НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

К І О С А К В О Л О Д И М И Р А Н А Т О Л І Й О В И Ч

УДК 514.07

ВІДОБРАЖЕННЯ СПЕЦІАЛЬНИХ ПСЕВДОРІМАНОВИХ ПРОСТОРІВ

01.01.04 — геометрія і топологія

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня

доктора фізико-математичних наук

Київ 2017

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі геометрії, топології та динамічних систем Київського національного університету імені Тараса Шевченка

Науковий консультант — доктор фізико-математичних наук, професор
Пришляк Олександр Олегович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
професор кафедри геометрії, топології та динамічних систем

Офіційні опоненти: — доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Горькавий Василь Олексійович
Фізико-технічний інститут низьких температур
ім. Б. І. Веркіна Національної академії наук України,
старший науковий співробітник відділу
диференціальних рівнянь та геометрії

доктор фізико-математичних наук,
Микитюк Ігор Володимирович,
Інститут Прикладних Проблем Механіки і Математики
ім. Я. С. Підстригача Національної академії наук України,
завідувач відділу нелінійного математичного аналізу

доктор фізико-математичних наук,
Ямпольський Олександр Леонідович,
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна,
завідувач кафедри фундаментальної математики

Захист відбудеться 29 листопада 2017 р. о 15^{00} годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.03 у Інституті математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ-4, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий 27 жовтня 2017 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради — Максименко С.І.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми дослідження.

Дифеоморфізми узагальнених геометричних просторів утворюють один із актуальних напрямків сучасної диференціальної геометрії.

Побудова класичної теорії відображень бере свій початок в середині XIX сторіччя в працях італійського геометра Є. Бельтрамі, який розглянув відображення поверхонь на площину такі, що геодезичні лінії переходять в прямі. З розвитком тензорного аналізу та його застосуванням в диференціальній геометрії були отримані базові фундаментальні результати в роботах Т. Леві-Чивіти, Г. Вейля, Т. Томаса.

В теорії відображень працювала велика кількість вчених як математиків, так і фізиків, зацікавлених в застосуванні результатів для моделювання динамічних процесів. Як відомо, рух деяких типів механічних систем, багато процесів в гравітаційних та електромагнітних полях, в суцільних середовищах протікають траєкторіями, які можна розглядати, як геодезичні лінії афіннозв'язного або псевдоріманового простору, що визначаються енергетичним режимом, за якого зовнішні сили відсутні, або за деякими кривими, вектор кривини яких це — вектор узагальнених зовнішніх сил.

З часом відбулась спеціалізація відображень та були сформовані три основних напрямки досліджень:

1. Вивчення основних закономірностей відображень.
2. Для заданого узагальненого простору та спеціального відображення пошук відповіді на питання: дозволяє чи не дозволяє він відображення.
3. Для заданої пари просторів знайти відображення, яке їх пов'язує.

Сформувались математичні школи, представники яких працювали в цих напрямках: Казанська геометрична школа (П.А. Широков, В.Р. Кайгородов, А. П. Норден, А. В. Амінова), Московська геометрична школа (П. К. Рашевський, В. Г. Кручкович, А. С. Солодовніков, В. Ф. Кириченко), Київська школа (О.З. Петров), Пензенська геометрична школа (І.П. Єгоров), Японська школа (К. Яно), Румунська школа (Г. Вренчану).

Серед новітніх шкіл слід відзначити Вроцлавську школу (Р. Дешч), Оломоуцьку школу (Й. Мікеш), Йенську школу (В. С. Матвєєв), Австралійську школу (М. Іствуд).

Особливе місце в розвитку теорії відображень займає Одеська геометрична школа. Хоча формально школа бере початок від В.Ф. Кагана, основні успіхи пов'язані з роботами професора М.С. Синюкова та його учнів М.Л. Гаврильченка, С.Г. Лейка, Й. Мікеша, І.М. Курбатової, Н.В. Яблонської, О.М. Синюкової та інших.

В роботах представників одеської геометричної школи вивчення відображень зводиться до системи диференціальних рівнянь. Система диференціальних рівнянь приводить до алгебраїчної системи, що є умовами інтегрування. Частіше за все, ці системи перевизначені, вводячи додаткові обмеження, їх спрощують або інтегрують.

Таким чином, геометричні питання розв'язуються методами лінійної алгебри, зокрема, такі як

– геодезичні відображення псевдоріманових просторів;

– геодезичні відображення просторів афінної зв'язності на псевдоріманові простори;

– геодезичні відображення бервальдових просторів на псевдоріманові простори;

– геодезичні деформації гіперповерхонь псевдоріманових просторів;

– конформні відображення псевдоріманових просторів на простори Ейнштейна;

– голоморфно-проективні відображення келерових просторів;

– майже геодезичні відображення просторів афінної зв'язності та ін.

Зауважимо, що принципова можливість локального розв'язку цих задач поєднується з серйозними труднощами технічного характеру. Тому зберігає злободенність задача вивчення внутрішніх тензорних характеристик узагальнених просторів, що дозволяють чи не дозволяють вказані відображення. Це, в свою чергу, приводить до спеціалізації просторів або до спеціалізації відображень. Саме тому тему дисертації слід вважати актуальною.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами

Дисертаційна робота виконана в рамках теми наукових досліджень кафедри геометрії, топології та динамічних систем механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (№ держреєстрації 16БФО38-01) і пов'язана з науковими темами, які розроблялись в Університеті Палацького, м. Оломоуц (Чехія) (№ держреєстрації MSM 6198959214), за програмою гранту Грантової агенції Чеської республіки, відповідає планам співпраці за договором між Університетом ім. Палацького м. Оломоуц, Чеська республіка і Одеським Національним політехнічним університетом, і відповідає держбюджетній дослідницькій темі №162 „Дослідження диференціальної геометрії відображень многовидів“ (0106U0123135) Україна. А також за програмами Університету Шіллера, м. Йена, Німеччина (DFG Priority Program 1154 - „Global Differential Geometry“; DFG MA 2565/2 „H-projectivety equivalent metrics“; Research Training Group 1523 „Quantum and Gravitational Fields“).

Мета та задачі дослідження.

Метою дисертаційної роботи є знаходження нових характеристик псевдоріманових і афіннозв'язних просторів та їх відображень.

Об'єктом дослідження є спеціальні псевдоріманові, афіннозв'язні та келерові простори і їх геодезичні, конформні та голоморфно-проективні відображення.

Предметом дослідження є диференціальні рівняння, їх умови інтегрованості та диференціальні продовження, які характеризують те, дозволяє чи не дозволяє заданий узагальнений простір вказаний тип відображення. Системи рівнянь, що задають вказані відображення, зводяться до перевизначенної системи алгебраїчних рівнянь. Шляхом введення додаткових обмежень спеціалізації просторів розв'язуються задачі опису геометричних характеристик афіннозв'язних, псевдоріманових та келерових просторів, що дозволяють чи не дозволяють геодезичні, конформні та голоморфно-проективні відображення.

Методи дослідження це класичні методи дослідження ріманової геометрії. Дослідження ведуться локально, в класі достатньо гладких функцій з використанням тензорних методів, без обмежень на знаковизначеність та сигнатуру метрики.

Наукова новизна отриманих результатів: полягає в розробці методів спеціалізації відображень узагальнених просторів в залежності від типу простору та задач, які досліджуються.

Всі результати, отримані в дисертації, є новими і полягають у наступному

1. Обґрунтовано загальний підхід до спеціалізації як методу дослідження відображення узагальнених просторів.
2. Запропоновано спеціалізацію псевдоріманових просторів за видом метрики та внутрішніх об'єктів.
3. Удосконалено методи дослідження відображень псевдоріманових просторів із збереженням властивостей просторів та об'єктів.
4. Знайдено вид лінійної форми основних рівнянь теорії геодезичних відображень псевдоріманових просторів в залежності від потужності геодезичного класу.
5. Доведено, що чотиривимірні простори Ейнштейна відмінні від просторів сталої кривини однозначно визначаються своїми геодезичними лініями.
6. Обґрунтовано, що сигнатура простору Ейнштейна не впливає на його геодезичне відображення.
7. Побудована нескінченна послідовність псевдоріманових просторів, що пов'язані геодезичним відображенням.
8. Визначено особливість застосування розроблених методів для дослідження конформних відображень.
9. Запропоновано методику поширення методів теорії геодезичних відображень псевдоріманових просторів на теорію голоморфно-проективних відображень келерових просторів.

Практичне значення отриманих результатів.

Дисертація носить характер фундаментально-теоретичного дослідження. Результати, отримані в дисертації, це природний розвиток відомих результатів теорії геодезичних і конформних відображень псевдоріманових просторів, голоморфно-проективних відображень келерових просторів, і тому, є теоретично цінними з точки зору диференціальної геометрії. Також вони можуть бути використані в загальній теорії відносності і теоретичній механіці при моделюванні фізичних процесів.

Особистий внесок автора.

Дисертація є самостійною науковою працею, в якій висвітлені власні ідеї і розробки автора, що дозволили вирішити поставлені завдання. Робота містить теоретичні та методичні положення і висновки, сформульовані дисертантом особисто. Використані в дисертації ідеї, положення чи гіпотези інших авторів мають відповідні посилання і використані лише для підкріплення ідей здобувача. Результати, що належать співавторам, наводяться в дисертації за необхідністю для повноти опису того кола питань і методів для їх розв'язування, які вивчаються автором дисертації.

Апробація результатів

Матеріали дисертації доповідались на міському геометричному семінарі Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна, на геометричному семінарі математичного відділення ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна НАН України, на семінарі "Топологія та її застосування" Львівського національного університету ім. Івана Франка, на геометричному семінарі інституту Прикладних Проблем Механіки і Математики НАН України ім. Я. Підстригача, на семінарі кафедри геометрії, топології та динамічних систем Київського національного університету ім. Тараса Шевченка, на семінарі відділу геометрії і топології Інституту математики НАН України.

Основні результати дисертації доповідались на таких конференціях: "X Белорусская математическая конференция", (Мінськ, Білорусь, 2008); International Conference "Геометрия в Кисловодске-2009"; International Conference "Геометрия в Кисловодске-2010"; 2-я Рос. школа-конференція з міжнародною участю. "Математика, информатика, их приложения и роль в образовании". Росія, Твер, 2010; "Міжнародна конференція "Aplimath"", 2010, 2011, Братислава; 15 International Conference „Dynamical system modeling and stability investigation", Київ, 2011; XIV Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука, Київ, 2012; Міжнародна конференція "Топологія та її застосування" Львівського національного університету ім. Івана Франка, Львів, 2015; Міжнародна конференція „Геометрія в Одесі", Одеса (2008 - 2016).

Публікації

За результатами дослідження опубліковано 34 наукові праці, з них - 22 наукові статті у фахових виданнях [2] — [13], [16] — [18], [22] — [27], [30], 2 монографії [1], [31] та 10 тез доповідей на наукових конференціях [14], [15], [19] — [21], [28], [29], [32] — [34].

Структура та об'єм дисертації

Дисертація складається із вступу, п'яти розділів, висновку та списку літератури. Розділи розбиті на параграфи. Кожен розділ має висновок. Для формул і теорем застосовується потрійна нумерація: перша цифра означає номер розділу, друга — номер параграфу, а третя — номер формули в цьому параграфі. Загальний об'єм дисертації **317**сторінок .Основний текст викладено на **270** сторінках. Список використаної літератури включає **197** найменувань.

На останок автор висловлює подяку своєму науковому консультанту доктору фізико-математичних наук, професору О. О. Пришляку за постійну увагу до роботи та корисні обговорення. Також дякую за спільну продуктивну працю співавторам з Німеччини: професору В. С. Матвєєву, професору С. Роземану, доктору А. Федоровій; з Великобританії: професору А. Болсінову; з Чехії: професору Й. Мікешу, доценту І. Гінтерляйтнер та доценту А. Ванжуровій. Особлива подяка доценту М.Л. Гаврильченко за постійну підтримку і консультації.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

Дисертація складається зі вступу, п'ятьох розділів, висновків та списку використаної літератури.

У **Вступі** обґрунтована актуальність дисертаційної роботи, сформульовані мета та задачі, об'єкт та предмет дослідження, аргументована наукова новизна отриманих результатів.

Маючи довгу історію, теорія відображень отримала нове дихання завдяки тензорним методам дослідження. Введене сто років тому поняття афінної зв'язності, дозволило по-новому поглянуть на класичні геометричні задачі теорії відображень. Як показала довголітня теорія досліджень, найефективнішим методом досліджень є метод зведення розв'язку задач відображення узагальнених просторів до вивчення систем диференціальних рівнянь спеціального типу. І, хоча в будь-якому випадку цей шлях можливий, практичне виконання стикається з великими проблемами технічного характеру. Саме тому виникає необхідність спеціалізації і відображень, і узагальнених просторів. Такий підхід обґрунтовано у вступі на підставі аналізу робіт попередників.

В **першому розділі "Спеціальні відображення просторів афінної зв'язності"** вводиться, слідуючи загально прийнятій традиції, поняття відображення простору афінної зв'язності.

Якщо не зазначено інше, то розглядаються простори афінної зв'язності A_n без скруту, тобто такі, що

$$\Gamma^h_{ij}(x) = \Gamma^h_{ji}(x).$$

Простір A_n належить класу C^r ($A_n \in C^r$), якщо $\Gamma^h_{ij}(x) \in C^r$.

Взаємно однозначна відповідність між точками просторів афінної зв'язності A_n та $\bar{A}_n$ називається відображенням, якщо в спільній за відображенням системі координат виконуються умови

$$\bar{\Gamma}_{ij}(x) = \Gamma^h_{ij}(x) + P^h_{ij}(x).$$

Спільною по відображенню системою координат називають таку систему криволінійних координат, в якій координати відповідних точок співпадають.

Тензор $P^h_{ij}(x)$ — називають тензором деформації зв'язності при даному відображенні.

Якщо

$$P^h_{ij}(x) \not\equiv 0,$$

то відображення називають нетривіальним.

Зауважимо, що тензор деформації симетричний за коваріантними індексами, тобто $P^h_{ij} = P^h_{ji}$, для просторів афінної зв'язності без скруту.

Теорема 1.2.1. *При відображенні простору афінної зв'язності A_n на простір афінної зв'язності $\bar{A}_n$ тензори Рімана та Річчі просторів A_n та*

$\bar{A}_n$ в спільній системі координат пов'язані співвідношеннями

$$\bar{R}^h_{.\,ijk} = R^h_{.\,ijk} + \frac{1}{2}(\nabla_k P^h_{ji} - \nabla_j P^h_{ki} + \bar{\nabla}_k P^h_{ji} - \bar{\nabla}_j P^h_{ki})$$

та

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + \frac{1}{2}(\nabla_\alpha P^\alpha_{ji} - \nabla_j P^\alpha_{\alpha i} + \bar{\nabla}_\alpha P^\alpha_{ji} - \bar{\nabla}_j P^\alpha_{\alpha i})$$

відповідно.

Позначимо різницю тензорів Рімана просторів $\bar{A}_n$ та A_n, пов'язаних відображенням, через P^h_{ijk}, тобто P^h_{ijk} — деформація тензорів Рімана при відображенні —

$$\bar{R}^h_{ijk} - R^h_{ijk} \overset{def}{=} P^h_{ijk}.$$

Доведені теореми

Теорема 1.2.4. *Якщо в довільній системі координат тензор P^h_{ijk} такий, що $P^1_{223} = 0$ (або $P^1_{234} = 0$ для $n > 3$), то цей тензор виражається наступним чином*

$$P^h_{ijk} = \delta^h_i(P_{jk} - P_{kj}) + \delta^h_j P_{ik} - \delta^h_k P_{ij}.$$

де P_{ij} — деякий тензор.

Теорема 1.2.5 . *Якщо в довільній системі координат тензор P^h_{ijk} такий, що $P^1_{223} = 0$ (або $P^1_{234} = 0$ для $n > 3$), то при цьому відображенні зберігається тензор проективної кривини Вейля.*

Останні теореми дозволяють сформулювати наслідок наступного типу

Наслідок 1.2.1. *Якщо в просторів афінної зв'язності співпадають значення компонент тензорів Рімана R^1_{223} (або R^1_{234} для $n > 3$) та $\bar{R}^1_{223}$ (або $\bar{R}^1_{234}$), то при відображенні їх один на одного зберігається тензор проективної кривини Вейля.*

Модифікуючи методику Нордена, знайдено формули, що пов'язують основні тензори, тензор деформації, тензор Рімана, тензор Річчі та їх перші і другі коваріантні похідні для просторів A_n та $\bar{A}_n$, які пов'язані заданим відображенням. В цих формулах присутні як об'єкти A_n, так і $\bar{A}_n$ з коваріантними похідними по відповідних зв'язностях. Хоча при визначенні відображення ми говоримо про взаємнооднозначну відповідність, вибором знаку тензора деформації ми впорядковуємо задану пару афіннозв'язних просторів A_n та $\bar{A}_n$. Між кожною парою просторів A_n та $\bar{A}_n$ можливо встановити відповідність, яка задається об'єктами зв'язності цих просторів. З іншого боку, об'єкт зв'язності A_n та тензор деформації задають зв'язність простору $\bar{A}_n$. Це дозволяє ввести в розгляд відображення, які називатимемо укороченими відносно заданого відображення.

Означення 1.3.1. *Відображення простору афінної зв'язності A_n на простір афінної зв'язності $\overset{\lambda}{A}_n$ називають укороченим відображенням, якщо в спільної по відображенню системі координат, має місце рівняння*

$$\overset{\lambda}{\Gamma}{}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij}(x) + \frac{\lambda}{1+\lambda} P^h_{ij}(x),$$
$$\lambda = const > 0.$$

Якщо $\lambda = 1$, то таке відображення називається укороченим навпіл, а сама зв'язність середньою.

Попередні формули при переході до коваріантних похідних в середній зв'язності значно спрощуються. Зокрема має місце теорема 1.3.3:

Теорема 1.3.3. *Якщо при відображенні просторів афінної зв'язності зберігається тензор Вейля, то тензор деформації задовольняє умовам*

$$\overset{c}{\nabla}_k P^h_{ji} - \overset{c}{\nabla}_j P^h_{ki} =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\delta^h_k(\overset{c}{\nabla}_\alpha P^\alpha_{ji} - \overset{c}{\nabla}_j P^\alpha_{\alpha i}) - \delta^h_j(\overset{c}{\nabla}_\alpha P^\alpha_{ki} - \overset{c}{\nabla}_k P^\alpha_{\alpha i})\right) -$$

$$-\frac{1}{n+1}(\delta^h_i(\overset{c}{\nabla}_j P^\alpha_{\alpha k} - \overset{c}{\nabla}_k P^\alpha_{\alpha j}) -$$

$$-\frac{1}{n-1}(\delta^h_k(\overset{c}{\nabla}_j P^\alpha_{\alpha i} - \overset{c}{\nabla}_i P^\alpha_{\alpha j}) - \delta^h_j(\overset{c}{\nabla}_k P^\alpha_{\alpha i} - \overset{c}{\nabla}_i P^\alpha_{\alpha k}))),$$

а для еквіафінних просторів

$$\overset{c}{\nabla}_k P^h_{ji} - \overset{c}{\nabla}_j P^h_{ki} =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\delta^h_k(\overset{c}{\nabla}_\alpha P^\alpha_{ji} - \overset{c}{\nabla}_j P^\alpha_{\alpha i}) - \delta^h_j(\overset{c}{\nabla}_\alpha P^\alpha_{ki} - \overset{c}{\nabla}_k P^\alpha_{\alpha i})\right).$$

Таким чином, задача про спеціальні відображення або про відображення спеціальних просторів зводиться до вивчення диференціальних рівнянь в коваріантних похідних.

Вивчення цих рівнянь дає можливість як якісного аналізу, тобто відповіді на питання: існує чи не існує розв'язок, так і більш глибоких результатів в разі існування розв'язків.

Через значні технічні труднощі локальних розв'язків задач такого типу виникає необхідність спеціалізації просторів або відображень. Йдучи шляхом спеціалізації відображень введено наступне

Означення 1.3.2. *Відображення простору афінної зв'язності A_n на $\bar{A}_n$ називають фундаментальним, якщо тензор деформації P^h_{ij} має вигляд*

$$P^h_{ij} = \underset{1}{\alpha}\, \delta^h_{(i}\psi_{j)} + \underset{2}{\alpha}\, \varphi_{(i}F^h_{j)} + \underset{3}{\alpha}\, u^h a_{ij}$$

тут $\underset{1}{\alpha}$, $\underset{2}{\alpha}$, $\underset{3}{\alpha}$ — числа, що дорівнюють нулю або одиниці, φ_i, ψ_i, u^h — вектори, a_{ij}, F^h_j — тензори.

На прикладі відображення, що зберігає тензор Вейля, показано, як задачі такого типу зводяться до систем диференціальних рівнянь. Серед відображень, що зберігають тензор Вейля, виділяють геодезичні відображення.

Відображення просторів афінної зв'язності A_n на $\bar{A}_n$ є геодезичним тоді і тільки тоді, коли в спільній за відображенням системі координат x виконуються умови

$$\bar{\Gamma}^h_{ij}(x) = \Gamma^h_{ij}(x) + \delta^h_i \varphi_j + \delta^h_j \varphi_i,$$

де $\varphi_i(x)$ — деякий вектор.

Якщо $\varphi_i(x) \not\equiv 0$, то геодезичне відображення називають нетривіальним. Якщо $\varphi_i(x) = 0$, то геодезичне відображення називають тривіальним або афінним.

Далі розглянуті системи диференціальних рівнянь першого порядку типу Коші. Відмічена можливість використання тотожності Річчі в якості умов інтегрування вказаних систем.

Вивчені геодезичні відображення просторів афінної зв'язності на пседоріманові простори. Побудовано ланцюг геодезично відповідних просторів

$$A_n \to \bar{A}_n \to \bar{V}_n.$$

Тут A_n — довільний простір афінної зв'язності, $\bar{A}_n$ — еквіафінний простір афінної зв'язності, а $\bar{V}_n$ — псевдоріманів простір.

Суттєву роль при доведенні мала

Теорема 1.4.3. *Нехай A_n - простір афінної зв'язності, який (локально) не проективно евклідовий в околі точки $p \in A_n$. Тоді окіл точки p з A_n дозволяє геодезичне відображення на псевдоріманових простір $\bar{V}_n$ тоді і тільки тоді, коли замкнута система лінійних диференціальних рівнянь типу Коші в коваріантних похідних в A_n*

$$a^{ij}_{,k} = \frac{2}{n+1} a^{ij} \Gamma^{\alpha}_{\alpha k} + \delta^i_k \Lambda^j + \delta^j_k \Lambda^i,$$

де

$$\Lambda^i = a^{\alpha\beta} G^i_{\alpha\beta} + \frac{1}{n+1} a^{i\beta} \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha},$$

має розв'язок відносно симетричного невиродженого тензора a^{ij}.

Таким чином, доведено, що розгляд геодезичних відображень просторів афінної зв'язності на псевдоріманові простори, укорочуючи відображення, можна звести до розгляду геодезичного відображення еквіафінного простору афінної зв'язності на псевдоріманів простір.

Спеціалізація псевдоріманових просторів, як засіб введення додаткових обмежень в перевизначені системи рівнянь, має два основних джерела. По-перше, це геометричні умови об'єктів, що досліджуються, по-друге, це технологічні можливості методів дослідження. Враховуючи ці засоби та маючи на увазі дослідження відображень, у **другому розділі „Спеціальні псевдоріманові простори“** запропоновано метод спеціалізації псевдоріманових просторів за типом внутрішніх об'єктів. Потреба ефективного вивчення відображень псевдоріманових просторів приводить до необхідності спеціалізації самих просторів. Природно, щоб обмеження стосувались внутрішніх геометричних об'єктів, тобто метрики та тензорів, отриманих з неї.

Серед псевдоріманових просторів, що дозволяють спеціальний вид метрики в деякій системі координат, виділені звідні та напівзвідні простори.

Псевдоріманів простір V_n з метричним тензором g_{ij} називають локально звідним, якщо в деякому околі кожної його точки M є можливість вибрати таку систему координат $y^1, y^2, \ldots, y^n$, відносно якої основна матрична форма має вигляд

$$I = g_{pq}(y^r)dy^p dy^q + g_{\sigma\mu}(y^\nu)dy^\sigma dy^\mu,$$

$$(p, q, r = 1, 2, \ldots, m;\ \ \sigma, \mu, \nu = m+1, m+2, \ldots, n).$$

Тут g_{pq} залежать лише від $y^1, y^2, \ldots, y^m$, а $g_{\sigma\mu}$ — тільки від $y^{m+1}, y^{m+2}, \ldots, y^n$.

В подальшому, локально звідні простори будемо називати просто звідними.

Таким чином, звідний псевдоріманів простір $V_n(g_{ij})$, згідно з означенням, є добутком двох псевдоріманових просторів $\overset{1}{V}_m(g_{pq})$ та $\overset{2}{V}_{n-m}(g_{\sigma\mu})$. Кожен із просторів $\overset{1}{V}_m$ та $\overset{2}{V}_{n-m}$ може в свою чергу зводитись чи не зводитись, і тому попередню формулу можна записати у вигляді

$$ds^2 = \sum_{k=1}^{r} ds_k^2 \ \ (r > 1),$$

де ds_k^2 — квадратична форма простору V_{m_k} $(m_1 + m_2 + \ldots + m_n = n)$.

Для заданого псевдоріманового простору V_n число r може приймати різні значення. Максимальне значення r називають мобільністю псевдоріманового простору відносно зведення.

Псевдоріманів простір V_n звідний тоді і тільки тоді, коли в ньому існує симетричний тензор $a_{ij} \neq cg_{ij}$ (при деякому сталому c), що задовольняє умовам

$$a_{i\alpha}a_j^\alpha = a_{ij};$$

та
$$a_{ij,k} = 0,$$
де $a^i_j = a_{\alpha j} g^{\alpha i}$.

Ці рівняння є інваріантною (відносно вибору системи координат) умовою, необхідною та достатньою для того, щоб псевдоріманів простір V_n був звідним. В такому вигляді її сформулював П.А. Широков.

Умови інтегрованості для останнього рівняння з урахуванням тотожності Річчі будуть
$$a_{\alpha i} R^\alpha_{jkl} + a_{\alpha j} R^\alpha_{ikl} = 0.$$
Наведена система є перевизначеною алгебраїчною системою. Розв'язки системи a_{ij}, які не виражаються через інші компоненти тензора або через внутрішні об'єкти псевдоріманового простору V_n називають суттєвими.

Для оцінки кількості суттєвих компонент вивчено допоміжне рівняння
$$a_{\alpha i} K^\alpha_j + a_{\alpha j} K^\alpha_i = 0.$$

Тут K^h_j - деякий кососиметричний афінор, незалежний від a_{ij}.

Доведено наступну теорему

Теорема 2.1.2. *Якщо ранг матриці $\left\|K^i_j\right\|$ більше двох, то серед компонент тензора a_{ij} не менше ніж r^* залежить від інших компонент тензора a_{ij} і афінора K^i_j, де r^* — число, яке дорівнює $3n - 5$ для псевдоріманових просторів V_n, $n \neq 4, 6$, а у випадку $n = 4$ або 6 дорівнює $3n - 6$.*

Спираючись на це, вивчені тензорні ознаки та деякі геометричні властивості максимально мобільних відносно зведення псевдоріманових просторів, зокрема доведено

Теорема 2.1.3. *В псевдоріманових просторах, відмінних від просторів сталої кривини, які дозволяють максимальну кількість коваріантно сталих тензорів a_{ij}, тензор кривини має вигляд*
$$R_{hijk} = e(a_h b_i - a_i b_h)(a_j b_k - a_k b_j),$$
тут a_i, b_i — деякі вектори, $e = \pm 1$.

Напівзвідним розкладом метрики псевдоріманового простору V_n $(n>2)$ називають можливість її запису у вигляді

$$ds^2 = ds_1^2(x^1,\, x^2, \ldots,\, x^r) + \sigma(x^1,\, x^2, \ldots,\, x^r) ds_2^2(x^r,\, x^{r+1}, \ldots,\, x^n).$$

Тут ds_1^2 та ds_2^2 — самостійні метрики, що залежать від різних координат, а функція σ залежить лише від координат ds_1^2.

Простір V_n, що дозволяє хоча б один напівзвідний розклад, називають напівзвідним.

Граничним випадком півзвідної метрики є метрика еквідістантного простору.

Псевдоріманів простір V_n з метричним тензором g_{ij} називається еквідістантним, якщо в ньому існує векторне поле $\varphi_i \neq 0$, що задовольняє рівнянням

$$\varphi_{i,j} = \tau g_{ij},$$

де τ — деякий інваріант, а кома “,“ — знак коваріантної похідної в V_n . При $\tau \neq 0$ це — еквідістантний простір основного випадку, а при $\tau = 0$ — особливого.

Доведено теореми

Теорема 2.2.3. *Не існує псевдоріманових просторів V_n, відмінних від просторів сталої кривини, що дозволяють більш ніж $n-2$ лінійно незалежних з сталими коефіцієнтами еквідістантних векторних полів.*

Теорема 2.2.4. *В псевдоріманових просторах $V_n(n>3)$, що дозволяють $n-2$ лінійно незалежних еквідістантних векторних поля і тільки в них, виконуютьcя умови*

$$R_{hijk} = B(g_{hk}g_{ij} - g_{hj}g_{ik}) + e(a_h b_i - a_i b_h)(a_j b_k - a_k b_j);$$

$$a_{i,\,j} = \overset{1}{\xi}_j a_i + \overset{2}{\xi}_j b_i + c_i a_j;$$

$$b_{i,\,j} = \overset{3}{\xi}_j a_i + \overset{4}{\xi}_j b_i + c_i b_j;$$

$$c_{i,\,j} = \overset{5}{\xi}_j a_i + \overset{6}{\xi}_j b_i + c_i c_j - B g_{ij},$$

де a_i і b_i — неколінеарні ортогональні вектори; $c_i, \overset{s}{\xi}_j$ $(s = 1, \ldots, 6)$ — деякі вектори; $e = \pm 1$, $B = const$.

Розглянуті спеціальні класи псевдоріманових просторів, виділених за типом визначених в них тензорів. У теорії спеціальних псевдоріманових просторів особливе місце займають симетричні і рекурентні простори. Узагальнення цих просторів йшло в основному в двох напрямах: збільшення порядку коваріантних похідних і розгляд в якості симетричних (рекурентних) інших тензорів. Природним чином виник новий тип рекурентності — слабка симетричність.

Псевдоріманів простір V_n, в якому існує тензор $A_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ такий, що

$$A_{i_1 i_2 \ldots i_k,\, j} = \overset{1}{\tau}_j A_{i_1 i_2 \ldots i_k} + \overset{2}{\tau}_{i_1} A_{j i_2 \ldots i_k} + \overset{3}{\tau}_{i_2} A_{i_1 j i_3 \ldots i_k} + \ldots + \overset{k+1}{\tau}_{i_k} A_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} j},$$

називаємо A–слабосиметричним.

Доведено що, якщо цій умові задовольняють тензор Рімана або тензор конциркулярної кривини, чи тензор конформної кривини псевдоріманового простору, то мають місце відповідно

$$R_{hijk\,,\,m} = a_m R_{hijk} + \check{b}_h R_{mijk} + \check{b}_i R_{hmjk} + \check{b}_j R_{himk} + \check{b}_k R_{hijm};$$

$$Y_{hijk\,,\,m} = a_m Y_{hijk} + \check{b}_h Y_{mijk} + \check{b}_i Y_{hmjk} + \check{b}_j Y_{himk} + \check{b}_k Y_{hijm};$$

$$C_{hijk\,,\,m} = a_m C_{hijk} + \check{b}_h C_{mijk} + \check{b}_i C_{hmjk} + \check{b}_j C_{himk} + \check{b}_k C_{hijm}.$$

Якщо узагальнення рекурентних псевдоріманових просторів вести шляхом алгебраїчних умов, то ми прийдемо до псевдоріманових просторів із спеціальною векторною оболонкою. Їх вивчення ведеться з допомогою удосконаленого методу В. Кайгородова.

Кажуть, що псевдоріманів простір V_n дозволяє векторну оболонку відносно тензора $A_{i_1 i_2 \ldots i_j kl}$, якщо в ньому існує ненульове векторне поле τ_h таке, що

$$\tau_h A_{i_1 i_2 \ldots i_j kl} + \tau_k A_{i_1 i_2 \ldots i_j lh} + \tau_l A_{i_1 i_2 \ldots i_j hk} = 0.$$

Такі простори називаємо А–слаборекурентними.

Якщо тензор A_{ijkl} задовольняє алгебраїчним умовам

$$A_{ijkl} + A_{jikl} = 0; \quad A_{ijkl} - A_{klij} = 0; \quad A_{ijkl} + A_{iklj} + A_{iljk} = 0,$$

то в V_n існує не більше двох лінійно незалежних ненульових векторних поля τ_h.

Узагальнення симетричних псевдоріманових просторів приводить до гармонійних просторів. Псевдоріманів простір V_n, в якому існує тензор $A^h_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, що задовольняє умовам

$$A^{\alpha}_{i_1 i_2 \ldots i_k, \alpha} = 0,$$

називатимемо A–гармонійним псевдоріманововим простором.

Зауважимо, що гармонійними просторами, зокрема, є: простори сталої кривини, простори Ейнштейна, симетричні простори, простори з метрикою Дзержинського і багато інших типів спеціальних псевдоріманових просторів. Конформно-гармонійними будуть конформно–пласкі простори C_n та конформно–симетричні простори.

Рівняння

$$A_{hijk\,,\,l} + A_{hikl\,,\,j} + A_{hilj\,,\,k} = 0$$

має назву диференціального рівняння типу Біанкі.

В псевдоріманововому просторі $V_n (n > 2)$ тензор Y_{hijk} задовольняє тотожностям типу Біанкі тоді і тільки тоді, коли $R = const$.

Якщо тензор кривини псевдоріманового простору V_n, відмінного від простору сталої кривини має вигляд

$$R_{hijk} = S_{hi} S_{jk},$$

де S_{hi} — деякий кососиметричний тензор, то простір V_n називають простором розділеної кривини.

Псевдоріманові простори V_n розділеної кривини можна розбити на три класи:

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{A}): \quad && \frac{R}{2} R_{hijk} = R_{hk} R_{ij} - R_{hj} R_{ik}; \\
&(\mathrm{B}): \quad && R_{ij} = -a_\alpha a^\alpha b_i b_j; \quad R = 0; \\
&(\mathrm{C}): \quad && R_{ij} = 0.
\end{aligned}
$$

Для двохвалентних тензорів найбільш вдалою є запропонована С. Степановим для тензора енергії–імпульса методика розбиття на класи Ω. Модифікувавши її, застосовуємо для спеціалізації двічі коваріантних внутрішніх тензорів.

В **третьому розділі „Геодезичні відображення спеціальних псевдоріманових просторів“** розглядався один із типів фундаментальних відображень псевдоріманових просторів. Псевдоріманові простори V_n та $\bar{V}_n$, які дозволяють геодезичне відображення один на одного, будемо називати просторами, що знаходься в геодезичній відповідності, або такими, що належать до одного геодезичного класу.

Характеристикою потужності геодезичного класу даного псевдоріманового простору V_n є його степінь мобільності відносно геодезичних відображень. З іншого боку, степінь мобільності псевдоріманового простору V_n відносно геодезичних відображень — це число суттєвих параметрів $r_{\text{гв}}$, від яких залежать розв'язки системи

$$
\begin{gathered}
a_{ij,k} = \lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik}; \\
n\lambda_{i,j} = \mu g_{ij} + a_{\alpha i} R^\alpha_j - a_{\alpha\beta} R^{\alpha}_{\cdot\, ij\, \cdot}{}^{\beta}; \\
(n-1)\mu_{,i} = 2(n+1)\lambda_\alpha R^\alpha_i + a_{\alpha\beta}(2R^{\alpha}_{\cdot\, i,\, \cdot}{}^{\beta} - R^{\alpha\beta}{}_{,i}).
\end{gathered}
$$

Для того, щоб знайти вид останніх рівнянь для псевдоріманових просторів, які дозволяють степінь мобільності відносно геодезичних відображень більше двох, доведено лему

Лема 3.1.1 *Нехай в псевдорімановому просторі V_n існують симетричні тензори $a_{ij}(\not\equiv cg_{ij})$, $b_{ij}(\not\equiv \mu g_{ij} + Ba_{ij})$, $A_{ij}(\not\equiv cg_{ij})$, B_{ij}, що задовольняють умовам*

$$
a_{ij\langle lm\rangle} = b_{l(i} g_{j)k} - b_{k(i} g_{j)l};
$$

$$
A_{ij\langle lm\rangle} = B_{l(i} g_{j)k} - B_{k(i} g_{j)l},
$$

тоді

$$
a_{ij} = \overset{1}{c} g_{ij} + \overset{2}{c} A_{ij},
$$

де c, μ, B, $\overset{1}{c}$, $\overset{2}{c}$ *- деякі інваріанти.*

Спираючись на неї, доведено теорему

Теорема 3.1.1 *Якщо степінь мобільності* $r_{гв}$ *псевдоріманового простору* V_n *відносно геодезичних відображень більше двох, то лінійна форма основних рівнянь теорії геодезичних відображень псевдоріманових просторів* V_n *приймає наступну форму*

$$(a) \qquad a_{ij,k} = \lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik};$$

$$(b) \qquad \lambda_{i,j} = \mu g_{ij} + B a_{ij};$$

$$(c) \qquad \mu_{,i} = 2B\lambda_i,$$

де B *— деяка стала, що однозначно визначена для заданого псевдоріманового простору* V_n.

Отримані результати дають можливість розбити всі псевдоріманові простори V_n, що дозволяють нетривіальні геодезичні відображення, на дві великі групи в залежності від їх степені мобільності відносно геодезичних відображень.

Особливу увагу приділено вивченню спеціальних геодезичних відображень, при яких тензор $\varphi_{ij} \overset{def}{=} \varphi_{i,j} - \varphi_i\varphi_j$, утворений вектором, що задає дане відображення, є лінійною комбінацією метричних тензорів геодезично відповідних псевдоріманових просторів, тобто

$$\bar{B}\bar{g}_{ij} - Bg_{ij} = \varphi_{ij}.$$

Якщо в деякій системі координат метрика ріманового простору V_n може бути записана в вигляді

$$ds^2 = \sum_{\alpha=1}^{p} \prod\nolimits'_{\beta} |f_\beta - f_\alpha|\, ds_\alpha^2,$$

то таку метрику називають метрикою Леві-Чивіти, а сам запис ds^2 записом в формі Леві-Чивіти.

Тензорною ознакою того, що метрика ріманового простору V_n дозволяє запис в формі Леві-Чивіти є існування в ньому тензора $a_{ij}(= a_{ji} \neq cg_{ij})$ та функції $\varphi \neq const$ таких, що

$$a_{ij,k} = 2\varphi_{,k} g_{ij} + \varphi_{,i} g_{jk} + \varphi_{,j} \varphi_{ik}.$$

Приєднана метрика має сталу кривину K, якщо

$$\varphi_{,ij} = -K a_{ij} + L g_{ij},$$

тут L — деяка стала.

Ці розрахунки велись для рімановых просторів. Повертаючись до розгляду псевдоріманових просторів, виникає можливість вивчення псевдоріманових просторів з спеціальним видом вектора λ_i.

Псевдоріманів простір V_n, що дозволяє нетривіальне геодезичне відображення, при якому виконуються рівняння:

$$\lambda_{i,j} = \mu g_{ij} + B a_{ij},$$

де B — деякий інваріант, позначатимемо через $V_n(B)$.

Й. Мікешем, який і ввів в розгляд даний тип просторів, встановлена замкнутість просторів $V_n(B)$ відносно геодезичних відображень, тобто доведено, що якщо $V_n(B)$ дозволяє геодезичне відображення на деяке $\bar{V}_n$, то $\bar{V}_n$ є простором $\bar{V}_n(\bar{B})$.

Враховуючи сказане вище про простори $V_n(B)$, можемо сформулювати

Теорема 3.2.1 *Псевдоріманові простори V_n, що мають степінь мобільності відносно нетривіальних геодезичних відображень більше двох, є просторами $V_n(B), B - const$.*

Відмітимо декілька властивостей просторів $V_n(B)$.

Теорема 3.2.2 *Будь-яке геодезичне відображення псевдоріманового простору $V_n(B)$, $B \not\equiv 0$, є або нетривіальним, або гомотетичним.*

Теорема 3.2.3 *Якщо в псевдорімановому просторі $V_n(B)$ серед векторів λ_i є ненульовий вектор сталої довжини, то тоді $B = 0$.*

Теорема 3.2.4 *Якщо в псевдорімановому просторі $V_n(B)$ серед ненульових векторів λ_i є взаємно ортогональні, то тоді $B = 0$.*

Далі розглянуті геодезичні відображення псевдоріманових просторів з умовами на тензор Річчі. Доведено, що чотиривимірні простори Ейнштейна

V_4, відмінні від просторів сталої кривини, не дозволяють нетривіальні геодезичні відображення на псевдоріманові простори $\bar{V}_4$.

Таким чином, нами виділений ще один клас псевдоріманових просторів, однозначно визначених відносно нетривіальних геодезичних відображень, якими є, наприклад, симетричні, рекурентні, узагальнено симетричні і інші простори.

Поширюючи методи досліджень, розроблені для вивчення геодезичних відображень чотиривимірних просторів Ейнштейна сигнатури Мінковського на Ейншейнові простори вищої розмірності $n > 4$, О.З. Петровим була висловлена гіпотеза: простори Ейнштейна $V_n (n > 4)$ сигнатури Мінковського, відмінні від просторів сталої кривини, не дозволяють нетривіальних геодезичних відображень на простори Ейнштейна тієї ж сигнатури. За допомогою контрприкладу доведена хибність цієї гіпотези.

В якості прикладу розглянуто геодезичні відображення псевдоріманового простору V_4, який називають простором Казнера

$$ds^2 = dt^2 - t^{2p_1}dx^2 - t^{2p_2}dy^2 - t^{2p_3}dz^2.$$

Тут $p_1,\ p_2,\ p_3$ — це три числа, які задовольняють умовам

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1, \quad p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1.$$

Оскільки простір Казнера є псевдорімановим простором Ейнштейна, то він дозволяє нетривіальні геодезичні відображення лише в випадку, коли має сталу кривину. Знайдено загальні розв'язки лінійної форми основних рівнянь теорії геодезичних відображень.

В параграфі 3.4 розглянуті геодезичні відображення псевдоріманових просторів з умовами на тензор Рімана.

Псевдоріманів простір $V_n (n > 2)$ з метричним тензором g_{ij} називають простором квазісталої кривизни, якщо його тензор Рімана R^h_{ijk} задовольняє умовам:

$$R_{hijk} = \alpha(g_{hj}g_{ik} - g_{hk}g_{ij}) + \beta(\psi_h\psi_j g_{ik} - \psi_h\psi_k g_{ij} + \psi_i\psi_k g_{hj} - \psi_i\psi_j g_{hk}),$$

де $R_{hijk} = g_{\alpha h}R^{\alpha}_{ijk}$; $\alpha,\ \beta$ — деякі інваріанти, а ψ_i — одиничний вектор.

Розв'язок основних рівнянь лінійної форми теорії геодезичних відображень, який задовольняє умовам

$$a_{ij} = ug_{ij} + vR_{ij},$$

називають канонічним.

Доведено теорему:

Теорема 3.4.3. *У псевдорімановому просторі квазісталої кривини не існує розв'язків основних рівнянь лінійної форми теорії геодезичних відображень, відмінних від канонічних.*

З неї витікає

Наслідок 3.4.1. *Степінь мобільності відносно геодезичних відображень просторів квазісталої кривизни не більше двох.*

Для гармонічних просторів має місце теорема

Теорема 3.4.6. *Не існує гармонічних псевдоріманових просторів* $V_n(B), B - const$, *відмінних від просторів Ейнштейна.*

В п'ятому параграфі цього розділу вивчені простори, в яких при геодезичних відображеннях зберігаються відповідні об'єкти. Об'єкт, обчислений в псевдорімановому просторі V_n, називають інваріантним відносно геодезичних відображень, якщо він дорівнює аналогічному об'єкту, обчисленому в псевдорімановому просторі $\bar{V}_n$, причому V_n дозволяє геодезичне відображення на $\bar{V}_n$.

Доведена теорема дозволяє сформулювати наслідок

Наслідок 3.5.1. *Якщо при геодезичних відображеннях псевдоріманового простору зберігається тензор Рімана, концциркулярної кривини, Річчі, Ейнштейна, енергії-імпульса, Брінкмана, то такий простір є простором* $V_n(B)$.

Має місце

Теорема 3.5.3. *Якщо при геодезичному відображені псевдоріманового простору* V_n *зберігається коваріантна похідна тензора Вейля то, це або простір сталої кривини, або в ньому виконуються умови*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \varphi^\alpha \lambda_{\alpha i} &=& \overset{1}{\tau} \varphi_i \\ \varphi^\alpha a_{\alpha i} &=& (n-1) \overset{2}{\tau} \varphi_i \end{array} \right.$$

Наведено умови, яким задовольняють псевдоріманові простори, в яких при геодезичних відображеннях зберігаються внутрішні тензори, їх коваріантні похідні та інші властивості.

Для отримання результатів в цілому при переході від локальних теорем, застосовують три основних методи: „техніку Бохнера“, метод Швеця та теорему Обати. Кожен із цих методів, модифікований для теорії геодезичних відображень, застосовано до просторів $V_n(B)$. У всіх випадках доведені „теореми зникнення“, тобто показано, що такі простори не дозволяють нетривіальних геодезичних відображень „в цілому“, а саме

Теорема 3.6.1. *Не існує компактних орієнтованих просторів $V_n(B)$, B – $const$, для яких*

$$B\lambda_\alpha\lambda^\alpha \geq 0.$$

Теорема 3.6.3. *Компактні ріманові простори $V_n(B), B$ – $const$, не дозволяють нетривіальні геодезичні відображення на простори $\bar{V}_n$, метрика $\bar{g}_{ij}$ яких має відмінну сигнатуру від сигнатури метрики g_{ij}, за умови, що метричні тензори в усіх відповідних точках V_n і $\bar{V}_n$ одночасно зводяться до діагонального виду.*

Теорема 3.6.6. *Не існує повних зв'язних ріманових просторів $V_n(B), B = const < 0$, відмінних від просторів сталої кривини.*

У **четвертому розділі „Фундаментальні відображення спеціальних псевдоріманових просторів“** розглянуті спеціальні фундаментальні відображення псевдоріманових просторів при деяких конкретних значеннях параметрів. За $\underset{1}{\alpha} = 1$; $\underset{2}{\alpha} = 0$; $\underset{3}{\alpha} = 1$, $a_{ij} = -g_{ij}$, фундаментальні відображення стають конформними.

Конформним відображенням називають взаємно-однозначну відповідність між точками просторів V_n і $\bar{V}_n$ таку, що

$$\bar{g}_{ij}(x) = e^{2\sigma(x)} g_{ij}(x),$$

тут σ - деяка функція.

Простір V_n називають конформно-звідним, якщо його метрика в деякій голономній системі координат має вигляд

$$ds^2 = \sigma^2 \sum_{k=1}^{r} ds_k^2,$$

де ds_k^2 визначається як квадратична форма простору V_{m_k} $(m_1+m_2+\ldots+m_r = n)$, $r > 1$, а $\sigma = \sigma(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ — деякий інваріант.

Коли $r=2$, тобто
$$ds^2=\sigma^2(ds_1^2+ds_2^2),$$

тут квадратичні форми
$$ds_1^2=g_{i_1j_1}(x^1,x^2,\ldots,x^p)dx^{i_1}dx^{j_1}\ \ (i_1,j_1=1,2,\ldots,p),$$

$$ds_2^2=g_{i_2j_2}(x^{p+1},x^{p+2},\ldots,x^n)dx^{i_2}dx^{j_2}\ \ (i_2,j_2=p+1,p+2,\ldots,n),$$
то цей випадок називають основним типом.

Доведено

Теорема 4.1.1. *Конформно-пласкі конформно звідні основного типу псевдоріманові простори характеризуються умовами*
$$R_{hijk}=\sigma_{hk}g_{ij}-\sigma_{hj}g_{ik}+\sigma_{ij}g_{hk}-\sigma_{ik}g_{hj}+\frac{2}{n}\underset{2}{\Omega}\,(g_{hk}g_{ij}-g_{hj}g_{ik}).$$
В параграфі 4.2 вивчаються конформні відображення на простори Ейнштейна. Питання про те, чи дозволяє V_n $(n>2)$ конформне відображення на деякий простір Ейнштейна, було зведено Г. Брінкманом до проблеми існування розв'язків деякої нелінійної системи диференціальних рівнянь типу Коші відносно $(n{+}1)$ невідомої функції. Основна система зведена до лінійної системи, за допомогою якої вдалось оцінити степінь параметричної довільності r в розв'язку вказаної задачі, в нашій термінології — степінь мобільності псевдоріманового простору відносно конформних відображень на простори Ейнштейна. Тобто, якщо псевдоріманів простір V_n дозволяє конформне відображення на простір Ейнштейна V_n тоді і тільки тоді, коли в V_n існує розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь в коваріантних похідних типу Коші відносно інваріантів $u(x)$, $s(x)(>0)$ і вектору $s_i(x)$:
$$\text{(а) } s_{,i}=s_i;\quad \text{(б) } s_{i,j}=s\,L_{ij}+u\ g_{ij};\quad \text{(в) } u_{,i}=s_\alpha L_i^\alpha;$$

де $L_{ij}=\dfrac{1}{n-2}(R_{ij}-\dfrac{R}{2(n-1)}g_{ij}),\quad L_i^\alpha=g^{\alpha\beta}L_{i\beta}.$

Ці рівняння називають основною системою лінійних рівнянь теорії конформних відображень на простори Ейнштейна.

Теорема 4.2.1. *Якщо загальний розв'язок основної системи лінійних рівнянь теорії конформних відображень на простори Ейнштейна у* V_n

залежить від $r = n-1$ істотних параметрів, то тензор конформної кривини має вигляд:

$$C_{hijk} = \varepsilon(a_h b_i - a_i b_h)(a_j b_k - a_k b_j),$$

де $\varepsilon = \pm 1$ і a_i, b_i – деякі неколінеарні вектори.

Теорема 4.2.2. *Для неконформно пласких ріманових просторів V_n $(n \geq 4)$ розв'язок основної системи лінійних рівнянь теорії конформних відображень на простори Ейнштейна залежить не більше ніж від $(n-2)$ істотних параметрів.*

Теорема 4.2.3. *Псевдорімановий простір V_n дозволяє конформне відображення на простір Ейнштейна з довільністю $r = n-1$, тоді і тільки тоді, коли виконуються умови*

$$C_{hijk} = \varepsilon(a_h b_i - a_i b_h)(a_j b_k - a_k b_j),$$

причому:

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= -c_i a_j + a_i \overset{1}{\xi}_j + b_i \overset{2}{\xi}_j; \\ b_{i,j} &= -c_i b_j + a_i \overset{3}{\xi}_j + b_i \overset{4}{\xi}_j; \\ c_{i,j} &= -c_i c_j + a_i \overset{5}{\xi}_j + b_i \overset{6}{\xi}_j + L_{ij} + \frac{1}{2} c^\alpha c_\alpha g_{ij}; \end{aligned}$$

де $c_i, \overset{\tau}{\xi}_i$, $\tau = 1, \ldots, 6$ – деякі вектори, а тензор P_{ijk} має вид:

$$P_{ijk} = \varepsilon(A b_i - B a_i)(a_j b_k - a_k b_j).$$

Аналіз основних рівнянь дозволив довести наступні твердження:

Теорема 4.2.4. *Якщо степінь мобільності псевдоріманового простору V_n відносно конформних відображень на простори Ейнштейна більше одиниці, то простір Ейнштейна дозволяє конциркулярне векторне поле.*

Теорема 4.2.5. *Степінь мобільності псевдоріманового простору V_n відносно конформних відображень на простори Ейнштейна на одиницю більша від кількості лінійно незалежних конциркулярних векторних полів, що їх дозволяє простір Ейнштейна.*

Теорема 4.2.6. *Серед просторів другої лакунарності відносно конформних відображень на простори Ейнштейна не може бути просторів Ейнштейна.*

Це, в свою чергу, зробило можливим побудувати повну картину розподілу вказаних степенів та класифікувати псевдоріманові простори, що дозволяють конформні відображення на простори Ейнштейна.

В параграфі 4.3 розглянуті конформні відображення із збереженням спеціальних тензорів. Серед конформних відображень виділяють спеціальний тип відображень, які зберігають геодезичні кола.

Означення 4.3.1. *Крива в псевдоріменовому просторі V_n називаєтьcя геодезичним колом, якщо для неї перша кривина є сталою, а друга тотожно дорівнює нулю.*

Означення 4.3.2. *Конформні відображення псевдоріманового простору V_n, при яких зберігаються геодезичні кола, тобто кожне геодезичне коло простору V_n переходить у геодезичне коло конформного до нього $\bar{V}_n$, називають конциркурярними відображеннями.*

Доведено що, якщо при конформному відображенні псевдоріманових просторів V_n зберігається тензор Z_{ij},

$$Z_{ij} = R_{ij} - B(n-1)g_{ij},$$

то при ньому зберігаються і геодезичні кола.

Псевдоріманів простір V_n, відмінний від простору сталої кривини, називають майже ейнштейновим і позначають через M_n, якщо в ньому виконуються умови

$$E_{ij} = u_i u_j,$$

де $E_{ij} \overset{def}{=} R_{ji} - \dfrac{R}{n} g_{ij}$ — тензор Ейнштейна.

З останнього витікає, що майже ейнштейнові простори M_n є замкнутими відносно конциркулярних відображень, тобто, якщо майже ейнштейнів простір M_n дозволяє конциркулярне відображення на псевдоріманів простір $\bar{V}_n$, то $\bar{V}_n$ - також майже ейнштейнів простір.

Свого часу перед дослідниками, що працювали в теорії геодезичних відображень, стало питання про кількість просторів, що дозволяють нетривіальні геодезичні відображення. Відповідь на це питання своїми дослідженнями дав Н.С. Синюков, побудувавши нескінченну послідовність псевдоріманових просторів, що знаходяться в нетривіальній геодезичній відповідності.

Нехай псевдоріманoвий простір V_n дозволяє нетривіальне геодезичне відображення, що відповідає вектору φ_i, на простір $\bar{V}_n$. Розглядатимемо a_{ij} як метричний тензор псевдоріманового простору $\overset{1}{V}_n$:

$$a_{ij} \overset{def}{=} \overset{1}{g}_{ij}.$$

Метричний тензор $\overset{1}{\bar{V}}_n$ побудуємо таким чином

$$\overset{1}{\bar{g}}_{ij} = e^{2\varphi} g_{ij},$$

тобто, встановимо конформну відповідність між просторами V_n і $\overset{1}{\bar{V}}_n$, яка відповідає тому ж векторному полю φ_i.

Означення 4.4.1. *Закон, що задається наведеними вище формулами, який переводить пару псевдоріманових просторів V_n і $\bar{V}_n$, для яких існує нетривіальне геодезичне відображення, що зв'язує їх, в іншу пару просторів $\overset{1}{V}_n$ і $\overset{1}{\bar{V}}_n$, пов'язаних тим же відображенням, називають інваріантним перетворенням псевдоріманових просторів із збереженням геодезичних.*

Доведено теорему

Теорема 4.4.1. *Якщо псевдоріманові простори V_n і $\bar{V}_n$ знаходяться в нетривіальній геодезичній відповідності зі збереженням тензора Ейнштейна, то в просторі $\overset{1}{\bar{V}}_n$, отриманому інваріантним перетворенням зі збереженням геодезичних, існує тензор P_{ij}, що задовольняє умовам*

$$P_{ij\overset{1}{,}k} = \frac{\bar{R}_{,k}}{n(n-1)}\bar{g}_{ij} + (\frac{R}{n(n-1)} - \rho)e^{-2\varphi}(2\varphi_k \overset{1}{\bar{g}}_{ij} +$$

$$+\varphi_i \overset{1}{\bar{g}}_{jk} + \varphi_j \overset{1}{\bar{g}}_{ik}) - e^{-2\varphi}(R_{,k} - \rho_k - 2P_{\alpha k}\varphi^{\alpha}) \overset{1}{\bar{g}}_{ij}$$

У теорії геодезичних відображень псевдоріманових просторів передбачається така відповідність між їх точками, при якій кожна геодезична лінія одного простору переходить точно в геодезичну іншого.

У параграфі 4.5 розглядаються такі нескінченно малі деформації псевдоріманових просторів, при яких кожна його геодезична переходить в геодезичну деформованого простору з деякою контрольованою точністю. Такий підхід, якщо мати на увазі прикладні питання моделювання, може виявитися таким, що навіть більше відповідає реальним фізичним подіям, які виникають в гравітаційному або електромагнітному полі, при реальному русі деякої механічної системи.

Нескінченно малі деформації V_n називатимемо геодезичними, якщо при цих деформаціях зберігаються геодезичні лінії V_n.

Має місце

Теорема 4.5.1. *Для того, щоб псевдоріманів простір V_n дозволяв нескінченно малі геодезичні деформації, необхідно і достатньо, щоб в ньому існував симетричний тензор h_{ij}, що задовольняє рівнянням*

$$h_{ij,k} = 2\psi_k g_{ij} + \psi_i g_{jk} + \psi_j g_{ik}$$

при деякому градієнтному векторі ψ_i.

Це дозволяє застосувати розроблені вище методи для дослідження нескінченно малих геодезичних деформацій псевдоріманових просторів.

Потоком Річчі називають сімейство метрик на многовиді M таке, що

$$\frac{d}{dt} g_t = -2Ric(g_t),$$

де $Ric(g)$ — тензор Річчі метрики g.

З самоподібним розв'язком цього рівняння, яке має назву рівняння Гамільтона, пов'язане поняття солітона Річчі як метрики, що задовольняє рівнянням

$$-2Ric_o = L_{X_o} g_o + 2\lambda g_o$$

для деякого векторного поля X_o на M, похідної Лі L_{X_o} по відношенню до X_o і сталої λ.

Під солітоном розуміють трійку: метрику g, векторне поле X_o та сталу λ. Векторне поле X_o називають задаючим солітон-вектором. Якщо задаючий вектор градієнтний, то градієнтним називають і солітон.

Параграф 4.6 присвячений вивченню градієнтних солітонів в псевдоріманових просторах.

Доведено теореми

Теорема 4.6.1. *В псевдорімановому просторі* V_n *з задаючим солітон-вектором сталої довжини скалярна кривина стала тоді і тільки тоді, коли солітон стійкий.*

Теорема 4.6.2. *Якщо в еквідистантному псевдорімановому просторі* V_n *існує градієнтний задаючий солітон вектор, то або він колінеарний концциркулярному, або концциркулярне векторне поле є коваріантно сталим.*

Теорема 4.6.4. *Якщо в псевдорімановому просторі* V_n *існує більше ніж одне суттєве градієнтне векторне поле, що задає солітон Річчі, то цей простір еквідистантний.*

Це дозволяє сформулювати наслідок

Наслідок 4.6.1. *Стала* λ *однозначно визначається для псевдоріманових просторів* V_n*, відмінних від гармонійних, що дозволяють солітони Річчі.*

Оскільки додаткові структури псевдоріманових просторів в основному мають властивість не дозволяти геодезичних відображень, дослідники звертались до різного роду узагальнень.

Найбільш відомою з них є теорія голоморфно-проективних відображень келерових просторів, тобто відображень, при яких зберігаються аналітично планарні криві і комплексні структури келерового простору.

В **п'ятому розділі „Голоморфно-проективні відображення“** вивчаються відображення келерових просторів. Келеровим простором K_n $(n = 2N)$ називається псевдоріманів простір з метричним тензором $g_{ij}(x)$, у якому існує структура $F_i^h(x)$, що задовольняє співвідношенням:

$$F_\alpha^h F_i^\alpha = -\delta_i^h; \qquad F_{(ij)} = 0; \qquad F_{i,j}^h = 0,$$

де $F_{ij} \equiv g_{i\alpha} F_j^\alpha$, кома — знак коваріантної похідної по зв'язності K_n.

Розглянуті спеціальні келерові простори з прийнятою для псевдоріманових просторів спеціалізацією по двохвалентних тензорах. Доведено теореми:

Теорема 5.1.2. *Конформно-гармонійні келерові простори* CM_n $(n > 3)$ *є річчі-симетричними.*

Теорема 5.1.3 *Бохнер-гармонійні простори* BM_n *несталої скалярної кривини і тільки вони є просторами* L_n^*.

Тобто келеровим простором, тензор Річчі якого задовольняє умові:

$$R_{ij,k} = a_k g_{ij} + b_{(i}g_{j)k} + b_{(\bar{i}}g_{\bar{j})k},$$

де a_i та b_i — деякі ненульові ковектори.

У параграфі 5.2 розглянуті геодезичні відображення спеціальних келерових просторів. З досліджень Й. Мікеша геодезичних відображень келерових просторів витікає, що вектор λ_i породжує збіжне векторне поле, тобто мають місце умови

$$\lambda_{i,j} = \mu g_{ij},$$

де $\mu - const$.

Нами доведено, що Бохнер-гармонійні простори L_n^* дозволяють нетривіальні геодезичні відображення на псевдоріманові простори.

Аналітично планарною кривою L келерового простору називають криву, задану рівняннями $x^h = x^h(t)$ таку, що виконуються наступні умови:

$$\frac{d\xi^h}{dt} + \Gamma^h_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta = \rho_1(t)\xi^h + \rho_2(t)F^h_\alpha\xi^\alpha,$$

де $\xi^h \equiv \dfrac{dx^h}{dt}$, ρ_1, ρ_2 - функції аргументу t. Дифеоморфізм γ між точками келерових просторів K_n і $\bar{K}_n$ називається голоморфно-проективним відображенням, якщо кожна аналітично планарна крива K_n переходить в аналітично планарну криву $\bar{K}_n$.

Мають місце теореми

Теорема 5.3.1. *Якщо келеровий простір* K_n *дозволяє конциркулярні відображення і вектор* v_i, *відмінний від коваріантно сталого, то воно дозволяє і нетривіальні голоморфно-проективні відображення.*

Теорема 5.3.2. *Якщо келеровий простір* K_n *дозволяє геодезичне відображення зі збереженням тензора Ейнштейна і вектор* λ_i *— відмінний від коваріантно сталого, то* K_n *дозволяє і нетривіальні голоморфно-проективні відображення.*

Враховуючи їх, переконались в справедливості наслідку:

Наслідок 5.3.1. *Якщо келеровий простір K_n дозволяє нетривіальні голоморфно-проективні відображення зі збереженням тензора Ейнштейна, то K_n — простір сталої скалярної кривини.*

Таким чином, методи, які розроблені в теорії відображень псевдоріманових просторів, перенесені в теорію голоморфно-проективних відображень келерових просторів.

Отже у п'ятому розділі показано, що виділені в теорії псевдоріманових просторів типи спеціальних просторів зводяться до одного типу і така спеціалізація є неефективною. Запропонований новий аналогічний спосіб розбиття на спеціальні класи келерових просторів з урахуванням комплексної структури. Досліджено голоморфно-проективні відображення спеціальних келерових просторів з обмеженнями на тензор Бохнера, Річчі, Рімана.

ВИСНОВКИ

Таким чином, дисертаційна робота присвячена вивченню відображень (конформних, геодезичних, голоморфно-проективних) спеціальних псевдоріманових просторів. Осучаснення тензорних методів дослідження дозволило по-новому поглянуть на класичні геометричні задачі.

Маючи довгу історію, теорія відображень отримала нове дихання завдяки тензорним методам дослідження. Введене сто років тому поняття афінної зв'язності, дозволило по новому поглянуть на класичні геометричні задачі.

Модифікуючи методику Нордена, знайдено формули, що пов'язують основні тензори, тензор деформації, тензор Рімана, тензор Річчі та їх перші і другі коваріантні похідні для просторів A_n та $\bar{A}_n$, які пов'язані заданим відображенням. В цих формулах присутні як об'єкти A_n, так і $\bar{A}_n$ з коваріантними похідними по відповідних зв'язностях. Для спрощення, введене поняття укороченого відображення і його спеціального випадку — половинного відображення. Зв'язність, яка випливає при половинному відображенні, названа середньою.

Попередні формули при переході до коваріантних похідних в середній зв'язності значно спрощуються.

На прикладі відображення, що зберігає тензор Вейля, показано, як задачі такого типу зводяться до систем диференціальних рівнянь.

Через значні технічні труднощі локальних розв'язків задач такого типу виникає необхідність спеціалізації просторів або відображень.

Доведено, як впливає на характер відображення обмеження на внутрішні об'єкти просторів афінної зв'язності A_n. А саме, якщо в двох просторах афінної зв'язності A_n та $\bar{A}_n$ співпадають значення тензорів Рімана R^1_{223} та $\bar{R}^1_{223}$, то відображення за необхідністю набувають спеціального характеру.

Далі розглянуті системи диференціальних рівнянь першого порядку типу Коші.

Відмічена можливість та особливості використання тотожності Річчі в якості умов інтегрування вказаних систем.

Введено поняття фундаментальних відображень. Якщо $\underset{1}{\alpha} = 1$, а $\underset{2}{\alpha} = \underset{3}{\alpha} = 0$, то фундаментальні відображення стають геодезичними, тобто при них зберігаються геодезичні лінії.

Розглянуті геодезичні відображення просторів афінної зв'язності на пседоріманові простори.

Доведено, що вивчення геодезичних просторів афінної зв'язності на псевдоріманові простори можна скоротити і звести до розгляду геодезичних відображень еквіафінних просторів на псевдоріманові простори.

$$\begin{tikzcd} A_n \arrow[rr] \arrow[dr] & & V_n \\ & EA_n \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Рис.1. Принципова схема геодезичного відображення простору афінної зв'язності на псевдоріманів простір.

Спеціалізація псевдоріманових просторів, як засіб введення додаткових обмежень в перевизначені системи рівнянь, має два основних джерела. По-перше, це геометричні умови об'єктів, що досліджуються, по-друге, це технологічні можливості методів дослідження. Враховуючи ці засоби та маючи на увазі дослідження відображень, запропоновано метод спеціалізації псевдоріманових просторів за типом внутрішніх об'єктів.

Серед псевдоріманових просторів, що дозволяють спеціальний вид метрики в деякій системі координат, виділені звідні та напівзвідні простори. Вивчені їх тензорні ознаки та, спираючись на це, деякі геометричні властивості.

У теорії спеціальних псевдоріманових просторів особливе місце займають симетричні і рекурентні простори. Узагальнення цих просторів йшло в основному в двох напрямах: збільшення порядку коваріантних похідних і розгляд в якості симетричних (рекурентних) інших тензорів. Природним чином виник новий тип рекурентності — слабка симетричність.

Якщо узагальнення рекурентних псевдоріманових просторів вести шляхом алгебраїчних умов, то ми прийдемо до псевдоріманових просторів із спеціальною векторною оболонкою. Їх вивчення ведеться з допомогою удосконалення метода В. Кайгородова. Узагальнення симетричних псевдоріманових просторів приводить до гармонійних просторів. Для двохвалентних тензорів найбільш вдалою є запропонована С. Степановим для тензора енергії–імпульсу методика розбиття на класи Ω. Модифікувавши, її застосовуємо для спеціалізації двічі коваріантних внутрішніх тензорів.

Розглянуті геодезичні відображення спеціальних псевдоріманових просторів. Особливу увагу приділено вивченню спеціальних геодезичних відображень, при яких тензор $\varphi_{ij} \overset{def}{=} \varphi_{i,j} - \varphi_i \varphi_j$, утворений вектором, що задає дане відображення, є лінійною комбінацією метричних тензорів геодезично відповідних псевдоріманових просторів, тобто

$$\bar{B}\bar{g}_{ij} - Bg_{ij} = \varphi_{ij}.$$

На такі псевдоріманові простори звернули увагу Г. Кручкович та Й. Мікеш, виходячи з різних міркувань.

Знайдено особливість такого типу відображень, а саме, якщо таке відображення дозволяє заданий простір V_n, то він не дозволяє ніяких інших відображень. А простори, що належать до його геодезичного класу також дозволяють лише геодезичні відображення з умовою, вказаною вище.

Доведено, що до таких просторів належать всі псевдоріманові простори, ступінь мобільності яких, більше двох. Вивчено деякі їх геометричні властивості. Спираючись на це, доведено, що чотирьохвимірні простори Ейнштейна, відмінні від просторів сталої кривини, не дозволяють нетривіальних геодезичних відображень. Якщо розмірність простору Ейнштейна більше чотирьох, то існують такі простори, відмінні від просторів сталої кривини, що дозволяють нетривіальні геодезичні відображення. Наведено приклад таких просторів, на якому показано, що сигнатура простору не впливає на його властивість дозволяти чи не дозволяти геодезичні відображення. Також, для прикладу, досліджено геодезичні відображення просторів Казнера.

При спеціальних значеннях параметрів фундаментальні відображення стають конформними.

Вивчені простори, в яких при геодезичних відображеннях зберігаються відповідні об'єкти. Наведено умови, яким задовольняють псевдоріманові простори, в яких при геодезичних відображеннях зберігаються внутрішні тензори, їх коваріантні похідні та інші властивості.

Вивчення конформних відображень псевдоріманових просторів це одна з актуальних задач сучасної диференціальної геометрії.

Розглянуті конформні відображення псевдоріманових просторів на простори Ейнштейна. Оцінена лакуна в розподілі степенів мобільності псевдоріманових просторів відносно конформних відображень на простори Ейнштейна.

Доведено, якщо степінь мобільності псевдоріманового простору V_n відносно конформних відображень на простори Ейнштейна більше одиниці, то простір Ейнштейна дозволяє конциркулярне векторне поле; степінь мобільності псевдоріманового простору V_n відносно конформних відображень на простори Ейнштейна на одиницю більша від кількості лінійно незалежних конциркулярних векторних полів, що їх дозволяє простір Ейнштейна; серед просторів другої лакунарності відносно конформних відображень на простори Ейнштейна не може бути просторів Ейнштейна.

Вивчені конформні відображення із збереженням деяких спеціальних тензорів. Одержані основні рівняння, що дають можливість визначити дозволяє або не дозволяє цей псевдориманів простір конформні відображення.

Інваріантні перетворення із збереженням геодезичних дозволяють довести, що існує безліч псевдоріманових просторів різних степенів мобільності відносно геодезичних відображень.

Розроблені методи застосовані в теорії геодезичних деформацій гіперповерхонь довільних псевдоріманових просторів.

Розв'язок зведено до вивчення системи диференціальних рівнянь типу Коші в коваріантних похідних. Запропоновані формули переходу дозволяють переносити результати отримані в теорії геодезичних відображень на дослідження геодезичних деформацій.

Солітони Річчі, що, природно, виникають із теорії потоків Річчі, дають один тип спеціальних псевдоріманових просторів. Зокрема доведено, що в псевдорімановому просторі V_n з градієнтним задаючим вектором сталої довжини скалярна кривина стала тоді і тільки тоді, коли солітон Річчі стійкий.

Обгрунтовано, що, якщо в псевдорімановому просторі V_n існує більше ніж одне суттєве векторне поле, що задає солітон Річчі, то цей простір еквідістантний, а також, що стала λ однозначно визначається для псевдоріманових просторів V_n, відмінних від гармонійних, що дозволяють солітони Річчі.

Ще одним видом фундаментальних відображень є голоморфно-проективні відображення, тобто відображення, при яких зберігаються аналітично-планарні криві.

Досліджено голоморфно-проективні відображення спеціальних келерових просторів з обмеженнями на тензор Бохнера, Річчі, Рімана.

Всі основні результати дисертації наведені з повними та строгими математичними доведеннями. Вони носять теоретичний характер. Одержані конструкції, методи та методології можуть бути використані в різних розділах диференціальної геометрії, загальній теорії відносності та механіці суцільного середовища.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Kiosak V. Geodesic mappings of manifolds with affine connection /V. A. Kiosak, J. Mikes, O. Vanzurova// Palacky University, Olomouc. — 2008. — 220p.

2. Kiosak V.A. φ(Ric)–Vector Fields sn Riemannian Spaces/ V.A. Kiosak, I. Hinterleitner //Archivum-mathematicum (Brno). — 2008. — Vol. 44. — P. 385-390.

3. Kiosak V.A. On geodesic mappings of affine connection manifolds/V. A. Kiosak, J. Mikes, I. Hinterleitner // Acta Physica Debrecina (ISSN 1789-6088).— 2008. — Vol.42. — P. 19-28.

4. Kiosak V.A. There are no conformal Einstein rescalings of complete pseudo-Riemannian Einstein metrics/V.A. Kiosak, V.S.Matveev// C. R. Acad. Sci. Paris.— 2009. — Ser. I 347. — P. 1067-1069.

5. Kiosak V.A. Fubini Theorem for pseudo-Riemannian metrics/V. A. Kiosak, A. Bolsinov, V. S. Matveev //Journal of the London Mathematical Society. — 2009. — Vol. 80. — №2. — P. 341-356.

6. Kiosak V.A. Complete Einstein metrics are geodesically rigid/V.A. Kiosak, V.S.Matveev // Comm. Math. Phys.— 2009. — Vol. 289. — №1. — P. 383-400.

7. Kiosak V.A. (Ric)-Vector Fields on Conformally Flat Spaces/V.A. Kiosak, I. Hinterleitner // Proceedings of American Institute of Physics. — 2009. — Vol. 1191. — P. 98-103.

8. Kiosak V.A. Proof of the Projective Lichnerowicz Conjecture for Pseudo-Riemannian Metrics with Degree of Mobility Greater than Two/V. A. Kiosak, V. S. Matveev//Communications in Mathematical Physics, Springer. — 2010. — Vol.297. — P. 401-426.

9. Kiosak V.A. Confomal mappings of Riemannian Spaces which Preserve the Einstein tensor/V. Kiosak, O. Chepurna, J.Mikes//Journal of Applied Mathematics. — 2010. — Vol.III, №1.—P. 253-258.

10. Kiosak V.A. On Geodesic Mappings Preserving the Einstein tensor/V. Kiosak, O. Chepurna, J. Mikes // Acta Univ. Palacki. Olomouc., fac. rer. nat., Mathematika.— 2010. — Vol.49, №2. — P. 49-52.

11. Kiosak V.A. Special Einstein's equations on Kahler manifolds /V. A. Kiosak, I. Hinterleitner// Archivum Mathematicum.— 2010. — Vol. 46, №5. — P. 333–337.

12. Kiosak V. The only closed Kahler manifold with degree of mobility >2 is (CP(n), g-Fubini-Study/V. Kiosak, V. Matveev, A. Fedorova, S. Rosemann // Proc. London Math. Soc.— 2012. — Vol.105, №1. — P. 153-188.

13. Kiosak V. There exist no 4-dimensional geodesically equivalent metrics with the same stress-energy tensor/V. Kiosak, V. Matveev // J. Geom. Phys.— 2014. — Vol.78. — P. 1-11.

14. Киосак В.А. Специальные векторные поля в римановых пространствах/ В.А. Киосак, И. Й. Гинтерлейтнер// Тези доповідей міжнародної конференції „X Белорусская математическая конференция“, Мінськ.— 2008.— С.153.

15. Кіосак В.А. Спеціальні векторні поля в ріманових просторах/ В. А. Кіосак, І. Гінтерлейтнер// Геометрія в Одесі-2008, Тези доповідей міжнародної конференції.— 2008. — С.45.

16. Киосак В. А. О мобильности римановых пространств относительно конформных отображений на пространства Эйнштейна/В.Киосак, Л. Евтушик, Й. Микеш//Известия вузов. Математика. — 2010. — Vol.8. — С. 36-41.

17. Киосак В. А. О степени геодезической подвижности римановых метрик/В.А. Киосак, В.С. Матвеев, Й. Микеш, И.Г.Шандра //Мат. заметки. —2010. — Vol.87, №4. — С. 628-629.

18. Киосак В. А. Голоморфно-проективные отображения келеровых пространств с сохранением тензора Эйнштейна/В. А. Киосак, О. Є. Чепурна//Proceedings international geometry center. — 2010. — т.3, №4. — С. 52-57.

19. Кіосак В. А. Рівняння Ейнштейна в келерових просторах/ В.А. Кіосак, І. Гінтерлейтнер//Геометрія в Одесі-2010, Тези доповідей міжнародної конференції, Одеса.— 2010.— С.20.

20. Киосак В. А. О квази-конциркулярных отображениях псевдоримановых пространств с сохранением тензора Ейнштейна/ В.А. Киосак, Е.Чепурная // Геометрия в Кисловодске-2010. Тезисы международной конференции, Кисловодск.— 2010.— С.42.

21. Киосак В. А. О геодезических отображениях пространств квазипостоянной кривизны/ В.А. Киосак// Материалы 2-й Рос. школы-конференции с международным участием. Математика, информатика, их приложения и роль в образовании. Тезисы докладов. Тверь: Твер. гос. ун-т.— 2010.—С.144-149.

22. Киосак В. А. Инвариантные преобразования с сохранением геодезических/В. А. Киосак, О. Є. Чепурна // Proceedings international geometry center. — 2011.— т.4, №2. — С. 43-50.

23. Кіосак В. А. Про еквідістантні псевдоріманові простори/В. А. Кіосак //Математичні студії, Львов. — 2011.— т.36, №1. — С. 21-25.

24. Кіосак В. А. Про конформні відображення майже Ейнштейнових просторів /В. А. Кіосак//Математичні методи та фізико-механічні поля. — 2011. — т.54, №2. — С. 17-22.

25. Киосак В. А. Конформные отображения с сохранением тензора энергии-импульса/В. А. Киосак //Известия ПГПУ им. Белинского, Пенза. — 2011. — №26. — С. 98-104.

26. Киосак В. А. О слабо конциркулярно симметрических псевдоримановых пространствах/В. А. Киосак, Е.Е.Чепурная// Proceedings international geometry center. — 2011. — т.4, №3. — С. 15-22.

27. Киосак В. А. О геодезических отображениях пространств квазипостоянной кривизны/В. А. Киосак // Proceedings international geometry center. —2011. — т.4, №4. — С. 59-65.

28. Кіосак В.А. Про слабо симетричні псевдоріманові простори/ В. Киосак, О. Чепурна, Є. Черевко //Тези доповідей міжнародної конференції Геометрія в Одесі-2011 Одеса.— 2011.— С.18.

29. Кіосак В.А. Дифеоморфізми узагальнених просторів і моделювання динамічних систем/ В.А. Кіосак, О.Э. Чепурна// 15 International Conference Dynamical system modeling and stability investigation, 24-27 травня, 2011:Київ. —2011.—С.177.

30. Кіосак В. А. Про кількість розв'язків однієї системи алгебраїчних рівнянь/В. А. Кіосак //Proceedings international geometry center. — 2012. — т.5, №2. — С. 43-52.

31. Киосак В. А. Диффеоморфизмы с сохранением тензора Эйнштейна/В. А. Киосак, Е. Е. Чепурная. — Lambert Academic Publishing. — 2012. — 105с.

32. Кіосак В.А Інваріантні перетворення просторів Вейля із збереженням геодезичних/В.А. Кіосак, В.С. Васьковець//XIV Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука, 19-21 квітня, 2012: Київ.—2012.— С. 119.

33. Кіосак В.А. Про конформні відображення на простори Ейнштейна / В.А. Кіосак, М.Л. Гаврильченко// Тези доповідей міжнародної конференції Геометрія в Одесі-2013, Одеса.— 2013.— С. 144.

34. Кіосак В.А. Про спеціальні майже ейнштейнові простори/ В.А. Кіосак// Тези доповідей міжнародної конференції Геометрія і топологія в Одесі-2016, 2-8 червня 2016: Одеса.— 2016.— С.78.

ABSTRACT

Kiosak V.A. Mappings of special pseudo-Riemannian spaces. — Qualification scientific work. Manuscript.

Dissertation in pursuit of scientific degree of doctor of physical and mathematical sciences in specialization 01.01.04 "Geometry and topology ". — "Taras Shevchenko" National University of Kyiv, Institute of mathematics NAS Ukraine, Kyiv, 2017.

Dissertation treats geodesic, conformal and holomorphically projective mappings of pseudo-Riemannian spaces. In order to study general patterns of theory of conformity, the author has found the formulae that connect main tensors, tensor of deformation, Riemannian tensor, Ricci tensor and their first and second covariant derivatives for spaces A_n and $\bar{A}_n$, united by the given mapping. It was achieved by means of modified Norden method. The above-mentioned formulae include such objects as A_n and as $\bar{A}_n$ with covariant derivatives of the relevant connections. In order to simplify matter, the notions of a shortened mapping and its particular case, a half mapping are introduced. Connection that is characteristic for a half mapping is called a medium connection. Previously-known formulae are largely simplified by a transition to covariant derivatives of a medium connection.

A case-study (a mapping that preserves Weil tensor) revealed the way by which the problems of this type are reduced to systems of differential equations.

Due to serious technical difficulties of a local solution of a problem of this type, there is a necessity of spaces and/or mappings specialization.

The concept of a fundamental mapping is introduced. When: $\underset{1}{\alpha} = 1$, $\underset{2}{\alpha} = \underset{3}{\alpha} = 0$, then fundamental mappings became geodesic, in other words – they preserve geodesic lines. Geodesic mappings of spaces of affine connection on the Riemannian spaces are treated. The author has proved that the investigation of geodesics of spaces of affine connection on pseudo-Riemannian spaces can be shortened and simplified in the investigation of geodesic mappings of equi-affine spaces on pseudo-Riemannian spaces.

The author studies geodesic mappings of special pseudo-Riemannian spaces. A particular attention is paid to the investigation of special geodesic mappings that have a tensor $\varphi_{ij} \stackrel{def}{=} \varphi_{i,j} - \varphi_i \varphi_j$, created by vector that defines the given mapping and which is a linear combination of metric tensors of geodesically relevant pseudo-Riemannian spaces.

The characteristic of this type of mappings is found. If the mapping allows a given space V_n, then it will not allow any other mapping. And spaces, that belong to its geodesic classe, allow only the geodesic mappings with a condition that was defined above. We have proved that such spaces include all pseudo-Riemannian spaces with degree of mobility larger than two. The author investigates some geometric properties of them.

The above-mentioned result forms a basis for a proof: four-dimensional Einstein spaces, that have no constant curvature, will not allow non-trivial geodesic mappings. If the order of Einstein space is more than four, then there should be such spaces, without constant curvature, that allow non-trivial geodesic mappings.

An example of such spaces is constructed. It demonstrates that signature of the space has no influence on its property to allow or not to allow geodesic mappings. Geodesic mappings of Kasner spaces are studied as a case-study.

When parameters have special values, fundamental mappings turn into conformal ones. Research on conformal mappings of pseudo-Riemannian spaces is one of the most up-to-date objectives of modern differential geometry. Conformal mappings of pseudo-Riemannian spaces on Einstein spaces were studied. The author defined the lacuna in a distribution of degrees of mobility of pseudo-Riemannian spaces relatively conformal mappings on the Einstein spaces. It is proved that if the degree of mobility of pseudo-Riemannian space V_n is more than one, then Einstein space allows con-circular vector field; a mobility degree of pseudo-Riemannian space V_n to conformal mappings on Einstein spaces equals to number of liner independent con-circular vector fields that are allowed by the Einstein space plus one; the spaces of second lacunarity to conformal mappings on Einstein spaces cannot be the Einstein spaces by themselves.

One more type of fundamental mappings is represented by holomorphic projective mappings, in other words mappings that preserve analytical planar curves. The author has studied holomorphic projective mappings of special Kahler manifolds with limitation of tensor Bochner, Ricci, Riemann.

Key words: geodesic mappings, conformal mappings, holomorphically projective mappings, pseudo-Rimannian spaces, Kahlerian spaces.

АНОТАЦІЯ

Кіосак В.А. Відображення спеціальних псевдоріманових просторів. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.04 "Геометрія і топологія". — Київський Національний Університет імені Тараса Шевченка, Інститут математики НАН України, Київ, 2017.

Дисертація присвячена вивченню геодезичних, конформних та голоморфно-проективних відображень псевдоріманових просторів.

Задача зводиться до якісного дослідження систем диференціальних рівнянь в коваріантних похідних. Введенням додаткових обмежень, спеціалізації просторів, даються відповіді на питання: дозволяють чи не дозволяють вказані простори відображення.

Запропоновано спосіб спеціалізації псевдоріманових просторів по виду внутрішніх об'єктів.

Методи досліджень застосовані при вивчені геодезичних та конформних відображень псевдоріманових просторів та голомофно-проективних відображень келерових просторів.

Ключові слова: геодезичні відображення, конформні відображення,

голоморфно-проективні відображення, псевдоріманові простори, келерові простори.

АННОТАЦИЯ

Киосак В.А. Отображение специальных псевдоримановых пространств. — Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.04 – “Геометрия и топология“. — Киевский Национальный Университет имени Тараса Шевченко, Институт математики НАН Украины, Киев, 2017.

Диссертация посвящена изучению геодезических, конформных и голоморфно-проективных отображений псевдоримановых пространств.

Задача сводится к качественному исследованию систем дифференциальных уравнений в ковариантных производных. Введением дополнительных ограничений, специализации пространств, даются ответы на вопросы: допускают или не допускают указанные пространства отображения.

Предложен способ специализации псевдоримановых пространств по виду внутренних объектов.

Разработанные методы исследований применены при изучении геодезических и конформных отображениий псевдоримановых пространств, а также голомофно-проективных отображений келеровых пространств.

Ключевые слова: геодезические отображения, конформные отображения, голоморфно-проективные отображения, псевдоримановы пространства, келеровы пространства.

Підписано до друку 24.04.2017. Формат 60x84/16. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 2,0. Умов. друк. арк. 1,8.
Тираж 100 пр. Зам. 35.

Інститут математики НАН України,
01004, м. Київ-4, вул. Терещенківська, 3.