

Голові спеціалізованої вченої ради
Д 26.206.01 Інституту математики
НАН України

01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

ВІДГУК

офіційного опонента кандидата фізико-математичних наук Мусієнка Андрія Петровича на дисертаційну роботу Веселовської Ганни Миколаївни на тему: «Апроксимації типу Паде для спеціальних функцій кількох змінних», подану на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 «Математичний аналіз»

Дисертаційна робота присвячена поширенню методу багатовимірних узагальнених моментних зображень на нові класи функцій та встановленню необхідних та достатніх умов існування багатовимірних узагальнених моментних зображень.

Теорія апроксимацій Паде являє собою актуальну галузь теорії наближень. Великий інтерес до таких наближень зумовлений їх різноманітними практичними застосуваннями. Відомо, що апроксимації Паде знаходять своє використання, зокрема, у таких галузях сучасних досліджень, як аналіз сигналів, розріджені наближення, задачі розсіювання та інших.

Історично апроксимації Паде виникли ще за часів Бернуллі, а свою назву вони отримали від прізвища французького математика Анрі Паде, який наприкінці XIX на початку XX сторіччя виконав ряд досліджень, присвячених цим апроксимаціям. Надалі поштовхом до розвитку апроксимацій типу Паде, зокрема, багатовимірних узагальнень апроксимацій Паде, стали публікації К. Брезінські, С. Кіда, П. Саблоньєра, Ж. Абуї та А. Кейт. У цих роботах було описано різні підходи до перенесення поняття апроксимацій Паде із одновимірного на d -вимірний випадок.

Значний внесок у розвиток теорії багатовимірних апроксимацій типу Паде було зроблено такими вченими, як Дж.А. Бейкер, П. Грейвс-Морріс, Ж. Чізхольм, Р. Х'юз-Джонс. Серед сучасників у даній галузі досліджень можна відмітити таких науковців, як А. Кейт та К. Брезінські, П.Б. Борвейн,

Н.Дж. Дарас, Й. Карлоссон, Г.Л. Лагомасіно, Д.С. Любінські, К. Люттеродт, А. Сіді, Ц. Тан, П. Чжоу, Г. Воллін та ін.

Серед українських дослідників питаннями апроксимацій Паде займалися В.К. Дзядик та його учні; в аспекті гіллястих ланцюгових дробів теорією раціональних наближень займалися В.Я. Скоробогатько, П.І. Бондарчук, Д.І. Боднар, Х.Й. Кучмінська, М.С. Сявавко, І.І. Демків та їхні учні. У Росії – А.О. Гончар, Є.М. Нікішин, Є.А. Рахманов, С.П. Суєтін, В.І. Буслаєв, О.І. Аптекаєв, В.М. Сорокін, а у Білорусії – В.М. Русак, О.А. Пекарський, О.П. Старовойтов, Є.О. Ровба.

Для дослідження та побудови апроксимацій типу Паде одним із методів, що опирається на визначення множини співпадання, є метод багатовимірних узагальнених моментних зображень, запропонований А.П. Голубом та Л.О. Чернецькою у 2013 році. Цей метод є перенесенням на багатовимірний випадок методу узагальнених моментних зображень В.К. Дзядика 1981 р. У одновимірному випадку за допомогою такого методу вдалося дати відповіді на питання, що стосуються побудови апроксимант Паде ряду спеціальних функцій, що лежать поза межами класу марковських функцій. У цьому аспекті В.К. Дзядиком та А.П. Голубом було встановлено необхідні та достатні умови існування узагальнених моментних зображень довільної числової послідовності, що, в свою чергу, дозволило серед усіх функцій виокремити ті, для яких можна будувати апроксиманти Паде за допомогою цього методу. Поширення даного методу на простори вимірності $d \geq 2$ дало можливість будувати апроксимації типу Паде для так званих псевдо-багатовимірних функцій, гіпергеометричних рядів Апеля, Гумберта, Лаурічелли та деяких інших широких класів функцій кількох змінних. У окремих випадках за допомогою даного методу доведено рівномірну збіжність побудованих апроксимант та встановлено асимптотичні формули для їх чисельників і знаменників.

Враховуючи вищевикладене і те, що в дисертаційній роботі розглянуто питання поширення методу багатовимірних узагальнених моментних зображень на нові класи функцій та встановлення необхідних та достатніх умов існування багатовимірних узагальнених моментних зображень вважаю, що тема дисертаційної роботи є актуальною.

Основні наукові результати роботи. Дисертаційна робота Г.М. Веселовської складається із змісту, переліку умовних позначень, вступу, трьох розділів, висновків, а також списку використаних джерел, що містить 131 найменування. Дисертація містить 2 таблиці та 12 рисунків. Повний обсяг дисертації становить 149 сторінок, з них список використаних джерел займає 15 сторінок.

Перший розділ присвячений огляду наукової літератури за темою дисертації, наведено основні поняття та позначення. Зокрема, у підрозділі 1.1 наводяться означення одновимірних апроксимацій Паде та багатовимірних апроксимацій типу Паде, розглядаються загальні методи їх побудови та основні властивості апроксимант Паде.

У підрозділі 1.2 розглядається поняття узагальнених моментних зображень, введене В.К. Дзядиком, їх зв'язок із класичною проблемою моментів, та багатовимірні узагальнені моментні зображення запропоновані А.П. Голубом та Л.О. Чернецькою. Як в одновимірному, так і в багатовимірному випадку розглянуто операторний підхід до задачі про узагальнені моментні зображення.

Другий розділ дисертаційної роботи присвячено розв'язку задачі про багатовимірні узагальнені моментні зображення. Встановлено необхідні та достатні умови існування багатовимірних узагальнених моментних зображень для довільних числових послідовностей.

У підрозділі 2.1 наведено результати, що стосуються існування одновимірних узагальнених моментних зображень, які встановлені В.К. Дзядиком, А.П. Голубом та Д.З. Аровим.

Підрозділ 2.2 присвячено доведенню необхідних та достатніх умов існування багатовимірних узагальнених моментних зображень у термінах умов на послідовності.

У підрозділі 2.3 доводяться необхідні та достатні умови існування узагальнених моментних зображень у термінах умов на твірні функції.

У **третьому** розділі досліджуються питання, пов'язані з побудовою апроксимацій типу Паде функцій двох змінних на основі методу двовимірних узагальнених моментних зображень.

Підрозділ 3.1 носить допоміжний характер. У ньому наводиться необхідні позначення та ряд тверджень, що використовуються для отримання

результатів наступних підрозділі, зокрема, поняття двовимірних узагальнених моментних зображень та основні теореми для побудови та дослідження двовимірних апроксимацій типу Паде.

У підрозділі 3.2 побудовано апроксиманти типу Паде рядів, для коефіцієнтів яких мають місце узагальнені моментні зображення при виборі операторів $(A_1\varphi)(t) = t\varphi(t)$, $(A_2\varphi)(t) = t^\sigma\varphi(t)$.

У підрозділі 3.3 для довільних банахових просторів X та Y розглянуто апроксиманти типу Паде рядів, для коефіцієнтів яких мають місце узагальнені моментні зображення з операторами $A_1 = A$, $A_2 = A^p$, $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ та, при окремому виборі просторів та операторів, доведено рівномірну збіжність побудованих апроксимант.

У підрозділі 3.4 для довільних банахових просторів X та Y розглянуто апроксиманти типу Паде для класів функцій, степеневі розвинення яких мають узагальнені моментні зображення з операторами $A_1 = A$, $A_2 = A^2 + \alpha A$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

У підрозділі 3.5 для довільних банахових просторів X та Y розглянуто апроксиманти типу Паде рядів, для коефіцієнтів яких мають місце узагальнені моментні зображення з операторами $A_1 = A^2$, $A_2 = A^3$.

Однак є **ряд зауважень**, які стосуються дисертаційної роботи:

1) В списку опублікованих праць за темою дисертації назва збірника в статті № 5 «Аналіз та застосування...», а в англійському перекладі «Mathematical Problems of Mechanics and Computational Mathematics...».

2) В дисертаційній роботі відсутні висновки до розділів. Це ускладнює покращує сприйняття основної наукової ідеї дисертації, не дозволяє простежити логіку дисертаційних досліджень та послідовність викладених наукових положень, що виносяться здобувачем на захист.

3) В анотації роботи записано, що «Теорія апроксимацій Паде являє собою актуальну галузь теорії наближень. Великий інтерес до таких наближень зумовлений їх різноманітними практичними застосуваннями». Проте, автор недостатньо чітко вказує де саме можуть бути використані отримані результати на практиці.

4) У висновках до дисертації необхідно було вказати наукові проблеми, для розв'язання яких можуть бути застосовані результати

дослідження, а також можливі напрями продовження досліджень за тематикою дисертації.

5) На стор. 19 вказано, що керівником семінару «Сучасний аналіз» є професор І.О. Шевчук, що не зовсім відповідає дійсності, оскільки керівниками семінару також є професор О.О. Курченко та професор В.М. Радченко.

6) В роботі присутні також друкарські помилки:

- стор. 21₇ замість «для рядів, для коефіцієнти» має бути «рядів, для коефіцієнтів»;
- стор. 22⁴, стор. 32₅ пропущено слово «зображення»;
- стор. 33³ замість «зображення (2.1) еквівалентне...» має бути «зображення (1.21) еквівалентне...»;
- стор. 42₃ замість «резольвенту функцію...» має бути «резольвенту функції...»;
- стор. 49³ замість «d-вимірної» має бути «d-вимірною»;
- стор. 54⁴ два рази повторюється «степеневого ряду»;
- стор. 86₁ записано «Для функцій вигляду (3.56) за теоремою 3...», проте в роботі теорема під таким номером відсутня;
- стор. 102₇ замість «функції аналітичної функції» має бути «аналітичної функції»;
- стор. 112₃ замість «побудована методому...» має бути «побудована методом...»;
- в роботі в деяких випадках відсутні ініціали авторів, наприклад стор. 30₁, 31¹, 32⁵.

Незважаючи на зауваження, одержані в дисертації результати та зроблені в ній висновки є **правильними і обґрунтованими**. Основні результати дисертації є новими, отримані особисто здобувачем і досить повно викладені і доведені, як в самій роботі, так і у відповідних публікаціях автора. Автореферат об'єктивно відображає основні положення дисертаційної роботи.

Основні результати дисертації носять теоретичний характер і можуть бути застосовані в дослідженнях з теорії наближення функцій, а також при розв'язуванні прикладних задач теорії чисел, обчислювальної математики, математичної фізики тощо.

Виходячи з вказаного, вважаю, що дисертаційна робота Веселовської Ганни Миколаївни «Апроксимації типу Паде для спеціальних функцій кількох змінних» є завершеним науковим дослідженням.

Дисертаційна робота «Апроксимації типу Паде для спеціальних функцій кількох змінних» задовольняє вимогам пунктів 9, 11, 12 «Порядку присудження наукових ступенів», що висуваються до кандидатських дисертацій, а її автор **Веселовська Ганна Миколаївна** заслуговує на присудження наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 «Математичний аналіз».

Офіційний опонент:

асистент кафедри мережевих та інтернет технологій

Київського національного університету імені Тараса Шевченка

кандидат фізико-математичних наук



А.П. Мусієнко

« 15 » листопада 2017 року

ПІДПИС ЗАСВІДЧУЮ
ВЧЕНИЙ СЕКРЕТАР НДЧ
КАРАУЛЬНА Н.В.
16.11.2017р.

Надійшов до спеціалізованої
вченої ради *Кандидатська*
секретар рад *Арт. Артемівченко Ж.Я.* 16.11.2017р.

