Відгук офіційного опонента

про дисертаційну роботу Шарина Сергія Володимировича

"Алгебри поліноміальних розподілів на нескінченновимірних просторах та їх застосування до числення операторів",

подану до захисту на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз

Дисертаційна робота Шарина С.В. присвячена дослідженню топологічної алгебри $\mathcal{P}(\mathcal{X}')$, яка за означенням складається з усіх неперервних поліномів на спряженому $\mathcal{X}'$ до локально опуклого ядерного простору $\mathcal{X}$ типу (F) або (DF). Іншим об'єктом дослідження є топологічно спряжений до $\mathcal{P}(\mathcal{X}')$ простір $\mathcal{P}'(\mathcal{X}')$, який можна інтерпретувати як поліноміальне розширення $\mathcal{X}'$, тому елементи цього простору названо поліноміальними розподілами.

У дисертації подано корисне представлення просторів $\mathcal{P}(\mathcal{X}')$ та $\mathcal{P}'(\mathcal{X}')$ в термінах симетричних тензорних добутків ядерних просторів $\mathcal{X}$ та $\mathcal{X}'$ типу (F) або (DF). Серед інших цікавих застосувань цей результат дозволяє оригінальним способом розширити частину природних об'єктів (наприклад, оператори диференціювання, функціональне числення тощо) з просторів $\mathcal{X}'$ та $\mathcal{X}$ на простори $\mathcal{P}'(\mathcal{X}')$ та $\mathcal{P}(\mathcal{X}')$ відповідно. При цьому суттєво використовується той факт, що структура алгебри на просторах $\mathcal{P}'(\mathcal{X}')$ та $\mathcal{P}(\mathcal{X}')$ існує незалежно від наявності такої структури на просторах $\mathcal{X}'$ та $\mathcal{X}$. Вказані алгебраїчна та тензорна структури дозволяють будувати функціональне числення для зліченних наборів генераторів сильно неперервних напівгруп та груп операторів.

У дисертації використано теорію локально опуклих тензорних добутків Ґротендіка у поєднанні з новою та сучасною технікою симетричних тензорних добутків, що в основному створена в контексті нескінченновимірної голоморфності та добре описана у монографіях Ш. Дініна (S. Dineen). Така методика дозволяє отримати цікаві і важливі поліноміальні розширення просторів швидко спадних функцій, узагальнених функцій повільного росту, ультрадиференційовних функцій Жевре та ультрарозподілів Рум'є. Автору дисертації вдалося переосмислити і значно узагальнити деякі основні ідеї теорії лінійних розподілів.

Викладене вище дозволяє стверджувати, що тематика дисертаційного дослідження Шарина С.В. є сучасною та може мати вагоме значення як для теорії нелінійних розширень класичних просторів розподілів, так і для побудови функціонального числення в класах функцій нескінченної кількості змінних.

Дисертація складається з анотацій українською та англійською мовами, вступу, основної частини, що складається з шести розділів, висновків та списку використаних джерел з 225 найменувань. Загальний обсяг роботи складає 328 сторінок. Це цілісне наукове дослідження, написане за результатами 25 статей, опублікованих у фахових виданнях з математики, серед яких 16 статей у наукових фахових виданнях України та 9 статей у закордонних наукових періодичних виданнях, які включені до міжнародних наукометричних баз; крім того результати дисертації були презентовані на 20 наукових конференціях.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертації, вказано на зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, сформульовані мета, об'єкт, предмет і завдання дослідження, визначені наукова новизна і практичне значення одержаних результатів, виокремлено особистий внесок здобувача та вказано установи та організації, де доповідалися та обговорювалися результати дисертації.

У першому розділі наведено огляд літератури, що висвітлює стан досліджень з даної тематики та вказує місце дисертаційної роботи у розв'язанні поставленої проблеми. Тут сформульовано попередні відомості та результати, які мають безпосереднє відношення до дисертації, наведено приклад числення операторів та подано короткий огляд дисертації.

У другому розділі показано, що для довільного ядерного (F) або (DF) простору $\mathcal{X}$ з точністю до топологічного ізоморфізму виконуються рівності $\mathcal{P}(\mathcal{X}') \simeq \bigoplus_{fin\, n\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{X}^{\widehat{\otimes}n}$ та $\mathcal{P}'(\mathcal{X}') \simeq \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{X}'^{\widehat{\otimes}n}$. Зауважимо, що простори у правих частинах останніх рівностей мають структуру, подібну до структури простору Фока. Такі представлення дозволяють розвинути новий підхід до дослідження топологічних алгебр $\mathcal{P}(\mathcal{X}')$ та $\mathcal{P}'(\mathcal{X}')$. Зокрема, у цьому розділі доведено, що введені простори основних $\mathcal{P}(\mathcal{X}')$ і узагальнених функцій $\mathcal{P}'(\mathcal{X}')$ є поповненням у відповідній топології множини поліномів скінченного типу, що пояснює термін "поліноміальний" у назві цих просторів. Тут введено ряд лінійних та неперервних операторів, що діють на просторах поліноміальних основних та узагальнених функцій, а також на відповідних просторах з тензорною структурою типу Фока та вивчено властивості цих операторів.

У третьому розділі замість довільного ядерного простору $\mathcal{X}$ розглянуто згорткову алгебру $\mathcal{S}'_+$ узагальнених функцій повільного росту, носії яких зосереджені в $\mathbb{R}_+$. Тут описано структуру та вивчено властивості простору $\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$ поліноміальних основних швидко спадних функцій та простору $\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+)$ поліноміальних розподілів повільного росту, побудовано узагальнення операторів диференціювання та зсуву для елементів з $\mathcal{P}(\mathcal{S}'_+)$ та $\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+)$ і доведено, що відповідні похідні генерують поліноміальні напівгрупи зсувів. Також поширено перетворення Фур'є на простори поліноміальних основних швидко спадних функцій і поліноміальних розподілів повільного росту та вивчено його властивості. Автором доведено важливу теорему типу Сілі про продовження довільної швидко спадної функції з додатної півосі $\mathbb{R}_+$ на весь простір $\mathbb{R}$ із збереженням властивості швидкого спадання. При цьому доведення існування вказаного продовження є конструктивним. У п'ятому розділі ця теорема узагальнена на d-вимірний випадок. Цей результат неявно використовується практично у всій дисертації. Окремо досліджено диференційовність за Ґато поліноміальних основних швидко спадних функцій і поліноміальних розподілів повільного росту та елементів відповідних просторів типу Фока, встановлено зв'язок похідної Ґато з квантовим білим шумом та диференціюваннями на цих просторах.

У четвертому розділі розглянуто випадок простору ультрадиференційовних в сенсі Жевре функцій з компактними в $\mathbb{R}^d_+$ носіями та відповідного простору ультрарозподілів Рум'є. У теоремі 4.3.1 та її наслідку описано поліноміальні напівгрупи зсувів та виписано в явному вигляді їхні генератори, які природно названо поліноміальними похідними. Відносно останніх показано, що вони задовольняють аналогічні до класичних дуальні співвідношення (теорема 4.3.2 та її наслідок). У теоремі 4.2.1 подано цікаве представлення згорткової алгебри ультрарозподілів Рум'є в термінах комутанта напівгрупи зсувів вздовж конуса $\mathbb{R}^d_+$, доведено векторнозначний варіант цього результату і досліджено більш загальний випадок довільної напівгрупи стиску. У теоремі 4.3.3 з точністю до алгебраїчного ізоморфізму подано представлення простору типу Фока у вигляді комутанта поліноміальної напівгрупи зсувів. Для класу ультрадиференційовних в $\mathbb{R}^d$ функцій та його поліноміального узагальнення поширено перетворення Фур'є-Лапласа та Лапласа та вивчено їхні властивості. У теоремі 4.4.1 описано образ основного простору при перетворенні Фур'є-Лапласа, що дозволило довести теореми типу Пелі-Вінера для поліноміальних основних ультрадиференційовних функцій та відповідних поліноміальних розподілів.

У п'ятому розділі побудовано функціональне числення типу Хілле-Філліпса в класі аналітичних в трубчастих областях функцій скінченної та нескінченної кількості змінних для генераторів сильно неперервних напівгруп стиску, що діють в банаховому просторі. В якості прикладу побудованого числення використано нескінченновимірну напівгрупу Ґаусса, яка генерується зліченним набором операторів другого диференціювання.

Важливою умовою у п'ятому розділі є комутативність наборів операторів, для яких будується числення. Слід відмітити, що у шостому розділі автору вдається уникнути цієї умови за допомогою методу другого квантування. Тут побудовано функціональне числення в класах цілих аналітичних функцій нескінченної кількості змінних. Для зліченного некомутуючого набору генераторів сильно неперервних груп операторів, які діють у гільбертовому просторі, побудовано числення операторів, що задане на симетричному просторі Фока. В якості застосування побудованого числення операторів доведено єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності, породженого нескінченновимірним лапласіаном Ґросса, знайдено цей розв'язок у явному вигляді та побудовано напівгрупу, що генерується лапласіаном Ґросса. В останньому параграфі шостого розділу розглянуто алгебру аналітичних функцій обмеженого типу на нескінченновимірному банаховому просторі. Для такої алгебри описано гомоморфізми в деяку комутативну банахову алгебру, наведено приклад гомоморфізму, що не може бути заданий функціональним численням.

До дисертації є наступні зауваження:

1) у дисертації зустрічаються описки, наприклад, на стор. 58, 2 рядок зверху повинно бути "ґрунтується" замість неправильного "ґрунується";

2) стор. 128, 2 рядок знизу: повинно бути $\mathbb{T}_s \in \mathscr{L}(\Gamma(\mathcal{S}_+))$ замість неправильного $\mathbb{T}_s \in \Gamma(\mathcal{S}_+)$;

3) на стор. 128 означено оператор $\mathbb{T}_s \in \mathscr{L}(\Gamma(\mathcal{S}_+))$, а на стор. 254 — оператор $T^{\otimes} \in \mathscr{L}(\Gamma(\mathcal{S}_+))$. Попри різні на перший погляд означення, це один і той же оператор. Ніде в дисертації це не сказано, що з моєї точки зору варто було б зробити;

4) у різних частинах дисертації зустрічаються різні позначення одних і тих же об'єктів, наприклад, напівгрупу, що генерується оператором A на стор. 175 позначено $G_t(A)$, а на стор. 213 і далі використано позначення e^{tA}; це погіршує сприйняття роботи.

Ці зауваження істотно не впливають на загальну позитивну оцінку дисертації. Дисертаційна робота Шарина С.В. виконана на високому науковому рівні. Тематика роботи є актуальною та цікавою. Отримані у дисертації результати є достовірними.

Підсумовуючи усе вище сказане, можна стверджувати, що дисертаційна робота "Алгебри поліноміальних розподілів на нескінченновимірних просторах та їх застосування до числення операторів" задовольняє всі вимоги чинного "Порядку присудження наукових ступенів", затвердженого постановою КМУ №567 від 24.07.2013 р., а її автор Шарин Сергій Володимирович заслуговує на присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

Надійшов до спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 06.11.2017 р.
секретар ради /Артемичenко Ж.Я./

Інститут математики Академії наук України
Канцелярія

Професор
кафедри функціонального аналізу
Інституту математики
Краківської політехніки
імені Т. Костюшка, Польща

д.ф.-м.н. Плічко А.М.

24 жовтня 2017 р.

Anatolii Plichko

Poświadczam podpis profesora Instytutu Matematyki Politechniki Krakowskiej Anatolija Plichki.

Dyrektor
Instytutu Matematyki
Jelonek
dr hab. Włodzimierz JELONEK

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
im. Tadeusza Kościuszki
Wydział Fizyki, Matematyki i Informatyki
INSTYTUT MATEMATYKI
31-155 Kraków, ul. Warszawska 24
tel. (12) 634-22-03, (12) 628-29-88
fax (12) 632-65-66