмежена, то цей гомоморфізм неперервний.

6.3.3 Приклад гомоморфізму, що не задається функціональним численням

Нагадаємо, що фільтром $\mathcal{U}$ на множині натуральних чисел називають таку непорожню систему підмножин $\mathbb{N}$, яка задовольняє три аксіоми: порожня множина не належить $\mathcal{U}$; якщо $A, B \in \mathcal{U}$, то $A \cap B \in \mathcal{U}$; для кожного $A \in \mathcal{U}$ з того, що $A \subset B$ випливає $B \in \mathcal{U}$.

Послідовність $\{x_n\}$ у топологічному просторі $\mathcal{X}$ називають збіжною за фільтром $\mathcal{U}$ до x (в такому випадку пишуть $x = \lim_{\mathcal{U}} x_n$), якщо для кожного околу $\mathcal{O}$ точки x множина $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in \mathcal{O}\}$ належить фільтру $\mathcal{U}$. Зауважимо, що якщо в ролі $\mathcal{U}$ взяти фільтр Фреше, який складається із доповнень до скінченних підмножин натурального ряду, то збіжність за фільтром $\mathcal{U}$ співпадає із звичайною збіжністю.

На множині фільтрів на $\mathbb{N}$ можна природним чином ввести відношення порядку: кажемо, що фільтр $\mathcal{U}_1$ мажорує фільтр $\mathcal{U}_2$, якщо $\mathcal{U}_2 \subset \mathcal{U}_1$. Максимальний у сенсі цього відношення порядку фільтр називається ультрафільтром. З леми Цорна випливає, що кожен фільтр мажорується деяким ультрафільтром. Фільтр на множині натуральних чисел називають вільним, якщо він мажорує фільтр Фреше.

Наведемо приклад, який ілюструє, що існують гомоморфізми з $H_b(\mathcal{X})$ в $\mathcal{A}$, які не подаються у вигляді функціонального числення.

Нехай $\mathcal{X} = \ell_2$, $\{a_k\}$ — деяка збіжна до елемента a послідовність в напівпростій алгебрі $\mathcal{A}$ і $\mathcal{U}$ — деякий вільний ультрафільтр на множині натуральних чисел. Визначимо гомоморфізм $\Phi_{\mathcal{U}} : H_b(\ell_2) \longrightarrow \mathcal{A}$ наступним способом

$$\Phi_{\mathcal{U}}(f) = \lim_{\mathcal{U}} f_{\mathcal{A}}(a_k \otimes e_k),$$

де e_k — ортогональні базисні елементи в ℓ_2. Для кожного n-однорідного полінома $P \in \mathcal{P}(\ell_2)$ має місце рівність

$$\Phi_{\mathcal{U}}(P) = \lim_{\mathcal{U}} a_k^n P(e_k) = a^n \lim_{\mathcal{U}} P(e_k).$$

Якщо $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ — розклад Тейлора функції $f \in H_b(\ell_2)$ на n-однорідні поліноми f_n, то $\Phi_{\mathcal{U}}(f) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n \lim\limits_{\mathcal{U}} f_n(e_k)$. При цьому

$$\|\Phi_{\mathcal{U}}(f)\| = \Big\| \sum_{n=0}^{\infty} a^n \lim_{\mathcal{U}} f_n(e_k) \Big\| \le \sum_{n=0}^{\infty} \|a\|^n \cdot \|f_n\| < \infty,$$

оскільки з того факту, що $f \in H_b(\ell_2)$ випливає, що $\lim_n \|f_n\|^{\frac{1}{n}} = 0$, тому за формулою Коші-Адамара ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \|a\|^n \cdot \|f_n\|$ абсолютно збігається, а, отже, збігається і ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a^n \lim\limits_{\mathcal{U}} f_n(e_k)$. Таким чином, гомоморфізм $\Phi_{\mathcal{U}}(f)$ коректно визначений.

Покажемо, що він неперервний. Нехай f^j — послідовність функцій з $H_b(\ell_2)$, яка збігається до f^0 в метриці простору $H_b(\ell_2)$, і послідовність $\Phi_{\mathcal{U}}(f^j)$ прямує до деякого елемента $b \in \mathcal{A}$. Припустимо, що $b \neq \Phi_{\mathcal{U}}(f^0)$. Тоді з напівпростоти алгебри $\mathcal{A}$ випливає, що $h(b) \neq h(\Phi_{\mathcal{U}}(f^0))$ для деякого характеру $h \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Але $\varphi := h \circ \Phi_{\mathcal{U}}$ є неперервним гомоморфізмом з $H_b(\ell_2)$ в $\mathbb{C}$. Справді, звуження φ_n функціонала φ на $\mathcal{P}_n(\ell_2)$ має вигляд $\varphi_n(P) = h^n(a) \lim\limits_{\mathcal{U}} P(e_k)$ і $\|\varphi_n\|_{\mathcal{P}_n(\ell_2)} = |h(a)|^n$. Тому для радіус-функції виконується $R(\varphi) := \overline{\lim}_n \|\varphi_n\|^{\frac{1}{n}}_{\mathcal{P}_n(\ell_2)} = |h(a)| < \infty$, що гарантує неперервність φ згідно з результатами роботи [63]. Отже, правильним є граничний перехід $\varphi(f^j) \longrightarrow \varphi(f^0) = h(\Phi_{\mathcal{U}}(f^0))$. З іншого боку, з неперервності h випливає інший граничний перехід $\varphi(f^j) = h(\Phi_{\mathcal{U}}(f^j)) \longrightarrow h(b)$. Тому $b = \Phi_{\mathcal{U}}(f^0)$, тобто оператор $\Phi_{\mathcal{U}}$ має замкнений графік і, отже, неперервний.

Зауважимо, що, якщо $a \neq 0$, то $\Phi_{\mathcal{U}} \neq \theta_{\mathbf{a}}$ для жодного $\mathbf{a} \in \mathcal{A} \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{X}$, оскільки для будь-якого лінійного функціонала $P_1 \in \ell_2' \subset \mathcal{P}(\ell_2)$ виконується рівність $\Phi_{\mathcal{U}}(P_1) = 0$, тоді як для полінома $P_2(x) = \sum_i x_i^2 \in \mathcal{P}_2(\ell_2) \subset \mathcal{P}(\ell_2)$ виконується $\Phi_{\mathcal{U}}(P_2) = a^2 \neq 0$.

Висновки до розділу 6

Матеріал шостого розділу об'єднаний за тим принципом, що тут розглянуто функціональне числення в класах цілих аналітичних функцій нескінченної кількості змінних.

В параграфі 6.1 побудовано функціональне числення для зліченного набору генераторів сильно неперервних груп операторів в класі Фур'є-образів поліноміальних ультрарозподілів, які є цілими аналітичними функціями зліченної кількості змінних. А саме, для зліченної кількості генераторів сильно неперервних груп операторів, заданих на гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, побудовано операторне числення, що задане на симетричному просторі Фока $\Gamma(\mathcal{H}) := \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{H}^{\widehat{\otimes} n}$. Цього досягнуто у пункті 6.1.2 завдяки методу вторинного квантування: маючи, взагалі кажучи, не комутуючі оператори на $\mathcal{H}$, ми вводимо оператори на $\Gamma(\mathcal{H})$, які стають комутативними. При цьому кожен такий оператор генерує відповідну “сквантовану” напівгрупу (див. формули (6.1.5) та (6.1.6)). В результаті введено клас функцій $\widetilde{\mathcal{H}}$, аргументом яких є зліченні набори новоутворених операторів, а значеннями — оператори на просторі Фока. При цьому відображення, що ставить у відповідність звичайній функції числового аргумента функцію операторного аргумента, ми розуміємо як “елементарне” функціональне числення (див. зауваження 6.1.1). У теоремі 6.1.1 доведено ізоморфне представлення алгебри типу Фока $\Gamma(\mathcal{G}'_\beta)$ у вигляді комутанта операторів певного вигляду над простором $\widetilde{\mathcal{H}}$. Ця теорема дозволяє аргументувати існування функціонального числення у класі поліноміальних ультрарозподілів (див. зауваження 6.1.2). У теоремі 6.1.2 встановлено диференціальну властивість операторного числення.

У параграфі 6.2 наведено застосування побудованого числення операторів до розв’язання нескінченновимірної задачі Коші для рівняння теплопровідності. Для цього спочатку введено оператор зсуву, а відтак згортку на просторі поліноміальних основних ультрадиференційовних функцій, причому виписано явні формули для цих операцій (див. формули (6.2.1), (6.2.2)). Доведено, що композиція двох згорткових операторів знову є згортковим оператором, що дозволяє ввести згортку на просторі поліноміальних ультрарозподілів у вигляді явної формули (6.2.3). Формулою (6.2.4) введено формальну згорткову експоненту, породжену поліноміальним ультрарозподілом. У подальшому таку експоненту застосовано до поліноміальних основних функцій, які мають скінченну кількість доданків, тому у кожному конкретному випадку на результат впливає лише частинна сума формального ряду.

У пункті 6.2.2 доведено теорему 6.2.1 про існування та єдиність розв'язку згорткової задачі Коші (6.2.5), при цьому використано введену раніше згорткову експоненту. У теоремі 6.2.2 встановлено, що лапласіан Ґросса діє як згортковий оператор, що дозволяє звести узагальнене рівняння теплопровідності, породжене лапласіаном Ґросса, до згорткового рівняння і отримати розв'язок у вигляді явної формули (6.2.8). Насамкінець побудовано однопараметричну напівгрупу на просторі поліноміальних основних ультрадиференційовних функцій, генератором якої є лапласіан Ґросса, та доведено її сильну неперервність. У наслідку 6.2.1 записано розв'язок тієї ж задачі Коші з точки зору теорії напівгруп.

У параграфі 6.3 розглянуто абстрактний випадок алгебри символів $H_b(\mathcal{X})$ всіх аналітичних функцій обмеженого типу на деякому нескінченновимірному банаховому просторі $\mathcal{X}$. Тут доведено аналог теореми Гільберта про нулі для поліномів від елементів банахової алгебри. Описано гомоморфізми з алгебри $H_b(\mathcal{X})$ в комутативну банахову алгебру $\mathcal{A}$ і показано, що не кожен гомоморфізм з $H_b(\mathcal{X})$ в $\mathcal{A}$ задається функціональним численням. У пункті 6.3.3 наведено приклад такого гомоморфізму.

Результати розділу 6 опубліковані в роботах [16,190,206] та анонсовано в [43,194].

Висновки

Дисертаційна робота присвячена побудові алгебр поліноміальних розподілів на нескінченновимірних просторах та дослідженню їхньої тензорної та алгебраїчної структури. В якості застосування поліноміальних алгебр запропоновано новий метод розв'язання проблеми побудови функціонального числення для зліченних наборів операторів.

Завданням першого розділу дисертації було дати уявлення про стан досліджень з даної тематики, та описати місце дисертаційної роботи у розв'язанні вказаної проблеми.

У другому розділі дисертації розвинуто загальний підхід до побудови поліноміальних основних функцій та поліноміальних розподілів на основі теорії ядерних (F) або (DF) просторів. Таке поліноміальне розширення можна розглядати як узагальнення класичних просторів основних та узагальнених функцій на випадок нескінченної кількості змінних. Нами розвинуто новий підхід до дослідження дуальної пари $\langle \mathcal{P}'(\mathcal{X}'), \mathcal{P}(\mathcal{X}') \rangle$, що складається з простору $\mathcal{P}(\mathcal{X}')$ неперервних поліномів над $\mathcal{X}'$ та сильно спряженого простору $\mathcal{P}'(\mathcal{X}')$ поліноміальних розподілів, яка є нелінійним розширенням дуальної пари $\langle\, \mathcal{X}', \mathcal{X} \,\rangle$ лінійних локально опуклих ядерних просторів типу (F) або (DF). При цьому окремо досліджено випадки просторів $\mathcal{X} = \mathcal{S}_+$ швидко спадних нескінченно диференційовних в додатній півосі функцій та $\mathcal{X} = \mathcal{G}_+$ ультрадиференційовних функцій з компактними носіями, що задані в додатному конусі $\mathbb{R}^d_+$.

Третій розділ присвячений опису структури, властивостей простору поліноміальних основних швидко спадних функцій та відповідних поліноміальних розподілів повільного росту, а також основних операцій на цих просторах. Крім того, тут доведено теорему типу Сілі про продовження довільної швидко спадної функції з додатного конуса $\mathbb{R}^d_+$ на весь простір із збереженням властивості швидкого спадання. Цей результат неявно використовується у третьому та п'ятому розділах дисертації. Окремий параграф присвячений дослідженню диференційовності за Ґато локально опуклих поліноміальних основних швидко спадних функцій і поліноміальних розподілів повільного росту, опису властивостей похідної Ґато на відповідних просторах із тензорною структурою типу Фока та встановленню зв'язку похідної Ґато з квантовим білим шумом та диференціюваннями на цих просторах.

У третьому та четвертому розділах дисертації побудовано узагальнення операторів диференціювання та зсуву окремо на випадки просторів поліноміальних основних швидко спадних функцій, поліноміальних узагальнених функцій повільного росту, поліноміальних ультрадиференційовних функцій та поліноміальних ультрарозподілів; у кожному випадку доведено, що відповідні похідні генерують напівгрупи зсувів.

Окремим завданням роботи було поширення деяких інтегральних перетворень на поліноміальні простори основних та узагальнених функцій. Зокрема, поширено перетворення Фур'є на простір поліноміальних основних швидко спадних функцій і поліноміальних розподілів повільного росту та вивчено його властивості; поширено перетворення Фур'є-Лапласа та Лапласа на простори поліноміальних ультрарозподілів, вивчено властивості цих перетворень та доведено теореми типу Пелі-Вінера для цих просторів; описано образ основного простору при перетворенні Фур'є-Лапласа у вигляді певного класу цілих функцій експоненціального типу.

Відома структурна теорема Шварца стверджує, що кожний лінійний оператор $L : \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, що комутує із групою зсувів

$\tau_s : \varphi(\cdot) \mapsto \varphi(\,\cdot - s)$, $s \in \mathbb{R}^d$, обов'язково є згортковим оператором з деяким розподілом $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, тобто $L\varphi = f * \varphi$. У четвертому розділі дисертації поширено цей результат на простори ультрарозподілів. Зокрема, тут доведено структурні теореми для операторів, що діють в просторах (лінійних) ультрадиференційовних функцій і які комутують з багатопараметричними напівгрупами, крім того доведено, що згорткову алгебру ультрарозподілів з носіями в додатному конусі можна ізоморфно представити як комутант напівгрупи зсувів, доведено також векторнозначний варіант цього результату і досліджено загальніший випадок довільної напівгрупи стиску. Доведено структурну теорему про представлення локально опуклої алгебри із тензорною структурою типу Фока у вигляді комутанта поліноміальної напівгрупи зсувів.

У п'ятому розділі дисертації побудовано узагальнення функціонального числення типу Хілле-Філліпса. При цьому суттєвим є той факт, що класом символів такого числення є аналітичні в деяких трубчастих областях функції скінченної чи нескінченної кількості змінних. При цьому результатом такого числення є оператори, що задані на деякому банаховому просторі. Зокрема, тут побудовано функціональне числення типу Хілле-Філліпса для комутуючих наборів генераторів сильно неперервних напівгруп, що діють в банаховому просторі, в класі аналітичних в трубчастих областях функцій скінченної та нескінченної кількості змінних.

Матеріал шостого розділу об'єднаний за тим принципом, що тут розглянуто функціональне числення в класах цілих аналітичних функцій нескінченної кількості змінних. Тут побудовано функціональне числення для зліченного некомутуючого набору генераторів сильно неперервних груп операторів, що діють в гільбертовому просторі, в класі цілих аналітичних функцій зліченної кількості змінних. При цьому результатом такого числення є оператори, що задані у просторі Фока. В якості застосування побудованого числення операторів знайдено в явному вигляді розʼязок нескінченновимірного рівняння теплопровідності, породженого лапласіаном Ґросса. В останньому параграфі шостого розділу розглянуто абстрактний випадок алгебри символів $H_b(\mathcal{X})$ всіх аналітичних функцій обмеженого типу на деякому нескінченновимірному банаховому просторі $\mathcal{X}$. Тут описано гомоморфізми з алгебри $H_b(\mathcal{X})$ в деяку комутативну банахову алгебру і показано, що не кожен такий гомоморфізм задається функціональним численням.

Отримані результати дисертації можуть бути використані у нелінійному функціональному аналізі та є основою для подальшої розбудови нескінченновимірного аналізу та числення операторів для зліченних наборів операторів.

Основні результати дисертації опубліковано у фахових математичних журналах і апробовано у провідних математичних центрах.

Список використаних джерел

1. *Атвиновский А.А.* Об одном функциональном исчислении замкнутых операторов в банаховом пространстве / А.А. Атвиновский, А.Р. Миротин // Известия вузов. Математика. – 2013. – Т. 10. – Р. 3–15.
2. *Ахиезер Н.И.* Лекции об интегральных преобразованиях / Н.И. Ахиезер. – Харкiв: Вища школа, 1984. – 122 с.
3. *Березанский Ю. М.* Самосопряженные операторы в пространстве функций бесконечного числа переменных / Ю. М. Березанский. – К.: Наукова Думка, 1978. – 360 с.
4. *Березанский Ю.М.* Спектральные методы в бесконечномерном анализе / Ю.М. Березанский, Ю.Г. Кондратьев. – К.: Наук. думка, 1988. – 680 с.
5. *Березанский Ю. М.* Ядерные пространства функций бесконечного числа переменных / Ю. М. Березанский, Ю. С. Самойленко // Укр. мат. журн. – 1973. – Т. 25, № 6. – С. 723–737.
6. *Березанский Ю.М.* Функциональный анализ / Ю.М. Березанский, Г.Ф. Ус, З.Г. Шефтель. – К.: Вища школа, 1990. – 600 с.
7. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1979. – 320 с.

8. *Горбачук В.И.* Граничые задачи для дифференциально-операторных уравнений / В.И. Горбачук, М.Л. Горбачук. – К.: Наук. думка, 1984. – 284 с.

9. *Горбачук В.И.* Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений / В.И. Горбачук, А.В. Князюк // Успехи мат. наук. – 1989. – Т. 4, № 3. – С. 55–91.

10. *Диткин В.А.* К теории операторного исчисления / В.А. Диткин // Докл. АН СССР. – 1957. – Т. 116. – С. 15–17.

11. *Диткин В.А.* К теории операционного исчисления, порожденного уравнением Бесселя / В.А. Диткин, А.П. Прудников // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1963. – Т. 3, № 2. – С. 223–238.

12. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения / Р. Эдвардс. – М.: Мир, 1969. – 1071 с.

13. *Жаринов В.В.* Компактные семейства ЛВП и пространства FS и DFS / В.В. Жаринов // Успехи мат. наук. – 1979. – Т. 34. – С. 97–131.

14. *Загороднюк А.В.* Про неперервність і обмеженість поліноміальних операторів на псевдонормованих просторах / А.В. Загороднюк // Доповіді НАН України. – 1996. – Т. 12. – С. 30–34.

15. *Загороднюк А.В.* Теорема Гільберта про нулі поліноміальних ідеалів на комплексному нескінченновимірному просторі / А.В. Загороднюк // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1997. – Т. 40, №1. – С. 13–20.

16. *Загороднюк А.В.* Функціональне числення і гомоморфізми в алгебрі аналітичних функцій обмеженого типу на банаховому просторі

/ А.В. Загороднюк, С.В. Шарин // Прикл. пробл. механіки і математики. – 2007. – Т. 5. – С. 22–27.

17. *Иосида К.* Функциональный анализ / К. Иосида. – М.: Мир, 1967. – 624 с.

18. *Клемент Ф.* Однопараметрические полугруппы / Ф. Клемент, Х. Хейманс, С. Ангенент, К. ван Дуйн, Б. де Пахтер. – М.: Мир, 1992. – 351 с.

19. *Курбатова И.В.* Функциональное исчисление, порожденное квадратичным операторным пучком / И.В. Курбатова // Записки научн. семинаров ПОМИ. – 2011. – Т. 389. – С. 113–130.

20. *Лозинська В.Я.* Поліноміальні ω-ультрарозподіли типу Берлінга і типу Рум'є / В.Я. Лозинська, С.В. Шарин // Прикл. пробл. механіки і математики. – 2013. – Т. 11. – С. 12–20.

21. *Лопушанский О.В.* Локально опуклі алгебри II. Півобмежені і обмежені оператори. Препринт 5–93. / О.В. Лопушанський. – Львів: ІППММ, 1993. – 63 с.

22. *Лопушанский О.В.* Про топологічний ізоморфізм алгебри розподілів з носіями в конусі комутанту напівгрупи зсувів / О.В. Лопушанський, А.В. Соломко, С.В. Шарин // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2004. – Т. 47, № 2. – С. 95–99.

23. *Лопушанський О.В.* Перетворення Лапласа поліноміальних ультрарозподілів з носіями в $\mathbb{R}^n_+$ / О.В. Лопушанський, С.В. Шарин // Міжн. наук. конф. присв. 50-річчю кафедри алгебри і мат. логіки. – Київ. – 2009. Тези. – С. 52.

24. *Лопушанский О.В.* Функціональне числення для генераторів аналітичних напівгруп операторів / О.В. Лопушанський, С.В. Шарин // Карпатські мат. публ. – 2012. – Т. 4, № 1. – С. 83–89.

25. *Миротин А.Р.* О некоторых свойствах многомерного функционального исчисления Бохнера-Филлипса / А.Р. Миротин // Сибирский мат. журн. – 2011. – Т. 52, № 6. – С. 1300–1312.

26. *Миротин А.Р.* О $\mathscr{T}$-исчислении генераторов C_0-полугрупп / А.Р. Миротин // Сибирский мат. журн. – 1998. – Т. 39, № 3. – С. 571–582.

27. *Митягин Б.С.* Аппроксимативная размерность и базисы в ядерных пространствах / Б.С. Митягин // Успехи Мат. Наук. – 1961. – Т. 16, № 4 (100). – С. 63–132.

28. *Митягин Б.С.* Ядерность и другие свойства пространств типа S / Б.С. Митягин // Труды Моск. Матем. Общ. – 1960. – Т. 9. – С. 317–328.

29. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С.М. Никольский. – М.: Наука, 1977. – 456 с.

30. *Парыгин В.Н.* Оптическая обработка информации / В.Н. Парыгин, В.Н. Балакший. – М.: МГУ, 1987. – 142 с.

31. *Пич А.* Ядерные локально выпуклые пространства / А. Пич. – М.: Мир, 1967. – 266 с.

32. *Пустыльник Е.И.* О функциях позитивного оператора / Е.И. Пустыльник // Мат. сборник. – 1982. – Т. 119(161), № 1(9). – С. 32–47.

33. *Райков Д.А.* Двусторонняя теорема о замкнутом графике для топологических линейных пространств / Д.А. Райков // Сибирский мат. журн. – 1966. – Т. 7, № 2. – С. 353–372.

34. *Самойленко Ю.С.* Спектральная теория наборов самосопряженных операторов / Ю.С. Самойленко. – К.: Наук. думка, 1984. – 232 с.

35. *Соломко А.В.* Операторне перетворення Фур'є-Лапласа згорткової алгебри ультрарозподілів Рум'є / А.В. Соломко, С.В. Шарин // Прикл. пробл. механіки і математики. – 2011. – Т. 9. – С. 55–62.

36. *Соломко А.В.* Узагальнені граничні значення Фур'є-образів згорткової алгебри розподілів Шварца з носіями в конусі / А.В. Соломко, С.В. Шарин // Буковинський мат. журн. – 2013. – Т. 1, № 1–2. – С. 139–143.

37. *Соломко А.В.* Функціональне числення над банаховими просторами в конусі $\mathbb{R}^n_+$ / А.В. Соломко, С.В. Шарин // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2004. – Т. 47, № 4. – С. 51–55.

38. *Хилле Э.* Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р. Филлипс. – М.: ИЛ, 1962. – 830 с.

39. *Шарин С.В.* Деякі узагальнені функції від генератора напівгрупи дробового інтегрування / С.В. Шарин // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1999. – Т. 42, № 3. – С. 28–30.

40. *Шарин С.В.* Напівгрупи зсувів в алгебрі поліноміальних розподілів Шварца повільного росту / С.В. Шарин // Математичний вісник НТШ. – 2011. – Т. 8. – С. 230–242.

41. *Шарин С.В.* Операторне числення в різних класах розподілів та ультрарозподілів / С.В. Шарин // Всеукр. наук. конф. "Сучасні

проблеми теорії ймовірностей і математичного аналізу”. – Івано-Франківськ. – 2011. Тези. – С. 75.

42. *Шарин С.В.* Операторне числення для аналітичних напівгруп операторів / С.В. Шарин // Всеукр. наук. конф. “Алгебра, топологія, аналіз, стохастика”. – Івано-Франківськ-Микуличин. – 2012. Тези. – С. 29.

43. *Шарин С.В.* Операторне числення для зліченного набору некомутуючих операторів над симетричним простором Фока / С.В. Шарин // II Всеукр. наук. конф. “Прикладні задачі математики”. – Івано-Франківськ. – 2016. Тези. – С. 112–114.

44. *Шарин С.В.* Операторне числення типу Хілле-Філліпса в класі поліноміальних ультрарозподілів / С.В. Шарин // Міжн. матем. конф. ім. В.Я. Скоробагатька. – Дрогобич. – 2011. Тези. – С. 228.

45. *Шарин С.В.* Перетворення Фур’є в алгебрі поліноміальних розподілів Шварца повільного росту / С.В. Шарин // Матем. вісн. НТШ. – 2012. – Т 9. – С. 366–374.

46. *Шарин С.В.* Перетворення Фур’є поліноміальних повільно зростаючих узагальнених функцій / С.В. Шарин // Міжн. конф. присв. пам’яті проф. Боголюбова М.М. і проф. Нагнибіди М.І. – Чернівці. – 2009. Тези. – С. 199–200.

47. *Шарин С.В.* Повільно зростаючі поліноміальні розподіли: приклад напівгруп дробового інтегрування і диференціювання / С.В. Шарин // Міжн. конф. “Сучасні проблеми аналізу”. – Чернівці. – 2010. Тези. – С. 151.

48. *Шарин С.В.* Поліноміальні повільно зростаючі розподіли / С.В. Шарин // Карпатські матем. публ. – 2010. – Т. 2, № 2. – С. 123–132.

49. *Шарин С.В.* Про дуальність $\langle \mathcal{D}'_+, \mathcal{D}_+ \rangle$ / С.В. Шарин // Вісн. нац. ун-ту "Львівська політехніка". Серія "Прикладна математика". – 2000. – Т. 411. – С. 345–349.

50. *Шарин С.В.* Про оператори знищення і народження на просторах Фока / С.В. Шарин // IX Літня школа "Алгебра, топологія, аналіз". – Поляниця. – 2014. Тези. – С. 79.

51. *Шарин С.В.* Про похідну Ґато на просторах типу Фока / С.В. Шарин // IV Міжн. ганська конф., присв. 135 річн. від дня народж. Ганса Гана. – Чернівці. – 2014. Тези. – С. 215.

52. *Шарин С.В.* Функціональне числення в різних класах узагальнених функцій повільного росту / С.В. Шарин // XIV міжн. наук. конф. ім. М. Кравчука. – Київ. – 2012. Тези. – С. 266.

53. *Шарин С.В.* Функціональне числення для секторіальних операторів / С.В. Шарин // Всеукр. наук. конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування в прикладній математиці". – Чернівці. – 2012. Тези. – С. 154.

54. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства / Х. Шефер. – М.: Мир, 1971. – 360 с.

55. *Anderson R.F.V.* The multiplicative Weyl functional calculus / R.F.V. Anderson // J. Funct. Anal. – 1972. – V. 9. – P. 423–440.

56. *Anderson R.F.V.* The Weyl functional calculus / R.F.V. Anderson // J. Funct. Anal. – 1969. – V. 4. – P. 240–267.

57. *Andersson M.* (Ultra)differentiable Functional Calculus and Current Extension of the Resolvent Mapping / M. Andersson // Ann. Inst. Fourier, Grenoble. – 2001. – V. 51, № 3. – P. 903–926.

58. *Ansemil J.M.* Tensor topologies on spaces of symmetric tensor products / J.M. Ansemil, S. Ponte // Note di Matematica. – 2006. – V. 25, № 1. – P. 35–47.

59. *Ansemil J.M.* The symmetric tensor product of a direct sum of locally convex spaces / J.M. Ansemil, K. Floret // Studia Mathematica. – 1998. – V. 129, № 3. – P. 285–295.

60. *Apostol C.* Functional Calculus in Locally Convex Algebras / C. Apostol // J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I. – 1970. – V. 34. – P. 1–12.

61. *Arens R.* A generalization of normed rings / R. Arens // Pacific J. Math. – 1952. – V. 2. – P. 455–471.

62. *Aron R.* An introduction to polynomials on Banach spaces / R. Aron // Extracta Math. – 2002. – V. 17, № 3. – P. 303–329.

63. *Aron R.* Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space / R. Aron, B. Cole, T. Gamelin // J. Reine Angew. Math. – 1991. – V. 415. – P. 51–93.

64. *Aron R.* Zero sets of polynomials in several variables / R. Aron, P. Hájec // Arhiv der Mathematic. – 2006. – V. 56, № 6. – P. 561–568.

65. *Auscher P.* The solution of the Kato square root problem for second order elliptic operators on $\mathbb{R}^n$ / P. Auscher, S. Hofmann, M. Lacey, A. McIntosh, Ph. Tchamitchian // Ann. Math. – 2002. – V. 156. – P. 633–654.

66. *Baeumer B.* Unbounded functional calculus for bounded groups with applications / B. Baeumer, M. Haase, M. Kovács // J. Evol. Eqs. – 2009. – V. 9, № 1. – P. 171–195.

67. *Balakrishnan A.V.* An Operational Calculus for Infinitesimal Generators of Semigroups / A.V. Balakrishnan // Trans. Amer. Math. Soc. – 1959. – V. 91, № 2. – P. 330–353.

68. *Banach S.* Über homogene polynome in (L^2) / S. Banach // Studia Math. – 1938. – V. 7. – P. 36–44.

69. *Batty C.* Unbounded Operators: Functional Calculus, Generation, Perturbations / C. Batty // Extracta mathematicae. – 2009. – V. 24, № 2. – P. 99–133.

70. *Beltiţă I.* On Weyl Calculus in Infinitely Many Variables / I. Beltiţă, D. Beltiţă // AIP Conf. Proc. – 2010. – V. 1307. – P. 19–26.

71. *Benth F.E.* Anticipative calculus for Lévy processes and stochastic differential equations / F.E. Benth, A. Løkka // Stochastics and Stochastic Reports. – 2004. – V. 76, № 3. – P. 191–211.

72. *Berg C.* Generation of generators of holomorphic semigroups / C. Berg, K. Boyadzhiev, R. Delaubenfels // J. Australian Math. Soc. – 1993. – V. 55, № 2. – P. 246–269.

73. *Biller H.* Analyticity and naturality of the multi-variable functional calculus / H. Biller // Expo. Math. – 2007. – V. 25. – P. 131–163.

74. *Bochnak J.* Analytic fuctions in topological vector spaces / J. Bochnak, J. Siciak // Studia Math. – 1971. – V. 39. – P. 77–112.

75. *Boland P.J.* Holomorphy on spaces of distribution / P.J. Boland, S. Dineen // Pacific J. Math. – 1981. – V. 92, № 1. – P. 27–34.

76. *Bonet J.* The identity $L(E,F) = LB(E,F)$, tensor products and inductive limits / J. Bonet, A. Galbis // Note di Matematica. – 1989. – V. IX, № 2. – P. 195–216.

77. *Bonet J.* Tensor stable Fréchet and (DF) spaces / J. Bonet, J.C. Díaz, J. Taskinen // Collect. Math. – 1991. – V. 42, № 3. – P. 199–236.

78. *Borchers H.J.* Algebras of unbounded operators in quantum field theory / H.J. Borchers // Physica A. – 1984. – V. 124, № 1–3. – P. 127–144.

79. *Bosch C.* Functional Calculi / C. Bosch, C. Swartz. – Singapore: World Sci., 2013.

80. *Boyadzhiev K.* Semigroups and resolvents of bounded variation, imaginary powers and H^∞-functional calculus / K. Boyadzhiev, R. Delaubenfels // Semigroup Forum. – 1992. – V. 45, № 3. – P. 372–384.

81. *Braun R.W.* Ultradifferentiable functions and Fourier analysis / R.W. Braun, R. Meise, B.A. Taylor // Results in Math. – 1990. – V. 17. – P. 206–237.

82. *Butzer P.L.* Semi-groups of operators and approximation / P.L. Butzer, H. Berens. – New York: Springer, 1967.

83. *Carando D.* Extension of Polynomials and John's Theorem for Symmetric Tensor Products / D. Carando, V. Dimant // Proc. Amer. Math. Soc. – 2007. – V. 135, № 6. – P. 1769–1773.

84. *Chung D.M.* Some Cauchy problems in white noise analysis and associated semigroups of operators / D.M. Chung, U.C. Ji // Stochastic Anal. Appl. – 1999. – V. 17, № 1. – P. 1–22.

85. *Colombo F.* An Overview on Functional Calculus in Different Settings. Hypercomplex Analysis. Trends in Mathematics series. / F. Colombo, G. Gentili, I. Sabadini, D.C. Struppa. – Basel: Birkhäuser, – P. 69–99.

86. *Colzani L.* Translation-invariant operators on Lorentz spaces $L(1, q)$ with $0 < q < 1$ / L. Colzani, P. Sjögren // Studia Math. – 1999. – V. 132, № 2. – P. 101–124.

87. *Cowling M.* Banach space operators with a bounded H^∞-functional calculus / M. Cowling, I. Doust, A. McIntosh, A. Yagi // J. Austral. Math. Soc., Ser. A. – 1996. – V. 60, № 1. – P. 51–89.

88. *Carmichael R.D.* Boundary Values and Convolution in Ultradistribution Spaces / R.D. Carmichael, A. Kamiński, S. Pilipović. – Singapore: World Scientific, 2007.

89. *Dales H.G.* Translation-invariant linear operators / H.G. Dales, A. Millinoton // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1993. – V. 113, № 1. – P. 161–172.

90. *Da Prato G.* Equations d'évolution abstraites non linéaires de type parabolique / G. Da Prato, P. Grisvard // Ann. Mat. Pura Appl. – 1979. – V. 120, № 1. – P. 329–396.

91. *Davie A.M* A theorem on polynomial-star approximation / A.M Davie, T.W. Gamelin // Proc. Amer. Math. Soc. – 1989. – V. 106, № 2. – P. 351–356.

92. *Davies E.B.* The Functional Calculus / E.B. Davies // J. London Math. Soc. – 1995. – V. 52, № 2. – P. 166–176.

93. *Defant A.* A Duality Theorem for Locally Convex Tensor Products / A. Defant // Mathematische Zeitschrift. – 1985. – V. 190. – P. 45–53.

94. *Defant A.* Tensor norms and operator ideals / A. Defant, K. Floret. – Amsterdam - New York - Oxford: North-Holland, 1993. – 566 p.

95. *Delaubenfels R.* Functional Calculus for Generators of Uniformly Bounded Holomorphic Semigroups / R. Delaubenfels // Semigroup Forum. – 1989. – V. 38. – P. 91–103.

96. *Delaubenfels R.* Inverses of generators / R. Delaubenfels // Proc. Amer. Math. Soc. – 1988. – V. 104. – P. 443–448.

97. *Delaubenfels R.* Polynomials of Generators of Integrated Semigroups / R. Delaubenfels // Proc. Amer. Math. Soc. – 1989. – V. 107, № 1. – P. 197–204.

98. *Dineen S.* Complex analysis in locally convex spaces / S. Dineen. – Amsterdam - New York - Oxford: North-Holland Math. Stud. **57**, 1981.

99. *Dineen S.* Complex analysis on infinite dimensional spaces / S. Dineen. – Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer, 1999.

100. *Dineen S.* Spectra of tensor product elements I–II / S. Dineen, R. Harte, C. Taylor // Proc. Royal Irish Acad. – 2001. – V. 101A, № 2. – P. 177–220.

101. *Dineen S.* Spectra of tensor product elements III / S. Dineen, R. Harte, C. Taylor // Proc. Royal Irish Acad. – 2003. – V. 103A, № 1. – P. 61–92.

102. *Domański P.* Grothendieck Spaces and Duals of Injective Tensor Products / P. Domański, M. Lindström // Bull. London Math. Soc. – 1996. – V. 28, № 6. – P. 617–626.

103. *Drużkowski L.M.* Two criteria for continuity of polynomials and holomorphic mappings in infinite dimensions / L.M. Drużkowski // Univ. Iagel. Acta Math. – 1984. – V. 24. – P. 135–138.

104. *Dubinskij J.A.* Sobolev Spaces of Infinite Order and Differential Equations / J.A. Dubinskij. – Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1986.

105. *Engel K.-J.* One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations / K.-J. Engel, R. Nagel. – New York: Springer, 1999. — 589 p.

106. *Feichtinger H.G.* Operators commuting with a discrete subgroup of translations / H.G. Feichtinger, H. Fëuhr, K. Grëochenig, N. Kaiblinger // J. Geometric Analysis. – 2006. – V. 16, № 1. – P. 53–67.

107. *Floret K.* Natural norms on symmetric tensor products of normed spaces / K. Floret // Note Mat. – 1997. – V. 17. – P. 153–188.

108. *Floret K.* The extension theorem for norms on symmetric tensor products of normed spaces / K. Floret // North-Holland Math. Stud. – 2001. – V. 189. – P. 225–237.

109. *Fragoulopoulou M.* Topological Algebras With Involution / M. Fragoulopoulou. – Amsterdam: Elsevier, 2005. – 495 p.

110. *Fréchet M.* Une definition fontionelle des polinômes / M. Fréchet // Nouv. Ann. Math. – 1909. – V. 9. – P. 145–162.

111. *Galé J.E.* Unicity of a Holomorphic Functional Calculus in Infinite Dimensions / J.E. Galé // Trans. Amer. Math. Soc. – 1986. – V. 295, № 2. – P. 501–508.

112. *Galé J.E.* Functional Calculus for Infinitesimal Generators of Holomorphic Semigroups. / J.E. Galé, T. Pytlik // J. Func. Anal. – 1997. – V. 150. – P. 307–355.

113. *Gamelin T.W.* Uniform algebras / T.W. Gamelin. – Providence, Rhode Island: AMS Chelsea Publ., 2005. – 269 p.

114. *Gâteaux R.* Fonctionnelles d'une infinit'e des variables ind'ependantes / R. Gâteaux // Bull. Soc. Math. France. – 1919. – V. 47. – P. 70–96.

115. *González M.* Polynomial contiuity on l_1 / M. González, J. Gutiérrez, J. Llavona // Proc. Amer. Math. Soc. – 1997. – V. 125, № 5. – P. 1349–1353.

116. *Górka P.* Functional calculus via Laplace transform and equations with infinitely many derivatives / P. Górka, H. Prado, E.G. Reyes // J. Math. Phys. – 2010. – V. 51. – P. 103512.

117. *Grafakos L.* Translation-invariant bilinear operators with positive kernels / L. Grafakos, J. Soria // Integr. Equ. Oper. Theory. – 2010. – V. 66. – P. 253–264.

118. *Grisvard P.* Équations opérationnelles abstraites et problèmes aux limites dans des domaines non réguliers / P. Grisvard // Actes. Congrés Intern. Math. – 1970. – V. 2. – P. 731–736.

119. *Gross L.* Potential theory on Hilbert space / L. Gross // J. Funct. Anal. – 1967. – V. 1, № 2. – P. 123–181.

120. *Grothendieck A.* Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires / A. Grothendieck // Mem. Amer. Math. Soc. – 1955. – V. 16, № 11. – P. 1–140.

121. *Grothendieck A.* Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques / A. Grothendieck // Bol. Soc. Mat. Sãao Paulo. – 1956. – V. 8. – P. 83–110.

122. *Grothendieck A.* Sur les espaces (F) et (DF) / A. Grothendieck // Summa Bras. Math. – 1954. – V. 3. – P. 57–123.

123. *Haase M.* The functional calculus for sectorial operators / M. Haase. – Berlin: Birkhäuser, 2006. – 391 p.

124. *Haase M.* Functional calculus for semigroup generators via transference / M. Haase, J. Rozendaal // J. Funct. Anal. – 2013. – V. 265, № 12. – P. 3345–3368.

125. *Helemskii A.Ya.* Banach and Locally Convex Algebras / A.Ya. Helemskii. – Oxford: Oxford Sci. Publ., 1993.

126. *Hersh R.* High-Accuracy Stable Difference Schemes for Well-Posed Initial-Value Problems / R. Hersh, T. Kato // SIAM J. Numerical Anal. – 1979. – V. 16, № 4. – P. 670–682.

127. *Hida T.* White noise: an infinite dimensional calculus / T. Hida, H.H. Kuo, J. Potthoff, L. Streit. – Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1993.

128. *Hollstein R.* Inductive limits and ε-tensor products / R. Hollstein // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1980. – V. 319. – P. 38–62.

129. *Hörmander L.* The Analysis of Linear Partial Differential Operators I. Distribution Theory and Fourier Analysis / L. Hörmander. – Berlin: Springer, 2003.

130. *Hörmander L.* Estimates for translation invariant operators in L^p spaces / L. Hörmander // Acta Math. – 1960. – V. 104, № 1. – P. 93–140.

131. *Hörmander L.* The Weyl calculus of pseudodifferential operators / L. Hörmander // Comm. Pure Appl. Math. – 1979. – V. 32, № 3. – P. 360–444.

132. *Hytönen T.* Translation-invariant operators on spaces of vector-valued functions / T. Hytönen. Helsinki University of Technology, 2003.

133. *Jara P.* Rational approximation schemes for bi-continuous semigroups / P. Jara // J. Math. Anal. Appl. – 2008. – V. 344. – P. 956–968.

134. *Jarchow H.* Locally Convex Spaces / H. Jarchow. – Stuttgart: Teubner, 1981.

135. *Jefferies B.* Spectral properties of noncommuting operators. Lecture Notes in Mathematics, V. 1843. / B. Jefferies. – Berlin: Springer, 2004.

136. *Jefferies B.* The Weyl calculus and Clifford analysis / B. Jefferies, A. McIntosh // Bull. Austral. Math. Soc. – 1998. – V. 57. – P. 329–341.

137. *Ji U.C.* Admissible white noise operators and their quantum white noise derivatives / U.C. Ji, N. Obata. In: Infinite dimensional harmonic analysis III. – RiverEdge, NJ: World Sci. Publ., 2005. – P. 213–232.

138. *Ji U.C.* Generalized white noise operator fields and quantum white noise derivatives. / U.C. Ji, N. Obata // Sémin. Congr. – 2007. – V. 16. – P. 17–33.

139. *John K.* Tensor powers of operators and nuclearity / K. John // Math. Nachr. – 1986. – V. 129. – P. 115–121.

140. *Kachanovskii N.A.* Elements of a non-gaussian analysis on the spaces of functions of infinitely many variables / N.A. Kachanovskii // Укр. мат. журн. – 2010. – Т. 62, № 9. – С. 1220–1246.

141. *Kachanovskii N.A.* Stochastic integral of Hitsuda-Skorohod type on the extended Fock space / N.A. Kachanovskii, V.A. Tesko // Укр. мат. журн. – 2009. – Т. 61, № 6. – С. 733–764.

142. *Kalton N.* Operators with an absolute functional calculus / N. Kalton, T. Kucherenko // Math. Ann. – 2010. – V. 346, № 2. – P. 259–306.

143. *Kato T.* Fractional powers of dissipative operators / T. Kato // J. Math. Soc. Japan. – 1961. – V. 13. – P. 246–274.

144. *Kečkić D.* A Functional Calculus for Unbounded Generalized Scalar Operators on Banach Spaces / D. Kečkić, D. Krtinić // Pacific J. Math. – 2011. – V. 249, № 1. – P. 135–156.

145. *Kisil V.V.* The Riesz-Clifford Functional Calculus for Non-Commuting Operators and Quantum Field Theory / V.V. Kisil, E.R. de Arellano // Math. Methods Appl. Sci. – 1996. – V. 19. – P. 593–605.

146. *Komatsu H.* An introduction to the theory of generalized functions / H. Komatsu. – Tokyo: University Publ., 2000.

147. *Komatsu H.* Ultradistributions, I. Structure theorems and a characterization / H. Komatsu // J. Fac. Sci.Tokyo, Sec. IA Math. – 1973. – V. 20. – P. 25–105.

148. *Komatsu H.* Ultradistributions, II. The kernel Theorem and Ultradistributions with support in a submanifold / H. Komatsu // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect IA Math. – 1977. – V. 24. – P. 607–628.

149. *Komatsu H.* Ultradistributions, III. Vector valued ultradistributions and the theory of kernels / H. Komatsu // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect IA Math. – 1982. – V. 29. – P. 653–718.

150. *Kondratiev Y.G.* Generalized functions in infinite dimensional analysis / Y.G. Kondratiev, L. Streit, W. Westerkamp, J. Yan // Hiroshima Math. J. – 1998. – V. 28. – P. 213–260.

151. *Köthe G.* Topological Vector Spaces. I, II. / G. Köthe. – Berlin - Heidelberg - New York: Springer, 1983.

152. *Kriegler C.* Functional calculus and dilation for C_0-groups of polynomial growth / C. Kriegler // Semigroup Forum. – 2012. – V. 84. – P. 393–433.

153. *Kuo H.* White Noise Distribution Theory / H. Kuo. Boca Ration, FL: CRC Press, 1996.

154. *Lee J.-S.K.* Heat Equation In White Noise Analysis / J.-S.K. Lee // J. Korean Math. Soc. – 1996. – V. 33, № 3. – P. 541–555.

155. *Lions J.L.* Problemes aux Limites non Homogenes et Applications, V. 3 / J.L. Lions, E. Magenes. – Paris: Dunod, 1970.

156. *Lopushansky O.V.* Application of the Laplace Transform of Tempered Distributions to the Construction of Functional Calculus / O.V. Lopushansky, S.V. Sharyn // Ukrainian Math. J. – 2016. – V. 67, № 11. – P. 1687–1703.

157. *Lopushansky O.V.* Generalized Hille-Phillips type functional calculus for multiparameter semigroups / O.V. Lopushansky, S.V. Sharyn // Sib. Math. J. – 2014. – T. 55, № 1. – C. 105–117.

158. *Lopushansky O.V.* Polynomial ultradistributions: differentiation and Laplace transformation / O.V. Lopushansky // Banach Center Publ. – 2010. – V. 88. – P. 195–209.

159. *Lopushansky O.V.* Vector-valued functional calculus for a convolution algebra of distributions on cone / O.V. Lopushansky, A.V. Solomko, S.V. Sharyn // Мат. студії. – 2011. – T. 35, № 1. – P. 78–90.

160. *Lopushansky O.V.* Operators commuting with multi-parameter shift semigroups / O.V. Lopushansky, S.V. Sharyn // Carpathian J. Math. – 2014. – V. 30, № 2. – P. 217–224.

161. *Lopushansky O.V.* Polynomial ultradistributions on cone $\mathbb{R}^d_+$ / O.V. Lopushansky, S.V. Sharyn // Topology. – 2009. – V. 48, № 2–4. – P. 80–90.

162. *Lopushansky O.* Infinite Dimensional Holomorphy: Spectra and Hilbertian Structures / O. Lopushansky, A. Zagorodnyuk. – Krakow: AGH Univ. Press, 2013.

163. *Martin R.S.* Contributions to the theory of functionals. Ph.D. thesis / R.S. Martin. – Oakland: University of California, 1932.

164. *Mazur S.* Grundlegende eigenschaften der polynomischen operationen I, II / S. Mazur, W. Orlicz // Studia Math. – 1935. – V. 5. – P. 50–68, 179–189.

165. *McIntosh A.* Square roots of elliptic operators / A. McIntosh // J. Funct. Anal. – 1985. – V. 61. – P. 307–327.

166. *McIntosh A.* A functional calculus for several commuting operators / A. McIntosh, A. Pryde // Indiana Univ. Math. J. – 1987. – V. 36. – P. 421–439.

167. *Michael E.A.* Locally multiplicatively-convex topological algebras. Mem. Amer. Math. Soc., V. 11 / E.A. Michael. – Providence, Rhode Island: AMS, 1952.

168. *Michal A.D.* Fonctions analitiques dans des espaces vectoriels / A.D. Michal, A.H. Clifford // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1933. – V. 197. – P. 735–737.

169. *Michal A.D.* Some expansions in vector spaces / A.D. Michal, R.S. Martin // J. Math. Pures. Appl. – 1934. – V. 13, № 9. – P. 69–91.

170. *Mikusinski J.* Operational Calculus. Internat. Ser. of Monographs on Pure and Appl. Mathematics, V. 8 / J. Mikusinski. – New York - London - Paris - Los Angeles: Pergamon Press, 1959.

171. *Mujica J.* Complex Analysis in Banach Spaces / J. Mujica. – Amsterdam: North-Holland, 1986. – 434 p.

172. *Nachbin L.* Topology on spaces of holomorphic mappings. Erd. der Math., V. 47 / L. Nachbin. – New York: Springer, 1969.

173. *Nelson E.A.* A Functional Calculus Using Singular Laplace Integrals / E.A. Nelson // Trans. Amer. Math. Soc. – 1958. – V. 88, № 2. – P. 400–413.

174. *Nishihara M.* The Tensor Product Representation of Polynomials of Weak Type in a DF-Space / M. Nishihara, K. Ho Shon // Abstract and Applied Analysis. – 2014. – Article ID 795016. – 7 p.

175. *Obata N.* White noise calculus and Fock space. Lect. Notes in Math., V. 1577 / N. Obata. – Berlin-Heidelberg: Springer, 1994. – 190 p.

176. *Pazy A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations / A. Pazy. – Berlin - New York: Springer, 1992.

177. *Peris A.* Topological Tensor Products of a Fréchet-Schwartz space and a Banach space / A. Peris // Studia Mathematica. – 1993. – V. 106, № 2. – P. 189–196.

178. *Pisier G.* Counterexamples to a conjecture of Grothendieck / G. Pisier // Acta Math. – 1983. – V. 151. – P. 181–208.

179. *Plichko A.* On automatic continuity and three problems of "The Scottish Book" concerning the boundedness of polynomial functionals / A. Plichko and A. Zagorodnyuk // J. Math. Anal. Appl. – 1998. – V. 220. – P. 477–494.

180. *Ragimov M.B.* Spectral Theory and Functional Calculus of a Pair of Operators Acting from One Complex Banach Space to Another / M.B. Ragimov, Y.Y. Mustafayeva // Internat. Math. Forum. – 2009. – V. 4, № 9. – P. 415–420.

181. *Reed M.* Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. II. / M. Reed, B. Simon. – New York: Academic Press, 1975. – 361 p.

182. *Richter P.* Unitary representations of countable inifinite dimensional Lie groups / P. Richter. – Leipzig Univesität, MPH 5, 1977.

183. *Roumieu C.* Sur quelques extentions de la notion de distribution / C. Roumieu // Ann. Sci. École Norm. Sup. Paris. – 1960. – V. 77. – P. 47–121.

184. *Ryan R.A.* Application of topological tensor products to infinite dimensional holomorphy. Ph.D. thesis / R.A. Ryan. – Dublin: Trinity College, 1980.

185. *Ryan R.A.* Introduction to tensor products of Banach spaces / R.A. Ryan. – London: Springer, 2002.

186. *Sandberg S.* On Non-holomorphic Functional Calculus for Commuting Operators / S. Sandberg // Math. Scand. – 2003. – V. 93. – P. 109–135.

187. *Schwartz L.* Espaces de fonctions différentielles *à* valeurs vectorielles / L. Schwartz // J. An. Math. – 1954/55. – V. 4. – P. 88–148.

188. *Schwartz L.* Theorie des distributions / L. Schwartz. – Paris: Hermann, 1966.

189. *Seeley R.T.* Extensions of C^∞-functions defined in a half-space / R.T. Seeley // Proc. Amer. Math. Soc. – 1964. – V. 15. – P. 625–626.

190. *Sharyn S.V.* Application of the functional calculus to solving of infinite dimensional heat equation / S.V. Sharyn // Carpathian Math. Publ. – 2016. – T. 8, № 2. – C. 313–322.

191. *Sharyn S.V.* Fourier-Laplace transformations of tempered polynomial distributions / S.V. Sharyn // Internat. conf. in honor of Prof. V.E. Liantse. – Lviv. – 2010. Abstracts. – P. 83.

192. *Sharyn S.V.* Sharyn S.V. Fourier transformation and differentiation of polynomial tempered distributions / S.V. Sharyn // Всеукр. наук. семінар "Сучасні проблеми теорії ймовірностей і математичного аналізу". – Івано-Франківськ. – 2010. Тези. – С. 47.

193. *Sharyn S.* Functionl calculus for analytic semigroups of operators / S. Sharyn // Internat. conf. "Spectral theory and differential equations". – Kharkiv. – 2012. Abstracts. – P. 97–98.

194. *Sharyn S.* Functional calculus: infinite dimensional aspect / S. Sharyn // Internat. conf. dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach. – Lviv. – 2012. Abstracts. – P. 66.

195. *Sharyn S.V.* Gâteaux differentiability of polynomial test and generalized functions / S.V. Sharyn // XVII Conf. on Analytic Functions and Related Topics. – Chelm. – 2014. Abstracts. – P. 44.

196. *Sharyn S.V.* Gâteaux differentiability of polynomial test and generalized functions / S.V. Sharyn // J. Math. Sci. – 2017. – V. 220, № 1. – P. 15–26.

197. *Sharyn S.V.* Generalized Fourier transformation for polynomial ultradistributions / S.V. Sharyn // Internat. Sci. Conf. "Infinite Dimensional Analysis and Topology". – Ivano-Frankivsk. – 2009. Abstracts. – P. 134–135.

198. *Sharyn S.* Joint functional calculus in algebra of polynomial tempered distributions / S. Sharyn // Methods Funct. Anal. Topology. – 2016. – V. 22, № 1. – P. 62–73.

199. *Sharyn S.* Hille-Philips type functional calculus for linear and polynomial tempered distributions / S. Sharyn // Internat. Conf. "Functional Analysis: Applications to Complex Analysis and Partial Differential Equations". – Będlewo. – 2012. Abstracts. – P. 33.

200. *Sharyn S.V.* Laplace transformation for polynomial ultradistributions on cone $\mathbb{R}^n_+$ / S.V. Sharyn // Internat. Conf. "Spaces of Analytic and Smooth Functions III". – Będlewo. – 2009. Abstracts. – P. 31.

201. *Sharyn S.V.* Note on the weak polynomial topology / S.V. Sharyn, A.V. Zagorodnyuk // Мат. студії. – 2008. – T. 30, № 1. – P. 98–100.

202. *Sharyn S.V.* Paley-Wiener-type theorem for polynomial ultradifferentiable functions / S.V. Sharyn // Carpathian Math. Publ. – 2015. – V. 7, № 2. – P. 271–279.

203. *Sharyn S.V.* Tensor structure of Gevrey ultradistribution spaces / S.V. Sharyn, A.V. Solomko // 5-th Internat. Conf. on Appl. Math. in honor of Prof. I.A. Rus. – Baia Mare. – 2006. Abstarcts. – P. 43.

204. *Sharyn S.V.* The cross-correlation operation of Schwartz distributions / S.V. Sharyn // J. Math. Sci. – 2001. – V. 107, № 1. – P. 3604–3609.

205. *Sharyn S.V.* The Paley-Wiener theorem for Schwartz distributions with support on a half-line / S.V. Sharyn // J. Math. Sci. – 1999. – V. 96, № 2. – P. 2985–2987.

206. *Sharyn S.V.* Operator calculus for noncommuting operators over symmetric Fock space / S.V. Sharyn // Internat. J. Math. Anal. – 2017. – V. 11, № 1. – P. 29–38.

207. *Smirnov A.G.* On topological tensor products of functional Fréchet and *DF* spaces / A.G. Smirnov // Integral Transforms Spec. Funct. – 2009. – V. 20, № 3–4. – P. 309–318.

208. *Swartz C.W.* Translation invariant linear operators and generalized functions / C.W. Swartz // Czechoslovak Math. J. – 1975. – V. 25, № 2. – P. 202–213.

209. *Taskinen J.* Counterexamples to “problème des topologies” of Grothendieck / J. Taskinen // Ann. Acad. Sci. Fenn. serie A. – 1986. – V. 63.

210. *Taylor A.E.* Additions to the theory of polynomials in normed linear spaces / A.E. Taylor // Tohoku Math. J. – 1938. – V. 44. – P. 302–318.

211. *Taylor A.E.* Notes on the history of the uses of analyticity in operator theory / A.E. Taylor // Amer. Math. Monthly. – 1971. – V. 78. – P. 331–342.

212. *Taylor J.L.* The analytic-functional calculus for several commuting operators / J.L. Taylor // Acta Math. – 1970. – V. 125. – P. 1–38.

213. *Taylor M.E.* Functions of several self-adjoint operators / M.E. Taylor // Proc. Am. Math. Soc. – 1968. – V. 19, № 1. – P. 91–98.

214. *Tovstolis A.* On translation invariant operators in Hardy spaces in tube domains over open cones / A. Tovstolis // Methods Funct. Anal. Topology. – 2003. – V. 9, № 3. – P. 262–272.

215. *Uhlmann A.* Über die Definition der Quantenfelder nach Wightman und Haag / A. Uhlmann // Wiss. Zeitschr. Karl-Marx Univ., Leipzig. – 1962. – V. 11. – P. 213–217.

216. *Volterra V.* Leçons sur les fonctions de lignes. Collection de Monographies sur le théorie des Fonctions / V. Volterra. – Paris: Gauthier-Villars, 1913.

217. *Vrabie I.I.* C_0-Semigroup and Applications / I.I. Vrabie. – New York - Amsterdam: Elsevier, 2003.

218. *Waelbroeck L.* Topological Vector Spaces and Algebras. Lecture Notes in Mathematics, V. 230 / L. Waelbroeck. – Berlin: Springer, 1971.

219. *Waelbroeck L.* Le calcul symbolique dans les algébres commutatives, / L. Waelbroeck // J. Math. Pures Appl. – 1954. – V. 33, № 9. – P. 147–186.

220. *Weiss G.* Representation of shift-invariant operators on L^2 by H^∞ transfer functions: An elementary proof, a generalization to L^p, and a counterexample for L^∞ / G. Weiss // Math. Control Signals Systems. – 1991. – V. 4. – P. 193–203.

221. *Weyl H.* Gruppentheorie und Quantenmechanik / H. Weyl. – Leipzig: Verlag S. Hirzel, 1928.

222. *Yosida K.* Operational Calculus: A Theory of Hyperfunctions / K. Yosida. – New York: Springer, 1984.

223. *Zagorodnyuk A.* Spectra of algebras of analytic functions and polinomials on Banach spaces / A. Zagorodnyuk // Contemporary Math. – 2007. – V. 435. – P. 381–394.

224. *Zagorodnyuk A.* Spectra of algebras of entire functions on Banach spaces / A. Zagorodnyuk // Proc. Amer. Math. Soc. – 2006. – V. 134, № 9. – P. 2559–2569.

225. *Zorn M.A.* Gâteaux differentiability and essential boundedness / M.A. Zorn // Duke Math. J. – 1945. – V. 12. – P. 579–583.