

## Відгук

офіційного опонента про дисертаційну роботу Шарина Сергія Володимировича  
“Алгебри поліноміальних розподілів на нескінченновимірних просторах  
та їх застосування до числення операторів”,  
подану до захисту на здобуття наукового ступеня доктора  
фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз

**1. Актуальність дисертаційного дослідження.** У квантовій теорії поля процедура квантування передбачає побудову відображення з алгебри класичних спостережуваних величин в алгебру квантових спостережуваних величин. З математичної точки зору побудова такого відображення є функціональним численням для злічених наборів операторів, що само по собі є складною проблемою. Власне дослідженню ряду аспектів, пов'язаних з цією проблемою, присвячена дисертаційна робота С.В. Шарина.

Побудова числення операторів для функцій нескінченної кількості змінних довгий час залишалася недосяжною проблемою. У цьому контексті відомою є книга Ю.С. Самойленка “Спектральная теория наборов самосопряженных операторов”, де розроблено метод побудови функціонального числення для злічених наборів самосопряжених операторів на гільбертовому просторі. Також слід відмітити роботи Ш. Дініна, Р. Харта та С. Тейлора, які побудували функціональне числення в алгебрі всіх аналітичних функцій обмеженого типу на комплексному банаховому нескінченновимірному просторі. Є також інші публікації з цієї проблематики.

Проте надалі залишається актуальною проблема побудови аналогу операторного числення Хілле-Філліпса для функцій нескінченної кількості змінних. Відмінність цього числення полягає в тому, що в рамках такого підходу можна будувати функції від генераторів сильно неперервних напівгруп та груп операторів на банахових просторах. Такі генератори не обов'язково є самосопряженими операторами і, як правило, є необмеженими операторами. У дисертаційній роботі розроблено метод побудови функціонального числення типу Хілле-Філліпса для злічених наборів генераторів сильно неперервних напівгруп та груп операторів. Слід зауважити, що для досягнення поставленої мети автором дисертаційного дослідження розвинуто новий підхід до дослідження дуальної пари, що складається з просторів основних функцій нескінченної кількості змінних та відповідних просторів поліноміальних (ультра)розподілів. При цьому в дисертації використано теорію двоїстості локально опуклих ядерних  $(F)$  та  $(DF)$  просторів, техніку тензорних добутків Гротендіка та сучасні методи поліноміальних та полілінійних відображень.

З огляду на сказане, тематика дисертаційного дослідження С.В. Шарина є безсумнівно актуальною і важливою.

**2. Зміст та наукова новизна дисертаційної роботи.** Дисертація Шарина С.В. складається з анотацій українською та англійською мовами, вступу, шести розділів, висновків та списку використаної літератури, що містить 225 посилань.

У першому розділі подано огляд літератури за тематикою дослідження та описано допоміжні результати, що використовуються у дисертації.

Розділ 2 присвячено запровадженню нового підходу до дослідження нелінійного розширення дуальної пари  $\langle X', X \rangle$  лінійних локально опуклих ядерних просторів типу  $(F)$  або  $(DF)$ , а саме дуальності  $\langle P'(X'), P(X') \rangle$ , де  $P(X')$  – простір неперервних поліномів над  $X'$ , а  $P'(X')$  – сильно спряжений до нього простір. Тут описано тензорну та поліноміальну структуру простору  $P'(X')$ , елементи якого можна трактувати як поліноміальні розподіли. У цьому ж розділі для довільного ядерного простору  $X$  типу  $(F)$  або  $(DF)$  доведено “симетричний” аналог ізоморфізму А. Гротендіка, а саме, теорему про те, що для всіх натуральних  $n$  справджується топологічний ізоморфізм  $X'^{\hat{\otimes} n} \cong (X^{\hat{\otimes} n})'$ .

На основі розробленої у другому розділі техніки у розділі 3 описано структуру та доведено основні властивості простору  $P(S'_+)$  поліноміальних основних швидко спадних функцій та простору  $P'(S'_+)$  поліноміальних розподілів повільного росту, де  $S'_+$  – алгебра Владімірова узагальнених функцій повільного росту з носіями в додатній півосі. У цьому розділі означено поліноміальне узагальнення операторів диференціювання та зсуву та показано, що поліноміальна похідна генерує поліноміальну напівгрупу зсувів, при цьому явно виписано вигляд їхніх генераторів. Окремий параграф присвячений інтегральним перетворенням у просторах лінійних та поліноміальних основних та узагальнених функцій. Доведено аналог теореми Пелі-Вінера для одного класу типу Харді-Лебега про зображення Фур'є-образу згорткової алгебри  $S'_+$  у вигляді мультиплікативної алгебри аналітичних функцій комплексної змінної. В останньому параграфі третього розділу досліджено диференційовність за Гато поліноміальних основних та узагальнених функцій та елементів відповідних просторів типу Фока. Встановлено зв'язок похідної Гато з операторами знищення і народження на просторах типу Фока, а також з диференціюваннями на цих просторах.

У четвертому розділі розглянуто випадок простору ультрадиференційовних в сенсі Жевре функцій з компактними носіями, що задані в додатному  $d$ -вимірному конусі  $\mathfrak{R}_+^d$ . Тут доведено ряд структурних теорем для операторів, що діють в просторах лінійних ультрадиференційовних функцій і які комутують з багатопараметричними напівгрупами. Зокрема показано, що згорткову алгебру ультрарозподілів Рум'є можна ізоморфно представити як комутант напівгрупи зсувів, доведено також векторнозначний варіант цього



результату і досліджено загальніший випадок довільної напівгрупи стиску. Крім того, доведено структурну теорему про представлення простору типу Фока у вигляді комутанта поліноміальної напівгрупи зсувів. Поряд із класом ультрадиференційовних функцій з компактними в  $\mathcal{R}_+^d$  носіями, розглянуто ширший клас ультрадиференційовних функцій, заданих на всьому просторі  $\mathcal{R}^d$ . Для таких класів функцій та їхніх поліноміальних узагальнень поширено перетворення Фур'є-Лапласа та Лапласа та вивчено їхні властивості. Для випадку перетворення Фур'є-Лапласа описано образ основного простору у вигляді певного класу цілих функцій експоненціального типу, а також доведено теореми типу Пелі-Вінера для поліноміальних ультрадиференційовних основних та узагальнених функцій.

Останні два розділи дисертації розв'язують проблему побудови числення типу Хілле-Філіпса для зліченного набору генераторів сильно неперервних напівгруп та груп операторів. Зауважимо, що метод, запропонований у дисертації, дає можливість описати образ функціонального числення, що не завжди можливо при інших підходах до побудови операторного числення.

Числення Хілле-Філіпса для функцій скінченної кількості змінних розвинуто в перших двох параграфах п'ятого розділу. При цьому, використовуючи техніку, розвинуто в другому розділі, доведено теорему про ізоморфне представлення алгебри поліноміальних розподілів у вигляді комутанта поліноміальної напівгрупи зсувів. У третьому параграфі побудовано функціональне числення типу Хілле-Філіпса для зліченного набору генераторів сильно неперервних напівгруп стиску, що діють в деякому банаховому просторі. Нескінченновимірний напівгрупа Гаусса, яка генерується зліченим набором операторів другого диференціювання, використана для ілюстрації побудованого числення.

У шостому розділі побудовано функціональне числення в класах цілих аналітичних функцій нескінченної кількості змінних. Для зліченного некомутовуючого набору генераторів сильно неперервних груп операторів, заданих на гільбертовому просторі, завдяки методу другого квантування побудовано операторне числення, що задане на симетричному просторі Фока. Доведено теорему про ізоморфне представлення алгебри типу Фока у вигляді комутанта операторів певного вигляду, що дозволяє аргументувати існування функціонального числення у класі поліноміальних ультрарозподілів. Показано застосування побудованого числення операторів до розв'язання задачі Коші для нескінченновимірного рівняння теплопровідності. Зокрема, доведено теорему про існування та єдиність розв'язку згорткової задачі Коші. Встановлено, що лапласіан Гросса діє як згортковий оператор, що дозволяє звести узагальнене рівняння теплопровідності, породжене лапласіаном Гросса, до згорткового рівняння і отримати розв'язок у вигляді явної формули. Крім того, побудовано напівгрупу на просторі поліноміальних основних функцій, генератором якої є лапласіан

Гросса, записано у явному вигляді розв'язок задачі Коші для нескінченновимірного рівняння теплопровідності, породженого лапласіаном Гросса. В останньому параграфі описано гомоморфізми з алгебри аналітичних функцій обмеженого типу на нескінченновимірному банаховому просторі в деяку комутативну банахову алгебру і показано, що не кожен такий гомоморфізм задається функціональним численням, наведено приклад такого гомоморфізму.

**3. Публікації і апробація результатів роботи.** Всі основні положення дисертаційного дослідження повністю і своєчасно опубліковано у провідних вітчизняних та зарубіжних наукових журналах. Кількість публікацій (загальна – 25 статей, з них 9 – у закордонних наукових періодичних виданнях, які включені до міжнародних наукометричних баз) відповідає чинним вимогам законодавства.

Результати дисертації доповідались та обговорювались на двадцяти українських та міжнародних наукових конференціях, а також на семінарах у провідних математичних центрах України та окремих семінарах зарубіжжя.

**4. Зауваження.** Щодо змісту дисертаційної роботи та її оформлення є окремі зауваження:

- варто було б детальніше пояснити, чому клас нескінченновимірних ядерних просторів типу  $(F)$  або  $(DF)$  непорожній;
- в різних частинах дисертації використовується один символ “дашок” для позначення різних понять:  $\hat{\otimes}$  – для позначення симетричного тензорного добутку і, наприклад,  $\hat{S}_+$  – для позначення образу простору  $S_+$  при перетворенні Фур'є, що погіршує сприйняття матеріалу;
- стор. 279, 5 рядок знизу та стор. 298, 12 рядок знизу: повинно бути “задача Коші для нескінченновимірного рівняння теплопровідності” замість “нескінченновимірна задача Коші для рівняння теплопровідності”;
- дисертація в цілому оформлена добре, але іноді зустрічаються друкарські помилки.

Висловлені вище зауваження не є принциповими і не впливають на загальне позитивне враження від дисертації.

**5. Загальні висновки.** Слід відмітити, що результати кандидатської дисертації автора не включені у докторську дисертацію. Усі результати роботи супроводжуються строгими математичними доведеннями, що повністю наведені у дисертації, а їх достовірність не викликає сумнівів.

Автореферат адекватно відображає зміст та основні положення дисертаційного дослідження.



Усе вище сказане дозволяє зробити висновок про те, що за обсягом проведених наукових досліджень, їх науковим рівнем, актуальністю, науковою новизною отриманих результатів та кількістю публікацій дисертаційна робота Шарина Сергія Володимировича “Алгебри поліноміальних розподілів на нескінченновимірних просторах та їх застосування до числення операторів” задовольняє всі вимоги чинного “Порядку присудження наукових ступенів”, затвердженого постановою КМУ від 24.07.2013 р. №567, які стосуються докторських дисертацій, а її автор заслуговує на присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

Офіційний опонент

професор, доктор фізико-математичних наук,  
професор кафедри математичного  
і функціонального аналізу  
Львівського національного університету  
імені Івана Франка



О.Г. Сторож

23 жовтня 2017 р.

Підпис *Сторож О.Г.*  
**ПІДТВЕРДЖУЮ**  
**ВЧЕНИЙ СЕКРЕТАР**  
Львівського національного  
університету імені Івана Франка  
*Горішні*



*Надійшов до спеціалізованої  
вченої ради Канцелярія  
26.206.01 06.11.2017р.  
секретар ради / Артемченко Ж.І./*

