НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Веселовська Ганна Миколаївна

УДК 517.5

Апроксимації типу Паде для спеціальних функцій кількох змінних

01.01.01 — математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2017

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий керівник

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Голуб Анатолій Петрович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник
відділу обчислювальної математики.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
Боднар Дмитро Ількович,
Тернопільський національний економічний університет,
професор кафедри економічної кібернетики та інформатики;

кандидат фізико-математичних наук
Мусієнко Андрій Петрович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
викладач кафедри інтелектуальних та інформаційних систем.

Захист відбудеться «28» листопада 2017 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий «26» жовтня 2017 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради **Романюк А. С.**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню раціональних апроксимант типу Паде функцій кількох змінних.

Актуальність теми. Теорія апроксимацій Паде являє собою актуальну галузь теорії наближень. Великий інтерес до таких наближень зумовлений їх різноманітними практичними застосуваннями. Відомо, що апроксимації Паде знаходять своє використання, зокрема, у таких галузях сучасних досліджень, як аналіз сигналів, розріджені наближення, нелінійна теорія оболонок, задачі розсіювання та ін.

Історично апроксимації Паде виникли ще за часів Бернуллі, а свою назву вони отримали від прізвища французького математика Анрі Паде, який наприкінці XIX — на початку XX сторіччя виконав ряд досліджень, присвячених цим апроксимаціям. Надалі поштовхом до розвитку апроксимацій типу Паде, зокрема, багатовимірних узагальнень апроксимацій Паде, стали публікації К. Брезінські, С. Кіда, П. Саблоньєра, Ж. Абуї та А. Кейт 1970-1980 рр. У цих роботах було описано різні підходи до перенесення поняття апроксимацій Паде із одновимірного на d-вимірний випадок.

Значний внесок у розвиток теорії багатовимірних апроксимацій типу Паде було внесено такими вченими, як Дж. А. Бейкер, П. Грейвс-Морріс, Ж. Чізхольм, Р. Х'юз-Джонс. Серед сучасників у даній галузі досліджень працюють такі науковці, як А. Кейт та К. Брезінські, П. Б. Борвейн, Н. Дж. Дарас, Й. Карлоссон, Г. Лопес Лагомасіно, Д. С. Любінські, К. Люттеродт, А. Сіді, Ц. Тан, П. Чжоу, Г. Воллін та ін.

Серед українських дослідників питаннями апроксимацій Паде займалися Дзядик В. К. та його учні; у аспекті гіллястих ланцюгових дробів теорією раціональних наближень займалися Скоробогатько В. Я., Бондарчук П. І., Боднар Д. І., Кучмінська Х. Й., Сявавко М. С., Демків І. І. та їхні учні. У Росії — Гончар А. О., Нікішин Є. М., Рахманов Є. А., Суєтін С. П., Буслаєв В. І., Аптєкарєв О. І., Сорокін В. М., а у Білорусії – Русак В. М., Пекарський О. А., Старовойтов О. П., Ровба Є. О.

Загалом означення та, відповідно, методи побудови апроксимацій типу Паде для функцій кількох змінних розділяються на три категорії. Перша категорія включає у себе ті, які грунтуються на понятті інтерполяційної множини, друга — використовує різні представлення функцій кількох змінних за допомогою неперервних дробів та остання являє собою узагальнення епсилон-алгоритму на багатовимірний випадок.

Для дослідження та побудови апроксимацій типу Паде одним із методів, що опирається на визначення множини співпадання, є метод багатовимірних узагальнених моментних зображень, запропонований А. П. Голубом та Л. О. Чернецькою у 2013 році. Цей метод є перенесенням на багатовимірний випадок методу узагальнених моментних зображень В. К. Дзядика 1981 р. У одновимірному випадку за допомогою такого методу вдалося дати відповіді на питання, що стосуються побудови апроксимант Паде ряду спеціальних функцій, що лежать поза межами класу марковських функцій. У цьому ж випадку В. К. Дзядиком та А. П. Голубом було встановлено необхідні та достатні умови існування узагальнених моментних зображень довільної числової послідовності, що, в свою чергу, дозволило серед усіх функцій виокремити ті, для яких можна будувати апроксиманти Паде за допомогою цього методу. Поширення даного методу на простори вимірності $d \geq 2$ дало можливість будувати апроксимації типу Паде для так званих псевдобагатовимірних функцій, гіпергеометричних рядів Аппеля, Гумберта, Лаурічеллі та деяких інших широких класів функцій кількох змінних. У окремих випадках за допомогою даного методу доведено рівномірну збіжність побудованих апроксимант та встановлено асимптотичні формули для їх чисельників і знаменників.

У зв'язку із цим логічно виникають питання поширення методу багатовимірних узагальнених моментних зображень на нові класи спеціальних функцій, а також важливим є встановлення необхідних та достатніх умов існування таких зображень для довільної багатовимірної числової послідовності.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано у відділі обчислювальної математики Інституту математики НАН України у рамках тем «Експоненціально збіжні методи для розв'язування спектральних задач, задач для квазілінійних рівнянь з необмеженими операторними коефіцієнтами та раціональні апроксимації функцій багатьох змінних» (номер держреєстрації 0116U003063) та «Високоточні методи розв'язування задач для операторних рівнянь у некласичній постановці» (номер держреєстрації 0111U00020).

Мета і завдання дослідження.

Метою роботи є поширити метод багатовимірних узагальнених моментних зображень на нові класи функцій та встановити необхідні та достатні умови існування багатовимірних узагальнених моментних зображень.

Об'єктом дослідження є узагальнені моментні зображення багатовимірних числових послідовностей та багатовимірні апроксиманти типу Паде аналітичних функцій кількох змінних.

Предметом дослідження є властивості багатовимірних узагальнених моментних зображень та їх застосування для побудови та дослідження багатовимірних апроксимант типу Паде функцій кількох змінних.

Методи дослідження. При розв'язанні поставлених задач у дисертаційній роботі використовувалися методи класичного математичного аналізу, теорії функцій кількох комплексних змінних та теорії спеціальних функцій, теорії лінійних операторів, теорії ортогональних многочленів та біортогональних систем функцій.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, що визначають наукову новизну дисертації та виносяться на захист, такі:

1. Встановлено необхідні та достатні умови існування d-вимірних узагальнених моментних зображень ($d \geq 2$) у термінах умов на послідовності та у термінах умов на твірні функції.

2. Побудовано та досліджено двовимірні апроксиманти типу Паде для нових класів спеціальних функцій двох змінних, зокрема, для деяких гіпергеометричних функцій другого, третього та четвертого порядків.

3. Доведено збіжність та встановлено асимптотичні рівності для чисельників та знаменників апроксимант типу Паде деяких двовимірних вироджених гіпергеометричних рядів.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Методи та результати дисертації можуть використовуватися у дослідженнях з теорії наближення функцій, а також при розв'язуванні прикладних задач теорії чисел, обчислювальної математики та математичної фізики.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямку дослідження, а також постановка задач належить науковому керівнику — доктору фіз.-мат. наук А. П. Голубу. В опублікованих спільно з А. П. Голубом п'яти наукових працях [1, 2, 3, 5, 6] науковому керівнику належить постановка задач та аналіз результатів. Результати дисертаційної роботи отримані здобувачем самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на:

- спільному засіданні семінару "Математичні проблеми механіки та обчислювальна математика", семінару відділу теорії функцій та Київського семінару з функціонального аналізу (Інститут математики НАН України; керівники семінару: член-кореспондент НАНУ, доктор фіз.-мат. наук, професор А. Н. Кочубей; доктор фіз.-мат. наук, професор А. С. Романюк);

- семінарах відділу теорії функцій (Інститут математики НАН України; керівник семінару — доктор фіз.-мат. наук, професор А. С. Романюк);

- семінарі “Сучасний аналіз” (механіко-математичний факультет Київського національного університету імені Тараса Шевченка; керівник семінару — доктор фіз.-мат. наук, професор І. О. Шевчук);

- Четвертій Всеукраїнській науковій конференції молодих вчених з математики та фізики, Київ, 23–25 квітня 2015 року;

- Міжнародній конференції молодих математиків, Київ, 3–6 червня 2015 року;

- 10-й Міжнародній математичній конференції ім. В. Я. Скоробогатька, Дрогобич; 25–28 серпня 2015 року;

- Третій конференції “Mathematics for Life Sciences”, Рівне, 15–19 вересня 2015 року;

- Міжнародній конференції “Теорія наближень та її застосування”, присвяченій 75-річчю професора В. П. Моторного, Дніпро, 8–11 жовтня 2015 року;

- Конференції молодих вчених “Підстригачівські читання – 2016”, Львів, 25–27 травня 2016 року;

- Конференції “Mathematical Optics, Image Modelling and Algorithms”, Ганновер (Німеччина), 20–23 червня 2016 року;

- Третій конференції “Approximation Methods for Molecular Modelling and Diagnosis Tools”, Київ, 26–30 січня 2017 року;

- The 8th Gene Golub SIAM Summer School “Data Sparse Approximations and Algorithms”, Берлін (Німеччина), 29 травня – 9 червня 2017 року.

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано у дванадцяти наукових працях, з яких більшість [1–6] є статтями у наукових виданнях, внесених до переліку фахових видань з фізико-математичних наук, а [7–12] є матеріалами доповідей наукових конференцій. Стаття [6] опублікована у журналі, який входить до міжнародних наукометричних баз даних (Web of Science, Scopus).

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі змісту, переліку умовних позначень, вступу, трьох розділів, висновків, а також списку використаних джерел, що містить 131 найменування. Дисертація містить 2 таблиці та 12 рисунків.

Повний обсяг дисертації становить 149 сторінок, з них список використаних джерел займає 15 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

Перший розділ присвячено огляду літератури за темою дисертації, наведено основні поняття та означення.

Означення 1.7. Узагальненим моментним зображенням d-вимірної числової послідовності $\{s_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d}$ на добутку лінійних просторів $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ називається сукупність рівностей

$$s_{\mathbf{k}+\mathbf{j}} = \langle x_{\mathbf{k}}, y_{\mathbf{j}}\rangle, \quad \mathbf{k},\mathbf{j}\in\mathbb{Z}_+^d, \tag{1}$$

де $\{x_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d}\subset\mathcal{X}$, $\{y_{\mathbf{j}}\}_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}_+^d}\subset\mathcal{Y}$, а $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — білінійна форма на $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$.

Другий розділ присвячено проблемі розв'язності задачі про багатовимірні узагальнені моментні зображення. Встановлено необхідні та достатні умови існування узагальнених моментних зображень вигляду (1), а саме, доведено твердження.

Теорема 2.4. *Нехай $\mathcal{H}$ — нескінченновимірний сепарабельний гільбертів простір та $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ — ортонормований базис у ньому. Тоді, для того, щоб послідовність $\{s_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d}$ мала узагальнене моментне зображення вигляду*

$$s_{\mathbf{k}+\mathbf{j}} = \langle x_{\mathbf{k}}, y_{\mathbf{j}}\rangle, \quad \mathbf{k},\mathbf{j}\in\mathbb{Z}_+^d,$$

де

$$\langle x,y\rangle = \sum_{m=0}^{\infty}(x,e_m)(y,e_m),$$

а елементи $\{x_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d}$ та $\{y_{\mathbf{j}}\}_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}_+^d}$ мають вигляд

$$x_{\mathbf{k}} = \sum_{p=0}^{c^d(\mathbf{k})}\alpha_p^{(\mathbf{k})}e_p, \quad \alpha_{c^d(\mathbf{k})}^{(\mathbf{k})}\neq 0,\ \mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d, \tag{2}$$

$$y_{\mathbf{j}} = \sum_{p=0}^{c^d(\mathbf{j})} \beta_p^{(\mathbf{j})} e_p, \quad \beta_{c^d(\mathbf{j})}^{(\mathbf{j})} \neq 0,\, \mathbf{j} \in \mathbb{Z}_+^d, \tag{3}$$

необхідно і достатньо, щоб всі визначники $\tilde{H}_p = \det \tilde{S}_N$, $N \in \mathbb{Z}_+$ *матриць*

$$\tilde{S}_N = \left\| s_{l_1(k)+l_1(j), l_2(k)+l_2(j), \ldots, l_d(k)+l_d(j)} \right\|_{k,j=0}^{N}, .$$

були відмінними від нуля $\forall N \in \mathbb{Z}_+$, *де* $c^d \colon \mathbb{Z}_+^d \to \mathbb{Z}_+$ *— нумеруюча функція Кантора, а* $l_1, l_2, ..., l_d \colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ *— її обернені функції, тобто* $c^d\left(l_1(p), l_2(p), ..., l_d(p)\right) = p$.

При цьому будуть виконуватися співвідношення

$$\alpha_{c^d(\mathbf{k})}^{(\mathbf{k})} \beta_{c^d(\mathbf{k})}^{(\mathbf{k})} = \frac{\tilde{H}_{c^d(\mathbf{k})}}{\tilde{H}_{c^d(\mathbf{k})-1}}, \quad \tilde{H}_{-1} := 1, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d, \tag{4}$$

і якщо зафіксувати послідовності ненульових чисел $\{\alpha_p^{(\mathbf{l}(p))}\}_{p\in\mathbb{Z}_+}$ *та* $\{\beta_p^{(\mathbf{l}(p))}\}_{p\in\mathbb{Z}_+}$, *де* $\mathbf{l}(p) = \big(l_1(p), l_2(p), ..., l_d(p)\big)$, *що задовольняють* (4), *то решта коефіцієнтів в* (2)-(3) *будуть єдиним чином визначатися за формулами*

$$\alpha_p^{(\mathbf{k})} = \alpha_{c^d(\mathbf{k})}^{(\mathbf{k})} \frac{\tilde{S}_{c^d(\mathbf{k})} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & p-1 & c^d(\mathbf{k}) \\ 0 & 1 & \ldots & p-1 & p \end{pmatrix}}{\tilde{H}_{c^d(\mathbf{k})}},$$

$$p = \overline{0, c^d(\mathbf{k})}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d,$$

$$\beta_p^{(\mathbf{j})} = \beta_{c^d(\mathbf{j})}^{(\mathbf{j})} \frac{\tilde{S}_{c^d(\mathbf{j})} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & p-1 & p \\ 0 & 1 & \ldots & p-1 & c^d(\mathbf{j}) \end{pmatrix}}{\tilde{H}_{c^d(\mathbf{j})}},$$

$$p = \overline{0, c^d(\mathbf{j})}, \quad \mathbf{j} \in \mathbb{Z}_+^d.$$

Як відомо, якщо коефіцієнти формального степеневого ряду

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d} s_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}, \tag{5}$$

де $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_d) \in \mathbb{C}^d, \mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}_+^d$, $\mathbf{z}^{\mathbf{k}} = z_1^{k_1} z_2^{k_2} ... z_d^{k_d}$, можуть бути представлені у вигляді

$$s_{\mathbf{k}} = \langle A_1^{k_1} A_2^{k_2} ... A_d^{k_d} x_{\mathbf{0}}, y_{\mathbf{0}} \rangle, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d, \tag{6}$$

де $A_j : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $j = \overline{1, d}$ — деякі лінійні комутуючі між собою обмежені оператори, то ряд буде збіжним в околі початку координат до аналітичної функції f від d змінних, яка може бути записана у вигляді

$$f(\mathbf{z}) = \langle \mathcal{R}_{z_1}(A_1) \mathcal{R}_{z_2}(A_2) ... \mathcal{R}_{z_d}(A_d) x_0, y_0 \rangle, \tag{7}$$

де $\mathcal{R}_{z_j}(A_j) = (I - z_j A_j)^{-1}$ — резольвентні функції операторів $A_j, j = \overline{1, d}$.

Оскільки саме представлення багатовимірних узагальнених моментних зображень у операторному вигляді (6) зручне для практичного використання, то цікавим виявилося питання про те, за яких же умов функція f від d змінних може бути записана у формі (7).

Теорема 2.6. *Для довільної функції f, аналітичної в полікрузі $K_{\mathbf{R}} = K_{R_1} \times K_{R_2} \times ... \times K_{R_d}$, $0 < R_j < \infty$, $j = \overline{1, d}$, і довільного нескінченновимірного сепарабельного гільбертового простору $\mathcal{H}$ існують елементи $x_0, y_0 \in \mathcal{H}$ та лінійні обмежені оператори $A_j \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, що комутують між собою, норми яких $\|A_j\| < \frac{1}{R_j}$, $j = \overline{1, d}$, і такі, що $\forall \mathbf{z} \in K_{\mathbf{R}}$*

$$f(\mathbf{z}) = (\mathcal{R}_{z_1}(A_1) \mathcal{R}_{z_2}(A_2) ... \mathcal{R}_{z_d}(A_d) x_0, y_0) \,. \tag{8}$$

Теорема 2.7. *Для довільної цілої функції d змінних f та будь-якого нескінченновимірного сепарабельного гільбертового простору $\mathcal{H}$ існують елементи $x_0, y_0 \in \mathcal{H}$ та лінійні обмежені комутуючі між собою оператори $A_j \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $j = \overline{1, d}$ з нульовими спектральними радіусами, такі, що*

$$f(\mathbf{z}) = (\mathcal{R}_{z_1}(A_1) \mathcal{R}_{z_2}(A_2) ... \mathcal{R}_{z_d}(A_d) x_0, y_0) \,.$$

При цьому, якщо порядки зростання функції f за змінними z_j, $j = \overline{1, d}$, дорівнюють відповідно $\rho_j > 0$, $j = \overline{1, d}$, то оператори A_j, $j = \overline{1, d}$, можуть бути обраними так, що $\forall p \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[p]{\|A_j^p\|} \le \frac{C_j}{p^{\frac{1}{\rho_j}}}, \quad j = \overline{1, d},$$

де $C_j = const, j = \overline{1, d}$.

Третій розділ присвячено побудові апроксимант типу Паде деяких функцій двох змінних, коефіцієнти степеневих розвинень яких мають двовимірні узагальнені моментні зображення в операторному вигляді $s_{k,m} = \langle A_1^k A_2^m x_{0,0}, y_{0,0}\rangle$, $k, m \in \mathbb{Z}_+$, при деякому спеціальному виборі операторів A_1 та A_2.

Підрозділ 3.1 носить допоміжний характер. У ньому наводяться необхідні позначення та ряд тверджень, які використовуються для отримання результатів наступних підрозділів.

У підрозділі 3.2 розглядається перший варіант вибору операторів.

Нехай $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = L_2\left([0,1], t^\nu dt\right), \nu > -1,$ — простори функцій, сумовних з квадратом за мірою $t^\nu dt$ на $[0,1]$.

Задамо на декартовому добутку $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ білінійну форму $\langle x, y\rangle = \int_0^1 x(t)y(t)t^\nu dt$, а початкові функції $x_{0,0}$ та $y_{0,0}$ покладемо тотожно рівними одиниці:

$$x_{0,0}(t) = y_{0,0}(t) \equiv 1.$$

Визначимо в просторі $\mathcal{X}$ оператор A_1 як оператор множення на незалежну змінну $(A_1\varphi)(t) = t\varphi(t)$, а оператор A_2 визначимо наступним чином — $(A_2\varphi)(t) = t^\sigma\varphi(t)$, де σ – ірраціональне число, $\sigma > 0$.

Тоді елементи послідовностей $\{x_{k,m}\}_{(k,m)\in\mathbb{Z}_+^2}$ та $\{y_{j,n}\}_{(j,n)\in\mathbb{Z}_+^2}$ матимуть вигляд $x_{k,m}(t) = y_{k,m}(t) = t^{k+m\sigma}$.

Враховуючи (6), члени двовимірної послідовності записуються наступним чином

$$s_{k,m} = \int_0^1 t^{k+m\sigma+\nu} dt = \frac{1}{k + m\sigma + \nu + 1},$$

і отже,

$$f(z, w) = \sum_{k,m=0}^{\infty} \frac{z^k w^m}{k + m\sigma + \nu + 1}. \tag{9}$$

Теорема 3.4. *Для функції* (9) *при довільних* $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ *раціональна функція вигляду*

$$[\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f(z, w) = \frac{P_{\mathcal{N}}(z, w)}{Q_{\mathcal{D}}(z, w)},$$

де

$$Q_{\mathcal{D}}(z,w)=\sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2}\frac{(-1)^{N_1-j+(N_2-n)(N_1+1)+1}}{\prod_{m=1}^{\left[\frac{l}{N_1+1}\right]}\left((m\sigma-j)_{N_1+1}\right)^2\left((N_1-j)!\right)^2}\times$$
$$\times\frac{((N_1-j+(N_2-n)\sigma+\nu+1)_{N_1+1})}{2N_1-j+(N_2-n)\sigma+N_1+\nu+1}z^jw^n,$$

і

$$P_{\mathcal{N}}(z,w)=$$
$$=\sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{N_2-1}z^kw^m\sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^{N_1-j+(N_2-n)(N_1+1)+1}}{\prod_{m=1}^{\left[\frac{l}{N_1+1}\right]}\left((m\sigma-j)_{N_1+1}\right)^2\left((N_1-j)!\right)^2}$$
$$\times\frac{((N_1-j+(N_2-n)\sigma+\nu+1)_{N_1+1})}{2N_1-j+(N_2-n)\sigma+\nu+1}s_{k-j,m-n}+$$
$$+z^{N_1}\sum_{k=0}^{N_1}\sum_{m=0}^{N_2-1}z^kw^m\sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^{j+(N_2-n)(N_1+1)+1}}{\prod_{m=1}^{\left[\frac{l}{N_1+1}\right]}\left((m\sigma-N_1+j)_{N_1+1}\right)^2(j!)^2}\times$$
$$\times\frac{((j+(N_2-n)\sigma+\nu+1)_{N_1+1})}{j+(N_2-n)\sigma+\nu+N_1+1}s_{k+j,m-n}+$$
$$+w^{N_2}\sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{N_2}z^kw^m\sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^{N_1-j+n(N_1+1)+1}}{\prod_{m=1}^{\left[\frac{l}{N_1+1}\right]}\left((m\sigma-j)_{N_1+1}\right)^2\left((N_1-j)!\right)^2}\times$$
$$\times\frac{((N_1-j+n\sigma+\nu+1)_{N_1+1})}{2N_1-j+n\sigma+\nu+1}s_{k-j,m+n},$$

матиме розклад у степеневий ряд, коефіцієнти якого співпадатимуть з коефіцієнтами ряду (9) *для всіх* $(j,n)\in\mathcal{E}=[0,2N_1]\times[0,2N_2]\backslash\{(2N_1,2N_2)\}$.

У підрозділі 3.3 для довільних банахових просторів $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$ побудовано апроксиманти типу Паде рядів, степеневі коефіцієнти яких мають узагальнені моментні зображення при другому варіанті вибору операторів.

Нехай $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$ — деякі нормовані простори, та визначено білінійну форму $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на декартовому добутку $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$.

Нехай у просторі $\mathcal{X}$ задано обмежений лінійний оператор $A\colon\mathcal{X}\to\mathcal{X}$, а у просторі $\mathcal{Y}$ — лінійний оператор $A^*\colon\mathcal{Y}\to\mathcal{Y}$, спряжений відносно білінійної форми $\langle\cdot,\cdot\rangle$ до оператора A.

Також визначимо деякі початкові елементи $\tilde{x}_0 \in \mathcal{X}$, $\tilde{y}_0 \in \mathcal{Y}$.

Будемо вважати, що простори $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$, білінійна форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, оператори A та A^* і елементи $\tilde{x}_0$ та $\tilde{y}_0$ є такими, що системи елементів

$$\{\tilde{x}_k = A^k \tilde{x}_0\}_{k=0}^{\infty} \tag{10}$$

$$\{\tilde{y}_j = A^{*j} \tilde{y}_0\}_{j=0}^{\infty} \tag{11}$$

є лінійно незалежними у просторах $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$, відповідно, і допускають невироджену біортогоналізацію відносно форми $\langle \cdot, \cdot \rangle$, так що існують системи узагальнених поліномів $\{\tilde{X}_N\}_{N \in \mathbb{Z}_+}$ та $\{\tilde{Y}_M\}_{M \in \mathbb{Z}_+}$, для яких виконуються умови

$$\widetilde{X}_N = \sum_{k=0}^{N} \tilde{c}_k^{(N)} \tilde{x}_k, \quad \tilde{c}_N^{(N)} \neq 0, N \in \mathbb{Z}_+, \tag{12}$$

$$\widetilde{Y}_M = \sum_{j=0}^{M} \tilde{d}_j^{(M)} \tilde{y}_j, \quad \tilde{d}_M^{(M)} \neq 0, M \in \mathbb{Z}_+, \tag{13}$$

$$\langle \widetilde{X}_N, \widetilde{Y}_m \rangle = \delta_{M,N} = \begin{cases} 1, & M = N \\ 0 & M \neq N \end{cases}, \quad M, N \in \mathbb{Z}_+. \tag{14}$$

При умові, що визначники Ганкеля є відмінними від нуля

$$\tilde{H}_N = \det \|\tilde{s}_{k+j}\|_{k,j=0}^{N} \neq 0, \quad \forall N \in \mathbb{Z}_+,$$

будуть існувати невироджені апроксиманти Паде $[N-1/N]_f, N \in \mathbb{N}$, степеневого ряду

$$\tilde{f}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{s}_k z^k. \tag{15}$$

За цих же умов ряд (15) буде збігатися до аналітичної в околі початку координат функції, яка матиме зображення

$$\tilde{f}(z) = \langle \mathcal{R}_z(A) \tilde{x}_0, \tilde{y}_0 \rangle.$$

Розглянемо у банаховому просторі $\mathcal{X}$ лінійні оператори

$$A_1 = A, \quad A_2 = A^p,$$

де $p > 1$ — деяке натуральне число, а A — обмежений лінійний оператор.

При вищенаведених умовах ми можемо розглянути двовимірну числову послідовність $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$, яка має узагальнене моментне зображення

$$s_{k+j,m+n}=\langle x_{k,m}, y_{j,n}\rangle, \quad k,m,j,n\in\mathbb{Z}_+, \tag{16}$$

де $x_{k,m}=A_1^k A_2^m \tilde{x}_0, \quad y_{j,n}=A_1^{*j} A_2^{*n} \tilde{y}_0.$

Згідно з (7), при так означених операторах представлення функції через резольвентні функції операторів матиме вигляд

$$f(z,w)=\langle \mathcal{R}_z(A)\,\mathcal{R}_w(A^p)\,\tilde{x}_0, \tilde{y}_0\rangle\,. \tag{17}$$

Нехай функція $\tilde{f}$ однієї змінної задається степеневим рядом (15). Тоді функція двох змінних f вигляду (17) записується наступним чином:

$$f(z,w)=\frac{z^p}{z^p-w}\widetilde{f}(z)-\frac{w^{1/p}}{p}\sum_{r=0}^{p-1}\frac{\xi_r^{(p)}\widetilde{f}(w^{1/p}\xi_r^{(p)})}{z-w^{1/p}\xi_r^{(p)}}, \tag{18}$$

де $\xi_r^{(p)}=e^{2\pi i r/p}$, $r=\overline{0,p-1}$, — корені p-го степеня з 1.

Теорема 3.9. *Нехай $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$ — банахові простори, $\langle .,. \rangle$ — роздільно неперервна білінійна форма, визначена на декартовому добутку $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$, $A\colon \mathcal{X}\to\mathcal{X}$ — обмежений лінійний оператор, $\widetilde{x}_0\in\mathcal{X}$, $\widetilde{y}_0\in\mathcal{Y}$ такі, що виконуються* (12)–(14).

Тоді для функції f, що має зображення (18), *при $N_1\ge p-1,\ N_2\ge 0$ раціональна функція*

$$[\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f(z,w)=\frac{P_{\mathcal{N}}(z,w)}{Q_{\mathcal{D}}(z,w)}, \tag{19}$$

де

$$Q_{\mathcal{D}}(z,w)=\sum_{k=0}^{N_1} d_{N_1+pN_2-k}^{(N_1+pN_2)} z^k+\sum_{k=N_1-p+1}^{N_1}\sum_{m=1}^{N_2} d_{N_1+pN_2-k-pm}^{(N_1+pN_2)} z^k w^m, \tag{20}$$

а

$$P_{\mathcal{N}}(z,w)=\sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{k} d_{N_1-j+pN_2}^{(N_1+pN_2)}\,\widetilde{s}_{k-j+pm}+$$

$$+\sum_{k=N_1+1-p}^{N_1-1}\sum_{m=1}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{j=N_1+1-p}^{k}\sum_{n=1}^{m} d_{N_1-j+p(N_2-n)}^{(N_1+pN_2)}\,\widetilde{s}_{k-j+p(n-m)}+$$

$$+z^{N_1}\left\{\sum_{m=0}^{N_2-1}\sum_{k=0}^{N_1+2pN_2-pm-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1} d_{j+pN_2}^{(N_1+pN_2)}\,\widetilde{s}_{k+j+pm}+\right.$$

$$\left.+\sum_{m=0}^{N_2-1}\sum_{k=0}^{N_1+2pN_2-pm-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{p-1}\sum_{n=0}^{m} d_{j+p(N_2-n)}^{(N_1+pN_2)}\,\widetilde{s}_{k+j+p(m-n)}\right\}$$

$$+w^{N_2}\left\{\sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{N_2+[(2N_1-k-1)/p]} z^k w^m \sum_{j=0}^{k} d_{N_1-j+pN_2}^{(N_1+pN_2)}\,\widetilde{s}_{k-j+p(m+N_2)}+\right.$$

$$\left.\sum_{k=N_1+1-p}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{N_2+[(2N_1-k-1)/p]} z^k w^m \sum_{j=N_1+1-p}^{k}\sum_{n=0}^{N_2} d_{N_1-j+pn}^{(N_1+pN_2)}\,\widetilde{s}_{k-j+p(n+m)}\right\} \tag{21}$$

матиме розвинення у степеневий ряд, коефіцієнти якого співпадатимуть з коефіцієнтами ряду (18) *для* $(k,m)\in\{(k,m)\in\mathbb{Z}_+^2 : k+pm\le 2N_1+2pN_2+1\}$.

Нехай тепер $\mathcal{X}=\mathcal{Y}=L_2([0,1],d\mu)$ — простір функцій, сумовних з квадратом за мірою $d\mu$, де μ — неспадна функція, що має нескінченну кількість точок зростання на [0,1].

Розглянемо в цьому просторі оператор множення на незалежну змінну

$$(A\varphi)(t)=t\varphi(t),\quad \varphi\in\mathcal{X}.$$

Будемо вважати також, що $\tilde{x}_0(t)=\tilde{y}_0(t)\equiv 1$.

Тоді

$$\tilde{x}_k(t)=t^k,\qquad \tilde{y}_j(t)=t^j,\quad k,j\in\mathbb{Z}_+,$$

$$\tilde{f}(z)=\int_0^1\frac{d\mu(t)}{1-zt}.$$

Всі умови теореми, включаючи умови (12)–(14), виконуються, а отже, для функції

$$f(z,w)=\frac{1}{z^p-w}\left\{z^p\int_0^1\frac{d\mu(t)}{1-zt}-w\sum_{r=0}^{p-1}z^r\int_0^1\frac{t^r d\mu(t)}{1-wt^p}\right\} \tag{22}$$

її апроксиманти типу Паде можуть бути записані у вигляді (19)–(21), де $d_k^{(N)}, k=\overline{0,N}$, — коефіцієнти алгебраїчних многочленів, ортонормованих на [0,1] за вагою $d\mu$, а $\tilde{s}_k=\int_0^1 t^k d\mu(t)$, $k\in\mathbb{Z}_+$, — це моменти міри $d\mu$.

Тепер для деяких $\alpha, \beta\in[0,1)$ означимо лінійні нормовані простори $\mathcal{X}_\alpha$ та $\mathcal{Y}_\beta$ таким чином

$$\mathcal{X}_\alpha = \Big\{x(t) : \sup_{t\in[0,1]} |x(t)\, t^\alpha| < \infty\Big\}, \tag{22}$$

$$\mathcal{Y}_\beta = \Big\{y(t) : \sup_{t\in[0,1]} |y(t)(1-t)^\beta| < \infty\Big\}, \tag{23}$$

норми в яких визначаються співвідношенням

$$\|x\|_{\mathcal{X}_\alpha} = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)\, t^\alpha|, \tag{24}$$

$$\|y\|_{\mathcal{Y}_\beta} = \sup_{t\in[0,1]} |y(t)(1-t)^\beta|. \tag{25}$$

Розглянемо в просторі $\mathcal{X}_\alpha$ лінійний обмежений оператор інтегрування $(A\varphi)(t) = \int_0^t \varphi(\tau)d\tau$. Спряженим до нього відносно білінійної форми

$$\langle\varphi, \psi\rangle = \int_0^1 \varphi(t)\psi(t)dt \tag{26}$$

буде оператор $A^*{:}\mathcal{Y}_\beta{\to}\mathcal{Y}_\beta$, $(A^*\psi)(t) = \int_t^1 \psi(\tau)d\tau$.

Покладемо також $\tilde{x}_0(t) {=} t^\nu$, $\nu{>}-\alpha$; $\tilde{y}_0(t) = (1{-}t)^\sigma$, $\sigma{>}-\beta$.

Тоді

$$\tilde{x}_k(t) {=} \frac{t^{k+\nu}}{(\nu{+}1)_k}, \quad \tilde{y}_j(t) {=} \frac{(1{-}t)^{j+\sigma}}{(\sigma{+}1)_j}, \qquad k,\ j{\in}\mathbb{Z}_+,$$

де $(a)_k$ — це символ Похгаммера.

Отож, отримаємо

$$\tilde{f}(z) = \langle\mathcal{R}_z(A)\tilde{x}_0, \tilde{y}_0\rangle {=} \frac{\Gamma(\nu{+}1)\Gamma(\sigma{+}1)}{\Gamma(\nu{+}\sigma{+}2)}\left(1{+}ze^z\int_0^1 \tau^{\nu+\sigma+1}e^{-z\tau}d\tau\right).$$

При $\nu{+}\sigma{+}1 > 0$, коефіцієнти $\tilde{s}_k$ матимуть вигляд

$$\tilde{s}_k {=} \int_0^1 \tilde{x}_k(t)\,\tilde{y}_0(t)\,d(t) {=} \frac{\Gamma(\nu{+}1)\,\Gamma(\sigma{+}1)}{\Gamma(\nu{+}\sigma{+}2)(\nu{+}\sigma{+}2)_k}, \qquad k{=}\overline{0,\infty},$$

а функція $\tilde{f}$ запишеться наступним чином:

$$\tilde{f}(z) {=} \frac{\Gamma(\nu{+}1)\,\Gamma(\sigma{+}1)}{\Gamma(\nu{+}\sigma{+}2)}\ {}_1F_1(1;\nu{+}\sigma{+}2;z)\,, \tag{27}$$

де ${}_1F_1(a;b;z)$ — вироджена гіпергеометрична функція Куммера.

Тоді функція двох змінних на основі (7) буде визначатися як

$$f\left(z,w\right)=\frac{z^p}{z^p-w}\tilde{f}\left(z\right)-\frac{w^{\frac{1}{p}}}{p}\sum_{r=0}^{p-1}\frac{\xi_r^{(p)}\tilde{f}\left(w^{\frac{1}{p}}\xi_r^{(p)}\right)}{z-w^{\frac{1}{p}}\xi_r^{(p)}}\ , \tag{28}$$

де $\tilde{f}$ має вигляд (27).

Для функції вигляду (28) за теоремою 3.9 будуються апроксиманти типу Паде з коефіцієнтами $d_k^{(N)}=p_k^{(N)}(\nu+1)_k$, де $p_k^{(N)}$ — коефіцієнти зсунутих ортогональних на $[0{,}1]$ за мірою $t^\nu(1-t)^\sigma dt$ многочленів Якобі. Більш того, справедливим є наступний результат.

Теорема 3.11. *Побудовані у теоремі 3.9 апроксиманти типу Паде функції f вигляду (28) при $\nu,\sigma>-1$ на кожному компакті з $\mathbb{C}^2$ рівномірно збігаються до f при $N_1,N_2\to\infty$.*

При цьому для знаменників апроксимант справджується асимптотична формула

$$Q_{\mathcal{D}}(z,w)=(-1)^{N_1+pN_2}\frac{\Gamma(2N_1+2pN_2+\sigma+\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)}\times \\ \times\left(e^{-z/2}+o(1)\right),\quad N_1,N_2\to\infty,$$

а для чисельників формула

$$P_{\mathcal{N}}(z,w)=(-1)^{N_1+pN_2}\frac{\Gamma(2N_1+2pN_2+\sigma+\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)}\times \\ \times\left(e^{-z/2}f(z,w)+o(1)\right),\quad N_1,N_2\to\infty.$$

У підрозділах 3.4 та 3.5 для довільних банахових просторів $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$ побудовано апроксиманти типу Паде степеневих рядів, послідовності коефіцієнтів яких мають узагальнені моментні зображення при виборі операторів $A_1{=}A$, $A_2{=}A^2{+}\alpha A$, де α — деяке дійсне число, та $A_1{=}A^2$, $A_2{=}A^3$, відповідно. Отримані при цьому функції в окремих випадках є гіпергеометричними функціями третього та четвертого порядків.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Голуб А. П. Двовимірні апроксиманти типу Паде деяких спеціальних рядів двох змінних / А. П. Голуб, Г. М Веселовська // Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — **11**, № 4. — С. 76–85.

2. Голуб А. П. Двовимірні апроксиманти типу Паде для деяких аналітичних функцій двох змінних / А. П. Голуб, Г. М. Веселовська // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — **11**, № 3. — С. 71–77.

3. Голуб А. П. Апроксиманти типу Паде для деяких спеціальних рядів двох змінних / А. П. Голуб, Г. М. Веселовська // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2015. — **12**, № 4. — С. 92–110.

4. Веселовська Г. М. Апроксимації типу Паде для деяких спеціальних рядів двох змінних / Г. М. Веселовська // Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2016. — **13** , № 3. — С. 47–68.

5. Веселовська Г. М. Раціональні апроксиманти типу Паде одного класу подвійних степеневих рядів / Г. М. Веселовська, А. П. Голуб // Аналіз та застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2017. — **14**, № 1. — С. 61–81.

6. Веселовська Г. М. Теореми існування багатовимірних узагальнених моментних зображень / Г. М. Веселовська, А. П. Голуб // Укр. мат. журн. — 2017. — **69**, № 4. — С. 456–465.

7. Веселовська Г. М. Двовимірні апроксиманти типу Паде для деяких аналітичних функцій двох змінних / Г. М. Веселовська // Четверта всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, 23 – 25 квітня 2015 р.: Тези доповідей. — Київ: Національний технічний університет України “КПІ”, 2015. — С. 14.

8. Веселовська Г. М. Двовимірні апроксиманти типу Паде для деяких спеціальних рядів двох змінних / Г. М. Веселовська // Міжнародна конференція молодих математиків, Київ, 3 – 6 червня 2015 р.: Тези доповідей. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2015. — С. 66.

9. Голуб А. П. Апроксиманти типу Паде деяких аналітичних функцій кількох змінних / А. П. Голуб, Г. М. Веселовська // Міжнародна конференція “Теорія наближення та її застосування”, присв'яч. 75-річчю професора, доктора фіз.-мат. наук В. П. Моторного, Дніпро, 8 – 11 жовтня 2015 р.: Тези доповідей. — Дніпро: Дніпровський національний університет ім. О. Гончара, 2015. — С. 29.

10. Веселовська Г. Апроксиманти типу Паде для деяких аналітичних функцій двох змінних / Г. Веселовська // Конференція молодих учених “Підстригачівські читання — 2016”, Львів, 25 – 27 травня 2016 р.: Тези доповідей. — [Електронний ресурс]. — Режим доступу: http://iapmm.lviv.ua./chyt2016/theses/Weselovska.pdf.

11. Holub A. Padé type approximants for special power series of two variables / A. Holub, H. Veselovska // International V. Skorobohatko Matematical Conference, Drohobych, August 25 – 28, 2015: Abstracts. — Lviv: National Academy of Sciences of Ukraine, 2015. — P. 57.

12. Holub A. P. Padé type approximants for special power series of two variables / A. P. Holub, H. M. Veselovska // Third Conference Mathematics for Life Sciences, Rivne, September 15 – 19, 2015: Abstracts. — Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2015. — P. 16.

АНОТАЦІЇ

Веселовська Г. М. Апроксимації типу Паде для спеціальних функцій кількох змінних — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз. — Інститут математики НАН України, Київ, 2017.

Дисертація присвячена дослідженню питань існування багатовимірних узагальнених моментних зображень і питань побудови апроксимант типу Паде функцій кількох змінних на основі методу багатовимірних узагальнених моментних зображень.

Встановлено необхідні та достатні умови існування багатовимірних узагальнених моментних зображень. Критерії існування отримані як в термінах умов на послідовності, так і в термінах умов на твірні функції. За допомогою методу двовимірних узагальнених моментних зображень побудовані апроксиманти типу Паде для нових широких класів функцій двох змінних, зокрема, для деяких гіпергеометричних функцій другого, третього і четвертого порядків. В одному з випадків доведена рівномірна збіжність побудованих апроксимант і отримані асимптотичні формули для їх чисельників та знаменників.

Ключові слова: апроксиманта типу Паде, багатовимірні узагальнені моментні зображення, біортогональні системи функцій, гіпергеометрична функція.

Веселовская А. Н. Аппроксимации типа Паде для специальных функций нескольких переменных. — Рукопись.

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — математический анализ. — Институт математики НАН Украины, Киев, 2017.

Диссертация посвящена исследованию вопросов существования многомерных обобщенных моментных представлений и вопросов построения аппроксимант типа Паде функций нескольких переменных на основе метода многомерных обобщенных моментных представлений.

Установлены необходимые и достаточные условия существования многомерных обобщенных моментных представлений. Критерии существования получены как в терминах условий на последовательности, так и в терминах условий на производящие функции. С помощью метода двумерных обобщенных моментных изображений построены аппроксиманты типа Паде для новых широких классов функций двух переменных, в частности, для некоторых гипергеометрических функций второго, третьего и четвертого порядков. В одном из случаев доказана равномерная сходимость построенных аппроксимант и получены асимптотические формулы для числителей и знаменателей.

Ключевые слова: аппроксиманта типа Паде, многомерные обобщенные моментные представления, биортогональные системы функций, гипергеометрическая функция.

Veselovska H. M. Padé type approximations of special functions of several variables. — Manuscript.

Thesis is presented for the Degree of Candidate of Physics and Mathematics in speciality 01.01.01 — Mathematical Analysis. — Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2017.

The thesis is devoted to investigations of problems of existence of multidimensional generalized moment representations and problems of construction of Padé type approximants of functions of several variables by the method of multidimensional generalized moment representations.

The method of generalized moment representations as one of the methods of Padé approximants construction for functions of one variable, has been proposed by V. K. Dzyadyk in 1981. Since the method has made allowance for rigorous evaluation of Padé approximants in terms of biorthogonal polynomials, and for not only constructions of Padé approximants, but also Padé-Chebyshev approximants, the Hermite-Padé approximants, and multipoint Padé approximants, it has become very effective.

In this regards the method of one-dimensional generalized moment representations has been extended to multidimensional case by A. P. Holub and L. O. Chernetska in 2013.

Though the method of generalized moment representations has been spread out to d-dimensional case, the question about its existence for an arbitrary multidimensional sequence was opened.

In one-dimensional case V. K. Dzyadyk and A. P. Holub have established necessary and sufficient conditions for an existence of generalized moment representations in terms of conditions imposed on a sequence. Necessary and sufficient conditions for an existence of generalized moment representations in terms of conditions imposed on generating functions have been found out a long time before the concept of generalized moment representations has been proposed. The problem was solved by D. Z. Arov in 1979. Subsequently, in 2003, A. P. Holub has extended such criterion to a class of one-variable entire functions.

Presented in the dissertation are necessary and sufficient conditions for and existence of multidimensional generalized moment representations which are of use of construction of Padé type approximants for functions of several variables. The existence criteria are established both in terms of conditions on numerical sequences and in terms of conditions for generating functions. The obtained results extend to the multidimensional case the results that were previously

established by V. K. Dzyadyk, A. P. Holub and D. Z. Arov in the one-dimensional case. Moreover, the criteria give possibility to distinguish from all possible functions of several variables those for which Padé type approximants can be constructed by the method of multidimensional generalized moment representations.

For the last few years, studies have been made on Padé approximants for some pseudo-twovariable functions, Appel hypergeometric series, Humbert hypergeometric series and Laurichella series by A. P. Holub and L. O. Chernetska using the method of multidimensional generalized moment representations.

In our research, the method of multidimensional generalized moment representations is extended to new broad classes of functions of two variables for which coefficients of power expansion have two-dimensional generalized moment representations in operator form providing some special choice of linear bounded operators. For each of the classes considered, their representations are constructed through the resolvent functions of the chosen linear bounded operators. In particular, one of those functions that belong to the considered classes are certain two-variable hypergeometric functions of the second, third, and fourth order. The efficiency of the constructed approximation is illustrated by examples using graphs and tables.

For one of the classes of functions of two variables, the uniform convergence of constructed Padé type approximants is proved as well as the asymptotic behavior of the numerators and the denominators is examined.

Key words: Padé type approximant, multidimensional generalized moment representations, biorthogonal systems of functions, hypergeometric function.

Підп. до друку 12.10.2017. Формат 60×84/16. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 1,3. Ум. друк. арк. 1,2. Тираж 120 пр. Зам. 50.

Інститут математики НАН України,
01004, Київ-4, вул. Терещенківська, 3