НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

ВЕСЕЛОВСЬКА ГАННА МИКОЛАЇВНА

УДК 517.5

Апроксимації типу Паде для спеціальних функцій кількох змінних

Спеціальність 01.01.01 — математичний аналіз

Д и с е р т а ц і я
на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень.
Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

Г. М. Веселовська

Науковий керівник
доктор фізико–математичних наук
ГОЛУБ АНАТОЛІЙ ПЕТРОВИЧ

Київ — 2017

АНОТАЦІЯ

Веселовська Г. М. Апроксимації типу Паде для спеціальних функцій кількох змінних. — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз. — Інститут математики НАН України, Київ, 2017.

Дисертацію присвячено дослідженню питань існування багатовимірних узагальнених моментних зображень та питань побудови апроксимант типу Паде функцій кількох змінних на основі методу багатовимірних узагальнених моментних зображень.

У другій половині минулого століття великий інтерес математиків виявився спрямований на теорію наближень функцій як однієї, так і багатьох змінних. Це було зумовлено бурхливим розвитком обчислювальних технологій, що дозволяли проводити важливі обчислення з досить високою точністю. Цей інтерес не оминув і теорію раціональних наближень, та, зокрема, апроксимації Паде та типу Паде. З того часу багато робіт присвячувалося питанням побудови, збіжності та оцінкам похибок таких апроксимацій.

Метод узагальнених моментних зображень, як один із методів побудови апроксимацій Паде функцій однієї змінної, був запропонований В. К. Дзядиком у 1981 році. В одновимірному випадку такий метод виявився досить ефективним, оскільки дозволяв з єдиних позицій вивчати апроксимації Паде у термінах біортогональних поліномів та будувати не тільки апроксимації Паде, але й апроксимації Паде–Чебишова, апроксимації Паде–Ерміта та багатоточкові апроксимації Паде. У зв'язку з цим у 2013 році метод одновимірних узагальнених моментних зображень було поширено А. П. Голубом та Л. О. Чернецькою спочатку на двовимірний, а потім і на багатовимірний випадок.

У зв'язку з поширенням методу узагальнених моментних зображень на багатовимірний випадок актуальним стало питання про умови існування узагальнених моментних зображень для довільної багатовимірної числової послідовності. В одновимірному випадку В. К. Дзядиком та А. П. Голубом було встановлено необхідні та достатні умови існування узагальнених моментних зображень. Цікавим виявився той факт, що ще до введення поняття узагальнених моментних зображень, у 1979 році Д. З. Аровим було встановлено критерій існування узагальнених моментних зображень у термінах умов на твірні функції для аналітичних у крузі функцій. Згодом, у 2003 році А. П. Голубом було поширено такий критерій на клас цілих функцій.

У дисертаційній роботі встановлено необхідіні та достатні умови існування багатовимірних узагальнених моментних зображень, що використовуються для побудови апроксимацій типу Паде функцій кількох змінних. Критерії існування встановлено як у термінах умов на числові послідовності, так і у термінах умов на твірні функції. Отримані результати поширюють на багатовимірний випадок результати, раніше встановлені у одновимірному випадку В. К. Дзядиком, А. П. Голубом та Д. З. Аровим та дозволяють виокремити з всеможливих функцій кількох змінних ті, для яких можна будувати апроксиманти типу Паде методом багатовимірних узагальнених моментних зображень.

На основі методу багатовимірних узагальнених моментних зображень, А. П. Голубом та Л. О. Чернецькою було досліджено та побудовано апроксиманти Паде для деяких псевдодвовимірних функцій, гіпергеометричних рядів Аппеля, Гумберта та Лаурічелли. Також, в окремих випадках, було встановлено збіжність та знайдено асимптотичні формули для чисельників та знаменників, побудованих на основі даного методу.

У дисертації метод багатовимірних узагальнених моментних зображень поширено на нові широкі класи функцій двох змінних, коефіцієнти степеневих розвинень яких мають двовимірні узагальнені моментні зображення в операторному вигляді, при деякому спеціальному виборі лінійних обмежених операторів. Для кожного із розглянутих класів побудовано їх представлення через резольвентні функції відповідно вибраних лінійних обмежених операторів. До отриманих класів функцій, зокрема, належать певні гіпергеоментричні функції двох змінних другого, третього та четвертого порядків. Ефективність побудованих апроксимант проілюстрована на прикладах з допомогою графіків та таблиць.

Для одного із класу функцій двох змінних доведена рівномірна збіжність побудованих апроксимант типу Паде та отримано асимптотичні формули для їх чисельників та знаменників.

Ключові слова: апроксиманта типу Паде, багатовимірні узагальнені моментні зображення, біортогональні системи функцій, гіпергеометрична функція.

Veselovska H. M. Padé type approximations of special functions of several variables. — Manuscript.

A thesis is presented for the Degree of Candidate of Physics and Mathematics in speciality 01.01.01 — Mathematical Analysis. — Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2017.

The thesis is devoted to investigations of problems of existence of multidimensional generalized moment representations and problems of construction of Padé type approximants of functions of several variables by the method of multidimensional generalized moment representations.

In the second part of the last century the approximation theory of functions of one and several variables has been in the focus of high attention of mathematicians. It was caused by the rapid development of computational technologies, which have allowed to carry out important calculations with high accuracy. Such curiosity has not gone away the theory of rational approximations as well as Padé and Padé type approximations. Much

research has been devoted to methods of construction, of convergence and error estimations of such approximations.

The method of generalized moment representations as one of the methods of Pade approximants construction for functions of one variable, has been proposed by V. K. Dzyadyk in 1981. Since the method has made allowance for rigorous evaluation of Padé approximants in terms of biorthogonal polynomials, and for not only constructions of Padé approximants, but also Padé–Chebyshev approximants, the Hermite–Padé approximants, and multipoint Padé approximants, it has become very effective. In this regards the method of one-dimensional generalized moment representations has been extended to multidimensional case by A. P. Holub and L. O. Chernetska in 2013.

Though the method of generalized moment representations has been spread out to d-dimensional case, the question about its existence for an arbitrary multidimensional sequence was opened.

In one-dimensional case V. K. Dzyadyk and A. P. Holub have established necessary and sufficient conditions for an existence of generalized moment representations in terms of conditions imposed on a sequence. Necessary and sufficient conditions for an existence of generalized moment representations in terms of conditions imposed on generating functions have been found out a long time before the concept of generalized moment representations has been proposed. The problem was solved by D. Z. Arov in 1979. Subsequently, in 2003, A. P. Holub has extended such criterion to a class of one-variable entire functions.

Presented in the dissertation are necessary and sufficient conditions for and existence of multidimensional generalized moment representations which are of use of construction of Padé type approximants for functions of several variables. The existence criteria are established both in terms of conditions on numerical sequences and in terms of conditions for generating functions. The obtained results extend to the multidimensional case the results that were previously established by V. K. Dzyadyk, A. P. Holub and D. Z. Arov in the one-dimensional case. Moreover, the criteria give possibility to distinguish from all possible functions of several variables those for which Padé type approximants can be constructed by the method of multidimensional generalized moment representations.

For the last few years, studies have been made on Padé approximants for some pseudo-twovariable functions, of Appel hypergeometric series, of Humbert hypergeometric series and Laurichella series by A. P. Holub and L. O. Chernetska using the method of multidimensional generalized moment representations.

In our research, the method of multidimensional generalized moment representations is extended to new broad classes of functions of two variables for which coefficients of power expansion have two-dimensional generalized representations in operator form providing some special choice of linear bounded operators. For each of the classes considered, their representations are constructed through the resolvent functions of the chosen linear bounded operators. In particular, some functions that belong to the considered classes are certain two-variable hypergeometric functions of the second, third, and fourth order. The efficiency of the constructed approximation is illustrated by examples using graphs and tables.

For one of the classes of functions of two variables, the uniform convergence of constructed Padé type approximants is proved as well as the asymptotic behavior of the numerators and the denominators is examined.

Key words: Padé type approximant, multidimensional generalized moment representations, biorthogonal systems of functions, hypergeometric function.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Голуб А. П. Двовимірні апроксиманти типу Паде деяких спеціальних рядів двох змінних / А. П. Голуб, Г. М Веселовська // Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — **11**, № 4. — С. 76–85.

2. Голуб А. П. Двовимірні апроксиманти типу Паде для деяких аналітичних функцій двох змінних / А. П. Голуб, Г. М. Веселовська // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — **11**, № 3. — С. 71–77.

3. Голуб А. П. Апроксиманти типу Паде для деяких спеціальних рядів двох змінних / А. П. Голуб, Г. М. Веселовська // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Інституту математики НАН України. — 2015. — **12**, № 4. — С. 92–110.

4. Веселовська Г. М. Апроксимації типу Паде для деяких спеціальних рядів двох змінних / Г. М. Веселовська // Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2016. — **13** , № 3. — С. 47–68.

5. Веселовська Г. М. Раціональні апроксиманти типу Паде одного класу подвійних степеневих рядів / Г. М. Веселовська, А. П. Голуб // Аналіз та застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2017. — **14**, № 1. — С. 61–81.

6. Веселовська Г. М. Теореми існування багатовимірних узагальнених моментних зображень / Г. М. Веселовська, А. П. Голуб // Укр. мат. журн. — 2017. — **69**, № 4. — С. 456–465.

7. Веселовська Г. М. Двовимірні апроксиманти типу Паде для деяких аналітичних функцій двох змінних / Г. М. Веселовська // Четверта всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, 23–25 квітня 2015 р.: Тези доповідей. — Київ: Національний технічний університет України “КПІ”, 2015. — С. 14.

8. Веселовська Г. М. Двовимірні апроксиманти типу Паде для деяких спеціальних рядів двох змінних / Г. М. Веселовська // Міжнародна конференція молодих математиків, Київ, 3–6 червня 2015 р.: Тези доповідей. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2015. — С. 66.

9. Голуб А. П. Апроксиманти типу Паде деяких аналітичних функцій кількох змінних / А. П. Голуб, Г. М. Веселовська // Міжнародна конференція “Теорія наближення та її застосування”, присв’яч. 75-річчю професора, доктора фіз.-мат. наук В. П. Моторного, Дніпро, 8–11 жовтня 2015 р.: Тези доповідей. — Дніпро: Дніпровський національний університет ім. О. Гончара, 2015. — С. 29.

10. Веселовська Г. Апроксиманти типу Паде для деяких аналітичних функцій двох змінних / Г. Веселовська // Конференція молодих учених “Підстригачівські читання — 2016”, Львів, 25–27 травня 2016 р.: Тези доповідей. — [Електронний ресурс]. — Режим доступу: http://iapmm.lviv.ua./chyt2016/theses/Weselovska.pdf.

11. Holub A. Padé type approximants for special power series of two variables / A. Holub, H. Veselovska // International V. Skorobohatko Matematical Conference, Drohobych, August 25–28, 2015: Abstracts. — Lviv: National Academy of Sciences of Ukraine, 2015. — P. 57.

12. Holub A. P. Padé type approximants for special power series of two variables / A. P. Holub, H. M. Veselovska // Third Conference Mathematics for Life Sciences, Rivne, September 15–19, 2015: Abstracts. — Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2015. — P. 16.

LIST OF PUBLICATIONS ON THE THESIS TOPIC

1. Holub A. P. Two-dimensional Padé Type Approximants for Some Special Series of Two Variables / A. P. Holub, H. M. Veselovska // Mathematical Problems of Mechanics and Computational Mathematics. Collection of Papers of the Institute of Mathematics, NAS of Ukraine. 11 (2014), no.4, 76-84.
2. Holub A. P. Two-dimensional Padé Type Approximants for Some Analytic Functions of Two Variables / A. P. Holub, H. M. Veselovska // Theory of Approximation of Functions and Related Questions. Collection of Papers of the Institute of Mathematic, NAS of Ukraine. 11 (2014), no.3, 71-77.
3. Holub A. P. Padé Type Approximants for Some Special Series of Two Variables / A. P. Holub, H. M. Veselovska // Theory of Approximation of Functions and Related Questions. Collection of Papers of the Institute of Mathematics, NAS of Ukraine. 12 (2015), no.4, 92-110.
4. Veselovska H. M. Padé Type Approximantions for Some Special Series of Two Variables / A. P. Holub, H. M. Veselovska // Mathematical Problems of Mechanics and Computational Mathematics. Collection of Papers of the Institute of Mathematics, NAS of Ukraine. 13 (2016), no.3, 47-68.
5. Veselovska H. M. Rational Padé Type Approximantions for One Class of Two-dimensional Power Series / H. M. Veselovska, A. P. Holub // Mathematical Problems of Mechanics and Computational Mathematics. Collection of Papers of the Institute of Mathematics, NAS of Ukraine. 14 (2017), no.1, 61-81.
6. Veselovska H. M. Existence Theorems of Multidimensional Generalized Moment Representations / H. M. Veselovska, A. P. Holub // Ukrainian

Mathematical Journal. 69 (2017), no.4, 456-465.

7. Veselovska H. M. Two-dimensional Padé Type Approximants for Some Analytic Functions of Two Variables / H. M. Veselovska //The Fourth National Conference of Young Scientists in Mathematics and Physics, April 23-25, 2015, Kyiv, Ukraine. Abstracts. — P. 14.
8. Veselovska H. M. Two-dimensional Padé Type Approximants for Some Special Series of Two Variables / H. M. Veselovska // International conference of young mathematicians, June 3-6, 2015, Kyiv, Ukraine. Abstracts. — P. 66.
9. Holub A. P. Two-dimensional Padé Type Approximant for Some Analytic Functions of Two Variables / A. P. Holub, H. M. Veselovska // International Conference "Approximation Theory and Its Application"(dedicated to the 75th anniversary of Professor V. P. Motornyi), October 8–11, 2015, Dnipro, Ukraine. Abstracts. — P.29.
10. Veselovska H. Padé Type Approximations for Some Analytic Functions of Two Variables / H. Veselovska // The Conference of Young Scientists "Pidstryhach Readings – 2016“, May 25-27, 2016, Lviv, Ukraine. Abstracts. — [Electronic Resource]. — Access mode: http://iapmm.lviv.ua./chyt2016/theses/Weselovska.pdf.
11. Holub A. Padé Type Approximants for Special Power Series of Two Variables / A. Holub, H. Veselovska // International V.Skorobohatko Matematical Conference, Drohobych, August 25-28, 2015: Abstracts. - Lviv: National Academy of Sciences of Ukraine, 2015. — P.57.
12. Holub A. P. Padé Type Approximants for Special Power Series of Two Variables / A. P. Holub, H. M. Veselovska // Third Conference Mathematics for Life Sciences, Rivne, September 15-19, 2015: Abstracts. — Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2015. — P.16.

Зміст

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел;

$\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел;

$\mathbb{Z}_+$ — множина цілих невід'ємних чисел;

$\mathbb{Z}_+^d$ — множина d-вимірних векторів, $d \in \mathbb{N}$, кожна координата яких належить до $\mathbb{Z}_+$

$\mathbb{C}_+$ — множина комплексних чисел;

$\mathbb{C}_+^d$ — d-вимірний, $d \in \mathbb{N}$, комплексний простір;

$[a, b]$ — сегмент числової прямої;

$[a]$ — ціла частина дійсного числа $[a]$;

$|z|$ — модуль комплексного числа;

$\langle ., . \rangle$ — білінійна форма, визначена на декартовому добутку лінійних просторів $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$;

$\#\mathcal{N}$ — потужність множини $\mathcal{N}$;

$[M/N]_f(z)$ — апроксиманта Паде порядку $[M/N]$ функції $f(z)$;

$H_{M,N} = \det \|s_{M+k+j}\|_{k,j=0}^N, M, N \in \mathbb{Z}_+$ — визначник Ганкеля числової послідовності $\{s_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$;

$I : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ — тотожний оператор у лінійному просторі $\mathcal{X}$, тобто $\forall x \in \mathcal{X}, Ix = x$;

$\mathcal{R}_z(A) = (I - zA)^{-1}$ — резольвентна функція лінійного оператора $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$;

$L_2([a, b], d\mu)$ — простір інтегрованих функцій на відрізку $[a, b]$ за мірою $d\mu$ та нормою

$$\|f\|_{L_2([a,b],d\mu)} = \left(\int_a^b |f(t)|^2 d\mu(t) \right)^{1/2};$$

$(a)_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ a(a+1)\dots(a+k-1), & k = 1, 2, \dots \end{cases}$ — символ Похгаммера;

$\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$ — біноміальні коефіцієнти;

$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \Im z > 0,$ — гамма-функція Ейлера.

ВСТУП

Дисертаційна робота присвячена дослідженню раціональних апроксимант типу Паде функцій кількох змінних.

Актуальність теми. Теорія апроксимацій Паде являє собою актуальну галузь теорії наближень. Високий інтерес до таких наближень зумовлений їх різноманітними практичними застосуваннями. Відомо, що апроксимації Паде знаходять своє практичне використання, зокрема, у таких галузях сучасних досліджень, як аналіз сигналів, розріджені наближення, нелінійній теорії оболонок, задачах розсіювання та ін.

Історично апроксимації Паде виникли ще за часів Бернуллі, а свою назву вони отримали від прізвища французького математика Анрі Паде, який наприкінці XIX – на початку XX сторіччя виконав ряд досліджень присвячених цим апроксимаціям. Надалі, поштовхом до розвитку апроксимацій типу Паде, зокрема, багатовимірним узагальнень апроксимацій Паде, стали публікації C. Brezinski, S. Kida, P. Sablonniére, J. Abouir та A. Cuyt 1970-1980 рр. У цих роботах було описано різні підходи до перенесення поняття апроксимацій Паде із одновимірного на d-вимірний випадок.

Значний внесок у розвиток теорії багатовимірних апроксимацій типу Паде було внесено такими вченими як G. A. Baker, P. Graves-Morris, J. Chisholm, R. Hughes-Jones. Серед сучасників у даній галузі досліджень працюють такі науковці як A. Cuyt та C. Brezinski, P. B Borwein, N. J. Daras, J. Karlsson, G. López Lagomasino, D. S. Lubinsky, C. Lutterodt, A. Sidi, J. Tan, P. Zhou, H. Wallin та ін.

Серед українських дослідників питаннями апроксимацій Паде займалися Дзядик В. К. та його учні, московська школа – Гончар А. О., Нікішин Є. М., Рахманов Є. А., Суєтін С. П., Буслаєв В. І., Аптєкарєв О. І., Сорокін В. М. та ін., білоруська школа — Русак В. М.

Старовойтов О. П., Пекарський О. А., Ровба Є. О та ін. У аспекті гіллястих ланцюгових дробів суттєвий вклад в теорію раціональних апроксимацій функцій кількох змінних внесено Скоробогатьком В. Я., Бондарчуком П. І., Боднаром Д. І., Кучмінською Х. Й., Сявавком М. С., Демківим І. І. та їхніми учнями.

Загалом означення та, відповідно, методи побудови апроксимацій типу Паде для функцій кількох змінних розділяються на три категорії. Перша категорія включає у себе ті, які грунтуються на понятті інтерполяційної множини, друга — використовує різні представлення функції кількох змінних за допомогою неперервних дробів та остання являє собою узагальнення епсилон-алгоритму на багатовимірний випадок.

Для дослідження та побудови апроксимацій типу Паде одним із методів, що опирається на визначення множини співпадання, є метод багатовимірних узагальнених моментних зображень, запропонований А. П. Голубом та Л. О. Чернецькою у 2013 році. Цей метод є перенесенням на багатовимірний випадок методу узагальнених моментних зображень В. К. Дзядика 1981 р. У одновимірному випадку з допомогою такого методу вдалося дати відповіді на питання, що стосуються побудови апроксимант Паде ряду спеціальних функцій, що лежать поза межами класу марковських функцій. У цьому ж випадку В. К. Дзядиком та А. П. Голубом було встановлено необхідні та достатні умови існування узагальнених моментних зображень довільної числової послідовності, що, в свою чергу, дозволило серед усіх функцій виокремити ті, для яких можна будувати апроксиманти Паде за допомогою цього методу. Поширення даного методу на простори вимірності $d \geq 2$ дало можливіть будувати апроксимації типу Паде для так званих псевдобагатовимірних функцій, гіпергеометричних рядів Аппеля, Гумберта, Лаурічелли та деяких інших широких класів функцій кількох змінних. У окремих випадках за допомогою даного методу доведено рівномірну збіжність побудованих апроксимант та встановлено асимптотичні формули для їх чисельників і знаменників.

У зв'язку з цим логічно виникають питання поширення методу багатовимірних узагальнених моментних зображень на нові класи спеціальних функцій, а також важливим є встановлення необхідних та достатніх умов існування таких зображень для довільної багатовимірної числової послідовності.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано у відділі обчислювальної математики Інституту математики НАН України у рамках тем "Експоненціально збіжні методи для розв'язування спектральних задач, задач для квазілінійних рівнянь з необмеженими операторними коефіцієнтами та раціональні апроксимації функцій багатьох змінних"(номер держреєстрації 0116U003063) та "Високоточні методи розв'язування задач для операторних рівнянь у некласичній постановці"(номер держреєстрації 0111U00020).

Мета і завдання дослідження.

Метою роботи є поширити метод багатовимірних узагальнених моментних зображень на нові класи функцій та встановити необхідні і достатні умови існування багатовимірних узагальнених моментних зображень.

Об'єкт дослідження — узагальнені моментні зображення багатовимірних числових послідовностей та багатовимірні апроксиманти типу Паде аналітичних функцій кількох змінних.

Предметом дослідження є властивості багатовимірних узагальнених моментних зображень та їх застосування для побудови та дослідження багатовимірних апроксимант типу Паде функцій кількох змінних.

Основними завданнями дослідження є:

1. Встановити необхідні та достатні умови існування узагальнених моментних зображень для довільної d-вимірної числової послідовності при $d \geq 2$;
2. Побудувати та дослідити за допомогою методу багатовимірних

узагальнених моментних зображень апроксиманти типу Паде для нових класів спеціальних функцій кількох змінних .

Методи дослідження. При розв'язанні поставлених задач у дисертаційній роботі використовувалися методи класичного математичного аналізу, теорії функцій кількох комплексних змінних та теорії спеціальних функцій, теорії лінійних операторів, теорії ортогональних многочленів та біортогональних систем функцій.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати роботи, що виносяться на захист, є новими і полягають у наступному:

1. Встановлено необхідні та достатні умови існування d-вимірних узагальнених моментних зображень ($d \geq 2$) у термінах умов на послідовності та у термінах умов на твірні функції.
2. Побудовано та досліджено двовимірні апроксиманти типу Паде для нових класів спеціальних функцій двох змінних, зокрема, для деяких гіпергеометричних функцій другого, третього та четвертого порядків.
3. Доведено збіжність та встановлено асимптотичні рівності для чисельників та знаменників апроксимант типу Паде деяких двовимірних вироджених гіпергеометричних рядів.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Методи та результати дисертації можуть використовуватися в дослідженнях з теорії наближення функцій, а також при розв'язуванні прикладних задач теорії чисел, обчислювальної математики та математичної фізики.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямку дослідження, а також постановка задач належить науковому керівнику – доктору фіз.-мат. наук А. П. Голубу. В опублікованих спільно з А. П. Голубом п'яти наукових працях [9, 10, 25, 26, 35] науковому керівнику належить постановка задач та аналіз результатів. Результати дисертаційної роботи отримані здобувачем самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на семінарах:

- спільному засіданні семінару “Математичні проблеми механіки та обчислювальна математика”, семінару відділу теорії функцій та Київського семінару з функціонального аналізу (Інститут математики НАН України; керівники семінару: член-кореспондент НАНУ, доктор фіз.-мат. наук, професор А. Н. Кочубей; доктор фіз.-мат. наук, професор А. С. Романюк);
- семінарах відділу теорії функцій (Інститут математики НАН України; керівник семінару — доктор фіз.-мат. наук, професор А. С. Романюк);
- семінарі “Сучасний аналіз” (механіко-математичний факультет Київського національного університету імені Тараса Шевченка; керівник семінару — доктор фіз.-мат. наук, професор І. О. Шевчук);
- Четвертій Всеукраїнській науковій конференції молодих вчених з математики та фізики, Київ, 23–25 квітня 2015 року;
- Міжнародній конференції молодих математиків, Київ, 3–6 червня 2015 року;
- 10-й Міжнародній математичній конференції ім. В. Я. Скоробогатька, Дрогобич; 25–28 серпня 2015 року;
- Третій конференції “Mathematics for Life Sciences”, Рівне, 15–19 вересня 2015 року;
- Міжнародній конференції “Теорія наближень та її застосування”, присвяченій 75-річчю професора В. П. Моторного, Дніпро, 8–11 жовтня 2015 року;
- Конференції молодих вчених “Підстригачівські читання – 2016”, Львів, 25–27 травня 2016 року;

- Конференції “Mathematical Optics, Image Modelling and Algorithms”, Ганновер (Німеччина), 20–23 червня 2016 року;
- Третій конференції “Approximation Methods for Molecular Modelling and Diagnosis Tools”, Київ, 26–30 січня 2017 року;
- The 8th Gene Golub SIAM Summer School “Data Sparse Approximations and Algorithms”, Берлін (Німеччина), 29 травня – 9 червня 2017 року.

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано у дванадцяти наукових працях, з яких шість [8–10, 25, 26, 35] є статтями у наукових виданнях, внесених до переліку фахових видань з фізико-математичних наук, а [5–7, 12, 113, 114] є матеріалами доповідей наукових конференцій. Стаття [10] опублікована у журналі, який входить до міжнародних наукометричних баз даних (Web of Science, Scopus).

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі змісту, переліку умовних позначень, вступу, трьох розділів, висновків, а також списку використаних джерел, що містить 131 найменування. Дисертація містить 2 таблиці та 12 рисунків. Повний обсяг дисертації становить 149 сторінок, з них список використаних джерел займає 15 сторінок.

Короткий зміст основної частини роботи. У *Вступі* наведено коротку історію попередніх досліджень, актуальність обраної теми, визначено наукову новизну та цінність отриманих результатів.

Перший розділ присвячено огляду літератури за темою дисертації. Зокрема у підрозділі 1.1 наводяться означення одновимірних апроксимацій Паде та багатовимірних апроксимацій типу Паде, розглядаються загальні методи їх побудови та основні властивості апроксимант Паде. Підрозділ 1.2 розглядає поняття узагальнених моментних зображень, введене В. К. Дзядиком, їх зв’язок із класичною проблемою моментів, та багатовимірні узагальнені моментні зображення запропоновані А. П. Голубом та Л. О. Чернецькою. І в одновимірному, і багатовимірному випадку розглянуто операторний підхід до задачі про узагальнені моментні зображення.

Другий розділ дисертаційної роботи присвячено розв'язності задачі про багатовимірні узагальнені моментні зображення. Встановлено необхідні та достатні умови існування багатовимірних узагальнених моментних зображень для довільних числових послідовностей. У підрозділі 2.1 наведено попередні результати, що стосуються існування одновимірних узагальнених моментних зображень, встановлені В. К. Дзядиком, А. П. Голубом та Д. З. Аровим. Підрозділ 2.2 присвячено доведенню необхідних та достатніх умов існування багатовимірних узагальнених моментних зображень у термінах умов на послідовності. У підрозділі 2.3 доводяться необхідні та достатні умови існування узагальнених моментних зображень у термінах умов на твірні функції. Доведення носить конструктивний характер.

У *третьому розділі* досліджуються питання, пов'язані з побудовою апроксимацій типу Паде функцій двох змінних на основі методу двовимірних узагальнених моментних зображень. Підрозділ 3.1 носить допоміжний характер. У ньому наводиться необхідні позначення та ряд тверджень, що використовуються для отримання результатів наступних підрозділів, зокрема, поняття двовимірних узагальнених моментних зображень та основні теореми для побудови та дослідження двовимірних апроксимацій типу Паде [28] з допомогою методу узагальнених моментних зображень. У підрозділі 3.2 побудовано апроксиманти типу Паде для рядів, для коефіцієнти яких мають місце узагальнені моментні зображення при виборі операторів $(A_1\varphi)(t) = t\varphi(t)$, $(A_2\varphi)(t) = t^{\sigma}\varphi(t)$, де σ – ірраціональне число, на добутку просторів $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, де $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = L_2([0,1], t^{\nu}dt)$. У підрозділі 3.3 для довільних банахових просторів $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$ розглянуто апроксиманти типу Паде рядів, для коефіцієнтів яких мають місце узагальнені моментні зображення з операторами $A_1 = A$, $A_2 = A^p$, $p \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ та, при окремому виборі просторів та операторів, доведено рівномірну збіжність побудованих апроксимант. У підрозділі 3.4 для довільних банахових просторів $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$ розглянуто апроксиманти типу Паде для класів функцій, степеневі розвинення яких мають узагальнені моментні з операторами $A_1 = A$, $A_2 = A^2 + \alpha A$, $\alpha \in \mathbb{R}$. У підрозділі 3.5 для довільних банахових просторів $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$ розглянуто апроксиманти типу Паде рядів, для коефіцієнтів яких мають місце узагальнені моментні зображення з операторами $A_1 = A^2$, $A_2 = A^3$.

Подяки. Висловлюю щиру вдячність науковому керівнику доктору фіз.-мат. наук Голубу Анатолію Петровичу.

Розділ 1

Огляд літератури

Даний розділ присвячено огляду літератури, що стосується апроксимацій Паде та узагальнених моментних зображень.

1.1. Апроксимації типу Паде функцій кількох змінних

Друга половина минулого сторіччя ознаменувалася, проміж іншого, бурхливим розвитком досліджень з теорії наближення функцій. Такий хід подій був зумовлений потужним прогресом обчислювальних технологій, які дозволяли проводити складні розрахунки з надзвичайно високою точністю. Зокрема, виявлення фізиками практичного застосування апроксимацій Паде [63] та їх використання для розв'язування певних задач математичного аналізу [69, 92, 99, 103, 104] стали поштовхом для детального дослідження даного різновиду наближень та побудові його всеможливих узагальнень.

Нехай функція f задана формальним степеневим рядом

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k, \tag{1.1}$$

а P_M та Q_M – многочлени степеня $\leq M$ та $\leq N$, відповідно, які мають вигляд

$$P_M(z) = \sum_{j=0}^{M} p_j z^j, \tag{1.2}$$

та

$$Q_N(z) = \sum_{j=0}^{N} q_j z^j. \qquad (1.3)$$

Означення 1.1. ([126].) Раціональна функція

$$[M/N]_f(z) = \frac{P_M(z)}{Q_N(z)}, \qquad (1.4)$$

називається апроксимантою Паде порядку $[M/N]$ для формального степеневого ряду (1.1), якщо виконується умова

$$Q_N(z)f(z) - P_M(z) = \sum_{i \geq M+N+1} d_i z^i = O(z^{M+N+1}), \quad \text{при} \quad z \to 0, \qquad (1.5)$$

тобто, якщо в степеневому розвинені $Q_N f - P_M$ перші $m + n + 1$ членів дорівнюють нулеві.

При цьому апроксимантою Паде $[M/N]_f$ будемо вважати нескоротну форму відношення $\frac{P_M(z)}{Q_N(z)}$.

Вперше таке наближення функцій відношеннями двох поліномів використовував Даніель Бернуллі (1730) [70]. Про раціональні наближення такого вигляду в своїх листах неодноразово писали Леонард Ейлер та Генріх Ламберт (1730 рр.). А в 1776 році Жозефом-Луї Лагранжем було опубліковано статтю, що стосувалася розв'язування диференціальних рівнянь за допомогою неперервних дробів, у якій було вказано підхідні дроби, що якраз є апроксимантами Паде, та вказано точність, з якою вони наближали розв'язок, — "аж до порядку $x^p x^q = x^{p+q}$". Багато науковців саме цю роботу і вважають народженням апроксимацій Паде [70]. Базовою роботою для розвитку теорії раціональних наближень стала книга Оґюстена-Луї Коші (1821) [79], у якій вивчалися рекурсивні ряди. На основі цих досліджень у 1846 році у роботах німецького математика Карла Якобі з'явилися апроксиманти Паде вже у сучасному вигляді [117]. Якобі також отримав детермінантні вирази для чисельників та знаменників цих апроксимацій [70].

Починаючи з 1881 року Фердинандом Фробеніусом було проведено ряд досліджень щодо алгебраїчних властивостей апроксимацій Паде та розташовано їх у двовимірну таблицю [109]. Проте першим, хто обгрунтував важливість такого табличного розташування апроксимацій, був французький математик Анрі Паде [70]. У своїй дисертаційній роботі [129], та в роботах [126], [127] Паде вивчив структуру таблиці, яка сьогодні на його честь називається таблицею Паде, дослідив властивості раціональних апроксимацій функції e^x, побудував апроксиманти Паде порядку $[N-1, N]$ для деяких гіпергеометричних функцій [31, 70] та розглядав умови існування апроксимацій [127, 129]. Найбільш повне узагальнення результатів Паде для функцій однієї змінної було отримано американським фізиком Джорджем Бейкером у 1973-1975 рр. [61, 62].

Слід зауважити, що означення 1.1 є класичним означенням апроксимант Паде і вперше було введено у роботі Фробеніуса [109]. У літературі часто зустрічається й інший підхід до означення апроксимант Паде.

А саме, розглядають в означенні 1.1 замість виразу (1.5) співвідношення

$$f(z) - \frac{P_M(z)}{Q_N(z)} = O(z^{M+N+1}), \quad \text{при} \quad z \to 0. \tag{1.6}$$

У книзі [62] наведено приклад, який показує, що, взагалі кажучи, співвідношення (1.5) та (1.6) не є еквівалентними, якщо в якості відношення $P_M(z)/Q_N(z)$ брати його нескоротну форму.

При переході до багатовимірних узагальнень важливою обставиною є те, що сумування степеневих рядів двох та більшої кількості змінних можна проводити у різному порядку. У зв'язку з цим виділяють чотири основні підходи [96] до означення апроксимацій типу Паде функцій багатьох змінних, а саме,

- загальні апроксимації Паде [83, 116];
- однорідні апроксимації Паде [105], [67];

- символьно-числові апроксимації Паде [81];
- апроксимації, що пов'язані з гіллястими ланцюговими дробами [119].

Ми детально зупинимося на означенні загальних апроксимацій типу Паде та їх основних властивостях.

Для простоти позначень розглянемо випадок функцій двох змінних.

Задача побудови раціональних апроксимант типу Паде для формальних степеневих рядів двох змінних полягає в наступному: нехай

$$f(z,w) = \sum_{(k,j)\in\mathbb{Z}_+^2} s_{k,j} z^k w^j, \tag{1.7}$$

тоді ставиться завдання відшукати підмножини цілочисельної сітки $\mathcal{N}, \mathcal{D}$ $\mathcal{E}$ та поліноми

$$P_{\mathcal{N}}(z,w) = \sum_{(k,m)\in\mathcal{N}} p_{k,m} z^k w^m, \quad \mathcal{N} \subseteq \mathbb{Z}_+^2, \tag{1.8}$$

$$Q_{\mathcal{D}}(z,w) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{D}} q_{k,m} z^k w^m, \quad \mathcal{D} \subseteq \mathbb{Z}_+^2, \tag{1.9}$$

таким чином, що виконувалася умова

$$Q_{\mathcal{D}}(z,w)f(z,w) - P_{\mathcal{N}}(z,w) = \sum_{(k,m)\in\mathbb{Z}_+\setminus\mathcal{E}} e_{k,m} z^k w^m, \tag{1.10}$$

тобто, щоб якомога більше перших коефіцієнтів $e_{k,m}$ перетворювалися на нуль.

Звідси, прирівнюючи коефіцієнти при степенях $z^\alpha w^\beta$ для $Q_{\mathcal{D}}(z,w)f(z,w)$ та $P_{\mathcal{N}}(z,w)$, з рівності (1.10) для визначення апроксиманти отримуємо дві системи рівнянь: неоднорідну для коефіцієнтів чисельника

$$\sum_{k=0}^{\alpha} \sum_{m=0}^{\beta} q_{k,m} s_{\alpha-k,\beta-m} = p_{\alpha,\beta}, \quad (\alpha,\beta) \in \mathcal{N} \tag{1.11}$$

та однорідну для коефіцієнтів знаменника

$$\sum_{k=0}^{\alpha}\sum_{m=0}^{\beta} q_{k,m}s_{\alpha-k,\beta-m} = 0, \quad (\alpha,\beta)\in\mathcal{E}, (\alpha,\beta)\notin\mathcal{N}. \tag{1.12}$$

При виконанні умови (1.10) множина співпадання коефіцієнтів (інтерполяційна множина) $\mathcal{E}$ повинна володіти властивістю включення (від англ. "inclusion property"), тобто

$$(i,j)\in\mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad \{(k,l)|k\le i, l\le j\}\subseteq\mathcal{E}. \tag{1.13}$$

Якщо вважати, що вільний коефіцієнт знаменника $q_{0,0} = 1$, то, в загальному випадку, для кількості елементів множин $\mathcal{N},\mathcal{D}$ та $\mathcal{E}$ буде справедлива рівність:

$$\#\mathcal{E} = \#\mathcal{N} + \#\mathcal{D} - 1. \tag{1.14}$$

Рівність (1.14) є основою більшості апроксимативних схем.

Перша із апроксимативних схем була запропонована англійським фізиком Джоном Чісхолмом у 1973 році для побудови так званих діагональних апроксимант типу Паде функцій двох змінних [83], де в якості множин $\mathcal{D}$ та $\mathcal{N}$ розглядаються квадрати

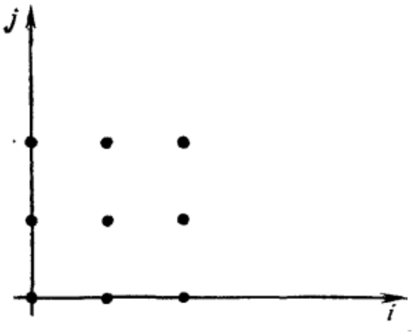
$$\mathcal{D} = \mathcal{N} = ([0,L]\times[0,L])\cap\mathbb{Z}_+^2. \tag{1.15}$$

При такому означенні множин чисельники та знаменники апроксиманти матимуть наступний вигляд [60]

$$P^{[L,L]}(z,w) = \sum_{k=0}^{L}\sum_{m=0}^{L} p_{k,m}z^k w^m, \tag{1.16}$$

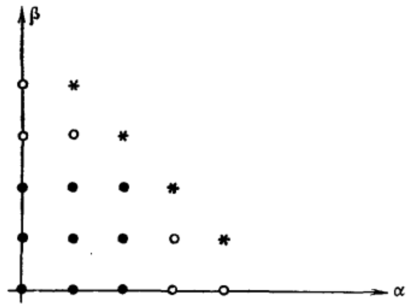
$$Q^{[L,L]}(z,w) = \sum_{k=0}^{L}\sum_{m=0}^{L} q_{k,m}z^k w^m \tag{1.17}$$

а множини $\mathcal{N},\mathcal{D}$ та $\mathcal{E}$, наприклад, для [2/2]-апроксиманти, відповідно, зображаються наступним чином [62]



а)

Рис. 1.1: 1. Області $\mathcal{D}$ та $\mathcal{N}$.



б)

Рис. 1.2: 2. Область $\mathcal{E}$.

Згодом такий же метод побудови було розроблено для діагональних апроксимант типу Паде функцій d змінних [82,83]. Роком пізніше, Hughes Jones та Makinson у [115, 116] поширили апроксимативні схеми Чісхолма на клас позадіагональних апроксимант, тобто для цілочисельних множин більш загального характеру, наприклад

$$\mathcal{D} = ([0, N_1] \times [0, N_2]) \cap \mathbb{Z}_+^2, \quad \mathcal{N} = ([0, M_1] \times [0, M_2]) \cap \mathbb{Z}_+^2, \tag{1.18}$$

а також розробили метод зубців для побудови апроксимант Паде функцій багатьох змінних.

В загальному, якщо позначити через

$$\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_d) \in \mathbb{C}^d,$$

$$\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}_+^d,$$

$$\mathbf{z}^{\mathbf{k}} = z_1^{k_1} z_2^{k_2} \ldots z_d^{k_d},$$

то для функції d змінних, заданої формальним степеневим рядом

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d} s_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}, \tag{1.19}$$

означення 1.1 буде мати наступний вигляд:

Означення 1.2. ([116].) Раціональна функція d змінних

$$[\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f(\mathbf{z}) = \frac{P_{\mathcal{N}}(\mathbf{z})}{Q_{\mathcal{D}}(\mathbf{z})} = \frac{\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{N}} p_{\mathbf{j}}\mathbf{z}^{\mathbf{j}}}{\sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{N}} q_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}}$$

$\mathcal{N},\mathcal{D} \subset \mathbb{Z}_+^d$, називається апроксимантою Паде порядку $[\mathcal{N}/\mathcal{D}]$ для формального степеневого ряду (1.19), якщо виконується умова

$$Q_{\mathcal{D}}f(\mathbf{z}) - P_{\mathcal{N}}(\mathbf{z}) = \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{Z}_+^{\mathbf{d}}\setminus\mathcal{E}} \mathbf{e}_{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{z}^{\boldsymbol{\alpha}}, \tag{1.20}$$

тобто, якомога більше перших коефіцієнтів $e_{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{E}$ перетворюються на нуль.

Роботи Чісхолма та Hughes Jones стали поштовхом для розвитку теорії апроксимацій Паде функцій кількох змінних. З того часу багато робіт присвячувалися та присвячуються зараз різноманітним методам побудови та дослідженню властивостей апроксимант типу Паде функцій багатьох змінних.

Перш за все виникало питання про поширення відповідних властивостей одновимірних апроксимант Паде для їх багатовимірних аналогів.

Властивості коваріації одновимірних апроксимант типу Паде майже без змін поширюються на багатовимірний, а зокрема на двовимірний випадок:

Теорема 1.3. *([Abouir, Cuyt [54]].) Нехай $[\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f$ є загальною апроксимацією Паде функції f, як визначено раніше, і нехай $g(z,w) = 1/f(z,w)$, де $f(0,0) \neq 0$. Тоді $[\mathcal{D}/\mathcal{N}]_{1/f}$ є відповідною апроксимантою функції g.*

Теорема 1.4. *([Lutterodt [120], Hugles Jones [116]].) Нехай $[\mathcal{N}/\mathcal{N}]_f = P_{\mathcal{N}}/Q_{\mathcal{N}}$ є загальною апроксимацією типу Паде функції f, як визначено раніше, і нехай $\tilde{f} = (af+b)/(cf+d)$, тоді апроксиманта $[\mathcal{N}/\mathcal{N}]_{\tilde{f}}$ існує* *та визначається формулою*

$$[\mathcal{D}/\mathcal{N}]_{\tilde{f}} = \frac{aP_{\mathcal{N}} + bQ_{\mathcal{N}}}{cP_{\mathcal{N}} + dQ_{\mathcal{N}}}$$

Оскільки, загальні апроксимації типу Паде є багатовимірним узагальненням одновимірних, то, відповідно, апроксимації Паде функцій однієї змінної можна розглядати як окремий випадок багатовиміних апроксимацій. Нехай $S \subset \mathbb{Z}_+^2$ — деяка підмножина цілочисельної сітки, означимо наступні елементи

$$S_z = max\{i|(i,j) \in S\},$$

$$S_w = max\{j|(i,j) \in S\}.$$

Для функцій f двох змінних розглянемо наступні оператори проектування

$$\mathcal{P}_z(f) = f(z, 0),$$

$$\mathcal{P}_w(f) = f(0, w)$$

У вищеозначених термінах справедливі наступні властивості проекцій

Теорема 1.5. *([Karlsson, Willan [118]].) Якщо для множин $\mathcal{E}$,$\mathcal{N}$ та $\mathcal{D}_w$ виконується умова $\mathcal{E}_w \geq \mathcal{N}_w + \mathcal{D}_w$, тоді одновимірна апроксиманта Паде $[\mathcal{N}_w/\mathcal{D}_w]_{\mathcal{P}_w(f)}$ дорівнює нескоротній формі $\mathcal{P}_w([\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f)$. Відповідно, якщо $\mathcal{E}_z \geq \mathcal{N}_z + \mathcal{D}_z$, тоді $[\mathcal{N}_z/\mathcal{D}_z]_{\mathcal{P}_z(f)}$ дорівнює нескоротній формі $\mathcal{P}_z([\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f)$.*

Слід зауважити, що дана властивість проекцій виконується не для всіх типів загальних апроксимант Паде [96].

Не менш важливими також являються властивості збіжності апроксимант типу Паде.

В одновимірному випадку досліджувалися різні типи збіжності апроксимант до самої функції. Зокрема багато робіт сучасника Анрі Паде, De Montessus розглядали умови збіжності за мірою [121–124], таким же ж типом збіжності займалися Zinn-Justin [131], Нуттал [125] та Pommerenke [130]. Умови ж рівномірної збіжності було встановлено Karlsson and Wallin [118].

Вище вказані результати були також розглянуті у багатовимірному випадку. Збіжність за мірою розглядалася Гончаром А. О. [36] та колективом авторів A. Cuyt, K. Driver та D. Lybinsky [94, 98]. Рівномірна збіжність однорідних апроксимант Паде досліджувалася A. Cuyt та D. Lybinsky [88].

Серед українських дослідників питаннями апроксимацій Паде займалися Дзядик В. К. та його учні, російська школа дала імена таких науковців як Гончар А. О., Нікішин Є. М., Рахманов Є. А., Суєтін С. П., Буслаєв В. І., Аптєкарєв О. І., Сорокін В. М., а білоруська школа — Русак В. М., Старовойтов О. П., Пекарський О. А, Ровба Є. О.

У аспекті гіллястих ланцюгових дробів суттєвий вклад в теорію раціональних апроксимацій функцій кількох змінних внесли В. Я. Скоробагатько, П. І. Бондарчук, Д. І. Боднар, Х. Й. Кучмінська, М. С. Сявавко, І. І. Демків та ін.

1.2. Узагальнені моментні зображення

Поняття узагальнених моментних зображень було запропоновано В. К.Дзядиком у 1971 році [31].

Означення 1.6. ([38].) Будемо говорити, що для числової послідовності комплексних чисел $\{s_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ має місце узагальнене моментне зображення, якщо на декартовому добутку лінійних просторів $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ виконується двопараметрична сукупність рівностей

$$s_{k+j} = \langle x_k, y_j\rangle,\ k, j \in \mathbb{Z}_+, \tag{1.21}$$

де $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}\subset\mathcal{X}$, $\{y_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}\subset\mathcal{Y}$, а $\langle .,.\rangle$ — білінійна форма, визначена на $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$.

Поштовхом для введення такого поняття стало детальне дослідження А-методу [39], методу розв'язування лінійних диференціальних рівнянь, запропонованого В. К. Дяздиком, оскільки у деяких випадках застосування даного методу призводило до побудови діагональних поліномів Паде [31]. Порівняння отриманих результатів з відомою класичною проблемою моментів і дозволило Дзядику прийти до поняття узагальнених моментних зображень.

Вперше задачу, що пов'язана з класичною проблемою моментів, розглядав П. Чебишев [39].

Відштовхуючись від коефіцієнтів степеневого ряду

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} s_k z^k, \tag{1.22}$$

Чебишев ставив задачу знайти таку міру $d\mu$ на $[0,1]$, щоб виконувалася рівність

$$s_k = \int_0^1 t^k d\mu(t), \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+, \quad \Leftrightarrow \quad f(z) = \int_0^1 \frac{1}{1-zt} d\mu(t), \quad z \notin [1, \infty] \tag{1.23}$$

Якщо для послідовності коефіцієнтів степеневого розвинення деякої функції класична проблема проблема моментів розв'язана, то тоді її апроксиманти Паде можуть бути однозначно побудовані, доведена їхня збіжність та отримано оцінки швидкості збіжності. Проте умови розв'язності проблеми моментів є дуже жорсткими, і, наприклад, для жодної цілої функції вони не виконуються [39].

Відомо, що задача про узагальнені моментні може бути сформульована на мові лінійних операторів [31]. А саме, у випадку, коли простори $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$ — нормовані і у просторі $\mathcal{X}$ існує обмежений лінійний оператор $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, такий що

$$Ax_k = x_{k+1}, \quad k \in \mathbb{Z}_+$$

а у просторі $\mathcal{Y}$ існує лінійний обмежений оператор $A^* : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ такий, що

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle, \tag{1.24}$$

для $\forall x \in \mathcal{X}, \forall y \in \mathcal{Y}$ (будемо називати такий оператор спряженим до оператора A відносно білінійної форми $\langle\cdot,\cdot\rangle$), то зображення (2.1) еквівалентне зображенню

$$s_k = \langle A^k x_0, y_0\rangle, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{1.25}$$

При цьому, якщо простори $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$ — банахові, білінійна форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$ є роздільно неперервною, а оператор A — обмежений, то ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k \tag{1.26}$$

буде збіжним в околі початку координат до аналітичної функції f, яка може бути зображена у вигляді

$$f(z) = \langle \mathcal{R}_z(A) x_0, y_0\rangle. \tag{1.27}$$

де $\mathcal{R}_z(A) = (I - zA)^{-1}$ — резольвентна функція оператора A.

Узагальнені моментні зображення охоплюють набагато ширший клас функцій, оскільки умови їхнього існування є більш слабкими у порівнянні із класичною проблемою моментів [31].

Якщо в означенні 1.6, в якості просторів $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$ розглядати гільбертів простір $L_2[\Delta, d\mu]$ функцій сумовних з квадратом за мірою $d\mu$ на множині $\Delta \subset \mathcal{R}$, білінійну форму означити як $\langle x, y\rangle = \int_\Delta x(t)y(t)d\mu$, та в якості елементів x_k взяти $x_k(t) = t^k, k \in \mathbb{Z}_+$, а в якості елементів y_j — $y_j(t) = t^j, j \in \mathbb{Z}_+$, то тоді ми отримаємо зображення, еківалентне класичній проблемі моментів (1.23).

На основі узагальнених моментних зображень та дослідження біортогональних систем функцій В. К. Дзядиком було запропоновано метод побудови апроксимант Паде функцій однієї змінної [38]. Даний метод виявився досить ефективним, оскільки він охоплював більш широкий клас функцій, ніж класична проблема моментів. Зокрема, побудові цього методу передували дослідження асимптотичної поведінки діагональних апроксимант Паде для функцій $\exp(z), (1+z)^\alpha$ (В. К. Дзядик та Л. І. Філозоф [43]) та функцій $\sin z, \cos z, \operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z$ (В. К. Дзядик [41]).

А. П. Голубом було побудовано апроксиманти Паде для базисних гіпергеометричних рядів [15, 19, 23], функції $\arcsin z$ [13], досліджено властивості інваріантності [22] та поширено даний метод на деякі узагальнення апроксимант Паде [14, 18, 20, 23].

У 2013 році А. П. Голубом та Л. О. Чернецькою метод узагальнених моментних зображень було поширено на випадок двовимірних послідовностей $\{s_{k,m}\}_{k,m\in\mathbb{Z}_+}$ [28], а згодом, у 2014 році, і на випадок d-вимірних послідовностей, $d \geq 2$.

Означення 1.7. ([33].) Узагальненим моментним зображенням d-вимірної числової послідовності $\{s_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d}$ на добутку лінійних просторів $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ називається сукупність рівностей

$$s_{\mathbf{k}+\mathbf{j}} = \langle x_{\mathbf{k}}, y_{\mathbf{j}}\rangle, \quad \mathbf{k}, \mathbf{j} \in \mathbb{Z}_+^d, \tag{1.28}$$

де $\{x_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d} \subset \mathcal{X}$, $\{y_{\mathbf{j}}\}_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}_+^d} \subset \mathcal{Y}$, а $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — білінійна форма на $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$.

Задача про багатовимірні узагальнені моментні зображення теж може бути сформульована на мові лінійних операторів [33].

Якщо має місце узагальнене моментне зображення вигляду (1.28), і в просторі $\mathcal{X}$ існують комутуючі між собою лінійні оператори

$$A_j : \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \quad j = \overline{1,d},$$

такі, що

$$A_j x_{\mathbf{k}} = x_{\mathbf{k}+\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{j}}}, \quad j = \overline{1,d}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d,$$

де

$$\boldsymbol{\delta}_j = (\delta_{j,1}, \delta_{j,2}, ..., \delta_{j,d}), \quad \delta_{j,k} = \begin{cases} 1, \ j = k \\ 0, \ j \neq k, \end{cases}$$

а в просторі $\mathcal{Y}$ існують лінійні оператори

$$A_j^* : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}, \quad j = \overline{1,d},$$

спряжені відповідно до операторів A_j, $j = \overline{1,d}$, відносно білінійної форми $\langle \cdot, \cdot \rangle$ у сенсі (1.24), то зображення вигляду (1.28) буде еквівалентним зображенню

$$s_{\mathbf{k}} = \langle A_1^{k_1} A_2^{k_2} ... A_d^{k_d} x_{\mathbf{0}}, y_{\mathbf{0}} \rangle, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d. \tag{1.29}$$

Як і в одновимірному випадку, якщо при цьому простори $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — банахові, білінійна форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — роздільнонеперервна, а оператори A_j, $j = \overline{1,d}$, — обмежені, то ряд

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d} s_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d} s_{\mathbf{k}} z_1^{k_1} z_2^{k_2} ... z_d^{k_d}$$

буде збіжним в околі початку координат до аналітичної функції f від d змінних, яка може бути записана у вигляді

$$f(\mathbf{z}) = \langle \mathcal{R}_{z_1}(A_1) \mathcal{R}_{z_2}(A_2) ... \mathcal{R}_{z_d}(A_d) x_0, y_0 \rangle,$$

де $\mathcal{R}_{z_j}(A_j) = (I - z_j A_j)^{-1}$ — резольвентні функції операторів A_j, $j = \overline{1,d}$.

На основі багатовимірних узагальнених моментних зображень А. П. Голубом та Л. О. Чернецькою було розроблено метод побудови загальних апроксимант Паде функцій кількох змінних [28, 33]. Такий метод є багатовимірним узагальненням вищезгаданого методу В. К Дзядика для побудови раціональних апроксимант функцій однієї змінної.

Для зручності далі будуть використовуватися позначення запропоновані у [33].

При $p = \overline{0,d}$, позначимо через Ω_p множину

$$\Omega_p = \{\omega \subseteq \{1, 2, \ldots, d\} \colon \#\omega = p\},$$

та впорядкуємо елементи кожної з множин $\omega \in \Omega_p$

$$\omega = \{l_1(\omega), l_2(\omega), \ldots, l_p(\omega)\}$$

так, що

$$1 \leq l_1(\omega) < l_2(\omega) < \cdots < l_p(\omega) \leq d.$$

Також розглянемо множини $\overline{\omega} = \{1, 2, \ldots, d\} \backslash \omega$,

$$\overline{\omega} = \{m_1(\omega), m_2(\omega), \ldots, m_{d-p}(\omega)\} \in \Omega_{d-p},$$

де

$$1 \leq m_1(\omega) < m_2(\omega) < \cdots < m_{d-p}(\omega) \leq d.$$

Для кожної множини $\omega \in \Omega_p, p = \overline{1, d}$, будемо використовувати позначення

$$\boldsymbol{\delta}(\omega) = (\delta_1(\omega), \delta_2(\omega), ..., \delta_d(\omega)),$$

де

$$\delta_i(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{при } i \in \omega \\ 1, & \text{при } i \notin \omega, \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\omega) = (\varepsilon_1(\omega), \varepsilon_2(\omega), ..., \varepsilon_d(\omega)),$$

де

$$\varepsilon_i(\omega) = \begin{cases} -1, & \text{при } i \in \omega \\ 1, & \text{при } i \notin \omega, \end{cases}$$

так що

$$\delta_i(\omega) = \frac{\varepsilon_i(\omega) + 1}{2}, \quad i = \overline{1, d}.$$

Відповідно, нульовий та одиничний елементи із $\mathbb{Z}_+^d$ запишемо як

$$\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}_+^d, \quad \mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{Z}_+^d,$$

звідси

$$\mathbf{1} = \boldsymbol{\delta}(\emptyset), \quad \mathbf{0} = \boldsymbol{\delta}(\{1, 2, \ldots, d\}).$$

Для покоординатного добутку двох довільних елементів $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ простору $\mathbb{Z}_+^d$, де $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_d)$,$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_d)$, будемо використовувати наступне позначення

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = (a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots, a_d b_d).$$

Для кожного вектора $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}_+^d$ визначимо множину $\Delta(\mathbf{a})$, яка має вигляд

$$\Delta(\mathbf{a}) = \{\mathbf{j} = (j_1, j_2, \ldots, j_d) \in \mathbb{Z}_+^d \colon j_i \in \{0, 1, \ldots, a_i\}, i = \overline{1, d}\}.$$

У вищевведених позначеннях наведемо результат, що є основою всіх застосувань методу узагальнених моментних зображень до побудови багатовимірних апроксимант Паде.

Теорема 1.8. *([33].) Нехай для коефіцієнтів формального степеневого ряду*

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d} s_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}, \tag{1.30}$$

де $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_d) \in \mathbb{C}^d, \mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}_+^d, \mathbf{z}^{\mathbf{k}} = z_1^{k_1} z_2^{k_2} \ldots z_d^{k_d}$, *справджується узагальнене моментне зображення (1.28).*

Тоді, якщо для деякого $\mathbf{N} = (N_1, N_2, \ldots, N_d)$ *існує узагальнений поліном*

$$\mathbf{Y}_{\mathbf{N}} = \sum_{\mathbf{j} \in \boldsymbol{\Delta}(\mathbf{N})} c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N})} y_{\mathbf{j}}, \quad c_{\mathbf{N}}^{(\mathbf{N})} \neq 0, \tag{1.31}$$

для якого виконуються умови біортогональності

$$\langle x_{\mathbf{k}}, \mathbf{Y}_{\mathbf{N}} \rangle = 0 \tag{1.32}$$

при $\mathbf{k} \in \Delta(\mathbf{N}) \backslash \{\mathbf{N}\}$, *то раціональна функція*

$$[\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f(\mathbf{z}) = \frac{P_{\mathcal{N}}(\mathbf{z})}{Q_{\mathcal{D}}(\mathbf{z})} \tag{1.33}$$

де

$$Q_{\mathcal{D}}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{j}\in\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{N})} \mathbf{c}^{(\mathbf{N})}_{\mathbf{N}-\mathbf{j}}\mathbf{z}^{\mathbf{j}}, \qquad (1.34)$$

$$P_{\mathcal{N}}(\mathbf{z}) = \sum_{p=0}^{d}\sum_{\omega\in\Omega_p}\prod_{r=1}^{p}\mathbf{z}_{l_r(\omega)}^{N_{l_r(\omega)}} \sum_{\mathbf{k}\in\Delta(\mathbf{N}-\boldsymbol{\delta}(\omega)\circ\mathbf{1})} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}\times$$

$$\times \sum_{\mathbf{j}\in\Delta(\boldsymbol{\delta}(\overline{\omega})\circ\mathbf{N}-\boldsymbol{\delta}(\omega)\circ\mathbf{k})} c^{(\mathbf{N})}_{\boldsymbol{\delta}(\omega)\circ\mathbf{N}+\boldsymbol{\varepsilon}(\omega)\circ\mathbf{j}} s_{\mathbf{k}+\boldsymbol{\varepsilon}(\omega)\circ\mathbf{j}} \qquad (1.35)$$

матиме розвинення у степеневий ряд, коефіцієнти якого співпадатимуть з коефіцієнтами ряду (1.30) для всіх $\mathbf{k} \in \Delta(2\mathbf{N})\backslash\{(2N_1, 2N_2, \ldots, 2N_d)\}$, *а отже ця раціональна функція є* d*-вимірною апроксимантою Паде порядку* $[\mathcal{N}/\mathcal{D}]$, *де* $\mathcal{N} = \Delta(2\mathbf{N})\backslash\prod_{i=1}^{d}\{N_i, N_i+1, \ldots, 2N_i\}$, $\mathcal{D} = \Delta(2\mathbf{N})$.

Слід зазначити, що такий спосіб побудови раціональних апроксимант спочатку був розроблений для випадку функції двох змінних [28] та трьох змінних [30]. Дана теорема буде також справедливою, якщо для узагальненого полінома $Y_{\mathbf{N}}$ умови біортогональності вигляду (1.32) будуть виконуватися для $\mathbf{k} \in \mathcal{H}_{\mathbf{N}}$, де $\mathcal{H}_{\mathbf{N}}$ — деяка підмножина $\mathbb{Z}_+^d$, що містить рівно $\prod_{i=1}^{d}(N_i+1)-1$ точок.

На основі запропонованого методу, А. П. Голубом та Л. О. Чернецькою було досліджено та побудовано апроксиманти Паде для псевдодвовимірних функцій, тобто функцій вигляду

$$f(z,w) = \int_0^1 \frac{d\mu(t)}{(1-zt)(1-wt)} = \frac{wg(w)-zg(z)}{w-z},$$

де

$$g(z) = \int_0^1 \frac{d\mu(t)}{1-zt} \ \ [28],$$

гіпергеометричних рядів Аппеля [29], гіпергеометричних рядів Гумберта [32] та рядів Лаурічелли [30, 33].

У [33] також встановлено формулу похибки для апроксимацій Паде, побудованих на основі теореми 1.8.

На даний час, метод багатовимірних узагальнених моментних зображень для побудови та дослідження багатовимірних апроксимант Паде набуває розвитку, і саме йому буде присвячено розділ 3 даної дисертаційної роботи.

Зазначимо, що задачі, подібні до побудови узагальнених моментних зображень також розглядалися і іншими науковцями у таких роботах [2, 72, 74] та ін.

Розділ 2

Теореми існування багатовимірних узагальнених моментних зображень

Даний розділ присвячено дослідженню необхідних та достатніх умов існування багатовимірних узагальнених моментних зображень.

Результати розділу 2 опубліковано у роботі [10].

2.1. Умови існування узагальнених моментних зображень у одновимірному випадку

Оскільки метод узагальнених моментних зображень запропонований В. К. Дзядиком [38] виявився досить ефективним для дослідження та побудови раціональних апроксимант, то актуальним виявилося також питання про те, для яких функцій може застосовуватися такий метод. У зв'язку з цим у роботі [37] В. К. Дзядиком та А. П. Голубом було встановлено необхідні та достатні умови існування узагальнених моментних зображень для довільної числової послідовності.

Теорема 2.1. *([37].) Нехай $\mathcal{H}$ — нескінченновимірний сепарабельний гільбертів простір та $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ — ортонормований базис в ньому. Тоді, для того щоб послідовність $\{s_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ мала узагальнене моментне зображення вигляду*

$$s_{k+j} = \langle x_k, y_j \rangle,\ k, j \in \mathbb{Z}_+, \tag{2.1}$$

де

$$\langle x, y\rangle = \sum_{m=0}^{\infty}(x, e_m)(y, e_m),$$

а елементи $x_k, k \in \mathbb{Z}_+$, *та* $y_j, j \in \mathbb{Z}_+$, *мають вигляд:*

$$x_k = \sum_{m=0}^{k} \alpha_m^{(k)} e_m, \quad \alpha_k^{(k)} \neq 0, k \in \mathbb{Z}_+; \tag{2.2}$$

$$y_j = \sum_{m=0}^{j} \beta_m^{(j)} e_m, \quad \beta_j^{(j)} \neq 0, j \in \mathbb{Z}_+, \tag{2.3}$$

необхідно і достатньо, щоб всі визначники Ганкеля цієї послідовності

$$H_N := H_{0,N} = \det \|s_{k+j}\|_{k,j=0}^{N}, \quad N \in \mathbb{Z}_+,$$

були відмінними від нуля.

При цьому будуть виконуватися співвідношення

$$\alpha_p^{(p)} \beta_p^{(p)} = \frac{H_p}{H_{p-1}}, \quad p \in \mathbb{Z}_+, \quad H_{-1} := 1, \tag{2.4}$$

і якщо зафіксувати послідовності ненульових чисел $\{\alpha_p^{(p)}\}_{p\in\mathbb{Z}_+}$ *та* $\{\beta_p^{(p)}\}_{p\in\mathbb{Z}_+}$, *що задовольняють (2.4), то решта коефіцієнтів в (2.2) будуть єдиним чином визначатися за формулами:*

$$\alpha_p^{(k)} = \alpha_k^{(k)} \frac{S_k\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & p-1 & k \\ 0 & 1 & \dots & p-1 & p \end{pmatrix}}{H_p}, \quad p = \overline{0, k},\ k \in \mathbb{Z}_+, \tag{2.5}$$

$$\beta_p^{(j)} = \beta_j^{(j)} \frac{S_j\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & p-1 & p \\ 0 & 1 & \dots & p-1 & j \end{pmatrix}}{H_p}, \quad p = \overline{0, j},\ j \in \mathbb{Z}_+, \tag{2.6}$$

де $S_N\begin{pmatrix} l_0 & l_1 & \dots & l_r \\ n_0 & n_1 & \dots & n_r \end{pmatrix}$ *— мінори матриці*

$$S_N = \|s_{k+j}\|_{k,j=0}^N = \left\| \begin{matrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_N \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{N+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_N & s_{N+1} & \cdots & s_{2N} \end{matrix} \right\|, \quad N \in \mathbb{Z}_+,$$

з номерами стовпчиків $l_0, l_1, \dots, l_r$ *і номерами рядків* $n_0, n_1, \dots, n_r$*, при* $l_m \leq N$*,* $n_m \leq N$*,* $m = \overline{0, r}$*.*

Як було зазначено у попередньому розділі, задача про узагальнені моментні зображення може бути сформульована в термінах лінійних операторів

$$s_k = \langle A^k x_0, y_0 \rangle, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.7}$$

Тоді якщо простори $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$ — банахові, білінійна форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — роздільно неперервна, а оператор A — обмежений, то ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k$$

буде збіжним в околі початку координат до аналітичної функції f, яка може бути зображена у вигляді

$$f(z) = \langle \mathcal{R}_z(A) x_0, y_0 \rangle. \tag{2.8}$$

На практиці застосування методу узагальнених моментних зображень до побудови раціональних апроксимант є досить зручним для функцій, які можуть бути записані у вигляді (2.8), оскільки в такому випадку можна оцінювати похибку апроксиманти [31]. Тому виникло питання про те, якими властивостями повинна володіти функція для того, щоб її можна було записати у вигляді (2.8) через резольвентну функцію лінійного обмеженого оператора.

Насправді відповідь на це питання була знайдена Д. З. Аровим в [1] ще до того, як був запропонований метод узагальнених моментних зображень.

Теорема 2.2. *([1].) Для довільної функції f, аналітичної в крузі $K_R = \{z : |z| \leq R\}$, $0 < R < \infty$, і довільного нескінченновимірного сепарабельного гільбертового простору $\mathcal{H}$ існують елементи $x_0, y_0 \in \mathcal{H}$ та лінійний обмежений оператор $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, норма якого $\|A\| < \frac{1}{R}$ і такий, що $\forall z \in K_R$*

$$f(z) = (\mathcal{R}_z(A)x_0, y_0)\,. \tag{2.9}$$

Зауваження. Зображення (2.9) буде еквівалентним зображенню (2.8), якщо в якості білінійної форми взяти

$$\langle x, y\rangle = \sum_{m=0}^{\infty}(x, e_m)(y, e_m),$$

де $\{e_p\}_{p\in\mathbb{Z}_+}$ — ортонормований базис простору $\mathcal{H}$.

Аналогічний результат було встановлено А. П. Голубом в [24] для випадку цілих функцій.

Теорема 2.3. *([24].) Для довільної цілої функції f і довільного нескінченновимірного сепарабельного гільбертового простору $\mathcal{H}$ існують елементи $x_0, y_0 \in \mathcal{H}$ та лінійний обмежений оператор $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ з нульовим спектральним радіусом такий, що має місце зображення*

$$f(z) = (\mathcal{R}_z(A)x_0, y_0)\,. \tag{2.10}$$

Якщо при цьому ціла функція має порядок $\rho > 0$, то оператор A може бути вибраний так, що для $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[n]{\|A^n\|} \leq \frac{C}{n^{\frac{1}{\rho}}}, \tag{2.11}$$

де $C = const$.

Вищевказані умови існування узагальнених моментних зображень та представлення функцій через резольвентні функції операторів вдалося поширити на випадок багатовимірних узагальнених моментних зображень. Відповідні результати розглядаються у наступних пунктах даного розділу.

2.2. Теореми існування багатовимірних узагальнених моментних зображень: умови на послідовності

Відомо, що нумеруюча функція Кантора

$$c(x,y) = \frac{(x+y)^2 + x + 3y}{2}$$

взаємооднозначно відображає $\mathbb{Z}_+^2$ в $\mathbb{Z}_+$ (див., наприклад, [44, с.13]), і при цьому існують такі обернені функції $l, r : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$, що

$$c(l(n), r(n)) \equiv n, \quad l(c(m,n)) = m, \; r(c(m,n)) = n, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}_+.$$

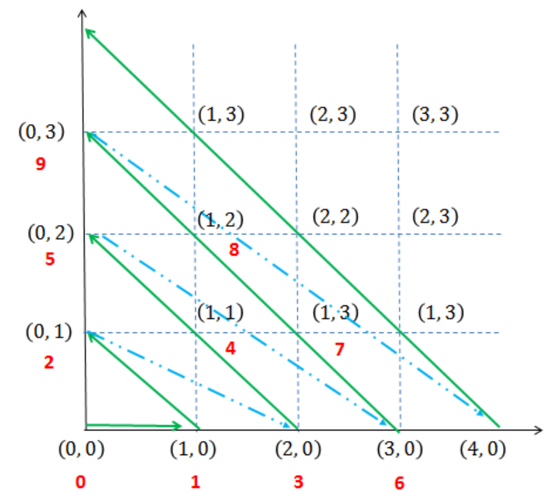


Рис. 2.1: Нумеруюча функція Кантора.

Згідно з [52], функцію Кантора можна записати за допомогою рекурентних співвідношень для d-вимірних цілочисельних кортежів при $\forall d \geq 2$:

$$\begin{aligned}
&c^1(n) = n \\
&c^2(n,m) = c(m,n) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots \\
&c^d(n_1, ..., n_d) = c(c^{d-1}(n_1, ..., n_{d-1}), n_d) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

При цьому існують також функції

$$\exists! \quad l_1, l_2, ..., l_d : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+, \tag{2.12}$$

такі що

$$c^d(l_1(n), l_2(n), ..., l_d(n)) \equiv n, \quad l_i\big((c^d(n_1, ..., n_i, ..., n_d)\big) = n_i,$$
$$i = \overline{1, d} \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.13}$$

Тобто кожному d-вимірному кортежу $(n_1, ..., n_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ єдиним чином ставиться у відповідність канторове число $c^d(n_1, ..., n_d) \in \mathbb{Z}_+$.

Наприклад, для випадку $d = 3$ функція Кантора має наступний вигляд

$$c^3(n_1, n_2, n_2) =$$
$$= \frac{(n_1 + n_2 + n_3)^3 + 3(n_1 + n_2 + n_3)^2 + 3(n_2 + n_3)^2 + 2n_1 + 5n_2 + 11n_3}{6}. \tag{2.14}$$

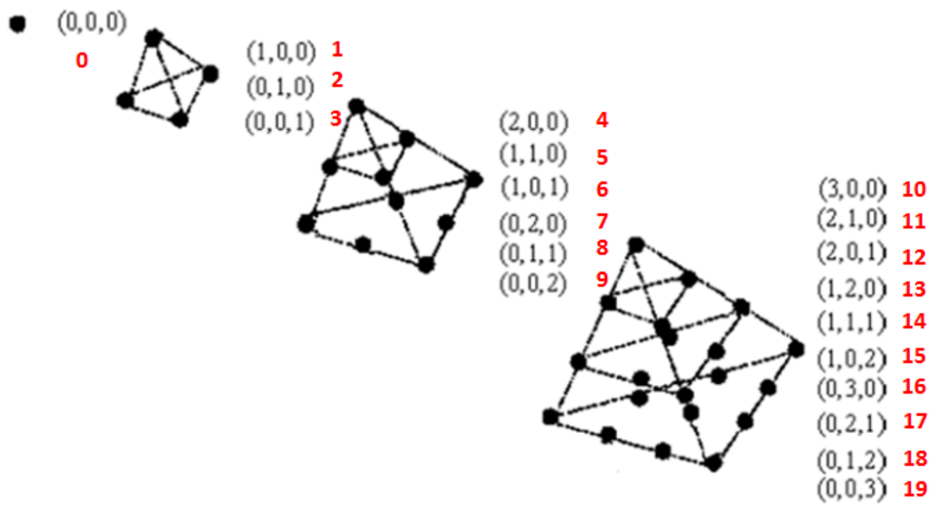


Рис. 2.2: $3D$ функція Кантора.

Отже, за довільною d-вимірною числовою послідовністю $\{s_\mathbf{k}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d}$ можна визначити одновимірну послідовність $\{\tilde{s}_p\}_{p \in \mathbb{Z}_+}$ наступним чином

$$s_\mathbf{k} = \tilde{s}_{c^d(\mathbf{k})}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d, \tag{2.15}$$

$$\tilde{s}_p = s_{l_1(p),l_2(p),\ldots,l_d(p)}, \quad p \in \mathbb{Z}_+.$$

Для такої d-вимірної послідовності $\{s_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d}$ побудуємо послідовність матриць

$$\tilde{S}_N = \left\| s_{l_1(k)+l_1(j),l_2(k)+l_2(j),\ldots,l_d(k)+l_d(j)} \right\|_{k,j=0}^{N}, \quad N \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.16}$$

Для двовимірної числової послідовності $\{s_{k,m}\}_{k,m\in\mathbb{Z}_+}$ матриця $\tilde{S}_N$ записується у таким чином

$$\tilde{S}_N =$$

$$= \begin{pmatrix} s_{0,0} & s_{1,0} & s_{0,1} & s_{2,0} & \cdots & s_{l(N),r(N)} \\ s_{1,0} & s_{2,0} & s_{0,1} & s_{3,0} & \cdots & s_{1+l(N),r(N)} \\ s_{0,1} & s_{1,1} & s_{0,2} & s_{2,1} & \cdots & s_{l(N),1+r(N)} \\ s_{2,0} & s_{3,0} & s_{2,1} & s_{4,0} & \cdots & s_{l(N)+2,r(N)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{l(N),r(N)} & s_{l(N)+1,r(N)} & s_{l(N),r(N)+1} & s_{l(N)+2,r(N)} & \cdots & s_{2l(N),2r(N)} \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

У вказаних термінах має місце наступний результат [10].

Теорема 2.4. *Нехай $\mathcal{H}$ — нескінченновимірний сепарабельний гільбертів простір та $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ — ортонормований базис у ньому. Тоді, для того щоб послідовність $\{s_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d}$ мала узагальнене моментне зображення вигляду*

$$s_{\mathbf{k}+\mathbf{j}} = \langle x_{\mathbf{k}}, y_{\mathbf{j}} \rangle, \quad \mathbf{k}, \mathbf{j} \in \mathbb{Z}_+^d, \tag{2.18}$$

де

$$\langle x, y \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} (x, e_m)(y, e_m),$$

а елементи $\{x_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d}$ *та* $\{y_{\mathbf{j}}\}_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}_+^d}$ *мають вигляд*

$$x_{\mathbf{k}} = \sum_{p=0}^{c^d(\mathbf{k})} \alpha_p^{(\mathbf{k})} e_p, \quad \alpha_{c^d(\mathbf{k})}^{(\mathbf{k})} \neq 0,\ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d, \tag{2.19}$$

$$y_{\mathbf{j}} = \sum_{p=0}^{c^d(\mathbf{j})} \beta_p^{(\mathbf{j})} e_p, \quad \beta_{c^d(\mathbf{j})}^{(\mathbf{j})} \neq 0,\ \mathbf{j} \in \mathbb{Z}_+^d, \tag{2.20}$$

необхідно і достатньо, щоб всі визначники $\tilde{H}_p = \det \tilde{S}_N$, $N \in \mathbb{Z}_+$ *матриць* $\tilde{S}_N$, *визначених формулами (2.16) були відмінними від нуля.*

При цьому будуть виконуватися співвідношення

$$\alpha_{c^d(\mathbf{k})}^{(\mathbf{k})} \beta_{c^d(\mathbf{k})}^{(\mathbf{k})} = \frac{\tilde{H}_{c^d(\mathbf{k})}}{\tilde{H}_{c^d(\mathbf{k})-1}}, \quad \tilde{H}_{-1} := 1, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d, \tag{2.21}$$

і якщо зафіксувати послідовності ненульових чисел $\{\alpha_p^{(\mathbf{l}(p))}\}_{p\in\mathbb{Z}_+}$ *та* $\{\beta_p^{(\mathbf{l}(p))}\}_{p\in\mathbb{Z}_+}$, *де* $\mathbf{l}(p) = \big(l_1(p), l_2(p), ..., l_d(p)\big)$, *що задовольняють (2.21), то решта коефіцієнтів в (2.19)-(2.20) будуть єдиним чином визначатися за формулами*

$$\alpha_p^{(\mathbf{k})} = \alpha_{c^d(\mathbf{k})}^{(\mathbf{k})} \frac{\tilde{S}_{c^d(\mathbf{k})} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & p-1 & c^d(\mathbf{k}) \\ 0 & 1 & \dots & p-1 & p \end{pmatrix}}{\tilde{H}_{c^d(\mathbf{k})}},$$
$$p = \overline{0, c^d(\mathbf{k})}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d, \tag{2.22}$$

$$\beta_p^{(\mathbf{j})} = \beta_{c^d(\mathbf{j})}^{(\mathbf{j})} \frac{\tilde{S}_{c^d(\mathbf{j})} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & p-1 & p \\ 0 & 1 & \dots & p-1 & c^d(\mathbf{j}) \end{pmatrix}}{\tilde{H}_{c^d(\mathbf{j})}},$$
$$p = \overline{0, c^d(\mathbf{j})}, \quad \mathbf{j} \in \mathbb{Z}_+^d. \tag{2.23}$$

Доведення. Нехай для деякої d-вимірної числової послідовності $\{s_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d}$

має місце узагальнене моментне зображення вигляду

$$s_{\mathbf{k},\mathbf{j}} = \langle x_{\mathbf{k}}, y_{\mathbf{j}} \rangle, \quad \mathbf{k}, \mathbf{j} \in \mathbb{Z}_+^d, \tag{2.24}$$

За d-вимірної послідовністю $\{s_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d}$ визначимо одновимірну послідовність $\{\tilde{s}_p\}_{p\in\mathbb{Z}_+}$ використовуючи нумеруючу функція Кантора за наступним законом

$$s_{\mathbf{k}} = \tilde{s}_{c^d(\mathbf{k})}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d, \tag{2.25}$$

$$\tilde{s}_p = s_{l_1(p), l_2(p) \dots l_d(p)}, \quad p \in \mathbb{Z}_+,$$

та побудуємо послідовність матриць, використовуючи формулу (2.16)

$$\tilde{S}_N = \left\| s_{l_1(k)+l_1(j), \dots, l_d(k)+l_d(j)} \right\|_{k,j=0}^N, \quad N \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.26}$$

Елементи $\{x_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d} \subset \mathcal{X}$, $\{y_{\mathbf{j}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d} \subset \mathcal{Y}$ визначимо з допомогою векторів ортонормованого базису $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ нескінченновимірного сепарабельного гільбертового простору $\mathcal{H}$

$$x_{\mathbf{k}} = \sum_{p=0}^{c^(\mathbf{k})} \alpha_p^{(\mathbf{k})} e_p, \quad \alpha_{c^(\mathbf{k})}^{(\mathbf{k})} \neq 0, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d, \tag{2.27}$$

$$y_{\mathbf{k}} = \sum_{p=0}^{c^d(\mathbf{j})} \beta_p^{(\mathbf{j})} e_p, \quad \beta_{c^d(\mathbf{k})}^{(\mathbf{k})} \neq 0, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d. \tag{2.28}$$

З урахуванням (2.27)-(2.28), маємо, що рівності (2.24), еквівалентні рівностям

$$s_{\mathbf{k}+\mathbf{j}} = \langle \sum_{p=0}^{c^d(\mathbf{k})} \alpha_p^{(\mathbf{k})} e_p, \sum_{p=0}^{c(\mathbf{j})} \beta_p^{(\mathbf{j})} e_p \rangle = \sum_{p=0}^{\min\{c^d(\mathbf{k}), c^d(\mathbf{j})\}} \alpha_p^{(\mathbf{k})} \beta_p^{(\mathbf{j})}, \quad \mathbf{k}, \mathbf{j} \in \mathbb{Z}_+^d, \tag{2.29}$$

а рівності (2.29), в свою чергу, еквівалентні сукупності матричних рівностей

$$\tilde{S}_N = A_N \cdot B_N, \quad N = \overline{0, \infty},$$

де A_N — нижня трикутна матриця вигляду

$$A_N = \|a_{j,k}\|_{k,j=0}^N, \quad a_{j,k} = \begin{cases} \alpha_j^{(l_1(k),l_2(k),\dots,l_d(k))}, & \text{при } k \geq j, \\ 0, & \text{при } k < j, \end{cases}$$

а B_N — верхня трикутна матриця вигляду

$$B_N = \|b_{j,k}\|_{k,j=0}^N, \quad b_{j,k} = \begin{cases} 0, & \text{при } k > j, \\ \beta_j^{(l_1(k),l_2(k),\dots,l_d(k))}, & \text{при } k \leq j. \end{cases}$$

Наприклад, A_5 та B_5 для розмірності $d = 3$ матимуть вигляд

$$A_p = \begin{pmatrix} \alpha_0^{(0,0,0)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1^{(0,0,0)} & \alpha_1^{(1,0,0)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2^{(0,0,0)} & \alpha_2^{(1,0,0)} & \alpha_2^{(0,1,0)} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_3^{(0,0,0)} & \alpha_3^{(1,0,0)} & \alpha_3^{(0,1,0)} & \alpha_3^{(0,0,1)} & 0 & 0 \\ \alpha_4^{(0,0,0)} & \alpha_4^{(1,0,0)} & \alpha_4^{(0,1,0)} & \alpha_4^{(0,0,1)} & \alpha_4^{(2,0,0)} & 0 \\ \alpha_5^{(0,0,0)} & \alpha_5^{(1,0,0)} & \alpha_5^{(0,1,0)} & \alpha_5^{(0,0,1)} & \alpha_5^{(2,0,0)} & \alpha_5^{(1,1,0)} \end{pmatrix}$$

та

$$B_p = \begin{pmatrix} \beta_0^{(0,0,0)} & \beta_0^{(1,0,0)} & \beta_0^{(0,1,0)} & \beta_0^{(0,0,1)} & \beta_0^{(2,0,0)} & \beta_0^{(1,1,0)} \\ 0 & \beta_1^{(1,0,0)} & \beta_1^{(0,1,0)} & \beta_1^{(0,0,1)} & \beta_1^{(2,0,0)} & \beta_1^{(1,1,0)} \\ 0 & 0 & \beta_2^{(0,1,0)} & \beta_2^{(0,0,1)} & \beta_2^{(2,0,0)} & \beta_2^{(1,1,0)} \\ 0 & 0 & 0 & \beta_3^{(0,0,1)} & \beta_3^{(2,0,0)} & \beta_3^{(1,1,0)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_4^{(2,0,0)} & \beta_4^{(1,1,0)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_5^{(1,1,0)} \end{pmatrix}$$

Оскільки визначник добутку квадратних матриць дорівнює добутку визначників, то

$$\tilde{H}_N = \det \tilde{S}_N = \prod_{p=0}^{N} \alpha_p^{(l_1(k),l_2(k),\dots,l_d(k))} \cdot \prod_{q=0}^{N} \beta_q^{(l_1(k),l_2(k),\dots,l_d(k))} \neq 0.$$

Звідки випливає необхідність твердження теореми.

Для доведення достатності скористаємося наступним результатом про розклад невиродженої матриці на трикутні співмножники.

Теорема 2.5. *(Ф.Р. Гантмахер [11, с. 50]) Будь-яку невироджену матрицю C можна представити у вигляді добутку нижньої трикутної матриці A на верхню трикутну матрицю B:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

та

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} & \cdots & b_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{nn} \end{pmatrix}$$

При цьому, якщо позначити послідовні головні мінори матриці C через $D_1, D_2, ..., D_n$, то будуть виконуватися співвідношення

$$a_{11}b_{11} = D_1, \quad a_{22}b_{22} = \frac{D_2}{D_1}, \quad ..., \quad a_{nn}b_{nn} = \frac{D_n}{D_{n-1}}. \tag{2.30}$$

Діагональним елементам матриць A та B можна задавати будь-які значення, що задовольняють умову (2.30).

Після цього всі інші елементи матриць A та B визначаються однозначно за формулами:

$$a_{mk} = a_{kk} \frac{C\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & m \\ 1 & 2 & \dots & k-1 & k \end{pmatrix}}{C\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix}}, \tag{2.31}$$

$$b_{jm} = b_{jj} \frac{C\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & j-1 & j \\ 1 & 2 & \dots & j-1 & m \end{pmatrix}}{C\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & j \\ 1 & 2 & \dots & j \end{pmatrix}}, \tag{2.32}$$

де через $C\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_s \\ r_1 & r_2 & \dots & r_s \end{pmatrix}$ *позначаються мінори матриці* C *з номерами стовпців* $p_1, p_2, \dots, p_s$ *та рядків* $r_1, r_2, \dots, r_s$*, відповідно.*

Нехай $\mathcal{H}$ — нескінченновимірний сепарабельний гільбертів простір та $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ — ортонормований базис у ньому, а білінійна форма визначається рівністю

$$\langle x, y\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} (x, e_m)(y, e_m), \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$$

Припустимо, що d-вимірна послідовність $\{s_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d}$ така, що всі визначники $\tilde{H}_N = \det \tilde{S}_N,\ N \in \mathbb{Z}_+$ відмінні від нуля.

Визначимо числові послідовності $\{\alpha^{(\mathbf{k})}_{c^d(\mathbf{k})}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d}$ та $\{\beta^{(\mathbf{j})}_{c^d(\mathbf{j})}\}_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}_+}$ так, що виконувалися рівності

$$\alpha^{(\mathbf{k})}_{c^d(\mathbf{k})} \beta^{(\mathbf{k})}_{c^d(\mathbf{k})} = \frac{\tilde{H}_{c^d(\mathbf{k})}}{\tilde{H}_{c^d(\mathbf{k})-1}}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d, \quad \tilde{H}_{-1} := 1. \tag{2.33}$$

А всі інші елементи запишемо в наступним способом

$$\alpha^{(\mathbf{k})}_p = \alpha^{(\mathbf{k})}_{c^d(\mathbf{k})} \frac{\tilde{S}_{c^d(\mathbf{k})}\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & p-1 & c^d(\mathbf{k}) \\ 0 & 1 & \dots & p-1 & p \end{pmatrix}}{\tilde{H}_{c^d(\mathbf{k})}},$$
$$p = \overline{0, c^d(\mathbf{k})}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d, \tag{2.34}$$

$$\beta_p^{(\mathbf{j})} = \beta_{c^d(\mathbf{j})}^{(\mathbf{j})} \frac{\tilde{S}_{c^d(\mathbf{j})} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & p-1 & p \\ 0 & 1 & \dots & p-1 & c^d(\mathbf{j}) \end{pmatrix}}{\tilde{H}_{c^d(\mathbf{j})}},$$

$$p = \overline{0, c^d(\mathbf{j})}, \quad \mathbf{j} \in \mathbb{Z}_+^d. \quad (2.35)$$

Якщо далі задати послідовності $\{x_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d} \subset \mathcal{X}$, $\{y_{\mathbf{j}}\}_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}_+^d} \subset \mathcal{Y}$ з допомогою формул

$$x_{\mathbf{k}} = \sum_{p=0}^{c^d(\mathbf{k})} \alpha_p^{(\mathbf{k})} e_p, \quad \alpha_{c^d(\mathbf{k})}^{(\mathbf{k})} \neq 0, \ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d,$$

$$y_{\mathbf{j}} = \sum_{p=0}^{c^d(\mathbf{k})} \beta_p^{(\mathbf{k})} e_p, \quad \beta_{c^d(\mathbf{j})}^{(\mathbf{j})} \neq 0, \ \mathbf{j} \in \mathbb{Z}_+^d,$$

то на основі теореми 2.5 і отримуємо достатність теореми. $\square$

2.3. Теореми існування багатовимірних узагальнених моментних зображень: умови на твірні функції

Як відомо з [33] та було вказано у попередньому розділі, якщо коефіцієнти степеневого ряду формального степеневого ряду

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d} s_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}, \tag{2.36}$$

де $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_d) \in \mathbb{C}^d, \mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}_+^d,\ \mathbf{z}^{\mathbf{k}} = z_1^{k_1} z_2^{k_2} ... z_d^{k_d}$, можуть бути представлені у вигляді

$$s_{\mathbf{k}} = \langle A_1^{k_1} A_2^{k_2} ... A_d^{k_d} x_{\mathbf{0}}, y_{\mathbf{0}}\rangle, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d, \tag{2.37}$$

де $A_j : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $j = \overline{1,d}$ — деякі лінійні комутуючі між собою обмежені оператори, то ряд буде збіжним в околі початку координат до аналітичної функції f d змінних, яка може бути записана у вигляді

$$f(\mathbf{z}) = \langle \mathcal{R}_{z_1}(A_1)\mathcal{R}_{z_2}(A_2)...\mathcal{R}_{z_d}(A_d)x_0, y_0\rangle, \tag{2.38}$$

де $\mathcal{R}_{z_j}(A_j) = (I - z_j A_j)^{-1}$ — резольвентні функції операторів $A_j, j = \overline{1,d}$.

Оскільки саме представлення узагальнених моментних зображень у операторному вигляді (2.37) зручне для практичного використання, то цікавим виявилося питання про те, за яких же умов функція f d змінних може бути записана у формі (2.38).

Подальші теореми, що є відповідними узагальненнями результатів Д. З. Арова (теорема 2.2) та А. П. Голуба (теорема 2.3), якраз дають умови такого запису функції.

Теорема 2.6. *Для довільної функції f, аналітичної в полікрузі $K_{\mathbf{R}} = K_{R_1} \times K_{R_2} \times ... \times K_{R_d}$, $0 < R_j < \infty$, $j = \overline{1,d}$, і довільного нескінченновимірного сепарабельного гільбертового простору $\mathcal{H}$ існують елементи $x_0, y_0 \in \mathcal{H}$ та лінійні обмежені оператори $A_j : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, що комутують між собою, норми яких $\|A_j\| < \frac{1}{R_j}$,*

$j=\overline{1,d}$, *і такі, що* $\forall \mathbf{z}\in K_{\mathbf{R}}$

$$f(\mathbf{z})=\left(\mathcal{R}_{z_1}(A_1)\mathcal{R}_{z_2}(A_2)...\mathcal{R}_{z_d}(A_d)x_0,y_0\right). \tag{2.39}$$

Доведення. Нехай деяка функція f в околі початку координат зображувана степеневим рядом

$$f(\mathbf{z})=\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d} s_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}=\sum_{k_1\in\mathbb{Z}_+}...\sum_{k_d\in\mathbb{Z}_+} s_{k_1,k_2,...,k_d}z_1^{k_1}z_2^{k_2}...z_d^{k_d}.$$

За умов теореми за нерівністю Коші-Адамара

$$|s_{\mathbf{k}}|\le\frac{M}{(R_1+\varepsilon_1)^{k_1}(R_2+\varepsilon_2)^{k_2}...(R_d+\varepsilon_1)^{k_d}},$$

де $M=\sup_{\mathbf{z}\in K_{\mathbf{R}}}|f(\mathbf{z})|$, $\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_d>0$ (див. [46, с. 62]).

Зафіксуємо деякі числа $\tilde{R}_j\in(R_j,R_j+\varepsilon_j)$, $j=\overline{1,d}$, і для довільного ортонормованого базису $\{e_p\}_{p\in\mathbb{Z}_+}$ простору $\mathcal{H}$ розглянемо d-вимірну послідовність елементів

$$x_{\mathbf{k}}=\frac{1}{\tilde{R}_1^{k_1}\tilde{R}_2^{k_2}...\tilde{R}_d^{k_d}}e_{c^d(\mathbf{k})},\quad \mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d.$$

Визначимо на елементах базису $\{e_p\}_{p\in\mathbb{Z}_+}$ дію лінійних операторів A_j, $j=\overline{1,d}$,

$$A_je_m=\frac{1}{\tilde{R}_j}e_{c^d(l_1(m),l_2(m),...,l_j(m)+1,...,l_d(m))},\quad m\in\mathbb{Z}_+.$$

Легко бачити, що, по-перше,

$$A_jx_{\mathbf{k}}=x_{\mathbf{k}+\boldsymbol{\delta}_j},\quad \mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d,$$

і, по-друге,

$$\|A_j\|=\frac{1}{\tilde{R}_j}<\frac{1}{R_j}.$$

Крім того, очевидно, що оператори A_j, $j=\overline{1,d}$, комутують між собою.

Визначимо тепер елемент $y_0 \in \mathcal{H}$ у вигляді суми наступного ряду

$$y_0 = \sum_{p=0}^{\infty} \tilde{R}_1^{l_1(p)} ... \tilde{R}_d^{l_d(p)} \overline{s}_{l_1(p),l_2(p),...,l_d(p)} e_p.$$

Переконаємося, що $y_0 \in \mathcal{H}$. Дійсно

$$\|y_0\|^2 = \sum_{p=0}^{\infty} \tilde{R}_1^{2l_1(p)} ... \tilde{R}_d^{2l_d(p)} |s_{l_1(p),l_2(p),...,l_d(p)}|^2 < \infty$$

З іншого боку

$$(x_{\mathbf{k}}, y_0) =$$
$$= \left(\frac{1}{\tilde{R}_1^{k_1} \tilde{R}_2^{k_2} ... \tilde{R}_d^{k_d}} e_{c^d(\mathbf{k})}, \sum_{p=0}^{\infty} \tilde{R}_1^{l_1(p)} ... \tilde{R}_d^{l_d(p)} \overline{s}_{l_1(p),l_2(p),...,l_d(p)} e_p \right) =$$
$$= s_{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d,$$

а отже, є справедливим зображення (2.37). □

Приклад. Нехай функція f визначається зображенням

$$f(\mathbf{z}) = \int_{\mathbb{I}^d} \prod_{p=1}^{d} \frac{1}{1 - \frac{z_p t_p}{R_p}} d\mu(\mathbf{t}), \tag{2.40}$$

де $\mathbb{I}^d = [0,1]^d$, а μ — борелівська міра на $\mathbb{I}^d$.

Тоді, в якості операторів A_j, $j = \overline{1,d}$, можна взяти оператори множення на незалежні змінні

$$(A_j \varphi)(\mathbf{t}) = \frac{t_j}{R_j} \varphi(\mathbf{t}),$$

норми яких відповідно дорівнюють

$$\|A_j\| = \frac{1}{R_j}.$$

Теорема 2.7. *Для довільної цілої функції d змінних f та будь-якого нескінченновимірного сепарабельного гільбертового простору $\mathcal{H}$*

існують елементи $x_0, y_0 \in \mathcal{H}$ *та лінійні обмежені комутуючі між собою оператори* $A_j : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $j = \overline{1,d}$ *з нульовими спектральними радіусами, такі що*

$$f(\mathbf{z}) = (\mathcal{R}_{z_1}(A_1)\mathcal{R}_{z_2}(A_2)...\mathcal{R}_{z_d}(A_d)x_0, y_0)\,.$$

При цьому, якщо порядки зростання функції f *(див. [46, с. 390]) за змінними* z_j, $j = \overline{1,d}$, *дорівнюють відповідно* $\rho_j > 0$, $j = \overline{1,d}$, *то оператори* A_j, $j = \overline{1,d}$, *можуть бути обраними так, що* $\forall p \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[p]{\|A_j^p\|} \le \frac{C_j}{p^{\frac{1}{\rho_j}}}, \quad j = \overline{1,d}, \tag{2.41}$$

де $C_j = const, j = \overline{1,d}$.

Доведення. Нехай ціла функція f зображується степеневим рядом

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d} s_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}.$$

З умов теореми випливає, що

$$\varlimsup_{|\mathbf{k}| \to \infty} \sqrt[|\mathbf{k}|]{|s_{\mathbf{k}}|} = 0, \qquad \text{де } |\mathbf{k}| = k_1 + k_2 + ... + k_d.$$

Тому можна вибрати монотонно спадну до нуля послідовність додатних чисел $\{\gamma_p\}_{p \in \mathbb{Z}_+}$, таку що $\forall \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d$

$$\sqrt[|\mathbf{k}|]{|s_{\mathbf{k}}|} \le \gamma_{|\mathbf{k}|},$$

і отже,

$$|s_{\mathbf{k}}| \le \left(\gamma_{|\mathbf{k}|}\right)^{|\mathbf{k}|}.$$

Для довільного ортонормованого базису $\{e_p\}_{p \in \mathbb{Z}_+}$ при довільному $\lambda > 1$ розглянемо d-вимірну послідовність елементів

$$x_{\mathbf{k}} = \left(\lambda \gamma_{|\mathbf{k}|}\right)^{|\mathbf{k}|} e_{c^d(\mathbf{k})}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d.$$

і визначимо на елементах базису $\{e_p\}_{p\in\mathbb{Z}_+}$ лінійні оператори A_j, $j=\overline{1,d}$,

$$A_je_p=\lambda\frac{\left(\gamma_{|\mathbf{l}(p)|+1}\right)^{|\mathbf{l}(p)|+1}}{\left(\gamma_{|\mathbf{l}(p)|}\right)^{|\mathbf{l}(p)|}}e_{c^d(\mathbf{l}(p)+\boldsymbol{\delta}_j)}. \tag{2.42}$$

Тоді будемо мати

$$A_jx_{\mathbf{k}}=x_{\mathbf{k}+\boldsymbol{\delta}_j},\quad \mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d,\quad j=\overline{1,d}.$$

З рівності (2.42) отримаємо:

$$A_j^me_p=\lambda^m\frac{\left(\gamma_{|\mathbf{l}(p)|+m}\right)^{|\mathbf{l}(p)|+m}}{\left(\gamma_{|\mathbf{l}(p)|}\right)^{|\mathbf{l}(p)|}}e_{c^d(\mathbf{l}(p)+m\boldsymbol{\delta}_j)},$$

а отже,

$$\|A_j^m\|=\sup_{p\in\mathbb{Z}_+}\lambda^m\frac{\left(\gamma_{|\mathbf{l}(p)|+m}\right)^{|\mathbf{l}(p)|+m}}{\left(\gamma_{|\mathbf{l}(p)|}\right)^{|\mathbf{l}(p)|}}\le(\lambda\gamma_m)^m,$$

і значить,

$$\sqrt[m]{\|A_j^m\|}\le\lambda\gamma_m\to 0\quad\text{ при } m\to\infty,$$

тобто, оператори A_j, $j=\overline{1,d}$, мають нульовий спектральний радіус.

Покладаючи

$$y_0=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(\lambda\gamma_p)^p}s_{\mathbf{l}(p)}e_p,$$

отримаємо

$$\|y_0\|^2=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(\lambda\gamma_p)^{2p}}|s_{\mathbf{l}(p)}|^2\le\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda^{2p}}=\frac{\lambda^2}{\lambda^2-1}<\infty,$$

отже, $y_0\in\mathcal{H}$.

З іншого боку

$$(x_{\mathbf{k}},y_0)=\left((\lambda\gamma_{\mathbf{k}})^{\mathbf{k}}e_{c^d(\mathbf{k})},\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda\gamma_p{}^p}s_{\mathbf{l}(p)}e_p\right)=s_{\mathbf{k}},\quad \mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d,$$

а тому є справедливим зображення (2.37).

Якщо порядки зростання функції f за змінними z_j, $j=\overline{1,d}$, відповідно дорівнюють ρ_j, $j=\overline{1,d}$, то

$$|s_{\mathbf{k}}| \le \frac{C_j^{\mathbf{k}}}{|\mathbf{k}|^{\left(\frac{k_1}{\rho_1}+\frac{k_2}{\rho_2}+\ldots+\frac{k_d}{\rho_d}\right)}} \le \prod_{j=1}^{d}\left(\frac{C_j}{k_j^{\frac{1}{\rho_j}}}\right)^{k_j}, \quad \mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d,$$

де $C_j>0$, $j=\overline{1,d}$ – деякі константи.

Покладемо при деякому фіксованому $\lambda>1$

$$x_{\mathbf{k}} = \lambda^{|\mathbf{k}|}\prod_{j=1}^{d}\left(\frac{1}{k_j^{\frac{1}{\rho_j}}}\right)^{k_j} e_{c^d(\mathbf{k})}.$$

На векторах базису $\{e_p\}_{p\in\mathbb{Z}_+}$ покладемо:

$$A_j e_p = \lambda\left(\frac{l_j(p)^{l_j(p)}}{(l_j(p)+1)^{l_j(p)+1}}\right)^{\frac{1}{\rho_j}} e_{c^d(\mathbf{l}(p)+\boldsymbol{\delta}_j)}.$$

Тоді отримаємо

$$A_j x_{\mathbf{k}} = x_{\mathbf{k}+\boldsymbol{\delta}_j}, \quad \mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d, \quad j=\overline{1,d}.$$

Матимемо

$$A_j^m e_p = \lambda^m\left(\frac{l_j(p)^{l_j(p)}}{(l_j(p)+m)^{l_j(p)+m}}\right)^{\frac{1}{\rho_j}} e_{c^d(\mathbf{l}(p)+m\boldsymbol{\delta}_j)},$$

і отже

$$\|A_j^m\| = \sup_{p\in\mathbb{Z}_+}\lambda^m\left(\frac{l_j(p)^{l_j(p)}}{(l_j(p)+m)^{l_j(p)+m}}\right)^{\frac{1}{\rho_j}} \le \left(\frac{\lambda}{m^{\rho_j}}\right)^m,$$

звідки і випливає нерівність (2.41). □

Розділ 3

Застосування узагальнених моментних зображень для побудови апроксимант типу Паде функцій двох змінних

Даний розділ присвячено побудові та дослідженню раціональних апроксимант типу Паде з допомогою двовимірних узагальнених моментних зображень.

Результати розділу 3 опубліковано в роботах [8, 9, 25, 26, 35].

3.1. Теореми про побудову апроксимант типу Паде на основі методу двовимірних узагальнених моментних зображень

У роботі [28] Голубом А. П. та Чернецькою Л. О. було запропоновано метод побудови раціональних апроксимант типу Паде функцій двох змінних на основі двовимірних узагальнених моментних.

Теорема 3.1. *([28]) Нехай формальний степеневий ряд від двох змінних має вигляд*

$$f(z,w)=\sum_{k,m=0}^{\infty} s_{k,m} z^k w^m, \tag{3.1}$$

та нехай для двовимірної послідовності $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$ *має місце узагальнене моментне зображення на добутку лінійних просторів* $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ *вигляду*

$$s_{k+j,m+n}=\langle x_{k,m}, y_{j,n}\rangle, \quad k,m,j,n\in\mathbb{Z}_+. \tag{3.2}$$

Тоді, якщо для деяких $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ існує нетривіальний узагальнений поліном

$$Y_{N_1,N_2} = \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2)} y_{j,n}, \tag{3.3}$$

такий що виконуються умови біортогональності

$$\langle x_{k,m}, Y_{N_1,N_2} \rangle = 0, \tag{3.4}$$

при $(k, m) \in [0, N_1] \times [0, N_2] \backslash \{(N_1, N_2)\}$, то раціональна функція

$$[\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f(z, w) = \frac{P_{\mathcal{N}}(z, w)}{Q_{\mathcal{D}}(z, w)}, \tag{3.5}$$

де

$$Q_{\mathcal{D}}(z, w) = \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j,N_2-n}^{(N_1,N_2)} z^j w^n, \tag{3.6}$$

і

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{N}}(z, w) = \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{m=0}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=0}^{m} c_{N_1-j,N_2-n}^{(N_1,N_2)} s_{k-j,m-n} + \\ + z^{N_1} \sum_{k=0}^{N_1} \sum_{m=0}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{m} c_{j,N_2-n}^{(N_1,N_2)} s_{k+j,m-n} + \\ + w^{N_2} \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{m=0}^{N_2} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{m} c_{N_1-j,n}^{(N_1,N_2)} s_{k-j,m+n}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

матиме розвинення у степеневий ряд, коефіцієнти якого співпадатимуть з коефіцієнтами ряду (3.21) для $(k, m) \in \mathcal{E} = [0, 2N_1] \times [0, 2N_2] \backslash \{(2N_1, 2N_2)\}$.

Також дана теорема може використовуватися і у більш загальному вигляді.

Теорема 3.2. *([28].) Нехай для коефіцієнтів формального степеневого*

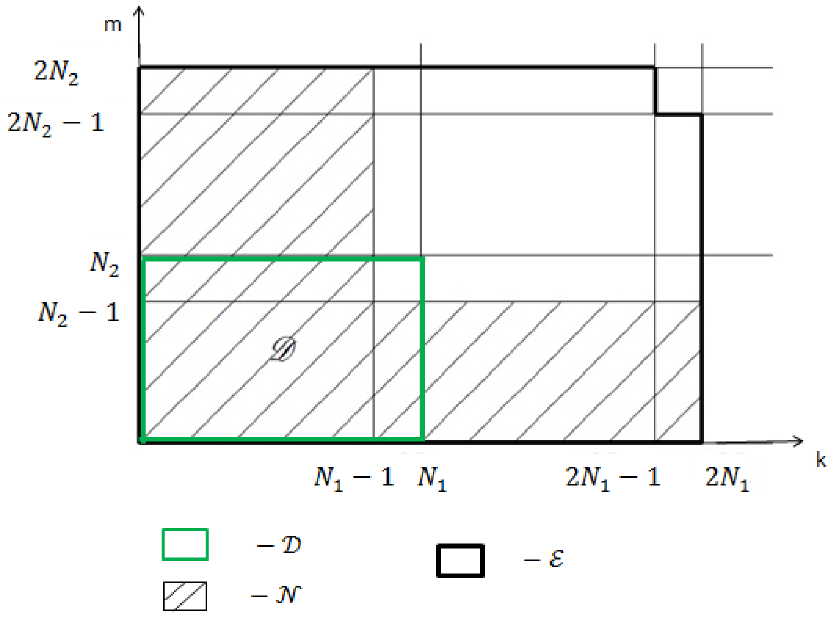


Рис. 3.1: Вигляд областей $\mathcal{D}, \mathcal{N}$ та $\mathcal{E}$ для теореми 3.1.

ряду двох змінних вигляду

$$f(z,w) = \sum_{k,m=0}^{\infty} s_{k,m} z^k w^m \tag{3.8}$$

має місце узагальнене моментне зображення на добутку лінійних просторів $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ за білінійною формою $\langle .,. \rangle$

$$s_{k+j,m+n} = \langle x_{k,m}, y_{j,n} \rangle, \qquad k,j,m,n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.9}$$

Тоді, якщо при деяких $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ існує узагальнений поліном

$$X_{N_1,N_2} = \sum_{k=0}^{N_1} \sum_{m=0}^{N_2} c_{k,m}^{(N_1,N_2)} x_{k,m} \tag{3.10}$$

з відмінним від нуля старшим коефіцієнтом $c_{N_1,N_2}^{(N_1,N_2)}$, для якого виконуються умови біортогональності

$$\langle X_{N_1,N_2}, y_{j,n} \rangle = 0 \tag{3.11}$$

при $(j+N_1, n+N_2) \in \mathbb{Z}_+ \cap D_\Phi$*, де* $D_\Phi = \{(u,t) \in \mathbb{R}_+^2 : \Phi(u,t) \le 0\}$*, а функція* $\Phi : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ *має такі властивості:*

1. D_Φ *— обмежена множина в* $\mathbb{R}_+^2$*;*
2. *потужність множини* $D_\Phi \cap \{(u,t) \in \mathbb{Z}_+^2 : u \ge N_1, t \ge N_2\}$ *дорівнює* $(N_1+1)(N_2+1)-1$*;*
3. *рівняння* $\Phi(u,t) = 0$ *можна однозначно розв'язати відносно* t *при* $u \le N_1$ *та відносно* u *при* $t \le N_2$*. При цьому для відповідних розв'язків* $t = \varphi(u)$ *та* $u = \psi(t)$ *мають місце нерівності* $\varphi(u) \ge N_2 \quad \forall\, u \le N_1$ *та* $\psi(t) \ge N_1 \quad \forall\, t \le N_2$*,*

то раціональна функція

$$[\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f(z,w) = \frac{P_\mathcal{N}(z,w)}{Q_\mathcal{D}(z,w)}, \tag{3.12}$$

де

$$Q_\mathcal{D}(z,w) = \sum_{k=0}^{N_1}\sum_{m=0}^{N_2} c_{N_1-k,N_2-m}^{(N_1,N_2)} z^k w^m, \tag{3.13}$$

а

$$\begin{aligned} P_\mathcal{N}(z,w) = \sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{m} c_{N_1-j,N_2-n}^{(N_1,N_2)} s_{k-j,m-n} + \\ + z^{N_1}\sum_{m=0}^{N_2-1}\sum_{k=0}^{[\psi(m)]-N_1} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{m} c_{j,N_2-n}^{(N_1,N_2)} s_{k+j,m-n} + \\ + w^{N_2}\sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{[\varphi(k)]-N_2} z^k w^m \sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j,n}^{(N_1,N_2)} s_{k-j,m+n} \end{aligned} \tag{3.14}$$

де $[\rho]$ *— ціла частина від числа* ρ*, матиме розвинення у степеневий ряд, коефіцієнти якого співпадатимуть з коефіцієнтами ряду (3.8) для* $\forall (k,m) \in \mathbb{Z}_+^2 \cap D_\Phi$*.*

Як відомо (див. [28]), двовимірні узагальнені моментні зображення можуть бути записані у операторному вигляді.

А саме, у випадку коли простори $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$ — нормовані і у просторі $\mathcal{X}$

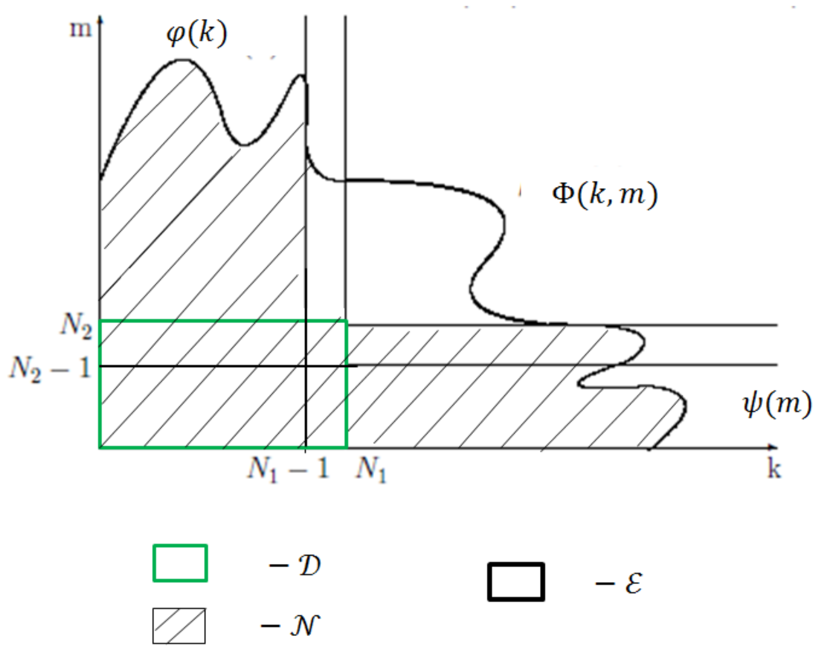


Рис. 3.2: Вигляд областей $\mathcal{D}, \mathcal{N}$ та $\mathcal{E}$ для теореми 3.2.

існують обмежені лінійні оператори $A_1, A_2 : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, які комутують між собою, і такі, що:

$$A_1 x_{k,m} = x_{k+1,m},$$

$$A_2 x_{k,m} = x_{k,m+1},$$

для всіх $k, m \in \mathbb{Z}_+$, а у просторі $\mathcal{Y}$ існують лінійні обмежені оператори $A_1^*, A_2^* : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ такі, що

$$\langle A_1 x, y \rangle = \langle x, A_1^* y \rangle,$$

$$\langle A_2 x, y \rangle = \langle x, A_2^* y \rangle,$$

для $\forall x \in \mathcal{X}, \forall y \in \mathcal{Y}$, то зображення (1.28) можна подати в операторному вигляді:

$$s_{k,m} = \langle A_1^k A_2^m x_{0,0}, y_{0,0} \rangle, k, m \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.15}$$

Поставимо у відповідність двовимірній числовій послідовності

$\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$ формальний степеневий ряд від двох змінних:

$$f(z,w) = \sum_{k,m=0}^{\infty} s_{k,m} z^k w^m. \tag{3.16}$$

Зображення коефіцієнтів $s_{k,m}$ у вигляді (3.15) дає змогу отримати зображення функції (3.16) у вигляді

$$f(z,w) = \langle \mathcal{R}_z(A_1)\mathcal{R}_w(A_2)x_{0,0}, y_{0,0}\rangle, \tag{3.17}$$

де резольвентна функція $\mathcal{R}_w$ оператора A визначається рівністю $\mathcal{R}_w(A) = (I - wA)^{-1}$.

Вищенаведені результати у наступних параграфах даного розділу будуть використовуватися для побудови апроксимант типу Паде для нових широких класів функцій двох змінних.

3.2. Побудова апроксимацій типу Паде рядів, для коефіцієнтів яких мають місце узагальнені моментні зображення з операторами $(A_1\varphi)(t) = t\varphi(t)$, $(A_2\varphi)(t) = t^\sigma\varphi(t)$, де σ — ірраціональне число

Нехай

$$\mathcal{X} = \mathcal{Y} = L_2([0,1], t^\nu dt), \quad \nu > -1,$$

— простори функцій, сумовних з квадратом за мірою $t^\nu dt$ на $[0,1]$.

Розглянемо в просторі $\mathcal{X}$ лінійні обмежені оператори

$$(A\varphi)(t) = t\varphi(t),$$

$$(B\varphi)(t) = t^\sigma\varphi(t),$$

де $\sigma > 0$ — ірраціональне число.

На добутку просторів $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ визначимо білінійну форму

$$\langle x, y\rangle = \int\limits_0^1 x(t)y(t)t^\nu dt.$$

а початкові функції $x_{0,0}$ та $y_{0,0}$ покладемо тотожно рівними одиниці:

$$x_{0,0}(t) = y_{0,0}(t) \equiv 1.$$

Тоді елементи послідовностей $\{x_{k,m}\}_{(k,m)\in\mathbb{Z}_+^2}$ та $\{y_{j,n}\}_{(j,n)\in\mathbb{Z}_+^2}$ матимуть вигляд

$$x_{k,m}(t) = y_{k,m}(t) = t^{k+m\sigma}.$$

Враховуючи (3.15), члени двовимірної послідовності записуються наступним чином

$$s_{k,m} = \int\limits_0^1 t^{k+m\sigma+\nu}dt = \frac{1}{k+m\sigma+\nu+1}, \tag{3.18}$$

і отже,

$$f(z,w) = \sum_{k,m=0}^{\infty} \frac{z^k w^m}{k + m\sigma + \nu + 1}. \tag{3.19}$$

Згідно з теоремою 3.1 для знаходження апроксиманти типу Паде функції (3.19) потрібно побудувати узагальнений поліном вигляду (3.3), для якого б виконувалися умови біортогональності (3.4). Тобто в даному випадку нам потрібно побувати узагальнений поліном вигляду:

$$Y_{N_1,N_2} = \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2)} t^{j+n\sigma},$$

з умовами біортогональності

$$\int_0^1 t^{k+m\sigma+\nu} Y_{N_1,N_2}(t)dt = 0,$$

для всіх $(k,m) \in [0,N_1] \times [0,N_2] \backslash \{(N_1,N_2)\}$.

Оскільки, за припущенням число σ не є раціональним, то система функцій

$$\{t^{j+n\sigma} : j = \overline{0,N_1}, n = \overline{0,N_2}\} \tag{3.20}$$

буде чебишевською на $[0,1]$. Тоді при кожних $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ такі узагальнені поліноми Y_{N_1,N_2} будуть існувати, а їхні старші коефіцієнти будуть відмінними від нуля.

Запишемо систему функцій (3.20) в наступному вигляді:

$$\{\varphi_l(t)\}_{l=0}^{L}, \tag{3.21}$$

де

$$L = (N_1+1)(N_2+1) - 1,$$

а

$$\varphi_l(t) = t^{\lambda_l}, \lambda_l = l + (\sigma - N_1 - 1)\left[\frac{l}{N_1+1}\right], \quad l = \overline{0,L},$$

$[\alpha]$ - ціла частина числа α.

Далі використаємо наступний результат (див., наприклад, [31])

Теорема 3.3. *Нехай* $\{c_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$ *– двовимірна числова послідовність така, що наступні визначники є відмінними від нуля*

$$H_{N-1} := \det ||c_{k+j}||_{k,j=0}^{N-1} \neq 0,\ N \in \mathbb{N}.$$

І нехай в лінійному просторі $\mathcal{X}$ *вказано послідовність елементів* $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$*, а у просторі* $\mathcal{Y}$*– послідовність* $\{\psi_j\}_{j=0}^{\infty}$ *такі, що*

$$c_{k,j} = \langle \varphi_k, \psi_j \rangle, k, j \in \mathbb{Z},$$

де $\langle .,. \rangle$ *– білінійна форма на добутку просторів* $\mathcal{X}$ *та* $\mathcal{Y}$*.*

Тоді якщо при довільному $N \in \mathbb{Z}_+$ *побудувати узагальнені поліноми*

$$X_0 = \varepsilon_0 \varphi_0, X_N = \varepsilon_N \begin{vmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & \cdots & c_{0,N} & \varphi_0 \\ c_{1,0} & c_{1,1} & \cdots & c_{1,N} & \varphi_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{N-1,0} & c_{N-1,1} & \cdots & c_{N-1,N} & \varphi_N \end{vmatrix}, N = \overline{1,\infty},$$

та

$$Y_0 = \varepsilon_0 \psi_0, Y_N = \varepsilon_N \begin{vmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & \cdots & c_{0,N} & \psi_0 \\ c_{1,0} & c_{1,1} & \cdots & c_{1,N} & \psi_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{N-1,0} & c_{N-1,1} & \cdots & c_{N-1,N} & \psi_N \end{vmatrix}, N = \overline{1,\infty},$$

де $\varepsilon_N = (H_N \cdot H_{N-1})^{-1/2}, N = \overline{0,\infty}, H_{-1} = -1$*, то будуть виконуватися співідношення біортогональності*

$$\langle X_M, Y_N \rangle = \delta_{M,N},\ M, N = \overline{0,\infty},$$

$$\delta_{M,N} = \begin{cases} 0, M \neq N, \\ 1, M = N. \end{cases}$$

В нашому випадку $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = L_2([0,1], t^\nu dt)$, $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty = \{\psi_j\}_{j=0}^\infty$ і

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int\limits_0^1 \varphi(t)\psi(t)t^\nu dt = 0.$$

Враховуючи, що

$$c_{k,j} = \langle \varphi_k, \psi_j \rangle = \int\limits_0^1 t^{\lambda_k} \cdot t^{\lambda_j} \cdot t^\nu dt = \frac{1}{\lambda_k + \lambda_j + \nu + 1}, \quad k, j = \overline{0, L},$$

для біортогонального полінома Y_{N_1,N_2} за теоремою 3.3 отримаємо зображення

$$Y_{N_1,N_2} = \varepsilon_N \begin{vmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & \dots & c_{0,N} & \psi_0 \\ c_{1,0} & c_{1,1} & \dots & c_{1,N} & \psi_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{N-1,0} & c_{N-1,1} & \dots & c_{N-1,N} & \psi_N \end{vmatrix} =$$

$$= \varepsilon_{N_1,N_2} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{l+1} \psi_l \cdot \det ||c_{k,i} : k = \overline{0, L-1}, i \in [0, L] \backslash \{l\}||,$$

з деякою ненульовою константою ε_{N_1,N_2}.

Останні визначники є визначниками Коші (див., наприклад, [48]). Отже,

$$\Delta_l^{(L)} = \det ||c_{k,i} : k = \overline{0, L-1}, i \in [0, L] \backslash \{l\}|| =$$

$$= \frac{\prod_{k=0}^{L-1} \prod_{m=k+1}^{L} (\lambda_k - \lambda_m)^2}{\prod_{k=0}^{L-1} (\lambda_k - \lambda_l)^2} \cdot \frac{\prod_{k=0}^{L-1} (\lambda_k + \lambda_l + \nu + 1)}{\prod_{k=0}^{L-1} \prod_{m=0}^{L} (\lambda_k + \lambda_m + \nu + 1)} =$$

$$= \varkappa_L \frac{\prod_{k=0}^{L-1} (\lambda_k + \lambda_m + \nu + 1)}{\prod_{k=0}^{l-1} (\lambda_k - \lambda_l)^2},$$

де $\varkappa_L$ – константа, що залежить від L, але не залежить від l.

Враховуючи явний вираз показників λ_l, отримуємо:

$$\Delta_l^{(L)} = \varkappa_L \frac{\prod_{k=0}^{L-1}\left(k+l+(\sigma-N_1-1)\left(\left[\frac{k}{N_1+1}\right]+\left[\frac{l}{N_1+1}\right]\right)+\nu+1\right)}{\prod_{k=0}^{l-1}\left(k-l+(\sigma-N_1-1)\left(\left[\frac{k}{N_1+1}\right]-\left[\frac{l}{N_1+1}\right]\right)\right)^2}.$$

Підрахуємо окремо чисельник:

$$\prod_{k=0}^{L-1}\left(k+l+(\sigma-N_1-1)\left(\left[\frac{k}{N_1+1}\right]+\left[\frac{l}{N_1+1}\right]\right)+\nu+1\right)=$$

$$=\prod_{k=0}^{N_1}\left(k+l+(\sigma-N_1-1)\left[\frac{l}{N_1+1}\right]+\nu+1\right)\times$$

$$\times\prod_{k=N_1+1}^{2N_1-1}\left(k+l+(\sigma-N_1-1)\left(1+\left[\frac{l}{N_1+1}\right]\right)+\nu+1\right)\times\ldots\times$$

$$\times\prod_{k=N_2(N_1+1)}^{(N_2+1)(N_1+1)-2}\left(k+l+(\sigma-N_1-1)\left(N_2+\left[\frac{l}{N_1+1}\right]\right)+\nu+1\right)=$$

$$=\left(l+(\sigma-N_1-1)\left[\frac{l}{N_1+1}\right]+\nu+1\right)_{N_1+1}\times$$

$$\times\left(l+(\sigma-N_1-1)\left(1+\left[\frac{l}{N_1+1}\right]\right)+\nu+1\right)_{N_1+1}\times\ldots\times$$

$$\times\left(l+(\sigma-N_1-1)\left(N_2+\left[\frac{l}{N_1+1}\right]\right)+\nu+1\right)_{N_1}=$$

$$=\frac{\prod_{m=0}^{N_2}\left(l+(\sigma-N_1-1)\left[\frac{l}{N_1+1}\right]+\nu+1+m\sigma\right)_{N_1+1}}{\left(l+(\sigma-N_1-1)\left[\frac{l}{N_1+1}\right]+\nu+N_1+N_2\sigma+1\right)},$$

де через $(\alpha)_k$ позначено символ Похгаммера:

$$(\alpha)_k=\begin{cases} 1, k=0, \\ (\alpha)(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+k-1), k\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

Розглянемо тепер знаменник:

$$\prod_{k=0}^{l-1}\left(k-l+(\sigma-N_1-1)\left(\left[\frac{k}{N_1+1}\right]-\left[\frac{l}{N_1+1}\right]\right)\right)^2.$$

Очевидно, що при $l=\overline{0,N_1}$ буде $\left[\frac{l}{N_1+1}\right]=0$ і $\left[\frac{l}{N_1+1}\right]=0$, а тому отримаємо:

$$\prod_{k=0}^{l-1}(k-l)^2=\prod_{k=1}^{l}k^2.$$

При $l=\overline{N_1+1,2N_1+1}$ буде $\left[\frac{l}{N_1+1}\right]=1$ і, отже, будемо мати:

$$\prod_{k=0}^{N_1}(k-l-(\sigma-N_1-1))^2\prod_{k=N_1+1}^{l-1}(k-l)^2=\prod_{k=l-2N_1-1}^{l-N_1-1}(k+\sigma)^2\prod_{k=0}^{l-N_1-1}k^2.$$

Аналогічно, якщо при деякому $0\le p\le N_1$, $l=\overline{pN_1+p,(p+1)N_1+p}$, то $\left[\frac{l}{N_1+1}\right]=p$, і маємо:

$$\prod_{k=l-(p+1)N_1-p}^{l-pN_1-p}((k+p\sigma)(k+(p-1)\sigma)\cdot\ldots\cdot(k+\sigma))^2\prod_{k=0}^{l-pN_1-p}k^2.$$

Врахувавши це, для знаменника отримаємо вираз:

$$\prod_{m=1}^{\left[\frac{l}{N_1+1}\right]}\left((m\sigma-\left(\left[\frac{l}{N_1+1}\right](N_1+1)+N_1-l\right)_{N_1+1}\right)^2\times$$

$$\times\left(\left(l-\frac{l}{N_1+1}(N_1+1)!\right)\right)^2.$$

Таким чином,

$$\Delta_l^{(L)}=\varkappa_L\cdot\frac{\left(\left(l+(\sigma-N_1-1)\left[\frac{l}{N_1+1}\right]+\nu+1\right)_{N_1+1}\right)^{N_2+1}}{\left(l+(\sigma-N_1-1)\left[\frac{l}{N_1+1}\right]+\nu+N_1+1\right)}\times$$

$$\times \frac{1}{\prod_{m=1}^{\left[\frac{l}{N_1+1}\right]}\left((m\sigma - \left(\left[\frac{l}{N_1+1}\right](N_1+1)+N_1-l\right)_{N_1+1}\right)^2} \times$$

$$\times \frac{1}{\left(\left(l-\frac{l}{N_1+1}(N_1+1)!\right)\right)^2}$$

і

$$Y_{N_1,N_2} = \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2)} t^{j+n\sigma} = \sum_{l=0}^{L}(-1)^{l+1} t^{\lambda_l} \Delta_l^{(L)}.$$

Звідси

$$c_{j,n}^{(N_1,N_2)} = (-1)^{j+n(N_1+1)+1} \Delta_{j+n(N_1+1)}^{(L)},$$

тобто

$$c_{j,n}^{(N_1,N_2)} = \varkappa_L \cdot \frac{(-1)^{j+n(N_1+1)+1}}{\prod_{m=1}^{\left[\frac{l}{N_1+1}\right]}\left((m\sigma - N_1 + j)_{N_1+1}\right)^2 (j!)^2} \times$$
$$\times \frac{((j+n\sigma+\nu+1)_{N_1+1})}{j+n\sigma+\nu+N_1+1}, \quad (3.22)$$

при цьому ми можемо покласти $\varkappa_L = 1$.

А тому, з врахуванням теореми 3.1 та формул (3.22), для функції вигляду (3.19) можна побудувати апроксиманти типу Паде. Справедливим буде наступний результат:

Теорема 3.4. *Для функцій*

$$f(z,w) = \sum_{k,m=0}^{\infty} \frac{z^k w^m}{k+m\sigma+\nu+1}.$$

при довільних $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ *раціональна функція вигляду*

$$[\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f(z,w) = \frac{P_{\mathcal{N}}(z,w)}{Q_{\mathcal{D}}(z,w)},$$

де

$$Q_{\mathcal{D}}(z,w)=\sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2}\frac{(-1)^{N_1-j+(N_2-n)(N_1+1)+1}}{\prod_{m=1}^{\left[\frac{l}{N_1+1}\right]}\left((m\sigma-j)_{N_1+1}\right)^2\left((N_1-j)!\right)^2}\times$$
$$\times\frac{\left((N_1-j+(N_2-n)\sigma+\nu+1)_{N_1+1}\right)}{2N_1-j+(N_2-n)\sigma+N_1+\nu+1}z^jw^n, \quad (3.23)$$

і

$$P_{\mathcal{N}}(z,w)=\sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{N_2-1}z^kw^m\sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^{N_1-j+(N_2-n)(N_1+1)+1}}{\prod_{m=1}^{\left[\frac{l}{N_1+1}\right]}\left((m\sigma-j)_{N_1+1}\right)^2\left((N_1-j)!\right)^2}\times$$
$$\times\frac{\left((N_1-j+(N_2-n)\sigma+\nu+1)_{N_1+1}\right)}{2N_1-j+(N_2-n)\sigma+\nu+1}s_{k-j,m-n}+$$
$$+z^{N_1}\sum_{k=0}^{N_1}\sum_{m=0}^{N_2-1}z^kw^m\sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^{j+(N_2-n)(N_1+1)+1}}{\prod_{m=1}^{\left[\frac{l}{N_1+1}\right]}\left((m\sigma-N_1+j)_{N_1+1}\right)^2(j!)^2}\times$$
$$\times\frac{\left((j+(N_2-n)\sigma+\nu+1)_{N_1+1}\right)}{j+(N_2-n)\sigma+\nu+N_1+1}s_{k+j,m-n}+$$
$$+w^{N_2}\sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{N_2}z^kw^m\sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^{N_1-j+n(N_1+1)+1}}{\prod_{m=1}^{\left[\frac{l}{N_1+1}\right]}\left((m\sigma-j)_{N_1+1}\right)^2\left((N_1-j)!\right)^2}\times$$
$$\times\frac{\left((N_1-j+n\sigma+\nu+1)_{N_1+1}\right)}{2N_1-j+n\sigma+\nu+1}s_{k-j,m+n}, \quad (3.24)$$

матиме розклад у степеневий ряд коефіцієнти якого співпадатимуть з коефіцієнтами ряду (3.19) для всіх $(j,n)\in\mathcal{E}=[0,2N_1]\times[0,2N_2]\backslash\{(2N_1,2N_2)\}$.

Слід зауважити, що в даному випадку області індексів коефіцієнтів чисельника $\mathcal{N}$, знаменника $\mathcal{D}$ та інтерполяційної множини $\mathcal{E}$ залишаються такими ж як на Рис. 3.1.

3.3. Побудова апроксимацій типу Паде рядів, для коефіцієнтів яких мають місце узагальнені моментні зображення з операторами $A_1 = A$, $A_2 = A^p$, $p \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$

Нехай $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$ — деякі нормовані простори, та визначено білінійну форму $\langle .,. \rangle$ на декартовому добутку $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

Нехай у просторі $\mathcal{X}$ задано лінійний оператор $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, а у просторі $\mathcal{Y}$ — лінійний оператор $A^* : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$, спряжений відносно білінійної форми $\langle .,. \rangle$ до оператора A.

Також визначимо деякі початкові елементи

$$\widetilde{x}_0 \in \mathcal{X} \quad \text{та} \quad \widetilde{y}_0 \in \mathcal{Y}. \tag{3.25}$$

Будемо вважати, що простори $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$, білінійна форма $\langle .,. \rangle$ на $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, оператори A та A^*, і елементи $\widetilde{x}_0$ та $\widetilde{y}_0$ є такими, що системи елементів

$$\{\widetilde{x}_k = A^k \widetilde{x}_0\}_{k=0}^{\infty} \tag{3.26}$$

та

$$\{\widetilde{y}_j = A^{*j} \widetilde{x}_0\}_{j=0}^{\infty} \tag{3.27}$$

є лінійно незалежними в просторах $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$, відповідно, і допускають невироджену біортогоналізацію відносно форми $\langle .,. \rangle$, так що існують системи узагальнених поліномів

$$\{\widetilde{X}_N\}_{N \in \mathbb{Z}_+} \quad \text{та} \quad \{\widetilde{Y}_M\}_{M \in \mathbb{Z}_+},$$

для яких виконуються умови

$$\widetilde{X}_N = \sum_{k=0}^{N} \tilde{c}_k^{(N)} \tilde{x}_k, \quad \tilde{c}_N^{(N)} \neq 0, N \in \mathbb{Z}_+, \tag{3.28}$$

$$\widetilde{Y}_M = \sum_{j=0}^{M} \tilde{d}_j^{(M)} \tilde{y}_j, \quad \tilde{d}_M^{(M)} \neq 0, M \in \mathbb{Z}_+, \tag{3.29}$$

$$\langle \widetilde{X}_N, \widetilde{Y}_m \rangle = \delta_{M,N} = \begin{cases} 1, & M = N \\ 0 & M \neq N \end{cases}, \quad M, N \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.30}$$

Як відомо (див., наприклад, [31]), для того щоб була можливою невироджена біортогоналізація вигляду (3.30) необхідно і достатньо, щоб визначники Ганкеля

$$\widetilde{H}_N = \det \|\tilde{s}_{k+j}\|_{k,j=0}^N \neq 0, \quad \forall N \in \mathbb{Z}_+.$$

Також в [31] показано, що за цих умов будуть також існувати невироджені апроксиманти Паде $[N-1/N]_f, N \in \mathbb{N}$, степеневого ряду

$$\tilde{f}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{s}_k z^k. \tag{3.31}$$

За цих умов ряд (3.31) буде збігатися до аналітичної в околі початку координат функції, яка матиме зображення

$$\tilde{f}(z) = \langle \mathcal{R}_z(A) \tilde{x}_0, \tilde{y}_0 \rangle.$$

Розглянемо в просторі $\mathcal{X}$ лінійні оператори

$$A_1 = A, \quad A_2 = A^p, \tag{3.32}$$

де $p \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$ — деяке натуральне число, а A — обмежений лінійний оператор.

При вищенаведених умовах, ми можемо розглядати двовимірну числову послідовність $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$, яка має узагальнене моментне зображення

$$s_{k+j,m+n} = \langle x_{k,m}, y_{j,n} \rangle, \quad k, m, j, n \in \mathbb{Z}_+, \tag{3.33}$$

де

$$x_{k,m} = A_1^k A_2^m \widetilde{x}_0, \quad k, m \in \mathbb{Z}_+, \tag{3.34}$$

$$y_{j,n} = A_1^{*j} A_2^{*n} \widetilde{y}_0, \quad j, n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.35}$$

та, згідно з (3.17), при так означених операторах представлення функції через резольвентні функції операторів матиме вигляд

$$f(z,w) = \langle \mathcal{R}_z(A)\mathcal{R}_w(A^p)\widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0 \rangle \tag{3.36}$$

та їй буде відповідати степеневий ряд

$$f(z,w) = \sum_{k,m=0}^{\infty} s_{k,m} z^k w^m, \tag{3.37}$$

для коефіцієнтів якого є справедливими зображення (3.18).

Дещо модифікуємо представлення (3.36).

Для цього використаємо наступні леми.

Лема 3.5. *Нехай $\mathcal{X}$ – лінійний нормований простір, $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ – обмежений лінійний оператор. Тоді у всіх точках регулярності резольвентних функцій $\mathcal{R}_z(A)$ та $\mathcal{R}_w(A^p)$ справджується рівність*

$$\mathcal{R}_z(A)\mathcal{R}_w(A^p) = \frac{1}{z^p - w}\left(z^p\mathcal{R}_z(A) - w\sum_{r=0}^{p-1} z^r A^r \mathcal{R}_w(A^p)\right). \tag{3.38}$$

Доведення. Якщо до обох частин (3.38) застосувати оператор $(z^p - w)(I - zA)(I - wA^p)$, то отримаємо

$$z^p - w = z^p (I - wA^p) - w\sum_{r=0}^{p-1} z^r A^r (I - zA) =$$

$$= z^p - wz^pA^p - w(I - z^pA^p) = z^p - w.$$

Оскільки отримана рівність є очевидною, а z та w є регулярними точками відповідних резольвентних функцій, то і початкова рівність має місце. □

Лема 3.6. *За умов леми 3.5*

$$\mathcal{R}_w(A^p) = \frac{1}{p}\sum_{r=0}^{p-1} R_{w^{1/p}\xi_r^{(p)}}(A),$$

де $\xi_r^{(p)} = e^{2\pi i r/p}$, $r = \overline{0, p-1}$, *– корені p-го степеня з 1.*

Доведення. Як відомо (див. напр. [4, с. 155]) корені p-го степеня з 1 утворюють абелеву групу відносно множення. Позначимо цю групу через G_p. Вона буде циклічною і одиничним елементом в ній буде $\xi_0^{(p)} = 1$. Легко переконатися, що при $p \geq 2$ буде мати місце рівність

$$\sum_{r=0}^{p-1} \xi_r^{(p)} = \sum_{r=0}^{p-1} \left(\xi_1^{(p)}\right)^r = \frac{\left(\xi_1^{(p)}\right)^p - 1}{\xi_1^{(p)} - 1} = 0.$$

При всіх натуральних k

$$G_{p,m} = \left\{ \left(\xi_1^{(p)}\right)^k, \ r = \overline{1, p} \right\} \subseteq G_p$$

буде утворювати підгрупу групи G_p. Більше того, якщо найбільший спільний дільник чисел p та k дорівнює d, то будемо мати $G_{p,k} = G_{p/d}$.

Отже, при кожному $k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{r=0}^{p-1} \left(\xi_r^{(p)}\right)^k = \begin{cases} 0, & \text{при } k, \text{ що не ділиться на } p, \\ p, & \text{при } k, \text{ що ділиться на } p. \end{cases}$$

А тому

$$\mathcal{R}_w(A^p) = (I - wA^p)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} w^k A^{pk} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(w^{1/p} A\right)^{pk} =$$

$$= \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{\infty} \left(w^{1/p} A\right)^k \sum_{r=0}^{p-1} \left(\xi_r^{(p)}\right)^k =$$

$$= \frac{1}{p} \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(w^{1/p} \xi_r^{(p)} A\right)^k = \frac{1}{p} \sum_{r=0}^{p-1} R_{w^{1/p} \xi_r^{(p)}}(A).$$

□

Аналогічно встановлюється наступний результат.

Лема 3.7. *Нехай функція $\widetilde{f}$ однієї змінної задається степеневим рядом*

$$\widetilde{f}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{s}_k z^k.$$

Тоді

$$f(z,w) = \sum_{k,m=0}^{\infty} \widetilde{s}_{k+pm} z^k w^m = \frac{z^p}{z^p - w}\widetilde{f}(z) - \frac{w^{1/p}}{p}\sum_{r=0}^{p-1} \frac{\xi_r^{(p)}\widetilde{f}(w^{1/p}\xi_r^{(p)})}{z - w^{1/p}\xi_r^{(p)}}.$$

Отож, враховуючи лему 3.5, маємо

$$f(z,w) = \sum_{k,m=0}^{\infty} s_{k,m} z^k w^m = \langle \mathcal{R}_z(A)\mathcal{R}_w(A^p)\widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0\rangle =$$

$$= \frac{1}{z^p - w}\left\{ z^p \langle \mathcal{R}_z(A)\widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0\rangle - w\left\langle \sum_{r=0}^{p-1} z^r A^r \mathcal{R}_w(A^p)\widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0 \right\rangle \right\}. \qquad (3.39)$$

Для побудови апроксимант типу Паде функції вигляду (3.39) можна застосувати теорему 3.2.

Покладемо

$$x_{k,m} = A^{k+pm}x_{0,0} = \widetilde{x}_{k+pm}, \quad (k,m) \in \mathbb{Z}_+^2,$$

$$y_{j,n} = A^{*(j+pn)}y_{0,0} = \widetilde{y}_{j+pn}, \quad (j,n) \in \mathbb{Z}_+^2.$$

Щоб побудувати відповідну апроксиманту зі знаменником вигляду

$$Q_{N_1,N_2}(z,w) = \sum_{k=0}^{N_1}\sum_{m=0}^{N_2} q_{k,m}^{(N_1,N_2)} z^k w^m$$

потрібно побудувати узагальнений поліном X_{N_1,N_2} вигляду

$$X_{N_1,N_2} = \sum_{k=0}^{N_1}\sum_{m=0}^{N_2} c_{k,m}^{(N_1,N_2)} x_{k,m} = \sum_{k=0}^{N_1}\sum_{m=0}^{N_2} c_{k,m}^{(N_1,N_2)} \widetilde{x}_{k+pm}, \qquad (3.40)$$

для якого виконуються умови біортогональності

$$\langle X_{N_1,N_2}, y_{j,n}\rangle = 0, \quad (j,n) \in \Big([0,N_1]\times[0,N_2]\Big)\backslash\{(N_1,N_2)\},$$

або ж

$$\langle X_{N_1,N_2}, \widetilde{y}_{j+pn}\rangle = 0, \quad (j,n) \in \Big([0,N_1]\times[0,N_2]\Big)\backslash\{(N_1,N_2)\},$$

або ж

$$\langle X_{N_1,N_2}, \widetilde{y}_{j}\rangle = 0, \quad j = \overline{0, N_1+pN_2-1}. \tag{3.41}$$

Згідно з нашими припущеннями такий узагальнений поліном існує та може бути зображений у вигляді

$$X_{N_1,N_2} = \sum_{r=0}^{N_1+pN_2} d_r^{(N_1+rN_2)}\widetilde{x}_r, \quad d_{N_1+rN_2}^{(N_1+pN_2)} \neq 0. \tag{3.42}$$

Співставивши (3.40) та (3.42), бачимо, що, вважаючи відомими коефіцієнти $\{d_r^{(N_1+pN_2)}\}_{r=0}^{N_1+pN_2}$, ми можемо визначати коефіцієнти $\{c_{k,m}^{(N_1,N_2)} : k=\overline{0,N_1}, m=\overline{0,N_2}\}$, але неоднозначно. Оберемо серед всіх можливих способів наступні:

i)
$$c_{k,m}^{(N_1,N_2)} = \frac{1}{\eta_{k+pm}} d_{k+pm}^{(N_1+pN_2)}, \quad (k,m)\in[0,N_1]\times[0,N_2], \tag{3.43}$$

де η_r – кількість всіх можливих пар $(k,m)\in[0,N_1]\times[0,N_2]$, таких що $k+pm=r$;

ii)
$$c_{k,m}^{(N_1,N_2)} = \begin{cases} d_{k+pm}^{(N_1+pN_2)}, & \text{при } (k,m)\in W(N_1,N_2,p), \\ 0, & \text{при } (k,m)\notin W(N_1,N_2,p) \end{cases}$$

де множина $W(N_1,N_2,p) = \Big\{(k,m)\in\Big([0,p-1]\times[0,N_2-1]\Big)\cup$ $\cup\{(k,N_2) : k\in[0,N_1]\}\Big\}$.

Розглянемо спочатку перший спосіб обчислення коефіцієнтів $c_{k,m}^{(N_1,N_2)}$. Для цього підрахуємо величини $\eta_r,\ r=\overline{0,N_1+pN_2}$.

Лема 3.8. *Для кожного* $r = \overline{0, N_1 + pN_2}$

$$\eta_r = \left[\frac{r}{p}\right] + 1 - \left(\left[\frac{r - N_1 - 1}{p}\right] + 1\right)\chi_{N_1+1}(r) -$$

$$- \left(\left[\frac{r - pN_2 - 1}{p}\right] + 1\right)\chi_{pN_2+1}(r), \tag{3.44}$$

де

$$\chi_N(r) = \begin{cases} 0, & r < N \\ 1, & r \geq N. \end{cases}.$$

Доведення. Розглянемо подвійну суму

$$\sum_{k=0}^{N_1}\sum_{m=0}^{N_2} \xi^{k+pm}.$$

Очевидно, що вона буде дорівнювати

$$\sum_{k=0}^{N_1+pN_2} \eta_r\, \xi^{k+pm}.$$

З іншого боку

$$\sum_{k=0}^{N_1}\sum_{m=0}^{N_2} \xi^{k+pm} = \sum_{k=0}^{N_1} \xi^k \sum_{m=0}^{N_2} \xi^{pm} = \frac{1 - \xi^{N_1+1}}{1 - \xi} \cdot \frac{1 - \xi^{pN_2+1}}{1 - \xi^p}. \tag{3.45}$$

Оскільки мають місце розвинення

$$\frac{1}{1-\xi} = 1 + \xi + \xi^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \xi^k,$$

$$\frac{1}{1-\xi^p} = 1 + \xi^p + \xi^{2p} + \ldots = \sum_{m=0}^{\infty} \xi^{pm},$$

то

$$\frac{1}{(1-\xi)(1-\xi^p)} = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\left[\frac{r}{p}\right] + 1\right) \xi^r. \tag{3.46}$$

Тому отримаємо

$$\sum_{r=0}^{N_1+pN_2} \eta_r\, \xi^r = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\left[\frac{r}{p} \right] + 1 \right) \xi^r - \sum_{r=N_1+1}^{\infty} \left(\left[\frac{r-N_1-1}{p} \right] + 1 \right) \xi^r -$$

$$- \sum_{r=pN_2+1}^{\infty} \left(\left[\frac{r-pN_2-1}{p} \right] + 1 \right) \xi^r +$$

$$+ \sum_{r=pN_2+N_1+2}^{\infty} \left(\left[\frac{r-pN_2-N_1-2}{p} \right] + 1 \right) \xi^r.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при степенях ξ, отримаємо рівність (3.44).

$\square$

Оскільки, згідно з (3.41), поліном X_{N_1,N_2} буде ортогональним не лише до

$$\left\{ y_{j,n} : (j,n) \in \Big([0,N_1] \times [0,N_2] \Big) \backslash \{(N_1,N_2)\} \right\},$$

але і до

$$\{y_{j,n} : j + pn \leq N_1 + pN_2 - 1\},$$

то в теоремі 3.2 в якості функції Φ візьмемо функцію

$$\Phi(u,t) = u + pt - 2N_1 - 2pN_2 + 1.$$

Тоді для функцій $\psi(t)$ та $\varphi(u)$ матимемо

$$\psi(t) = 2N_1 + 2pN_2 - pt - 1,$$

$$\varphi(u) = 2N_2 + \frac{1}{p}(2N_1 - u - 1).$$

Отримаємо наступний результат:

Теорема 3.9. *Нехай $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$ – банахові простори, $\langle .,. \rangle$ – роздільно неперервна білінійна форма, визначена на декартовому добутку $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ – обмежений лінійний оператор, $\widetilde{x}_0 \in \mathcal{X}$, $\widetilde{y}_0 \in \mathcal{Y}$ такі, що виконується умови (3.28)–(3.30).*

Тоді для функції f, що має зображення (3.39), при $N_1 \geq p-1,\ N_2 \geq 0$ раціональна функція

$$[\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f(z,w) = \frac{P_{\mathcal{N}}(z,w)}{Q_{\mathcal{D}}(z,w)}, \tag{3.47}$$

де

$$Q_{\mathcal{D}}(z,w) = \sum_{k=0}^{N_1}\sum_{m=0}^{N_2} \frac{d_{N_1+pN_2-k-pm}^{(N_1+pN_2)}}{\eta_{N_1+pN_2-k-pm}} z^k w^m, \tag{3.48}$$

а

$$P_{\mathcal{N}}(z,w) = \sum_{j=0}^{N_1-1}\sum_{n=0}^{N_2-1} z^j w^n \sum_{k=0}^{j}\sum_{m=0}^{n} \frac{d_{N_1+pN_2-k-pm}^{(N_1+pN_2)}}{\eta_{N_1+pN_2-k-pm}} \widetilde{s}_{j-k+p(n-m)} +$$

$$+z^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2-1} \sum_{j=0}^{N_1+2pN_2-pn-1} z^j w^n \sum_{k=0}^{N_1}\sum_{m=0}^{n} \frac{d_{k+p(N_2-m)}^{(N_1+pN_2)}}{\eta_{k+p(N_2-m)}} \widetilde{s}_{k+j+p(n-m)} +$$

$$+w^{N_2} \sum_{j=0}^{N_1-1} \sum_{n=0}^{N_2+[(2N_1-j-1)/p]} z^j w^n \sum_{k=0}^{j}\sum_{m=0}^{N_2} \frac{d_{N_1-k+pm}^{(N_1+pN_2)}}{\eta_{N_1-k+pm}} \widetilde{s}_{j-k+p(n+m)}, \tag{3.49}$$

матиме розвинення у степеневий ряд, коефіцієнти якого співпадатимуть з коефіцієнтами ряду (3.39) для $(k,m) \in \{(k,m) \in \mathbb{Z}_+^2 : k+pm \leq 2N_1 + 2pN_2 + 1\}$.

Врахувавши особливості визначення коефіцієнтів $c_{k,m}^{(N_1,N_2)}$, $k = \overline{0,N_1}$, $m = \overline{0,N_2}$, за допомогою другого способу отримуємо наступну теорему.

Теорема 3.10. *Нехай $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$ — банахові простори, $\langle .,. \rangle$ – роздільно неперервна білінійна форма, визначена на декартовому добутку $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ — обмежений лінійний оператор, $\widetilde{x}_0 \in \mathcal{X}$, $\widetilde{y}_0 \in \mathcal{Y}$ такі, що виконуються (3.28) – (3.30).*

Тоді для функції f, що має зображення (3.39), при $N_1 \geq p-1,\ N_2 \geq 0$ раціональна функція

$$[\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f(z,w) = \frac{P_{\mathcal{N}}(z,w)}{Q_{\mathcal{D}}(z,w)}, \tag{3.50}$$

де

$$Q_{\mathcal{D}}(z,w) = \sum_{k=0}^{N_1} d^{(N_1+pN_2)}_{N_1+pN_2-k} z^k + \sum_{k=N_1-p+1}^{N_1} \sum_{m=1}^{N_2} d^{(N_1+pN_2)}_{N_1+pN_2-k-pm} z^k w^m, \qquad (3.51)$$

а

$$P_{\mathcal{N}}(z,w) = \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{m=0}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{k} d^{(N_1+pN_2)}_{N_1-j+pN_2} \widetilde{s}_{k-j+pm} +$$
$$+ \sum_{k=N_1+1-p}^{N_1-1} \sum_{m=1}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{j=N_1+1-p}^{k} \sum_{n=1}^{m} d^{(N_1+pN_2)}_{N_1-j+p(N_2-n)} \widetilde{s}_{k-j+p(n-m)} +$$
$$+ z^{N_1} \left\{ \sum_{m=0}^{N_2-1} \sum_{k=0}^{N_1+2pN_2-pm-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1} d^{(N_1+pN_2)}_{j+pN_2} \widetilde{s}_{k+j+pm} + \right.$$
$$\left. + \sum_{m=0}^{N_2-1} \sum_{k=0}^{N_1+2pN_2-pm-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{n=0}^{m} d^{(N_1+pN_2)}_{j+p(N_2-n)} \widetilde{s}_{k+j+p(m-n)} \right\}$$
$$+ w^{N_2} \left\{ \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{m=0}^{N_2+[(2N_1-k-1)/p]} z^k w^m \sum_{j=0}^{k} d^{(N_1+pN_2)}_{N_1-j+pN_2} \widetilde{s}_{k-j+p(m+N_2)} + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=N_1+1-p}^{N_1-1} \sum_{m=0}^{N_2+[(2N_1-k-1)/p]} z^k w^m \times \sum_{j=N_1+1-p}^{k} \sum_{n=0}^{N_2} d^{(N_1+pN_2)}_{N_1-j+pn} \widetilde{s}_{k-j+p(n+m)} \right\}, \qquad (3.52)$$

матиме розвинення у степеневий ряд, коефіцієнти якого співпадатимуть з коефіцієнтами ряду (3.39) для $(k,m) \in \{(k,m) \in \mathbb{Z}^2_+ : k + pm \leq 2N_1 + 2pN_2 + 1\}$.

Розглянемо окремі випадки виконання умов (3.28)–(3.30), для того щоб будувати апроксиманти типу Паде для спеціальних рядів двох змінних.

Покладемо $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = L_2([0,1], d\mu)$, де μ – неспадна функція, що має нескінченну кількість точок зростання на $[0,1]$.

В такому разі $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ — нескінченновимірний гільбертів простір.

Розглянемо в цьому просторі оператор множення на незалежну змінну

$$(A\varphi)(t) = t\varphi(t), \quad \varphi \in \mathcal{X}.$$

Будемо вважати також, що

$$\widetilde{x}_0(t) = \widetilde{y}_0(t) \equiv 1.$$

Тоді

$$\widetilde{x}_k(t) = t^k, \quad \widetilde{y}_j(t) = t^j, \ k, j \in \mathbb{Z}_+,$$

$$(\mathcal{R}_z(A)\varphi)(t) = \frac{\varphi(t)}{1 - zt},$$

$$\widetilde{f}(z) = \int_0^1 \frac{d\mu(t)}{1 - zt}.$$

Всі умови теореми 3.9, включаючи умови (3.28)–(3.30), виконуються, а, отже, для функції

$$f(z, w) = \frac{1}{z^p - w}\left\{ z^p \int_0^1 \frac{d\mu(t)}{1 - zt} - w \sum_{r=0}^{p-1} z^r \int_0^1 \frac{t^r d\mu(t)}{1 - wt^p} \right\} \tag{3.53}$$

її апроксиманти типу Паде можуть бути записані у вигляді (3.47)-(3.49), де $d_k^{(N)}, k = \overline{0, N}$, – коефіцієнти алгебраїчних многочленів, ортонормованих на [0,1] за вагою $d\mu$, а

$$\widetilde{s}_k = \int_0^1 t^k d\mu(t), \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

— це моменти міри $d\mu$.

Тепер для деяких $\alpha, \beta \in [0, 1)$ означимо лінійні нормовані простори $\mathcal{X}_\alpha$ та $\mathcal{Y}_\beta$ таким чином

$$\mathcal{X}_\alpha = \Big\{ x(t) : \sup_{t\in[0,1]} |x(t)\, t^\alpha| < \infty \Big\},$$

$$\mathcal{Y}_\beta = \Big\{ y(t) : \sup_{t\in[0,1]} |y(t)(1 - t)^\beta| < \infty \Big\},$$

норми в яких визначаються співвідношеннями

$$\|x\|_{\mathcal{X}_\alpha} = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)\, t^\alpha|,$$

$$\|y\|_{\mathcal{Y}_\beta} = \sup_{t\in[0,1]} |y(t)(1-t)^\beta|.$$

Розглянемо в просторі $\mathcal{X}_\alpha$ лінійний обмежений оператор інтегрування

$$\left(A\varphi\right)(t) = \int_0^t \varphi(\tau)d\tau.$$

Спряженим до нього відносно білінійної форми

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^1 \varphi(t)\psi(t)dt \tag{3.54}$$

буде оператор $A^* : \mathcal{Y}_\beta \to \mathcal{Y}_\beta$

$$\left(A^*\psi\right)(t) = \int_t^1 \psi(\tau)d\tau.$$

Покладемо також

$$\widetilde{x}_0(t) = t^\nu, \quad \nu > -\alpha,$$

$$\widetilde{y}_0(t) = (1-t)^\sigma, \quad \sigma > -\beta.$$

Тоді

$$\widetilde{x}_k(t) = \frac{t^{k+\nu}}{(\nu+1)_k}, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

$$\widetilde{y}_j(t) = \frac{(1-t)^{j+\sigma}}{(\sigma+1)_j}, \quad j \in \mathbb{Z}_+,$$

де символ Похгаммера визначається співвідношенням

$$(a)_k = \begin{cases} 1, \quad k = 0 \\ a(a+1)\dots(a+k-1), \quad k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Як вказано [31, с. 35-36], резольвентна функція оператора A має вигляд

$$\left(\mathcal{R}_z(A)\varphi\right)(t) = \varphi(t) + z\int_0^t \varphi(\tau)e^{z(t-z)}d\tau.$$

Отож, отримаємо

$$\widetilde{f}(z) = \langle \mathcal{R}_z(A)\widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0\rangle =$$

$$= \frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(\nu+\sigma+2)}\left(1 + ze^z\int_0^1 \tau^{\nu+\sigma+1}e^{-z\tau}d\tau\right).$$

При $\nu+\sigma+1>0$ можна отримати також зображення

$$\widetilde{f}(z) = \frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(\nu+\sigma+2)}e^z\int_0^1 \tau^{\nu+\sigma}e^{-z\tau}d\tau.$$

Коефіцієнти $\widetilde{s}_k$ матимуть вигляд

$$\widetilde{s}_k = \int_0^1 \widetilde{x}_k(t)\widetilde{y}_0(t)d(t) = \frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(\nu+\sigma+2)(\nu+\sigma+2)_k}, \quad k=\overline{0,\infty}.$$

Отже,

$$\widetilde{f}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{s}_k z^k = \frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(\nu+\sigma+2)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(\nu+\sigma+2)_k} =$$

$$= \frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(\nu+\sigma+2)}{}_1F_1(1;\nu+\sigma+2;z), \tag{3.55}$$

де ${}_1F_1(a;b;z)$ – вироджена гіпергеометрична функція Куммера [49, с. 321].

Згідно з лемою 3.7

$$f(z,w) = \frac{z^p}{z^p-w}\widetilde{f}(z) - \frac{w^{1/p}}{p}\sum_{r=0}^{p-1}\frac{\xi_r^{(p)}\widetilde{f}(w^{1/p}\xi_r^{(p)})}{z-w^{1/p}\xi_r^{(p)}}, \tag{3.56}$$

де $\widetilde{f}$ має вигляд (3.55).

Для функції вигляду (3.56) за теоремою 3 будуються апроксиманти типу Паде з коефіцієнтами $d_k^{(N)}$, що будуть мати вигляд

$$d_k^{(N)} = p_k^{(N)}(\nu+1)_k,$$

де $p_k^{(N)}$ – коефіцієнти зсунутих ортогональних на [0,1] за мірою $t^\nu(1-t)^\sigma dt$ многочленів Якобі.

Відомо (див., напр., [49, p. 581] що

$$p_k^{(N)} = (-1)^{N-k}\binom{N}{k}\frac{\Gamma(N+k+\sigma+\nu+1)}{\Gamma(k+\nu+1)}, \quad k=\overline{1,N}.$$

Для функції вигляду (3.56) справджується наступний результат, що встановлює збіжність так побудованих апроксимант типу Паде.

Теорема 3.11. *Побудовані в теоремі 3.10 апроксиманти типу Паде функції f вигляду (3.56) при $\nu,\sigma > -1$ на кожному компакті з $\mathbb{C}^2$ рівномірно збігаються до f при $N_1, N_2 \to \infty$.*

При цьому для знаменників апроксимант справджується асимптотична формула

$$Q_{\mathcal{D}}(z,w) = (-1)^{N_1+pN_2}\frac{\Gamma(2N_1+2pN_2+\sigma+\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)}\times \tag{3.57}$$

$$\times\left(e^{-z/2}+o(1)\right), \quad N_1,N_2\to\infty,$$

а для чисельників формула

$$P_{\mathcal{N}}(z,w) = (-1)^{N_1+pN_2}\frac{\Gamma(2N_1+2pN_2+\sigma+\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)}\times$$

$$\times\left(e^{-z/2}f(z,w)+o(1)\right), \quad N_1,N_2\to\infty. \tag{3.58}$$

Доведення. Спочатку встановимо асимптотичну формулу (3.57). За теоремою 3.10 для знаменника $Q_{\mathcal{D}}$ має місце зображення

$$Q_{\mathcal{D}}(z,w) = \sum_{k=0}^{N_1}(-1)^{N_1+pN_2-k}\binom{N_1+pN_2}{k}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(2N_1+2pN_2+\sigma+\nu+1-k)}{\Gamma(N_1+pN_2+\nu+1-k)}(\nu+1)_{N_1+pN_2-k}z^k+$$

$$+\sum_{k=N_1-p+1}^{N_1}\sum_{m=1}^{N_2}(-1)^{N_1+pN_2-k-pm}\binom{N_1+pN_2}{k+pm}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(2N_1+2pN_2+\sigma+\nu+1-k-pm)}{\Gamma(N_1+pN_2+\nu+1-k-pm)}(\nu+1)_{N_1+pN_2-k-pm}z^kw^m=$$

$$=\frac{(-1)^{N_1+pN_2}\Gamma(2N_1+2pN_2+\sigma+\nu+1)}{\Gamma(N_1+pN_2+\nu+1)}(\nu+1)_{N_1+pN_2}\times$$

$$\times\left\{\sum_{k=0}^{N_1}(-1)^k\binom{N_1+pN_2}{k}\frac{\Gamma(2N_1+2pN_2+\sigma+\nu+1-k)}{\Gamma(2N_1+2pN_2+\sigma+\nu+1)}\times\right.$$

$$\times\frac{\Gamma(N_1+pN_2+\nu+1)}{\Gamma(N_1+pN_2+\nu+1-k)}\cdot\frac{(\nu+1)_{N_1+pN_2-k}}{(\nu+1)_{N_1+pN_2}}z^k+$$

$$+\sum_{k=N_1-p+1}^{N_1}\sum_{m=1}^{N_2}(-1)^{k+pm}\binom{N_1+pN_2}{k+pm}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(2N_1+2pN_2+\sigma+\nu+1-k-pm)}{\Gamma(2N_1+2pN_2+\sigma+\nu+1)}\times$$

$$\left.\times\frac{\Gamma(N_1+pN_2+\nu+1)}{\Gamma(N_1+pN_2+\nu+1-k-pm)}\cdot\frac{(\nu+1)_{N_1+pN_2-k-pm}}{(\nu+1)_{N_1+pN_2}}z^kw^m\right\}=$$

$$=\varkappa_{N_1,N_2}\Big(S(z)+T(z,w)\Big).$$

Для $S(z)$ маємо

$$S(z)=\sum_{k=0}^{N_1}(-1)^k\binom{N_1+pN_2}{k}\frac{\Gamma(2N_1+2pN_2+\sigma+\nu+1-k)}{\Gamma(2N_1+2pN_2+\sigma+\nu+1)}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(N_1+pN_2+\nu+1)}{\Gamma(N_1+pN_2+\nu+1-k)}\cdot\frac{(\nu+1)_{N_1+pN_2-k}}{(\nu+1)_{N_1+pN_2}}\,z^k=$$

$$=\sum_{k=0}^{N_1}\frac{(-z)^k}{k!}\cdot\frac{(N_1+pN_2)\dots(N_1+pN_2-k+1)}{(2N_1+2pN_2+\sigma+\nu)\dots(2N_1+2pN_2+\sigma+\nu-k+1)}=$$

$$= \sum_{k=0}^{N_1} \frac{(-z)^k}{k!} \prod_{r=1}^{k} \frac{N_1 + pN_2 - r + 1}{2N_1 + 2pN_2 + \sigma + \nu - k + 1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N_1} \frac{(-z)^k}{k!} \prod_{r=1}^{k} \left(\frac{1}{2} - \frac{1/2(\sigma + \nu + r - 1)}{2N_1 + 2pN_2 + \sigma + \nu - r + 1} \right).$$

При деякому досить великому $M < N_1$ розглянемо різницю

$$\left| S(z) - e^{-z/2} \right| \leq$$

$$\leq \left| \sum_{k=0}^{M} \frac{(-z/2)^k}{k!} \left\{ \prod_{r=1}^{k} \left(1 - \frac{\sigma + \nu + r - 1}{2N_1 + 2pN_2 + \sigma + \nu - r + 1} \right) - 1 \right\} \right| +$$

$$+ \left| \sum_{k=M+1}^{N_1} \frac{(-z/2)^k}{k!} \prod_{r=1}^{k} \left(1 - \frac{\sigma + \nu + r - 1}{2N_1 + 2pN_2 + \sigma + \nu - r + 1} \right) \right| +$$

$$+ \left| \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{(-z/2)^k}{k!} \right|.$$

На кожному компакті з $\mathbb{C}^2$ при кожному фіксованому M перший доданок при $N_1, N_2 \to \infty$ буде рівномірно прямувати до 0. Другий та третій доданки за рахунок вибору M можна зробити як завгодно малими.

Аналогічно для $T(z, w)$ маємо

$$T(z, w) = \sum_{l=0}^{p-1} \sum_{m=1}^{N_2} \left(-\frac{1}{2} \right)^{N_1 - l + pm} \frac{1}{(N_1 - l + pm)!} \times$$

$$\times \prod_{r=1}^{N_1 - l + pm} \left(1 - \frac{\sigma + \nu + r - 1}{2N_1 + 2pN_2 + \sigma + \nu - r + 1} \right) z^{N_1 - l} w^m.$$

Очевидно, що при досить великих N_1 та N_2 буде

$$\left| 1 - \frac{\sigma + \nu + r - 1}{2N_1 + 2pN_2 + \sigma + \nu - r + 1} \right| < \delta,$$

де $1 < \delta < \infty$. Отож,

$$|T(z,w)| \leq \sum_{l=0}^{p-1} \sum_{m=1}^{N_2} \left(\frac{\delta}{2}\right)^{N_1-l+pm} |z|^{N_1-l}|w|^m \frac{1}{(N_1-l+pm)!}.$$

Візьмемо досить велике $M < N_2$. Тоді

$$|T(z,w)| \leq \sum_{l=0}^{p-1} \sum_{m=1}^{M} \left(\frac{\delta}{2}\right)^{N_1-l+pm} |z|^{N_1-l}|w|^m \frac{1}{(N_1-l+pm)!}+$$
$$+\sum_{l=0}^{p-1} \sum_{m=M+1}^{N_2} \left(\frac{\delta}{2}\right)^{N_1-l+pm} |z|^{N_1-l}|w|^m \frac{1}{(N_1-l+pm)!}.$$

Перший доданок при $N_1, N_2 \to \infty$ прямує до 0, а другий, за рахунок вибору M, може бути зробленим як завгодно малим.

Таким чином, асимптотична формула (3.57) встановлена. Завдяки цій формулі ми можемо також стверджувати, що на кожному компакті з $\mathbb{C}^2$, починаючи з деяких великих номерів N_1 та N_2, відсутні нулі знаменників апроксиманти типу Паде.

Оцінимо похибку наближення.

$$|f(z,w) - [\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f(z,w)| =$$

$$\frac{1}{|Q_{\mathcal{D}}(z,w)|}\left| z^{N_1}w^{N_2}\int_0^1 \left(\mathcal{R}_z(A)\mathcal{R}_w(A^p)\widetilde{y}_0\right)(t)X_{N_1,N_2}(t)dt+\right.$$
$$+z^{N_1}\left\{\sum_{k=0}^{N_2-1}\sum_{m=N_1+2pN_2-pk}^{\infty} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1} d_{j+pN_2}^{(N_1+pN_2)}\widetilde{s}_{m+j+pk}+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=0}^{N_2-1}\sum_{m=N_1+2pN_2-pk}^{\infty} z^k w^m \sum_{j=0}^{p-1}\sum_{n=0}^{m} d_{j+p(N_2-n)}^{(N_1+pN_2)}\widetilde{s}_{m+j+p(k-m)}\right\}$$
$$+w^{N_2}\left\{\sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=N_2+1+[\frac{2N_1-k-1}{p}]}^{\infty} z^k w^m \sum_{j=0}^{k} d_{N_1-j+pN_2}^{(N_1+pN_2)}\widetilde{s}_{k-j+p(N_2+m))}+\right.$$

$$+\sum_{k=N_1+1-p}^{N_1-1}\ \sum_{m=N_2+1+[\frac{2N_1-k-1}{p}]}^{\infty} z^k w^m \sum_{j=N_1+1-p}^{k}\sum_{n=0}^{N_2} d_{N_1-j+pn}^{(N_1+pN_2)}\widetilde{s}_{k-j+p(n+m)}\Bigg\}\Bigg|.$$

Розглянемо перший доданок

$$\int_0^1 \left(\mathcal{R}_z(A)\mathcal{R}_w(A^p)\widetilde{y}_0\right)(t)X_{N_1,N_2}(t)dt =$$

$$=\int_0^1\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(1-t)^{k+pm+\sigma}}{(\sigma+1)_{k+pm}}z^k w^m X_{N_1,N_2}(t)dt =$$

$$=\int_0^1\sum_{k+pm\geq N_1+pN_2}^{\infty}\frac{(1-t)^{k+pm+\sigma}z^k w^m}{(\sigma+1)_{k+pm}}X_{N_1,N_2}(t)dt =$$

$$=\int_0^1\sum_{l=N_1+pN_2}^{\infty}\frac{(1-t)^l}{(\sigma+1)_l}\sum_{k=0}^{l}z^k w^{l-k}X_{N_1,N_2}(t)(1-t)^{\sigma}dt =$$

$$=\sum_{l=N_1+pN_2}^{\infty}\frac{1}{(\sigma+1)_l}\sum_{k=0}^{l}z^k w^{l-k}\int_0^1(1-t)^l P_{N_1+pN_2}^{(\nu,\sigma)*}(1-t)\,t^{\nu}(1-t)^{\sigma}dt. \quad (3.59)$$

Функцію $(1-t)^l$ можна розкласти в лінійну комбінацію ортогональних зсунутих на [0,1] многочленів Якобі $P_m^{(\nu,\sigma)*}(1-t)$:

$$(1-t)^l=\sum_{m=0}^{l}\alpha_m^{(l)}P_m^{(\nu,\sigma)*}(1-t), \quad (3.60)$$

де коефіцієнти $\alpha_m^{(l)}$ (див., напр. [32]) обчислюються за формулою

$$\alpha_{l-k}^{(l)}=(-1)^{l-k}\binom{l}{l-k}\frac{\Gamma(l+\nu+1)(2l+\sigma+\nu-2k+1)}{\Gamma(2l+\sigma+\nu+2-k)} \quad (3.61)$$

Тому враховуючи (3.59) можна (3.60) записати наступним чином

$$\sum_{l=N_1+pN_2}^{\infty}\frac{\alpha_{N_1+pN_2}^{(l)}}{(\sigma+1)_l}\left(\sum_{k=0}^{l}z^k w^{l-k}\right)\int_0^1\left[P_{N_1+pN_2}^{(\nu,\sigma)*}(1-t)\right]^2 t^{\nu}(1-t)^{\sigma}dt.$$

Інтеграл у даному представленні являється квадратом норми зсунутого ортогонального многочлена Якобі. Як відомо (див. [49]), квадрат норми зсунутого ортогонального многочлена Якобі степеня N з одиничним коефіцієнтом дорівнює

$$h_N = \frac{N!\Gamma(N+\nu+1)\Gamma(N+\sigma+\nu+1)\Gamma(N+\sigma+1)}{(2N+\sigma+\nu+1)\Gamma^2(2N+\sigma+\nu+1)}.$$

Так як старший коефіцієнт многочлена $P^{(\nu,\sigma)*}_{N_1+pN_2}(1-t)$ дорівнює $\frac{\Gamma(2(N_1+pN_2)+\sigma+\nu+1)}{\Gamma^2(N_1+pN_2+\sigma+1)}$ то

$$\left|\left|P^{(\nu,\sigma)*}_{N_1+pN_2}(1-t)\right|\right|^2 = \int_0^1 \left[P^{(\nu,\sigma)*}_{N_1+pN_2}(1-t)\right]^2 t^\nu (1-t)^\sigma dt =$$
$$= \frac{(N_1+pN_2)!\Gamma(N_1+pN_2+\nu+1)\Gamma(N_1+pN_2+\sigma+\nu+1)}{(2(N_1+pN_2)+\sigma+\nu+1)\Gamma(N_1+pN_2+\sigma+1)} \tag{3.62}$$

З урахуванням (3.61) та (3.62) матимемо

$$\left|\int_0^1 \left(\mathcal{R}_z(A)\mathcal{R}_w(A^p)\widetilde{y}_0\right)(t) X_{N_1,N_2}(t)dt\right| \le$$
$$\le \left|\left|P^{(\nu,\sigma)*}_{N_1+pN_2}(1-t)\right|\right|^2 \sum_{l=N_1+pN_2}^{\infty} \frac{|\alpha|^{(l)}_{N_1+pN_2}}{(\sigma+1)_l}\left(\sum_{k=0}^{l}|z|^k|w|^{l-k}\right) =$$
$$= \frac{(N_1+pN_2)!\Gamma(N_1+pN_2+\nu+1)\Gamma(N_1+pN_2+\sigma+\nu+1)}{(2(N_1+pN_2)+\sigma+\nu+1)\Gamma(N_1+pN_2+\sigma+1)}\times$$
$$\times \sum_{l=N_1+pN_2}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{l}|z|^k|w|^{l-k}\right)\binom{l}{N_1+pN_2}\times$$
$$\times\frac{\Gamma(l+\nu+1)(2(N_1+pN_2)+\sigma+\nu+1)}{(\sigma+1)_l\Gamma(l+N_1+pN_2+\sigma+\nu+2)} \le$$
$$\le \frac{\Gamma(N_1+pN_2+\nu+1)\Gamma(N_1+pN_2+\sigma+\nu+1)}{\Gamma(N_1+pN_2+\sigma+1)}\times$$
$$\times \sum_{l=N_1+pN_2}^{\infty} \frac{l!}{(\sigma+1)_l}\frac{\Gamma(l+\nu+1)}{\Gamma(l+N_1+pN_2+\sigma+\nu+2)}\times$$

$$\times\frac{R^l}{(l-N_1-pN_2)!}\le\frac{\Gamma(N_1+pN_2+\nu+1)\Gamma(N_1+pN_2+\sigma+\nu+1)}{\Gamma(N_1+pN_2+\sigma+1)}\times$$

$$\times R^{N_1+pN_2}\frac{\Gamma(N_1+pN_2+\nu+1)}{\Gamma(2(N_1+pN_2)+\sigma+\nu+2)}\frac{(N_1+pN_2)!}{(\sigma+1)_{N_1+pN_2}}\times$$

$$\times\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(N_1+pN_2+\nu+1)\dots(N_1+pN_2+\nu+1+l)}{(2(N_1+pN_2)+\sigma+\nu+2)\dots(2(N_1+pN_2)+\sigma+\nu+2+l)}$$

$$\times\frac{R^l}{l!}\le C\,\frac{\Gamma(N_1+pN_2+\nu+1)\Gamma(N_1+pN_2+\sigma+\nu+1)}{\Gamma(N_1+pN_2+\sigma+1)}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(N_1+pN_2+\nu+1)R^{N_1+pN_2}}{\Gamma(2(N_1+pN_2)+\sigma+\nu+2)},$$

де C – деяка константа, що залежить від R.

З допомогою формули Стірлінга (див. [49, с. 83]) для останньої величини отримуємо оцінку

$$C\,\frac{(N_1+pN_1)^{\nu+1/2}}{2^{2N_1+2pN_1}}R^{N_1+pN_2}.$$

Оцінимо першу частину другого доданка

$$\left|z^{N_1}\sum_{k=0}^{N_2-1}\sum_{m=N_1+2pN_2-pk}^{\infty}z^kw^m\sum_{j=0}^{N_1}d_{j+pN_2}^{(N_1+pN_2)}\widetilde{s}_{m+j+pk}\right|=$$

$$=\left|z^{N_1}\sum_{k=0}^{N_2-1}\sum_{m=N_1+2pN_2-pk}^{\infty}z^kw^m\sum_{j=0}^{N_1}\binom{N_1+pN_2}{j+pN_2}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\Gamma(N_1+pN_2+\sigma+\nu+1+j+pN_2)(\nu+1)_{j+pN_2}}{\Gamma(\nu+1+j+pN_2)\ (\sigma+\nu+2)_{m+j+pk}}\right|\le$$

$$\le R^{N_1+N_2-1}\frac{\Gamma(2(N_1+pN_2)+\sigma+\nu+1)(\nu+1)_{N_1+pN_2}}{\Gamma(\nu+1+pN_2)}\times$$

$$\times 2^{N_1+pN_2}\sum_{k=0}^{N_2-1}\sum_{m=N_1+2pN_2-pk}^{\infty}\frac{R^m}{(\sigma+\nu+2)_m}\le R^{2N_1+(p+1)N_2-1}\times$$

$$2^{N_1+pN_2} \cdot \frac{\Gamma(2(N_1+pN_2)+\sigma+\nu+1)(\nu+1)_{N_1+pN_2}}{\Gamma(\nu+1+pN_2)\,(\sigma+\nu+2)_{N_1+pN_2-1}} \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{R^m}{m!} \leq$$

$$\leq C 2^{N_1+pN_2} R^{2N_1+(p+1)N_2} \frac{\Gamma(2(N_1+pN_2)+\sigma+\nu+1)}{\Gamma(pN_2+\nu+1)}$$

Провівши аналогічні оцінки для наступних доданків, врешті для похибки апроксимації отримаємо

$$|f(z,w)-[\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f(z,w)| \leq \frac{C\,\Gamma(N_1+pN_2+\sigma+1)}{\Gamma(2N_1+2pN_2+\sigma+\nu+1)(\nu+1)_{N_1+pN_2}} \times$$

$$\times \left| \frac{(N_1+pN_1)^{\nu-1/2}}{2^{2N_1+2pN_1}} R^{N_1+pN_2} + \right.$$

$$+ 2^{N_1+pN_2+2} R^{2N_1+(p+1)N_2} \frac{\Gamma(2(N_1+pN_2)+\sigma+\nu+1)}{\Gamma(pN_2+\nu+1)}.$$

Звідси випливає твердження теореми про рівномірну збіжність. Теорему доведено.

□

3.4. Побудова апроксимацій типу Паде рядів, для коефіцієнтів яких мають місце узагальнені моментні зображення з операторами $A_1 = A$, $A_2 = A^2 + \alpha A$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Нехай визначено деякі нормовані простори $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$, і $\langle .,. \rangle$ — білінійна фома на декартовому добутку цих просторів $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Будемо знову вважати, що в просторі $\mathcal{X}$ задано лінійний оператор $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, а у просторі $\mathcal{Y}$ — лінійний оператор $A^* : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$, спряжений відносно білінійної форми $\langle .,. \rangle$ до оператора A, та початкові елементи $\widetilde{x}_0 \in \mathcal{X}$ та $\widetilde{y}_0 \in \mathcal{Y}$, так що допускається невироджена біортогоналізація (3.28) – (3.30).

Розглянемо в просторі $\mathcal{X}$ лінійні оператори

$$A_1 = A, \quad A_2 = A^2 + \alpha A, \tag{3.63}$$

де α – деяке дійсне число, а A – обмежений оператор.

Розглянемо двовимірну числову послідовність $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$, яка має узагальнене моментне зображення

$$s_{k+j,m+n} = \langle x_{k,m}, y_{j,n} \rangle, \quad k, m, j, n \in \mathbb{Z}_+, \tag{3.64}$$

де

$$x_{k,m} = A_1^k A_2^m \widetilde{x}_0, \quad k, m \in \mathbb{Z}_+, \tag{3.65}$$

$$y_{j,n} = A_1^{*j} A_2^{*n} \widetilde{y}_0, \quad j, n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.66}$$

та, згідно з (3.17), при так означених операторах представлення функції через резольвентні функції операторів матиме вигляд

$$f(z, w) = \langle \mathcal{R}_z(A) \mathcal{R}_w(A^2 + \alpha A) x_{0,0}, y_{0,0} \rangle \tag{3.67}$$

та їй буде відповідати степеневий ряд

$$f(z, w) = \sum_{k,m=0}^{\infty} s_{k,m} z^k w^m. \tag{3.68}$$

Знову дещо модифікуємо зображення (3.67).

Для цього використаємо наступні леми.

Лема 3.12. *Нехай $\mathcal{X}$ — лінійний нормований простір, $A\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ — обмежений лінійний оператор.*

Тоді в усіх точках регулярності резольвентних функцій

$$\mathcal{R}_z(A) \quad \textit{та} \quad \mathcal{R}_w(A^2 + \alpha A)$$

справджується рівність

$$\mathcal{R}_z(A)\mathcal{R}_w(A^2 + \alpha A) =$$

$$= \frac{1}{\alpha z w - z^2 + w} \left(-z^2\mathcal{R}_z(A) + w(\alpha z + zA + 1)\mathcal{R}_w(A^2 + \alpha A)\right). \qquad (3.69)$$

Доведення. Якщо до обох частин (3.69) застосувати оператор

$$\left(\alpha z w - z^2 + w\right)(I - zA)\left(I - w(A^2 + \alpha A)\right),$$

то отримаємо

$$\alpha z w - z^2 + w = -z^2\left(I - w(A^2 + \alpha A)\right) + w(\alpha z + zA + 1)(I - zA) =$$

$$= \alpha z w - z^2 + w.$$

Оскільки отримана рівність є очевидною, а z та w є регулярними точками відповідних резольвентних функцій, то і початкова рівність має місце. $\square$

Лема 3.13. *Нехай виконуються умови леми 3.12. Тоді у всіх точках регулярності резольвентної функції $\mathcal{R}_w(A^2 + \alpha A)$ справджується рівність*

$$\mathcal{R}_w(A^2 + \alpha A) =$$

$$= -\frac{2}{w\sqrt{\alpha^2 + 4/w}} \left(\frac{\mathcal{R}_{\alpha_1}(A)}{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4/w}} + \frac{\mathcal{R}_{\alpha_2}(A)}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4/w}}\right), \qquad (3.70)$$

де $\alpha_{1,2} = 2/(-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4/w})$.

Використовуючи леми 3.12 та 3.13 і співвідношення (3.67), маємо

$$f(z,w)=\frac{1}{\alpha zw-z^2+w}\left(-z^2\langle\mathcal{R}_z(A)x_{0,0},y_{0,0}\rangle+\right.$$

$$+\frac{2(\alpha z+1)}{\sqrt{\alpha^2+4/w}}\left(\frac{\langle\mathcal{R}_{\alpha_1}(A)x_{0,0},y_{0,0}\rangle}{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+4/w}}+\frac{\langle\mathcal{R}_{\alpha_2}(A)x_{0,0},y_{0,0}\rangle}{\alpha+\sqrt{\alpha^2+4/w}}\right)+ \tag{3.71}$$

$$\left.+\frac{2z}{\sqrt{\alpha^2+4/w}}\left(\frac{\langle A\cdot\mathcal{R}_{\alpha_1}(A)x_{0,0},y_{0,0}\rangle}{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+4/w}}+\frac{\langle A\cdot\mathcal{R}_{\alpha_2}(A)x_{0,0},y_{0,0}\rangle}{\alpha+\sqrt{\alpha^2+4/w}}\right)\right).$$

Визначимо співвідношення для елементів $x_{k,m}$ при вказаному виборі операторів A_1 та A_2.

$$x_{k,m}={A_1}^k{A_2}^m x_{0,0}=A^k(A^2+\alpha A)^m x_{0,0}=$$

$$=A^k\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}(A^2)^{m-l}(\alpha A)^l x_{0,0}=\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}\alpha^l A^{2m+k-l}x_{0,0}. \tag{3.72}$$

Аналогічне представлення буде справедливе для елементів $y_{j,n}$.

Згідно з теоремою 3.2 для побудови апроксимант типу Паде функції f, зображуваної рядом (3.68), потрібно побудувати біортогональні поліноми

$$X_{N_1,N_2}=\sum_{k=0}^{N_1}\sum_{m=0}^{N_2}c_{k,m}^{N_1,N_2}x_{k,m}, \tag{3.73}$$

такі що

$$\langle X_{N_1,N_2},y_{j,n}\rangle=0$$

для $(j,n)\in([0,N_1]\times[0,N_2])\setminus\{(N_1,N_2)\}$.

Легко бачити, що з точністю до постійного множника

$$X_{N_1,N_2}=\widetilde{X}_{N_1+2N_2}.$$

З цієї рівності коефіцієнти полінома X_{N_1,N_2} можуть бути знайдені неоднозначно.

Для визначеності будемо, наприклад, покладати

$$c_{k,m}^{(N_1,N_2)} = 0, \qquad \text{при } (k,m) \in [0, N_1-2] \times [1, N_2].$$

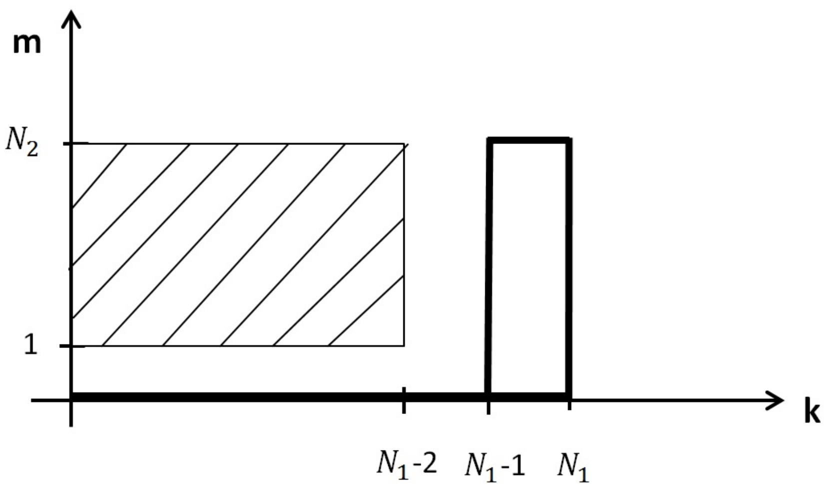


Рис. 3.3: Область $\mathcal{D}$.

Тоді отримаємо

$$\sum_{k=0}^{N_1-2} c_{k,0}^{(N_1,N_2)} A^k + A^{N_1-1} \sum_{m=0}^{N_2} c_{N_1-1,m}^{(N_1,N_2)} (A^2+\alpha A)^m +$$

$$+A^{N_1} \sum_{m=0}^{N_2} c_{N_1,m}^{(N_1,N_2)} (A^2+\alpha A)^m = \sum_{r=0}^{N_1+2N_2} \widetilde{c}_r^{(N_1+2N_2)} A^r.$$

Звідси,

$$c_{k,0}^{(N_1,N_2)} = \widetilde{c}_r^{(N_1+2N_2)} \qquad \text{при } k = \overline{0, N_1-1}.$$

І далі маємо

$$\sum_{m=1}^{N_2} c_{N_1-1,m}^{(N_1,N_2)} (A^2+\alpha A)^m +$$

$$+A \sum_{m=0}^{N_2} c_{N_1,m}^{(N_1,N_2)} (A^2+\alpha A)^m = \sum_{r=N_1}^{N_1+2N_2} \widetilde{c}_r^{(N_1+2N_2)} A^{r-N_1+1}.$$

Отримуємо

$$A(A+\alpha)\sum_{m=0}^{N_2} c_{N_1-1,m+1}^{(N_1,N_2)} A^m (A+\alpha)^m +$$

$$+A\sum_{m=0}^{N_2} c_{N_1,m}^{(N_1,N_2)} A^m (A+\alpha)^m = A\sum_{r=0}^{2N_2} \widetilde{c}_{r+N_1}^{(N_1+2N_2)} A^r$$

Звідси,

$$(A+\alpha)\sum_{m=0}^{N_2} c_{N_1-1,m+1}^{(N_1,N_2)} A^m (A+\alpha)^m +$$

$$+\sum_{m=0}^{N_2} c_{N_1,m}^{(N_1,N_2)} A^m (A+\alpha)^m = \sum_{r=0}^{2N_2} \widetilde{c}_{r+N_1}^{(N_1+2N_2)} A^r.$$

Отриману рівність можна розглядати як формальне співвідношення, що виконується за умови співпадання відповідних коефіцієнтів при степенях оператора A в лівій та правій частині рівності.

Введемо позначення $A^2 + \alpha A = B$.

Тоді

$$A = -\frac{\alpha}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + 4B}.$$

Тому, якщо у отриману рівність замість A поставити $-\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + 4B}$, то вона повинна бути також справедливою в розумінні співпадання коефіцієнтів при степенях B.

$$(A+\alpha)\sum_{m=0}^{N_2-1} c_{N_1-1,m+1}^{(N_1,N_2)} B^m + \sum_{m=0}^{N_2} c_{N_1,m}^{(N_1,N_2)} B^m = \sum_{r=0}^{2N_2} \widetilde{c}_{r+N_1}^{(N_1+2N_2)} A^r.$$

Позначимо

$$E_{N_2-1}(B) = \sum_{m=0}^{N_2-1} c_{N_1-1,m+1}^{(N_1,N_2)} B^m, \quad D_{N_2}(B) = \sum_{m=0}^{N_2} c_{N_1-1,m}^{(N_1,N_2)} B^m.$$

У вищевведених позначеннях будемо мати

$$\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + 4B}\right) E_{N_2-1}(B) + D_{N_2}(B) =$$

$$= \sum_{r=0}^{2N_2} \widetilde{c}_{r+N_1}^{(N_1+2N_2)} \sum_{l=0}^{r} \binom{r}{l} \frac{1}{2^r} (\alpha^2+4B)^{l/2} (-\alpha)^{r-l} =$$

$$= \sum_{l=0}^{2N_2} \left(-\frac{1}{\alpha}\right)^l (\alpha^2+4B)^{l/2} \sum_{r=l}^{2N_2} \widetilde{c}_{r+N_1}^{(N_1+2N_2)} \binom{r}{l} \left(-\frac{\alpha}{2}\right)^r =$$

$$= \sum_{l=0}^{N_2} \frac{1}{\alpha^{2l}} (\alpha^2+4B)^l \sum_{r=2l}^{2N_2} \widetilde{c}_{r+N_1}^{(N_1+2N_2)} \binom{r}{2l} \left(-\frac{\alpha}{2}\right)^r -$$

$$- \sqrt{\alpha^2+4B} \sum_{l=0}^{N_2-1} \frac{1}{\alpha^{2l+1}} (\alpha^2+4B)^l \sum_{r=2l+1}^{2N_2} \widetilde{c}_{r+N_1}^{(N_1+2N_2)} \binom{r}{2l+1} \left(-\frac{\alpha}{2}\right)^r .$$

Отже,

$$\frac{\alpha}{2} E_{N_2-1}(B) + D_{N_2}(B) = \sum_{l=0}^{N_2} \frac{1}{\alpha^{2l}} (\alpha^2+4B)^l \sum_{r=2l}^{2N_2} \widetilde{c}_{r+N_1}^{(N_1+2N_2)} \binom{r}{2l} \left(-\frac{\alpha}{2}\right)^r ,$$

$$\frac{\alpha}{2} E_{N_2-1}(B) = - \sum_{l=0}^{N_2-1} \frac{1}{\alpha^{2l+1}} (\alpha^2+4B)^l \sum_{r=2l+1}^{2N_2} \widetilde{c}_{r+N_1}^{(N_1+2N_2)} \times \binom{r}{2l+1} \left(-\frac{\alpha}{2}\right)^r .$$

Друга з цих рівностей дає можливість визначити коефіцієнти полінома $E_{N_2-1}(B)$.

$$E_{N_2-1}(B) = -2 \sum_{l=0}^{N_2-1} \frac{1}{\alpha^{2l+1}} (\alpha^2+4B)^l \sum_{r=2l+1}^{2N_2} \widetilde{c}_{r+N_1}^{(N_1+2N_2)} \binom{r}{2l+1} \left(-\frac{\alpha}{2}\right)^r =$$

$$= -2 \sum_{l=0}^{N_2-1} \frac{1}{\alpha^{2l+1}} \sum_{p=0}^{l} \binom{l}{p} (4B)^p \alpha^{2(l-p)} \sum_{r=2l+1}^{2N_2} \widetilde{c}_{r+N_1}^{(N_1+2N_2)} \binom{r}{2l+1} \left(-\frac{\alpha}{2}\right)^r =$$

$$= -2 \sum_{p=0}^{N_2-1} (4B)^p \frac{1}{\alpha^{2p+1}} \sum_{l=p}^{N_2-1} \binom{l}{p} \sum_{r=2l+1}^{2N_2} \widetilde{c}_{r+N_1}^{(N_1+2N_2)} \binom{r}{2l+1} \left(-\frac{\alpha}{2}\right)^r .$$

З першої рівності отримуємо вигляд полінома $D_{N_2}(B)$.

$$D_{N_2}(B) = -\frac{\alpha}{2} E_{N_2-1}(B) +$$

$$+\sum_{l=0}^{N_2}\frac{1}{\alpha^{2l}}(\alpha^2+4B)^l\sum_{r=2l}^{2N_2}\widetilde{c}_{r+N_1}^{(N_1+2N_2)}\binom{r}{2l}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)^r=$$

$$=\alpha\sum_{p=0}^{N_2-1}(4B)^p\frac{1}{\alpha^{2p+1}}\sum_{l=p}^{N_2-1}\binom{l}{p}\sum_{r=2l+1}^{2N_2}\widetilde{c}_{r+N_1}^{(N_1+2N_2)}\binom{r}{2l+1}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)^r+$$

$$+\sum_{l=0}^{N_2}\frac{1}{\alpha^{2l}}\sum_{p=0}^{l}\binom{l}{p}(4B)^p\alpha^{2(l-p)}\sum_{r=2l}^{2N_2}\widetilde{c}_{r+N_1}^{(N_1+2N_2)}\binom{r}{2l}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)^r=$$

$$=\sum_{p=0}^{N_2-1}\left(\frac{2}{\alpha}\right)^{2p}B^p\sum_{l=p}^{N_2-1}\binom{l}{p}\sum_{r=2l+1}^{2N_2}\widetilde{c}_{r+N_1}^{(N_1+2N_2)}\binom{r}{2l+1}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)^r+$$

$$\sum_{p=0}^{N_2}\left(\frac{2}{\alpha}\right)^{2p}B^p\sum_{l=p}^{N_2}\binom{l}{p}\sum_{r=2l}^{2N_2}\widetilde{c}_{r+N_1}^{(N_1+2N_2)}\binom{r}{2l}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)^r.$$

Отже,

$$c_{N_1-1,m}^{(N_1,N_2)}=-\left(\frac{2}{\alpha}\right)^{2m-1}\sum_{l=m-1}^{N_2-1}\binom{l}{m-1}\sum_{r=2l+1}^{2N_2}\widetilde{c}_{r+N_1}^{(N_1+2N_2)}\binom{r}{2l+1}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)^r,$$
$$m=\overline{1,N_2},$$

$$c_{N_1,m}^{(N_1,N_2)}=\left(\frac{2}{\alpha}\right)^{2m}\left(\sum_{l=m}^{N_2-1}\binom{l}{m}\sum_{r=2l+1}^{2N_2}\widetilde{c}_{r+N_1}^{(N_1+2N_2)}\binom{r}{2l+1}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)^r+\right.$$
$$\left.+\sum_{l=m}^{N_2}\binom{l}{m}\sum_{r=2l}^{2N_2}\widetilde{c}_{r+N_1}^{(N_1+2N_2)}\binom{r}{2l}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)^r\right).\quad(3.74)$$

Загалом, ми отримаємо наступні співвідношення для коефіцієнтів $c_{k,m}^{(N_1,N_2)}$:

$$c_{k,m}^{(N_1,N_2)} = \begin{cases} 0, \qquad \text{при } (k,m) \in [0, N_1-2] \times [1, N_2]; \\ \\ \widetilde{c}_k^{N_1+2N_2}, \qquad \text{при } k = \overline{0, N_1-1}, m = 0; \\ \\ -\left(\frac{2}{\alpha}\right)^{2m-1} \sum_{l=m-1}^{N_2-1} \binom{l}{m-1} \sum_{r=2l+1}^{2N_2} \widetilde{c}_{r+N_1}^{(N_1+2N_2)} \times, \\ \times \binom{r}{2l+1} \left(-\frac{\alpha}{2}\right)^r, \text{ при } \quad k = N_1 - 1,\ m = \overline{1, N_2}; \\ \\ \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{2m} \left(\sum_{l=m}^{N_2-1} \binom{l}{m} \sum_{r=2l+1}^{2N_2} \widetilde{c}_{r+N_1}^{(N_1+2N_2)} \binom{r}{2l+1} \left(-\frac{\alpha}{2}\right)^r + \right. \\ \left. + \sum_{l=m}^{N_2} \binom{l}{m} \sum_{r=2l}^{2N_2} \widetilde{c}_{r+N_1}^{(N_1+2N_2)} \binom{r}{2l} \left(-\frac{\alpha}{2}\right)^r \right), \\ \text{при} \quad k = N_1,\ m = \overline{1, N_2}. \end{cases} \tag{3.75}$$

Тоді застосування теореми 3.2 при $\Phi(u,t) = u + 2t - 2N_1 - 4N_2 + 1$ до функції вигляду (3.71) дасть наступний результат.

Теорема 3.14. *Нехай $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$ — банахові простори, $\langle .,. \rangle$ — роздільно неперервна білінійна форма, визначена на декартовому добутку $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ — обмежений лінійний оператор.*

Тоді для функції аналітичної функції f вигляду (3.71) при $N_1 \geq 1,\ N_2 \geq 0$ раціональна функція

$$[\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f(z,w) = \frac{P_\mathcal{N}(z,w)}{Q_\mathcal{D}(z,w)}, \tag{3.76}$$

де

$$Q_\mathcal{D}(z,w) = w^{N_2} \sum_{k=0}^{N_1} \widetilde{c}_{N_1-k}^{(N_1+2N_2)} z^k + \sum_{k=0}^{1} \sum_{m=0}^{N_2-1} \sum_{l=0}^{k+2m} (-1)^l \alpha^l \times$$
$$\times \binom{N_2 - (k+m) + l}{l} \widetilde{c}_{N_1+2N_2-(k+2m)+l}^{(N_1+2N_2)} z^k w^m, \tag{3.77}$$

$$P_\mathcal{N}(z,w) = \sum_{k=0}^{1} \sum_{m=0}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=0}^{m} \sum_{l=0}^{j+2n} (-1)^l \alpha^l \binom{N_2 - (j+n) + l}{l} \times$$

$$\times\widetilde{c}^{(N_1+2N_2)}_{N_1+2N_2-(j+2n)+l}s_{k-j,m-n}+z^{N_1}\sum_{m=0}^{N_2-1}\sum_{k=0}^{N_1+4N_2-2m-1}z^kw^m\sum_{j=N_1-1}^{N_1}\sum_{n=0}^{m}\times$$

$$\times\sum_{l=0}^{N_1-j+2n}(-1)^l\alpha^l\binom{j+N_2+l-(N_1+n)}{l}\widetilde{c}^{(N_1+2N_2)}_{j+2(N_2-n)+l}s_{k+j,m-n}+$$

$$+w^{N_2}\sum_{k=0}^{1}\sum_{m=0}^{N_2+[(2N_1-j-1)/2}z^kw^m\sum_{j=0}^{k}\sum_{n=1}^{N_2}\sum_{l=0}^{2N_2+j-2n}(-1)^l\alpha^l\binom{2n-j+l}{l}\times$$

$$\times\widetilde{c}^{N_1+2N_2}_{N_1-j+2n+l}s_{k-j,m+n}+w^{N_2}\sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{N_2+[(2N_1-j-1)/2]}z^kw^m\sum_{j=0}^{k}\widetilde{c}^{(N_1+2N_2)}_{N_1-j}s_{k-j,m},\tag{3.78}$$

де коефіцієнти $c^{(N_1,N_2)}_{k,m}$ *визначаються рівністю (3.75), матиме розвинення у степеневий ряд, коефіцієнти якого співпадатимуть із коефіцієнтами розвинення функції (3.71) для всіх* $(k,m)\in\{(k,m)\in\mathbb{Z}^2_+ : k+2m\le 2N_1+4N_2-1\}$.

При такому виборі коефіцієнтів узагальнених поліномів, маємо наступний вигляд областей

Нехай тепер $\mathcal{X}=\mathcal{Y}=L_2([0,1],d\mu)$ — простір функцій, сумовних з квадратом за мірою $d\mu$, де μ — неспадна функція, що має нескінченну кількість точок зростання на [0,1].

Розглянемо в цьому просторі оператор множення на незалежну змінну

$$(A\varphi)(t)=t\varphi(t),\quad \varphi\in\mathcal{X}.$$

Білінійну форму на добутку просторів $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ визначимо наступним чином

$$\langle x,y\rangle=\int_0^1 x(t)y(t)d\mu.$$

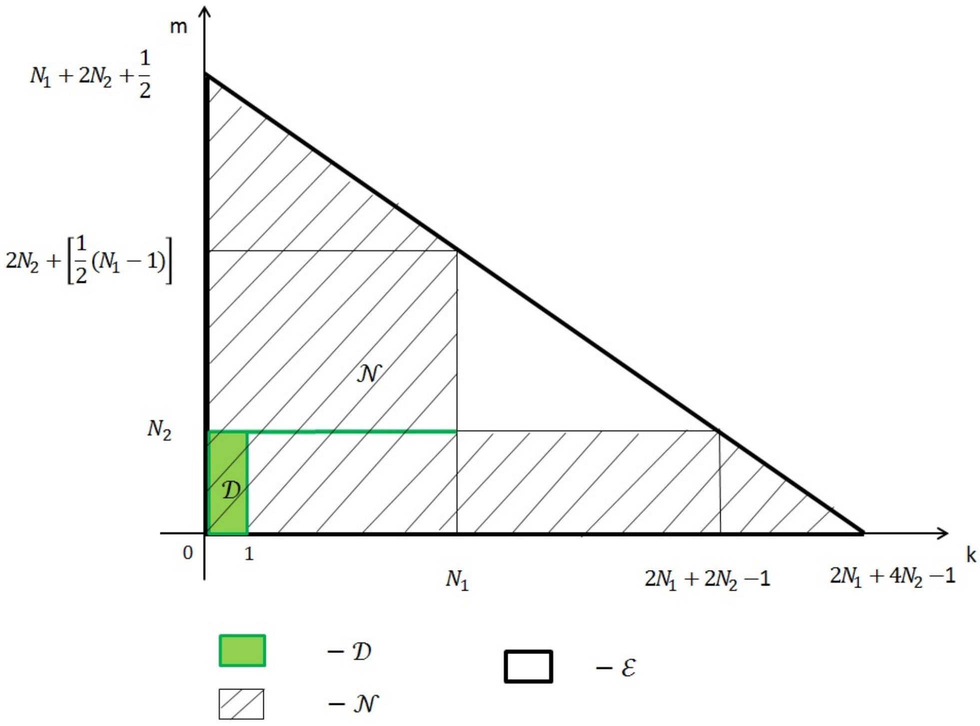


Рис. 3.4: Вигляд областей $\mathcal{D}, \mathcal{N}$ та $\mathcal{E}$ для теореми 3.14.

Також будемо вважати початкові функції є одиницями:

$$x_{0,0}(t) = y_{0,0}(t) \equiv 1.$$

Резольвентна функція оператора множення на незалежну змінну (див., наприклад, [31]) визначається співвідношенням

$$\left(\mathcal{R}_z(A)\varphi\right)(t) = \frac{\varphi(t)}{1 - zt},$$

а

$$x_{k,m}(t) = y_{k,m}(t) = \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} \alpha^l t^{2m+k-l}, \; k, m \in \mathbb{Z}_+,$$

та

$$s_{k,m} = \int_0^1 \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} \alpha^l t^{2m+k-l} d\mu(t) = \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} \alpha^l \int_0^1 t^{2m+k-l} d\mu(t).$$

Функція f в даному випадку буде представлена таким чином

$$f(z,w)=\frac{1}{\alpha zw-z^2+w}\left(-z^2\int_0^1\frac{d\mu(t)}{1-zt}+\right.$$
$$\left.+w\int_0^1\frac{\alpha z+zt+1}{1-w(t^2+\alpha t)}d\mu(t)\right). \quad (3.79)$$

Узагальнений поліном (3.73) буде алгебраїчним многочленом степеня $N_1 + 2N_2$ і співпадатиме з точністю до постійного множника з многочленом, ортонормованим на [0,1] за вагою $d\mu$.

Таким чином, для функції вигляду (3.79) згідно з теоремою 3.2 можуть бути побудовані апроксиманти типу Паде вигляду (3.76)–(3.78), в яких коефіцієнти $\widetilde{c}_k^{(N_1+2N_2)}$ є коефіцієнтами відповідного ортонормованого многочлена.

Зокрема, при

$$d\mu(t)=t^{\nu}(1-t)^{\sigma}dt, \quad \nu,\sigma>-1$$

будемо мати

$$s_{k,m}=\int_0^1\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}\alpha^l t^{2m+k-l+\nu}(1-t)^{\sigma}dt=$$

$$=\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}\alpha^l\frac{\Gamma(2m+k-l+\nu+1)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(2m+k-l+\nu+\sigma+2)}.$$

Тоді функція f матиме вигляд

$$f(z,w)=\sum_{k,m=0}^{\infty}s_{k,m}z^k w^m=$$
$$=\sum_{k,m=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}\alpha^l\frac{\Gamma(2m+k-l+\nu+1)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(2m+k-l+\nu+\sigma+2)}\right)z^k w^m. \quad (3.80)$$

Слід зауважити, що при $\alpha=0$

$$s_{k,m}=C\frac{(\nu+1)_{k+2m}}{(\nu+\sigma)_{k+2m}}.$$

Згідно з означенням Горна, ряд $f(z,w)=\sum_{k,m=0}^{\infty}s_{k,m}z^k w^m$ буде гіпергеометричним рядом двох змінних [50], оскільки

$$\frac{s_{k+1,m}}{s_{k,m}} = h(k,m) = \frac{\nu + k + 2m + 1}{\nu + \sigma + k + 2m + 2},$$

$$\frac{s_{k,m+1}}{s_{k,m}} = g(k,m) = \frac{(\nu + k + 2m + 1)(\nu + k + 2m + 2)}{(\nu + \sigma + k + 2m + 2)(\nu + \sigma + k + 2m + 3)}$$

є раціональними функціями від k та m (див. [3, с. 218]).

Оскільки, h можна зобразити у вигляді

$$h(k,m) = \frac{(k+1)(\nu + k + 2m + 1)}{(k+1)(\nu + \sigma + k + 2m + 2)},$$

а g у вигляді

$$g(k,m) = \frac{(m+1)(\nu + k + 2m + 1)(\nu + k + 2m + 2)}{(m+1)(\nu + \sigma + k + 2m + 2)(\nu + \sigma + k + 2m + 3)},$$

то це буде гіпергеометричний ряд третього порядку.

При $\alpha = -1$

$$s_{k,m} = C(-1)^m \frac{(\nu+1)_{k+m}(\sigma+1)_m}{(\nu+\sigma+2)_{k+2m}}.$$

Тому будемо мати

$$h(k,m) = \frac{s_{k+1,m}}{s_{k,m}} = \frac{\nu + k + m + 1}{\nu + \sigma + k + 2m + 2} = \frac{(k+1)(\nu + k + m + 1)}{(k+1)(\nu + \sigma + k + 2m + 2)},$$

$$g(k,m) = \frac{s_{k,m+1}}{s_{k,m}} = -\frac{(\nu + k + m + 1)(\sigma + m + 1)}{(\nu + \sigma + k + 2m + 2)(\nu + \sigma + k + 2m + 3)} =$$
$$= \frac{(m+1)(\nu + k + m + 1)(\sigma + m + 1)}{(m+1)(\nu + \sigma + k + 2m + 2)(\nu + \sigma + k + 2m + 3)},$$

і отже, відповідна функція f також буде гіпергеометричним рядом третього порядку.

При цьому поліноми $\widetilde{X}_N$ будуть зсунутими ортогональними на [0,1] многочленами Якобі, коефіцієнти яких (див. [49, с. 581]) дорівнюють

$$\widetilde{c}_k^{(N)} = (-1)^{N-k}\binom{N}{k}\frac{\Gamma(N+k+\sigma+\nu+1)}{\Gamma(k+\nu+1)}, \quad k=\overline{1,N}. \tag{3.81}$$

Звідси та з формули (3.75) маємо

$$c_{k,m}^{(N_1,N_2)} = \begin{cases} 0, \qquad \text{при } (k,m)\in[0,N_1-2]\times[1,N_2]; \\[2ex] (-1)^{N_1+2N_2-k}\binom{N_1+2N_2}{k}\frac{\Gamma(N_1+2N_2+k+\sigma+\nu+1)}{\Gamma(k+\nu+1)}, \\[1ex] \text{при } k=\overline{0,N_1-1}, m=0; \\[2ex] \sum_{l=0}^{N_1+2N_2-(k+2m)}(-1)^{N_1+2N_2-(k+2m)}\alpha^l\binom{k+m+l-N_1}{l}\times \\ \times\binom{N_1+2N_2}{k+2m+l}\frac{\Gamma(N_1+2N_2+k+2m+l+\sigma+\nu+1)}{\Gamma(k+2m+l+\nu+1)}, \\[2ex] \text{при } (k,m)\in([N_1-1,N_1]\times[0,N_2])\setminus\{(N_1-1,0)\}. \end{cases} \tag{3.82}$$

Теорема 3.15. *Для функцій вигляду (3.80) при при* $N_1\geq 1,\ \ N_2\geq 0$ *раціональна функція вигляду*

$$[\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f(z,w) = \frac{P_{\mathcal{N}}(z,w)}{Q_{\mathcal{D}}(z,w)}, \tag{3.83}$$

де

$$\begin{gathered} Q_{\mathcal{D}}(z,w) = \\ = w^{N_2}\sum_{k=0}^{N_1}(-1)^{2N_2+k}\binom{N_1+2N_2}{N_1-k}\frac{\Gamma(2(N_1+N_2)-k+\sigma+\nu+1)}{\Gamma(N_1-k+\nu+1)}z^k+ \\ +\sum_{k=0}^{1}\sum_{m=0}^{N_2-1}(-1)^{k+2m}\sum_{l=0}^{k+2m}\alpha^l\binom{N_2-(k+m)+l}{l}\binom{N_1+2N_2}{N_1+2N_2-(k+m)+l}\times \\ \times\frac{\Gamma(2(N_1+2N_2)-(k+2m)+l+\sigma+\nu+1)}{\Gamma(N_1+N_2-(k+m)+l+\nu+1)}z^kw^m, \end{gathered} \tag{3.84}$$

а

$$P_{\mathcal{N}}(z,w)=\sum_{k=0}^{1}\sum_{m=0}^{N_2-1}z^k w^m\sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{m}(-1)^{j+2n}\sum_{l=0}^{j+2n}\alpha^l\times$$
$$\times\binom{N_2-(j+n)+l}{l}\binom{N_1+2N_2}{N_1+2N_2-(j+n)+l}\times$$
$$\times\frac{\Gamma(2(N_1+2N_2)-(k+2m)+l+\sigma+\nu+1)}{\Gamma(N_1+N_2-(k+m)+l+\nu+1)}s_{k-j,m-n}+$$
$$+z^{N_1}\sum_{m=0}^{N_2-1}\sum_{k=0}^{N_1+4N_2-2m-1}z^k w^m\sum_{j=N_1-1}^{N_1}\sum_{n=0}^{m}(-1)^{N_1-j+2n}\sum_{l=0}^{N_1-j+2n}\alpha^l\times$$
$$\times\binom{N_2-N_1+j-n+l}{l}\binom{N_1+2N_2}{j+2(N_2-n)+l}\times$$
$$\times\frac{\Gamma(N_1+4N_2+j-2n+l+\sigma+\nu+1)}{\Gamma(j+2(N_2-n)+l+\nu+1)}s_{k+j,m-n}+$$
$$+w^{N_2}\sum_{k=0}^{1}\sum_{m=0}^{N_2+[(2N_1-k-1)/2}z^k w^m\sum_{j=0}^{k}\sum_{n=1}^{N_2}(-1)^{2(N_2-n)+j}\sum_{l=0}^{2(N_2-n)+j}\alpha^l\times$$
$$\times\binom{n-j+l}{l}\binom{N_1+2N_2}{N_1-j+2n+l}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(2(N_1+N_2)-j+2n+l+\sigma+\nu+1)}{\Gamma(N_1-j+2n+l+\nu+1)}s_{k-j,m+n}+$$
$$+w^{N_2}\sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{N_2+[(2N_1-k-1)/2}z^k w^m\times$$
$$\times\sum_{j=0}^{k}(-1)^{2N_2+j}\binom{N_1+2N_2}{N_1-j}\frac{\Gamma(2(N_1+N_2)-j+\sigma+\nu+1)}{\Gamma(N_1-j+\nu+1)}s_{k-j,m},\quad(3.85)$$

матиме розклад у степеневий ряд коефіцієнти якого співпадатимуть з коефіцієнтами ряду (3.80) для всіх $(k,m)\in\{(k,m)\in\mathbb{Z}_+^2:k+2m\le 2N_1+4N_2-1\}$.

Нехай тепер $\mathcal{X}=\mathcal{X}_\alpha$, $\mathcal{Y}=\mathcal{Y}_\beta$ (див. пункт 3.3 даного розділу), при деяких $\alpha,\beta\in[0,1)$.

Розглянемо в просторі $\mathcal{X}_\alpha$ лінійний обмежений оператор інтегрування

$$(A\varphi)(t) = \int_0^t \varphi(\tau)d\tau,$$

а у просторі $\mathcal{Y}_\beta$ оператор $A^* : \mathcal{Y}_\beta \to \mathcal{Y}_\beta$,

$$(A^*\psi)(t) = \int_t^1 \psi(\tau)d\tau,$$

який буде спряженим до оператора A відносно білінійної форми

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^1 \varphi(t)\psi(t)dt. \tag{3.86}$$

Неважко підрахувати резольвентну функцію оператора A (див. напр., [31, с. 35–36])

$$(\mathcal{R}_z(A)\varphi)(t) = \varphi(t) + z\int_0^t \varphi(\tau)e^{z(t-\tau)}d\tau.$$

Покладемо також

$$\widetilde{x}_0(t) = x_{0,0}(t) = t^\nu, \quad \nu > -\alpha,$$

$$\widetilde{y}_0(t) = y_{0,0}(t) = (1-t)^\sigma, \quad \sigma > -\beta.$$

Тоді згідно з (3.72)

$$x_{k,m}(t) = \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} \alpha^l \frac{t^{2m+k-l+\nu}}{(\nu+1)_{2m+k-l}}, \quad k, m \in \mathbb{Z}_+,$$

$$y_{j,n}(t) = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \alpha^l \frac{(1-t)^{2n+j-l+\sigma}}{(\sigma+1)_{2n+j-l}}, \quad j, n \in \mathbb{Z}_+.$$

При цьому

$$s_{k,m} = \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} \frac{\alpha^l}{(\nu+1)_{2m+k-l}} \cdot \frac{\Gamma(2m+k-l+\nu+1)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(2m+k-l+\nu+\sigma+2)},$$

а функція f матиме вигляд

$$f(w,z)=\sum_{k,m=0}^{\infty}s_{k,m}z^kw^m=$$
$$=\sum_{k,m=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}\frac{\alpha^l}{(\nu+1)_{2m+k-l}}\cdot\frac{\Gamma(2m+k-l+\nu+1)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(2m+k-l+\nu+\sigma+2)}\right)\times$$
$$\times z^kw^m. \quad (3.87)$$

Аналогічно попередньому випадку, коефіцієнти $c_{k,m}^{N_1,N_2}$ можна визначити наступним чином

$$c_{k,m}^{(N_1,N_2)}=\begin{cases}0, \qquad \text{при } (k,m)\in[0,N_1-2]\times[1,N_2];\\[2ex] \widetilde{c}_r(\nu+1)_r, \qquad \text{при } k=\overline{0,N_1-1}, m=0;\\[2ex] \sum_{l=0}^{N_1+2N_2-(k+2m)}(-1)^l\alpha^l\binom{k+m+l-N_1}{l}\frac{\widetilde{c}_{k+2m+l}}{(\nu+1)_{k+2m+l}},\\ \text{при } (k,m)\in[N_1-1,N_1]\times[0,N_2]\backslash\{(0,N_1-1)\}\end{cases} \quad (3.88)$$

Звідси отримуємо:

Теорема 3.16. *Для функцій вигляду (3.87) при* $N_1\geq 1,\quad N_2\geq 0$ *раціональна функція вигляду*

$$[\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f(z,w)=\frac{P_{\mathcal{N}}(z,w)}{Q_{\mathcal{D}}(z,w)}, \quad (3.89)$$

де

$$Q_{\mathcal{D}}(z,w)=w^{N_2}\sum_{k=0}^{N_1}(-1)^{2N_2+k}(\nu+1)_{N_1-k+l}\binom{N_1+2N_2}{N_1-k+l}\times$$
$$\times\frac{\Gamma(2(N_1+N_2)-k+l+\sigma+\nu+1)}{\Gamma(N_1-k+\nu+1)}z^k+\sum_{k=0}^{1}\sum_{m=0}^{N_2-1}(-1)^{k+2m}\times$$

$$\times \sum_{l=0}^{k+2m} \frac{\alpha^l}{(\nu+1)_{N_1+2N_2-(k+2m)+l}} \binom{N_1+2N_2}{N_1+2N_2-(k+2m)+l} z^k w^m, \quad (3.90)$$

а

$$P_{\mathcal{N}}(z,w) = \sum_{k=0}^{1} \sum_{m=0}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=0}^{m} (-1)^{j+2n} \times$$
$$\times \sum_{l=0}^{j+2n} \frac{\alpha^l}{(\nu+1)_{N_1+2N_2-(j+2n)+l}} \binom{N_1+2N_2}{N_1+2N_2-(j+2n)+l} \times$$
$$\times \frac{\Gamma(2(N_1+2N_2)-(j+2n)+\sigma+\nu+1)}{\Gamma(N_1+2N_2-(j+2n)+\nu+1)} s_{k-j,m-n} +$$
$$+ z^{N_1} \sum_{m=0}^{N_2-1} \sum_{k=0}^{N_1+4N_2-2m-1} z^k w^m \sum_{j=N_1-1}^{N_1} \sum_{n=0}^{m} (-1)^{N_1-j+2n} \times$$
$$\times \sum_{l=0}^{N_1-j+2n} \frac{\alpha^l}{(\nu+1)_{j+2(N_2-m)+l}} \binom{N_1+2N_2}{j+2(N_2-m)+l} \times$$
$$\times \frac{\Gamma(N_1+4N_2+j-2n+l+\sigma+\nu+1)}{\Gamma(j+2(N_2-m)+l+\nu+1)} s_{k+j,m-n} +$$
$$+ w^{N_2} \sum_{k=0}^{1} \sum_{m=0}^{N_2+[(2N_1-k-1)/2]} z^k w^m \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=1}^{N_2} (-1)^{2(N_2-n)+j} \times$$
$$\times \sum_{l=0}^{2(N_2-n)+j} \frac{\alpha^l}{(\nu+1)_{N_1-j+2n+l}} \binom{N_1+2N_2}{N_1-j+2n+l} \times$$
$$\times \frac{\Gamma(2(N_1+N_2)+j-2n+l+\sigma+\nu+1)}{\Gamma(N_1-j+2n)+l+\nu+1)} s_{k-j,m+n} +$$
$$+ w^{N_2} \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{m=0}^{N_2+[(2N_2-k-1)/2} z^k w^m \sum_{j=0}^{k} (-1)^{2N_2+j} (\nu+1)_{N_1-j+l} \times$$
$$\times \binom{N_1+2N_2}{N_1-j+l} \frac{\Gamma(2(N_1+N_2)-j+l+\sigma+\nu+1)}{\Gamma(N_1-j+\nu-1)} s_{k-j,m}, \quad (3.91)$$

матиме розклад у степеневий ряд коефіцієнти якого співпадатимуть з коефіцієнтами ряду (3.87) для всіх $(k,m) \in \{(k,m) \in \mathbb{Z}_+^2 : k+2m \le 2N_1+4N_2+1\}$.

Щоб проілюструвати отримані результати, розглянемо частинний випадок теореми 3.16 при $\alpha = \nu = \sigma = 0$. Тоді функція f матиме вигляд

$$f(z,w) = -\frac{1}{z^2 - w}\Big[\left(\cosh\sqrt{w} - \exp z\right) z + \sqrt{w}\sinh\sqrt{w}\Big]. \tag{3.92}$$

Покладемо $N_1 = 2$, $N_2 = 1$. Отримаємо раціональну апроксимацію

$$\begin{gathered}
[\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f(z,w) = \big(70 - 4.320583\cdot 10^3 w - 525z - 1.589583\cdot 10^3 zw - \\
- 268.333333z^2 - 90.416667z^3 - 22.75z^4 - 4.569444z^5 - 0.763889z^6 - \\
- 0.109375z^7 + 457.25z^2w + 95.430556z^3w + 15.236111z^4w \\
1.890625z^5w + 720.583333w^2 + 36.013889w^3 + 95.430556w^2z + \\
+1.890625w^3z\big)\cdot\big(70 - 560z + 4.32\cdot 10^3 w - 480zw + 24z^2w\big)^{-1}.
\end{gathered} \tag{3.93}$$

Порівняємо значення наближуваної функції (3.92), частинної суми степеневого ряду

$$\sum_{k=0}^{2}\sum_{m=0}^{1}\frac{z^k w^m}{(k+2m+1)!} \tag{3.94}$$

та побудованої нами апроксиманти (3.93) у точках квадрата $[0;0.8]\times[0;0.8]$.

Відповідно, отримаємо значення функцій в Таблиці 3.1 та графіки функцій на Рис. 3.5, які показують, що в більшості точок квадрата $[0;0.8]\times[0;0.8]$, апроксиманта, побудована методому двовимірних узагальнених моментних зображень, наближає функцію набагато краще ніж частинна сума її степеневого ряду.

w/z	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
		1.033668	1.068013	1.103043	1.138769
0.0	1	1.031293	1.065535	1.100503	1.136154
	1	1.033333	1.066667	1.1	1.133333
	1.107014	1.142429	1.178544	1.215368	1.252911
0.2	1.107014	1.139362	1.175505	1.212284	1.249739
	1.106667	1.141733	1.1768	1.211867	1.246933
	1.229562	1.266872	1.304907	1.343676	1.383189
0.4	1.229562	1.261973	1.300322	1.339036	1.378388
	1.226667	1.2636	1.300533	1.337467	1.3744
	1.370198	1.409568	1.449689	1.490569	1.532221
0.6	1.370197	1.400544	1.441972	1.48286	1.524251
	1.36	1.398933	1.437867	1.4768	1.515733
	1.531926	1.573538	1.615928	1.659106	1.703082
0.8	1.531919	1.555366	1.60251	1.646063	1.689731
	1.506667	1.547733	1.5888	1.629867	1.670933

Табл. 3.1: Таблиця значень функції (3.92), апроксиманти (3.93) та частинної суми (3.94).

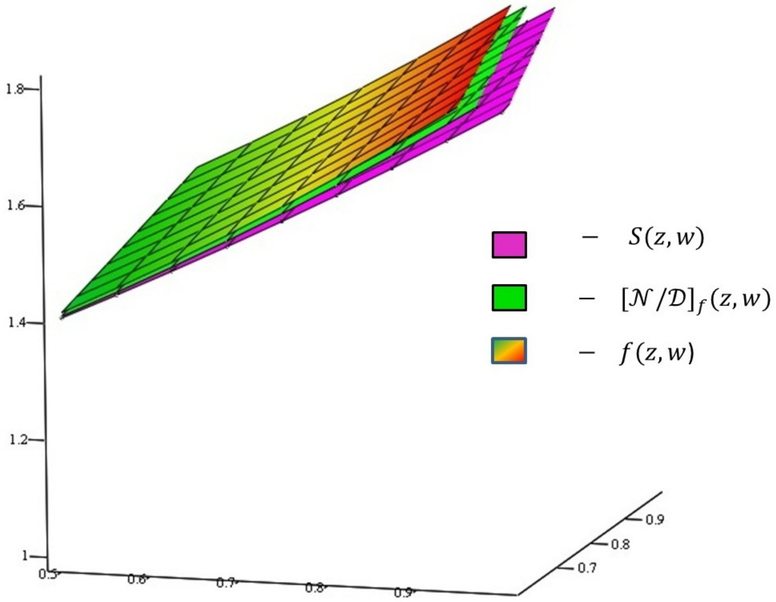


Рис. 3.5: Графік функції (3.92), апроксиманти (3.93) та частинної суми (3.94).

3.5. Побудова апроксимацій типу Паде рядів, для коефіцієнтів яких мають місце узагальнені моментні зображення з операторами $A_1 = A^2$, $A_2 = A^3$

Нехай, які і у попередніх пунктах, визначено деякі нормовані простори $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$, і $\langle .,. \rangle$ — білінійна фома на декартовому добутку цих просторів $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Будемо знову вважати, що $\mathcal{X}$ задано лінійний оператор $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, а у просторі $\mathcal{Y}$ — лінійний оператор $A^* : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$, спряжений відносно білінійної форми $\langle .,. \rangle$ до оператора A, та початкові елементи $\widetilde{x}_0 \in \mathcal{X}$ та $\widetilde{y}_0 \in \mathcal{Y}$, так що допускається невироджена біортогоналізація (3.28)–(3.30).

Тепер означимо оператори A_1 та A_2 наступним чином

$$A_1 = A^2, \quad A_2 = A^3, \tag{3.95}$$

та припустимо, що для двовимірної числової послідовності $\{s_{k,m}\}_{k,m \in \mathbb{Z}_+}$ має місце узагальнене моментне зображення вигляду

$$s_{k+j,m+n} = \langle x_{k,m}, y_{j,n} \rangle, \quad k, m, j, n \in \mathbb{Z}_+, \tag{3.96}$$

для якого послідовності $\{x_{k,m}\}_{k,m \in \mathbb{Z}_+}$ та $\{y_{j,n}\}_{j,n \in \mathbb{Z}_+}$ визначаються рівностями

$$x_{k,m} = A_1^k A_2^m \tilde{x}_0 = A^{2k+3m} \tilde{x}_0, \quad k, m \in \mathbb{Z}_+, \tag{3.97}$$

$$y_{j,n} = A_1^{*k} A_2^{*m} \tilde{y}_0 = A^{*2k+3m} \tilde{y}_0, \quad j, n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.98}$$

Розглянемо в такому випадку ряд за двома змінним

$$f(z, w) = \sum_{k,m=0}^{\infty} s_{k,m} z^k w^m = \sum_{k,m=0}^{\infty} \tilde{s}_{2k+3m} z^k w^m. \tag{3.99}$$

Це дає змогу подати функції f, зображувані степеневими рядами вигляду (3.99), таким чином

$$f(z, w) = \langle \mathcal{R}_z(A^2) \mathcal{R}_w(A^3) x_{0,0}, y_{0,0} \rangle, \tag{3.100}$$

Щоб отримати запис функції f у вигляді (3.100) через резольвентні функції операторів A, розглянемо таке допоміжне твердження.

Лема 3.17. *Нехай $\mathcal{X}$ — лінійний нормований простір, $A\colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ — обмежений лінійний оператор. Тоді в усіх точках регулярності резольвентних функцій $\mathcal{R}_z(A^2)$ та $\mathcal{R}_w(A^3)$ справджується рівність*

$$\mathcal{R}_z(A^2)\mathcal{R}_w(A^3) = \frac{1}{w^2 - z^3}\left(-(z^3 + wz^2A)\mathcal{R}_z(A^2) + \right.$$
$$\left. + \left(w^2 + wz^2A + zw^2A^2\right)\mathcal{R}_w(A^3)\right). \quad (3.101)$$

Доведення. Застосуємо до обох частин рівності (3.101) оператор

$$(w^2 - z^3)(I - zA^2)(I - wA^3).$$

Тоді отримаємо

$$w^2 - z^3 =$$
$$= (I - wA^3)(z^3 + wz^2A) + (I - zA^2)\left(w^2 + wz^2A + zw^2A^2\right) =$$
$$= w^2 - z^3.$$

Оскільки, отримана рівність є очевидною, а z та w є регулярними точками відповідних резольвентних функцій, то звідси отримуємо початкову рівність (3.101). □

Далі, скориставшись представленням резольвентної функції вигляду $\mathcal{R}_z(A^p), p \geq 2$, через резольвентні функції оператора A (див. [35]) та лемою 3.17, отримаємо, що

$$\mathcal{R}_z(A^2)\mathcal{R}_w(A^3) = \frac{1}{w^2 - z^3}\left(-(z^3 + wz^2A)\sum_{r=0}^{1}\mathcal{R}_{(-1)^r z^{1/2}}(A) + \right.$$
$$\left. + \left(w^2 + wz^2A + zw^2A^2\right)\sum_{r=0}^{2}\mathcal{R}_{w^{1/3}\xi_r^{(3)}}(A)\right), \quad (3.102)$$

де $\xi_r^{(3)}, r = \overline{0,2},$ — корені 3-го степеня з одиниці, тобто,

$$\xi_0^{(3)} = 1, \quad \xi_1^{(3)} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, \quad \xi_2^{(3)} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

Тоді, відповідно з рівностями (3.100) та (3.102), функція f матиме зображення

$$f(z,w) = \frac{1}{w^2 - z^3} \Bigg(-\Big\langle (z^3 + wz^2 A) \sum_{r=0}^{1} \mathcal{R}_{(-1)^r z^{1/2}}(A) \tilde{x}_0, \tilde{y}_0 \Big\rangle + \\ + \Big\langle \left(w^2 + wz^2 A + zw^2 A^2 \right) \sum_{r=0}^{2} \mathcal{R}_{w^{1/3} \xi_r^{(3)}}(A) \tilde{x}_0, \tilde{y}_0 \Big\rangle \Bigg). \quad (3.103)$$

Згідно з теоремою 3.1, для того щоб побудувати апроксиманти Паде для функції f потрібно побудувати біортогональні поліноми

$$X_{N_1,N_2} = \sum_{k=0}^{N_1} \sum_{m=0}^{N_2} c_{k,m}^{(N_1,N_2)} x_{k,m}, \quad (3.104)$$

такі що

$$\langle X_{N_1,N_2}, y_{j,n} \rangle = 0, \quad (3.105)$$

при $(j,n) \in [0, N_1] \times [0, N_2] \backslash \{(N_1, N_2)\}$.

Очевидно, що поліном X_{N_1,N_2} може бути зображений у вигляді

$$X_{N_1,N_2} = \sum_{p=0, p \neq 1, 2N_1+3N_2-1}^{2N_1+3N_2} \widehat{c}_p^{(N_1,N_2)} \tilde{x}_p. \quad (3.106)$$

Але лінійна оболонка системи функцій $\{\tilde{x}_p\}_{p=0}^{2N_1+3N_2}$ співпадає з лінійною оболонкою системи функцій $\{\widetilde{X}_M\}_{M=0}^{2N_1+3N_2}$, а також з лінійною оболонкою системи функцій $\{\widetilde{X}_M^{(2)}\}_{M=0}^{2N_1+3N_2}$, де $\widetilde{X}_M^{(2)}$ — узагальнені поліноми вигляду

$$\widetilde{X}_M^{(2)} = \sum_{k=0}^{M} \check{c}_p^{(M)} \tilde{x}_k, \quad \check{c}_M^{(M)} \neq 0, M \in \mathbb{Z}_+, \quad (3.107)$$

такі що

$$\langle \widetilde{X}_M^{(2)}, \tilde{y}_j \rangle = 0, \quad j = \overline{2, M+1}. \tag{3.108}$$

Зауваження 3.18. Для існування поліномів $\widetilde{X}_M^{(2)}$ треба, замість умови $\widetilde{H}_N \neq 0, \forall N \in \mathbb{Z}_+$, вимагати виконання умови

$$\widetilde{H}_{N,2} = \det \|\tilde{s}_{k+j+2}\|_{k,j=0}^N \neq 0, \forall N \in \mathbb{Z}_+.$$

Тому, без обмежень загальності, поліноми X_{N_1,N_2} можна записати у вигляді лінійної комбінації поліномів $\widetilde{X}_p^{(2)}$

$$X_{N_1,N_2} = \sum_{p=0}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)} \widetilde{X}_p^{(2)}.$$

Коефіцієнти $\gamma_p^{(N_1,N_2)}, p = \overline{0, 2N_1+3N_2}$, мають визначатися з умов біортогональності

$$\langle X_{N_1,N_2}, y_{j,n} \rangle = 0,$$

де

$$y_{j,n} = A^{*(2j+3n)} \tilde{y}_0, \quad \text{при } (j,n) \in [0, N_1] \times [0, N_2] \backslash \{(N_1, N_2)\},$$

або ж

$$\langle X_{N_1,N_2}, \tilde{y}_j \rangle = 0, \qquad \text{при } j = 0, 2, 3, \ldots, 2N_1+3N_2-2.$$

Послідовно підставляючи у другу рівність значення $j = 2, 3 \ldots, 2N_1+3N_2-2$, отримуємо

$$\gamma_0^{(N_1,N_2)} = \gamma_1^{(N_1,N_2)} = \gamma_2^{(N_1,N_2)} = \cdots = \gamma_{2N_1+3N_2-4}^{(N_1,N_2)} = 0.$$

Отже,

$$X_{N_1,N_2} = \sum_{p=2N_1+3N_2-3}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)} \widetilde{X}_p^{(2)}. \tag{3.109}$$

Решту коефіцієнтів визначаємо з умов ортогональності X_{N_1,N_2} до

$y_{0,0}^{(N_1,N_2)}$ та відсутності в X_{N_1,N_2} коефіцієнтів при $\tilde{x}_1$ та $\tilde{x}_{2N_1+3N_2-1}$.

Отримуємо

$$\sum_{p=2N_1+3N_2-3}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)} \sum_{k=0}^{p} \check{c}_k^{(p)} \langle \tilde{x}_k, \tilde{y}_0 \rangle = \sum_{p=2N_1+3N_2-3}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)} \sum_{k=0}^{p} \check{c}_k^{(p)} \tilde{s}_k = 0,$$

та

$$\sum_{p=2N_1+3N_2-3}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)} \check{c}_1^{(p)} = 0,$$

а також

$$\sum_{p=2N_1+3N_2-1}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)} \check{c}_{2N_1+3N_2-1}^{(p)} = 0$$

Тобто для визначення коефіцієнтів $\gamma_p^{(N_1,N_2)}$, при $p = \overline{2N_2+3N_2-3, 2N_2+3N_2}$, одержано однорідну систему 3-х лінійних рівнянь з 4-ма невідомими.

Далі, для зручності запису, будемо використовувати такі позначення:

$$N = 2N_1 + 3N_2 \quad \text{та} \quad a_p = \sum_{k=0}^{p} \check{c}_k^{(p)} \tilde{s}_k.$$

Тоді матриця отриманої системи матиме вигляд

$$\begin{pmatrix} \check{c}_1^{(N-3)} & \check{c}_1^{(N-2)} & \check{c}_1^{(N-1)} & \check{c}_1^{(N)} \\ 0 & 0 & \check{c}_{N-1}^{(N-1)} & \check{c}_{N-1}^{(N)} \\ a_{N-3} & a_{N-2} & a_{N-1} & a_N \end{pmatrix}.$$

Зафіксувавши старші коефіцієнти $\gamma_N^{(N_1,N_2)}$, звідси можемо визначити інші коефіцієнти $\gamma_p^{(N_1,N_2)}, p = N-3, N-2, N-1$, при умові що детермінант матриці не дорівнює нулеві. Розв’язки системи мають вигляд

$$\begin{cases} \gamma_{N-1}^{(N_1,N_2)} = -\check{c}_{N-1}^{(N)} \frac{\gamma_N^{(N_1,N_2)}}{c_{N-1}^{(N-1)}}; \\ \\ \gamma_{N-2}^{(N_1,N_2)} = \frac{\gamma_N^{(N_1,N_2)}}{\check{c}_{N-1}^{(N-1)}} \left[\frac{a_{N-3}}{\check{c}_1^{(N-3)}} \left(\check{c}_{N-1}^{(N)} \check{c}_1^{(N-1)} - \check{c}_1^{(N)} \check{c}_{N-1}^{(N-1)} \right) - \right. \\ \left. -a_{N-1} \check{c}_{N-1}^{(N)} + a_N \check{c}_{N-1}^{(N-1)} \right] \times \left[\check{c}_1^{(N-2)} \left(\frac{a_{N-3}}{\check{c}_1^{(N-3)}} - \frac{a_{N-2}}{\check{c}_1^{(N-2)}} \right) \right]^{-1}; \\ \\ \gamma_{N-3}^{(N_1,N_2)} = \frac{\gamma_N^{(N_1,N_2)}}{\check{c}_{N-1}^{(N-1)}} \left[\frac{a_{N-2}}{\check{c}_1^{(N-2)}} \left(\check{c}_{N-1}^{(N)} \check{c}_1^{(N-1)} - \check{c}_1^{(N)} \check{c}_{N-1}^{(N-1)} \right) + \right. \\ \left. +a_{N-1} \check{c}_{N-1}^{(N)} + a_N \check{c}_{N-1}^{(N-1)} \right] \times \left[\check{c}_1^{(N-3)} \left(\frac{a_{N-2}}{\check{c}_1^{(N-2)}} - \frac{a_{N-3}}{\check{c}_1^{(N-3)}} \right) \right]^{-1}. \end{cases} \tag{3.110}$$

А це дає можливість виразити коефіцієнти $\tilde{c}_p^{(N_1,N_2)}$, для $p = 0, 2, \ldots, N-2, N$ в зображенні (3.107) через коефіцієнти поліномів $\widetilde{X}_p^{(2)}$ наступним чином

$$\begin{cases} \widehat{c}_q^{(N_1,N_2)} = \sum_{p=N-3}^{N} \gamma_p^{(N_1,N_2)} \check{c}_q^{(p)}, \quad q = \overline{0, N-3}; \\ \widehat{c}_{N-2}^{(N_1,N_2)} = \sum_{p=N-2}^{N} \gamma_p^{(N_1,N_2)} \check{c}_{N-2}^{(p)}; \\ \widehat{c}_N^{(N_1,N_2)} = \gamma_N^{(N_1,N_2)} \check{c}_N^{(N)}. \end{cases} \tag{3.111}$$

За цими коефіцієнтами, в свою чергу, можемо визначити коефіцієнти $c_{k,m}^{(N_1,N_2)}$ при $(k,m) \in [0,N_1] \times [0,N_2]$ для того, щоб можна було записати поліноми X_{N_1,N_2} у вигляді (3.106).

Для визначення $c_{k,m}^{(N_1,N_2)}$ квадрат цілочисельної сітки $[0,N_1] \times [0,N_2]$ можна звузити, наприклад, (див. Рис. 3.6) до множини

$$\Gamma_{N_1,N_2} = \Big([0,N_1] \times [0,1] \Big) \cup \Big([N_1-2, N_1] \times [2, N_2] \Big). \tag{3.112}$$

Функція $\lambda(k,m) = 2k + 3m$ відображає множину Γ_{N_1,N_2} на множину $\widetilde{\Gamma}_{N_1,N_2} = \{p \in [0, 2N_1 + 3N_2] : p \neq 1, p \neq 2N_1 + 3N_2 - 1\}$. Тому існує обернене відображення до відображення λ:

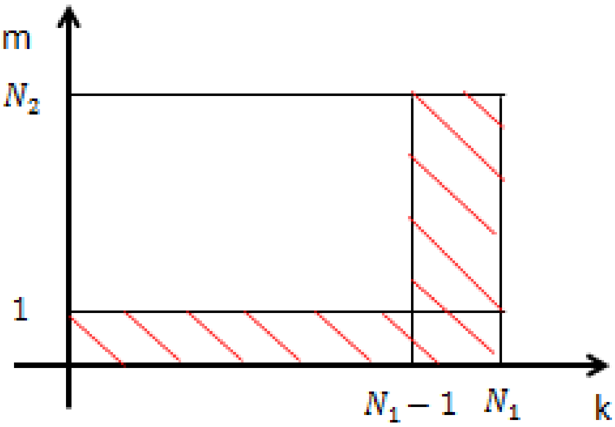


Рис. 3.6: Множина Γ_{N_1,N_2}

- при $p = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 0, m = 0;$

- при $p \in [2, 2N_1 + 1] \quad \Rightarrow$
$$k = \begin{cases} \frac{p}{2}, \text{якщо } p - \text{парне}, m = 0, \\ \frac{p-3}{2}, \text{якщо } p - \text{непарне}, m = 1; \end{cases}$$

- при $p \in [2N_1 + 2, 2N_1 + 3N_2 - 2] \quad \Rightarrow$
$$m = \begin{cases} \frac{p-2N_1}{3}, \text{якщо } p - 2N_1 - \text{ділиться на } 3, k = N_1, \\ \frac{p-2N_1+2}{3}, \text{якщо } p - 2N_1 + 2 - \text{ділиться на } 3, k = N_1 - 1, \\ \frac{p-2N_1+4}{3}, \text{якщо } p - 2N_1 + 4 - \text{ділиться на } 3, k = N_1 - 2; \end{cases}$$

- при $p = 2N_1 + 3N_2 \quad \Rightarrow \quad k = N_1, m = N_2.$

Звідси, для $c_{k,m}^{(N_1,N_2)}$, при $(k,m) \in \Gamma_{N_1,N_2}$, отримуємо наступні співвідношення

$$\begin{cases} c_{k,m}^{(N_1,N_2)} = \sum\limits_{p=2N_1+3N_2-3}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)} \check{c}_{2k+3m}^{(p)}, \\ \qquad\qquad \text{при } (k,m) \in \Gamma_{N_1,N_2} \backslash \{(N_1-1,N_2),(N_1,N_2)\}; \\ c_{N_1-1,N_2}^{(N_1,N_2)} = \sum\limits_{p=2N_1+3N_2-2}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)} \check{c}_{2k+3m}^{(p)}; \\ c_{N_1,N_2}^{(N_1,N_2)} = \gamma_{2N_1+3N_2}^{(N_1,N_2)} \check{c}_{2N_1+3N_2}^{(2N_1+3N_2)}. \end{cases} \tag{3.113}$$

Теорема 3.19. *Для функцій f, що мають вигляд*

$$f(z,w) = \frac{1}{w^2 - z^3} \Bigg(-\Big\langle (z^3 + wz^2 A) \sum_{r=0}^{1} \mathcal{R}_{(-1)^r z^{1/2}}(A) \tilde{x}_0, \tilde{y}_0 \Big\rangle + \\ + \Big\langle \left(w^2 + wz^2 A + zw^2 A^2 \right) \sum_{r=0}^{2} \mathcal{R}_{w^{1/3}\xi_r^{(3)}}(A) \tilde{x}_0, \tilde{y}_0 \Big\rangle \Bigg),$$

раціональні функції

$$[\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f(z,w) = \frac{P_{\mathcal{N}}(z,w)}{Q_{\mathcal{D}}(z,w)},$$

де

$$Q_{\mathcal{D}}(z,w) = \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=1}^{N_2} \sum_{p=2N_1+3N_2-3}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)} \check{c}_{2(N_1-j)+3(N_2-n)}^{(p)} z^j w^n + \\ + \sum_{j=2}^{N_1} \sum_{p=2N_1+3N_2-3}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)} \check{c}_{2(N_1-j)+3N_2}^{(p)} z^j + \\ + z \sum_{p=2N_1+3N_2-2}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)} \check{c}_{2N_1+3N_2-1}^{(p)} + \gamma_{2N_1+3N_2}^{(N_1,N_2)} \check{c}_{2N_1+3N_2}^{(2N_1+3N_2)}$$

і

$$
\begin{aligned}
P_{\mathcal{N}}(z,w) = \sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=1}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{k}\sum_{n=1}^{m} \times \\
\times \sum_{p=2N_1+3N_2-3}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)} \check{c}^{(p)}_{2(N_1-j)+3(N_2-n)} s_{k-j,m-n} + \\
+ \sum_{k=2}^{N_1-1} z^k \sum_{j=2}^{k} \sum_{p=2N_1+3N_2-3}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)} \check{c}^{(p)}_{2(N_1-j)+3N_2} s_{k-j,0} + \\
+ z\left(\sum_{p=2N_1+3N_2-2}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)} \check{c}^{(p)}_{2N_1+3N_2-2} s_{0,0} + \right. \\
\left. \gamma^{(N_1,N_2)}_{2N_1+3N_2} \check{c}^{(2N_1+3N_2)}_{2N_1+3N_2} s_{1,0} \right) + \gamma^{(N_1,N_2)}_{2N_1+3N_2} \check{c}^{(2N_1+3N_2)}_{2N_1+3N_2} s_{0,0} + \\
+ z^{N_1} \sum_{k=0}^{N_1}\sum_{m=1}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=1}^{m} \sum_{p=2N_1+3N_2-3}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)} \check{c}^{(p)}_{2j+3(N_2-n)} \times \\
\times s_{k+j,m-n} + z^{N_1} \sum_{k=0}^{N_1-2} z^k \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{p=2N_1+3N_2-3}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)} \check{c}^{(p)}_{2j+3N_2} s_{k+j,0} + \\
+ z^{N_1} \sum_{k=0}^{N_1} z^k \left(\sum_{p=2N_1+3N_2-2}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)} \check{c}^{(p)}_{2N_1+3N_2-2} s_{k+N_1-1,0} + \right. \\
\left. + \gamma^{(N_1,N_2)}_{2N_1+3N_2} \check{c}^{(2N_1+3N_2)}_{2N_1+3N_2} s_{k+N_1,0} \right) + w^{N_2} \sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{N_2} z^k w^m \sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{N_2-1} \times \\
\times \sum_{p=2N_1+3N_2-3}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)} \check{c}^{(p)}_{2(N_1-j)+3n} s_{k-j,m+n} + \\
+ w^{N_2} \sum_{k=2}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{N_2} z^k w^m \sum_{j=2}^{k} \sum_{p=2N_1+3N_2-3}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)} \check{c}^{(p)}_{2(N_1-j)+3N_2} s_{k-j,m+N_2} + \\
+ z w^{N_2} \sum_{m=0}^{N_2} w^m \left(\sum_{p=2N_1+3N_2-2}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)} \check{c}^{(p)}_{2N_1+3N_2-2} s_{0,m+N_2} + \gamma^{(N_1,N_2)}_{2N_1+3N_2} \times \right. \\
\left. \times \check{c}^{(2N_1+3N_2)}_{2N_1+3N_2} s_{1,m+N_2} \right) + w^{N_2} \sum_{m=0}^{N_2} w^m \gamma^{(N_1,N_2)}_{2N_1+3N_2} \check{c}^{(2N_1+3N_2)}_{2N_1+3N_2} s_{0,m+N_2},
\end{aligned}
$$

матимуть розвинення у степеневі ряди, коефіцієнти яких співпадатимуть відповідно з коефіцієнтами рядів (3.99) *для всіх* $(k, m) \in \mathcal{E} = [0, 2N_1] \times [0, 2N_2] \backslash \{(2N_1, 2N_2)\}$.

Для теореми 3.19 множини індексів коефіцієнтів чисельників $\mathcal{N}$, знаменників $\mathcal{D}$ та множини співпадання коефіцієнтів $\mathcal{E}$ зображені на Рис. 3.7.

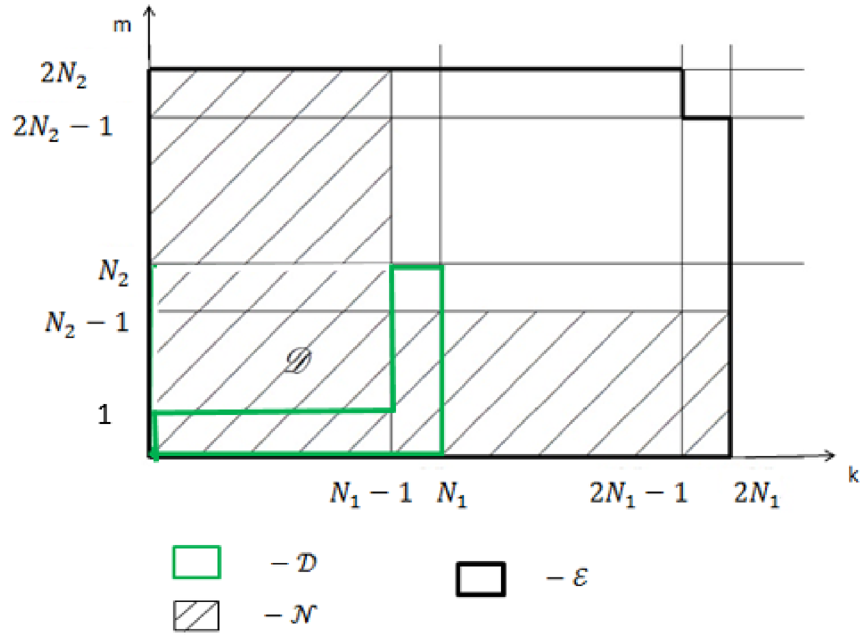


Рис. 3.7: Вигляд областей $\mathcal{D}, \mathcal{N}$ та $\mathcal{E}$ для теореми 3.19.

Розглянемо далі в якості просторів $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$ простори $L_2([0, 1], d\mu)$ — функцій, сумовних з квадратом за мірою $d\mu$, де μ — це неспадна функція, що має нескінченну кількість точок зростання на [0,1]; білінійну форму для довільних функцій φ, ψ з простору $L_2([0, 1], d\mu)$ означимо таким чином

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^1 \varphi(t)\psi(t) d\mu(t), \quad \varphi, \psi \in L_2([0, 1], d\mu).$$

Нехай оператор A — це оператор множення на незалежну змінну

$$(A\varphi)(t) = t\varphi(t), \quad \varphi \in L_2([0, 1], d\mu),$$

а початкові функції $\tilde{x}_0$ та $\tilde{y}_0$ покладемо тотожно рівними одниці

$$\tilde{x}_0(t) = \tilde{y}_0(t) \equiv 1.$$

В такому випадку будуть виконуватися усі умови Теореми 3.19, і, отже, за цією теоремою ми можемо будувати апроксимати типу Паде функцій вигляду

$$\begin{aligned} f(z,w) = \frac{1}{w^2 - z^3}\Big(-\frac{z^3}{2}\int_0^1 \frac{d\mu(t)}{1 - zt^2} + \frac{z^2 w}{2}\int_0^1 \frac{td\mu(t)}{1 - zt^2} + \\ + w^2 \sum_{r=0}^{3} \int_0^1 \frac{d\mu(t)}{1 - z^{1/3}\xi_r^{(3)} t} + \\ + zw^2 \sum_{r=0}^{3} \int_0^1 \frac{td\mu(t)}{1 - z^{1/3}\xi_r^{(3)} t} + z^2 w \sum_{r=0}^{3} \int_0^1 \frac{t^2 d\mu(t)}{1 - z^{1/3}\xi_r^{(3)} t}\Big). \quad (3.114) \end{aligned}$$

Зокрема, для класичної міри

$$d\mu(t) = t^{\nu}(1-t)^{\sigma} dt, \quad \sigma, \nu \in [0,1),$$

поліноми $X_N^{(2)}$ будуть системами алгебраїчних многочленів, ортогональних з вагою $t^{2+\nu}(1-t)^{\sigma} dt$.

Тому коефіцієнти таких поліномів $X_N^{(2)}$ визначаються наступними фомулами (див. [49, с. 581])

$$\check{c}_k^{(N)} = (-1)^{N-k} \binom{N}{k} \frac{\Gamma(\sigma + \nu + 3 + N + k)}{\Gamma(\sigma + k + 1)}. \quad (3.115)$$

Нехай

$$\gamma_N^{(N_1,N_2)} = \frac{1}{N},$$

тоді, підставивши в систему (3.113) значення $\check{c}_k^{(N)}$, отримуємо наступні формули для коефіцієнтів $\gamma_p^{(N_1,N_2)}$

$$\begin{cases} \gamma_N^{(N_1,N_2)} = \frac{1}{N}; \\ \\ \gamma_{N-1}^{(N_1,N_2)} = \sigma + \nu + 2N + 1; \\ \\ \gamma_{N-2}^{(N_1,N_2)} = \frac{1}{N-2}\left[\theta_N \frac{a_{N-3}}{N-3} - \frac{a_N}{N} - a_{N-1}(\sigma+\nu+2N+1)\right] \times \\ \times \left[\frac{a_{N-3}}{N-3}(\nu+\sigma+N+1) + \frac{a_{N-2}}{N-2}\right]^{-1}; \\ \\ \gamma_{N-3}^{(N_1,N_2)} = \frac{1}{N-3}\left[\theta_N \frac{a_{N-2}}{N-2} - \left\{\frac{a_N}{N} + a_{N-1}(\sigma+\nu+2N+1)\right\}\times \right. \\ \left. \times(\sigma+\nu+N+1)\right] \cdot \left[\frac{a_{N-2}}{N-2} + \frac{a_{N-3}}{N-3}(\nu+\sigma+N+1)\right]^{-1}, \end{cases} \tag{3.116}$$

де

$$\theta_N = (N-1)(\sigma+\nu+2N+1)(\sigma+\nu+N+1)_2 - (\sigma+\nu+N+1)_3.$$

Для визначення в цій системі чисел a_p, зафіксуємо деяке $M \in \mathbb{Z}_+$ та розглянемо інтеграл

$$\int_0^1 X_M^{(2)}(t)d\mu(t) = \int_0^1 X_M^{(2)}(t)t^\nu(1-t)^\sigma dt. \tag{3.117}$$

Далі скористаємося формулою Родріга [49, с. 579], згідно з якою

$$X_M^{(2)}(t) = \alpha_M \frac{1}{t^{2+\nu}(1-t)^\sigma}\frac{d^M}{dt^M}\Big(t^{M+2+\nu}(1-t)^{M+\sigma}\Big). \tag{3.118}$$

Тоді інтеграл (3.117) можна записати таким чином

$$\int_0^1 X_M^{(2)}(t)t^\nu(1-t)^\sigma dt = \\ = \int_0^1 \alpha_M \frac{1}{t^{2+\nu}(1-t)^\sigma}\frac{d^M}{dt^M}\Big(t^{M+2+\nu}(1-t)^{M+\sigma}\Big)t^\nu(1-t)^\sigma dt.$$

Інтегруючи за частинами дане співвідношення декілька разів, знаходимо

$$\int_0^1 X_M^{(2)}(t)t^\nu(1-t)^\sigma dt = \alpha_M \int_0^1 \frac{1}{t^2}\frac{d^M}{dt^M}\Big(t^{M+2+\nu}(1-t)^{M+\sigma}\Big)dt =$$
$$= \alpha_M \left(\frac{1}{t^2}\frac{d^{M-1}}{dt^{M-1}}\Big(t^{M+2+\nu}(1-t)^{M+\sigma}\Big)\Big|_0^1 + \right.$$
$$\left. + \int_0^1 \frac{2}{t^3}\frac{d^{M-1}}{dt^{M-1}}\Big(t^{M+2+\nu}(1-t)^{M+\sigma}\Big)dt\right) =$$
$$= \alpha_M \int_0^1 \frac{2}{t^3}\frac{d^{M-1}}{dt^{M-1}}\Big(t^{M+2+\nu}(1-t)^{M+\sigma}\Big)dt = \cdots =$$
$$= \alpha_M \int_0^1 \frac{(j+1)!}{t^{j+2}}\frac{d^{M-j}}{dt^{M-j}}\Big(t^{M+2+\nu}(1-t)^{M+\sigma}\Big)dt = \cdots =$$
$$= \alpha_M \int_0^1 \frac{(M+1)!}{t^{M+2}}t^{M+2+\nu}(1-t)^{M+\sigma}dt =$$
$$= \alpha_M (M+1)!\frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(M+\sigma+1)}{\Gamma(M+\sigma+\nu+2)}, \quad \forall M \in \mathbb{Z}_+.$$

Оскільки поліноми $X_N^{(2)}$ вже визначені раніше з допомогою коефіцієнтів (3.115), то це єдиним чином буде визначати коефіцієнти α_M.

Тому для початку запишемо вираз під знаком диференціала у формулі Родріга (3.118) наступним чином

$$X_M^{(2)}(t) = \alpha_M \cdot \frac{1}{t^{2+\nu}(1-t)^\sigma} \cdot \frac{d^M}{dt^M}\Big(\sum_{j=0}^{M}\binom{M}{j}(-1)^j t^{M+j}t^{2+\nu}(1-t)^\sigma\Big) \quad (3.119)$$

та обчислимо M-ту похідну в цьому виразі

$$\frac{d^M}{dt^M}\Big(\sum_{j=0}^{M}\binom{M}{j}(-1)^j t^{M+j}t^{2+\nu}(1-t)^\sigma\Big) =$$
$$= \sum_{j=0}^{M}\binom{M}{j}(-1)^j \sum_{k=0}^{M}\binom{M}{k}\Big(t^{M+j}\Big)^{(k)}\Big(t^{2+\nu}(1-t)^\sigma\Big)^{(M-k)}.$$

Як бачимо, старший коефіцієнт $X_M^{(2)}$ у формулі (3.119) буде при доданку зі значенням індексів сумування $k = j = M$. Тому для $\check{c}_M^{(M)}$ є справедливим співвідношення

$$\check{c}_M^{(M)} = (-1)^M \alpha_M,$$

і, відповідно,

$$\alpha_M = (-1)^M \frac{\Gamma(\sigma+\nu+M+3)}{\Gamma(\sigma+M+1)},$$

та

$$a_M = \int_0^1 X_M^{(2)}(t) t^\nu (1-t)^\sigma dt = (-1)^M (M+\sigma+\nu+2)_{M+1}.$$

Тоді система (3.110) набуде наступного вигляду

$$\begin{cases} \gamma_N^{(N_1,N_2)} = \frac{1}{N}; \\ \\ \gamma_{N-1}^{(N_1,N_2)} = \sigma+\nu+2N+1; \\ \\ \gamma_{N-2}^{(N_1,N_2)} = \frac{1}{N-2}\Big[\theta_N \frac{(N+\sigma+\nu-1)_{N-2}}{N-3} + \frac{(N+\sigma+\nu+2)_{N+1}}{N} - \\ -(N+\sigma+\nu+1)_N(\sigma+\nu+2N+1)\Big] \times \\ \times \Big[\frac{(N+\sigma+\nu-1)_{N-2}}{N-3}(\nu+\sigma+N+1) + \frac{(N+\sigma+\nu)_{N-1}}{N-2}\Big]^{-1}; \\ \\ \gamma_{N-3}^{(N_1,N_2)} = \frac{1}{N-3}\Big[\theta_N \frac{(N+\sigma+\nu)_{N-1}}{N-2} - \Big\{\frac{(N+\sigma+\nu+2)_{N+1}}{N} - \\ -(N+\sigma+\nu+1)_N(\sigma+\nu+2N+1)\Big\} \cdot (\sigma+\nu+N+1)\Big] \times \\ \times \Big[\frac{(N+\sigma+\nu)_{N-1}}{N-2} + \frac{(N+\sigma+\nu-1)_{N-2}}{N-3}(\nu+\sigma+N+1)\Big]^{-1}. \end{cases} \tag{3.120}$$

Для вищеозначеної міри $d\mu$ та оператора A члени послідовності $\{s_{k,m}\}_{k,m\in\mathbb{Z}_+}$ визначатимуться формулами

$$s_{k,m} = \int_0^1 t^{2k+3m+\nu}(1-t)^\sigma dt = \frac{\Gamma(2k+3m+\nu+1)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(2k+3m+\sigma+2)}. \tag{3.121}$$

Степеневий ряд функції (3.103), відповідно, матиме вигляд

$$f(z,w) = \sum_{k,m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2k+3m+\nu+1)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(2k+3m+\sigma+2)} z^k w^m. \tag{3.122}$$

Слід зауважити, що ряд (3.122), згідно з означенням Горна [3, с. 219], є гіпергеометричною функцією четвертого порядку.

Маємо наступний результат.

Теорема 3.20. *Для гіпергеометричної функції f вигляду* (3.122) *раціональна функція*

$$[\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f(z,w) = \frac{P_{\mathcal{N}}(z,w)}{Q_{\mathcal{D}}(z,w)},$$

де

$$Q_{\mathcal{D}}(z,w) = \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=1}^{N_2}\sum_{p=2N_1+3N_2-3}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)}(-1)^{p-2(N_1-j)-3(N_2-n)}\times$$

$$\times\binom{p}{2(N_1-j)+3(N_2-n)}\times$$

$$\frac{\Gamma(\sigma+\nu+p+3+2(N_1-j)+3(N_2-n))}{\Gamma(\sigma+1+2(N_1-j)+3(N_2-n))}z^j w^n$$

$$+\sum_{j=2}^{N_1}\sum_{p=2N_1+3N_2-3}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)}(-1)^{p-2(N_1-j)-3N_2}\times$$

$$\times\binom{p}{2(N_1-j)+3N_2}\frac{\Gamma(\sigma+\nu+p+3+2(N_1-j)+3N_2)}{\Gamma(\sigma+1+2(N_1-j)+3N_2)}+$$

$$+z\sum_{p=2N_1+3N_2-2}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)}(-1)^{p+2-2N_1-3N_2}\binom{p}{2N_1+3N_2-2}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(\sigma+\nu+p+1+2N_1+3N_2)}{\Gamma(\sigma+2N_1+3N_2-1)}+\gamma_{2N_1+3N_2}^{(N_1,N_2)}\frac{\Gamma(\sigma+\nu+3+2(2N_1+3N_2))}{\Gamma(\sigma+2N_1+3N_2+1)}$$

та

$$P_{\mathcal{N}}(z,w) = \sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=1}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{k}\sum_{n=1}^{m}\sum_{p=2N_1+3N_2-3}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)}\times$$

$$\times(-1)^{p-2(N_1-j)-3(N_2-n)}\binom{p}{2(N_1-j)+3(N_2-n)}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(\sigma+\nu+p+3+2N_1+3N_2-(2j+3n))}{(\sigma+1)_{2N_1+3N_2-(2j+3n)}}\times$$

$$\times \frac{\Gamma(2(k-j)+3(m-n)+\nu+1)}{\Gamma(2(k-j)+3(m-n)+\sigma+2)}+$$

$$+\sum_{k=2}^{N_1-1} z^k \sum_{j=2}^{k} \sum_{p=2N_1+3N_2-3}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)}(-1)^{p+2j-(2N_1+3N_2)}\times$$

$$\times \binom{p}{2N_1+3N_2-2j} \times \frac{\Gamma(\sigma+\nu+p+3+2(N_1-j)+3N_2)}{(\sigma+1)_{2(N_1-j)+3N_2}}\times$$

$$\times \frac{\Gamma(2(k-j)+\nu+1)}{\Gamma(2(k-j)+\sigma+2)} + z\left(\sum_{p=2N_1+3N_2-2}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)}(-1)^{p+2-2N_1-3N_2}\times\right.$$

$$\times \binom{p}{2N_1+3N_2-2}\frac{\Gamma(\sigma+\nu+p+3+2(N_1-1)+3N_2)}{(\sigma+1)_{2N_1+3N_2-2}}\times$$

$$\left.\times \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\sigma+2)} + \gamma_{2N_1+3N_2}^{(N_1,N_2)}\frac{\Gamma(\sigma+\nu+3+2(2N_1+3N_2))}{(\sigma+1)_{2N_1+3N_2}}\cdot\frac{\Gamma(\nu+2)}{\Gamma(\sigma+4)}\right)+$$

$$+\gamma_{2N_1+3N_2}^{(N_1,N_2)}\frac{\Gamma(\sigma+\nu+3+2(2N_1+3N_2))}{(\sigma+1)_{2N_1+3N_2}}\cdot\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\sigma+2)}+$$

$$+z^{N_1}\sum_{k=0}^{N_1}\sum_{m=1}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=1}^{m}\sum_{p=2N_1+3N_2-3}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)}(-1)^{p-2j-3(N_2-n)}\times$$

$$\times \binom{p}{2j+3(N_2-n)}\frac{\Gamma(\sigma+\nu+p+3+2j+3(N_2-n))}{(\sigma+1)_{2j+3(N_2-n)}}\times$$

$$\times \frac{\Gamma(2(k+j)+3(m-n)+\nu+1)}{\Gamma(2(k+j)+3(m-n)+\sigma+2)}+$$

$$+z^{N_1}\sum_{k=0}^{N_1-2} z^k \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{p=2N_1+3N_2-3}^{2N_1+3N_2}\gamma_p^{(N_1,N_2)}(-1)^{p-2j-3N_2}\times$$

$$\times \binom{p}{2j+3N_2}\frac{\Gamma(\sigma+\nu+p+3+2j+3N_2)}{(\sigma+1)_{2j+3N_2}}\cdot\frac{\Gamma(2(k+j)+\nu+1)}{\Gamma(2(k-j)+\sigma+2)}+$$

$$+z^{N_1}\sum_{k=0}^{N_1} z^k \left(\sum_{p=2N_1+3N_2-2}^{2N_1+3N_2}\gamma_p^{(N_1,N_2)}(-1)^{p+2-2N_1-3N_2}\times\right.$$

$$\times \binom{p}{2N_1+3N_2-2}\frac{\Gamma(\sigma+\nu+p+2N_1+3N_2+1)}{(\sigma+1)_{2N_1+3N_2-2}}\times$$

$$\times \frac{\Gamma(2(k+N_1)+\nu+1)}{\Gamma(2(k+N_1)+\sigma+2)} + \gamma_{2N_1+3N_2}^{(N_1,N_2)} \frac{\Gamma(\sigma+\nu+3+2(2N_1+3N_2))}{(\sigma+1)_{2N_1+3N_2}} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(2(k+N_1)+\nu+1)}{\Gamma(2(k+N_1)+\sigma+2)}\Bigg) + w^{N_2} \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{m=0}^{N_2} z^k w^m \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=0}^{N_2-1} \times$$

$$\times \sum_{p=2N_1+3N_2-3}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)} (-1)^{p-2(N_1-j)-3n} \binom{p}{2(N_1-j)+3n}$$

$$\times \frac{\Gamma(\sigma+\nu+p+3+2(N_1-j)+3n)}{(\sigma+1)_{2(N_1-j)+3n}} \cdot \frac{\Gamma(2(k-j)+3(m+n)+\nu+1)}{\Gamma(2(k-j)+3(m+n)+\sigma+2)} +$$

$$+ w^{N_2} \sum_{k=2}^{N_1-1} \sum_{m=0}^{N_2} z^k w^m \sum_{j=2}^{k} \sum_{p=2N_1+3N_2-3}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)} (-1)^{p-2(N_1-j)-3N_2} \times$$

$$\times \binom{p}{2(N_1-j)+3N_2} \times \frac{\Gamma(\sigma+\nu+p+3+2(N_1-j)+3N_2)}{(\sigma+1)_{2(N_1-j)+3N_2}} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(2(k-j)+3(m+N_2)+\nu+1)}{\Gamma(2(k-j)+3(m+N_2)+\sigma+2)} +$$

$$+ zw^{N_2} \sum_{m=0}^{N_2} w^m \left(\sum_{p=2N_1+3N_2-2}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)} (-1)^{p+2-2N_1-3N_2} \times \right.$$

$$\times \binom{p}{2(N_1-1)+3N_2} \frac{\Gamma(\sigma+\nu+p+2N_1+3N_2+1)}{(\sigma+1)_{2N_1+3N_2-2}} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(3(m+N_2)+\nu+1)}{\Gamma(3(m+N_2)+\sigma+2)} + \gamma_{2N_1+3N_2}^{(N_1,N_2)} \frac{\Gamma(\sigma+\nu+3+2(2N_1+3N_2))}{(\sigma+1)_{2N_1+3N_2}} \times$$

$$\left. \times \frac{\Gamma(3(m+N_2)+\nu+3)}{\Gamma(3(m+N_2)+\sigma+4)} \right) + w^{N_2} \sum_{m=0}^{N_2} w^m \gamma_{2N_1+3N_2}^{(N_1,N_2)} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(\sigma+\nu+3+2(2N_1+3N_2))}{(\sigma+1)_{2N_1+3N_2}} \cdot \frac{\Gamma(3(m+N_2)+\nu+1)}{\Gamma(3(m+N_2)+\sigma+2)}$$

матиме розвинення у степеневий ряд, коефіцієнти якого співпадатимуть з коефіцієнтами ряду (3.122) *для всіх* $(k,m) \in \mathcal{E} = [0, 2N_1] \times [0, 2N_2] \setminus \{(2N_1, 2N_2)\}$.

Зауваження 3.21. Доданок

$$zw^{N_2}\sum_{m=0}^{N_2} w^m \left(\sum_{p=2N_1+3N_2-2}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)}(-1)^{p+2-2N_1-3N_2}\times\right.$$
$$\times\binom{p}{2(N_1-1)+3N_2}\frac{\Gamma(\sigma+\nu+p+2N_1+3N_2+1)}{(\sigma+1)_{2N_1+3N_2-2}}\times$$
$$\times\frac{\Gamma(3(m+N_2)+\nu+1)}{\Gamma(3(m+N_2)+\sigma+2)}+\gamma_{2N_1+3N_2}^{(N_1,N_2)}\times$$
$$\left.\times\frac{\Gamma(\sigma+\nu+3+2(2N_1+3N_2))}{(\sigma+1)_{2N_1+3N_2}}\cdot\frac{\Gamma(3(m+N_2)+\nu+3)}{\Gamma(3(m+N_2)+\sigma+4)}\right)$$

формули чисельника $P_{\mathcal{N}}$ у Теоремі 3.20 буде присутній при умові, що $N_1 > 1$. Якщо ж $N_1 = 1$, то тоді, як випливає з Теореми 3.1, цього доданка у записі чисельника не буде.

Для того щоб проілюструвати одержані результати, розглянемо частинний випадок Теореми 3.20 при $\nu = \sigma = 0$ та $N_1 = N_2 = 1$.

За таких умов функція f має вигляд

$$f(z,w)=\sum_{k,m=0}^{\infty}\frac{z^k w^m}{2k+3m+1}, \tag{3.123}$$

а її раціональна апроксиманта визначається формулою

$$[\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f(z,w)=\big(798.336+33.8688\cdot z+82.2528z^2-285.1155\cdot w-$$
$$-7.126863\cdot w^2\big)\times(798.336-232.2432\cdot z-484.6995\cdot w-20.24034zw)^{-1}. \tag{3.124}$$

Порівняємо значення наближуваної функції (3.123), побудованої нами апроксиманти (3.124) та частинної суми степеневого ряду

$$S_{2,2}(z,w)=\sum_{k=0}^{2}\sum_{m=0}^{2}\frac{z^k w^m}{2k+3m+1} \tag{3.125}$$

у точках квадрата $[0;0.8]\times[0;0.8]$ з допомогою значень в Таблиці 3.2 та графіків на Рис. 3.8.

Отримані результати показують, що апроксиманта, побудована

w/z	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
0.0	1	1.056661	1.132197	1.243053	1.442685
	1	1.056504	1.130189	1.230898	1.377776
	1	1.05	1.1	1.15	1.2
0.2	1.076022	1.141799	1.23011	1.360898	1.599489
	1.075161	1.148216	1.245916	1.384019	1.595354
	1.066667	1.123333	1.18	1.236667	1.293333
0.4	1.178736	1.257814	1.364985	1.525654	1.823948
	1.169547	1.265055	1.396476	1.589728	1.903555
	1.133333	1.196667	1.26	1.323333	1.386667
0.6	1.331943	1.432856	1.571493	1.78308	2.186344
	1.287225	1.413384	1.592781	1.869392	2.354031
	1.2	1.27	1.34	1.41	1.48
0.8	1.614013	1.760785	1.967192	2.29223	2.941847
	1.433491	1.60192	1.850836	2.257768	3.046902
	1.266667	1.343333	1.42	1.496667	1.573333

Табл. 3.2: Таблиця значень функції (3.123), апроксиманти (3.124) та частинної суми (3.125).

методом узагальнених моментних зображень, наближає функцію значно краще, ніж частинна сума її степеневого ряду, з тією ж самою кількістю коефіцієнтів.

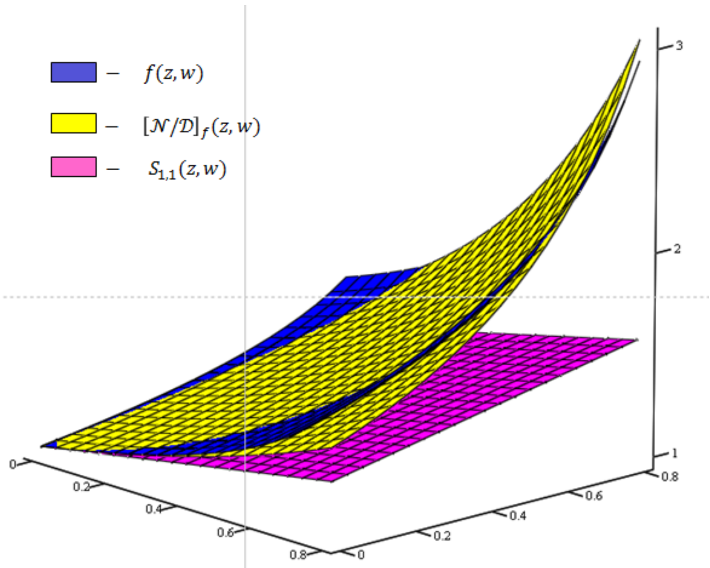


Рис. 3.8: Графік функції (3.123), апроксиманти (3.124) та частинної суми (3.125).

Висновки

У дисертаційній роботі з використанням методів класичного математичного аналізу та апарату функціонального аналізу встановлено необхідні та достатні умови існування багатовимірних узагальнених моментних зображень. Критерій існування встановлено як у термінах умов на послідовності, так і в термінах умов на твірні функції. Отримані результати дозволяють виокремити серед всеможливих функцій кількох змінних ті, для яких може використовуватися метод багатовимірних узагальнених моментних зображень для побудови та дослідження апроксимацій типу Паде.

Використовуючи двовимірні узагальнені моментні зображення, різні підходи до вибору лінійних операторів та нормованих просторів побудовано явні вирази апроксимант типу Паде для нових класів спеціальних функцій двох змінних, зокрема для деяких гіпергеометричних функцій другого, третього та четвертого порядків. При побудові апроксимант Паде для кожного класу функцій побудовано їх представлення через резольвентні функції відповідних лінійних операторів. Для ілюстрації переваг побудованих апроксимант, з використанням математичного пакету MatLab, побудовано графіки та наведено таблиці числових значень.

Для деяких рядів доведено збіжність та встановлено асимптотичні оцінки для чисельників та знаменників апроксимант типу Паде.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] *Аров Д. З.* Пассивные линейные стационарные динамические системы/ Д. З. Аров// Сиб. мат. журн. — 1979. — **20**, N2. — С. 211–228.

[2] *Бейкер Дж.* Аппроксимации Паде/ Дж. Бейкер, П. Р. Грейвс–Моррис. — М: Мир, 1986. — 502 с.

[3] *Бэйтмен Г.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра/ Г. Бэйтмен, А. Эрдейи. — М: Наука,1965. — 648 с.

[4] *Ван дер Варден Б.Л.* Алгебра./ Б. Л. Ван дер Варден. — М.: Мир, 1976. — 648 с.

[5] *Веселовсъка Г.* Апроксиманти типу Паде для деяких аналітичних функцій двох змінних/ Г. Веселовська// Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2016“, Львів, 25-27 травня 2016 р.: Тези доповідей. — [Електронний ресурс]. - Режим доступу: http://iapmm.lviv.ua./chyt2016/theses/Weselovska.pdf.

[6] *Веселовсъка Г.М.* Двовимірні апроксиманти типу Паде для деких спеціальних рядів двох змінних/ Г.М. Веселовська// Міжнародна конференція молодих математиків, Київ, 3-6 червня 2015 р.: Тези доповідей. — Київ: І-нт математики НАН України, 2015. — С. 66.

[7] *Веселовсъка Г.М.* Двовимірні апроксиманти типу Паде для деких аналітичних функцій двох змінних/ Г.М. Веселовська// Четверта всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, 23-25 квітні 2015 р.: Тези доповідей. — Київ: Національний технічний університет України "КПІ“,2015. — С. 14.

[8] *Веселовсъка Г. М.* Апроксимації типу Паде для деяких спеціальних рядів двох змінних/ Г. М. Веселовська// Математичні проблеми

механіки та обчислювальної математики: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2016. — **13**, №3. — С. 47–68.

[9] *Веселовська Г. М.* Раціональні апроксиманти типу Паде одного класу подвійних степеневих рядів/ Г. М. Веселовська, А. П. Голуб// Аналіз та застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2017. — **14**, №1. — С. 61–81.

[10] *Веселовська Г. М.* Теореми існування багатовимірних узагальнених моментних зображень/ Г. М. Веселовська, А. П. Голуб// Укр. мат. журн. — 2017. — **69**, №4. — С. 456–465.

[11] *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц/ Ф. Р. Гантмахер. — М.: Наука, 1967. — 576 с.

[12] *Голуб А.П.* Апроксиманти типу Паде деякий аналітичних функцій кількох змінних/ А.П. Голуб, Г.М. Веселовська// Міжнародна конференція "Теорія наближення та її застосування“, присв'яч. 75-річчю професора, доктора фіз.-мат. наук В.П. Моторного Київ, 8-11 жовтня 2015 р.: Тези доповідей. — Дніпро: Дніпровський національний університет ім. О. Гончара, 2015. — С. 29.

[13] *Голуб А. П.* Об апроксимации Паде функции $\arcsin z$/ А. П. Голуб// Укр. мат. журн. — 1981. — **34**, №1. — С. 57–61.

[14] *Голуб А. П.* Об аппроксимации Паде функции Миттаг-Леффлера/ А. П. Голуб// Теория приближения функций и ее приложения. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. — С. 52–59

[15] *Голуб А. П.* О совместных аппроксимациях Паде набора вырожденных гипергеометрических функций/ А. П. Голуб// Укр. мат. журн. — 1987. — **39**, №6. — С. 701–706.

[16] *Голуб А. П.* Обобщенные моментные представления и рациональные аппроксимации/ А. П. Голуб. — Киев, 1987. — 50 с. — (Препринт/ АН УССР. Ин-т математики; 81.25)

[17] *Голуб А. П.* Обобщенные моментные представления базисных гипергеометрических рядов/ А. П. Голуб// Укр. мат. журн. — 1989. — **41**, №6. — С. 803–808.

[18] *Голуб А. П.* Об одной разновидности обобщенных моментных представлений/ А. П. Голуб// Укр. мат. журн. — 1989. — **41**, №11. — С. 1455–1460.

[19] *Голуб А. П.* Об одном свойстве аппроксимаций Паде гипергеометрических функций/ А. П. Голуб// Сиб. мат. журн. — 1990. — **31**, №5. — С. 171–174.

[20] *Голуб А. П.* Обобщенные моментные представления и аппроксимации Паде-Чебышева/ А. П. Голуб// Укр. мат. журн. — 1990. — **42**, №6. — С. 762–766.

[21] *Голуб А. П.* Обобщенные моментные представления, биортогональные полиномы и аппроксимации Паде/ А. П. Голуб// Укр. мат. журн. — 1994. — **46**, №10. — С. 1328–1335.

[22] *Голуб А. П.* Обобщенные моментные представления и свойства инвариантности аппроксимаций Паде/ А. П. Голуб// Укр. мат. журн. — 1996. — **48**, №3. — С. 309–314.

[23] *Голуб А. П.* Сходимость знаменателей совместных апроксимаций Паде набора вырожденных гипергеометрических функций/ А. П. Голуб// Укр. мат. журн. — 1987. — **40**, №6. — С. 792–795.

[24] *Голуб А. П.* Теоремы существования обобщенных моментных представлений/ А. П. Голуб// Укр.мат. журн. — 2003. — **55**, №7. — С. 881–888.

[25] *Голуб А. П.* Двовимірні апроксиманти типу Паде деяких спеціальних рядів двох змінних/ А. П. Голуб, Г. М. Веселовська//Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — **11**, №4. — С. 76–75

[26] *Голуб А. П.* Двовимірні апроксиманти типу Паде для деяких аналітичних функцій двох змінних/ А. П. Голуб, Г. М. Веселовська// Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — **11**, №3. — С. 71–77.

[27] *Голуб А. П.* Апроксиманти типу Паде для деяких спеціальних рядів двох змінних/ А. П. Голуб, Г. М. Веселовська// Теорія наближення функцій та суміжні питання. Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2015. — **12**, №4. — С. 92–110.

[28] *Голуб А. П.* Двовимірні узагальнені моментні зображення та раціональні апроксимації функцій двох змінних/ А. П. Голуб, Л. О. Чернецька// Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, №8. — С. 1035–1058.

[29] *Голуб А. П.* Побудова апроксимант Паде для деяких гіпергеометричних рядів Аппеля за допомогою методу узагальнених моментних зображень/ А. П. Голуб, Л. О. Чернецька// Теорія наближення функцій та суміжні питання. Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2013. — **10**, №1. — С. 69–94.

[30] *Голуб А. П.* Побудова апроксимацій Паде для деяких гіпергеометричних рядів Лаурічелли за допомогою методу узагальнених моментних зображень/ А. П. Голуб, Л. О. Чернецька// Збірник праць Ін-ту математики НАНУ. — 2014. — **11**, №3. — С. 78–103.

[31] *Голуб А. П.* Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде/ А. П. Голуб. — К.: Ін-т математики НАНУ, 2002. — 222 с.

[32] *Голуб А. П.* Двовимірні узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде деяких рядів Гумберта/ А. П. Голуб, Л. О. Чернецька// Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, №10. — С. 1315–1331.

[33] *Голуб А. П.* Багатовимірні узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде для функцій багатьох змінних/ А. П. Голуб, Л. О. Чернецька// Укр. мат. журн. — 2014. — **66**, №9. — С. 1166–1174.

[34] *Голуб А. П.* Двовимірні апроксиманти типу Паде для деяких аналітичних функцій двох змінних/ А. П. Голуб, Г. М. Веселовська// Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — **11**, №3. — С. 71–77.

[35] *Голуб А. П.* Апроксиманти типу Паде для деяких спеціальних рядів двох змінних/ А. П. Голуб, Г. М. Веселовська// Теорія наближення функцій та суміжні питання. Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2015. — **93**, №135. — С. 296–313.

[36] *Гончар А. А.* Локальные условия однозначности аналитических функций нескольких переменных/ А. А. Гончар// Матем. сб. — 1974. — **12**, №4. — С. 92–110.

[37] *Дзядык В. К.* Обобщенная проблема моментов и аппроксимация Паде/ В. К. Дзядык, А. П. Голуб. — Киев, 1981. — С. 3–15. — (Препринт/ АН УССР. Ин-т математики; 81.58)

[38] *Дзядик В. К.* Про узагальнення проблеми моментів/ В. К. Дзядик// Доп. АН УРСР. — 1981. — **6**. — С. 8–12.

[39] *Дзядык В. К.* Аппроксимационный метод приближения алгебраическими многочленами решений линейных дифференциальных уравнений/ В. К. Дзядык// Изв. АН СССР Сер. мат. — 1974. — **38**, №4. — С. 937–967.

[40] *Дзядык В. К.* А-метод и рациональная аппроксимация/ В. К. Дзядык// Укр. мат. журн. — 1985. — **37**, №3. — С. 250–252.

[41] *Дзядык В. К.* Об асимптотике диагональных аппроксимаций Паде функций $\sin z, \cos z, \operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z$/ В. К. Дзядык// Мат. сборник. — 1979. — **108**, №2. — С. 247–267.

[42] *Дзядык В. К.* Приближение рациональными моногочленами решений линейных дифференциальных уравнений с многочленными коэффициентами/ В. К. Дзядык, Л. И. Филозоф// Докл. АН УССР, Сер. А. — 1977. — №5. — С. 392–395.

[43] *Дзядык В. К.* О скорости сходимости апроксимаций Паде для некоторых элементарных функций/ В. К. Дзядык, Л. И. Филозоф// Мат. сборник. — 1978. — **107**, №3. — С. 347–363.

[44] *Ершов Ю. Л.* Теория нумераций/Ю. Л. Ершов. — М.: Наука, 1977. — 416 с.

[45] *Лелон П.* Целые функции многих комплексных переменных/ П. Лелон, Л. Груман. — М.: Мир, 1989. — 348 с.

[46] *Фукс Б. А.* Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных/ Б. А. Фукс. — М.: ГИФМЛ, 1962. — 420 с.

[47] *Маркушевич А. М.* Теория аналитических функций/ А. М. Маркушевич. — М: Наука, 1967. — Т.1. — 488 с.

[48] *Маршалл А.* Неравенства: Теория мажоризации и ее приложения/А. Маршалл, И. Олкин. — М.: Мир, 1983. — 576 с.

[49] Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. — М: Наука, 1979. — 832 с.

[50] *Садыков Т. М.* Гипергеометрические и алгебраические функции многих переменных/ Т. М. Садыков, Т. М. Цих. —М.: Наука. — 2014. — 408 с.

[51] *Чернецька Л. О.* Побудова двовимірних апроксимант Паде деяких аналітичних функцій двох змінних за допомогою методу узагальнених моментних зображень/ Л. О. Чернецька// Мат. студії. — 2014. — **11**, №2. — С. 201–213.

[52] *Чернышёв С. Л.* Нумерующие функции неотрицательных целочисленных координат L-мерных векторов // Фундаментальная и прикладная математика. — 2009. — **15**, №1. — С. 147–155.

[53] *Abouir, J.* Error formulas for multivariate rational interpolation and Padé approximation/ J. Abouir, A. Cuyt// J. Comput. Appl. Math. — 1990. — **31**. — P. 233–241.

[54] *Abouir, J.* Multivariate partial Newton-Padé and NewtonPadé type approximants/ J. Abouir, A. Cuyt.// J. Approx. Theory. — 1993. — **72**. — P. 301–316.

[55] *Abouir, J.* Stable multi-dimensional model reduction and IIR filter design / J. Abouir, A. Cuyt// International Journal of Computing Science and Mathematics. — 2007. — **1**, № 1 — P. 16–27.

[56] *Allouche, H.* On the structure of a table of multivariate rational interpolants/ H. Allouche, A. Cuyt// Constr. Approx. — 1992. — **8**. — P. 69–86.

[57] *Allouche, H.* Well-defined determinant representations for non-normal multivariate rational interpolants/ H. Allouche, A. Cuyt// Numer. Algorithms. — 1994. — **6**. — P. 119 – 135.

[58] *Brezinski, C.* Padé-type approximants for double power series/ C. Brezinski// J. Indian Math. Soc. — 1994. — **42**. — P. 267–282.

[59] *Baker, G. A.* Application of the Padé method to the investigation of some magnetic properties of the Ising model/G. A. Baker// Phys. Rev. — 1961. —**124**. — P. 768–774.

[60] *Baker, G. A.* The theory and application of the Padé approximant method/G. A. Baker// Theor. Phys. — 1965. —**1**. — P. 1–58.

[61] *Baker, G. A.* The existence and convergence of subsequences of Padé approximants/G. A. Baker// J. Math. Anal. Appl. — 1973 —**43**. — P. 498–528.

[62] *Baker, G. A. Jr.* Essentials of Padé approximants/ G. A. Baker, Jr. — Academic Press, New York/London, 1975 — 305 p.

[63] *Baker, G. A. Jr.* The Padé Approximant in Theoretical Physics/ G. A. Baker, Jr., J. L. Gammel (Eds.). — Academic Press, New York/London, 1971. — 322 p.

[64] *Becuwe, S.* Explicit construction of general multivariate Padé approximants to an Appell function/ S. Becuwe, A. Cuyt, P. Zhou// Advances in Computational Mathematics. — 2005. — **22**, № 3 — P. 1 – 24.

[65] *Becuwe, S.* On the fast solution of Toeplitz-block linear systems arising in multivariate approximation theory/ S. Becuwe, A. Cuyt// Numerical Algorithms. — 2006. — **43**, № 1 — P. 1– 24.

[66] *Becuwe, S.* Multivariate rational interpolation of scattered data. In International Conference on Large-Scale Scientific Computing/ S. Becuwe, A. Cuyt, B. Verdonk// Springer Berlin Heidelberg. — 2003. — P. 204–213.

[67] *Benouahmane, B.* Approximants de Padé et polynómes orthogonaux á deux variables/ B. Benouahmane// Thése de Doctorat — 1992. — P. 222.

[68] *Brezinski, C.* Error estimates in Padé approximation./ C. Brezinski// In Error Control and Adaptivity in Scientific Computing. — Springer, Netherlands, 1999. — P. 75–85.

[69] *Brezinski, C.* New representations of Padé, Padé-type, and partial Padé approximants/ C. Brezinski, M. Redivo-Machela// J. of Comp. and App. Math. — 2015. — №284. — C. 69–77.

[70] *Brezinski, C.* History of continued fractions and Padé approximants/ C. Brezinski. — Vol. 12. Springer Science and Business Media, 2012. — 559 p.

[71] *Brezinski, C.* Moments of a linear operator, with applications to the trace of the inverse of matrices and the solution of equations/

C. Brezinski, P. Fika, M. Mitrouli// — 2012. — **19**, №6. — P. 937–953.

[72] *Brezinski, C.* The methods of Vorobyev and Lanczos./ C. Brezinski// Linear algebra and its applications. — 1996. — **234**. — P. 21–41.

[73] *Brezinski, C.* On interpolatory multivariate Padé-type approximants/ C. Brezinski.// BIT. — 1986. — **26**. — P. 254–258.

[74] *Brezinski, C.* Padé-type approximation and general orthogonal polynomials/ C. Brezinski. — Springer, 1980— 251 p.

[75] *Brezinski, C.* Rational extrapolation for the PageRank vector/ C. Brezinski, M. Redivo-Zaglia// Math of Comp. — 2008. — **77**, №263. — P. 1585–1598.

[76] *Bultheel, A.* Recursive algorithms for nonnormal Padé tables/ A. Bultheel// SIAM journal on applied mathematics — 1980. —**39**, №1. — P. 106–118.

[77] *Bultheel, A.* Epsilon and qd algorithms for the matrix-Padé and 2-d Padé problem/ A. Bultheel// Technical Report TW 57, Univ. Leuven. — 1982.

[78] *Bultheel, A.* Low displacement rank problems in 2-d Padé-approximation/ A. Bultheel// Outils et modéles mathématiques pour l'automatique, l'analyse de systémes et le traitement du signal, CNRS. — 1982. — **2**. — P. 563–576.

[79] *Cauchy, A. L.* Cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique (Vol.1)/A. L. Cauchy. — Imprimerie royale, 1821. — 580 p.

[80] *Chaffy, C.* Interpolation polynomiale et rationnelle d'une fonction de plusieurs variables complexes/ C. Chaffy//Thése, Inst. Polytech. — Grenoble, 1984. — **40**. — P. 39–46.

[81] *Chaffy, C.* How to compute multivariate Padé approximants?/ C. Chaffy// Technical Report, IMAG, Grenoble. — 1986.

[82] *Chisholm, J. S. R.* Rational Approximants Defined from Power Series in *N* Variables/ J.S. Chisholm, J. McEwan// Proc. R. Soc. Lond. — 1974, February. — **336**, №1607. — P. 421–452.

[83] *Chisholm, J. S. R.* Rational approximants defined from double power series/ J.S. Chisholm// Math. Comput. — 1973. — **27**. — P. 841–848.

[84] *Chisholm, J. S. R.* Multivariate approximants with branch points: diagonal approximants/ J.S. Chisholm// Proc. Roy. Soc. London Ser. A. — 1977. — **358**. — P. 351–366.

[85] *Chisholm, J. S. R.* N-variable rational approximants/ J.S. Chisholm// Proc. Roy. Soc. London Ser. A. — 1977. — **358**. — P. 351–366.

[86] *Chisholm, J. S. R.* Multivariate approximants with branch points: off-diagonal approximants/ J.S. Chisholm// Proc. Roy. Soc. London Ser. A. — 1978. — **362**. — P. 43–56.

[87] *Common, A. K.* Some properties of Chisholm approximants/ J.S. Common, P.R. Graves-Morris// J. Inst. Math. Appl. — 1974. — **362**. — P. 229–232.

[88] *Cuyt, A.* A de Montessus theorem for multivariate homogeneous Padé approximants/ A. Cuyt, D. Lubinsky//Ann. Numer. Math. — 1997. — **4**. — P. 217–228.

[89] *Cuyt, A.* A direct approach to convergence of multivariate nonhomogeneous Padé approximants/ A. Cuyt, K. Driver, D. Lubinsky// J. Comput. Appl. Math. — 1996. — **69**. — P. 353–366.

[90] *Cuyt, A.* A review of multivariate Padé approximation theory// J. of Comp. and App. Math. — 1985. —**12**. — P. 221–232.

[91] *Cuyt, A.* A multivariate qd-like algorithm/ A. Cuyt// BIT. — 1988. — **28**. — P. 9–112.

[92] *Cuyt, A.* A new algorithm for sparse interpolation of multivariate polynomials/ A. Cuyt, W.S. Lee// Theoretical Computer Science. — 2011. — **409**, № 2. — P. 180–185.

[93] *Cuyt, A.* A recursive computation scheme for multivariate rational interpolants/ A. Cuyt// SIAM J. Numer. Anal. — 1987. — **24**. — P. 228–238.

[94] *Cuyt, A.* Extension of "a multivariate convergence theorem of the de Montessus de Ballore type“ to multipoles/ A. Cuyt// J. Comput. Appl. Math. — 1992. — **41**. — P. 323–330.

[95] *Cuyt, A.* General order multivariate Padé approximants for pseudo-multivariate functions/ A. Cuyt, J. Tan, P. Zhou// Mathematics of computation. — 2006. — **75**, №254. — P. 727–741.

[96] *Cuyt, A.* How well can the concept of Padé approximant be generalized to the multivariate case?/ A. Cuyt// J. of Comp. and App. Math. — 1999. —**1**, №105. — P. 25–50.

[97] *Cuyt, A.* Multivariate Padé approximants revisited/ A. Cuyt// BIT. — 1986. — **26**. — P. 71–76.

[98] *Cuyt, A.* Kronecker type theorems, normality and continuity of the multivariate Padé operator/ A. Cuyt, K. Driver, D. Lubinsky// Numer. Math. — 1996. — **73**. — P. 311–327.

[99] *Cuyt, A.* Multivariate Exponential Analysis from the Minimal Number of Samples [Електронний ресурс] / A. Cuyt, W. S. Lee// arXiv preprint arXiv:1610.06329. — 2016. — Режим доступу до ресурсу: https://www.researchgate.net/publication/309317434 _Multivariate_Exponential _Analysis_from_the_Minimal_Number_of_Samples.

[100] *Cuyt, A.* Multivariate orthogonal polynomials, homogeneous Padé approximants and Gaussian cubature/ A. Cuyt, R. B. Lenin// Numerical Algorithms. — 2000. — **24**, № 1. — P. 1–15.

[101] *Cuyt, A.* Multivariate reciprocal differences for branched Thiele continued fraction expansions/ A. Cuyt, B. Verdonk.// J.Comput. Appl. Math. — 1988. — **21**. — P. 145–160.

[102] *Cuyt, A.* Multivariate rational approximants for multiclass closed queuing networks/ A. Cuyt, R. B. Lenin// IEEE Transactions on Computers. — 2001. — **50**, № 11 — P. 1279–1288.

[103] *Cuyt, A.* Sparse interpolation of multivariate rational functions. [Електронний ресурс] / A. Cuyt, W. S. Lee// Theoretical Computer Science. — 2011. — **412**, №16. — P. 1445–1456. — Режим доступу до ресурсу: https://www.researchgate.net/publication/220154902 _Sparse_interpolation_ of_multivariate_rational_functions.

[104] *Cuyt, A.* Sparse interpolation and Rational approximation [Електронний ресурс] / A. Cuyt, W. S. Lee// American Mathematical Society. — 2016. — Режим доступу до ресурсу: https://www.researchgate.net/ publication/299993023_Sparse _Interpolation_and_Rational_Approximation.

[105] *Cuyt, A.* The epsilon-algorithm and multivariate Padé approximants/ A. Cuyt //Numer. Math. — 1982. — **40**. — P. 39–46.

[106] *Cuyt, A.* The need for knowledge and reliability in numeric computation: case study of multivariate Padé approximation/ A. Cuyt, B. Verdonk// Acta Appl. Math. — 1996. — **33**. — P. 273–302.

[107] *Ferrand, H. L.* Robert de Montessus de Ballore's 1902 theorem on algebraic continued fractions: genesis and circulation/ H. L. Ferrand// arXiv preprint arXiv:1307.3669. — 2013.

[108] *Ferrand, H.* Genèse et diffusion d'un théorème de Robert de Montessus de Ballore sur les fractions continues algébriques. — 2014.

[109] *Frobenius, G.* Ueber Relationen zwischen den Näherungsbrüchen von Potenzreihen/ G. Frobenius// Journal für die reine und angewandte Mathematik. — 1881. — **90**. — P. 1–17.

[110] *Graves-Morris, P.* Generalisations of the theorem of de Montessus using Canterbury-approximants, in: E. Saff et al. (Eds.),/ P. Graves-Morris// Padé and Rat. Approximation. — 1977. — P. 73–82.

[111] *Gonchar, A. A.* A local condition for the single-valuedness of analytic functions of several variables/ A. A. Gonchar// Math. USSR-Sb. — 1974. — **22**. — P. 305–322.

[112] *Gragg, W. B.* The Pade table and its relation to certain algorithms of numerical analysis/ W. B. Gragg// SIAM review. — 1972. — **14**, №1. — P. 1–62.

[113] *Holub A.* Padé type approximants for special power series of two variables/ A. Holub, H. Veselovska// International V.Skorobohatko Matematical Conference, Drohobych, August 25-28, 2015: Abstracts. — Lviv: National Academy of Sciences of Ukraine, 2015. — P. 57.

[114] *Holub A.P.* Padé type approximants for special power series of two variables/ A.P. Holub, H.M. Veselovska// Third Conference Mathematics for Life Sciences, Rivne, September 15-19, 2015: Abstracts. — Rivne: National Academy of Sciences of Ukraine, 2015. — P. 16.

[115] *Hughes Jones, R.* The Generation of Chisholm Rational Polynomial Approximants to Power Series in Two Variables/ R. Hughes Jones, G. J. Makinson// J. Inst. Maths Applics. — 1974. —**13**. — P. 299–310.

[116] *Hughes Jones, R.* General rational approximants in N-variables./ R. Hughes Jones// Jornal of Mathematics. — 1976. — **16**, № 3. — P. 201–233.

[117] *Jacobi, C. G. J.* Über die Darstellung einer Reihe gegebner Werthe durch eine gebrochne rationale Function/ C. G. J. Jacobi// Journal für die reine und angewandte Mathematik. — 1846. — **30**. — P. 127–156.

[118] *Karlsson, J.* Rational approximation by an interpolation procedure in several variables/ J. Karlsson, H. Wallin// Padé and rational approximation. — 1977. — **90**. — P. 83–100.

[119] *Kuchminskaya, Ch.* Rational approximation by an interpolation procedure in several variables/ Ch. Kuchminskaya//Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin. — 1987. — **1237**. — P. 207–216.

[120] *Lutterodt, C.* Rational approximants to holomorphic functions in n-dimensions/ C. Lutterodt// J. Math. Anal. Appl. — 1976. — **53**. — P. 89–98.

[121] *De Montessus R.* Sur les fractions continues algébriques/ R. De Montessus// Comptes Rendus. — 1902. — **134** . — C. 1489–1491.

[122] *De Montessus R.* Sur les fractions continues algébriques/ R. De Montessus// Bulletin de la SMF. — 1902. — **30** . — C. 28–36.

[123] *De Montessus R.* Sur les fractions continues algébriques/ R. De Montessus// Rend. Circ. Mat. Palermo. — 1905. — **19** . — C. 185–257.

[124] *De Montessus R.* Sur les fractions continues algébriques (extrait d'une lettre adressée á la rédaction)/ R. De Montessus// Annales Scientifique de l'ENS. — 1908. — **25** . — C. 195–197.

[125] *Nuttall J.* The convergence of Padé approximants of meromorphic functions/ J. Nuttall// J. Math. Anal. Appl. — 1970. — **31**. — C. 147–153.

[126] *Padé, H.* Mémoire sur les développements en fractions continues de la fonction exponentielle, pouvant servir d'introduction á la théorie des fractions continues algébriques/ H. Padé// Annales scientifiques de l'Ecole Normale Superieure. — 1892. —**16** № 740. — P. 395–426.

[127] *Padé, H.* Recherches sur la distribution des réduites anormales d'une fonction/ H. Padé// Comp. Rend. — 1907. —**130**. — P. 102–104.

[128] *Padé, H.* Recherches sur la convergence des développements en fractions continues d'une certaine catégorie de fonctions/ H. Padé// Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. — 1907. —**24**. — P. 341–400.

[129] *Padé, H.* Sur la représentation approcée d'une fonction par des fractions rationnelles/ H. Padé// Gauthier-Villars et fils. — 1892. —**9**, № 740. — P. 3–93.

[130] *Pommerenke, Ch.* Padé approximants and convergence in capacity/ Ch. Pommerenke// J. Math. Anal. Appl. — 1973. —**41**. — P. 775–780.

[131] *Zinn-Justin, J.* Convergence of Padé approximants in the general case/ J. Zinn-Justin//Computing Methods in Theoretical Physics II. — 1971. P. 88 – 102.