ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу Шарина Сергія Володимировича "Алгебри поліноміальних розподілів на нескінченновимірних просторах та їх застосування до числення операторів", що подана до захисту на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз

Дисертація Шарина С.В. належить до величезного ряду робіт, присвячених нескінченновимірному аналізу. Цей розділ математики активно розвивається вже впродовж принаймні останніх кількох десятків років, що пояснюється потребами квантової теорії поля, математичної фізики, теорії випадкових процесів та ін. Зрозуміло, що використання нових ідей, вдосконалення існуючих та створення нових методів у нескінченновимірному аналізі, розширення сфери його застосувань є важливою та актуальною задачею.

Суттєвою складовою нескінченновимірного аналізу є дослідження різноманітних просторів основних та узагальнених функцій нескінченної кількості змінних, а також різних операторів і операцій на цих просторах. При цьому використовуються різні методи та підходи. Зокрема, дуже вдалим виявився запропонований у 70-ті роки минулого сторіччя Ю. М. Березанським, Ю. Г. Кондратьєвим, В. Д. Кошманенком та Ю. С. Самойленком і незалежно від них у дещо іншому контексті Т. Хідою підхід, який ґрунтується на техніці трійок Гельфанда і теорії мір на нескінченновимірних просторах. Ця теорія і досі активно розвивається у роботах багатьох фахівців.

У дисертації запропоновано дещо інший і по суті новий підхід до дослідження згаданих просторів та операторів і операцій на них. Точніше, розглядається дуальна пара $\langle P'(X'), P(X') \rangle$, де X' — простір, спряжений до певного локально опуклого ядерного простору X, $P(X')$ — простір неперервних поліномів над X' (зараз він є простором основних функцій нескінченної кількості змінних), $P'(X')$ — спряжений до $P(X')$ простір поліноміальних узагальнених функцій. Основна ідея полягає у побудові ізоморфного представлення $P'(X')$ та $P(X')$ у вигляді просторів, подібних до простору Фока, та проведенні низки досліджень на останніх просторах. Для її реалізації автор використовує теорію двоїстості локально опуклих просторів, техніку тензорних добутків Ґротендіка та теорію симетричних тензорних добутків. Також в дисертації використано методи теорії поліноміальних та полілінійних відображень, що розвиваються в роботах Р. Арона, Ш. Дайніна, П. Ґаліндо, О. В. Лопушанського, А. В. Загороднюка, Т. В. Василишина та інших.

Спираючись на тензорну структуру поліноміальних алгебр $P'(X')$ та $P(X')$, в якості застосування у дисертації розроблено метод побудови функціонального числення типу Хілле-Філліпса для зліченних наборів генераторів сильно неперервних напівгруп та груп операторів. Таке функціональне числення має багато корисних застосувань (наприклад, в гідрології для моделювання руху приповерхневих вод).

Багато задач (наприклад, в теорії систем контролю, в теорії суперпровідності тощо) зводяться до рівнянь з нескінченновимірними узагальненнями лапласіана. Численні автори досліджували і продовжують систематично досліджувати нескінченновимірні лапласіани, у цьому контексті можна згадати роботи Х. Куо, Л. Аккарді, О. Г. Смолянова, А. Бархоумі, Х. Оуердіана та інших. У шостому розділі дисертації досліджено задачу Коші для нескінченновимірного рівняння теплопровідності, породженого лапласіаном Ґросса, у просторі поліноміальних ультрадиференційовних функцій.

З огляду на все вище сказане, актуальність тематики дисертаційного дослідження Шарина С. В. не викликає жодних сумнівів.

Дисертація (загальний обсяг — 328 сторінок) складається з анотації (українською та англійською мовами), вступу, шести розділів, висновків та списку літератури, що містить 225 найменувань.

Перший розділ присвячений огляду відомих результатів за тематикою дослідження, введенню потрібної термінології, формулюванню допоміжних тверджень, та короткому викладу основних результатів, одержаних у дисертаційній роботі.

У другому розділі розвинуто новий підхід до дослідження вище згаданої дуальної пари $\langle\, P'(X'),\, P(X')\,\rangle$, яку можна розуміти як нелінійне розширення дуальної пари $\langle\, X',\, X\,\rangle$. Основним результатом цього розділу можна вважати структурну теорему 2.2.3 про топологічні ізоморфізми $P'(X') \simeq \Gamma(X')$ та $P(X') \simeq \Gamma(X)$, де $\Gamma(X')$ та $\Gamma(X)$ — простори із тензорною структурою типу Фока. Саме за допомогою такої тензорної структури автору вдалося перенести ряд об'єктів (оператори диференціювання, зсуву та ін.) з лінійних просторів X' та X на відповідні поліноміальні простори $P'(X')$ та $P(X')$.

Нехай S'_+ — згорткова алгебра узагальнених функцій повільного росту, носії яких зосереджені в додатній півосі $[0, +\infty)$. Третій розділ присвячений опису структури і властивостей простору $P(S'_+)$ поліноміальних основних швидко спадних функцій та спряженого простору $P'(S'_+)$ поліноміальних узагальнених функцій повільного росту, а також дослідженню низки операторів і операцій на цих просторах. Зокрема, за допомогою описаної тензорної структури $P(S'_+)$ та $P'(S'_+)$ розроблено метод перенесення операторів диференціювання і зсуву, а також перетворення Фур'є, з S'_+ та передспряженого до нього простору S_+ на поліноміальні простори $P'(S'_+)$ та $P(S'_+)$. При цьому встановлено ряд очікуваних властивостей перенесених операторів і операцій. Наприклад, показано, що поліноміальна похідна генерує поліноміальну напівгрупу зсувів, а поліноміальне узагальнення перетворення Фур'є є гомоморфізмом відповідних алгебр. Слід зауважити, що доведення згаданих властивостей не є тривіальними. Цікавим є результат теореми 3.3.4, який не має аналогу в теорії лінійних узагальнених функцій. А саме, поліноміальне перетворення Фур'є зберігає так званий добуток Віка. Окремим завданням третього розділу, на перший погляд безпосередньо не пов'язаним з попереднім матеріалом, виглядає дослідження диференційовності за Ґато елементів поліноміальних просторів $P'(S'_+)$ і $P(S'_+)$ та відповідних просторів типу Фока $\Gamma(S'_+)$ і $\Gamma(S_+)$. Тут встановлено зв'язок похідної Ґато з операторами знищення і народження на просторах типу Фока. Заслуговує на увагу результат теореми 3.4.5, де показано зв'язок похідної Ґато із поліноміальними похідними, уведеними та дослідженими у попередніх параграфах.

Нехай G_+ — простір Жевре ультрадиференційовних функцій d змінних з компактними носіями в конусі $\mathbb{R}^d_+$, а G'_+ — спряжений простір ультрарозподілів Рум'є. У четвертому розділі доведено ряд структурних теорем для операторів, що діють в цих просторах і комутують з багатопараметричними напівгрупами. Наприклад, варто звернути увагу на теорему 4.2.1 про представлення згорткової алгебри G'_+ у вигляді комутанта напівгрупи зсувів на просторі G_+. Доведено також узагальнення цього твердження на випадок довільної напівгрупи стиску. Ці результати узагальнюють відомі теореми Шварца та Хермандера про структуру операторів, що комутують із зсувами. У другій частині розділу розглядаються, зокрема, дуальні пари $\langle\, P'(G'_+),\, P(G'_+)\,\rangle$ та $\langle\, \Gamma(G'_+),\, \Gamma(G_+)\,\rangle$. Тут доведено низку цікавих результатів, у тому числі теорему про представлення простору типу Фока у вигляді комутанта поліноміальної напівгрупи зсувів.

П'ятий та шостий розділи дисертації присвячені застосуванню отриманих у попередніх розділах результатів до побудови функціонального числення для скінченних та зліченних наборів генераторів сильно неперервних напівгруп та груп операторів, що діють в деякому нескінченновимірному банаховому просторі.

У п'ятому розділі розбудовано функціональне числення типу Хілле-Філліпса, клас символів якого складається з аналітичних в деяких трубчастих областях функцій скінченної чи нескінченної кількості комплексних змінних. Спочатку описано підхід, що узагальнює класичне числення Хілле-Філліпса на випадок згаданої вище згорткової алгебри S'_+. Тут цікавими є результати теорем 5.1.4 та 5.1.5, де, крім іншого, встановлено диференціальні властивості побудованого числення. Далі побудовано числення для генераторів багатопараметричних аналітичних напівгруп операторів. Алгебра символів такого числення складається з аналітичних функцій, які є перетвореннями Лапласа узагальнених функцій з S'_+. Насамкінець побудовано нескінченновимірну версію розглянутих вище варіантів функціонального числення.

В останньому розділі побудовано функціональне числення в класі Фур'є-образів поліноміальних ультрарозподілів для зліченного набору генераторів сильно неперервних груп операторів, заданих на гільбертовому просторі H. Тут використано принципово інший підхід у порівнянні з тим, що застосований у п'ятому розділі. А саме, за деяким зліченним набором, взагалі кажучи, не комутуючих операторів, що діють в H, будується зліченний набір комутуючих операторів, що діють у симетричному просторі Фока $\mathfrak{F}(H)$. Результатом побудованого зараз числення, на відміну від відповідного результату розділу 5, є оператори, що задані на $\mathfrak{F}(H)$, а не на H, де діють оператори вихідного зліченного набору. У другому параграфі наведено застосування побудованого числення операторів до розв'язання задачі Коші для рівняння теплопровідності, породженого нескінченновимірним узагальненням лапласіана Ґросса. Тут уведено оператор зсуву та згортку на просторі поліноміальних основних ультрадиференційовних функцій, і доведено, що композиція двох згорткових операторів знову є згортковим оператором. Це дозволяє ввести згортку на просторі поліноміальних ультрарозподілів. У теоремі 6.2.1 доведено існування та єдиність розв'язку згорткової задачі Коші. У теоремі 6.2.2 встановлено, що лапласіан Ґросса діє як згортковий оператор, що дозволяє звести узагальнене рівняння теплопровідності до згорткового рівняння і отримати розв'язок у вигляді явної формули. Крім того, побудовано однопараметричну напівгрупу на просторі поліноміальних основних ультрадиференційовних функцій, генератором якої є лапласіан Ґросса, та записано розв'язок тієї ж задачі Коші методами теорії напівгруп. У третьому параграфі доведено аналог теореми Гільберта про нулі для поліномів від елементів банахової алгебри; описано гомоморфізми з алгебри аналітичних функцій обмеженого типу на нескінченновимірному банаховому просторі в комутативну банахову алгебру, і встановлено, що не всі такі гомоморфізми задаються функціональним численням (наведено відповідний контрприклад).

На жаль, дисертація не позбавлена і певних недоліків. А саме:

- У дисертації використано терміни "узагальнена функція" та "розподіл" для позначення одних і тих самих об'єктів. Обидва ці терміни прийнятні; але, на мою думку, у межах однієї роботи природніше обрати лише один з них.

- Автор час від часу використовує формально некоректні вирази типу "функція $f(t)$" замість коректних "функція f" чи "функція $f(\cdot)$".

- Уводячи поняття "бочковий простір", автор використовує термін "окіл нуля" для завідомо замкненої множини. Краще було б сказати "замикання околу нуля".

- Дуже рідко, але зустрічаються незрозумілі висловлювання чи позначення. Наприклад, на стор. 43 (відповідно 44) йдеться про те, що проективна (відповідно індуктивна) топологія є комбінацією в певному сенсі двох інших топологій — незрозуміло, що це означає. Інший приклад — важко зрозуміти, що таке $\mathfrak{A}$ на сторінках 82 та 261.

- На стор. 81 уводиться сім'я операторів, на яку накладається низка нетривіальних умов. Отже, виникає питання існування такої сім'ї, яке знімається лише у п'ятому розділі.

- Підпункт 4.1.2 краще було б вилучити — наведений тут матеріал є “кроком убік” від досліджень, які описані у дисертації. Замість цього підпункту достатньо було б навести коротке зауваження.
- Кінцівка доведення теореми 4.3.1 (стор. 187) сформульована неакуратно.
- Пояснення змісту §5.1 невдале: краще було б спочатку ввести усі необхідні позначення, і лише після цього писати формули для функціонального числення.
- Твердження про те, що лема 5.2.1 доведена в §5.1 (стор. 237), строго кажучи, є неправдою. Насправді у §5.1 доведене інше твердження, доведення якого аналогічне (але не тотожне) доведенню леми 5.2.1.
- Має місце незначна кількість друкарських помилок.

Втім, всі ці недоліки не є суттєвими і не впливають на загальну позитивну оцінку роботи.

Дисертація носить теоретичний характер. Вона виконана на високому науковому рівні. Всі наведені в ній результати, що виносяться на захист, є новими. Теореми і твердження чітко сформульовані, до них наведені повні доведення, що забезпечує достовірність основних положень та висновків дисертаційного дослідження. Дисертація є завершеною науковою працею. Результати повністю і своєчасно опубліковані у 25 статтях, які надруковані у наукових фахових виданнях з математики. Серед цих статей 16 опубліковані у виданнях України та 9 — у закордонних періодичних математичних виданнях, які включені до міжнародних наукометричних баз. Результати дисертації доповідались на двадцяти наукових конференціях та на багатьох семінарах як в Україні, так і за кордоном. Автореферат правильно і повністю відображає зміст дисертації.

Вважаю, що дисертаційна робота “Алгебри поліноміальних розподілів на нескінченновимірних просторах та їх застосування до числення операторів” за актуальністю і одержаними науковими результатами повністю відповідає всім вимогам чинного “Порядку присудження наукових ступенів” (Постанова Кабінету Міністрів України № 567 від 24.07.2013) щодо докторських дисертацій, а її автор, Шарин Сергій Володимирович, заслуговує на присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз.

доктор фіз.-мат. наук, ст. науковий співробітник
провідний науковий співробітник
відділу функціонального аналізу
Інституту математики НАН України Качановський М.О.

13 листопада 2017 р.

Надійшов до спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 14.11.2017р.
секретар ради [signature] /Артеменко Ж.Я./

Інститут математики Академії наук України
Канцелярія

Національна академія наук України
Інститут математики
Підпис
Ідентифікаційний код 05417072
м. Київ

ЗАСВІДЧУЮ
Зав. канцелярією [signature]
Інституту математики АН України
«13» листопада