КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

К І О С А К В О Л О Д И М И Р А Н А Т О Л І Й О В И Ч

УДК 514.07

ДИСЕРТАЦІЯ

ВІДОБРАЖЕННЯ СПЕЦІАЛЬНИХ ПСЕВДОРІМАНОВИХ ПРОСТОРІВ

01.01.04—геометрія і топологія

111 Математика

Подається на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

____
(підпис, ініціали та прізвище здобувача)

Науковий консультант Пришляк Олександр Олегович, доктор фізико-математичних наук, професор

Київ – 2017

АНОТАЦІЯ

Кіосак В.А. Відображення спеціальних псевдоріманових просторів. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.04 "Геометрія і топологія". — Київський Національний Університет імені Тараса Шевченка, Інститут математики НАН України, Київ, 2017.

Дисертація присвячена вивченню геодезичних, конформних та голоморфно-проективних відображень псевдоріманових просторів.

З метою вивчення загальних закономірностей теорії відображення, модифікуючи методику Нордена, знайдено формули, що пов'язують основні тензори, тензор деформації, тензор Рімана, тензор Річчі та їх перші і другі коваріантні похідні для просторів A_n та $\bar{A}_n$, які пов'язані заданим відображенням. В цих формулах присутні як об'єкти A_n, так і $\bar{A}_n$ з коваріантними похідними по відповідних зв'язностях. Для спрощення, введене поняття укороченого відображення і його спеціального випадку — половинного відображення. Зв'язність, яка випливає при половинному відображенні, названа середньою.

Попередні формули при переході до коваріантних похідних в середній зв'язності значно спрощуються.

На прикладі відображення, що зберігає тензор Вейля, показано, як задачі такого типу зводяться до систем диференціальних рівнянь.

Через значні технічні труднощі локальних розв'язків задач такого типу

виникає необхідність спеціалізації просторів або відображень.

Доведено, як впливає на характер відображення обмеження на внутрішні об'єкти просторів афінної зв'язності A_n. А саме, якщо в двох просторах афінної зв'язності A_n та $\bar{A}_n$ співпадають значення тензорів Рімана R^1_{223} та $\bar{R}^1_{223}$, то відображення за необхідністю набувають спеціального характеру.

Далі розглянуті системи диференціальних рівнянь першого порядку типу Коші.

Відмічена можливість та особливості використання тотожності Річчі в якості умов інтегрування вказаних систем.

Введено поняття фундаментальних відображень. Коли $\underset{1}{\alpha} = 1$, а $\underset{2}{\alpha} = \underset{3}{\alpha} = 0$, то фундаментальні відображення стають геодезичними, тобто при них зберігаються геодезичні лінії.

Розглянуті геодезичні відображення просторів афінної зв'язності на пседоріманові простори.

Доведено, що вивчення геодезичних відображень просторів афінної зв'язності на псевдоріманові простори можна вкоротити і звести до розгляду геодезичних відображень еквіафінних просторів на псевдоріманові простори.

Спеціалізація псевдоріманових просторів, як засіб введення додаткових обмежень в перевизначені системи рівнянь, має два основних джерела. По-перше, це геометричні умови об'єктів, що досліджуються, по-друге, це технологічні можливості методів дослідження. Враховуючи ці засоби та маючи на увазі дослідження відображень, запропоновано метод спеціалізації псевдоріманових просторів за типом внутрішніх об'єктів.

Серед псевдоріманових просторів, що дозволяють спеціальний вид метрики в деякій системі координат, виділені звідні та напівзвідні простори. Вивчені їх тензорні ознаки та, спираючись на це, деякі геометричні властивості.

У теорії спеціальних псевдоріманових просторів особливе місце займають симетричні і рекурентні простори. Узагальнення цих просторів йшло в основному в двох напрямах: збільшення порядку коваріантних похідних і розгляд в якості симетричних (рекурентних) інших тензорів. Природним чином виник новий тип рекурентності — слабка симетричність.

Якщо узагальнення рекурентних псевдоріманових просторів вести шляхом алгебраїчних умов, то ми прийдемо до псевдоріманових просторів із спеціальною векторною оболонкою. Їх вивчення ведеться з допомогою удосконалення метода В. Кайгородова. Узагальнення симетричних псевдоріманових просторів приводить до гармонійних просторів. Для двохвалентних тензорів найбільш вдалою є запропонована С. Степановим для тензора енергії–імпульсу методика розбиття на класи Ω. Модифікувавши її, застосовуємо для спеціалізації двічі коваріантних внутрішніх тензорів.

Розглянуті геодезичні відображення спеціальних псевдоріманових просторів. Особливу увагу приділено вивченню спеціальних геодезичних відображень, при яких тензор $\varphi_{ij} \overset{def}{=} \varphi_{i,j} - \varphi_i\varphi_j$, утворений вектором, що задає дане відображення, є лінійною комбінацією метричних тензорів геодезично відповідних псевдоріманових просторів.

Знайдено особливість такого типу відображень, а саме, якщо таке відображення дозволяє заданий простір V_n, то він не дозволяє ніяких інших відображень. А простори, що належать до його геодезичного класу також дозволяють лише геодезичні відображення з умовою, вказаною вище. Доведено, що до таких просторів належать всі псевдоріманові простори, степінь мобільності яких більше двох. Вивчено деякі їх геометричні властивості. Спираючись на це, доведено, що чотирьохвимірні простори Ейнштейна, відмінні від просторів сталої кривини, не дозволяють нетривіальних геодезичних відображень. Якщо розмірність простору Ейнштейна більше чотирьох, то існують такі простори, відмінні від просторів сталої кривини, що дозволяють нетривіальні геодезичні відображення. Наведено приклад таких просторів, на якому показано, що сигнатура простору не впливає на його властивість дозволяти чи не дозволяти геодезичні відображення. Також, для прикладу досліджено геодезичні відображення просторів Казнера.

При спеціальних значеннях параметрів фундаментальні відображення стають конформними.

Вивчені простори, в яких при геодезичних відображеннях зберігаються відповідні об'єкти. Наведено умови, яким задовольняють псевдоріманові простори, в яких при геодезичних відображеннях зберігаються внутрішні тензори, їх коваріантні похідні та інші властивості.

Вивчення конформних відображень псевдоріманових просторів — це одна з актуальних задач сучасної диференціальної геометрії.

Розглянуті конформні відображення псевдоріманових просторів на простори Ейнштейна. Оцінена лакуна в розподілі степенів мобільності псевдоріманових просторів відносно конформних відображень на простори

Ейнштейна.

Доведено, якщо степінь мобільності псевдоріманового простору V_n відносно конформних відображень на простори Ейнштейна більше одиниці, то простір Ейнштейна дозволяє конциркулярне векторне поле; степінь мобільності псевдоріманового простору V_n відносно конформних відображень на простори Ейнштейна на одиницю більша від кількості лінійно незалежних конциркулярних векторних полів, що їх дозволяє простір Ейнштейна; серед просторів другої лакунарності відносно конформних відображень на простори Ейнштейна не може бути просторів Ейнштейна.

Розроблені методи застосовані в теорії геодезичних деформацій гіперповерхонь довільних псевдоріманових просторів. Розв'язок зведено до вивчення системи диференціальних рівнянь типу Коші в коваріантних похідних. Запропоновані формули переходу дозволяють переносити результати отримані в теорії геодезичних відображень на дослідження геодезичних деформацій.

Ще одним видом фундаментальних відображень є голоморфно-проективні відображення, тобто відображення, при яких зберігаються аналітично-планарні криві. Досліджено голоморфно-проективні відображення спеціальних келерових просторів з обмеженнями на тензор Бохнера, Річчі, Рімана.

Ключові слова: геодезичні відображення, конформні відображення, голоморфно-проективні відображення, псевдоріманові простори, келерові простори.

Abstract

Kiosak V.A. Mappings of special pseudo-Riemannian spaces. — Qualification scientific work. Manuscript

Dissertation in pursuit of scientific degree of doctor of physical and mathematical sciences in specialization 01.01.04 “Geometry and topology “. — “Taras Shevchenko“ National University of Kyiv, Institute of mathematics NAS Ukraine, Kyiv, 2017.

Dissertation treats geodesic, conformal and holomorphically projective mappings of pseudo-Riemannian spaces.

In order to study general patterns of theory of conformity, the author has found the formulae that connect main tensors, tensor of deformation, Riemannian tensor, Ricci tensor and their first and second covariant derivatives for spaces A_n and $\bar{A}_n,$ united by the given mapping. It was achieved by means of modified Norden method. The above-mentioned formulae include such objects as A_n and as $\bar{A}_n$ with covariant derivatives of the relevant connections. In order to simplify matter, the notions of a shortened mapping and its particular case, a half mapping are introduced. Connection that is characteristic for a half mapping is called a medium connection.

Previously-known formulae are largely simplified by a transition to covariant derivatives of a medium connection.

A case-study (a mapping that preserves Weil tensor) revealed the way by which the problems of this type are reduced to systems of differential equations.

Due to serious technical difficulties of a local solution of a problem of this

type, there is a necessity of spaces and/or mappings specialization.

A limitation of inner object of spaces of affine connection A_n influences the exact nature of a mapping in a certain way. In particular, if two spaces of affine connection A_n and $\bar{A}_n$ have the same value of Riemannian tensors R^1_{223} and $\bar{R}^1_{223}$, then the mappings obtain special character by necessity.

Then, systems of first-order differential equations of Cauchy type are studied.

The author notes the possibilities and peculiarities of application of Ricci identity as an integration condition for the above-mentioned system.

The concept of a fundamental mapping is introduced. When: $\underset{1}{\alpha} = 1$, $\underset{2}{\alpha} = \underset{3}{\alpha} = 0$, then fundamental mappings became geodesic, in other words – they preserve geodesic lines.

Geodesic mappings of spaces of affine connection on the Riemannian spaces are treated.

The author has proved that the investigation of geodesics of spaces of affine connection on pseudo-Riemannian spaces can be shortened and simplified in the investigation of geodesic mappings of equi-affine spaces on pseudo-Riemannian spaces.

Specialization of pseudo-Riemannian spaces has two main sources as a way to introduce additional limitations in re-defined systems of equations. The former source is the geometric conditions of the objects under study. The latter one consists in technological possibilities of investigation methods. Taking into account these means and considering the investigation of mappings, the author proposes method of specialization of Riemannian space by a type of inner objects.

Product and wrapped-product spaces are defined among pseudo-Riemannian spaces that allow special type of metrics in a given system of coordinates. Their tensor characteristics are studied and following this way - also their geometric peculiarities.

Symmetrical and recurrent spaces play important role in the theory of special pseudo-Riemannian spaces. Generalization of these spaces went along two paths: by increasing the order of covariant derivatives and by treatment of other tensors as symmetrical and recurrent ones. Naturally, the new type of recurrence, a weak symmetry, was created.

In case the generalization of recurrent pseudo-Riemannian spaces is carried out by means of algebraic limitations, we arrive at pseudo-Riemannian spaces with a special vector shell. The latter is studied by optimized method of V. Kaigorodov.

The generalization of symmetrical pseudo-Riemannian spaces leads us to harmonic spaces. The method of S. Stepanov was proposed for tensor energy-impulse. It is based on the dividing in classes Ω. This method is best suited for two-valent tensors. After modification it can be applied for specialization of twice covariant inner tensors.

The author studies geodesic mappings of special pseudo-Riemannian spaces. A particular attention is paid to the investigation of special geodesic mappings that have a tensor $\varphi_{ij} \stackrel{def}{=} \varphi_{i,j} - \varphi_i\varphi_j$, created by vector that defines the given mapping and which is a linear combination of metric tensors of geodesically relevant pseudo-Riemannian spaces.

The characteristic of this type of mappings is found. If the mapping allows a given space V_n, then it will not allow any other mapping. And spaces, that belong to its geodesic classe, allow only the geodesic mappings with a condition that was defined above. We have proved that such spaces include all pseudo-Riemannian spaces with degree of mobility larger than two. The author investigates some geometric properties of them.

The above-mentioned result forms a basis for a proof: four-dimensional Einstein spaces, that have no constant curvature, will not allow non-trivial geodesic mappings. If the order of Einstein space is more than four, then there should be such spaces, without constant curvature, that allow non-trivial geodesic mappings.

An example of such spaces is constructed. It demonstrates that signature of the space has no influence on its property to allow or not to allow geodesic mappings. Geodesic mappings of Kasner spaces are studied as a case-study.

When parameters have special values, fundamental mappings turn into conformal ones.

The author has studied some spaces which preserve relevant object under geodesic mapping. The conditions of preservation of inner tensors, their covariant derivatives, and other properties for pseudo-Riemannian spaces under geodesic mappings.

Research on conformal mappings of pseudo-Riemannian spaces is one of the most up-to-date objectives of modern differential geometry.

Conformal mappings of pseudo-Riemannian spaces on Einstein spaces were studied. The author defined the lacuna in a distribution of degrees of mobility of pseudo-Riemannian spaces relatively conformal mappings on the Einstein spaces.

It is proved that if the degree of mobility of pseudo-Riemannian space V_n is more than one, then Einstein space allows con-circular vector field; a mobility degree of pseudo-Riemannian space V_n to conformal mappings on Einstein spaces equals to number of liner independent con-circular vector fields that are allowed by the Einstein space plus one; the spaces of second lacunarity to conformal mappings on Einstein spaces cannot be the Einstein spaces by themselves.

The developed methods were applied in the theory of geodesic transformations of hyper-surfaces of any pseudo-Riemannian space.

The solution is simplified to a study of system of differential equations of Cauchy type in covariant derivatives. The proposed formulae of transition permits the transfer of results obtained in theory of geodesic mappings to the field of geodesic deformations.

One more type of fundamental mappings is represented by holomorphic projective mappings, in other words mappings that preserve analytical planar curves. The author has studied holomorphic projective mappings of special Kahler manifolds with limitation of tensor Bochner, Ricci, Riemann.

Key words: geodesic mappings, conformal mappings, holomorphically projective mappings, pseudo-Rimannian spaces, Kahlerian spaces.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Kiosak V. Geodesic mappings of manifolds with affine connection /V. A. Kiosak, J. Mikes, O. Vanzurova// Palacky University, Olomouc. — 2008. — 220p.

2. Kiosak V.A. φ(Ric)–Vector Fields sn Riemannian Spaces/ V.A. Kiosak, I. Hinterleitner //Archivum-mathematicum (Brno). — 2008. — Vol. 44. — P. 385-390.

3. Kiosak V.A. On geodesic mappings of affine connection manifolds/V. A. Kiosak, J. Mikes, I. Hinterleitner // Acta Physica Debrecina (ISSN 1789-6088).— 2008. — Vol.42. — P. 19-28.

4. Kiosak V.A. There are no conformal Einstein rescalings of complete pseudo-Riemannian Einstein metrics/V.A. Kiosak, V.S.Matveev// C. R. Acad. Sci. Paris.— 2009. — Ser. I 347. — P. 1067-1069.

5. Kiosak V.A. Fubini Theorem for pseudo-Riemannian metrics/V. A. Kiosak, A. Bolsinov, V. S. Matveev //Journal of the London Mathematical Society. — 2009. — Vol. 80. — №2. — P. 341-356.

6. Kiosak V.A. Complete Einstein metrics are geodesically rigid/V.A. Kiosak, V.S.Matveev // Comm. Math. Phys.— 2009. — Vol. 289. — №1. — P. 383-400.

7. Kiosak V.A. (Ric)-Vector Fields on Conformally Flat Spaces/V.A. Kiosak, I. Hinterleitner // Proceedings of American Institute of Physics. — 2009. — Vol. 1191. — P. 98-103.

8. Kiosak V.A. Proof of the Projective Lichnerowicz Conjecture for Pseudo-Riemannian Metrics with Degree of Mobility Greater than Two/V. A. Kiosak, V. S. Matveev//Communications in Mathematical Physics, Springer. — 2010. — Vol.297. — P. 401-426.

9. Kiosak V.A. Confomal mappings of Riemannian Spaces which Preserve the Einstein tensor/V. Kiosak, O. Chepurna, J.Mikes//Journal of Applied Mathematics. — 2010. — Vol.III, №1.—P. 253-258.

10. Kiosak V.A. On Geodesic Mappings Preserving the Einstein tensor/V. Kiosak, O. Chepurna, J. Mikes // Acta Univ. Palacki. Olomouc., fac. rer. nat., Mathematika.— 2010. — Vol.49, №2. — P. 49-52.

11. Kiosak V.A. Special Einstein's equations on Kahler manifolds /V. A. Kiosak, I. Hinterleitner// Archivum Mathematicum.— 2010. — Vol. 46, №5. — P. 333–337.

12. Kiosak V. The only closed Kahler manifold with degree of mobility >2 is (CP(n), g-Fubini-Study/V. Kiosak, V. Matveev, A. Fedorova, S. Rosemann // Proc. London Math. Soc.— 2012. — Vol.105, №1. — P. 153-188.

13. Kiosak V. There exist no 4-dimensional geodesically equivalent metrics with the same stress-energy tensor/V. Kiosak, V. Matveev // J. Geom. Phys.— 2014. — Vol.78. — P. 1-11.

14. Киосак В.А. Специальные векторные поля в римановых пространствах/ В.А. Киосак, И. Й. Гинтерлейтнер// Тези доповідей міжнародної конференції „X Белорусская математическая конференция“, Мінськ.— 2008.— С.153.

15. Кіосак В.А. Спеціальні векторні поля в ріманових просторах/ В. А. Кіосак, І. Гінтерлейтнер// Геометрія в Одесі-2008, Тези доповідей міжнародної конференції.— 2008. — С.45.

16. Киосак В. А. О мобильности римановых пространств относительно конформных отображений на пространства Эйнштейна/В.Киосак, Л. Евтушик, Й. Микеш//Известия вузов. Математика. — 2010. — Vol.8. — С. 36-41.

17. Киосак В. А. О степени геодезической подвижности римановых метрик/В.А. Киосак, В.С. Матвеев, Й. Микеш, И.Г.Шандра //Мат. заметки. —2010. — Vol.87, №4. — С. 628-629.

18. Киосак В. А. Голоморфно-проективные отображения келеровых пространств с сохранением тензора Эйнштейна/В. А. Киосак, О. Є. Чепурна//Proceedings international geometry center. — 2010. — т.3, №4. — С. 52-57.

19. Кіосак В. А. Рівняння Ейнштейна в келерових просторах/ В.А. Кіосак, І. Гінтерлейтнер//Геометрія в Одесі-2010, Тези доповідей міжнародної конференції, Одеса.— 2010.— С.20.

20. Киосак В. А. О квази-конциркулярных отображениях псевдоримановых пространств с сохранением тензора Ейнштейна/ В.А. Киосак, Е.Чепурная // Геометрия в Кисловодске-2010. Тезисы международной конференции, Кисловодск.— 2010.— С.42.

21. Киосак В. А. О геодезических отображениях пространств квазипостоянной кривизны/ В.А. Киосак// Материалы 2-й Рос. школы-конференции с международным участием. Математика, информатика,

их приложения и роль в образовании. Тезисы докладов. Тверь: Твер. гос. ун-т.— 2010.—С.144-149.

22. Киосак В. А. Инвариантные преобразования с сохранением геодезических/В. А. Киосак, О. Є. Чепурна // Proceedings international geometry center. — 2011.— т.4, №2. — С. 43-50.

23. Кіосак В. А. Про еквідістантні псевдоріманові простори/В. А. Кіосак //Математичні студії, Львов. — 2011.— т.36, №1. — С. 21-25.

24. Кіосак В. А. Про конформні відображення майже Ейнштейнових просторів /В. А. Кіосак//Математичні методи та фізико-механічні поля. — 2011. — т.54, №2. — С. 17-22.

25. Киосак В. А. Конформные отображения с сохранением тензора энергии-импульса/В. А. Киосак //Известия ПГПУ им. Белинского, Пенза. — 2011. — №26. — С. 98-104.

26. Киосак В. А. О слабо конциркулярно симметрических псевдоримановых пространствах/В. А. Киосак, Е.Е.Чепурная// Proceedings international geometry center. — 2011. — т.4, №3. — С. 15-22.

27. Киосак В. А. О геодезических отображениях пространств квазипостоянной кривизны/В. А. Киосак // Proceedings international geometry center. —2011. — т.4, №4. — С. 59-65.

28. Кіосак В.А. Про слабо симетричні псевдоріманові простори/ В. Киосак, О. Чепурна, Є. Черевко //Тези доповідей міжнародної конференції Геометрія в Одесі-2011 Одеса.— 2011.— С.18.

29. Кіосак В.А. Дифеоморфізми узагальнених просторів і моделювання динамічних систем/ В.А. Кіосак, О.Э. Чепурна// 15 International Con-

ference Dynamical system modeling and stability investigation, 24-27 травня, 2011:Київ. —2011.—С.177.

30. Кіосак В. А. Про кількість розв'язків однієї системи алгебраїчних рівнянь/В. А. Кіосак //Proceedings international geometry center. — 2012. — т.5, №2. — С. 43-52.

31. Киосак В. А. Диффеоморфизмы с сохранением тензора Эйнштейна/В. А. Киосак, Е. Е. Чепурная. — Lambert Academic Publishing. — 2012. — 105с.

32. Кіосак В.А Інваріантні перетворення просторів Вейля із збереженням геодезичних/В.А. Кіосак, В.С. Васьковець//XIV Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука, 19-21 квітня, 2012: Київ.—2012.—С. 119.

33. Кіосак В.А. Про конформні відображення на простори Ейнштейна / В.А. Кіосак, М.Л. Гаврильченко// Тези доповідей міжнародної конференції Геометрія в Одесі-2013, Одеса.— 2013.— С. 144.

34. Кіосак В.А. Про спеціальні майже ейнштейнові простори/ В.А. Кіосак// Тези доповідей міжнародної конференції Геометрія і топологія в Одесі-2016, 2-8 червня 2016: Одеса.— 2016.— С.78 .

Зміст

Основні поняття та позначення

Наведемо основні поняття та позначення теорії афіннозв'язних (A_n) і ріманових (V_n) просторів, слідуючи, головним чином, за [18, 170, 178].

В просторі афінної зв'язності без скруту A_n, який віднесений до локальної системи координат $x \equiv (x^1, x^2, \ldots, x^n)$, поряд з об'єктом афінної зв'язності $\Gamma^h_{ij}(x)$ $\;h, i, j = 1, \ldots, n$, розглядаються тензори Рімана, Річчі і проективної кривини Вейля, які визначаються наступним чином:

$$R^h_{ijk} \stackrel{def}{=} \partial_j \Gamma^h_{ki} + \Gamma^\alpha_{ki}\Gamma^h_{j\alpha} - \partial_k \Gamma^h_{ji} - \Gamma^\alpha_{ji}\Gamma^h_{k\alpha},$$

$$R_{ij} \stackrel{def}{=} R^\alpha_{ij\alpha},$$

$$W^h_{ijk} \stackrel{def}{=} R^h_{ijk} - \frac{1}{n-1}\left(\delta^h_k R_{ij} - \delta^h_j R_{ik}\right) +$$

$$+\frac{1}{n+1}\left(\delta^h_i R_{[jk]} - \frac{1}{n-1}\left(\delta^h_k R_{[ji]} - \delta^h_j R_{[ki]}\right)\right),$$

де δ^h_i — символи Кронекера, $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}$, $[i\,j]$ означає альтернування без ділення, по однойменним індексам коваріантним і контраваріантним маємо на увазі сумування. Еквіафінним простором називається простір A_n, в якому виконується $R_{ij} = R_{ji}$. Простір, в якому має місце $R^h_{ijk} = 0\,(R_{ij} = 0)$, називають пласким (Річчі-пласким).

В псевдорімановому просторі V_n, який визначений симетричним невиродженим тензором g_{ij}, визначають символи Христофеля I-го і IIго родів: $\Gamma_{ijk} \overset{def}{=} \frac{1}{2}(\partial_{(i}g_{j)k} - \partial_k g_{ik})$, $\Gamma^h_{ij} \overset{def}{=} g^{h\alpha}\Gamma_{ij\alpha}$, де g^{ij} — елементи оберненої матриці до $\|g_{ij}\|$, $(i\,j)$ означає симетрування без ділення. На сигнатуру метрики, якщо не вимагається іншого, не накладаємо ніяких умов. Коваріантну похідну по зв'язності V_n будемо позначать через кому, наприклад, $g_{ij,k}$, а в A_n — ∇. Псевдоріманів простір є еквіафінним. Простір V_n належить до клусу C^r ($V_n \in C^r$), якщо $g_{ij} \in C^r$.

За допомогою g_{ij} і g^{ij} в V_n визначають операцію піднімання та опускання індексів, наприклад: $R_{hijk} \overset{def}{=} g_{h\alpha}R^{\alpha}_{ijk}$, $R^{h\ \ k}_{\cdot\, ij.} \overset{def}{=} g^{k\alpha}R^h_{ij\alpha}$, $R^h_i \overset{def}{=} g^{h\alpha}R_{\alpha i}$.

Спрощується означення тензора Вейля в V_n.

$$W^h_{ijk} \overset{def}{=} R^h_{ijk} - \frac{1}{n-1}(\delta^h_k R_{ij} - \delta^h_j R_{ik}).$$

В V_n визначається скалярна кривина $R \overset{def}{=} R_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$, тензори Брінкмана і конформної кривини Вейля:

$$L_{ijk} \overset{def}{=} \frac{1}{n-2}(R_{ij} - \frac{R}{2(n-1)}g_{ij});\ C_{hijk} \overset{def}{=} R_{hijk} - g_{h[k}L_{j]i} + g_{i[k}L_{j]h}.$$

Розглянемо конкретне відображення (дифеоморфізм) просторів, наприклад: $f : V_n \to \bar{V}_n$, які віднесемо до спільної по цьому відображенню системи координат x. Ця координатна система характеризується властивістю, що відповідні точки $M \in V_n$ і $f(M) \in \bar{V}_n$ мають однакові координати $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$. Відповідні геометричні об'єкти в $\bar{V}_n$ будемо позначати рискою. Наприклад, $\bar{R}^h_{ijk}$ і $\bar{R}_{ij}$ є тензорами Рімана і Річчі простору $\bar{V}_n$.

Нижче наведемо основні скорочення, які використаємо в дисертації:

* A_n — простір афінної зв'язності;
* V_n — псевдоріманів простір;
* K_n — келерів простір;
* C_n — конформно-плаский простір;

* ПСК — простір сталої кривини;
* ПЕ — псевдоріманів простір Ейнштейна;
* ГВ — геодезичне відображення;
* КВ — конформне відображення;
* ГПВ — голоморфно-проективне відображення;
* НГВ — нетривіальні ГВ;
* НКВ — нетривіальні КВ;
* НГПВ — нетривіальні ГПВ.

Вступ

Актуальність теми дослідження.

Дифеоморфізми узагальнених геометричних просторів утворюють один із актуальних напрямків сучасної диференціальної геометрії.

Побудова класичної теорії відображень бере свій початок в середині XIX сторіччя в працях італійського геометра Є. Бельтрамі, який розглянув відображення поверхонь на площину такі, що геодезичні лінії переходять в прямі. З розвитком тензорного аналізу та його застосуванням в диференціальній геометрії були отримані базові фундаментальні результати в роботах Т. Леві-Чивіти, Г. Вейля, Т. Томаса.

В теорії відображень працювала велика кількість вчених як математиків, так і фізиків, зацікавлених в застосуванні результатів для моделювання динамічних процесів. Як відомо, рух деяких типів механічних систем, багато процесів в гравітаційних та електромагнітних полях, в суцільних середовищах протікають за траєкторіями, які можна розглядати, як геодезичні лінії афіннозв'язного або псевдоріманового простору, що визначаються енергетичним режимом, при якому зовнішні сили відсутні, або за деякими кривими, вектор кривини яких — це вектор узагальнених зовнішніх сил.

Відбулась спеціалізація відображень та були сформовані три основних напрямки:

1. Вивчення основних закономірностей відображень.
2. Для заданого узагальненого простору та спеціального відображення

пошук відповіді на питання: дозволяє чи не дозволяє він відображення.

3. Для заданої пари просторів знайти відображення, яке їх пов'язує.

Сформувались математичні школи, представники яких працювали в цих напрямках:

- Казанська геометрична школа (П.А. Широков, В.Р. Кайгородов, А. П. Норден, А.В. Амінова);

- Московська геометрична школа (П.К. Рашевський, В.Г. Кручкович, А. С. Солодовніков, В.Ф. Кириченко);

- Київська школа (О.З. Петров);

- Пензенська геометрична школа (І.П. Єгоров);

- Японська школа (К. Яно);

- Румунська школа (Г. Вренчану).

Серед новітніх шкіл слід відзначити Вроцлавську школу (Р. Дешч); Оломоуцьку школу (Й. Мікеш); Йенську школу (В. С. Матвєєв); Австралійську школу (М. Іствуд).

Особливе місце в розвитку теорії відображень займає Одеська геометрична школа. Хоча формально школа бере початок від В. Ф. Кагана, основні успіхи пов'язані з роботами професора М.С. Сінюкова та його учнів М.Л. Гаврильченка, С.Г. Лейка, Й. Мікеша, І.М. Курбатової, Н. В. Яблонської, О. М. Сінюкової та інших.

Вивчення відображень зводиться до системи диференціальних рівнянь. Система диференціальних рівнянь приводить до алгебраїчної системи, що представляє собою умови інтегрування. Частіше за все, ці системи перевизначені, вводячи додаткові обмеження, їх спрощують або інтегрують.

Таким чином, геометричні питання розв'язуються методами лінійної алгебри, зокрема, такі як

- геодезичні відображення псевдоріманових просторів;

- геодезичні відображення просторів афінної зв'язності на псевдоріманові простори;

- геодезичні відображення бервальдових просторів на псевдоріманові простори;

- геодезичні деформації гіперповерхонь псевдоріманових просторів;

- конформні відображення псевдоріманових просторів на простори Ейнштейна;

- голоморфно-проективні відображення келерових просторів;

- майже геодезичні відображення просторів афінної зв'язності та ін.

Зауважимо, що принципова можливість локального розв'язку цих задач поєднується з серйозними труднощами технічного характеру. Тому зберігає актуальність задача вивчення внутрішніх тензорних характеристик узагальнених просторів, що дозволяють чи не дозволяють вказані відображення. Це, в свою чергу, приводить до спеціалізації просторів або до спеціалізації відображень.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана в рамках теми наукових досліджень кафедри геометрії, топології та динамічних систем механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (№ держреєстрації 16БФО38-01) і пов'язана з науковими темами, які розроблялись в Університеті Палацького, м. Оломоуц (Чехія) (№ держреєстрації MSM 6198959214), за програмою гранту Грантової агенції Чеської республіки, відповідає планам співпраці за договором між Університетом ім. Палацького м. Оломоуц, Чеська республіка і Одеським Національним політехнічним університетом, і відповідає держбюджетній дослідницькій темі №162 „Дослідження диференціальної геометрії відображень многовидів" (0106U0123135) Україна. А також за програмами Університету Шіллера, м. Йена, Німеччина (DFG Priority Program 1154 - „Global Differential Geometry"; DFG MA 2565/2 „H-projectivety equivalent metrics"; Research Training Group 1523 „Quantum and Gravitational Fields").

Мета та завдання дослідження.

Метою дисертаційної роботи є знаходження нових характеристик псевдоріманових і афіннозв'язних просторів та їх відображень.

Об'єктом дослідження є спеціальні псевдоріманові, афіннозв'язні та келерові простори і їх геодезичні, конформні та голоморфно-проективні відображення.

Предметом дослідження є диференціальні рівняння, їх умови інтегрованості та диференціальні продовження, які характеризують те, дозволяє чи не дозволяє заданий узагальнений простір вказаний тип відображення. Системи рівнянь, що задають вказані відображення, зводяться до перевизначеної системи алгебраїчних рівнянь. Шляхом введення додаткових обмежень спеціалізації просторів розв'язуються задачі описання геометричних характеристик афіннозв'язних, псевдоріманових та келерових просторів, що дозволяють чи не дозволяють геодезичні, конформні та голоморфно-проективні відображення.

Методи дослідження — це класичні методи дослідження ріманової геометрії. Дослідження ведуться локально, в класі достатньо гладких функцій з використанням тензорних методів, без обмежень на знаковизначеність та сигнатуру метрики.

Наукова новизна отриманих результатів: полягає в розробці методів спеціалізації відображень узагальнених просторів в залежності від типу простору та задач, які досліджуються.

Всі результати, отримані в дисертації, є новими і полягають у наступному

1. Обґрунтовано загальний підхід до спеціалізації як методу дослідження відображення узагальнених просторів.
2. Запропоновано спеціалізацію псевдоріманових просторів за видом метрики та внутрішніх об'єктів.
3. Удосконалено методи дослідження відображень псевдоріманових просторів із збереженням властивостей просторів та об'єктів.
4. Знайдено вид лінійної форми основних рівнянь теорії геодезичних відображень псевдоріманових просторів в залежності від потужності геодезичного класу.
5. Доведено, що чотиривимірні простори Ейнштейна відмінні від просторів сталої кривини однозначно визначаються своїми геодезичними лініями.

6. Обґрунтовано, що сигнатура простору Ейнштейна не впливає на його геодезичне відображення.

7. Побудована нескінченна послідовність псевдоріманових просторів, що пов'язані геодезичним відображенням.

8. Визначено особливість застосування розроблених методів для дослідження конформних відображень.

9. Запропоновано методику поширення методів теорії геодезичних відображень псевдоріманових просторів в теорії голоморфно-проективних відображень келерових просторів.

Практичне значення отриманих результатів.

Дисертація носить характер фундаментально-теоретичного дослідження. Результати, отримані в дисертації, це природний розвиток відомих результатів теорії геодезичних і конформних відображень псевдоріманових просторів, голоморфно-проективних відображень келерових просторів, і тому, є теоретично цінними з точки зору диференціальної геометрії. Також вони можуть бути використані в загальній теорії відносності і теоретичній механіці при моделюванні фізичних процесів.

Особистий внесок автора.

Дисертація є самостійною науковою працею, в якій висвітлені власні ідеї і розробки автора, що дозволили вирішити поставлені завдання. Робота містить теоретичні та методичні положення і висновки, сформульовані дисертантом особисто. Використані в дисертації ідеї, положення чи гіпотези інших авторів мають відповідні посилання і використані лише для підкріплення ідей здобувача. Результати, що належать співавторам, наводяться в дисертації за необхідністю для повноти опису того кола питань і методів для їх розв'язування, які вивчаються автором дисертації.

Апробація результатів.

Матеріали дисертації доповідались на міському геометричному семінарі Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна, на геометричному семінарі математичного відділення ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна НАН України, на семінарі "Топологія та її застосування" Львівського національного університету ім. Івана Франка, на геометричному семінарі інституту Прикладних Проблем Механіки і Математики НАН України ім. Я. Підстригача, на семінарі кафедри геометрії, топології та динамічних систем Київського національного університету ім. Тараса Шевченка, на семінарі відділу геометрії і топології Інституту математики НАН України.

Основні результати дисертації доповідались на таких конференціях: "X Белорусская математическая конференция", (Мінськ, Білорусь, 2008); International Conference "Геометрия в Кисловодске-2009"; International Conference "Геометрия в Кисловодске-2010"; 2-я Рос. школа-конференція з міжнародною участю. "Математика, информатика, их приложения и роль в образовании". Росія, Твер, 2010; "Міжнародна конференція "Aplimath"", 2010, 2011, Братислава; 15 International Conference „Dynamical system modeling and stability investigation", Київ, 2011; XIV Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука, Київ, 2012; Міжнародна конференція "Топологія та її застосування" Львівського національного університету ім. Івана Франка, Львів, 2015; Міжнародна конференція "Геометрія в Одесі", Одеса (2008 - 2016).

Публікації.

За результатами дослідження опубліковано 34 наукові праці, з них - 22 наукові статті у фахових виданнях [38] – [49], [133] – [135], [139] – [144], [147], 2 монографії [37, 148] та 10 тез доповідей на наукових конференціях [131], [132],[136] – [138], [145] – [151].

Структура та об'єм дисертації.

Дисертація складається із вступу, п'яти розділів, висновку та списку літератури. Розділи розбиті на параграфи. Кожен розділ має висновок. Для формул і теорем застосовується потрійна нумерація: перша цифра означає номер розділу, друга — номер параграфу, а третя — номер формули в цьому параграфі. Загальний об'єм дисертації **317** сторінок. Основний текст викладено на **270** сторінках. Список використаної літератури включає **197** найменувань.

Наостанок автор висловлює подяку своєму науковому консультанту доктору фізико-математичних наук, професору О.О. Пришляку за постійну увагу до роботи та корисні обговорення. Також дякую співавторам з Чехії: професору Й. Мікешу, доценту І. Гінтерляйтнер та доценту А. Ванжуровій; з Німеччини: професору В.С. Матвєєву, професору С. Роземану, доктору А.Федоровій; з Велокобританії професору А. Болсінову. Особлива подяка доценту М.Л. Гаврильченко за постійну підтримку і консультації.

Розділ 1

Спеціальні відображення просторів афінної зв'язності

Зв'язності в диференціальній геометрії виникли сто років тому в роботах Туліо Леві-Чивіти (1917 рік), а згодом Г. Вейль (1920 рік), вивчаючи питання про паралельне перенесення векторів, прийшов до просторів афінної зв'язності.

Цей розділ присвячено вивченню відображень просторів афінної зв'язності.

1.1 Про відображення узагальнених просторів

Джерела теорії відображень знаходять в роботі давньогрецького математика Аполонія Пергського „Конічні перерізи“, де вивчаються інверсії відносно кола, еліпса, параболи, гіперболи. Потім була робота Лагранжа по вивченню динамічних систем і їх моделюванню.

Побудова класичної теорії відображень бере свій початок в середині XIX сторіччя в працях італійського геометра Є. Бельтрамі, який розглянув відображення поверхонь на площину такі, що геодезичні лінії переходять в прямі. З розвитком тензорного аналізу та його застосуванням в диференціальній геометрії були отримані базові фундаментальні результати в роботах Т. Леві-Чивіти, Г. Вейля, Т. Томаса [54, 107, 93] .

В теорії відображень працювала велика кількість вчених як математиків, так і фізиків, зацікавлених в застосуванні результатів для моделювання динамічних процесів. Як відомо, рух деяких типів механічних систем, багато процесів в гравітаційних та електромагнітних полях, в суцільних середовищах протікають за траєкторіями, які можна розглядати, як геодезичні лінії афіннозв'язного або псевдоріманового простору, що визначаються енергетичним режимом, за якого зовнішні сили відсутні, або за деякими кривими, вектор кривини яких — це вектор узагальнених зовнішніх сил.

Вивчення відображень (морфізмів) різних типів геометричних структур складає актуальну частину сучасної диференціальної геометрії. Під відображенням в сучасній геометрії розуміють дифеоморфізм, що зберігає ті чи інші властивості геометричних об'єктів. Центральною в сучасній геометрії є структура афінної зв'язності, як така, що має широке застосування.

Відбулась спеціалізація відображень та були сформовані три основних напрямки робіт:

1. Вивчення основних закономірностей відображень.

2. Для заданого узагальненого простору та спеціального відображення пошук відповіді на питання: дозволяє чи не дозволяє він відображення.
3. Для заданої пари просторів знайти відображення, яке їх пов'язує.

Особливу роль серед геометричних об'єктів відіграють геодезичні лінії та різні їх узагальнення. Саме тому, серед відображень виділяють, з часів Е. Бельтрамі, геодезичні відображення, тобто відображення, що зберігають геодезичні лінії. Знаменита теорема Бельтрамі, з якої і почалась сучасна теорія геодезичних відображень, опублікована 1865 році, стверджує, що геодезичні відображення на пласкі простори, дозволяють лише простори сталої кривини [3, 4]. Більше чим через 120 років цей результат узагальнив А.В. Погорєлов [172] для псевдоріманових просторів з мінімальними умовами на гладкість метрики. Значний внесок в вивчення загальних закономірностей теорії геодезичних відображень внесли Т. Леві-Чивіта, Т. Томас, Г. Вейль, О. З. Петров, А. С. Солодовніков, Г. І. Кручкович, М. С. Сінюков, В. С. Собчук, Й. Мікеш, В. С. Матвєєв [54, 93, 107, 170, 186, 152, 178, 185].

Продовженням цього напрямку є вивчення геодезичних відображень просторів афінної зв'язності на псевдоріманові простори, а також інші пов'язані проблеми [7, 8, 9, 13, 14, 37, 81, 90, 110, 160, 161].

Особливе місце в розвитку теорії відображень займає одеська геометрична школа. Хоча формально школа бере початок від В.Ф. Кагана, основні успіхи пов'язані з роботами професора М.С. Сінюкова та його учнів: М.Л. Гаврильченка, С.Г. Лейка, Й. Мікеша, І.М. Курбатової, Н.В. Яблонської, О.М. Сінюкової та інших [178, 179, 180, 118, 27, 28, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 155, 156, 157, 158, 165, 166, 167, 182, 183].

Вивчення відображень зводиться до системи диференціальних рівнянь. Система диференціальних рівнянь приводить до алгебраїчної системи, яка є умовою інтегрування. Частіше за все, ці системи перевизначені, вводячи додаткові обмеження, їх спрощують або інтегрують. Таким чином, геометричні питання розв'язуються методами лінійної алгебри, зокрема, такі як

- геодезичні відображення псевдоріманових просторів;

- геодезичні відображення просторів афінної зв'язності на псевдоріманові простори;

- геодезичні відображення бервальдових просторів на псевдоріманові простори;

- геодезичні деформації гіперповерхонь псевдоріманових просторів;

- конформні відображення псевдоріманових просторів на простори Ейнштейна;

- голоморфно-проективні відображення келерових просторів;

- майже геодезичні відображення просторів афінної зв'язності та ін.

Зауважимо, що принципова можливість локального розв'язку цих задач поєднується з серйозними труднощами технічного характеру. Тому зберігає актуальність задача вивчення внутрішніх тензорних характеристик узагальнених просторів, що дозволяють чи не дозволяють вказані відображення. Це, в свою чергу, приводить до спеціалізації просторів або до спеціалізації відображень. Розроблені методи знайшли широке застосування і подальший розвиток в роботах В.С. Матвєєва [57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67].

1.2 Відображення просторів афінної зв'язності

Простором афінної зв'язності A_n розмірності n називають такий диференційований многовид, на кожній кривій якого задана афінна зв'язність, що задовольняє умові лінійності, тобто для кожної точки M та для всякого векторного поля в околі даної точки, абсолютний диференціал вектора, що належить цьому полю, обчислений в точці M для всякої кривої, що проходить через цю точку, є лінійна функція вектора елементарного зміщення по кривій.

Якщо не зазначено інше , то розглядаються простори афінної зв'язності A_n без скруту, тобто такі, що

$$\Gamma^h_{ij}(x) = \Gamma^h_{ji}(x). \tag{1.2.1}$$

Простір A_n належить класу C^r ($A_n \in C^r$), якщо $\Gamma^h_{ij}(x) \in C^r$.

Розглянемо два простори афінної зв'язності.

Означення 1.2.1. *Взаємно однозначна відповідність між точками просторів афінної зв'язності A_n та $\bar{A}_n$ називається відображенням, якщо в спільній за відображенням системі координат виконуються умови*

$$\bar{\Gamma}_{ij}(x) = \Gamma^h_{ij}(x) + P^h_{ij}(x). \tag{1.2.2}$$

Спільною за відображенням системою координат називають таку систему криволінійних координат, в якій координати відповідних точок співпадають.

Означення 1.2.2. *Тензор* $P^h_{ij}(x)$ *називають тензором деформації зв'язності при даному відображенні.*

Якщо

$$P^h_{ij}(x) \not\equiv 0, \tag{1.2.3}$$

то відображення називають нетривіальним.

Зауважимо, що тензор деформації симетричний за коваріантними індексами, тобто $P^h_{ij} = P^h_{ji}$, для просторів афінної зв'язності без скруту.

В випадку тензорного поля S типу $\binom{p}{q}$ коваріантна похідна по зв'язності A_n, яку ми будемо позначати ∇, в кожній системі координат $x^1, x^2, \dots, x^n$ визначається наступним чином:

$$\nabla_k S^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q}(x) = \partial_k S^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q}(x) + \Gamma^{i_1}_{k\alpha}(x) S^{\alpha i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q}(x) + \dots +$$

$$+ \Gamma^{i_p}_{k\alpha}(x) S^{i_1 i_2 \dots i_{p-1}\alpha}_{j_1 j_2 \dots j_q}(x) - \Gamma^{\beta}_{kj_1}(x) S^{i_1 i_2 \dots i_p}_{\beta j_2 \dots j_q}(x) - \dots - \tag{1.2.4}$$

$$- \Gamma^{\beta}_{kj_q}(x) S^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_{q-1}\beta}(x),$$

$$(i_1, \dots, i_p; \quad j_1, \dots j_q; \quad k = 1, 2, \dots, n).$$

Для простору $\bar{A}_n$ та коваріантній похідної в ньому $\bar{\nabla}$ будемо мати в спільній системі координат

$$\bar{\nabla}_k S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) = \partial_k S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) \; + \; \bar{\Gamma}^{i_1}_{k\alpha}(x) S^{\alpha i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) \; + \ldots +$$

$$+ \, \bar{\Gamma}^{i_p}_{k\alpha}(x) S^{i_1 i_2 \ldots i_{p-1}\alpha}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) - \; \bar{\Gamma}^{\beta}_{kj_1}(x) S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{\beta j_2 \ldots j_q}(x) - \ldots - \qquad (1.2.5)$$

$$- \, \bar{\Gamma}^{\beta}_{kj_q}(x) S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_{q-1}\beta}(x),$$

$$(i_1, \ldots, i_p; \quad j_1, \ldots j_q; \quad k = 1, 2, \ldots, n).$$

Віднімаючи від останнього (1.2.4) з урахуванням (1.2.2), отримаємо

$$\bar{\nabla}_k S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) - \nabla_k S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) = \; P^{i_1}_{k\alpha}(x) S^{\alpha i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) \; + \ldots +$$

$$+ \, P^{i_p}_{k\alpha}(x) S^{i_1 i_2 \ldots i_{p-1}\alpha}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) - \; P^{\beta}_{kj_1}(x) S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{\beta j_2 \ldots j_q}(x) - \ldots - \qquad (1.2.6)$$

$$- \, P^{\beta}_{kj_q}(x) S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_{q-1}\beta}(x),$$

$$(i_1, \ldots, i_p; \quad j_1, \ldots j_q; \quad k = 1, 2, \ldots, n).$$

Останнє справедливе для будь-якого тензора, а для тензора деформації (1.2.6) прийме вигляд

$$\bar{\nabla}_k P^h_{ij}(x) - \nabla_k P^h_{ij}(x) = \; P^h_{k\alpha}(x) P^{\alpha}_{ij}(x) - P^{\alpha}_{ki}(x) P^h_{\alpha j}(x) - \; P^{\alpha}_{kj}(x) P^h_{i\alpha}(x). \quad (1.2.7)$$

Симетруючи останнє, отримаємо

$$\bar{\nabla}_k P^h_{ij} + \bar{\nabla}_j P^h_{ik} - \nabla_k P^h_{ij} - \nabla_j P^h_{ik} = -2P^\alpha_{kj} P^h_{i\alpha}. \tag{1.2.8}$$

А, альтернуючи —

$$\bar{\nabla}_k P^h_{ij} - \bar{\nabla}_j P^h_{ik} - \nabla_k P^h_{ij} + \nabla_j P^h_{ik} = -2(P^h_{k\alpha} P^\alpha_{ij} - P^\alpha_{ki} P^h_{\alpha j}). \tag{1.2.9}$$

Закон зміни тензора кривини, що визначається, як

$$R^h_{\cdot\, ijk} = \partial_j \Gamma^h_{ik} + \Gamma^\alpha_{ik} \Gamma^h_{j\alpha} - \partial_k \Gamma^h_{ij} - \Gamma^\alpha_{ij} \Gamma^h_{k\alpha}, \tag{1.2.10}$$

при відображенні простору A_n на $\bar{A}_n$ запишеться в вигляді

$$\bar{R}^h_{\cdot\, ijk} = R^h_{\cdot\, ijk} + \nabla_k P^h_{ji} - \nabla_j P^h_{ki} + P^h_{\alpha k} P^\alpha_{ji} - P^h_{\alpha j} P^\alpha_{ki}. \tag{1.2.11}$$

Або, з урахуванням (1.2.9),

$$\bar{R}^h_{\cdot\, ijk} = R^h_{\cdot\, ijk} + \frac{1}{2}(\nabla_k P^h_{ji} - \nabla_j P^h_{ki} + \bar{\nabla}_k P^h_{ji} - \bar{\nabla}_j P^h_{ki}). \tag{1.2.12}$$

Тензор Річчі $R_{ij} = R^\alpha_{ij\alpha}$ змінюється за законом

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + \frac{1}{2}(\nabla_\alpha P^\alpha_{ji} - \nabla_j P^\alpha_{\alpha i} + \bar{\nabla}_\alpha P^\alpha_{ji} - \bar{\nabla}_j P^\alpha_{\alpha i}). \tag{1.2.13}$$

Теорема 1.2.1. *При відображенні простору афінної зв'язності* A_n *на простір афінної зв'язності* $\bar{A}_n$ *тензори Рімана та Річчі просторів* A_n *та* $\bar{A}_n$ *в спільній системі координат зв'язані співвідношеннями* (1.2.12) *та* (1.2.13) *відповідно.*

Якщо в просторі афінної зв'язності тензор Річчі є симетричним, тобто $R_{ij} = R_{ji}$, то такі простори називають еквіафінними просторами.

Для коваріантних похідних тензора Рімана, із формули (1.2.6), будемо мати

$$\bar{\nabla}_k R^h_{\cdot\, ijl} - \nabla_k R^h_{\cdot\, ijl} = P^h_{k\alpha} R^\alpha_{\cdot\, ijl} - P^\alpha_{ki} R^h_{\cdot\, \alpha jl} - P^\alpha_{kj} R^h_{\cdot\, i\alpha l} - P^\alpha_{kl} R^h_{\cdot\, ij\alpha}. \tag{1.2.14}$$

Коваріантна похідна тензора Рімана $\bar{A}_n$ із (1.2.12) має вигляд

$$\bar{\nabla}_l \bar{R}^h_{\cdot\, ijk} = \bar{\nabla}_l R^h_{\cdot\, ijk} + \frac{1}{2}(\bar{\nabla}_l \nabla_k P^h_{ji} - \bar{\nabla}_l \nabla_j P^h_{ki} + \bar{\nabla}_l \bar{\nabla}_k P^h_{ji} - \bar{\nabla}_l \bar{\nabla}_j P^h_{ki}). \tag{1.2.15}$$

Враховуючи (1.2.14) та переходячи до похідної в A_n, отримаємо:

$$\bar{\nabla}_l \bar{R}^h_{\cdot\, ijk} = \nabla_l R^h_{\cdot\, ijk} + P^h_{l\alpha} R^\alpha_{\cdot\, ijk} - P^\alpha_{li} R^h_{\cdot\, \alpha jk} - P^\alpha_{lj} R^h_{\cdot\, i\alpha k} - P^\alpha_{kl} R^h_{\cdot\, ij\alpha} +$$

$$+\frac{1}{2}(\nabla_l \nabla_k P^h_{ji} - \nabla_l \nabla_j P^h_{ki} + \bar{\nabla}_l \bar{\nabla}_k P^h_{ji} - \bar{\nabla}_l \bar{\nabla}_j P^h_{ki} + \tag{1.2.16}$$

$$+\nabla_\alpha P^h_{ji} P^\alpha_{kl} + \nabla_k P^h_{\alpha i} P^\alpha_{jl} + \nabla_k P^h_{j\alpha} P^\alpha_{il} + \nabla_k P^\alpha_{ij} P^h_{\alpha l}).$$

Коваріантна похідна тензора Річчі

$$\bar{\nabla}_k R_{ij} - \nabla_k R_{ij} = -P^\alpha_{ki} R_{\alpha j} - P^\alpha_{kj} R_{\alpha i} \tag{1.2.17}$$

та

$$\bar{\nabla}_k \bar{R}_{ij} = \nabla_l R_{ij} - P^{\alpha}_{ki} R_{\alpha j} - P^{\alpha}_{kj} R_{\alpha i} +$$

$$+\frac{1}{2}(\nabla_\beta \nabla_k P^{\beta}_{ji} - \nabla_\beta \nabla_j P^{\beta}_{ki} + \bar{\nabla}_\beta \bar{\nabla}_k P^{\beta}_{ji} - \bar{\nabla}_\beta \bar{\nabla}_j P^{\beta}_{ki} + \tag{1.2.18}$$

$$+\nabla_\alpha P^{\beta}_{ji} P^{\alpha}_{k\beta} + \nabla_k P^{\beta}_{\alpha i} P^{\alpha}_{j\beta} + \nabla_k P^{\beta}_{j\alpha} P^{\alpha}_{i\beta} + \nabla_k P^{\alpha}_{ij} P^{\beta}_{\alpha\beta}).$$

Теорема 1.2.2. *При відображенні просторів A_n та $\bar{A}_n$ коваріантні похідні тензора деформації, тензора Рімана та тензора Річчі задовольняють* (1.2.7), (1.2.16), (1.2.18).

Таким чином, нами отримані формули, що зв'язують відповідні об'єкти та їх коваріантні похідні в відповідних за відображенням просторах A_n та $\bar{A}_n$.

Для тензора S справедлива тотожність Річчі:

$$\nabla_k \nabla_l S^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q}(x) - \nabla_l \nabla_k S^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q}(x) =$$

$$= -R^{i_1}_{\cdot\,\alpha kl}(x) S^{\alpha i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q}(x) - \dots - R^{i_p}_{\cdot\,\alpha kl}(x) S^{i_1 i_2 \dots i_{p-1}\alpha}_{j_1 j_2 \dots j_q}(x) +$$

$$+ R^{\beta}_{\cdot\, j_1 kl}(x) S^{i_1 i_2 \dots i_p}_{\beta j_2 \dots j_q}(x) + \dots + R^{\beta}_{\cdot\, j_q kl}(x) S^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_{q-1}\beta}(x), \tag{1.2.19}$$

$$(i_1, \dots, i_p; \quad j_1, \dots j_q; \quad k = 1, 2, \dots, n).$$

Для коваріантної похідної в $\bar{A}_n$

$$
\begin{gathered}
\bar{\nabla}_k \bar{\nabla}_l S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) - \bar{\nabla}_l \bar{\nabla}_k S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) = \\
= -\bar{R}^{i_1}_{\cdot\, \alpha k l}(x) S^{\alpha i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) \; - \ldots - \; \bar{R}^{i_p}_{\cdot\, \alpha k l}(x) S^{i_1 i_2 \ldots i_{p-1} \alpha}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) + \\
+ \bar{R}^{\beta}_{\cdot\, j_1 k l}(x) S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{\beta j_2 \ldots j_q}(x) + \ldots + \; \bar{R}^{\beta}_{\cdot\, j_q k l}(x) S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_{q-1} \beta}(x)
\end{gathered}
\tag{1.2.20}
$$

$$
(i_1, \ldots, i_p; \quad j_1, \ldots j_q; \quad k = 1, 2, \ldots, n).
$$

Віднімемо (1.2.19) від (1.2.20)

$$
\begin{gathered}
\bar{\nabla}_k \bar{\nabla}_l S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) - \nabla_k \nabla_l S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) + \nabla_l \nabla_k S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) - \bar{\nabla}_l \bar{\nabla}_k S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) = \\
= \frac{1}{2}(\nabla_k P^{i_1}_{l\alpha} - \nabla_l P^{i_1}_{k\alpha} + \bar{\nabla}_k P^{i_1}_{l\alpha} - \bar{\nabla}_l P^{i_1}_{k\alpha}) S^{\alpha i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) \; + \ldots + \\
+ \frac{1}{2}(\nabla_k P^{i_p}_{l\alpha} - \nabla_l P^{i_p}_{k\alpha} + \bar{\nabla}_k P^{i_p}_{l\alpha} - \bar{\nabla}_l P^{i_p}_{k\alpha}) S^{i_1 i_2 \ldots i_{p-1} \alpha}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) + \\
+ \frac{1}{2}(\nabla_l P^{\beta}_{k j_1} - \; \nabla_j P^{h}_{k j_1} + \; \bar{\nabla}_l P^{\beta}_{k j_1} - \bar{\nabla}_k P^{\beta}_{l j_1}) S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{\beta j_2 \ldots j_q}(x) + \ldots + \\
+ \frac{1}{2}(\nabla_l P^{\beta}_{k j_q} - \; \nabla_k P^{\beta}_{l j_q} + \; \bar{\nabla}_l P^{\beta}_{k j_q} - \bar{\nabla}_k P^{\beta}_{l j_q}) S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_{q-1} \beta}(x)
\end{gathered}
\tag{1.2.21}
$$

$$
(i_1, \ldots, i_p; \quad j_1, \ldots j_q; \quad k = 1, 2, \ldots, n).
$$

Це дозволяє записати тотожність Річчі для тензора деформації

$$\nabla_l \nabla_j P^h_{ki} - \nabla_j \nabla_l P^h_{ki} = P^h_{\alpha i} R^{\alpha}_{.\,kjl} - P^{\alpha}_{ki} R^h_{.\,\alpha jl} + P^h_{k\alpha} R^{\alpha}_{.\,ijl}. \tag{1.2.22}$$

$$\bar{\nabla}_l \bar{\nabla}_j P^h_{ki} - \bar{\nabla}_j \bar{\nabla}_l P^h_{ki} = P^h_{\alpha i} \bar{R}^{\alpha}_{.\,kjl} - P^{\alpha}_{ki} \bar{R}^h_{.\,\alpha jl} + P^h_{k\alpha} \bar{R}^{\alpha}_{.\,ijl}. \tag{1.2.23}$$

Враховуючи попереднє, отримаємо

$$\begin{gathered}
\bar{\nabla}_l \bar{\nabla}_j P^h_{ki} - \bar{\nabla}_j \bar{\nabla}_l P^h_{ki} - \nabla_l \nabla_j P^h_{ki} + \nabla_j \nabla_l P^h_{ki} = \\
= \frac{1}{2} P^h_{\alpha i} (\nabla_l P^{\alpha}_{jk} - \nabla_j P^{\alpha}_{lk} + \bar{\nabla}_l P^{\alpha}_{jk} - \bar{\nabla}_j P^{\alpha}_{lk}) - \\
- \frac{1}{2} P^{\alpha}_{ki} (\nabla_l P^h_{j\alpha} - \nabla_j P^h_{l\alpha} + \bar{\nabla}_l P^h_{j\alpha} - \bar{\nabla}_j P^h_{l\alpha}) + \\
+ \frac{1}{2} P^h_{k\alpha} (\nabla_l P^{\alpha}_{ji} - \nabla_j P^{\alpha}_{li} + \bar{\nabla}_l P^{\alpha}_{ji} - \bar{\nabla}_j P^{\alpha}_{li}).
\end{gathered} \tag{1.2.24}$$

Тотожність Річчі для тензора Рімана має вигляд

$$\bar{\nabla}_{[lm]} \bar{R}^h_{ijk} = -\bar{R}^{\alpha}_{ijk} \bar{R}^h_{\alpha lm} + \bar{R}^h_{\alpha jk} \bar{R}^{\alpha}_{ilm} + \bar{R}^h_{i\alpha k} \bar{R}^{\alpha}_{jlm} + \bar{R}^h_{ij\alpha} \bar{R}^{\alpha}_{klm}. \tag{1.2.25}$$

$$\nabla_{[lm]} R^h_{ijk} = -R^{\alpha}_{ijk} R^h_{\alpha lm} + R^h_{\alpha jk} R^{\alpha}_{ilm} + R^h_{i\alpha k} R^{\alpha}_{jlm} + R^h_{ij\alpha} R^{\alpha}_{klm}. \tag{1.2.26}$$

Віднімаючи з (1.2.25) (1.2.26) та враховуючи (1.2.12), будемо мати

$$\bar{\nabla}_{[lm]}\bar{R}^h_{ijk} - \nabla_{[lm]}R^h_{ijk} =$$

$$= \frac{1}{2}(-R^h_{\alpha lm}(\nabla_k P^\alpha_{ji} - \nabla_j P^\alpha_{ki} + \bar{\nabla}_k P^\alpha_{ji} - \bar{\nabla}_j P^\alpha_{ki}) -$$

$$-\bar{R}^\alpha_{ijk}(\nabla_m P^h_{l\alpha} - \nabla_l P^h_{m\alpha} + \bar{\nabla}_m P^h_{l\alpha} - \bar{\nabla}_l P^h_{m\alpha}) +$$

$$+R^\alpha_{ilm}(\nabla_k P^h_{j\alpha} - \nabla_j P^h_{k\alpha} + \bar{\nabla}_k P^h_{j\alpha} - \bar{\nabla}_j P^h_{k\alpha}) +$$

$$+\bar{R}^h_{\alpha jk}(\nabla_m P^\alpha_{li} - \nabla_l P^\alpha_{mi} + \bar{\nabla}_m P^\alpha_{li} - \bar{\nabla}_l P^\alpha_{mi}) + \qquad (1.2.27)$$

$$+R^\alpha_{jlm}(\nabla_k P^h_{\alpha i} - \nabla_\alpha P^h_{ki} + \bar{\nabla}_k P^h_{\alpha i} - \bar{\nabla}_\alpha P^h_{ki}) +$$

$$+\bar{R}^h_{i\alpha k}(\nabla_m P^\alpha_{lj} - \nabla_l P^\alpha_{mj} + \bar{\nabla}_m P^\alpha_{lj} - \bar{\nabla}_l P^\alpha_{mj}) +$$

$$+R^\alpha_{klm}(\nabla_\alpha P^h_{ji} - \nabla_j P^h_{\alpha i} + \bar{\nabla}_\alpha P^h_{ji} - \bar{\nabla}_j P^h_{\alpha i}) +$$

$$+\bar{R}^h_{ij\alpha}(\nabla_m P^\alpha_{lk} - \nabla_l P^\alpha_{mk} + \bar{\nabla}_m P^\alpha_{lk} - \bar{\nabla}_l P^\alpha_{mk})).$$

Групуючи, переконаємось в справедливості

$$\bar{\nabla}_{[lm]}\bar{R}^h_{ijk} - \nabla_{[lm]}R^h_{ijk} =$$

$$= \frac{1}{2}(-R^h_{\alpha lm}(\nabla_{[k}P^\alpha_{j]i} + \bar{\nabla}_{[k}P^\alpha_{j]i}) - \bar{R}^\alpha_{ijk}(\nabla_{[m}P^h_{l]\alpha} + \bar{\nabla}_{[m}P^h_{l]\alpha}) +$$

$$+R^\alpha_{ilm}(\nabla_{[k}P^h_{j]\alpha} + \bar{\nabla}_{[k}P^h_{j]\alpha}) + \bar{R}^h_{\alpha jk}(\nabla_{[m}P^\alpha_{l]i} + \bar{\nabla}_{[m}P^\alpha_{l]i}) + \qquad (1.2.28)$$

$$+R^\alpha_{jlm}(\nabla_{[k}P^h_{\alpha]i} + \bar{\nabla}_{[k}P^h_{\alpha]i}) + \bar{R}^h_{i\alpha k}(\nabla_{[m}P^\alpha_{l]j} + \bar{\nabla}_{[m}P^\alpha_{l]j}) +$$

$$+R^\alpha_{klm}(\nabla_{[\alpha}P^h_{j]i} + \bar{\nabla}_{[\alpha}P^h_{j]i}) + \bar{R}^h_{ij\alpha}(\nabla_{[m}P^\alpha_{l]k} + \bar{\nabla}_{[m}P^\alpha_{l]k})).$$

Для тензорів Річчі, аналогічно, одержимо

$$\bar{\nabla}_{[lm]}\bar{R}_{ij} - \nabla_{[lm]}R_{ij} =$$

$$= \frac{1}{2}(-R^\beta_{\alpha lm}(\nabla_{[\beta}P^\alpha_{j]i} + \bar{\nabla}_{[\beta}P^\alpha_{j]i}) - \bar{R}^\alpha_{ij\beta}(\nabla_{[m}P^\beta_{l]\alpha} + \bar{\nabla}_{[m}P^\beta_{l]\alpha}) +$$

$$+R^\alpha_{ilm}(\nabla_{[\beta}P^\beta_{j]\alpha} + \bar{\nabla}_{[\beta}P^\beta_{j]\alpha}) + \bar{R}_{\alpha j}(\nabla_{[m}P^\alpha_{l]i} + \bar{\nabla}_{[m}P^\alpha_{l]i}) + \qquad (1.2.29)$$

$$+R^\alpha_{jlm}(\nabla_{[\beta}P^\beta_{\alpha]i} + \bar{\nabla}_{[\beta}P^\beta_{\alpha]i}) + \bar{R}_{i\alpha}(\nabla_{[m}P^\alpha_{l]j} + \bar{\nabla}_{[m}P^\alpha_{l]j}) +$$

$$+R^\alpha_{\beta lm}(\nabla_{[\alpha}P^\beta_{j]i} + \bar{\nabla}_{[\alpha}P^\beta_{j]i}) + \bar{R}^\beta_{ij\alpha}(\nabla_{[m}P^\alpha_{l]\beta} + \bar{\nabla}_{[m}P^\alpha_{l]\beta})).$$

Теорема 1.2.3. *При відображенні простору A_n на простір $\bar{A}_n$ для других коваріантних похідних тензора деформації, тензора Рімана та тензора Річчі виконуються відповідно умови* (1.2.24), (1.2.28), (1.2.29).

Зауважимо, що зазначені в наведених теоремах умови носять лише необхідний характер.

Позначимо різницю тензорів Рімана просторів $\bar{A}_n$ та A_n, пов'язаних відображенням, через P^h_{ijk}, тобто P^h_{ijk} — деформація тензорів Рімана при відображенні —

$$\bar{R}^h_{ijk} - R^h_{ijk} \stackrel{def}{=} P^h_{ijk} \tag{1.2.30}$$

або, враховуючи попереднє,

$$P^h_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\bar{\nabla}_k P^h_{ij} - \bar{\nabla}_j P^h_{ik} + \nabla_k P^h_{ij} - \nabla_j P^h_{ik}\right). \tag{1.2.31}$$

Зауважимо, що тензор P^h_{ijk} задовольняє умовам

$$P^h_{ijk} + P^h_{ikj} = 0 \tag{1.2.32}$$

та

$$P^h_{ijk} + P^h_{jki} + P^h_{kij} = 0. \tag{1.2.33}$$

Доведемо теорему

Теорема 1.2.4. *Якщо в довільній системі координат тензор P^h_{ijk} такий, що $P^1_{223} = 0$ (або $P^1_{234} = 0$ для $n > 3$), то цей тензор записується наступним чином*

$$P^h_{ijk} = \delta^h_i(P_{jk} - P_{kj}) + \delta^h_j P_{ik} - \delta^h_k P_{ij}, \tag{1.2.34}$$

де P_{ij} — деякий тензор.

Доведення.

При перетворенні системи координат

$$x'^h = x'^h(x^1, x^2, \dots x^n) \tag{1.2.35}$$

компоненти тензора P^h_{ijk} перетворюються за законом

$$P'^h_{ijk} = P^\alpha_{\beta\gamma\delta} P^h_\alpha B^\beta_i B^\gamma_j B^\delta_k, \tag{1.2.36}$$

де

$$P^h_i \overset{def}{=} \partial_i x'^h, \qquad \left\| B^h_i \right\| \overset{def}{=} \left\| P^h_i \right\|^{-1}. \tag{1.2.37}$$

Переконаємось, що, якщо $P^1_{223} = 0$ (або $P^1_{234} = 0$) в будь-який системі координат, то відповідно

$$P^h_{iij} = 0 \tag{1.2.38}$$

та

$$P^h_{ijk} = 0 \tag{1.2.39}$$

в будь-який системі координат для взаємно відмінних індексів i, j, k, h.

Розглянемо наступні перетворення координат

$$x'^p = x^p + r x^q; \quad x'^s = x^s; \quad p \neq s. \tag{1.2.40}$$

Тут p та q взаємно відмінні індекси, r — довільна стала.

Тоді P^h_i та B^h_i в рівняннях (1.2.36) записуються в вигляді

$$P^h_i = B^h_i = \delta^h_i, \qquad P^p_q = -B^p_q = r, \tag{1.2.41}$$

за умовою або $h \neq p$, або $i \neq q$.

Обчислимо компоненти тензора P^h_{ijk} в новій системі координат, що визначається (1.2.40)

$$P'^h_{pqk} = P^h_{pqk} + r P^h_{qqk}. \tag{1.2.42}$$

Тоді

$$P'^h_{ppk} = P^h_{ppk} + r(P^h_{pqk} + P^h_{qpk}) + r^2 P^h_{qqk}, \tag{1.2.43}$$

для

$$P'^q_{pjk} = P^q_{pjk} + r(P^q_{qjk} - P^p_{pjk}) - r^2 P^p_{qqk}, \tag{1.2.44}$$

також

$$P'^q_{ipk} = P^q_{ipk} + r(P^q_{iqk} - P^p_{ipk}) - r^2 P^p_{iqk} \tag{1.2.45}$$

і, наостанок,

$$\begin{gathered} P'^q_{ppk} = P^q_{ppk} - r(P^p_{ppk} - P^q_{qpk} - P^q_{qpk}) - r^3 P^p_{qqk} + \\ +r^2(P^q_{qqk} - P^p_{pqk} - P^p_{qpk}). \end{gathered} \tag{1.2.46}$$

В останніх формулах всі, різні за написом, індекси відмінні. За індексами p та q тут та в подальшому в цьому доведені згоду Ейнштейна про сумування не застосовуємо. Враховуючи (1.2.42) , переконаємось, що з (1.2.39) витікає (1.2.38).

Доведемо зворотне. Нехай виконуються рівняння (1.2.38), тобто $P^h_{iik} = 0$ в будь-якій системі координат, при взаємно відмінних індексах h, i, k. Тоді з (1.2.43) отримаємо

$$P^h_{ijk} + P^h_{jik} = 0, \tag{1.2.47}$$

де i, j, k, h взаємно відмінні індекси.

Альтернуючи останнє за індексами k та j, враховуючи властивості (1.2.32) та (1.2.33) тензора P^h_{ijk}, отримаємо (1.2.39). Далі з (1.2.42) та (1.2.45) знайдемо

$$P^q_{qjk} = P^p_{pjk}, \qquad P^q_{iqk} = P^p_{ipk}, \tag{1.2.48}$$

де $p, q \neq k, j$.

Із останнього випливає, що для всіх індексів j, k, p ($p \neq j$, k)

$$P^p_{pjk} = B_{jk}, \qquad P^p_{ipk} = P_{ik}. \tag{1.2.49}$$

Тут B_{jk}, P_{ik} — деякі геометричні об'єкти.

Враховуючи (1.2.39), (1.2.49), а також те, що r — довільна стала, із (1.2.46) отримаємо

$$P^p_{ppk} = B_{pk} + P_{pk}, \tag{1.2.50}$$

для довільних індексів $p \neq k$.

Тепер переконаємося, що (1.2.38), (1.2.39), (1.2.49), (1.2.50) мають вигляд

$$P^h_{ijk} = \delta^h_i B_{jk} + \delta^h_j P_{ik} - \delta^h_k P_{ij}, \tag{1.2.51}$$

де i, j, k, h — довільні індекси.

Циклюючи за індексами i, j, k, отримаємо

$$B_{jk} = P_{jk} - P_{kj}. \tag{1.2.52}$$

Таким чином, умови (1.2.34) виконуються. Тепер зауважимо, що P_{jk} — є тензором типу $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$. Згортаючи (1.2.34), переконаємось в цьому. Дійсно,

$$P_{kj} = \frac{1}{(n^2-1)}(nP^\alpha_{jk\alpha} + P^\alpha_{kj\alpha}). \tag{1.2.53}$$

В останньому, права частина — тензорний вираз, а тому P_{kj} — теж тензор. Таким чином, теорему доведено.

Зауважимо, оскільки при доведені теореми використовувались лише алгебраїчні властивості P^h_{ijk}, тому вона справедлива для довільного тензору, який задовольняє умовам (1.2.32) та (1.2.33), зокрема для тензору Вейля W^h_{ijk}.

Нехай тензор P^h_{ijk} задовольняє умовам теореми 1.2.4, тоді, враховуючи (1.2.30) та (1.2.34), можемо записати

$$\bar{R}^h_{ijk} = R^h_{ijk} + \delta^h_i(P_{jk} - P_{kj}) + \delta^h_j P_{ik} - \delta^h_k P_{ij}. \tag{1.2.54}$$

Згортаючи, для тензорів Річчі A_n та $\bar{A}_n$ отримаємо

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + P_{ji} - nP_{ij}. \tag{1.2.55}$$

Для еквіафінних просторів переконаємось, що тензор P_{ij} симетричний, і останні формули перепишуться в вигляді

$$\bar{R}^h_{ijk} = R^h_{ijk} + \delta^h_j P_{ik} - \delta^h_k P_{ij}. \tag{1.2.56}$$

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} - (n-1)P_{ij}. \tag{1.2.57}$$

Враховуючи це, будемо мати

$$\begin{gathered}\bar{R}^h_{ijk} - \frac{1}{n-1}(\delta^h_k \bar{R}_{ij} - \delta^h_j \bar{R}_{ik}) = \\ = R^h_{ijk} - \frac{1}{n-1}(\delta^h_k R_{ij} - \delta^h_j R_{ik}).\end{gathered} \tag{1.2.58}$$

. Тобто

$$\bar{W}^h_{ijk} = W^h_{ijk}, \tag{1.2.59}$$

де $\bar{W}^h_{ijk}$, W^h_{ijk} — тензори проективної кривини Вейля $\bar{A}_n$ та A_n відповідно.

Очевидно, що аналогічні результати можна отримати і для нееквіафінних просторів.

Таким чином, справедлива

Теорема 1.2.5. *Якщо в довільній системі координат тензор P^h_{ijk} такий, що $P^1_{223} = 0$ (або $P^1_{234} = 0$ для $n > 3$), то при цьому відображенні зберігається тензор проективної кривини Вейля.*

Останні теореми дозволяють сформулювати наслідки наступного типу

Наслідок 1.2.1. *Якщо у просторів афінної зв'язності співпадають значення компонент тензорів Рімана R^1_{223} (або R^1_{234} для $n > 3$) та $\bar{R}^1_{223}$ (або $\bar{R}^1_{234}$), то при відображенні їх один на одного зберігається тензор проективної кривини Вейля.*

Враховуючи (1.2.28) та (1.2.29) для просторів, в яких виконується умова (1.2.56), отримаємо для тензорів Рімана

$$\begin{gathered}\bar{\nabla}_{[lm]}\bar{R}^h_{ijk} = \nabla_{[lm]}R^h_{ijk} + \delta^h_{[m}P_{l]\alpha}R^\alpha_{ijk} + \\ +\delta^h_j P_{\alpha(k}R^\alpha_{i)lm} - \delta^h_k P_{\alpha(j}R^\alpha_{i)lm} + P_{i[m}R^h_{l]jk} + \\ +P_{jm}R^h_{ilk} - P_{jl}R^h_{imk} + P_{km}R^h_{ijl} - P_{kl}R^h_{ijm}\end{gathered} \tag{1.2.60}$$

та для тензорів Річчі

$$\begin{gathered}\bar{\nabla}_{[lm]}\bar{R}_{ij} = \nabla_{[lm]}R_{ij} - (n-1)\nabla_{lm}P_{ij} + \\ +P_{m(i}R_{j)l} - P_{l(i}R_{j)m}\end{gathered} \tag{1.2.61}$$

або, що те саме,

$$\bar{\nabla}_{[lm]}\bar{R}_{ij} = \nabla_{[lm]}R_{ij} - (n-1)P_{\alpha(i}W^{\alpha}_{j)lm}. \tag{1.2.62}$$

Таким чином, має місце теорема

Теорема 1.2.6. *Якщо в довільній системі координат тензор P^h_{ijk} такий, що $P^1_{223} = 0$ (або $P^1_{234} = 0$ для $n > 3$), то при цьому відображенні тензори Рімана та Річчі задовольняють умовам* (1.2.60), (1.2.62).

Нами наведено один із способів спеціалізації просторів афінної зв'язності, який приводить до спеціалізації відображень. Далі ми розглянемо інші різноманітні способи спеціалізації.

1.3 Укорочені відображення просторів афінної зв'язності

Хоча при визначенні відображення ми говоримо про взаємнооднозначну відповідність, вибором знаку тензора деформації ми впорядковуємо задану пару афіннозв'язних просторів A_n та $\bar{A}_n$. Між кожною парою просторів A_n та $\bar{A}_n$ можливо встановити відповідність, яка задається об'єктами зв'язності цих просторів. З іншого боку, об'єкт зв'язності A_n та тензор деформації задають зв'язність простору $\bar{A}_n$. Це дозволяє ввести в розгляд відображення, які називатимемо укороченими відносно заданого відображення.

Об'єкт $\overset{\lambda}{\Gamma}{}^h_{ij}$, побудований за правилом

$$\overset{\lambda}{\Gamma}{}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij}(x) + \frac{\lambda}{1+\lambda} P^h_{ij}(x), \qquad (1.3.1)$$
$$\lambda = const > 0,$$

задає зв'язність деякого простору афінної зв'язності $\overset{\lambda}{A}_n$ [169].

Означення 1.3.1. *Відображення простору афінної зв'язності* A_n *на простір афінної зв'язності* $\overset{\lambda}{A}_n$ *називають укороченим відображенням, якщо в спільної за відображенням системі координат, має місце рівняння (1.3.1).*

Враховуючи (1.2.2), отримаємо

$$\overset{\lambda}{\Gamma}{}^h_{ij} = \frac{\Gamma^h_{ij} + \lambda \bar{\Gamma}^h_{ij}}{1+\lambda}. \qquad (1.3.2)$$

Рівняння (1.3.2) можна записати в вигляді:

$$\overset{\lambda}{\nabla}_k P^h_{ij}(x) - \nabla_k P^h_{ij}(x) =$$
$$= \frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2} \left(P^h_{k\alpha}(x) P^\alpha_{ij}(x) - P^\alpha_{ki}(x) P^h_{\alpha j}(x) - P^\alpha_{kj}(x) P^h_{i\alpha}(x)\right). \qquad (1.3.3)$$

Для першої коваріантної похідної тензора деформації та для другої —

$$\overset{\lambda}{\nabla}_l \overset{\lambda}{\nabla}_j P^h_{ki} - \overset{\lambda}{\nabla}_j \overset{\lambda}{\nabla}_l P^h_{ki} - \nabla_l \nabla_j P^h_{ki} + \nabla_j \nabla_l P^h_{ki} =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\lambda^2}{2(1+\lambda)^2}(P^h_{\alpha i}(\nabla_l P^\alpha_{jk} - \nabla_j P^\alpha_{lk} + \overset{\lambda}{\nabla}_l P^\alpha_{jk} - \overset{\lambda}{\nabla}_j P^\alpha_{lk}) - \\ &- P^\alpha_{ki}(\nabla_l P^h_{j\alpha} - \nabla_j P^h_{l\alpha} + \overset{\lambda}{\nabla}_l P^h_{j\alpha} - \overset{\lambda}{\nabla}_j P^h_{l\alpha}) + \\ &+ P^h_{k\alpha}(\nabla_l P^\alpha_{ji} - \nabla_j P^\alpha_{li} + \overset{\lambda}{\nabla}_l P^\alpha_{ji} - \overset{\lambda}{\nabla}_j P^\alpha_{li})). \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

Для тензорів Рімана

$$\overset{\lambda}{R}{}^h_{\cdot\, ijk} = R^h_{\cdot\, ijk} + \frac{\lambda}{1+\lambda}(\nabla_k P^h_{ji} - \nabla_j P^h_{ki} + \overset{\lambda}{\nabla}_k P^h_{ji} - \overset{\lambda}{\nabla}_j P^h_{ki}) \tag{1.3.5}$$

та їх коваріантних похідних

$$\begin{aligned} &\overset{\lambda}{\nabla}_l \overset{\lambda}{R}{}^h_{\cdot\, ijk} = \nabla_l R^h_{\cdot\, ijk} + \frac{\lambda}{1+\lambda}(P^h_{l\alpha} R^\alpha_{\cdot\, ijk} - P^\alpha_{li} R^h_{\cdot\, \alpha jk} - P^\alpha_{lj} R^h_{\cdot\, i\alpha k} - \\ &- P^\alpha_{kl} R^h_{\cdot\, ij\alpha} + \frac{1}{2}(\nabla_l \nabla_k P^h_{ji} - \nabla_l \nabla_j P^h_{ki} + \overset{\lambda}{\nabla}_l \overset{\lambda}{\nabla}_k P^h_{ji} - \overset{\lambda}{\nabla}_l \overset{\lambda}{\nabla}_j P^h_{ki})) + \\ &+ \frac{\lambda^2}{2(1+\lambda)^2}(\nabla_\alpha P^h_{ji} P^\alpha_{kl} + \nabla_k P^h_{\alpha i} P^\alpha_{jl} + \nabla_k P^h_{j\alpha} P^\alpha_{il} + \nabla_k P^\alpha_{ij} P^h_{\alpha l}). \end{aligned} \tag{1.3.6}$$

Друга похідна з урахуванням тотожності Річчі приведе до

$$\overset{\lambda}{\nabla}_{[lm]}\ \overset{\lambda}{R}{}^{h}_{ijk} - \nabla_{[lm]} R^h_{ijk} =$$

$$= \frac{\lambda}{2(\lambda+1)}(-R^h_{\alpha lm}(\nabla_{[k} P^{\alpha}_{j]i} + \ \overset{\lambda}{\nabla}_{[k} P^{\alpha}_{j]i}) - \ \overset{\lambda}{R}{}^{\alpha}_{ijk}(\nabla_{[m} P^h_{l]\alpha} + \overset{\lambda}{\nabla}_{[m} P^h_{l]\alpha}) +$$

$$+R^{\alpha}_{ilm}(\nabla_{[k} P^h_{j]\alpha} + \ \overset{\lambda}{\nabla}_{[k} P^h_{j]\alpha}) + \overset{\lambda}{R}{}^{h}_{\alpha jk}(\nabla_{[m} P^{\alpha}_{l]i} + \ \overset{\lambda}{\nabla}_{[m} P^{\alpha}_{l]i}) + \tag{1.3.7}$$

$$+R^{\alpha}_{jlm}(\nabla_{[k} P^h_{\alpha]i} + \ \overset{\lambda}{\nabla}_{[k} P^h_{\alpha]i}) + \overset{\lambda}{R}{}^{h}_{i\alpha k}(\nabla_{[m} P^{\alpha}_{l]j} + \ \overset{\lambda}{\nabla}_{[m} P^{\alpha}_{l]j}) +$$

$$+R^{\alpha}_{klm}(\nabla_{[\alpha} P^h_{j]i} + \ \overset{\lambda}{\nabla}_{[\alpha} P^h_{j]i}) + \overset{\lambda}{R}{}^{h}_{ij\alpha}(\nabla_{[m} P^{\alpha}_{l]k} + \ \overset{\lambda}{\nabla}_{[m} P^{\alpha}_{l]k})).$$

Отримаємо аналогічні формули для тензора Річчі

$$\overset{\lambda}{R}_{ij} = R_{ij} + \frac{\lambda}{2(\lambda+1)}(\nabla_{\alpha} P^{\alpha}_{ji} - \ \nabla_j P^{\alpha}_{\alpha i} + \ \overset{\lambda}{\nabla}_{\alpha} P^{\alpha}_{ji} - \overset{\lambda}{\nabla}_j P^{\alpha}_{\alpha i}), \tag{1.3.8}$$

коваріантних похідних тензора Річчі в просторах A_n та $\overset{\lambda}{A}_n$ відповідно

$$\overset{\lambda}{\nabla}_k\ \overset{\lambda}{R}_{ij} = \nabla_l R_{ij} - P^{\alpha}_{ki} R_{\alpha j} - \ P^{\alpha}_{kj} R_{\alpha i} +$$

$$+\frac{\lambda}{2(\lambda+1)}(\nabla_{\beta}\nabla_k P^{\beta}_{ji} - \ \nabla_{\beta}\nabla_j P^{\beta}_{ki} + \overset{\lambda}{\nabla}_{\beta}\ \overset{\lambda}{\nabla}_k P^{\beta}_{ji} - \overset{\lambda}{\nabla}_{\beta}\ \overset{\lambda}{\nabla}_j P^{\beta}_{ki}) + \tag{1.3.9}$$

$$+\frac{\lambda^2}{2(\lambda+1)^2}(\nabla_{\alpha} P^{\beta}_{ji} P^{\alpha}_{k\beta} + \ \nabla_k P^{\beta}_{\alpha i} P^{\alpha}_{j\beta} + \nabla_k P^{\beta}_{j\alpha} P^{\alpha}_{i\beta} + \ \nabla_k P^{\alpha}_{ij} P^{\beta}_{\alpha\beta}).$$

З урахуванням тотожності Річчі, одержимо

$$\overset{\lambda}{\nabla}_{[lm]} \overset{\lambda}{R}_{ij} - \nabla_{[lm]} R_{ij} =$$

$$= \frac{\lambda}{2(\lambda+1)}(-R^{\beta}_{\alpha lm}(\nabla_{[\beta} P^{\alpha}_{j]i} + \overset{\lambda}{\nabla}_{[\beta} P^{\alpha}_{j]i}) - \overset{\lambda}{R}{}^{\alpha}_{ij\beta}(\nabla_{[m} P^{\beta}_{l]\alpha} + \overset{\lambda}{\nabla}_{[m} P^{\beta}_{l]\alpha}) +$$

$$+R^{\alpha}_{ilm}(\nabla_{[\beta} P^{\beta}_{j]\alpha} + \overset{\lambda}{\nabla}_{[\beta} P^{\beta}_{j]\alpha}) + \overset{\lambda}{R}_{\alpha j}(\nabla_{[m} P^{\alpha}_{l]i} + \overset{\lambda}{\nabla}_{[m} P^{\alpha}_{l]i}) + \tag{1.3.10}$$

$$+R^{\alpha}_{jlm}(\nabla_{[\beta} P^{\beta}_{\alpha]i} + \overset{\lambda}{\nabla}_{[\beta} P^{\beta}_{\alpha]i}) + \overset{\lambda}{R}_{i\alpha}(\nabla_{[m} P^{\alpha}_{l]j} + \overset{\lambda}{\nabla}_{[m} P^{\alpha}_{l]j}) +$$

$$+R^{\alpha}_{\beta lm}(\nabla_{[\alpha} P^{\beta}_{j]i} + \overset{\lambda}{\nabla}_{[\alpha} P^{\beta}_{j]i}) + \overset{\lambda}{R}{}^{\beta}_{ij\alpha}(\nabla_{[m} P^{\alpha}_{l]\beta} + \overset{\lambda}{\nabla}_{[m} P^{\alpha}_{l]\beta})).$$

Теорема 1.3.1. *Якщо простори* A_n *та* $\bar{A}_n$ *дозволяють відображення, що відповідає тензору деформації* P^h_{ij} *, тоді існує укорочене відображення, за якого тензори деформації, Рімана, Річчі та їх коваріантні похідні задовольняють умовам* (1.3.4) – (1.3.10).

Якщо $\lambda = 1$, то таке відображення називається укороченим навпіл або половинним, а сама зв'язність — середньою.

Для середньої зв'язності тензор деформації задовольняє умовам

$$\overset{c}{\nabla}_k P^h_{ij}(x) - \nabla_k P^h_{ij}(x) =$$

$$= \frac{1}{4}\,(P^h_{k\alpha}(x) P^{\alpha}_{ij}(x) - P^{\alpha}_{ki}(x) P^h_{\alpha j}(x) - P^{\alpha}_{kj}(x) P^h_{i\alpha}(x)). \tag{1.3.11}$$

Тут $\overset{c}{\nabla}_k$ — коваріантна похідна по середній зв'язності.

Для других коваріантних похідних

$$
\begin{gathered}
\overset{c}{\nabla}_l \overset{c}{\nabla}_j P^h_{ki} - \overset{c}{\nabla}_j \overset{c}{\nabla}_l P^h_{ki} - \nabla_l \nabla_j P^h_{ki} + \nabla_j \nabla_l P^h_{ki} = \\
= \frac{1}{8}(P^h_{\alpha i}(\nabla_l P^\alpha_{jk} - \nabla_j P^\alpha_{lk} + \overset{c}{\nabla}_l P^\alpha_{jk} - \overset{c}{\nabla}_j P^\alpha_{lk}) - \\
- P^\alpha_{ki}(\nabla_l P^h_{j\alpha} - \nabla_j P^h_{l\alpha} + \overset{c}{\nabla}_l P^h_{j\alpha} - \overset{c}{\nabla}_j P^h_{l\alpha}) + \\
+ P^h_{k\alpha}(\nabla_l P^\alpha_{ji} - \nabla_j P^\alpha_{li} + \overset{c}{\nabla}_l P^\alpha_{ji} - \overset{c}{\nabla}_j P^\alpha_{li})).
\end{gathered} \tag{1.3.12}
$$

Це дає можливість для тензорів Рімана рівняння (1.2.12) записати в вигляді :

$$
\bar{R}^h_{.\,ijk} = R^h_{.\,ijk} + \overset{c}{\nabla}_k P^h_{ji} - \overset{c}{\nabla}_j P^h_{ki}. \tag{1.3.13}
$$

Для похідної тензора Рімана

$$
\begin{gathered}
\overset{c}{\nabla}_l \overset{c}{R}{}^h_{.\,ijk} = \nabla_l R^h_{.\,ijk} + \frac{1}{2}(P^h_{l\alpha} R^\alpha_{.\,ijk} - P^\alpha_{li} R^h_{.\,\alpha jk} - P^\alpha_{lj} R^h_{.\,i\alpha k} - \\
- P^\alpha_{kl} R^h_{.\,ij\alpha} + \frac{1}{2}(\nabla_l \nabla_k P^h_{ji} - \nabla_l \nabla_j P^h_{ki} + \overset{c}{\nabla}_l \overset{c}{\nabla}_k P^h_{ji} - \overset{c}{\nabla}_l \overset{c}{\nabla}_j P^h_{ki})) + \\
+ \frac{1}{8}(\nabla_\alpha P^h_{ji} P^\alpha_{kl} + \nabla_k P^h_{\alpha i} P^\alpha_{jl} + \nabla_k P^h_{j\alpha} P^\alpha_{il} + \nabla_k P^\alpha_{ij} P^h_{\alpha l}).
\end{gathered} \tag{1.3.14}
$$

З урахуванням тотожності Річчі можемо записати

$$\overset{c}{\nabla}_{[lm]} \overset{c}{R}{}^h_{ijk} - \nabla_{[lm]} R^h_{ijk} =$$

$$= \frac{1}{4}(-R^h_{\alpha lm}(\nabla_{[k} P^\alpha_{j]i} + \overset{c}{\nabla}_{[k} P^\alpha_{j]i}) - \overset{c}{R}{}^\alpha_{ijk}(\nabla_{[m} P^h_{l]\alpha} + \overset{c}{\nabla}_{[m} P^h_{l]\alpha}) +$$

$$+R^\alpha_{ilm}(\nabla_{[k} P^h_{j]\alpha} + \overset{c}{\nabla}_{[k} P^h_{j]\alpha}) + \overset{c}{R}{}^h_{\alpha jk}(\nabla_{[m} P^\alpha_{l]i} + \overset{c}{\nabla}_{[m} P^\alpha_{l]i}) + \tag{1.3.15}$$

$$+R^\alpha_{jlm}(\nabla_{[k} P^h_{\alpha]i} + \overset{c}{\nabla}_{[k} P^h_{\alpha]i}) + \overset{c}{R}{}^h_{i\alpha k}(\nabla_{[m} P^\alpha_{l]j} + \overset{c}{\nabla}_{[m} P^\alpha_{l]j}) +$$

$$+R^\alpha_{klm}(\nabla_{[\alpha} P^h_{j]i} + \overset{c}{\nabla}_{[\alpha} P^h_{j]i}) + \overset{c}{R}{}^h_{ij\alpha}(\nabla_{[m} P^\alpha_{l]k} + \overset{c}{\nabla}_{[m} P^\alpha_{l]k})).$$

Згортаючи (1.3.13), для тензорів Річчі будемо мати

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + \overset{c}{\nabla}_\alpha P^\alpha_{ji} - \overset{c}{\nabla}_j P^\alpha_{\alpha i}. \tag{1.3.16}$$

Для коваріантних похідних тензора Річчі

$$\overset{c}{\nabla}_k \overset{c}{R}_{ij} = \nabla_l R_{ij} - P^\alpha_{ki} R_{\alpha j} - P^\alpha_{kj} R_{\alpha i} +$$

$$+\frac{1}{4}(\nabla_\beta \nabla_k P^\beta_{ji} - \nabla_\beta \nabla_j P^\beta_{ki} + \overset{c}{\nabla}_\beta \overset{c}{\nabla}_k P^\beta_{ji} - \overset{c}{\nabla}_\beta \overset{c}{\nabla}_j P^\beta_{ki}) + \tag{1.3.17}$$

$$+\frac{1}{8}(\nabla_\alpha P^\beta_{ji} P^\alpha_{k\beta} + \nabla_k P^\beta_{\alpha i} P^\alpha_{j\beta} + \nabla_k P^\beta_{j\alpha} P^\alpha_{i\beta} + \nabla_k P^\alpha_{ij} P^\beta_{\alpha\beta}).$$

Для тензора Річчі з урахуванням тотожності Річчі

$$\overset{c}{\nabla}_{[lm]} \overset{c}{R}_{ij} - \nabla_{[lm]} R_{ij} =$$

$$= \frac{1}{4}(-R^{\beta}_{\alpha lm}(\nabla_{[\beta} P^{\alpha}_{j]i} + \overset{c}{\nabla}_{[\beta} P^{\alpha}_{j]i}) - \overset{c}{R}{}^{\alpha}_{ij\beta}(\nabla_{[m} P^{\beta}_{l]\alpha} + \overset{c}{\nabla}_{[m} P^{\beta}_{l]\alpha}) +$$

$$+ R^{\alpha}_{ilm}(\nabla_{[\beta} P^{\beta}_{j]\alpha} + \overset{c}{\nabla}_{[\beta} P^{\beta}_{j]\alpha}) + \overset{c}{R}_{\alpha j}(\nabla_{[m} P^{\alpha}_{l]i} + \overset{c}{\nabla}_{[m} P^{\alpha}_{l]i}) + \tag{1.3.18}$$

$$+ R^{\alpha}_{jlm}(\nabla_{[\beta} P^{\beta}_{\alpha]i} + \overset{c}{\nabla}_{[\beta} P^{\beta}_{\alpha]i}) + \overset{c}{R}_{i\alpha}(\nabla_{[m} P^{\alpha}_{l]j} + \overset{c}{\nabla}_{[m} P^{\alpha}_{l]j}) +$$

$$+ R^{\alpha}_{\beta lm}(\nabla_{[\alpha} P^{\beta}_{j]i} + \overset{c}{\nabla}_{[\alpha} P^{\beta}_{j]i}) + \overset{c}{R}{}^{\beta}_{ij\alpha}(\nabla_{[m} P^{\alpha}_{l]\beta} + \overset{c}{\nabla}_{[m} P^{\alpha}_{l]\beta})).$$

Теорема 1.3.2. *Якщо простори A_n та $\bar{A}_n$ дозволяють відображення, що відповідає тензору деформації P^h_{ij} , тоді існує половинне відображення, за якого тензори деформації, Рімана, Річчі та їх коваріантні похідні задовольняють умовам* (1.3.11) – (1.3.18).

Доведені теореми дозволяють відповідати на питання, що виникають при відображеннях зі збереженням об'єктів — тензора Рімана, Річчі, їх коваріантних похідних, а також в разі завдання умов на тензор деформації. Наприклад, для тензора Вейля отримаємо, пригадавши, що тензор Вейля W^h_{ijk} визначається, як

$$\begin{gathered} W^h_{ijk} \overset{def}{=} R^h_{ijk} - \frac{1}{n-1}\left(\delta^h_k R_{ij} - \delta^h_j R_{ik}\right) + \\ + \frac{1}{n+1}\left(\delta^h_i R_{[jk]} - \frac{1}{n-1}\left(\delta^h_k R_{[ji]} - \delta^h_j R_{[ki]}\right)\right). \end{gathered} \tag{1.3.19}$$

Для еквіафінних просторів останнє рівняння приймає вигляд

$$W^h_{ijk} \stackrel{def}{=} R^h_{ijk} - \frac{1}{n-1}(\delta^h_k R_{ij} - \delta^h_j R_{ik}). \tag{1.3.20}$$

При відображеннях тензори Вейля A_n та $\bar{A}_n$ пов'язані співвідношеннями

$$\begin{gathered}\bar{W}^h_{ijk} = W^h_{ijk} + \overset{c}{\nabla}_k P^h_{ji} - \overset{c}{\nabla}_j P^h_{ki} - \\ -\frac{1}{n-1}\left(\delta^h_k(\overset{c}{\nabla}_\alpha P^\alpha_{ji} - \overset{c}{\nabla}_j P^\alpha_{\alpha i}) - \delta^h_j(\overset{c}{\nabla}_\alpha P^\alpha_{ki} - \overset{c}{\nabla}_k P^\alpha_{\alpha i})\right) + \\ +\frac{1}{n+1}(\delta^h_i(\overset{c}{\nabla}_j P^\alpha_{\alpha k} - \overset{c}{\nabla}_k P^\alpha_{\alpha j}) - \\ -\frac{1}{n-1}(\delta^h_k(\overset{c}{\nabla}_j P^\alpha_{\alpha i} - \overset{c}{\nabla}_i P^\alpha_{\alpha j}) - \delta^h_j(\overset{c}{\nabla}_k P^\alpha_{\alpha i} - \overset{c}{\nabla}_i P^\alpha_{\alpha k})))\end{gathered} \tag{1.3.21}$$

або, для еквіафінних просторів

$$\begin{gathered}\bar{W}^h_{ijk} = W^h_{ijk} + \overset{c}{\nabla}_k P^h_{ji} - \overset{c}{\nabla}_j P^h_{ki} - \\ -\frac{1}{n-1}\left(\delta^h_k(\overset{c}{\nabla}_\alpha P^\alpha_{ji} - \overset{c}{\nabla}_j P^\alpha_{\alpha i}) - \delta^h_j(\overset{c}{\nabla}_\alpha P^\alpha_{ki} - \overset{c}{\nabla}_k P^\alpha_{\alpha i})\right).\end{gathered} \tag{1.3.22}$$

Має місце теорема

Теорема 1.3.3. *Якщо при відображенні просторів афінної зв'язності зберігається тензор Вейля, то тензор деформації задовольняє умовам*

$$
\begin{gathered}
\overset{c}{\nabla}_k P^h_{ji} - \overset{c}{\nabla}_j P^h_{ki} = \\
= \frac{1}{n-1}\left(\delta^h_k(\overset{c}{\nabla}_\alpha P^\alpha_{ji} - \overset{c}{\nabla}_j P^\alpha_{\alpha i}) - \delta^h_j(\overset{c}{\nabla}_\alpha P^\alpha_{ki} - \overset{c}{\nabla}_k P^\alpha_{\alpha i})\right) - \\
- \frac{1}{n+1}(\delta^h_i(\overset{c}{\nabla}_j P^\alpha_{\alpha k} - \overset{c}{\nabla}_k P^\alpha_{\alpha j}) - \\
- \frac{1}{n-1}(\delta^h_k(\overset{c}{\nabla}_j P^\alpha_{\alpha i} - \overset{c}{\nabla}_i P^\alpha_{\alpha j}) - \delta^h_j(\overset{c}{\nabla}_k P^\alpha_{\alpha i} - \overset{c}{\nabla}_i P^\alpha_{\alpha k}))),
\end{gathered}
\tag{1.3.23}
$$

а для еквіафінних просторів

$$
\begin{gathered}
\overset{c}{\nabla}_k P^h_{ji} - \overset{c}{\nabla}_j P^h_{ki} = \\
= \frac{1}{n-1}\left(\delta^h_k(\overset{c}{\nabla}_\alpha P^\alpha_{ji} - \overset{c}{\nabla}_j P^\alpha_{\alpha i}) - \delta^h_j(\overset{c}{\nabla}_\alpha P^\alpha_{ki} - \overset{c}{\nabla}_k P^\alpha_{\alpha i})\right).
\end{gathered}
\tag{1.3.24}
$$

Таким чином, задача про спеціальні відображення або про відображення спеціальних просторів зводиться до вивчення диференціальних рівнянь в коваріантних похідних.

Вивчення цих рівнянь дає можливість як якісного аналізу, тобто відповіді на питання: існує чи не існує розв'язок, так і більш глибоких результатів в разі існування розв'язків.

Йдучи шляхом спеціалізації відображень вивчимо можливості спрощення вигляду тензора деформації, а саме доведемо теорему:

Теорема 1.3.4. *Умови*

$$P^h_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = a(u)u^h + \overset{1}{b}(u)F^h_\alpha u^\alpha \tag{1.3.25}$$

та

$$P^h_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = a(u)u^h + \overset{2}{b}(u)v^h \tag{1.3.26}$$

виконуються тотожно відносно довільного вектора u^i тоді і тільки тоді, коли відповідно

$$P^h_{ij} = \psi_{(i}\delta^h_{j)} + \varphi_{(i}F^h_{j)} \tag{1.3.27}$$

та

$$P^h_{ij} = \psi_{(i}\delta^h_{j)} + v^h a_{ij}, \tag{1.3.28}$$

причому,

$$a(u) = 2\psi_\alpha u^\alpha; \quad \overset{1}{b}(u) = 2\varphi_\alpha u^\alpha; \quad \overset{2}{b}(u) = a_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta.$$

Тут P^h_{ij} — тензор деформації, u^i, v^i — компоненти деякого вектора, $a(u)$, $\overset{1}{b}(u)$, $\overset{2}{b}(u)$ — деякі функції, a_{ij} — тензор, F^h_i — афінор.

Для випадку $\overset{1}{b} = \overset{2}{b} = 0$ цю теорему доведено Т. Леві–Чивітою [54], суттєвою є вимога, що $n > 2$.

Для випадку $n = 2$ ця теорема не є вірною. Ми скористаємось для доведення методикою, запропонованою М.С. Сінюковим та Й. Мікешем [180, 78].

Дійсно, нехай тотожно виконуються умови (1.3.25) відносно довільного вектору u.

Домнажаючи (1.3.25) на $u^i F^j_\alpha u^\alpha$, а потім альтернуючи за індексами h, i та j, отримаємо однорідний поліном 4-го порядку відносно компонентів вектору u. Через довільність u із отриманого витікає

$$P^{[h}_{(\alpha\beta}\delta^i_j F^{j]}_{\delta)} = 0. \tag{1.3.29}$$

Нехай ε^h — власний вектор матриці F^h_i, що відповідає власному значенню ρ, тобто

$$\varepsilon^\alpha F^h_\alpha = \rho\varepsilon^h, \tag{1.3.30}$$

тут ε^h та ρ можуть приймати і комплексні значення.

Тоді $\varepsilon^\alpha G^h_\alpha = 0$, якщо $G^h_i \stackrel{def}{=} F^h_i - \rho\delta^h_i$.

Розглянемо випадок, коли ранг матриці $\left\| G^h_i - \varepsilon^h a_i \right\|$ більше одиниці.

Згортаючи (1.3.29) з $\varepsilon^\beta\varepsilon^\gamma\varepsilon^\delta$ при умові, що $n \geq 3$, переконаємось в справедливості $P^h_{\alpha\beta}\varepsilon^\alpha\varepsilon^\beta \neq k\varepsilon^h$. Тут k — деякий інваріант.

Згортаючи після цього (1.3.29) зі $\varepsilon^\gamma\varepsilon^\delta$, знайдемо

$$P^h_{i\alpha}\varepsilon^\alpha = \beta G^h_i + \varepsilon^h \overset{1}{b}_i. \tag{1.3.31}$$

І нарешті, згортаючи (1.3.29) зі ε^δ, отримаємо рівняння (1.3.27).

Тепер розглянемо випадок, коли не виконуються обмеження на ранг матриці, тобто має місце

$$F_i^h = \rho\delta_i^h + a_i\varepsilon^h + \overset{1}{b}_i c^h, \tag{1.3.32}$$

причому, a_i, b_i, ε^h, c^h — не колінеарні, бо інакше порушувалась би умова (1.3.25).

Оскільки $\varepsilon^\alpha a_\alpha = \varepsilon^\alpha \overset{1}{b}_\alpha = 0$, то згортаючи (1.3.29) з $\varepsilon^\beta\varepsilon^\gamma\varepsilon^\delta$, переконаємось, що $A^h_{\alpha\beta}\varepsilon^\alpha\varepsilon^\beta$ компланарний з ε^h та c^h. Після цього, згортаючи (1.3.29) зі $\varepsilon^\gamma\varepsilon^\delta$ знайдемо, що $P^h_{i\alpha}\varepsilon^\alpha = a_i\varepsilon^h + \beta c^h$.

І нарешті, згортаючи (1.3.29) зі ε^δ, знайдемо

$$P^h_{ij} = a_{ij}\varepsilon^h + b_{ij}c^h. \tag{1.3.33}$$

Із цього та (1.3.29), випливає

$$a_{(ij}\overset{1}{b}_{k)} = b_{(ij}a_{k)}. \tag{1.3.34}$$

Оскільки a_i, b_i — неколінеарні, то з (1.3.34) отримаємо

$$a_{ij} = a_{(i}\varphi_{j)} \quad \text{та} \quad b_{ij} = \overset{1}{b}_{(i}\varphi_{j)}. \tag{1.3.35}$$

І тоді (1.3.33) приймає вигляд, який вимагався умовами теореми.

Необхідність очевидна, а те, що з (1.3.26) будемо мати (1.3.28), доводиться аналогічно.

Таким чином, теорему доведено.

Наведена теорема може служити аргументом для введення наступного означення.

Означення 1.3.2. *Відображення простору афінної зв'язності A_n на $\bar{A}_n$ називають фундаментальним, якщо тензор деформації P^h_{ij} має вигляд*

$$P^h_{ij} = \underset{1}{\alpha}\, \delta^h_{(i}\psi_{j)} + \underset{2}{\alpha}\, \varphi_{(i}F^h_{j)} + \underset{3}{\alpha}\, u^h a_{ij}, \tag{1.3.36}$$

тут $\underset{1}{\alpha}$, $\underset{2}{\alpha}$, $\underset{3}{\alpha}$ — числа, що дорівнюють нулю або одиниці, φ_i, ψ_i, u^h — вектори, a_{ij}, F^h_j — тензори.

Якщо $\underset{1}{\alpha} = 0$, то фундаментальне відображення називають канонічним.

Задаючи різні значення $\underset{r}{\alpha}$ та властивості векторів та тензорів в рівнянні (1.3.36), ми отримаємо спеціальні типи відображень.

1.4 Відображення просторів афінної зв'язності наріманові простори

Дифеоморфізми і автоморфізми узагальнених геометричних просторів, як відомо, складають важливу чистину диференціальної геометрії. Багато праць присвячено вивченню ізометричних, гомотетичних, конформних, афінних, геодезичних (проективних), квазігеодезичних, голоморфно-проективних, майже геодезичних, F–пласких та інших відображень, перетворень і деформацій.

Очевидно, існування розв'язків фундаментальних рівнянь визначає існування відображень, перетворень і деформацій, які підлягають вивченню. В свою чергу, ці фундаментальні рівняння мають складну форму. Серед них виділяються рівняння, які мають зручний для вивчання вигляд, це системи диференціальних рівнянь в частинних похідних типу Коші. Для них, у випадку, коли вони мають лінійну форму, існують алгебраїчні методи дослідження. Вивчення цих систем має багато аспектів, які зосереджені на питаннях існування та кількості розв'язків, диференційованості функцій, локальних і глобальних властивостей розв'язків.

В подальшому обмежимося локальною теорією [173, 174, 175].

Припустимо, що $D \subset R^n$ — випукла область з координатами $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ і функції $F_i^A(x, y)$, $i = 1, \dots, n$, $A = 1, \dots, N$, визначені на області $\tilde{D} \subset D \times R^n$. Також вважатимемо, що функції $F_i^A(x, y)$ неперервні відносно змінних x і диференційовані відносно y в області $\tilde{D}$.

Система диференціальних рівнянь в частинних похідних типу Коші має вигляд

$$\frac{\partial y^A(x)}{\partial x^i} = F_i^A(x, y(x)), \quad A,\, B = 1, \dots, N, \quad i = 1, \dots, n, \tag{1.4.1}$$

де $y(x) = (y^1(x), \dots, y^N(x))$ — невідомі функції.

Для початкових значень (початкові умови Коші)

$$y^A(x_0) = y_0^A, A = 1, \ldots, N, \tag{1.4.2}$$

де $x_0 \in D$ і $(x_0, y_0^A) \in \tilde{D}$ система (1.4.1) має не більше одного розв'язку

$$y^A = y^A(x^1, \ldots, x^n), \tag{1.4.3}$$

у класі C^1, при цьому $(x, y(x)) \in \tilde{D}$. Із цього факту витікає, що загальний розв'язок системи (1.4.1) залежить від $r \leq N$ дійсних параметрів.

Припустимо, що $F_i^A(x, y) \in C^1(\tilde{D})$ і шуканий розв'язок $y^A(x) \in C^2(D)$. Тоді умови інтегрованості (1.4.1) запишуться в вигляді

$$\partial_{jk} y^A(x) = \partial_{kj} y^A(x) \tag{1.4.4}$$

і, згідно (1.4.1), $\partial_k(F_j^A(x, y(x))) = \partial_j(F_k^A(x, y(x)))$ виглядають наступним чином

$$\partial_k F_j^A(x, y) + \partial_B F_j^A(x, y) \partial_k y^B - \partial_j F_k^A(x, y) - \partial_B F_k^A(x, y) \partial_j y^B = 0.$$

Використовуючи (1.4.1), одержимо

$$\partial_k F_j^A + \partial_B F_j^A F_k^B - \partial_j F_k^A - \partial_B F_k^A F_j^B = 0. \tag{1.4.5}$$

Тут введені позначення $\partial_k F_j^A = \dfrac{\partial F_j^A}{\partial x^k}$, $\partial_B F_j^A = \dfrac{\partial F_j^A}{\partial y^B}$.

Для всіх розв'язків (1.4.3) системи (1.4.1) умови (1.4.5) виконуються тотожно у всіх точках $x \in D$. Між іншим, ці умови повинні виконуватися для початкових умов Коші (1.4.2).

Умови (1.4.4) називаються умовами інтегрованості системи (1.4.1).

В випадку, коли (1.4.5) виконується тотожно для всіх $x \in D$, система (1.4.1) називається цілком інтегрованою. В цьому випадку система має розв'язок для будь-яких початкових умов (1.4.2), тобто загальний розв'язок системи (1.4.1) залежить від N дійсних параметрів.

Припустимо, що окрім рівнянь (1.4.1) $y^A(x)$ задовольняють додатковим рівнянням

$$f^p(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^N) = 0, \;\; p = 1, \ldots m. \tag{1.4.6}$$

Функції $f^p(x, y)$ визначені в області $\tilde{D}$.

Сукупність (1.4.1) і (1.4.6) має назву змішана система диференціальних рівнянь в частинних похідних типу Коші. При вивченні цієї системи умови інтегрованості (1.4.5) і (1.4.6) розглядаються разом, при цьому скорочено вони позначаються через (B).

Нехай $F_i^A(x, y) \in C^{r+2}(\tilde{D})$ і $f^p(x, y) \in C^{r+1}(\tilde{D})$. Звідси послідовним диференціюванням отримаємо диференціальні подовження $(B_1), (B_2), \ldots, (B_r)$. Позначимо $B_0 \equiv (B)$. Тоді (B_{k+1}) отримається із (B_k) диференціюванням всіх рівнянь по ∂_i, $i = 1, \ldots, n$. Всі рівняння $(B_0), (B_1), \ldots, (B_r)$ повинні задовольняти початковим умовам (1.4.2).

Сформульована нижче теорема наводиться в працях Л.П. Ейзенхарта, П.К. Рашевського, М.С. Сінюкова [20, 174, 178]. Для аналітичних розв'язків її можна записати так:

Теорема 1.4.1. *Змішана система рівнянь в частинних похідних* (1.4.1), (1.4.6) *типу Коші має в околі точки* $x_0 = (x_0^i)$ *єдиний розв'язок* (1.4.3) *в класі* C^{r+1}, *який відповідає початковим умовам* (1.4.2) *тоді і тільки тоді, коли умови* $(B_0), (B_1), \ldots, (B_r)$ *виконуються в точці* (x_0, y_0) *і* r *є найменшим значенням, для якого умови* (B_{r+1}) *будуть наслідком системи попередніх подовжень.*

Систему (1.4.1) також можливо записати на мові коваріантних похідних. Основне дослідження (1.4.1) зводиться до розгляду умов інтегрованості, які є алгебраїчними умовами відносно невідомих змінних y^A. В цьому випадку маємо $r = N$.

Раніше розглянуті системи мають велике значення, коли зводяться до лінійних. В цьому випадку диференціальні рівняння (1.4.1) та умови (1.4.6) запишуться в наступному вигляді

$$\frac{\delta y^A(x)}{\delta x^i} = F^A_{iB}(x) \cdot y^B(x) + F^A_i(x), \tag{1.4.7}$$

$$f^p_B(x) \cdot y^B + f^p(x) = 0, \tag{1.4.8}$$

де $F^A_{iB}(x)$, $F^A_i(x), f^p_B(x), f^p(x)$ — функції на D.

Умови інтегрованості (1.4.7) лінійні алгебраїчні рівняння відносно невідомих функцій y^A і, очевидно, вони мають вигляд умов (1.4.8):

$$
\begin{gathered}
(\partial_k F^A_{jB} - \partial_j F^A_{kB} F^A_{jC} F^C_{kB} - F^A_{kC} F^C_{jB}) y^B + \\
+\partial_k F^A_j - \partial_j F^A_k + F^A_{jC} F^C_k - F^A_{kC} F^C_j = 0.
\end{gathered}
\tag{1.4.9}
$$

Коли F^A_{iB}, $F^A_i \in C^{r+2}(D)$ і f^p_B, $f^p \in C^{r+1}(D)$, тоді існують умови $(B_0) \equiv (B)$ і їх диференціальні подовження $(B_1), \ldots, (B_r), (B_{r+1})$, які є лінійними алгебраїчними рівняннями відносно невідомих функцій $y^A(x)$, з коефіцієнтами, які є деякими функціями змінної $x \in D$.

Очевидно, виконується теорема 1.4.1 і, отже, задача про те, чи має розв'язок лінійна система (1.4.7), (1.4.8), зводиться до того, чи має розв'язок лінійна алгебраїчна система $(B_0), (B_1), \ldots$.

Для застосування теорії систем диференціальних рівнянь в частинних похідних типу Коші в геометрії рівняння (1.4.1) і (1.4.7) записують в тензорній формі.

Нехай $D \subset R^n$ є координатним околом просторів A_n з афінною зв'язністю ∇. Система диференціальних рівнянь в частинних похідних типу Коші в коваріантних похідних (відносно афінної зв'язності ∇) відносно m невідомих тензорних полів $\underset{\sigma}{Y}{}^{i_1 i_2 \ldots i_{p_\sigma}}_{j_1 j_2 \ldots j_{q_\sigma}}(x)$, $\sigma = 1, \ldots m$, типу (p_σ, q_σ) має наступний вигляд:

$$
\begin{gathered}
\underset{\sigma}{Y}{}^{i_1 i_2 \ldots i_{p_\sigma}}_{j_1 j_2 \ldots j_{q_\sigma}, k}(x) = \underset{\sigma}{F}{}^{i_1 i_2 \ldots i_{p_\sigma}}_{j_1 j_2 \ldots j_{q_\sigma} k}(x, \underset{1}{Y}, \ldots, \underset{m}{Y}), \\
i_1, i_2, \ldots i_p,\ \ j_1, j_2, \ldots j_p,\ k = 1, 2, \ldots, n.
\end{gathered}
\tag{1.4.10}
$$

Права частина (1.4.10) — це тензорні функції типу (p_σ, q_σ), які побудовані визначеним засобом за допомогою скінченої кількості тензорних операцій відносно невідомих тензорних полів $\underset{\sigma}{Y}$, а також компонент деяких відомих об'єктів, які включають лінійні зв'язності ∇. Умови інтегрованості (1.4.10), враховуючи тотожності Річчі для тензорів $\underset{\alpha}{Y}{}^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_p}$:

$$\underset{\sigma}{Y}{}^{h_1 \ldots h_p}_{i_1 \ldots i_q,[lm]} \equiv \underset{\sigma}{Y}{}^{h_1 \ldots h_p}_{\alpha i_2 \ldots i_q} R^{\alpha}_{i_1 lm} + \ldots + \underset{\sigma}{Y}{}^{h_1 \ldots h_p}_{i_1 i_2 \ldots \alpha} R^{\alpha}_{i_q lm} -$$

$$- \underset{\sigma}{Y}{}^{\alpha h_2 \ldots h_p}_{i_1 \ldots i_q} R^{h_1}_{\alpha lm} - \ldots - \underset{\sigma}{Y}{}^{h_1 h_2 \ldots \alpha}_{i_1 i_2 \ldots i_q} R^{h_p}_{\alpha lm} + \underset{\sigma}{Y}{}^{h_1 \ldots h_p}_{i_1 \ldots i_q, \alpha} S^{\alpha}_{lm} = \tag{1.4.11}$$

$$= \underset{\sigma}{F}{}^{i_1 i_2 \ldots i_{p_\sigma}}_{j_1 j_2 \ldots j_{q_\sigma} l,m} - \underset{\sigma}{F}{}^{i_1 i_2 \ldots i_{p_\sigma}}_{j_1 j_2 \ldots j_{q_\sigma} m,l}.$$

Таким чином, умови інтегрованості можливо записати в тензорній формі.

Псевдоріманиовим простором V_n називають дійсний диференційований многовид X_n класу C^r, в якому існує поле двічі коваріантного симетричного неособливого тензору g_{ij}, який називають метричним тензором простору.

В кожній локальній системі координат X_n його компоненти — це функції класу C^{r-1} від координатів $x^1,\ x^2,\ \ldots, x^n$ деякої точки $M \in X_n$. Метричний тензор задовольняє умовам

$$g_{ij}(x^1,\ x^2,\ \ldots, x^n) = g_{ji}(x^1,\ x^2,\ \ldots, x^n), \tag{1.4.12}$$

$$g = det\,|g_{ij}(x)| \neq 0. \tag{1.4.13}$$

Тут і далі $i,\ j = 1, 2, \ldots, n$.

Квадратична форма

$$I = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \tag{1.4.14}$$

називається основною метричною формою псевдоріманового простору.

Нагадаємо, що по однойменним індексам діє правило Ейнштейна про сумування.

Для матриці метричного тензора g_{ij} визначають обернену матрицю, яку позначають g^{ij}:

$$g_{\alpha i} g^{\alpha j} = \delta_i^j. \tag{1.4.15}$$

Використовуючи метричний тензор g_{ij}, визначають:

символи Христофеля I роду

$$\Gamma_{ijk}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}(x)}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}(x)}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}(x)}{\partial x^k}\right), \tag{1.4.16}$$

символи Христофеля II роду

$$\Gamma_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij\alpha}(x) g^{\alpha h}(x), \tag{1.4.17}$$

тензор Рімана

$$R^h{}_{ijk} = \partial_j \Gamma_{ik}^h(x) + \Gamma_{ik}^\alpha(x)\Gamma_{j\alpha}^h(x) - \partial_k \Gamma_{ij}^h(x) - \Gamma_{ij}^\alpha(x)\Gamma_{k\alpha}^h(x), \tag{1.4.18}$$

тензор кривини

$$R_{hijk}(x) = g_{h\alpha} R^{\alpha}_{\cdot\, ijk}, \tag{1.4.19}$$

тензор Річчі

$$R_{ij}(x) = R^{\alpha}_{\cdot\, ij\alpha}(x), \tag{1.4.20}$$

скалярну кривину

$$R(x) = g^{\alpha\beta}(x) R_{\alpha\beta}(x). \tag{1.4.21}$$

У псевдоріманових просторах V_n і в просторах афінної зв'язності A_n прямі лінії узагальнюються геодезичними кривими, які характеризуються умовою паралельного перенесення дотичного вектору уздовж них.

Ця умова виражається рівняннями

$$\nabla_{\lambda(s)} \lambda(s) = 0 \text{ або } \nabla_{\lambda(t)} \lambda(t) = g(t) \lambda(t). \tag{1.4.22}$$

Отже, коваріантна похідна ∇ дотичного вектора λ уздовж геодезичної або дорівнює нулю, або уздовж неї колінеарна. Тут s - канонічний параметр і t - загальний параметр.

Геодезичні лінії в псевдоріманових просторах пов'язані з варіаційною задачею про довжину дуги.

Означення 1.4.1. *Дифеоморфізм f простору афінної зв'язності A_n на простір афінної зв'язності $\bar{A}_n$ називається геодезичним* *відображенням, якщо при дифеоморфізмі f усі геодезичні лінії простору A_n відображаються на геодезичні лінії простору $\bar{A}_n$.*

Відображення просторів афінної зв'язності A_n на $\bar{A}_n$ є геодезичним тоді і тільки тоді, коли в спільній за відображенням системі координат x виконуються умови

$$\bar{\Gamma}^h_{ij}(x) = \Gamma^h_{ij}(x) + \delta^h_i \varphi_j + \delta^h_j \varphi_i, \tag{1.4.23}$$

де $\varphi_i(x)$ — деякий вектор.

Якщо $\varphi_i(x) \not\equiv 0$, то геодезичне відображення називають нетривіальним. Якщо $\varphi_i(x) = 0$, то геодезичне відображення називають тривіальним або афінним.

Еквіафінний простір A_n дозволяє геодезичне відображення на V_n тоді і тільки тоді, коли в A_n існує розв'язок системи однорідних лінійних рівнянь в коваріантних похідних типу Коші [78]:

$$a^{ij}_{,k} = \delta^i_k \lambda^j + \delta^j_k \lambda^i; \tag{1.4.24}$$

$$n\lambda^i_{,j} = \mu \delta^i_j + a^{i\alpha} R_{\alpha j} - a^{\alpha\beta} R^i_{\alpha\beta j}; \tag{1.4.25}$$

$$(n-1)\mu_{,i} = 2(n+1)\lambda^\alpha R_{\alpha i} + a^{\alpha\beta}(2R_{\alpha i,\beta} - R_{\alpha\beta,i}) \tag{1.4.26}$$

відносно невідомих симетричного невиродженого тензора a^{ij}, вектору λ^i і інваріанту μ. Тут „," знак коваріантної похідної по зв'язності V_n.

Ці розв'язки пов'язані з розв'язками рівнянь (1.4.24) наступними співвідношеннями:

$$a^{ij}(x) = e^{2\varphi}\bar{g}^{ij}; \qquad \lambda^i = -e^{2\varphi}\bar{g}^{i\alpha}\psi_\alpha. \tag{1.4.27}$$

В цьому випадку система є лінійною і її розв'язок зводиться до розгляду умов інтегрованості і їх диференціальних подовжень, які є системою лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно шуканих тензорів a^{ij}, λ^i і μ з коефіцієнтами з простору A_n. Таким чином, принципово вирішується задача про геодезичні відображення еквіафінних A_n, що дозволяють геодезичні відображення на псевдоріманові простори $\bar{V}_n$.

Рівняння (1.4.24) є необхідною і достатньою умовою існування геодезичних відображень еквіафінних $A_n \to \bar{V}_n$. Відображення нетривіальне тоді і тільки тоді, коли $\lambda^i \not\equiv 0$.

Покажемо, що з вказаного вище результату витікає існування системи лінійних рівнянь і для випадку геодезичного відображення простору афінної зв'язності на псевдоріманові простори [39].

Припустимо, що простір A_n дозволяє геодезичне відображення на деякий еквіафінний простір $\tilde{A}_n$, локально визначений зв'язністю:

$$\tilde{\Gamma}^h_{ij}(x) = \Gamma^h_{ij}(x) - \frac{1}{n+1}\left(\delta^h_i \Gamma^\alpha_{j\alpha}(x) + \delta^h_j \Gamma^\alpha_{i\alpha}(x)\right) \tag{1.4.28}$$

і $\tilde{A}_n$ дозволяє геодезичне відображення на псевдоріманових простір $\bar{V}_n$ з метрикою $\bar{g}$.

Тоді формулу (1.4.24) можна переписати так:

$$\tilde{\nabla}_k a^{ij} \equiv \partial_k a^{ij} + a^{\alpha j}\tilde{\Gamma}^i_{\alpha k} + a^{\alpha i}\tilde{\Gamma}^j_{\alpha k} = \lambda^i \delta^j_k + \lambda^j \delta^i_k, \qquad (1.4.29)$$

де $\tilde{\nabla}$ - коваріантна похідна в $\tilde{A}_n$. Підстановкою (1.4.27) в (1.4.28) отримаємо шукане рівняння геодезичного відображення A_n на $\bar{V}_n$ у вигляді

$$a^{ij}_{,k} \equiv \partial_k a^{ij} + a^{\alpha j}\Gamma^i_{\alpha k} + a^{\alpha i}\Gamma^j_{\alpha k} = \frac{2}{n+1} a^{ij}\Gamma^\alpha_{\alpha k} + \delta^i_k \Lambda^j + \delta^j_k \Lambda^i, \qquad (1.4.30)$$

де

$$\Lambda^i = \lambda^i + \frac{1}{n+1} a^{i\beta}\Gamma^\alpha_{\beta\alpha}.$$

Система (1.4.30) є лінійною відносно невідомих функцій $a^{ij}(x)$ і $\lambda^i(x)$, і ця умова виконується у вибраній координатній системі (x^i). У цих рівняннях $a^{ij}(x)$ і $\lambda^i(x)$ є компонентами тензорів і не залежать від вибору координат.

Для усіх розв'язків рівнянь (1.4.30) виконуються умови (1.4.17), за допомогою яких може бути відновлена шукана метрика $\bar{g}$ псевдоріманового простору $\bar{V}_n$. Таким чином, справедлива наступна теорема.

Теорема 1.4.2. *Простір A_n дозволяє геодезичне відображення на псевдоріманoвий простір $\bar{V}_n$ тоді, і тільки тоді, коли існує розв'язок* (1.4.30) *відносно невідомих функцій $a^{ij}(x)$, $det\left(a^{ij}(x)\right) \neq 0$ і $\lambda^i(x)$.*

Геодезичні відображення проективно пласких просторів детально вивчалися в монографіях [170, 178].

Аналізуючи умови інтегрованості рівнянь (1.4.29) і їх перших подовжень в координатному околі, що розглядається, в якому простір A_n не є проективно евклідовим, можна вектор $\lambda^i(x)$ виразити у вигляді

$$\lambda^i = a^{\alpha\beta} G^i_{\alpha\beta}(x), \tag{1.4.31}$$

де $G^i_{\alpha\beta}(x)$ — деякий тензор, визначений за допомогою афінної зв'язності простору A_n. В цьому випадку рівняння (1.4.30) утворюють лінійну систему типу Коші відносно невідомих функцій $a^{ij}(x)$.

Для доведення формули (1.4.31), обмежимось розглядом просторів афінної зв'язності з ненульовим тензором проективної кривини Вейля, тобто $W^h_{ijk} \neq 0$.

Побудуємо ланцюг геодезично відповідних просторів

$$A_n \to \bar{A}_n \to \bar{V}_n. \tag{1.4.32}$$

Тут A_n — довільний простір афінної зв'язності, $\bar{A}_n$ — еквіафінний простір афінної зв'язності, а $\bar{V}_n$ — псевдоріманів простір.

Умови інтегрування для (1.4.30) мають вигляд

$$a^{\alpha(}\ \bar{R}^{j)}_{\alpha kl} = \bar{\nabla}_l \lambda^{(i}\delta^{j)} - \bar{\nabla}_k \lambda^{(i}\delta^{j)}_l, \tag{1.4.33}$$

де $\bar{\nabla}$ — знак коваріантної похідної в $\bar{A}_n$, $\bar{R}^h_{ijk}$ — тензор Рімана $\bar{A}_n$.

Переходячи в останньому до тензора проективної кривини Вейля $\bar{A}_n$, який визначається за формулою

$$\bar{W}^h_{ijk} = \bar{R}^h_{ijk} - \frac{1}{n-1}\left(\delta^h_k \bar{R}_{ij} - \delta^h_j \bar{R}_{ik}\right), \tag{1.4.34}$$

тут $\bar{R}_{ij}$ — тензор Річчі $\bar{A}_n$;
а також враховуючи інваріантність тензора проективної кривини Вейля відносно геодезичних відображень, отримаємо

$$a^{\alpha(i} W^{j)}_{\alpha kl} = \Lambda^{(i}_l \delta^{j)}_k - \Lambda^{(i}_k \delta^{j)}_l, \tag{1.4.35}$$

де Λ^i_j — деякий тензор, а W^h_{ikl} — тензор проективної кривини Вейля простору афінної зв'язності A_n.

Диференціюючи коваріантно по зв'язності A_n, будемо мати

$$\nabla_m a^{\alpha(i} W^{j)}_{\alpha kl} + a^{\alpha(i} \nabla_m W^{j)}_{\alpha kl} = \nabla_m \Lambda^{(i}_l \delta^{j)}_k - \nabla_m \Lambda^{(i}_k \delta^{j)}_l. \tag{1.4.36}$$

Або, враховуючи рівняння (1.4.30),

$$\lambda^{(i} \; W^{j)}_{mkl} + a^{\alpha\beta} T^{ij}_{\alpha\beta klm} = \Lambda^{(i}_{lm} \delta^{j)}_k - \Lambda^{(i}_{km} \delta^{j)}_l + L^{(i}_{kl} \delta^{j)}_m. \tag{1.4.37}$$

Тут $T^{ij}_{\alpha\beta klm}$, Λ^i_{lm}, L^i_{kl} — деякі об'єкти, що визначаються зв'язністю A_n.

Нагадаємо, що $n > 2$, $W^h_{ijk} \neq 0$, тобто $W^1_{223} \neq 0$. Дійсно, якщо $W^1_{223} = 0$, то має місце теорема 1.2.4, а для тензора Вейля це означає $W^h_{ijk} = 0$. Враховуючи це, підставимо в останнє наступні значення індексів:

а). i = 1, ..., n, j = 1, m = k = 2, l = 3;

б). i = j = k = 1, l = 3, m = 2;

в). i = j= m = 1, l = 3, k = 2;

г). i = j = k = 1, l = m = 2.

Це дозволяє переконатись в справедливості рівняння (1.4.31).

Таким чином, має місце наступна теорема [39].

Теорема 1.4.3. *Нехай A_n - простір афінної зв'язності, який (локально) непроективно плаский в околі точки $p \in A_n$. Тоді окіл точки p з A_n дозволяє геодезичне відображення на псевдоріманговий простір $\bar{V}_n$ тоді і тільки тоді, коли замкнута система лінійних диференціальних рівнянь типу Коші в коваріантних похідних в A_n*

$$a^{ij}_{,k} = \frac{2}{n+1} a^{ij} \Gamma^{\alpha}_{\alpha k} + \delta^i_k \Lambda^j + \delta^j_k \Lambda^i, \tag{1.4.38}$$

де

$$\Lambda^i = a^{\alpha\beta} G^i_{\alpha\beta} + \frac{1}{n+1} a^{i\beta} \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha} \tag{1.4.39}$$

має розв'язок відносно симетричного невиродженого тензора a^{ij}.

Таким чином, доведено, що розгляд геодезичних відображень просторів афінної зв'язності на псевдоріманові простори, укорочуючи відображення, можна звести до розгляду геодезичного відображення еквіафінного простору афінної зв'язності на псевдоріманів простір.

Висновки з розділу 1

.

Маючи довгу історію, теорія відображень отримала нове дихання завдяки тензорним методам дослідження. Введене сто років тому поняття афінної зв'язності, дозволило по-новому поглянуть на класичні геометричні задачі.

В цьому розділі вводиться, слідуючи загально прийнятій традиції, поняття відображення простору афінної зв'язності. Модифікуючи методику Нордена [169], знайдено формули, що пов'язують основні тензори, тензор деформації, тензор Рімана, тензор Річчі та їх перші і другі коваріантні похідні для просторів A_n та $\bar{A}_n$, які пов'язані заданим відображенням. В цих формулах присутні як об'єкти A_n, так і $\bar{A}_n$ з коваріантними похідними по відповідних зв'язностях. Для спрощення, введене поняття укороченого відображення і його спеціального випадку — половинного відображення. Зв'язність, яка випливає при половинному відображенні, названа середньою.

Попередні формули при переході до коваріантних похідних в середній зв'язності значно спрощуються. Зокрема має місце теорема 1.3.2:

Теорема 1.3.2. *Якщо простори A_n та $\bar{A}_n$ дозволяють відображення, що відповідає тензору деформації P_{ij}^h , тоді існує половинне відображення, за якого тензори деформації, Рімана, Річчі та їх коваріантні похідні задовольняють умовам* (1.3.11) – (1.3.18).

На прикладі відображення, що зберігає тензор Вейля, показано, як задачі такого типу зводяться до систем диференціальних рівнянь.

Через значні технічні труднощі локальних розв'язків задач такого типу виникає необхідність спеціалізації просторів або відображень.

Далі розглянуті системи диференціальних рівнянь першого порядку типу Коші.

Відмічена можливість використання тотожності Річчі в якості умов інтегрування вказаних систем.

Потім розглянуті геодезичні відображення просторів афінної зв'язності на пседоріманові простори. Доведено, що

Простір A_n дозволяє геодезичне відображення на псевдоріманoвий простір $\bar{V}_n$ тоді, і тільки тоді, коли існує розв'язок (1.4.7) *відносно невідомих функцій $a^{ij}(x)$, $det\left(a^{ij}(x)\right) \neq 0$ і $\lambda^i(x)$.*

А також

Теорема 1.4.3. *Нехай A_n - простір афінної зв'язності, який (локально) непроективно евклідовий в околі точки $p \in A_n$. Тоді окіл точки p з A_n дозволяє геодезичне відображення на псевдоріманoвий простір $\bar{V}_n$ тоді і тільки тоді, коли замкнута система лінійних диференціальних рівнянь типу Коші в коваріантних похідних в A_n*

$$a^{ij}_{,k} = \frac{2}{n+1} a^{ij} \Gamma^{\alpha}_{\alpha k} + \delta^i_k \Lambda^j + \delta^j_k \Lambda^i,$$

де

$$\Lambda^i = a^{\alpha\beta} G^i_{\alpha\beta} + \frac{1}{n+1} a^{i\beta} \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}$$

має розв'язок відносно симетричного невиродженого тензора a^{ij}.

Розділ 2

Спеціальні псевдоріманові простори

Потреба ефективного вивчення відображень псевдоріманових просторів приводить до необхідності спеціалізації самих просторів. Природно, щоб обмеження стосувались внутрішніх геометричних об'єктів, тобто метрики та тензорів, отриманих з неї.

2.1 Звідні псевдоріманові простори

Псевдоріманів простір V_n з метричним тензором g_{ij} називають локально звідним, якщо в деякому околі кожної його точки M є можливість вибрати таку систему координат $y^1, y^2, \ldots, y^n$, відносно якої основна матрична форма має вигляд

$$I = g_{pq}(y^r)dy^p dy^q + g_{\sigma\mu}(y^\nu)dy^\sigma dy^\mu, \qquad (2.1.1)$$

$$(p, q, r = 1, 2, \ldots, m;\ \ \sigma, \mu, \nu = m+1, m+2, \ldots, n).$$

Тут g_{pq} залежать лише від $y^1, y^2, \ldots, y^m$, а $g_{\sigma\mu}$ — тільки від $y^{m+1}, y^{m+2}, \ldots, y^n$.

В подальшому, локально звідні простори будемо називати просто звідними.

Таким чином, звідний псевдоріманів простір $V_n(g_{ij})$, згідно з означенням, є добутком двох псевдоріманових просторів $\overset{1}{V}_m(g_{pq})$ та $\overset{2}{V}_{n-m}(g_{\sigma\mu})$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{pq} & | & 0 \\ - & & - \\ 0 & | & g_{\sigma\mu} \end{pmatrix} \qquad (2.1.2)$$

Кожен із просторів $\overset{1}{V}_m$ та $\overset{2}{V}_{n-m}$ може в свою чергу приводитись чи не приводитись, і тому формулу (2.1.1) можна записати у вигляді

$$ds^2 = \sum_{k=1}^{r} ds_k^2 \ \ (r > 1),$$

де ds_k^2 — квадратична форма простору V_{m_k} $\ (m_1 + m_2 + \ldots + m_n = n)$.

Для заданого псевдоріманового простору V_n число r може приймати різні значення. Максимальне значення r називають мобільністю псевдоріманового простору відносно зведення.

Псевдоріманів простір V_n звідний тоді і тільки тоді, коли в ньому існує симетричний тензор $a_{ij} \neq cg_{ij}$ (при деякому сталому c), що задовольняє умовам

$$a_{i\alpha}a_j^{\alpha} = a_{ij} \tag{2.1.3}$$

та

$$a_{ij,k} = 0, \tag{2.1.4}$$

де $a_j^i = a_{\alpha j}g^{\alpha i}$.

Рівняння (2.1.3) та (2.1.4) — це інваріантна (відносно вибору системи координат) умова, необхідна та достатня для того, щоб псевдоріманів простір V_n був звідним.

В такому вигляді її сформулював П.А. Широков [197].

Тензор a_{ij}, що задовольняє умові (2.1.3), називають ідемпотентним, а умові (2.1.4) — коваріантно сталим.

Вимогу ідемпотентності можна замінити на побажання, щоб матриця тензора a_{ij} мала прості елементарні дільники та дійсні корені (це довів Г. Кручкович [152]). В такому вигляді ознака наводиться в якості вправи в книзі Л.П. Ейзенхарта "Ріманова геометрія"[18], але без вимоги існування дійсних коренів. Як легко переконатись, без цього ознака є помилковою.

Класифікував всі псевдоріманові простори V_n, що дозволяють коваріантно сталі тензори другого порядку, В.Н. Абдулін [112].

Умови інтегрованості для рівняння (2.1.4) з урахуванням тотожності

Річчі будуть

$$a_{\alpha i}R^{\alpha}_{jkl} + a_{\alpha j}R^{\alpha}_{ikl} = 0. \tag{2.1.5}$$

Циклюючи останнє за $(i,\ k,\ l)$, отримаємо

$$a_{\alpha i}R^{\alpha}_{jkl} + a_{\alpha k}R^{\alpha}_{jli} + a_{\alpha l}R^{\alpha}_{jik} = 0. \tag{2.1.6}$$

Згортаючи за індексами $(j,\ k)$, будемо мати

$$a_{\alpha i}R^{\alpha}_{l} - a_{\alpha l}R^{\alpha}_{i} = 0. \tag{2.1.7}$$

Тут

$$R^{i}_{j} = R_{\alpha j}g^{\alpha i}. \tag{2.1.8}$$

Про тензори a_{ij} та b_{ij}, для яких виконуються умови

$$a^{\alpha}_{i}b_{\alpha j} = a^{\alpha}_{j}b_{\alpha i} \tag{2.1.9}$$

кажуть, що вони комутують.

Теорема 2.1.1. *В звідних псевдоріманових просторах V_n, існує ідемпотентний тензор, що комутує з тензором Річчі V_n.*

Псевдоріманів простір V_n називають пласким (або локально евклідовим), якщо в деякому околі точки M може бути вибрана точка системи координат $y^1, y^2, \ldots, y^n$, яку називають декартовою, відносно якої основна матрична форма простору має вид

$$I = e_1(dy^1)^2 + e_2(dy^2)^2 + \ldots + e_n(dy^n)^2, \tag{2.1.10}$$

$e_1, e_2, \ldots, e_n$ дорівнюють плюс або мінус одиниці.

Тензорною ознакою, необхідною і достатньою умовою того, щоб простір був пласким, є вимога

$$R_{hijk} = 0. \tag{2.1.11}$$

Пласкі простори, як видно з означення (2.1.10), це граничний випадок звідності. З іншого боку, диференціальні рівняння (2.1.4) для пласких просторів завжди мають розв'язок, оскільки умови інтегрування (2.1.5) з урахуванням (2.1.11) виконуються тотожно.

Максимальна кількість розв'язків для системи (2.1.4) дорівнює $\dfrac{(n+1)n}{2}$.

Система (2.1.5) є перевизначеною алгебраїчною системою. Розв'язки системи a_{ij}, які не виражаються через інші компоненти тензора або через внутрішні об'єкти псевдоріманового простору V_n, називають суттєвими.

Отже максимальну кількість суттєвих компонент тензора a_{ij} дозволяють пласкі простори. В подальшому, при вивченні питання про кількість суттєвих компонент тензора a_{ij}, ми обмежимося розглядом просторів відмінних від пласких.

Оцінимо кількість незалежних компонент симетричного, невиродженого тензора a_{ij}, що задовольняє рівнянню

$$a_{\alpha i} K^{\alpha}_{j} + a_{\alpha j} K^{\alpha}_{i} = 0. \tag{2.1.12}$$

Тут K^{h}_{j} - деякий афінор, незалежний від a_{ij}, крім того припускаємо, що він задовольняє умові

$$g_{\alpha i} K_j^\alpha + g_{\alpha j} K_i^\alpha = 0. \tag{2.1.13}$$

Умова (2.1.13) означає, що тензор $K_{ij} \stackrel{def}{=} K_j^\alpha g_{\alpha i}$ є кососиметричним.

Нехай r^* — число, яке дорівнює $3n-5$ для псевдоріманових просторів V_n, $n \neq 4, 6$, а у випадку $n = 4$ або 6 дорівнює $3n-6$.

Доведемо наступну теорему

Теорема 2.1.2. *Якщо ранг матриці $\left\|K_j^i\right\|$ більше двох, то серед компонент тензора a_{ij} не менше чим r^* залежить від інших компонент тензора a_{ij} і афінора K_j^i.*

Доведення цієї теореми проводитимемо в деякій фіксованій точці $M(x^h) \in V_n$. Розглянемо лінійне невироджене перетворення координат в цій точці

$$y^h = A_\alpha^h x^\alpha,$$

де $det \left\|A_i^h\right\| \neq 0$.

Тензори a_{ij} та K_h^i перетворяться згідно із законом

$$a\grave{}_{ij} = a_{\alpha\beta} B_i^\alpha B_j^\beta; \qquad K_i\grave{}^h = K_\beta^\alpha B_i^\beta B_\alpha^h,$$

тут $\left\|B_i^h\right\| \stackrel{def}{=} \left\|A_i^h\right\|^{-1}$.

Очевидно, що ранг тензора K_i^h, а також число залежних компонент тензора a_{ij} в рівнянні (2.1.12) є інваріантними відносно перетворення координат. Останнє вірно і у тому випадку, коли $\left\|A_i^h\right\|$ є комплекснозначною невиродженою матрицею.

Для подальших досліджень приведемо афінор K_h^i за допомогою невиродженого перетворення (випадок комплексного перетворення не виключається) до канонічної форми Жордана. У нашому дослідженні ми обмежимося спрощеним записом цієї матриці:

$$K_i^h = \begin{pmatrix} \omega_1 & K_2^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 & K_3^2 & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \omega_{n-1} & K_n^{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \omega_n, \end{pmatrix} \tag{2.1.14}$$

де $K_{\alpha+1}^{\alpha} = 0$ або 1.

Останнє можна записати таким чином

$$K_\alpha^\alpha = \omega_\alpha; \qquad K_\alpha^{\alpha+1} = 0, 1; \qquad K_b^a = 0 \qquad \text{для} \qquad b \neq a,\ a+1.$$

Тут $a, b = 1, 2, \dots, n$. В цій формулі, як і в усій роботі, по однакових індексах сумування не робиться.

Природно, що в загальному випадку власні числа ω_α матриці K_i^h можуть бути комплексними. Систему координат y, в якій K_i^h має форму Жордана, назвемо канонічною.

Рівняння системи (2.1.12) з фіксованими індексами i і j позначимо через Θ_{ij}. Оскільки рівняння Θ_{ji} співпадає з рівнянням Θ_{ij}, система (2.1.12) еквівалентна системі рівнянь

$$\Theta: \qquad \Theta_{ij}(i \le j;\ \ i,j = 1,2,\ldots,n).$$

Рівняння (2.1.12) в канонічній системі координат y мають наступну форму:

$$\Theta_{ij}(i,j<n):\ \ a_{ij}(\omega_i+\omega_j)+a_{i+1\,j}K_i^{i+1}+a_{ij+1}K_j^{j+1}=0; \tag{2.1.15}$$

$$\Theta_{in}(i<n):\ \ a_{in}(\omega_i+\omega_n)+a_{i+1\,n}K_j^{i+1}=0; \tag{2.1.16}$$

$$\Theta_{nn}:\ \ a_{nn}(\omega_n+\omega_n)=0. \tag{2.1.17}$$

Нагадаємо, що у рівняннях (2.1.15) і (2.1.16) правило Ейнштейна не застосовується. Заздалегідь доведемо наступні леми:

Лема 2.1.1. *Компоненти симетричного тензора a_{ij}, для яких $(\omega_i+\omega_j)\neq 0$, залежать від інших компонент тензора a_{ij} і афінора K^i_j.*

Доведення.

Множину впорядкованих пар індексів (i,j), де $i\le j$, $i,j=1,2,\ldots,n$, позначимо через I. Через I_1 і I^* позначимо підмножини I такі, що

$$(i,j)\in I_1 \Leftrightarrow (\omega_i+\omega_j)\neq 0 \qquad i \qquad I^* = I\backslash I_1.$$

Кількість елементів I_1 позначимо через q. Нижче доведемо, що q компонент a_{ij}, де $(i,j) \in I_1$, явно виражаються через інші компоненти тензора a_{ij} і афінора K_i^h.

Крок 1. З множини пар I_1 виберемо пару (i_1, j_1) таку, що індекси i_1 і j_1 є "максимальними". Коректніше:

$$i_1 = \max_{\forall(i,j)\in I_1} i \qquad \text{та} \qquad j_1 = \max_{\forall(i,j)\in I_1} j \, .$$

Аналізом рівняння $\Omega_{i_1j_1}$ (див. (2.1.15), (2.1.16), (2.1.17)) можна явним чином виразити компоненту $a_{i_1j_1}$ через компоненти $a_{ij} \in I^*$ і K_i^h.

Крок 2. Далі позначимо через $I_2 \stackrel{def}{=} I_1 \backslash \{(i_1, j_1)\}$. Аналогічно, з множини пар I_2 виберемо "максимальну" пару (i_2, j_2):

$$i_2 = \max_{\forall(i,j)\in I_2} i \qquad \text{та} \qquad j_2 = \max_{\forall(i,j)\in I_2} j \, .$$

Тоді неважко бачити по аналогії з попереднім, що аналізом рівняння $\Omega_{i_2j_2}$ можна явним чином виразити компоненту $a_{i_2j_2}$ через компоненту $a_{i_1j_1}$ і компоненти a_{ij}, $(i,j) \in I^*$ і K_i^h. Але тоді на підставі 1-го кроку витікає, що і $a_{i_2j_2}$ виражається явним чином тільки через компоненти a_{ij}, $(i,j) \in I^*$ і K_i^h.

Процес продовжуємо аналогічно. Після q кроків переконаємося, що усі компоненти a_{ij}, для яких $(i,j) \in I_1$, явним чином виражаються тільки через компоненти a_{ij}, $(i,j) \in I^*$ і афінора K_i^h.

Лему доведено.

На підставі леми 2.1.1 можемо довести наступну лему, що дозволяє довести теорему:

Лема 2.1.2. *Якщо число залежних компонент тензора a_{ij} не перевищує числа r^*, то серед чисел ω_i не більше двох відмінних від нуля.*

Доведення.

Доведення проведемо методом від протилежного. Припустимо, що існує принаймні три ненульові числа ω_a, ω_b, ω_c (тут a, b, c — взаємно відмінні індекси; після перенумерації індексів, можна вважати $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$). Покажемо, що при цьому припущенні хоч би $3n - 5$, а у випадку $n = 4, 6$ хоч би $3n - 6$ компонент тензора a_{ij} залежить від інших компонент цього тензора і афінора K_i^h (це число ми позначили через r^*). Враховуючи лему 2.1.1, для цього досить, щоб серед елементів трикутної матриці ω:

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 + \omega_1 & \omega_1 + \omega_2 & \dots & \omega_1 + \omega_n \\ 0 & \omega_2 + \omega_2 & \dots & \omega_2 + \omega_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n + \omega_n \end{pmatrix}$$

знайшлося, принаймні, r^* ненульових елементів.

1. Спочатку розглянемо випадок, коли ненульові власні числа ω_1, ω_2, ω_3 задовольняють умові

$$|\omega_1| \neq |\omega_2| \neq |\omega_3| .$$

Тоді не дорівнюють нулю числа

$\omega_1 + \omega_1, \qquad \omega_1 + \omega_2, \qquad \omega_1 + \omega_3, \qquad \omega_2 + \omega_2, \qquad \omega_2 + \omega_3, \qquad \omega_3 + \omega_3,$

а для $a > 3$:

а) якщо $\omega_a = \pm\omega_1$, то не дорівнюють нулю

$$\omega_2 + \omega_a; \qquad \omega_3 + \omega_a; \qquad \omega_a + \omega_a;$$

б) якщо $\omega_a = \pm\omega_2$, то не дорівнюють нулю

$$\omega_1 + \omega_a; \qquad \omega_3 + \omega_a; \qquad \omega_a + \omega_a;$$

в) якщо $\omega_a = \pm\omega_3$, то не дорівнюють нулю

$$\omega_1 + \omega_a; \qquad \omega_2 + \omega_a; \qquad \omega_a + \omega_a;$$

г) якщо $\omega_a \neq \pm\omega_1, \pm\omega_2, \pm\omega_3$, то не дорівнюються нулю

$$\omega_1 + \omega_a; \qquad \omega_2 + \omega_a; \qquad \omega_3 + \omega_a.$$

Звідси на підставі леми 2.1.1 витікає, що серед компонент a_{ij} принаймні $3n - 3$ компонент залежних, що суперечить умові $r^* \geq 3n - 3$.

2. Розглянемо випадок, коли ненульові власні числа ω_1, ω_2, ω_3 задовольняють умові

$$\omega_1 = -\omega_2, \qquad \omega_3 \neq \pm\omega_1 \qquad \text{і} \quad \text{для } \forall a > 3: \ \omega_a = \pm\omega_1, \pm\omega_3, 0.$$

Інше значення ω_a нас приводить до розгляду п. 1.

В цьому випадку не дорівнюють нулю числа

$$\omega_1 + \omega_1, \qquad \omega_1 + \omega_3, \qquad \omega_2 + \omega_2, \qquad \omega_2 + \omega_3, \qquad \omega_3 + \omega_3,$$

а для $a > 3$:

а) якщо $\omega_a = 0$, то не дорівнюються нулю

$$\omega_1 + \omega_a; \qquad \omega_2 + \omega_a; \qquad \omega_3 + \omega_a;$$

б) якщо $\omega_a = \omega_1$, то не дорівнюються нулю

$$\omega_1 + \omega_a; \qquad \omega_3 + \omega_a; \qquad \omega_a + \omega_a;$$

в) якщо $\omega_a = -\omega_1$, то не дорівнюються нулю

$$\omega_2 + \omega_a; \qquad \omega_3 + \omega_a; \qquad \omega_a + \omega_a;$$

г) якщо $\omega_a = \pm\omega_3$, то не дорівнюються нулю

$$\omega_1 + \omega_a; \qquad \omega_2 + \omega_a; \qquad \omega_a + \omega_a.$$

Звідси на підставі леми 2.1.1 витікає, що серед компонент a_{ij} принаймні $3n - 4$ компонент залежних, що суперечить умові $r^* \geq 3n - 4$.

3. Розглянемо випадок, коли ненульові власні числа ω_1, ω_2, ω_3 задовольняють умові

$$\omega_1 = \omega_2, \qquad \omega_3 \neq \pm\omega_1 \qquad \text{і} \qquad \forall a > 3 : \; \omega_a = \omega_1, \pm\omega_3, 0.$$

Значення $\omega_a \neq \pm\omega_1, \pm\omega_2$, нас приводить до розгляду п. 1., а значення $\omega_a = -\omega_1$ — приводить до п. 2.

В цьому випадку не дорівнюють нулю числа

$\omega_1 + \omega_1, \qquad \omega_2 + \omega_3, \qquad \omega_1 + \omega_3, \qquad \omega_2 + \omega_2, \qquad \omega_2 + \omega_3, \qquad \omega_3 + \omega_3,$

а для $a > 3$:

а) якщо $\omega_a = 0$, то не дорівнюються нулю

$$\omega_1 + \omega_a; \qquad \omega_2 + \omega_a; \qquad \omega_3 + \omega_a;$$

б) якщо $\omega_a = \omega_1, \pm\omega_3$, то не дорівнюються нулю

$$\omega_1 + \omega_a; \qquad \omega_3 + \omega_a; \qquad \omega_a + \omega_a.$$

Звідси на підставі леми 2.1.1 витікає, що серед компонент a_{ij} принаймні $3n - 3$ компонент залежних, що суперечить умові $r^* \geq 3n - 3$.

4. Очевидно, залишилося розглянути випадок, коли

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_k = -\omega_{k+1} = -\omega_{k+2} = \ldots = -\omega_{k+l} \neq 0,$$

$$\omega_{k+l+1} = \ldots = \omega_n = 0.$$

В цьому випадку кількість ненульових чисел $\omega_i + \omega_j$ $(i \leq j)$ дорівнює

$$\frac{k(k+1)}{2} + \frac{l(l+1)}{2} + (k+l)(n-k-l).$$

Безпосереднім аналізом можна встановити:

а) коли

$$\left\{ \begin{array}{lll} n = 4 & \text{і} & \omega_1 = \omega_2 = -\omega_3 = -\omega_4 \neq 0, \\ n = 6 & \text{і} & \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = -\omega_4 = -\omega_5 = -\omega_6 \neq 0 \end{array} \right\},$$

то принаймні $3n - 6$ компонент a_{ij} залежних, що узгоджується із твердженням леми.

б) у інших випадках, коли $k + l > 2$, серед компонент a_{ij} принаймні $3n - 5$ компонент залежних, що також узгоджується із твердженням леми.

У результаті, нами розглянуті усі можливі випадки і, таким чином, лему 2.1.2 доведено.

На підставі попередніх лем доведемо раніше сформульовану нами теорему.

Доведення.

Нам досить показати, що, якщо число залежних компонент тензора a_{ij} менше або рівно $3n - 5$ для $n \neq 4, 6$ і $3n - 6$ для $n = 4, 6$, то матриця тензора K^i_j має не більше двох лінійно незалежних рядків.

Доведення проведемо методом від протилежного. Надалі припускатимемо, що в матриці K^i_j, приведеній до форми Жордана, принаймні, три ненульові рядки. Враховуючи лему 2.1.2 і можливість перестановки клітин Жордана, досить розглянути наступних сім випадків:

1). $\omega_1, \omega_2 \neq 0$, $\omega_a = 0$, для $a = \overline{3, n}$, $K^4_3 = 1$;

2). $\omega_1 \neq 0$, $\omega_a = 0$, для $a = \overline{2, n}$, $K^3_2 = K^4_3 = 1$;

3). $\omega_1 \neq 0,\ \omega_a = 0,\quad$ для $\ a = \overline{2,n},\ K_2^3 = 1,\ K_3^4 = 0,\ K_4^5 = 1;$

4). $\omega_a = 0,\quad$ для $\ a = \overline{1,n},\ K_1^2 = K_2^3 = K_3^4 = 1;$

5). $\omega_a = 0,\quad$ для $\ a = \overline{1,n},\ K_1^2 = K_2^3 = 1,\ K_3^4 = 0,\ K_4^5 = 1;$

6). $\omega_a = 0,\quad$ для $\ a = \overline{1,n},\ K_1^2 = 1,\ K_2^3 = 0,\ K_3^4 = K_4^5 = 1;$

7). $\omega_a = 0,\quad$ для $\ a = \overline{1,n},\ K_1^2 = 1,\ K_2^3 = 0,\ K_3^4 = 1,\ K_4^5 = 0,\ K_5^6 = 1.$

Нехай $\omega_1 \neq 0,\ \omega_2 \neq 0,$ і $\omega_a = 0$, для усіх $a = \overline{3,n},$ і $K_3^4 = 1$, тоді матриця K_j^i має вигляд

$$K_j^i = \begin{pmatrix} \omega_1 & K_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_3^4 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & K_{n-1}^n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Очевидно, що числа $\omega_1 + \omega_a,\ \omega_2 + \omega_a \quad (\forall a > 2)$ відмінні від нуля і, отже, через лему 2.1.1 компонент $a_{1a}\,(a \neq 2),\ a_{2a}\,(a \neq 1)$ залежать від інших компонент матриці a_{ij}.

Поклавши в (2.1.15) $i = j = 3$, знаходимо, що $a_{34} = 0$. З (2.1.16) за $i = 3$ витікає, що $a_{4n} = 0$.

Формула (2.1.15) за $i = 3,\ j = s \neq 1, 2, 3, n$ набирає вигляду

$$a_{4s} + a_{3\,s+1} K_s^{s+1} = 0.$$

Після неважкого аналізу переконаємося, що серед компонент тензора

a_{ij} не менше чим $3n - 4$ залежних. Саме ними є компоненти $a_{1a}\,(a = 1, 3, 4, \ldots, n)$, $\quad a_{2a}\,(a = 2, 3, 4, \ldots, n)$ і $a_{4a}\,(a = 3, 4, \ldots, n)$.

2) Розглянемо другий випадок. Оскільки $\omega_1 + \omega_a (a = \overline{1, n})$ не дорівнюють нулю, то на підставі леми 2.1.1 компоненти $a_{1a}\,(a = \overline{1, n})$ виражаються через інші компоненти матриці a_{ij}.

З (2.1.16) при $i = 2, 3$, витікає $a_{3n} = a_{4n} = 0$.

Формула (2.1.15) за $i = 2,\ j = s\ (s = \overline{2, n-1})$, дає

$$a_{3s} = -a_{2\,s+1} K_s^{s+1}, \tag{2.1.18}$$

а за $i = 3,\ j = s\ (s = \overline{3, n-1})$ дає

$$a_{4s} = -a_{3\,s+1} K_s^{s+1}. \tag{2.1.19}$$

Отже, $a_{1a}\,(a = 1, 2, \ldots, n)$, $a_{3a}\,(a = 2, 3, \ldots, n)$ і $a_{4a}\,(a = 4, 5, \ldots, n)$ залежать від інших компонент тензора a_{ij}, тобто серед компонент a_{ij} не менше ніж $3n - 4$ залежних.

3) Третій випадок аналогічний другому. Легко бачити, що компоненти $a_{1a}\,(a = \overline{1, n})$, виражаються через інші компоненти матриці a_{ij}.

З (2.1.16) за $i = 2, 4$, витікає, $a_{3n} = a_{5n} = 0$.

Формула (2.1.16) за $i = 2,\ j = s\ (s = \overline{2, n-1})$ дає

$$a_{3s} = -a_{2\,s+1} K_s^{s+1}, \tag{2.1.20}$$

а за $i = 4,\ j = s\ (s = \overline{4, n-1})$ дає

$$a_{5s} = -a_{4\,s+1} K_s^{s+1}. \tag{2.1.21}$$

Отже, $a_{1a}\ (a = 1, 2, \ldots, n)$, $a_{3a}\ (a = 2, 3, \ldots, n)$ і $a_{5a}\ (a = 4, 5, \ldots, n)$ залежать від інших компонент тензора a_{ij}, тобто серед компонент a_{ij} не менше чим $(3n - 4)$ залежних.

4, 5, 6 і 7 випадки подібним аналізом рівнянь (2.1.15) і (2.1.16) призводять до того, що серед компонент a_{ij} не менше чим $3n-5$ залежних. Обмежимося тільки розглядом рівнянь ((2.1.15) і (2.1.16), які призводять до такого висновку:

Випадок 4: при $i = 1, 2, 3$; випадок 5: при $i = 1, 2, 4$; випадок 6: при $i = 1, 3, 4$; випадок 7: при $i = 1, 3, 5$.

Таким чином, в усіх випадках нами отримано протиріччя, яке доводить справедливість теореми.

Вивчивши в спеціальній системі координат кількість залежних компонент тензора a_{ij}, в відмінному від простору сталої кривини, псевдорімановому просторі, нами доведено теорему, що має важливе значення для оцінки кількості суттєвих компонент коваріантно сталого тензора a_{ij}.

Розглянемо звідний псевдорімaнів простір V_n з основною метричною формою

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2. \tag{2.1.22}$$

Тут

$$ds_1^2 = \overset{1}{g}_{ab}(x^c) dx^a dx^b \tag{2.1.23}$$

$$(a,\, b,\, c = 1, 2, \ldots, m; m < n)$$

метрична форма псевдоріманового простору $\overset{1}{V}_m$, віднесеного до систем координат $x^1,\, x^2,\, \ldots, x^m$, а

$$ds_2^2 = \overset{2}{g}_{AB}(x^C) dx^A dx^B, \tag{2.1.24}$$

$$(A,\, B,\, C = m,\, m+1,\, \ldots,\, n)$$

метрична форма псевдоріманового простору $\overset{2}{V}_{n-m}$, віднесеного до систем координат $x^{m+1},\, x^{m+2},\, \ldots, x^n$.

Тоді для псевдоріманового простору V_n

$$g_{ab} = \overset{1}{g}_{ab}(x^c); \qquad g_{AB} = \overset{2}{g}_{AB}(x^c); \qquad g_{aB} = 0 \tag{2.1.25}$$

внутрішні об'єкти, запишуться в вигляді

$$\Gamma^a_{bc} = \overset{1}{\Gamma}{}^a_{bc}; \qquad \Gamma^A_{BC} = \overset{2}{\Gamma}{}^A_{BC}; \tag{2.1.26}$$

$$R^a_{bcd} = \overset{1}{R}{}^{\ a}_{bcd}; \qquad R^A_{BCD} = \overset{2}{R}{}^A_{BCD}, \tag{2.1.27}$$

де $\overset{1}{\Gamma}{}^a_{bc}$, $\overset{1}{R}{}^a_{bcd}$, $\overset{2}{\Gamma}{}^A_{BC}$, $\overset{2}{R}{}^A_{BCD}$ — символи Христофеля та тензор Рімана $\overset{1}{V}_m$ та $\overset{2}{V}_{n-m}$. Решта компонент символів Христофеля та тензора Рімана V_n дорівнюють нулю.

Умови інтегрування рівнянь (2.1.4) в $\overset{1}{V}_m$ приймають вигляд

$$\overset{1}{a}_{ae} \overset{1}{R}{}^{\ e}_{bcd} + \overset{1}{a}_{be} \overset{1}{R}{}^{\ e}_{acd} = 0, \tag{2.1.28}$$

а в $\overset{2}{V}_{n-m}$

$$\overset{2}{a}_{AE} \overset{2}{R}{}^{\ E}_{BCD} + \overset{2}{a}_{BE} \overset{2}{R}{}^{\ E}_{ACD} = 0. \tag{2.1.29}$$

Аналіз цих рівнянь, з використанням методів запропонованих в [147], дозволяє довести теорему

Теорема 2.1.3. *В псевдоріманових просторах, відмінних від просторів сталої кривини, які дозволяють максимальну кількість коваріантно сталих тензорів a_{ij}, тензор кривини має вигляд*

$$R_{hijk} = e(a_h b_i - a_i b_h)(a_j b_k - a_k b_j), \tag{2.1.30}$$

тут a_i, b_i — деякі вектори, $e = \pm 1$.

Таким чином, знайдена ознака псевдоріманових просторів, відмінних від просторів сталої кривини, максимально мобільних відносно зведення.

2.2 Напівзвідні псевдоріманові простори V_n.

Напівзвідним розкладом метрики псевдоріманового простору V_n $(n > 2)$ називають її розклад в виді

$$ds^2 = ds_1^2(x^1,\, x^2, \ldots,\, x^r) + \sigma(x^1,\, x^2, \ldots,\, x^r) ds_2^2(x^r,\, x^{r+1}, \ldots,\, x^n). \quad (2.2.1)$$

Тут ds_1^2 та ds_2^2 — самостійні метрики, що залежать від різних координат, а функція σ залежить лише від координат ds_1^2.

Простір V_n, що дозволяє хоча б один напівзвідний розклад, називають напівзвідним.

Інший граничний випадок напівзвідної метрики

$$ds^2 = ds_1^2(x^1,\, x^2, \ldots,\, x^{n-1}) + \sigma(x^1,\, x^2, \ldots,\, x^{n-1})(dx^n)^2 \quad (2.2.2)$$

цікавий, як узагальнення статичної метрики в загальній теорії відносності.

Для того, щоб псевдоріманів простір V_n був напівзвідним необхідно та достатньо, щоб в ньому існував симетричний ідемпотентний тензор, не пропорційний метричному, такий, що [152, 170]

$$b_{\alpha i}b^{\alpha}_{j} = b_{ij}, \tag{2.2.3}$$

$$b_{ij,k} = u_i b_{jk} + u_j b_{ik}. \tag{2.2.4}$$

Тут $u_i = u_{,i} = \partial_i u$ — деякий градієнтний вектор.

Рівняння (2.2.3) та (2.2.4) називають тензорною ознакою напівзвідності псевдоріманових просторів.

Диференціюючи (2.2.3) з урахуванням (2.2.4), отримаємо

$$u_\alpha b^{\alpha}_{j} b_{ik} + u_\alpha b^{\alpha}_{i} b_{jk} = 0. \tag{2.2.5}$$

Альтернуючи за індексами j, k

$$u_\alpha b^{\alpha}_{j} b_{ik} - u_\alpha b^{\alpha}_{k} b_{ij} = 0. \tag{2.2.6}$$

Перепозначимо індекси i та k

$$u_\alpha b^{\alpha}_{j} b_{ki} - u_\alpha b^{\alpha}_{i} b_{kj} = 0. \tag{2.2.7}$$

Додаючи (2.2.7) та (2.2.5), переконаємось, що

$$u_\alpha b^{\alpha}_{j} = 0. \tag{2.2.8}$$

Із останнього будемо мати

$$u_{\alpha,i}b^{\alpha}_{j} = -u_{\alpha}u^{\alpha}b_{ij}. \tag{2.2.9}$$

Умови інтегрування (2.2.4), враховуючи тотожність Річчі, приймуть вид

$$\begin{gathered} b_{\alpha i}R^{\alpha}_{jkl} + b_{\alpha j}R^{\alpha}_{ikl} = (u_{l,i} - u_l u_i)b_{jk} + \\ +(u_{l,j} - u_l u_j)b_{ik} - (u_{k,i} - u_k u_i)b_{jl} - (u_{k,j} - u_k u_j)b_{il}. \end{gathered} \tag{2.2.10}$$

Згортаючи (2.2.10) та підставляючи (2.2.8) і (2.2.9), отримаємо

$$\begin{gathered} (u_{l,i} - u_l u_i)b = (u_{\alpha,}{}^{\alpha} - u_{\alpha}u^{\alpha})b_{il} + \\ +b_{\alpha i}R^{\alpha}_{l} - b_{\alpha\beta}R^{\alpha}_{\cdot\, il\, \cdot}{}^{\beta}. \end{gathered} \tag{2.2.11}$$

Тут $b = b_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$, $u_{\alpha,}{}^{\alpha} = u_{\alpha,\beta}g^{\alpha\beta}$, $u^i = u_{\alpha}g^{\alpha i}$, $R^{h}{}_{il}{}^{j} = R^{h}{}_{il\beta}g^{\alpha j}$.

Таким чином, доведено

Теорема 2.2.1. *Вектор* u_i *в тензорній означці напівзвідних псевдоріманових просторів задовольняє умовам* (2.2.8), (2.2.9), (2.2.11).

Крім того, згортаючи (2.2.4) за індексами i, j, враховуючи (2.2.8), переконаємось, що

$$b_{,i} = 0. \tag{2.2.12}$$

Домножаючи (2.2.11) на b^i_j та згортаючи по i, з урахуванням (2.2.3), отримаємо

$$0 = u_{\alpha,}{}^{\alpha} b_{ij} + b_{\alpha i} R^{\alpha}_{j} - b_{\alpha\beta} b^{\gamma}_{i} R^{\alpha}{}_{\gamma j}{}^{\beta}. \qquad (2.2.13)$$

Псевдоріманів простір V_n з метричним тензором g_{ij} називається еквідистантним, якщо в ньому існує векторне поле $\varphi_i \neq 0$, що задовольняє рівнянням

$$\varphi_{i,j} = \tau g_{ij}, \qquad (2.2.14)$$

де τ — деякий інваріант, а кома “,“ — знак коваріантної похідної в V_n . При $\tau \neq 0$ це — еквідистантний простір основного випадку, а при $\tau = 0$ — особливого [180].

Векторне поле, що задовольняє рівнянням (2.2.14), К. Яно називав конциркулярним [108]. Ми, слідуючи за М.С. Сінюковим [178], називатимемо його еквідистантним векторним полем.

Умови інтегрованості основних рівнянь (2.2.14) мають вигляд

$$\varphi_{\alpha} R^{\alpha}_{ijk} = g_{ij} \tau_{,k} - g_{ik} \tau_{,j},$$

тут R^h_{ijk} — тензор Рімана V_n . З останнього неважко отримати

$$\tau_{,i} = \frac{1}{n-1} \varphi_{\alpha} R^{\alpha}_{i}, \qquad (2.2.15)$$

де $R^h_i = g^{\alpha h} R_{\alpha i}$, R_{ij} — тензор Річчі, g^{ij} — елементи оберненої матриці до g_{ij}. Сукупність рівнянь (2.2.14) і (2.2.15) носить замкнутий характер.

Вона є системою лінійних диференціальних рівнянь в коваріантних похідних першого порядку типу Коші з коефіцієнтами, однозначно визначеними простором V_n, відносно невідомого вектора φ_i і інваріанта τ.

Система рівнянь (2.2.14) і (2.2.15) в просторі V_n для будь-яких початкових значень шуканих функцій

$$\varphi_i(x_0) = \overset{o}{\varphi}_i; \qquad \tau(x_0) = \overset{o}{\tau},$$

заданих в точці $M_0(x_0)$, має не більше одного розв'язку. Отже, число довільних сталих в загальному розв'язку системи не перевищує числа $\nu = n+1$.

Оскільки система (2.2.14) і (2.2.15) лінійна, то вона має не більше ніж ν лінійно незалежних розв'язків з сталими коефіцієнтами. Відомо [21], що $n+1$ лінійно незалежне еквідистантне векторне поле дозволяють простори сталої кривизни і тільки вони.

З умов інтегрованості (2.2.14) неважко отримати, що

$$\tau_{,k} = B\varphi_k, \tag{2.2.16}$$

тут B — деякий інваріант.

Доведемо наступну теорему:

Теорема 2.2.2. *Якщо псевдорімановий простір V_n $(n > 2)$ дозволяє принаймні два лінійно незалежних еквідистантних векторних поля, то в рівняннях (2.2.16) інваріант B — деяка стала, однозначно визначена для заданого простору V_n.*

Доведення.

Нехай в V_n існують хоча б два лінійно незалежних еквідистантних векторних поля φ_i і $\tilde{\varphi}_i$. Тоді для них мають місце умови:

$$\varphi_\alpha R^\alpha_{ijk} = B(g_{ij}\varphi_k - g_{ik}\varphi_j), \tag{2.2.17}$$

$$\tilde{\varphi}_\alpha R^\alpha_{ijk} = \tilde{B}(g_{ij}\tilde{\varphi}_k - g_{ik}\tilde{\varphi}_j), \tag{2.2.18}$$

де B, $\tilde{B}$ — деякі інваріанти.

Помноживши (2.2.17) на $\tilde{\varphi}_k$ і згортаючи за k, з урахуванням (2.2.18), отримаємо

$$(B - \tilde{B})(g_{ij}\varphi_\alpha\tilde{\varphi}^\alpha - \tilde{\varphi}_i\varphi_j) = 0.$$

Припустимо, що $B \neq \tilde{B}$, тоді

$$g_{ij}\varphi_\alpha\tilde{\varphi}^\alpha - \tilde{\varphi}_i\varphi_j = 0.$$

З останнього видно, що: $\varphi_\alpha\tilde{\varphi}^\alpha = 0$ і $\tilde{\varphi}_i\varphi_j = 0$, а це суперечить нашому припущенню про те, що вектори ненульові. Отже, за необхідністю має місце $B = \tilde{B}$.

Таким чином, інваріант B однозначно визначається для заданого V_n.

Коваріантно продиференціювавши (2.2.17), з урахуванням (2.2.14), отримаємо:

$$\tau R_{hijk} + \varphi_\alpha R^\alpha_{ijk,h} = (\varphi_k g_{ij} - \varphi_j g_{ik})B_{,h} + \tau B(g_{hk}g_{ij} - g_{hj}g_{ik}) \tag{2.2.19}$$

Проциклюємо (2.2.19) за індексами $h, j, k,$ а потім результат згорнемо з g^{ij}, будемо мати формулу

$$B_{,k}\varphi_h - B_{,h}\varphi_k = 0.$$

З останнього неважко переконатися, що

$$B_{,k} = \gamma\varphi_k, \tag{2.2.20}$$

де γ — деякий інваріант.

Аналогічна рівність має місце і для вектора $\tilde{\varphi}_k$:

$$B_{,k} = \tilde{\gamma}\tilde{\varphi}_k.$$

Тоді, порівнюючи останнє з (2.2.20), внаслідок того, що вектори φ_k і $\tilde{\varphi}_k$ неколінеарні, легко бачити, що $\tilde{\gamma} = \gamma = 0$. Отже, $B_{,k} = 0$, тобто $B - const$.

Таким чином, теорему 2.2.2 доведено.

Зауважимо, що наведена теорема аналогічна раніше доведеним результатам за деяких додаткових умов [105].

Теорема 2.2.3. *Не існує псевдоріманових просторів V_n, відмінних від просторів сталої кривини, що дозволяють більш ніж $n-2$ лінійно незалежних з сталими коефіцієнтами еквідистантних векторних полів.*

Доведення.

Доведення проведемо методом від протилежного. Припустимо, що існує простір V_n відмінний від простору сталої кривини, дозволяючий більш ніж $(n-2)$ лінійно незалежних з сталими коефіцієнтами еквідистантних векторних полів. Це означає, що на компоненти вектора φ_i і інваріанта τ не повинні накладатися більш ніж 3 залежності.

Умови інтегрованості (2.2.14) запишемо у виді

$$\varphi_\alpha Z^\alpha_{ijk} = 0, \tag{2.2.21}$$

де $Z^h_{ijk} \overset{def}{=} R^h_{ijk} - B(\delta^h_k g_{ij} - \delta^h_j g_{ik})$; δ^h_i — символи Кронекера.

Диференціюючи (2.2.21) і враховуючи (2.2.14), отримаємо

$$\tau Z_{hijk} + \varphi_\alpha Z^\alpha_{ijk,h} = 0.$$

Тут $Z_{hijk} = g_{\alpha h} Z^\alpha_{ijk}$.

Оскільки $Z_{hijk} \neq 0$, то витікає, що інваріант τ виражається через компоненти вектору φ_i і об'єкти, що визначаються метрикою V_n.

Тензор Z^h_{ijk} можна записати у вигляді

$$Z^h_{ijk} = \sum_{s=1}^{m} \underset{s}{b}{}^h \underset{s}{\Omega}{}_{ijk}, \tag{2.2.22}$$

де $\underset{s}{b}{}^h$ — лінійно незалежні вектори, а $\underset{s}{\Omega}{}_{ijk}$ — лінійно незалежні тензори. Оскільки V_n не є простором сталої кривини, то $m \geq 2$.

З умов (2.2.21), враховуючи запис тензора (2.2.22), витікає:

$$
\begin{aligned}
\varphi_\alpha \underset{1}{b}{}^{\alpha} &= 0\\
\varphi_\alpha \underset{2}{b}{}^{\alpha} &= 0
\end{aligned}
\tag{2.2.23}
$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\varphi_\alpha \underset{m}{b}{}^{\alpha} = 0$$

Внаслідок того, що $m \geq 2,$ серед системи (2.2.23) знайдуться хоча б два істотні рівняння. Отже, на вектор φ_i і інваріант τ накладаються, принаймні, три залежності. А це суперечить припущенню.

Таким чином, теорему 2.2.3 доведено.

Має місце [128, 140]

Теорема 2.2.4. *В псевдоріманових просторах* $V_n(n > 3)$ *, що дозволяють* $n-2$ *лінійно незалежних еквідистантних векторних поля і тільки в них, виконуються умови*

$$R_{hijk} = B(g_{hk}g_{ij} - g_{hj}g_{ik}) + e(a_h b_i - a_i b_h)(a_j b_k - a_k b_j); \tag{2.2.24}$$

$$a_{i,\,j} = \overset{1}{\underset{j}{\xi}} a_i + \overset{2}{\underset{j}{\xi}} b_i + c_i a_j; \tag{2.2.25}$$

$$b_{i,\,j} = \overset{3}{\underset{j}{\xi}} a_i + \overset{4}{\underset{j}{\xi}} b_i + c_i b_j; \tag{2.2.26}$$

$$c_{i,\,j} = \overset{5}{\underset{j}{\xi}} a_i + \overset{6}{\underset{j}{\xi}} b_i + c_i c_j - B g_{ij}, \tag{2.2.27}$$

де a_i *і* b_i *— неколінеарні ортогональні вектори;* $c_i, \overset{s}{\xi}_j$ $(s = 1, \ldots, 6)$ *— деякі вектори;* $e = \pm 1$, $B = const.$

Доведення.

Необхідність. Нехай V_n $(n > 3)$ дозволяє $n - 2$ лінійно незалежних еквідистантних векторних поля. Тоді має місце теорема 2.2.2, і можна використовувати хід її доведення. Аналізуючи систему рівнянь (2.2.23), легко бачити, що серед векторів $\underset{s}{b}^{i}$ існує не більше двох ненульових векторів. Враховуючи те, що $Z^h_{ijk} \neq 0$, (2.2.22) і визначення тензора Z^h_{ijk} і його властивості, отримаємо умови (2.2.24):

Підставляючи (2.2.24) в (2.2.17), маємо:

$$\varphi^\alpha a_\alpha b_i - \varphi^\alpha b_\alpha a_i = 0.$$

Оскільки a_i і b_i — неколінеарні вектори, то звідси витікає

$$\varphi^\alpha a_\alpha = 0, \tag{2.2.28}$$

$$\varphi^\alpha b_\alpha = 0. \tag{2.2.29}$$

Коваріантно диференціюючи (2.2.28), з урахуванням рівнянь (2.2.14), отримаємо

$$\varphi^\alpha a_{\alpha,i} + \tau a_i = 0, \tag{2.2.30}$$

$$\varphi^\alpha b_{\alpha,i} + \tau b_i = 0. \tag{2.2.31}$$

Тензор $a_{i,j}$ можна записати у вигляді

$$a_{i,\,j} = c_i a_j + \sum_{s=1}^{m} \overset{s}{q}_i \overset{s}{\nu}_j, \tag{2.2.32}$$

де a_j, $\overset{s}{\nu}_j$ $(s = 1, \ldots, m,\ m \leq n-1)$ — деякі неколінеарні вектори; c_i, $\overset{s}{q}_i$ — деякі вектори.

Підставляючи (2.2.32) в (2.2.30), неважко переконатися, що

$$(\varphi^\alpha c_\alpha + \tau) a_i + \sum_{s=1}^{m} \varphi^\alpha \overset{s}{q}_\alpha \overset{s}{\nu}_i = 0.$$

З останнього випливає

$$\begin{gathered} \tau = -\varphi^\alpha c_\alpha, \\ \varphi^\alpha \overset{s}{q}_\alpha = 0. \end{gathered} \tag{2.2.33}$$

Але тоді, зважаючи на умови (2.2.28), (2.2.29), (2.2.33) і кількість $n-2$ незалежних еквідистантних векторів виходить, що усі вектори $\overset{s}{q}_i$ лінійно виражаються через вектори a_i і b_i. В цьому випадку формула (2.2.32) приймає вид (2.2.25). Аналогічно, можемо переконатися в справедливості формули (2.2.26).

Коваріантно продиференціюємо (2.2.33), на основі (2.2.14) і (2.2.16) можна записати результат таким чином:

$$\varphi^\alpha (c_{\alpha,i} + B g_{\alpha i}) + \tau c_i = 0.$$

Звідси, аналогічно, витікають формули (2.2.27). Отже, V_n є за необхідністю простором, в якому виконуються умови (2.2.24), (2.2.25), (2.2.26), (2.2.27).

Достатність. Розглянемо в просторі V_n змішану систему диференціальних рівнянь (2.2.14) при додаткових умовах (2.2.24), (2.2.25), (2.2.26), (2.2.27), (2.2.28), (2.2.29) та (2.2.33).

Умови інтегрованості рівнянь (2.2.14) в таких просторах виконуються тотожно. Диференціальні подовження (2.2.33) також виконуються тотожно. Отже, система (2.2.14), (2.2.16) має в таких просторах розв'язки для усіх початкових значень $\overset{o}{\varphi}$, $\overset{o}{\tau}$, які задовольняють умовам (2.2.33).

Легко бачити, що для цих рівнянь в просторі V_n існує точно $n-2$ лінійно незалежних еквідістантних векторних поля.

Що і треба було довести.

2.3 Спеціальні класи по типу тензорів

Нехай V_n $(n > 2)$ псевдоріманів простір з метричним тензором $g_{ij}(x)$. Загальноприйнятим чином в ньому визначені: Γ^h_{ij} — символи Христофеля, R^h_{ijk} — тензор Рімана, $R_{ij} = R^\alpha_{ij\alpha}$ — тензор Річчі, $R = R_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$ — скалярна кривина, g^{ij} — елементи оберненої матриці до $\|g_{ij}\|$. Крім того, тензори, що вивчаються, визначаються як:

тензор Ейнштейна —

$$E_{ij} = R_{ij} - \frac{R}{n} g_{ij}, \tag{2.3.1}$$

тензор енергії-імпульсу —

$$T_{ij} = R_{ij} - \frac{R}{2} g_{ij}, \tag{2.3.2}$$

тензор Брінкмана —

$$L_{ij} = \frac{1}{n-2}(R_{ij} - \frac{1}{2(n-1)} R g_{ij}), \tag{2.3.3}$$

тензор конциркулярної кривини —

$$Y^h_{ijk} = R^h_{ijk} - \frac{R}{n(n-1)}(\delta^h_k g_{ij} - \delta^h_j g_{ik}), \tag{2.3.4}$$

тензор проективної кривини —

$$W^h_{ijk} = R^h_{ijk} - \frac{1}{n-1}(R_{ij}\delta^h_k - R_{ik}\delta^h_j), \tag{2.3.5}$$

тензор конформної кривини —

$$C^h_{ijk} = R^h_{ijk} + \delta^h_j L_{ik} - \delta^h_k L_{ij} + L^h_j g_{ik} - L^h_k g_{ij}, \tag{2.3.6}$$

де δ^h_i — символи Кронекера, $L^h_i = L_{\alpha i} g^{\alpha h}$.

Зауважимо, що обернення в нуль кожного з цих тензорів призводить до наступних класів просторів :

$E_{ij} = 0 \;\Rightarrow R_{ij} - \dfrac{R}{n} g_{ij} = 0 \Rightarrow$ простори Ейнштейна;

$T_{ij} = 0 \;\Rightarrow R_{ij} - \dfrac{R}{2} g_{ij} = 0 \Rightarrow R = 0 \Rightarrow R_{ij} = 0 \Rightarrow$ Річчі-пласкі простори;

$$L_{ij}=0 \quad \Rightarrow R_{ij}-\frac{R}{2(n-1)}g_{ij}=0 \Rightarrow R=0 \Rightarrow R_{ij}=0 \Rightarrow \text{Річчі-пласкі простори;}$$

$$Y^h_{ij}=0 \quad \Rightarrow R^h_{ijk}-\frac{R}{n(n-1)}(\delta^h_k g_{ij}-\delta^h_j g_{ik})=0 \Rightarrow \text{простори сталої кривини;}$$

$$W^h_{ijk}=0 \quad \Rightarrow R^h_{ijk}-\frac{1}{n-1}(R_{ij}\delta^h_k-R_{ik}\delta^h_j)=0 \Rightarrow R^h_{ijk}=0 \Rightarrow \text{пласкі простори;}$$

$$C^h_{ijk}=0 \quad \Rightarrow \text{конформно-пласкі простори.}$$

Тому в подальшому, якщо це не оговорювалося спеціально, будемо виключати з розгляду випадки обернення в нуль відповідних тензорів.

Індекси опускаються і піднімаються за допомогою метричного тензора псевдоріманового простору V_n.

2.3.1 Слабосиметричні псевдоріманові простори

Розглянемо спеціальні псевдоріманові простори.

Означення 2.3.1. *Псевдоріманів простір V_n, в якому існує тензор $A_{i_1 i_2 \dots i_k}$ такий, що*

$$A_{i_1 i_2 \dots i_k,\, j} = \overset{1}{\tau}_j A_{i_1 i_2 \dots i_k} + \overset{2}{\tau}_{i_1} A_{j i_2 \dots i_k} + \overset{3}{\tau}_{i_2} A_{i_1 j i_3 \dots i_k} + \ldots + \overset{k+1}{\tau}_{i_k} A_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} j}, \qquad (2.3.7)$$

називаємо A–слабосиметричним.

Тут $\overset{\alpha}{\tau}_i$ — деякі вектори, кома “, “ знак коваріантної похідної по зв’язності V_n.

В залежності від того, який тензор задовольняє умовам (2.3.7), введемо наступні позначення:

Тензор	Позначення	Назва
A	ASS_n	A–слабосиметричний
R_{ij}	$RicSS_n$	Річчі–слабосиметричний
E_{ij}	ESS_n	E–слабосиметричний
L_{ij}	LSS_n	L–слабосиметричний
T_{ij}	TSS_n	T–слабосиметричний
R^h_{ijk}	RSS_n	слабосиметричний
Y^h_{ijk}	YSS_n	конциркулярно–слабосиметричний
W^h_{ijk}	WSS_n	проективно–слабосиметричний
C^h_{ijk}	CSS_n	конформно–слабосиметричний

Коли умовам (2.3.7) задовольняє деякий двічі коваріантний тензор A_{ij}, то

$$A_{ij,\,k} = \overset{1}{\tau}_k A_{ij} + \overset{2}{\tau}_i A_{jk} + \overset{3}{\tau}_k A_{ik}. \tag{2.3.8}$$

Якщо тензор A_{ij} — симетричний, то, симетруючи останнє, одержимо

$$A_{ij,\,k} = \overset{1}{\tau}_k A_{ij} + \frac{1}{2}\left(\overset{2}{\tau}_i + \overset{3}{\tau}_i\right) A_{jk} + \frac{1}{2}\left(\overset{2}{\tau}_j + \overset{3}{\tau}_j\right) A_{ik} \tag{2.3.9}$$

і, таким чином, для спеціальних тензорів будемо мати

$$RicSS_n\ :\ \ R_{ij,\,k} = u_k R_{ij} + v_i R_{jk} + v_j R_{ik} \tag{2.3.10}$$

$$ESS_n\ :\ \ E_{ij,\,k} = \gamma_k E_{ij} + \rho_i E_{jk} + \rho_j R_{ik} \tag{2.3.11}$$

$$LSS_n\ :\ \ L_{ij,\,k} = \sigma_k L_{ij} + \nu_i L_{jk} + \nu_j L_{ik} \tag{2.3.12}$$

$$TSS_n\ :\ \ T_{ij,\,k} = \omega_k T_{ij} + \varphi_i T_{jk} + \varphi_j T_{ik} \tag{2.3.13}$$

Отже, справджується така [143, 145]

Теорема 2.3.1. *В псевдоріманових просторах $RicSS_n, ESS_n, LSS_n, TSS_n$ за необхідністю мають місце рівняння (2.3.10), (2.3.11), (2.3.12), (2.3.13), відповідно.*

Розглянемо ASS_n простори у випадку, коли тензор A_{ijkl} задовольняє умовам

$$A_{hijk} + A_{hikj} = 0, \tag{2.3.14}$$

тоді

$$A_{hijk,m} = a_m A_{hijk} + b_h A_{mijk} + c_i A_{hmjk} + d_j A_{himk} + f_k A_{hijm}. \tag{2.3.15}$$

Симетруючи останнє за індексами j і k та враховуючи алгебраїчні властивості тензора A_{hijk}, отримаємо

$$\tau_j A_{himk} + \tau_k A_{himj} = 0, \tag{2.3.16}$$

де $\tau_h \overset{def}{=} d_n - f_n$.

Припустимо, що $\tau_h \neq 0$, тоді можливо підібрати вектор ζ^h такий, що $\tau_\alpha \zeta^\alpha = 1$. Домножуючи (2.3.16) на ζ^h та згортаючи за індексом j, будемо мати

$$A_{himk} + \tau_k \zeta^\alpha A_{him\alpha} = 0. \tag{2.3.17}$$

Ще раз домножаючи та згортаючи з ζ^l, переконаємося, що

$$\zeta^\alpha A_{him\alpha} = 0 \tag{2.3.18}$$

і тоді із (2.3.17) витікає $A_{hijk} = 0$, а це суперечить нашому припущенню. Отже, $\tau_i = 0$ і, значить, $d_n = f_n$.

Аналогічним чином покажемо, що $d_i = c_i$, якщо

$$A_{hijk} = A_{jkhi} \tag{2.3.19}$$

і, отже,

$$A_{hijk,m} = a_m A_{hijk} + b_h A_{mijk} + b_i A_{hmjk} + d_j A_{himk} + d_k A_{hijm}. \tag{2.3.20}$$

Враховуючи останні два рівняння, неважко переконатися, що

$$A_{hijk,m} = a_m A_{hijk} + \check{b}_h A_{mijk} + \check{b}_i A_{hmjk} + \check{b}_j A_{himk} + \check{b}_k A_{hijm}. \tag{2.3.21}$$

Тут $\check{b}_i = \dfrac{1}{2}(b_i + d_i)$.

Оскільки умові (2.3.19) задовольняють тензор Рімана, тензор концциркулярної кривини и тензор конформної кривини, то нами доведено

Теорема 2.3.2. *В псевдоріманових просторах RO_n, YO_n, CO_n виконуються, відповідно, умови*

$$R_{hijk\,,m} = a_m R_{hijk} + \check{b}_h R_{mijk} + \check{b}_i R_{hmjk} + \check{b}_j R_{himk} + \check{b}_k R_{hijm}; \quad (2.3.22)$$

$$Y_{hijk\,,m} = a_m Y_{hijk} + \check{b}_h Y_{mijk} + \check{b}_i Y_{hmjk} + \check{b}_j Y_{himk} + \check{b}_k Y_{hijm}; \quad (2.3.23)$$

$$C_{hijk\,,m} = a_m C_{hijk} + \check{b}_h C_{mijk} + \check{b}_i C_{hmjk} + \check{b}_j C_{himk} + \check{b}_k C_{hijm}. \quad (2.3.24)$$

2.3.2 Псевдоріманові простори із спеціальною векторною оболонкою

Означення 2.3.2. *Кажуть, що псевдоріманів простір V_n дозволяє векторну оболонку відносно тензора $A_{i_1 i_2 \ldots i_j kl}$, якщо в ньому існує ненульове векторне поле τ_h таке, що*

$$\tau_h A_{i_1 i_2 \ldots i_j kl} + \tau_k A_{i_1 i_2 \ldots i_j lh} + \tau_l A_{i_1 i_2 \ldots i_j hk} = 0. \quad (2.3.25)$$

Такі простори називатимемо A–слаборекурентними.

Введемо наступні позначення:

Тензор	Позначення	Назва
A	AO_n	A–слаборекурентний
R_{ij}	$RicO_n$	Річчі–слаборекурентний
E_{ij}	EO_n	E–слаборекурентний
L_{ij}	LO_n	L–слаборекурентний
T_{ij}	TO_n	T–слаборекурентний
R^h_{ijk}	RO_n	слаборекурентний
Y^h_{ijk}	YO_n	конциркулярно–слаборекурентний
W^h_{ijk}	WO_n	проективно–слаборекурентний
C^h_{ijk}	CO_n	конформно–слаборекурентний

Якщо тензор задовольняє A_{ijkl} алгебраїчним умовам

$$A_{ijkl} + A_{jikl} = 0, \tag{2.3.26}$$

$$A_{ijkl} - A_{klij} = 0, \tag{2.3.27}$$

$$A_{ijkl} + A_{iklj} + A_{iljk} = 0, \tag{2.3.28}$$

то в V_n існує не більше двох лінійно незалежних ненульових векторних поля, для яких виконуються (2.3.25).

Задля доведення цього факту скористуємось методикою, яку запропонував В. Кайгородов [124, 125].

Припустимо, що кількість лінійно незалежних векторів $\underset{\alpha}{\tau}$, які задовольняють (2.3.25), дорівнює трьом і, вибираючи систему координат так, щоб лінійно незалежні вектори $\underset{\alpha}{\tau}^i$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ мали вигляд $\underset{\alpha}{\tau}_i = \delta_i^\alpha$ із (2.3.25), враховуючи (2.3.26), (2.3.27), (2.3.28), одержимо, що

$$A_{hijk} = 0.$$

Якщо ж $\alpha \leq 2$, то система рівнянь (2.3.25) дозволяє нетривіальні розв'язки.

Таким чином, доведено теорему

Теорема 2.3.3. *Максимальна кількість лінійно незалежних векторів серед векторів, які входять до векторної оболонки ненульового тензору A_{ijkl}, не перевищує двох.*

Зауважимо, що тензор конциркулярної кривини задовольняє умовам (2.3.26), (2.3.27), (2.3.28).

Циклюючи (2.3.23) за індексами i, j, k переконаємося, що в псевдорімановому просторі V_n виконуються умови:

$$(b_i - d_i)Y_{hmjk} + (b_j - d_j)Y_{hmki} + (b_k - d_k)Y_{hmij} = 0. \qquad (2.3.29)$$

Таким чином, можливі три типи конциркулярно–слабосиметричних просторів:

I тип: $\quad b_i = d_i$ і

$$Y_{hijk\,,\,m} = a_m Y_{hijk} + b_h Y_{mijk} + b_i Y_{hmjk} + b_j Y_{himk} + b_k Y_{hijm} \qquad (2.3.30)$$

II тип: $b_i \neq d_i$ і в V_n існує одна векторна оболонка відносно тензора Y_{hijk}, що задається вектором $(b_i - d_i)$

III тип: $b_i \neq d_i$ і в V_n існує одна векторна оболонка відносно тензора Y_{hijk}, що задається вектором неколінеарним вектору $(b_i - d_i)$.

2.3.3 Гармонійні простори

Введемо поняття А–гармонійних просторів і вивчимо деякі їх властивості.

Означення 2.3.3. *Псевдоріманів простір V_n, в якому існує тензор $A^h_{i_1 i_2 \dots i_k}$, що задовольняє умовам*

$$A^{\alpha}_{i_1 i_2 \dots i_k, \alpha} = 0, \tag{2.3.31}$$

будемо називати А–гармонійним псевдоріммановим простором і позначати AM_n.

Зауважимо, що С. Бохнер і К. Яно [111] називають тензорне поле А – гармонійним, якщо воно задовольняє при деяких додаткових умовах (2.3.31). Ними доведені деякі властивості гармонійних тензорних полів на компактних орієнтованих ріманових просторах V_n.

У випадку, коли умовам (2.3.31) задовольняє тензор Рімана V_n, простір будемо називати гармонійним.

В залежності від вибору тензора А, відповідні А – гармонійні простори AM_n будемо називати та позначати наступним чином:

Тензор	Позначення	Назва
A	AM_n	A–гармонійний
R_{ij}	$RicM_n$	Річчі–гармонійний
E_{ij}	EM_n	E–гармонійний
L_{ij}	LM_n	L–гармонійний
T_{ij}	TM_n	T–гармонійний
R^h_{ijk}	RM_n	гармонійний
Y^h_{ijk}	YM_n	конциркулярно–гармонійний
W^h_{ijk}	WM_n	проективно–гармонійний
C^h_{ijk}	CM_n	конформно–гармонійний

Зауважимо, що вимоги сталості скалярної кривини, E – гармонійності, Річчі – гармонійності і L – гармонійності простору V_n еквівалентні, тобто має місце

$$LM_n \equiv EM_n \equiv RicM_n \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{R} = \mathrm{const}.$$

Із тотожності Біанкі легко бачити, що тензор Річчі гармонійного простору V_n задовольняє умовам Кодаццi:

$$R^{\alpha}_{ijk,\,\alpha} \equiv R_{ij,\,k} - R_{ik,\,j} = 0. \qquad (2.3.32)$$

Згортаючи (2.3.32) з g^{ij}, легко переконатися, що RM_n є просторами сталої скалярної кривини.

Неважко побачити, що

$$RM_n \equiv WM_n \equiv YM_n.$$

Використовуючи означення та властивості тензора конформної кривини, отримаємо, що простори CM_n $(n > 3)$ характеризуються умовою

$$R_{ij,\,k} - R_{ik,\,j} - \frac{1}{2(n-1)}(R_{,\,k}g_{ij} - R_{,\,j}g_{ik}) = 0. \qquad (2.3.33)$$

Зауважимо, що гармонійними просторами, зокрема, є: простори сталої кривини, простори Ейнштейна, симетричні простори, простори з метрикою Дзержинського і багато інших типів спеціальних псевдоріманових просторів.

Конформно-гармонійними будуть конформно–пласкі простори C_n та конформно–симетричні простори.

2.3.4 Простори сталої скалярної кривини

Рівняння

$$R_{hijk\,,\,l} + R_{hikl\,,\,j} + R_{hilj\,,\,k} = 0 \qquad (2.3.34)$$

має назву диференціального рівняння Біанкі [18].

Доведемо теорему:

Теорема 2.3.4. *В псевдорімановому просторі* $V_n (n > 2)$ *тензор* Y_{hijk} *задовольняє тотожностям типу Біанкі тоді і тільки тоді, коли* $R = const.$

Доведення.

Нехай $R = const$, тоді, диференціюючи (2.3.4), одержимо

$$Y_{hijk\,,\,l} = R_{hijk\,,\,l} \tag{2.3.35}$$

і, отже, Y_{hijk} задовольняє умовам

$$Y_{hijk\,,\,l} + Y_{hikl\,,\,j} + Y_{hilj\,,\,k} = 0. \tag{2.3.36}$$

Навпаки, нехай виконуються (2.3.36), тоді з урахуванням (2.3.34), будемо мати

$$R_{,\,l}(g_{hk}g_{ij} - g_{hj}g_{ik}) + R_{,\,j}(g_{hl}g_{ik} - g_{hk}g_{il}) + R_{,\,k}(g_{hj}g_{il} - g_{hl}g_{ij}) = 0. \tag{2.3.37}$$

Якщо згорнути із g^{hk}, отримаємо

$$R_{,\,l}g_{ij} - R_{,\,j}g_{il} = 0. \tag{2.3.38}$$

І, нарешті, згорнувши останнє із g^{ij}, переконаємося, що $R_{,\,l} = 0$.

Що й потрібно було довести.

Якщо $R = const$, то циклюючи (2.3.23) за індексами j, k, m та h, i, m, отримаємо відповідно:

$$(a_m - 2d_m)Y_{hijk} + (a_i - 2d_i)Y_{hikm} + (a_k - 2d_k)Y_{himj} = 0, \tag{2.3.39}$$

$$(a_m - 2b_m)Y_{hijk} + (a_h - 2b_h)Y_{imjk} + (a_i - 2b_i)Y_{mhjk} = 0. \tag{2.3.40}$$

Отже, при $R = const$ концуркулярно–слабосиметричні простори можуть бути

I типу: *a)* $a_i = 2b_i \quad \Rightarrow$

$$Y_{hijk\,,\,m} = 2b_m Y_{hijk} + b_h Y_{mijk} + b_i Y_{hmjk} + \\ + b_j Y_{himk} + b_k Y_{hijm} \tag{2.3.41}$$

b) $a_i \neq 2b_i$

і в V_n існує одна векторна оболонка відносно тензора Y_{hijk}, яка задана вектором $(a_i - 2b_i)$

II типу:

Якщо обидва вектори $(a_i - 2d_i)$ та $(a_i - 2b_i)$ дорівнюють нулю, то це суперечить тому, що $d_i \neq b_i$. Тобто серед векторів $(a_i - 2d_i)$ і $(a_i - 2b_i)$ хоча б один ненульовий.

Нехай $(a_i - 2b_i) = 0$, а $(a_i - 2d_i) \neq 0$, тоді можливі два випадки:

a) $(a_i = 2b_i)$ і $d_i - b_i = \alpha(a_i - 2d_i)$; (де α — коефіцієнт пропорційності), а, отже

$$Y_{hijk\,,\,m} = 2b_m Y_{hijk} + b_h Y_{mijk} + b_i Y_{hmjk} + \\ + d_j Y_{himk} + d_k Y_{hijm} \tag{2.3.42}$$

и α — за необхідністю дорівнює $\frac{1}{2}$.

Якщо $(a_i = 2b_i)$ та $d_i - b_i \neq \mu(a_i - 2d_i)$, тоді два лінійно незалежних вектори належать векторній оболонці відносно тензора Y_{hijk}, і простір належить до III типу.

Нехай обидва вектори $(a_i - 2b_i)$ та $(a_i - 2d_i)$ ненульові, тоді залежно від того, лінійно залежні або незалежні вектори трійки $(d_i - b_i)$, $(a_i - 2b_i)$, $(a_i - 2d_i)$, отримаємо:

b) Трійка лінійно залежних векторів:
у векторну оболонку тензора Y_{hijk} входить один вектор.

Серед просторів, що належать до III типу, виділимо, виходячи з викладеного вище, наступні типи:

a) $(d_i - b_i)$, $(a_i - 2b_i)$ відмінні від нуля і лінійно незалежні, $(a_i - 2d_i)$ відмінний від нуля, лінійно залежний від них або нульовий;

b) $(d_i - b_i)$, $(a_i - 2d_i)$ відмінні від нуля і лінійно незалежні, $(a_i - 2b_i)$ відмінний від нуля, лінійно залежний від них або нульовий.

Таким чином, нами розглянуті усі можливі випадки і повністю описані характеристики слабо-конциркулярних псевдоріманових просторів, які витікають з алгебраїчних властивостей тензора конциркулярної кривини і з диференціальних тотожностей Біанкі.

2.3.5 Простори розділеної кривини

Якщо тензор кривини псевдоріманового простору V_n, відмінного від простору сталої кривини, представляється в вигляді

$$R_{hijk} = S_{hi} S_{jk}, \tag{2.3.43}$$

де S_{hi} — деякий кососиметричний тензор, то простір V_n називають простором розділеної кривини.

Оскільки результат циклювання за коваріантними індексами тензора Рімана тотожно дорівнює нулю, із (2.3.43) отримаємо

$$S_{hi} S_{jk} + S_{hj} S_{ki} + S_{hk} S_{ij} = 0. \tag{2.3.44}$$

Підберемо ненульові вектори та $\overset{1}{\tau}{}^i$, $\overset{2}{\tau}{}^i$ таким чином, що $S_{\alpha\beta}\ \overset{1}{\tau}{}^\alpha\ \overset{2}{\tau}{}^\beta = 1$. Домнажаючи (2.3.44) на $\overset{1}{\tau}{}^j \cdot \overset{2}{\tau}{}^k$, та згортаючи за індексами j, k, будемо мати

$$S_{hi} = a_h b_i - a_i b_h \tag{2.3.45}$$

де $a_i = S_{i\alpha}\ \overset{1}{\tau}{}^\alpha, \quad b_i = S_{i\alpha}\ \overset{2}{\tau}{}^\alpha$ — взаємно ортогональні ненульові вектори.

Тоді рівняння (2.3.43) прийме вигляд

$$R_{hijk} = (a_h b_i - a_i b_h)(a_j b_k - a_k b_j). \tag{2.3.46}$$

Псевдоріманів простір V_n називають півсиметричним, якщо його тензор Рімана задовольняє умовам

$$R^h_{ijk,[lm]} = 0. \tag{2.3.47}$$

Тут кома “,“ — знак коваріантної похідної в V_n, дужками [ ] позначено альтернування [154, 168].

Враховуючи тотожність Річчі, (2.3.47) можна записати в вигляді

$$R_{\alpha ijk}R^{\alpha}_{hlm} + R_{h\alpha jk}R^{\alpha}_{ilm} + R_{hi\alpha k}R^{\alpha}_{jlm} + R_{hij\alpha}R^{\alpha}_{klm} = 0. \tag{2.3.48}$$

Підставляючи в рівняння (2.3.48) умови (2.3.43), переконаємось в справедливості теореми

Теорема 2.3.5. *Простори розділеної кривини належать до півсиметричних просторів.*

Тензор Річчі R_{ij} для просторів розділеної кривин має вигляд, на основі (2.3.46) —

$$R_{ij} = R^{\alpha}_{ij\alpha} = -b_\alpha b^\alpha a_i a_j - a_\alpha a^\alpha b_i b_j, \tag{2.3.49}$$

де $a^i = a_\alpha g^{\alpha i}$; $b^i = b_\alpha g^{\alpha i}$; g^{ij} — елементи матриці оберненої до метрики g_{ij}.

Скалярна кривина R задовольняє рівнянню

$$R = R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = -2 a_\alpha a^\alpha b_\alpha b^\alpha. \tag{2.3.50}$$

Формули (2.3.46) , (2.3.49) та (2.3.50) дозволяють розбити множину псевдоріманових просторів розділеної кривини на три класи, що не перетинаються:

$$(A): \quad a_\alpha a^\alpha \neq 0; \;\; b_\alpha b^\alpha \neq 0, \tag{2.3.51}$$

$$(B): \quad a_\alpha a^\alpha \neq 0; \;\; b_\alpha b^\alpha = 0, \tag{2.3.52}$$

$$(C): \quad a_\alpha a^\alpha = b_\alpha b^\alpha = 0. \tag{2.3.53}$$

Запишемо (2.3.46) в вигляді

$$R_{hijk} = a_h b_i a_j b_k - a_h a_k b_i b_j - a_i b_h a_j b_k + a_i b_h a_k b_j. \tag{2.3.54}$$

Розглянемо простори розділеної кривини класу (A), тобто простори, в яких виконуються умови (2.3.51).

Домножимо (2.3.54) на вираз

$$f = -(a_\alpha a^\alpha)(b_\alpha b^\alpha). \tag{2.3.55}$$

В результаті отримаємо

$$\frac{R}{2}R_{hijk}=-(a_\alpha a^\alpha)(b_\alpha b^\alpha)a_h a_j b_i b_k+(a_\alpha a^\alpha)(b_\alpha b^\alpha)a_h a_k b_i b_j+$$
$$+(a_\alpha a^\alpha)(b_\alpha b^\alpha)a_i a_j b_h b_k-(a_\alpha a^\alpha)(b_\alpha b^\alpha)a_i a_k b_h b_j. \tag{2.3.56}$$

Послідовно виключаючи із останнього вектори a_i, а потім b_i, з урахуванням (2.3.49), будемо мати відповідно

$$\frac{R}{2}R_{hijk}=a_\alpha a^\alpha b_i b_k R_{hj}-a_\alpha a^\alpha b_i b_j R_{hk}-$$
$$-a_\alpha a^\alpha b_h b_k R_{ij}+a_\alpha a^\alpha b_h b_j R_{ik} \tag{2.3.57}$$

та

$$\frac{R}{2}R_{hijk}=2(R_{ij}R_{hk}-R_{ik}R_{hj})-$$
$$-b_\alpha b^\alpha a_i a_k R_{hj}+b_\alpha b^\alpha a_i a_j R_{hk}+ \tag{2.3.58}$$
$$+b_\alpha b^\alpha a_h a_k R_{ij}-b_\alpha b^\alpha a_h a_j R_{ik}.$$

З іншого боку, виключаючи з (2.3.56) вектори b_i, з урахуванням (2.3.49), отримаємо вираз

$$\frac{R}{2}R_{hijk}=R_{ik}b_\alpha b^\alpha a_h a_j-R_{ij}b_\alpha b^\alpha a_h a_k-$$
$$-R_{hk}b_\alpha b^\alpha a_i a_j+R_{hj}b_\alpha b^\alpha a_i a_k, \tag{2.3.59}$$

який дає змогу (2.3.58) записати таким чином

$$\frac{R}{2}R_{hijk} = R_{hk}R_{ij} - R_{hj}R_{ik}. \tag{2.3.60}$$

Зауважимо, що скалярна кривина та тензор Річчі таких просторів відмінні від нуля.

Для просторів типу (B) тензор Річчі задовольняє умові

$$\begin{gathered} R_{ij} = -a_\alpha a^\alpha b_i b_j, \\ R = 0. \end{gathered} \tag{2.3.61}$$

Враховуючи (2.3.61), вираз (2.3.54) можливо записати у виді

$$\begin{gathered} R_{hijk} = \frac{1}{(a_\alpha a^\alpha)}(a_h a_k R_{ij} - a_h a_j R_{ik} + \\ + a_i a_j R_{hk} - a_i a_k R_{hj}). \end{gathered} \tag{2.3.62}$$

До третього типу (C) належить Річчі пласкі простори, тобто простори, в яких

$$R_{ij} = 0. \tag{2.3.63}$$

Таким чином, можна сформулювати теорему

Теорема 2.3.6. *Псевдоріманові простори V_n розділеної кривини можна розбити на три класи, в яких виконуються умови (2.3.46), (2.3.60) для типу (A), (2.3.61) для типу (B) та (2.3.63) для типу (C).*

При дослідженні рівнянь поля Степановим С.Є. [188] серед псевдоріманових просторів було виділено сім класів $\underset{i}{\Omega}$, $i = \overline{1,7}$ просторів в залежності від виду тензора енергії–імпульсу

$$\underset{1}{\Omega}: \qquad T_{ij,\,k} + T_{jk,\,i} + T_{ki,\,j} = 0; \tag{2.3.64}$$

$$\underset{2}{\Omega}: \qquad T_{ij,\,k} - T_{ik,\,j} = 0; \tag{2.3.65}$$

$$\underset{3}{\Omega}: \qquad T_{ij,\,k} = a_k g_{ij} + b_i g_{jk} + b_j g_{ik}, \tag{2.3.66}$$

де

$$a_i = \frac{(2-n)(n+1)}{2(n-1)(n+2)} R_{,\,i}; \qquad b_i = \frac{((n-2)}{2(n-1)(n+2)} R_{,\,i}; \tag{2.3.67}$$

$$\underset{4}{\Omega}: \qquad \underset{1}{\Omega} \cap \underset{2}{\Omega} \tag{2.3.68}$$

Останні три класи є перетином і прямими сумами перших трьох.

Перші три класи $\underset{i}{\Omega}$, $i = \overline{1,3}$, природно, назвати основними.

Як показано [189], простори $\underset{1}{\Omega}$ і $\underset{2}{\Omega}$ є просторами сталої скалярної кривини і, тому класи $\underset{i}{\Omega}$, $i = \overline{5,7}$ складаються з Річчі симетричних просторів, тобто просторів, в яких

$$R_{ij,\,k} = 0. \tag{2.3.69}$$

Серед останніх виділимо два типи, що не перетинаються : простори Ейнштейна, що характеризуються умовою

$$R_{ij} = \frac{R}{n} g_{ij}, \tag{2.3.70}$$

і, власне, Річчі симетричні, тобто простори, в яких виконуються умови (2.3.69), але не виконуються (2.3.70).

Для просторів Ейнштейна тензор енергії-імпульсу має вигляд:

$$T_{ij} = \frac{2-n}{2n} R g_{ij}. \tag{2.3.71}$$

Простори Ейнштейна позначимо Ω, а Річчі симетричні, відмінні від просторів Ейнштейна — $\underset{0}{\Omega}$. Віднесемо їх до основних класів.

Таким чином, існує п'ять основних класів спеціальних псевдоріманових просторів за видом тензору Річчі, які і станують об'єктом нашого подальшого вивчення. Вони задаються умовами:

$$\Omega : \qquad R_{ij} = \frac{R}{n} g_{ij};$$

$$\underset{0}{\Omega} : \qquad \begin{cases} R_{ij,\,k} &= 0 \\ R_{ij} &\neq \frac{R}{n} g_{ij}; \end{cases}$$

$$\underset{1}{\Omega} : \qquad R_{ij,\,k} + R_{jk,\,i} + R_{ki,\,j} = 0;$$

$$\underset{2}{\Omega}: \qquad R_{ij,\,k} - R_{ik,\,j} = 0;$$

$$\underset{3}{\Omega}: \qquad R_{ij,\,k} = \frac{n}{(n-1)(n+2)} R_{,\,k} g_{ij} + \frac{n-2}{2(n-1)(n+2)} R_{,\,j} g_{ik} +$$

$$+ \frac{n-2}{2(n-1)(n+2)} R_{,\,i} g_{jk}.$$

Зауважимо, що простори, в яких виконуються умови $\underset{3}{\Omega}$, М. С. Сінюков називав просторами L_n [178].

Висновки з розділу 2

Спеціалізація псевдоріманових просторів, як засіб введення додаткових обмежень в перевизначені системи рівнянь, має два основних джерела. По-перше, це геометричні умови об'єктів, що досліджуються, по-друге, це технологічні можливості методів дослідження. Враховуючи ці засоби та маючи на увазі дослідження відображень, запропоновано метод спеціалізації псевдоріманових просторів по типу внутрішніх об'єктів.

Серед псевдоріманових просторів, що дозволяють спеціальний вид метрики в деякій системі координат, виділені звідні та напівзвідні простори. Вивчені їх тензорні ознаки та, спираючись на це, деякі геометричні властивості.

У теорії спеціальних псевдоріманових просторів особливе місце займають симетричні і рекурентні простори.

Узагальнення цих просторів йшло в основному в двох напрямах: збільшення порядку коваріантних похідних і розгляд в якості симетричних (рекурентних) інших тензорів [125]. Природним чином виник новий тип рекурентності — слабка симетричність.

Якщо узагальнення рекурентних псевдоріманових просторів вести шляхом алгебраїчних умов, то ми прийдемо до псевдоріманових просторів із спеціальною векторною оболонкою. Їх вивчення ведеться з допомогою удосконалення методу В. Кайгородова [124].

Узагальнення симетричних псевдоріманових просторів приводить до гармонійних просторів. Для двохвалентних тензорів найбільш вдалою є запропонована С. Степановим [189] для тензора енергії–імпульсу методика розбиття на класи Ω. Модифікувавши її, застосовуємо для спеціалізації двічі коваріантних внутрішніх тензорів.

Розділ 3

Геодезичні відображення спеціальних псевдоріманових просторів

Першим питання про геодезичне відображення поверхні V_2 на площину $\bar{E}_2$ розглянув Е. Бельтрамі [3] в 1865 році, розв'язуючи задачі картографії [52]. Пізніше в 1869 році У. Діні [15] поставив загальну задачу про можливість геодезичного відображення V_2 на $\bar{V}_2$. Ним, по суті, ця задача була розв'язана для ріманових просторів, однак розв'язок був надзвичайно складний, і всі роки після того, він багато раз уточнювався та модифікувався цілим рядом вчених. Серед цих робіт особливе місці займає робота 1896 року Т. Леві-Чивіти [54], в якій він, виходячи з рівнянь динаміки, сформулював постановку задачі та отримав основні рівняння [26].

Після того, як тензорні методи дослідження зайняли домінуючі позиції в диференціальній геометрії, Г. Вейль, Л. П. Ейзенхарт, В. Ф. Каган, Г. І. Кручкович, А. С. Солодовніков та інші побудували струнку теорію геодезичних відображень псевдоріманових просторів, інваріантну відносно вибору системи координат [16, 17, 18, 20, 123, 153, 186, 187].

Новий поштовх ця теорія отримала після робіт М.С. Сінюкова, який звів задачу до дослідження лінійної системи диференціальних рівнянь [178].

3.1 Геодезичні відображення псевдоріманових просторів

Нагадаємо, що

Означення 3.1.1. *Взаємно однозначна відповідність між точками псевдоріманових просторів V_n з метричним тензором g_{ij} та $\bar{V}_n$ з метричним тензором $\bar{g}_{ij}$ називається геодезичним відображенням, якщо при ній кожна геодезична лінія V_n переходить в геодезичну лінію $\bar{V}_n$.*

Псевдоріманові простори V_n та $\bar{V}_n$, які дозволяють геодезичне відображення один на одного, будемо називати просторами, що знаходься в геодезичній відповідності , або такими , що належать до одного геодезичного класу.

Тензор деформації при геодезичних відображеннях має вигляд:

$$P_{ij}^h = \delta_{(i}^h \varphi_{j)},$$

де φ_i — деякий за необхідністю градієнтний вектор.

Ця умова необхідна і достатня для того, щоб данні псевдоріманові простори V_n та $\bar{V}_n$ дозволяли геодезичні відображення один на одного [54].

Враховуючи означення тензора деформації, отримаємо

$$\bar{\Gamma}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} + \varphi_i\delta^h_j + \varphi_j\delta^h_i, \tag{3.1.1}$$

або, враховуючи коваріантну сталість метричного тензора —

$$\bar{g}_{ij},_k = 2\varphi_k\bar{g}_{ij} + \varphi_i\bar{g}_{jk} + \varphi_j\bar{g}_{ik}. \tag{3.1.2}$$

Рівняння (3.1.1) та (3.1.2) еквівалентні, необхідні і достатні умови того, щоб псевдоріманів простір V_n та $\bar{V}_n$ знаходились в геодезичній відповідності.

Необхідною умовою для геодезичного відображення будуть рівняння:

$$\bar{R}^h_{ijk} = R^h_{ijk} + \varphi_{ij}\delta^h_k - \varphi_{ik}\delta^h_j, \tag{3.1.3}$$

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + (n-1)\varphi_{ij}, \tag{3.1.4}$$

де $\varphi_{ij} = \varphi_{i,\,j} - \varphi_i\varphi_j$.

Геодезичне відображення відмінне від гомотетії називають нетривіальним.

Для того, щоб заданий псевдоріманів простір V_n дозволяв нетривіальне геодезичне відображення необхідно і достатньо, щоб в ньому існував розв'язок системи диференціальних рівнянь відносно тензора $a_{ij} = a_{ji} \neq cg_{ij}$ та вектора $\lambda_i = \lambda_{,i} \neq 0$. Цю систему називають лінійною формою основних рівнянь.

Лінійна форма основних рівнянь теорії геодезичних відображень має вигляд [178]

$$a_{ij,k} = \lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik}. \tag{3.1.5}$$

Умови інтегрування цих рівнянь —

$$a_{\alpha i} R^{\alpha}_{jkl} + a_{\alpha j} R^{\alpha}_{ikl} = \lambda_{li} g_{jk} + \lambda_{lj} g_{ik} - \lambda_{ki} g_{jl} - \lambda_{kj} g_{il}. \tag{3.1.6}$$

З умов (3.1.6) отримаємо

$$n\lambda_{i,j} = \mu g_{ij} + a_{\alpha i} R^{\alpha}_{j} - a_{\alpha\beta} R^{\alpha\ \ \ \beta}_{\cdot\, ij\, \cdot}, \tag{3.1.7}$$

тут $\mu = \lambda_{\alpha,\beta} g^{\alpha\beta}$; $R^i_j = R_{\alpha j} g^{\alpha i}$; $R^{h\ \ \ k}_{\ ij} = R^h_{ij\alpha} g^{\alpha\ k}_{\ \cdot}$

З останнього будемо мати:

$$(n-1)\mu_{,i} = 2(n+1)\lambda_\alpha R^\alpha_i + a_{\alpha\beta}(2R^{\alpha\ \ \beta}_{\cdot\, i,\, \cdot} - R^{\alpha\beta}_{\ \ \ ,i}). \tag{3.1.8}$$

Розв'язки (3.1.2) та (3.1.5) пов'язані співвідношенням

$$a_{ij} = e^{2\varphi} \bar{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta j}; \tag{3.1.9}$$

$$\lambda_i = -e^{2\varphi} \bar{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta}. \tag{3.1.10}$$

Система рівнянь (3.1.5), (3.1.7) та (3.1.8) дає принципову можливість відповідати на питання: чи дозволяє заданий псевдоріманів простір V_n

геодезичне відображення на псевдоріманів простір $\bar{V}_n$. Питання зводиться до вивчення умов інтегрування цих рівнянь та їх диференціальних подовжень. Цю систему будемо називати системою основних рівнянь теорії геодезичних відображень.

Вказана система для початкових значень в точці $x_0 \in V_n$

$$a_{ij}(x_0) = \overset{0}{a}_{ij}; \quad \lambda_i(x_0) = \overset{0}{\lambda}_i; \quad \mu(x_0) = \overset{0}{\mu}$$

має не більше одного розв'язку. Таким чином, множина розв'язків цієї системи залежить від

$$r_{\text{гв}} \leq \frac{(n+1)(n+2)}{2} \tag{3.1.11}$$

суттєвих параметрів.

Означення 3.1.2. *Число суттєвих параметрів $r_{\text{гв}}$, від яких залежать розв'язки системи* (3.1.5), (3.1.7) *та* (3.1.8) *називають степеню мобільності псевдоріманового простору V_n відносно геодезичних відображень.*

Максимальне значення $r_{\text{гв}}$ дозволяють простори сталої кривини і тільки вони.

Далі ми знайдемо вид рівнянь (3.1.7) та (3.1.8) для псевдоріманових просторів, які дозволяють степінь мобільності відносно геодезичних відображень більше двох.

Попередньо доведемо лему

Лема 3.1.1. *Нехай в псевдоріманoвому просторі* V_n *існують симетричні тензори* $a_{ij}(\not\equiv cg_{ij})$, $b_{ij}(\not\equiv \mu g_{ij} + Ba_{ij})$, $A_{ij}(\not\equiv cg_{ij})$, B_{ij}, *що задовольняють умовам*

$$a_{ij\langle lm\rangle} = b_{l(i}g_{j)k} - b_{k(i}g_{j)l}; \tag{3.1.12}$$

$$A_{ij\langle lm\rangle} = B_{l(i}g_{j)k} - B_{k(i}g_{j)l}; \tag{3.1.13}$$

тоді

$$a_{ij} = \overset{1}{c} g_{ij} + \overset{2}{c} A_{ij}, \tag{3.1.14}$$

де c, μ, B, $\overset{1}{c}$, $\overset{2}{c}$ *- деякі інваріанти.*

Доведення.

Застосовуючи тотожність Річчі до тензорів a_{ij} та A_{ij} на підставі (3.1.12) і (3.1.13), отримаємо

$$\begin{gathered} A_{m(i}b_{j)k} + A_{k(i}b_{j)m} - a_{m(i}B_{j)k} - a_{k(i}B_{j)m} + \\ + g_{m(i}c_{j)k} + g_{k(i}c_{j)m} = 0, \end{gathered} \tag{3.1.15}$$

де

$$c_{ij} \overset{def}{=} (B_{j\alpha}a_{\beta i} - A_{j\alpha}b_{\beta i})g^{\alpha\beta}. \tag{3.1.16}$$

Згортаючи (3.1.15) з g^{im}, враховуючи (3.1.16), легко переконаємося, що тензор c_{ij} симетричний.

Альтернуємо (3.1.15) за індексами i і m, а потім поміняємо місцями індекси j та m, отримане почленно складемо з (3.1.15). У результаті знаходимо, що

$$\begin{gathered}A_{jm}b_{ik} + A_{ik}b_{jm} - a_{jm}B_{ik} - a_{ik}B_{jm} + \\ + g_{jm}c_{ik} + g_{ik}c_{jm} = 0.\end{gathered} \tag{3.1.17}$$

Згортаючи (3.1.17) з g^{jm}, отримаємо

$$c_{ij} = -\frac{A}{n}b_{ij} + \frac{a}{n}B_{ij} - \frac{d}{n}A_{ij} + \frac{D}{n}a_{ij} - \frac{c}{n}g_{ij}, \tag{3.1.18}$$

де

$$A \overset{def}{=} A_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}; \quad a \overset{def}{=} a_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}; \quad d \overset{def}{=} b_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta};$$

$$c \overset{def}{=} c_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}; \quad D \overset{def}{=} B_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}.$$

Додатковим згортанням (3.1.18) переконаємося, що

$$c = \frac{1}{n}(aD - Ad).$$

Тоді, після підстановки (3.1.18) в (3.1.17), групуючи, будемо мати:

$$E_{jm}\sigma_{ik} + E_{ik}\sigma_{jm} - e_{jm}\Sigma_{ik} - e_{ik}\Sigma_{jm} = 0. \tag{3.1.19}$$

Тут

$$E_{ij} \stackrel{def}{=} A_{ij} - \frac{A}{n} g_{ij}; \quad \Sigma_{ij} \stackrel{def}{=} B_{ij} - \frac{D}{n} g_{ij};$$
$$e_{ij} \stackrel{def}{=} a_{ij} - \frac{a}{n} g_{ij}; \quad \sigma_{ij} \stackrel{def}{=} b_{ij} - \frac{d}{n} g_{ij}. \tag{3.1.20}$$

Тензор $\Sigma_{ij} \not\equiv 0$, бо у протилежному випадку або $E_{ij} = 0$, або $\sigma_{ij} = 0$, що суперечить припущенням леми.

Тому, існує тензор T^{ij} такий, що $T^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\beta} = 1$. Згортаючи (3.1.19) з T^{ik}, можна явним чином виразити тензор e_{jm}:

$$e_{jm} = \overset{1}{c} E_{jm} + \overset{2}{c} \sigma_{jm} + \overset{3}{c} \Sigma_{jm}, \tag{3.1.21}$$

де $\overset{\alpha}{c}$ — деякі інваріанти.

Після підстановки (3.1.21) формула (3.1.19) перетвориться до наступного виду

$$(E_{jm} - \overset{2}{c} \Sigma_{jm})\sigma_{ik} + (E_{ik} - \overset{2}{c} \Sigma_{ik})\sigma_{jm} -$$
$$-(\overset{1}{c} E_{jm} + \overset{3}{c} \Sigma_{jm})\Sigma_{ik} - (\overset{1}{c} E_{ik} + \overset{3}{c} \Sigma_{ik})\Sigma_{jm} = 0. \tag{3.1.22}$$

а) Спочатку розглянемо випадок, коли

$$E_{jm} - \overset{2}{c} \Sigma_{jm} = 0.$$

Тоді з (3.1.22) витікає, що

$$\overset{1}{c}E_{jm}+\overset{3}{c}\Sigma_{jm}=0$$

і у свою чергу (3.1.21) має форму

$$e_{jm}=\overset{2}{c}\sigma_{jm}.$$

З цього співвідношення, очевидно, витікає (3.1.14).

б) Залишилося розглянути випадок, коли

$$E_{jm}-\overset{2}{c}\Sigma_{jm}\not\equiv 0.$$

Тоді з (3.1.22) витікає, що

$$\sigma_{jm}=\overset{4}{c}E_{jm}+\overset{5}{c}\Sigma_{jm} \tag{3.1.23}$$

і формула (3.1.21) спроститься таким чином

$$e_{jm}=\overset{6}{c}E_{jm}+\overset{7}{c}\Sigma_{jm}. \tag{3.1.24}$$

Після підстановки в (3.1.19), отримаємо

$$\left(2\overset{4}{c}E_{ik}+\left(\overset{5}{c}-\overset{6}{c}\right)\Sigma_{ik}\right)E_{jm}+\Sigma_{jm}\left(\left(\overset{5}{c}-\overset{6}{c}\right)E_{ik}+2\overset{7}{c}\Sigma_{ik}\right)=0. \tag{3.1.25}$$

Очевидно, коли $\overset{7}{c}=0$, то з (3.1.24) будемо мати (3.1.14). Тому розглянемо випадок, коли $\overset{7}{c}\not\equiv 0$.

Але тоді, якщо
$$\left(\overset{5}{c}-\overset{6}{c}\right)E_{ik}+2\overset{7}{c}\Sigma_{ik}=0, \tag{3.1.26}$$

отримаємо, що
$$\Sigma_{ik}=\overset{8}{c}E_{ik}. \tag{3.1.27}$$

Умова (3.1.27) витікає з (3.1.15) і у разі, коли не виконується (3.1.26).

В результаті після підстановки (3.1.27) в (3.1.24), отримаємо
$$e_{jm}=\overset{9}{c}\sigma_{jm}.$$

Звідси витікає формула (3.1.14).

Таким чином, лему 3.1.1 доведено повністю.

Спираючись на неї, доведемо теорему [35, 41, 126, 127, 134]

Теорема 3.1.1. *Якщо степінь мобільності* $r_{гв}$ *псевдоріманового простору* V_n *відносно геодезичних відображень більше двох, то лінійна форма основних рівнянь теорії геодезичних відображень псевдоріманових просторів* V_n *приймає наступну форму*

$$\begin{aligned}
&(a) \qquad a_{ij,k}=\lambda_i g_{jk}+\lambda_j g_{ik};\\
&(b) \qquad \lambda_{i,j}=\mu g_{ij}+Ba_{ij};\\
&(c) \qquad \mu_{,i}=2B\lambda_i,
\end{aligned} \tag{3.1.28}$$

де B — деяка стала, що однозначно визначена для заданого псевдоріманового простору V_n.

Доведення.

Нехай псевдоріманів простір V_n має степінь мобільності відносно геодезичних відображень більше двох.

Далі припустимо, що a_{ij}, λ_i загальний розв'язок і A_{ij} ($\neq cg_{ij}$), Λ_i деякий частковий розв'язок системи рівнянь (3.1.1) в V_n.

Вважаючи

$$b_{ij} \stackrel{def}{=} \lambda_{i,j}; \qquad B_{ij} \stackrel{def}{=} \Lambda_{i,j},$$

переконаємося, що умови інтегрованості рівнянь (3.1.5) можна записати у формі (3.1.12) і (3.1.13).

а) Припустимо протилежне, тобто що теорема 3.1.1 не вірна і не виконується рівняння (3.1.14) для загального розв'язку a_{ij}, λ_i.

Вище наведені припущення є по суті умовами леми 3.1.1, з якої у свою чергу витікає, що тензори a_{ij} і A_{ij} пов'язані співвідношеннями (3.1.14):

$$a_{ij} = \overset{1}{c}\, g_{ij} + \overset{2}{c}\, A_{ij}. \tag{3.1.29}$$

Диференціюємо (3.1.29) по x^k, отримаємо

$$\tau_i g_{jk} + \tau_j g_{ik} = \overset{1}{c}_k\, g_{ij} + \overset{2}{c}_k\, A_{ij}, \tag{3.1.30}$$

де

$$\tau_i \stackrel{def}{=} \lambda_i - \overset{2}{c}\Lambda_i; \qquad \overset{1}{c}_k \stackrel{def}{=} \overset{1}{c}_{,k}; \qquad \overset{2}{c}_k \stackrel{def}{=} \overset{2}{c}_{,k}.$$

Випадок, коли $\tau_i = 0$, веде або до умови

$$A_{ij} = cg_{ij},$$

що суперечить припущенню, або до висновку, що $\overset{1}{c}$ та $\overset{2}{c}$ — сталі. Тоді з формули (3.1.29) на підставі останнього $r_{\text{гв}} \leq 2$.

Отже, нам залишилося розглянути випадок, коли $\tau_i \not\equiv 0$.

Згорнемо (3.1.30) з деяким вектором ε^i, який задовольняє умові:

$$\tau_\alpha \varepsilon^\alpha = 1.$$

В результаті отримаємо

$$g_{jk} = -\tau_j \varepsilon_k + \overset{1}{c}_k \varepsilon_j + \overset{2}{c}_k A_{\alpha j} \varepsilon^\alpha, \tag{3.1.31}$$

де $\varepsilon_i \stackrel{def}{=} \varepsilon^\alpha g_{i\alpha}$.

Після згортання (3.1.31) з ε^j, знаходимо

$$2\varepsilon_k = \overset{1}{c}_k \varepsilon_\alpha \varepsilon^\alpha + \overset{2}{c}_k A_{\alpha\beta} \varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta.$$

Виключивши з формули (3.1.31) вектор ε_k, за допомогою останніх виразів, переконаємося, що $rang\,\|g_{ij}\| \leq 2$, а це неможливо.

У результаті отримали, що рівняння (3.1.28)(b), де B — деякий інваріант, виконується за необхідністю. Однозначна визначеність інваріанту B у формулах (3.1.28)(b) в заданому V_n показана в роботі [44].

б) Залишилося довести справедливість рівнянь (3.1.28)(c).

Спочатку переконаємось, що B - стала. Легко переконатись, що умовам (3.1.28)(b), враховуючи (3.1.10), еквівалентні співвідношення

$$\psi_{ij} = \bar{B}\bar{g}_{ij} - Bg_{ij}, \tag{3.1.32}$$

де $\bar{B}$ - деякий інваріант.

Розглянемо випадок, коли $B \not\equiv const$. Тоді на підставі результатів, отриманих Е.З. Горбатим [119], псевдоріманів простір V_n за необхідністю є еквідистантним. Більше того, при цій умові метричні тензори усіх псевдоріманових просторів V_n, на які дозволяє нетривіальні геодезичні відображення задане V_n, можна записати в вигляді

$$\bar{g}_{ij} = \underset{1}{c}\;\underset{1}{\mu}\; g_{ij} + \underset{2}{c}\;\underset{2}{\mu}\;\varepsilon_i\varepsilon_j, \tag{3.1.33}$$

де $\underset{1}{c}, \underset{2}{c} - const$, $\underset{1}{\mu}, \underset{1}{\mu}$ — інваріанти однозначно визначені в V_n, ε_i — однозначно визначений (з точністю до сталого множника) вектор в V_n.

Останнє вказує на те, що степінь мобільності цих псевдоріманових просторів V_n відносно геодезичних відображень дорівнює двом.

Враховуючи сказане вище, $B = const$. Але в цьому випадку, з рівнянь (3.1.28)(b) доведені формули (3.1.28)(c).

Таким чином, теорему 3.1.1 доведено повністю.

Отримані результати дають можливість розбити всі псевдоріманові простори V_n, що дозволяють нетривіальні геодезичні відображення, на дві великі групи в залежності від їх степені мобільності відносно геодезичних відображень.

3.2 Геодезичні відображення псевдоріманових просторів $V_n(B)$.

Звертаємо увагу, що в цьому підрозділі розглядаються поряд з псевдорімановими просторами і ріманові простори.

Якщо в деякій системі координат метрика ріманового простору V_n може бути записана в вигляді

$$ds^2 = \sum_{\alpha=1}^{p} \prod\nolimits'_{\beta} |f_\beta - f_\alpha| \, ds_\alpha^2, \tag{3.2.1}$$

то метрику виду (3.2.1) називають метрикою Леві-Чивіти, а сам запис ds^2 записом в формі Леві-Чивіти.

Пояснимо позначення в останній формулі:

1. координати $x^1, x^2, \ldots, x^n$ розбиті на групи $p > 1$ груп $(x_\alpha^i),\ \alpha = 1, \ldots, p$. Наприклад, якщо $p = 2$, то індекс i_1 пробігає номера координат першої групи $x^1, x^2, \ldots, x^k \ (k < n)$, а індекс i_2 — номери, що залишились $k+1, k+2, \ldots, n$. При цьому одна або декілька груп можуть складатись всього лише з одної координати.

2. форма ds_0^2 додатньо знаковизначена від змінних x_α^i.

3. функція f_α залежить від однієї змінної, якщо група x_α^i складається з одної координати, та $f_\alpha = const$, якщо група x_α^i складається більше ніж з одної координати.

4. $\prod'_\beta |f_\beta - f_\alpha|$ — означає добуток множників $|f_\beta - f_\alpha|$ для всіх $\beta = 1, 2, \ldots, p$, крім $\beta = \alpha$; $f_\beta \neq f_\alpha$ при $\beta \neq \alpha$.

   Наприклад,

$$
\begin{gathered}
ds^2 = \left|f_2(x^2) - f_1(x^1)\right| \left|f_3 - f_1(x^1)\right| dx^{1^2} + \\
+ \left|f_1(x^1) - f_2(x^2)\right| \left|f_3 - f_2(x^2)\right| dx^{2^2} + \\
+ \left|f_1(x^1) - f_3\right| \left|f_2(x^2) - f_3\right| ds_3^2,
\end{gathered} \tag{3.2.2}
$$

   тут $p = 3$, $i_1 = 1$, $i_2 = 3, 4, \ldots, n$, $f_3 = const$, ds_3^2 — метрична форма від змінних $x^3, x^4, \ldots, x^n$.

Тензорною ознакою того, щоб метрика ріманового простору V_n дозволяла запис в формі Леві-Чивіти є існування в ньому тензора $a_{ij} (= a_{ji} \neq c g_{ij})$ та функції $\varphi \neq const$ таких, що [1, 113, 114, 116, 153]

$$
a_{ij,k} = 2\varphi_{,k} g_{ij} + \varphi_{,i} g_{jk} + \varphi_{,j} \varphi_{ik}. \tag{3.2.3}
$$

Компоненти тензора a_{ij} та функція φ визначаються з умов

$$a_{ij}dx^i dx^j = \sum_{\alpha=1}^{p}(f_\alpha + \sum_{1}^{n} f_p)\Phi_\alpha; \tag{3.2.4}$$

$$\Phi_\alpha = \prod{}'_{\beta} |f_\beta - f_\alpha| \, ds_\alpha^2; \tag{3.2.5}$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\sum_{1}^{p} f_\beta. \tag{3.2.6}$$

Фубіні називав приєднаним лінійний елемент

$$ds^2 = \sum_{\alpha=1}^{p}\prod{}'_{\beta} |f_\beta - f_\alpha| \, (dy^\alpha)^2. \tag{3.2.7}$$

Тут $y^1, y^2, \ldots, y^p$ — нові змінні, при переході до яких всі неодновимірні змінні форми Леві-Чивіти були замінені на одновимірні. Це можливо зробити тому, що змінні з цих ds_α^2 в інші члени не входять: $f_\alpha = const$.

Приєднана метрика має сталу кривину K, якщо

$$\varphi_{,ij} = -Ka_{ij} + Lg_{ij}, \tag{3.2.8}$$

тут L — деяка стала.

Простір V_n з метрикою

$$ds^2 = ds_0^2 + \sum_{\alpha=1}^{t} \overset{\alpha}{\sigma} ds_\alpha^2, \tag{3.2.9}$$

де ds_0^2, ds_α^2 $(\alpha = 1, 2, \ldots, t)$ самостійні метрики, що залежать кожна від своєї змінної, причому всі ds^2_α — неодновимірні, $\overset{\alpha}{\sigma}$ — додатні функції; називають простором $V(K)$, якщо приєднана метрика

$$d\overset{*}{s}{}^2 = ds^2_0 + \sum_{\alpha=1}^{t} \overset{\alpha}{\sigma}(dy^{q+\alpha})^2 \tag{3.2.10}$$

має сталу кривину K.

Попередні розрахунки велись для ріманових просторів. В такому вигляді простори можна знайти в роботах А.С. Солодовнікова [186, 187]. Рівняння (3.2.8) еквівалентне рівнянню (3.1.32) для псевдоріманових просторів. А (3.1.32) можливо записати в вигляді (3.1.28)(b) і, таким чином, виникає необхідність в вивченні псевдоріманових просторів з спеціальним видом вектора λ_i.

Псевдоріманів простір V_n, що дозволяє нетривіальне геодезичне відображення, за якого виконуються рівняння:

$$\lambda_{i,j} = \mu g_{ij} + B a_{ij}, \tag{3.2.11}$$

де B — деякий інваріант, позначатимемо через $V_n(B)$.

Якщо $V_n(B)$ дозволяє будь-яке інше геодезичне відображення на деяке $\bar{V}_n$, то при цьому відображенні також виконуватимуться рівняння (3.2.11). Встановлена замкнутість просторів $V_n(B)$ відносно геодезичних відображень, тобто доведено, що якщо $V_n(B)$ дозволяє геодезичне відображення на деяке $\bar{V}_n$, то $\bar{V}_n$ є простором $\bar{V}_n(\bar{B})$ [78].

Встановлено [37], що Ейншейнові, узагальнено півсиметричні і узагальнено Річчі півсиметричні простори V_n, що дозволяють нетривіальні геодезичні відображення, є просторами $V_n(B)$. Просторами $V_n(B)$ будуть також простори $V(K)$ А. С. Солодовнікова [186] і Г. І. Кручковича [152].

Враховуючи сказане вище про простори $V_n(B)$, можемо сформулювати теорему 3.1.1 в наступному виді:

Теорема 3.2.1. *Псевдоріманові простори V_n, що мають степінь мобільності відносно нетривіальних геодезичних відображень більше двох, є просторами $V_n(B), B - const$.*

Відмітимо декілька властивостей просторів $V_n(B)$. Має місце

Теорема 3.2.2. *Будь-яке геодезичне відображення псевдоріманового простору $V_n(B)$, $B \not\equiv 0$, є або нетривіальним, або гомотетичним.*

Доведення.

Припустимо, що псевдоріманів простір $V_n(B)$, $B \not\equiv 0$, дозволяє афінне відображення (тобто тривіальне геодезичне). Тоді існує розв'язок рівнянь (3.1.28)(a) при $\lambda_i = 0$. З (3.1.28)(b) $\equiv$ (3.2.11) випливає $\mu g_{ij} + B a_{ij} = 0$. При $B \not\equiv 0$ витікає, що $a_{ij} = \dfrac{\mu}{B} g_{ij}$. Звідси, згідно [178], випливає, що геодезичне відображення є гомотетичним.

Теорему доведено.

Теорема 3.2.3. *Якщо в псевдорімановому просторі $V_n(B)$ серед векторів λ_i, що задовольняють (3.2.11), є ненульовий вектор сталої довжини, то тоді $B = 0$.*

Доведення.

Нехай в $V_n(B)$, $B \not\equiv 0$, тензор a_{ij}, ковектор λ_i ($\not\equiv 0$) і інваріант μ є розв'язком лінійної форми основних рівнянь геодезичних відображень, які в $V_n(B)$ мають вигляд (3.1.5) та (3.2.11).

Нехай вектор λ_i має сталу довжину, тобто виконуються умови

$$\lambda_\alpha \lambda_\beta g^{\alpha\beta} = c = const. \tag{3.2.12}$$

Такій умові задовольняють ізотропні вектори λ_i, в яких має місце рівняння

$$\lambda_\alpha \lambda_\beta g^{\alpha\beta} = 0. \tag{3.2.13}$$

а) Спочатку розглянемо випадок, коли $B \not\equiv const$.

З досліджень Е.З. Горбатого [119] витікає, що тензор a_{ij} і вектор λ_i задовольняють умовам:

$$\begin{aligned} &(a) \qquad a_{ij} = \alpha g_{ij} + \beta \lambda_j \lambda_j; \\ &(b) \qquad \lambda_{i,j} = \gamma g_{ij} + \delta \lambda_i \lambda_j, \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

де α, β, γ, δ — деякі функції інваріанту λ.

Диференціюючи (3.2.12), підставляючи (3.2.14)(b), переконаємося, що $\gamma + c\delta = 0$.

Тоді диференціюємо (3.2.14)(a), після підстановки (3.1.5) і (3.2.14)(b) маємо:

$$\lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik} = \lambda_i(\alpha' g_{ij} + (\beta' + 2\delta)\lambda_i\lambda_j) = 0.$$

Звідси витікає, що $\lambda_i = 0$. Інакше — $rang\,\|g_{ij}\| \leq 2$. Отже, випадок a) доведений.

б) Залишилося розглянути випадок, коли $B \equiv const \;\; \not\equiv 0$.

Тоді мають місце рівняння (3.1.28). Диференціюємо (3.2.12). Після підстановки (3.2.11) отримуємо

$$\mu\lambda_i + Ba_{i\alpha}\lambda_\alpha = 0. \qquad (3.2.15)$$

Потім диференціюємо (3.2.15), враховуючи (3.1.5) і (3.2.12), маємо

$$3B\lambda_i\lambda_j + \mu^2 g_{ij} + 2\mu B a_{ij} + B^2 a_{i\alpha} a_j^\alpha = 0. \qquad (3.2.16)$$

Продиференціюємо (3.2.16) по x^k, на основі (3.1.28) матимемо

$$4\lambda_k(B\mu g_{ij} + B^2 a_{ij}) + \lambda_i c_{jk} + \lambda_j c_{ik} = 0, \qquad (3.2.17)$$

де c_{ij} — деякий симетричний тензор.

Оскільки $\lambda_i \;\not\equiv\; 0$, то існує ε^i такий, що $c_{\alpha k}\varepsilon^\alpha = c\lambda_k$, де c - деякий інваріант.

Тоді, після згортання (3.2.17) з ε^i, отримаємо $c_{jk} = c_j\lambda_k$, де c_j — деякий вектор. Тензор c_{jk} є симетричним тензором, тому маємо $c_{jk} = \alpha\lambda_j\lambda_k$, де α — деякий інваріант. Але тоді з (3.2.17) витікає справедливість формули :

$$\mu B g_{ij} + B^2 a_{ij} + \beta\lambda_i\lambda_j = 0, \tag{3.2.18}$$

де β — деякий інваріант.

Після диференціювання (3.2.18) по x^k переконаємося, що справедлива формула

$$2B^2\lambda_k g_{ij} + \lambda_i d_{jk} + \lambda_j d_{ik} = 0,$$

де d_{ij} — деякий тензор.

З останньої рівності, у разі, коли $B \not\equiv 0$, витікає, що $rang\,\|g_{ij}\| \leq 2$. Отже, $B = 0$, що і вимагалося довести.

Теорема 3.2.4. *Якщо в псевдорімановому просторі $V_n(B)$ серед ненульових векторів λ_i, що задовольняють* (3.2.11)*, є взаємно ортогональні, то тоді $B = 0$.*

Доведення.

Нехай V_n є псевдорімановий простір $V_n(B)$, $B \not\equiv 0$.

Очевидно, що інваріант B за необхідністю є сталим, інакше степінь мобільності $r_{\text{гв}} \geq 2$, а це суперечить теоремі 3.2.1.

Тому, далі розглядаємо псевдоріманові простори $V_n(B)$, $B-const$. Нехай a_{ij}, λ_i, μ і A_{ij}, Λ_i, M — два розв'язка рівнянь (3.1.28), причому вектори λ_i і Λ_i ортогональні між собою, що рівносильно умові

$$\lambda_\alpha \Lambda_\beta g^{\alpha\beta} = 0. \tag{3.2.19}$$

Випадок, коли λ_i і Λ_i колінеарні, веде до того, що ці вектори ізотропні, а випадок, коли вектори λ_i або Λ_i ізотропні, вирішений в теоремі 3.2.3.

Тому надалі обмежимося випадком, коли вектори λ_i і Λ_i неізотропні і неколінеарні.

Коваріантно диференціюючи формулу (3.2.19), враховуючи (3.1.28), отримаємо

$$\mu \Lambda_i + B a_{\alpha i} \Lambda_\alpha + M \lambda_i + B A_{\alpha i} \lambda^\alpha = 0. \tag{3.2.20}$$

Аналогічно коваріантно диференціюючи (3.2.20), будемо мати

$$\begin{gathered} 3B\lambda_j \Lambda_i + 3B\Lambda_j \lambda_i + 2\mu M g_{ij} + \\ +2\mu B A_{ij} + 2MBa_{ij} + B^2 a^\alpha_{(i} A_{j)\alpha} = 0, \end{gathered} \tag{3.2.21}$$

де $a^\alpha_i \overset{def}{=} a_{ij} g^{\alpha j}$.

Ще раз диференціюючи, згрупувавши, отримаємо

$$\Lambda_{(i}\tilde{A}_{j)k}+\lambda_{(i}\tilde{\tilde{A}}_{j)k}=0, \tag{3.2.22}$$

де $\tilde{A}_{ij}\overset{def}{=}B(Ba_{ij}+Mg_{ij});\qquad \tilde{\tilde{A}}_{ij}\overset{def}{=}B(BA_{ij}-\mu g_{ij}).$

Згортаючи (3.2.22) з g^{jk}, матимемо

$$B(n\mu+aB)\Lambda_i+(nM+BA)\lambda_i=0.$$

Оскільки вектори λ_i і Λ_i неколінеарні, то тоді

$$n\mu+aB=0.$$

Диференціюючи останнє, враховуючи (3.1.28) і $a_{,i}=2\lambda_i$, приходимо до суперечності, тому що $B\not\equiv 0$.

Таким чином, переконуємося в справедливості теореми.

Розглянемо псевдоріманові простори V_n, в яких існує ненульове векторне поле $f_{,i}$ таке, що

$$f_{,ijk}=A(2f_{,k}g_{ij}+f_{,i}g_{jk}+f_{,j}g_{ik}), \tag{3.2.23}$$

де $A-const$.

Має місце наступна теорема

Теорема 3.2.5. *Для того, щоб псевдоріманів простір V_n, був простором*

$V_n(B), B = const$, необхідно і достатньо, щоб в ньому існувало векторне поле $f_{,i}$, що задовольняє умовам (3.2.23), при $A = const \neq 0$.

Доведення.

Нехай в V_n існує ненульове градієнтне векторне поле $f_{,i}$, що задовольняє умовам (3.2.23), де $A \not\equiv 0$. Поклавши

$$a_{ij} = f_{,ij} - 2Afg_{ij},$$
$$\lambda_i = Af_{,i} \tag{3.2.24}$$

і, враховуючи (3.2.23), переконаємося, що в V_n виконуються рівняння (3.1.28)(a) і (3.1.28)(b), причому $B = A$. Тоді V_n за означенням є простором $V_n(B)$.

З іншого боку, нехай маємо псевдоріманів простір $V_n(B)$, $B \not\equiv 0$. Поклавши $A = B$, $f = \dfrac{1}{B}\lambda$, переконаємося, що на основі (3.1.28) виконуються рівняння (3.2.23).

Таким чином, доведення теореми завершене, а розв'язання задачі про геодезичне відображення для багатьох типів спеціальних просторів [22, 98, 176, 177, 185] зведено до вивчення системи диференціальних рівнянь (3.2.23).

3.3 Геодезичні відображення псевдоріманових просторів з умовами на тензор Річчі

Розгляд геодезичних відображень спеціальних псевдоріманових просторів розпочнемо з вивчення геодезичних відображень просторів Ейнштейна.

Простори Ейнштейна, які характеризуються умовами на тензор Річчі

$$R_{ij} = \frac{R}{n} g_{ij}, \tag{3.3.1}$$

мають велике значення, як в рімановій геометрії, так і в її застосуваннях, див. [2, 23, 51, 84]. Питаннями про геодезичні відображення просторів Ейнштейна займалося багато геометрів, наприклад, О.З. Петров [170, 171], П. Венці [94, 95, 102, 103], Й. Мікеш [157], С.Формела [24, 25].

Нагадаємо, підсумковий результат О.З. Петрова про геодезичні відображення чотиривимірних просторів Ейнштейна :

Чотиривимірні простори Ейнштейна V_4 несталої кривини з сигнатурою Мінковського не дозволяють нетривіальні геодезичні відображення на простори Ейнштейна $\bar{V}_n$ з сигнатурою Мінковського.

Нами доведено теорему, яка узагальнює цей результат [129]:

Теорема 3.3.1. *Чотиривимірні простори Ейнштейна V_4, відмінні від просторів сталої кривини, не дозволяють нетривіальні геодезичні відображення на псевдоріманові простори $\bar{V}_4$.*

Доведення .

Доведення проведемо методом від протилежного. Нехай чотиривимірний простір Ейнштейна V_4, відмінний від простору сталої кривини, дозволяє нетривіальне геодезичне відображення на псевдоріманів простір $\bar{V}_4$.

Тоді, згідно з теоремою Й. Мікеша [157], $\bar{V}_4$ є, за необхідністю, також простором Ейнштейна, а для самого V_n основні рівняння геодезичних відображень (3.1.28) запишуться так [36, 46, 49]:

$$\begin{aligned} &(a) \qquad a_{ij,k} = \lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik}; \\ &(b) \qquad \lambda_{i,j} = \mu g_{ij} + \frac{R}{12} a_{ij}; \\ &(c) \qquad \mu_{,i} = \frac{R}{6}\lambda_i. \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Умови інтегрованості рівнянь (3.3.2)(b) мають вигляд

$$\lambda_\alpha Y^\alpha_{ijk} = 0, \tag{3.3.3}$$

де

$$Y^h_{ijk} \overset{def}{=} R^h_{ijk} - \frac{R}{n(n-1)}(\delta^h_k g_{ij} - \delta^h_j g_{ik}). \tag{3.3.4}$$

Тензор Y^h_{ijk} — це тензор конциркулярної кривини псевдоріманового простору V_n.

Оскільки простір V_4 має несталу кривину, то його тензор конциркулярної кривини не дорівнює нулю.

Потім на підставі досліджень Я.А. Схоутена і Д.Дж. Стройка [87, 130], що детально описані О.З. Петровим [170, стор. 261] з умов (3.2.3) при $n = 4$ зробимо висновок про ізотропність вектору λ^h.

Тоді з ізотропності витікає, що $R = 0$. А, значить, досліджуваний нами простір V_4 є Річчі пласким, тобто має місце

$$R_{ij} = 0. \tag{3.3.5}$$

Умови (3.3.2)(b) спрощуються: $\lambda_{i,j} = \mu g_{ij}$. Ізотропність вектору λ_i тягне рівність нулю інваріанта μ. Отже, вектор λ_i — коваріантно сталий.

Тоді умови (3.3.3) набирають вигляду

$$\lambda_\alpha R^\alpha_{ijk} = 0. \tag{3.3.6}$$

Відомо [170], що в V_4, в якому існує ізотропний коваріантно сталий вектор λ^h, можна вибрати спеціальну систему координат, в якій

$$\lambda^h = \delta^h_1; \qquad g_{ij}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ 0 & g_{23} & g_{33} & g_{34} \\ 1 & g_{24} & g_{34} & g_{44} \end{pmatrix} \tag{3.3.7}$$

Подальші міркування будемо вести в цій системі координат. У цій системі матриця g^{ij} обернена до g_{ij} має вигляд:

$$g^{ij}(x) = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} & 1 \\ g^{12} & g^{22} & g^{23} & 0 \\ g^{13} & g^{23} & g^{33} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.3.8}$$

Враховуючи (3.3.6) і (3.3.7), отримаємо, що $R_{lijk} = 0$. Потім, з (3.3.5) і (3.3.8) при $i = 2,\ j = 4$ і $i = 3,\ j = 4$, маємо

$$\begin{gathered} g^{32}R_{3242} + g^{33}R_{3243} = 0; \\ g^{22}R_{2342} + g^{23}R_{2343} = 0. \end{gathered} \tag{3.3.9}$$

Оскільки

$$g^{ij}(x) = \det \begin{pmatrix} g^{22} & g^{23} \\ g^{23} & g^{33} \end{pmatrix} \not\equiv 0,$$

то з (3.3.9) отримаємо

$$R_{3242} = R_{3243} = 0.$$

Крім того, з (3.3.5) при $i = j = 2;\ i = j = 3$ та $j = 2;\ j = 3$ будемо мати

$$g^{33}R_{3223} = g^{22}R_{2332} = g^{23}R_{3232} = 0.$$

З останнього витікає

$$R_{2332} = 0.$$

У результаті, ми переконалися, що відмінними від нуля компонентами тензора Рімана (з урахуванням відомих тотожностей тензора Рімана) можуть бути тільки

$$R_{2442}, \quad R_{2443}, \quad R_{3443}.$$

Таким чином, тензор Рімана чотиривимірного простору Ейнштейна може бути представлений у виді

$$R_{hijk} = \varepsilon(\xi_h\lambda_i - \xi_i\lambda_h)(\xi_j\lambda_k - \xi_k\lambda_j). \tag{3.3.10}$$

Тут $\lambda_i \stackrel{def}{=} \lambda^\alpha g_{\alpha i} = g_{1i} = \delta_i^4$; ξ_i — деякий неколінеарний до λ_i вектор, $\varepsilon = \pm 1$.

Враховуючи (3.3.5), з (3.3.10) витікає, що

$$\xi^\alpha\xi_\alpha = 0 \quad \text{та} \quad \xi_\alpha\lambda^\alpha = 0. \tag{3.3.11}$$

Коваріантно продиференціюємо (3.3.10) у напрямі x^l через коваріантну сталість вектору λ_i, маємо:

$$R_{hijk,l}=\varepsilon(\xi_{h,r}\lambda_i-\xi_{i,l}\lambda_h)(\xi_j\lambda_k-\xi_k\lambda_j)-$$
$$-\varepsilon(\xi_h\lambda_i-\xi_i\lambda_h)(\xi_{j,l}\lambda_k-\xi_{k,l}\lambda_j). \tag{3.3.12}$$

Враховуючи тотожність Біанкі, проциклюємо останнє за індексами j, k, l

$$(\lambda_i\xi_{h,l}-\xi_{i,l}\lambda_h)(\xi_j\lambda_k-\xi_k\lambda_j)+$$
$$+(\lambda_i\xi_{h,j}-\xi_{i,j}\lambda_h)(\xi_k\lambda_l-\xi_l\lambda_k)+ \tag{3.3.13}$$
$$+(\xi_h\lambda_i-\xi_i\lambda_h)(\xi_{j,l}\lambda_k-\xi_{k,l}\lambda_j+\xi_{k,j}\lambda_i-\xi_{l,j}\lambda_k+\xi_{l,k}\lambda_j-\xi_{j,k}\lambda_l)=0.$$

З цього співвідношення видно, що

$$\xi_{h,l}=\xi_h c_l+d_l\lambda_h+l_h\xi_l+f_h\lambda_l, \tag{3.3.14}$$

де c_i, d_i, l_i, f_i - деякі вектори.

Підставивши останнє в (3.3.13), отримаємо:

$$l_j(\xi_l\lambda_k-\xi_k\lambda_l)+l_k(\xi_j\lambda_l-\xi_l\lambda_j)+l_l(\xi_k\lambda_j-\xi_j\lambda_k)=0.$$

Тоді

$$l_i = \alpha\xi_i + \beta\lambda_i,$$

де α, β — деякі інваріанти.

Таким чином, формулу (3.3.14) можна переписати в наступному виді:

$$\xi_{h,l} = \xi_h c_l + l_h d_l + f_h \lambda_l. \tag{3.3.15}$$

Диференціювавши (3.3.11), отримаємо

$$\xi^\alpha \xi_{\alpha,i} = 0; \quad \lambda^\alpha \xi_{\alpha,i} = 0.$$

Згортаючи (3.3.15) з ξ^h, а потім з λ^h, матимемо (3.3.16)

$$\xi^\alpha f_\alpha = 0; \quad \xi^\alpha f_\alpha = 0. \tag{3.3.16}$$

Нехай вектор f_i лінійно не залежить від векторів λ_i і ξ_i, тоді в деякій точці x_0 можна вибрати систему координат так, щоб

$$\lambda^i = \delta^i_1; \quad \xi^i = \delta^i_2; \quad f^i = \delta^i_3.$$

Але в цьому випадку, в силу (3.3.16) і ізотропності векторів λ_i, ξ_i, метрика вироджується. Отримана суперечність означає, що вектор f_i можна лінійно виразити через вектори λ_i та ξ_i.

У такому випадку (3.3.15) набере простішого вигляду:

$$\varepsilon_{h,l} = \xi_h c_l + \lambda_h d_l.$$

Підставивши останнє в (3.3.12) і враховуючи (3.3.10), отримаємо, що

$$R_{hijk,l} = \varphi_l R_{hijk}, \tag{3.3.17}$$

тут $\varphi_l = 2\varepsilon c_l$.

Останньою умовою характеризуються рекурентні псевдоріманові простори, які, як відомо [86, 97, 179], дозволяють нетривіальні геодезичні відображення тільки у тому випадку, коли є просторами сталої кривини. А це суперечить нашому припущенню.

Таким чином, теорему повністю доведено.

В результаті нами виділений ще один клас псевдоріманових просторів, однозначно визначених відносно нетривіальних геодезичних відображень, якими є, наприклад, симетричні, рекурентні, узагальнено симетричні і інші простори, див. [29, 85, 92, 99, 101, 191, 192].

Поширюючи методи досліджень, розроблені для вивчення геодезичних відображень чотиривимірних просторів Ейнштейна сигнатури Мінковського на Ейншейнові простори вищої розмірності $n > 4$ О.З. Петровим [170], стор. 355 і 461, була висловлена гіпотеза:

Простори Ейнштейна V_n $(n > 4)$ сигнатури Мінковського, відмінні від просторів сталої кривини, не дозволяють нетривіальних геодезичних відображень на простори Ейнштейна тієї ж сигнатури.

Спростуємо цю гіпотезу за допомогою наступного прикладу.

Нехай V_n $(n > 4)$ еквідистантний простір Ейнштейна з наступною метрикою

$$ds^2 = dx^{1^2} + e^{2\varphi(x^1)}\tilde{g}_{\alpha\beta}(x^2, \ldots, x^n)dx^\alpha dx^\beta; \quad \alpha, \beta > 1.$$

Тут $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ — метричний тензор простору Ейнштейна $\tilde{V}_{n-1}$, відмінного від простору сталої кривини, функція $\varphi(x^1)$ задовольняє умові

$$\varphi\prime \cdot \varphi\prime = K + \tilde{K}e^{-2\varphi} \not\equiv 0,$$

$K,\ \tilde{K}$ - кривини відповідно просторів $V_n,\ \tilde{V}_{n-1}, K = \dfrac{R}{n(n-1)}$.

Конциркулярний вектор ξ_i, який породжує еквідистантний простір V_n, в цій системі координат має вид $\xi_i = \delta_i^1$.

Такий псевдоріманів простір V_n, як відомо [157, 178], дозволяє нетривіальне геодезичне відображення на простір $\bar{V}_n$, який також буде еквідистантним простором Ейнштейна.

Тензор a_{ij} виду

$$a_{ij} = kg_{ij} + \xi_i\xi_j,$$

де k - деяка стала така, що $|a_{ij}| \not\equiv 0$, є розв'язком системи рівнянь теорії геодезичних відображень. Тоді елементи оберненої матриці $\bar{g}^{ij}$ до метричного тензору $\bar{g}_{ij}$ ріманова простору $\bar{V}_n$ виразяться так :

$$\bar{g}^{ij} = e^{-2\varphi} a_{\alpha\beta} g^{\alpha i} g^{\beta j}.$$

При аналізі сигнатур метрик даних просторів V_n і $\bar{V}_n$ обмежимося деякою точкою $x_0 = (x_0^1,\, x_0^2,\, \ldots,\, x_0^n) \in V_n$. Систему координат в $\tilde{V}_{n-1}$ виберемо так, щоб

$$\bar{g}_{ij} = diag(e_2, e_3,\, \ldots,\, e_n),$$

де $e_i = \pm 1$.

Позначимо через $c = {}^{2\varphi(x_0^1)}$ і $q = {}^{2\varphi(x_0)}$. Тоді тензори $g_{ij},\, g^{ij},\, a_{ij},\, \bar{g}_{ij},\, \bar{g}^{ij}$ мають в точці x_0 вид:

$$g_{ij} = diag(1,\, ce_2,\, ce_3,\, \ldots,\, ce_n),$$

$$g^{ij} = diag(1,\, c^{-1}e_2,\, c^{-1}e_3,\, \ldots,\, c^{-1}e_n),$$

$$a_{ij} = diag(1+k,\, kce_2,\, kce_3,\, \ldots,\, kce_n),$$

$$\bar{g}^{ij} = qdiag(1+k,\, kce_2,\, kce_3,\, \ldots,\, kce_n),$$

$$\bar{g}_{ij} = q^{-1} diag((1+k)^{-1},\, (kc)^{-1}e_2,\, (kc)^{-1}e_3,\, \ldots,\, (kc)^{-1}e_n).$$

З цих формул витікає, що при

$$e_2 = e_3 = \ldots = e_n = -1, \quad k > 0,$$

метрики псевдоріманових просторів V_n та $\bar{V}_n$ мають сигнатуру Мінковського. Таким чином, наведено приклад просторів Ейнштейна сигнатури Мінковського, які знаходяться в нетривіальній геодезичній відповідності. Це і є контрприклад гіпотезі, висловленій О.З. Петровим.

В якості зауваження відмітимо, що при відповідному виборі коефіцієнта k, геодезично відповідні простори V_n та $\bar{V}_n$ можуть мати різні сигнатури.

В якості прикладу розглянемо геодезичні відображення псевдоріманового простору V_4, який називають простором Казнера [170].

$$ds^2 = dt^2 - t^{2p_1}dx^2 - t^{2p_2}dy^2 - t^{2p_3}dz^2. \tag{3.3.18}$$

Тут $p_1,\ p_2,\ p_3$ — це три числа, які задовольняють умові

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1, \quad p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1.$$

Такий вид метрики виник в результаті пошуку розв'язку рівняння поля для плаского простору (вакуумні розв'язки).

Оскільки простір Казнера є псевдорімановим простором Ейнштейна, то він дозволяє нетривіальні геодезичні відображення лише в випадку, коли має сталу кривину. Це можливо лише коли

$$p_1 = p_2, \quad \text{а} \quad p_3 = 1.$$

Розв'язуючи при цих умовах систему основних рівнянь теорії геодезичних відображень отримаємо для вектора λ_i:

$$\lambda_i = \begin{cases} \frac{\mu}{n}t + c_1e^z + c_2e^{-z} \\ \\ \frac{\mu}{n}x + c_3 \\ \\ \frac{\mu}{n}y + c_4 \\ \\ t(c_1e^z - c_2e^{-z}) \end{cases}, \qquad c_i = const, \;\; i = \overline{1,4}.$$

Враховуючи градієнтність вектора , переконаємось, що

$$\lambda = \frac{\mu}{2n}(t^2 - x^2 - y^2)\mu + c_3x + c_4y + t(c_1e^z + c_2e^{-z}) + C.$$

Використовуючи знайдені розв'язки λ_i, знайдемо загальні розв'язки лінійної форми основних рівнянь теорії геодезичних відображень

$$a_{11} = \frac{\mu}{n}t^2 + 2t(c_1e^z + c_2e^{-z}) + c_{13}e^{2z} + c_{14}e^{-2z} + c_5;$$

$$a_{12} = -\frac{\mu}{n}xt - x(c_1e^z + c_2e^{-z}) + c_3t + c_8e^z + c_9e^{-z};$$

$$a_{13} = -\frac{\mu}{n}yt - y(c_1e^z + c_2e^{-z}) + c_4t + c_{11}e^z + c_{12}e^{-z};$$

$$a_{14} = (c_1 e^{z} - c_2 e^{-z})t^2 + (c_{13} e^{2z} - c_{14} e^{-2z})t;$$

$$a_{22} = \frac{\mu}{n} x^2 - 2c_3 x + c_6;$$

$$a_{23} = \frac{\mu}{n} xy - c_4 x - c_3 y + c_7;$$

$$a_{24} = (-(c_1 e^{z} - c_2 e^{-z})x + c_8 e^{z} - c_9 e^{-z})\, t;$$

$$a_{33} = \frac{\mu}{n} y^2 - 2c_4 y + c_{10};$$

$$a_{34} = (-(c_1 e^{z} - c_2 e^{-z})y + c_{11} e^{z} - c_{12} e^{-z})\, t;$$

$$a_{44} = (c_{13} e^{2z} + c_{14} e^{-2z} - c_5)t^2, \quad c_j = const, \quad j = \overline{5, 14}.$$

Таким чином, простір Казнера дозволяє нетривіальні геодезичні відображення в випадку, коли його метрика має вигляд

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -t^2 \end{pmatrix} \tag{3.3.19}$$

Загальний розв'язок основної системи теорії геодезичних відображень залежить від 15 суттєвих параметрів, тобто $r_{\text{гв}} = 15$.

Знайдені тензори a_{ij}, вектори λ_i та інваріант μ дозволяють однозначно знайти метрику простору $\bar{V}_n$, результату геодезичного відображення та сам вектор, що задає це відображення.

3.4 Геодезичні відображення псевдоріманових просторів з умовами на тензор Рімана

Псевдоріманів простір $V_n (n > 2)$ з метричним тензором g_{ij} називають простором квазісталої кривизни, якщо його тензор Рімана R^h_{ijk} задовольняє умовам:

$$R_{hijk} = \alpha(g_{hj}g_{ik} - g_{hk}g_{ij}) + \beta(\psi_h\psi_j g_{ik} - \psi_h\psi_k g_{ij} + \psi_i\psi_k g_{hj} - \psi_i\psi_j g_{hk}), \quad (3.4.1)$$

де $R_{hijk} = g_{\alpha h}R^{\alpha}_{ijk}$; α, β — деякі інваріанти, а ψ_i — одиничний вектор [123], [56].

Згортаючи (3.4.1), переконаємося, що

$$R_{ij} = -(\alpha(n-1) + \beta)g_{ij} - \beta(n-2)\psi_i\psi_j, \quad (3.4.2)$$

тут $R_{ij} = R^{\alpha}_{ij\alpha}$ — тензор Річчі V_n.

З (3.4.2) для скалярної кривини $R = R_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$, де g^{ji} — елементи зворотної матриці до g_{ij}, отримаємо:

$$R = -n(\alpha(n-1) + \beta) - \beta(n-2) \quad (3.4.3)$$

і тоді (3.4.2) набере вигляду

$$R_{ij} = \frac{R}{n}g_{ij} + \frac{\beta(n-2)}{n}g_{ij} - \beta(n-2)\psi_i\psi_j. \quad (3.4.4)$$

З останнього видно, що для просторів Ейнштейна, тобто просторів, в яких виконуються умови $R_{ij} = \dfrac{R}{n} g_{ij}$, інваріант β — за необхідністю нульовий, і простір квазісталої кривини буде простором сталої кривини. Тому, надалі, розглядатимемо простори відмінні від просторів Ейнштейна.

Умови інтегрованості рівнянь (3.1.5) мають вигляд:

$$a_{\alpha i} R^{\alpha}_{jkl} + a_{\alpha j} R^{\alpha}_{ikl} = \lambda_{li} g_{jk} + \lambda_{lj} g_{ik} - \lambda_{kj} g_{il} - \lambda_{ki} g_{jl}, \tag{3.4.5}$$

де $\lambda_{ij} = \lambda_{i,j}$.

Циклюючи останнє по індексах (i і l), отримаємо

$$a_{\alpha i} R^{\alpha}_{jkl} + a_{\alpha k} R^{\alpha}_{jli} + a_{\alpha l} R^{\alpha}_{jik} = 0. \tag{3.4.6}$$

З останнього матимемо, згортаючи зі g^{ij} —

$$a_{\alpha l} R^{\alpha}_{h} - a_{\alpha k} R^{\alpha}_{l} = 0. \tag{3.4.7}$$

Підставляючи в (3.4.7) умову (3.4.2), переконаємося, що при $\beta \neq 0$

$$\psi^{\alpha} a_{\alpha i} = \rho \psi_i, \tag{3.4.8}$$

де ρ — деякий інваріант, а $\psi^h = \psi_\alpha g^{\alpha h}$.

Таким чином, доведено

Теорема 3.4.1. *Якщо псевдоріманів простір квазісталої кривини дозволяє геодезичне відображення, то вектор ψ_i задовольняє умовам (3.4.8).*

Диференціюючи (3.4.8), матимемо з урахуванням (3.1.5),

$$\psi^{\alpha} \lambda_{\alpha} g_{ij} + \lambda_i \psi_j + a_{\alpha i} \psi^{\alpha}_{,\,j} = \rho_{,\,j} \psi_i + \rho \psi_{i,\,j}. \tag{3.4.9}$$

Згортаючи (3.4.9) з ψ^i, отримаємо

$$\rho_{,\,j} = 2\psi^{\alpha}\lambda_{\alpha}\psi_j \tag{3.4.10}$$

і, отже,

Теорема 3.4.2. *Для того, щоб власне число ρ, що відповідає власному вектору ψ^{α} матриці a_{ij}, було сталим, необхідно і достатньо, щоб вектори ψ^h і λ_i були ортогональними.*

Розв'язок рівнянь (3.1.5), який задовольняє умовам

$$a_{ij} = ug_{ij} + vR_{ij}, \tag{3.4.11}$$

називають канонічним [183].

Доведемо теорему:

Теорема 3.4.3. *У псевдоріманововому просторі квазісталої кривини не існує розв'язків рівнянь (3.1.5), відмінних від канонічних.*

Доведення.

Умови (3.4.5) з урахуванням (3.4.1) і (3.4.8) наберуть вигляду:

$$\begin{gathered}\beta(\psi_j\psi_l a_{ik} - \psi_j\psi_k a_{il} + \psi_i\psi_l a_{jk} - \psi_i\psi_k a_{jl}) = \\ = \Lambda_{li}g_{jk} + \Lambda_{lj}g_{ik} - \Lambda_{kj}g_{il} - \Lambda_{ki}g_{jl}.\end{gathered} \tag{3.4.12}$$

Тут

$$\Lambda_{li} \stackrel{def}{=} \lambda_{li} + \alpha a_{li} + \rho\beta\psi_i\psi_l. \tag{3.4.13}$$

Згортаючи (3.4.13) з g^{jk}, отримаємо

$$a\psi_i\psi_l - a_{il} = n\Lambda_{li} - \Lambda g_{il}, \tag{3.4.14}$$

де

$$a \stackrel{def}{=} a_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}; \qquad \Lambda \stackrel{def}{=} \Lambda_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}.$$

Чи, виражаючи Λ_{li} —

$$\Lambda_{li} = \frac{\Lambda}{n}g_{li} + \frac{\beta a}{n}\psi_i\psi_l - \frac{\beta}{n}a_{il}. \tag{3.4.15}$$

Проальтернуємо (3.4.12) за індексами i і k

$$\begin{gathered}\beta(\psi_j\psi_l a_{ik} - \psi_j\psi_i a_{lk} - \psi_i\psi_k a_{jl} + \psi_l\psi_k a_{ji}) = \\ = \Lambda_{lj}g_{ik} - \Lambda_{ij}g_{lk} - \Lambda_{ki}g_{jl} + \Lambda_{kl}g_{ji}.\end{gathered} \tag{3.4.16}$$

У останньому взаємно перепозначимо індекси j і l:

$$\begin{gathered}\beta(\psi_l\psi_j a_{ik} - \psi_l\psi_i a_{jk} - \psi_i\psi_k a_{jl} + \psi_j\psi_k a_{li}) = \\ = \Lambda_{lj}g_{ik} - \Lambda_{il}g_{jk} - \Lambda_{ki}g_{jl} + \Lambda_{kj}g_{li}.\end{gathered} \tag{3.4.17}$$

Складаючи (3.4.17) і (3.4.12), матимемо:

$$\beta(\psi_j\psi_l a_{ik} - \psi_i\psi_k a_{jl}) = \Lambda_{lj}g_{ik} - \Lambda_{ik}g_{jl}. \tag{3.4.18}$$

З урахуванням (3.4.15), (3.4.18) можна записати у виді

$$\psi_j\psi_l(na_{ik} - ag_{ik}) - \psi_i\psi_k(na_{jl} - ag_{jl}) = a_{ik}g_{lj} - a_{lj}g_{ik}. \tag{3.4.19}$$

Згорнемо (3.4.19) з $\psi^j\psi^l$, враховуючи (3.4.8), отримаємо

$$(n-1)a_{ik} = (a-\rho)g_{ik} + (n\rho - a)\psi_i\psi_j. \tag{3.4.20}$$

З (3.4.20) і (3.4.2) переконаємося в справедливості теореми, причому

$$u = \frac{\alpha\beta - 2\beta\rho + a\alpha - n\alpha\rho}{\beta(n-2)}, \tag{3.4.21}$$

$$v = \frac{a - n\rho}{\beta(n-2)}. \tag{3.4.22}$$

Простори, що дозволяють тільки канонічні розв'язки рівнянь (3.1.5), мають степінь мобільності відносно геодезичних відображень не більше двох. Тому можна сформулювати

Наслідок 3.4.1. *Степінь мобільності відносно геодезичних відображень просторів квазісталої кривизни не більше двох.*

Домножуючи (3.4.1) на ψ^h і згортаючи по h, отримаємо

$$\psi_\alpha R^\alpha_{ijk} = (\alpha+\beta)(\psi_j g_{ik} - \psi_k g_{ij}). \tag{3.4.23}$$

Діючи аналогічно на (3.4.5) і враховуючи (3.4.23), матимемо

$$(\alpha+\beta)(\psi_j a_{ik} - \psi_\alpha a^\alpha_i g_{kj} + \psi_i a_{jk} - \psi_\alpha a^\alpha_j g_{ik}) =$$
$$= \psi^\alpha\lambda_{\alpha i}g_{jk} + \psi^\alpha\lambda_{\alpha j}g_{ik} - \lambda_{ki}\psi_j - \lambda_{kj}\psi_i. \tag{3.4.24}$$

Альтернуючи за індексами k і j, взаємно перепозначивши індекси i і k і додаючи отримане з (3.4.24), переконаємося в справедливості рівнянь —

$$\psi_j((\alpha+\beta)(a_{ik}-\rho g_{ik})+\lambda_{ik})=\psi^\alpha\lambda_{\alpha j}g_{ik}. \tag{3.4.25}$$

З останнього отримаємо

$$\lambda_{ik}=(\psi^\alpha\psi^\beta\lambda_{\alpha\beta}+\rho(\alpha+\beta))g_{ik}-(\alpha+\beta)a_{ik}. \tag{3.4.26}$$

Таким чином, доведено теорему

Теорема 3.4.4. *Якщо псевдоріманів простір V_n квазісталої кривини дозволяє нетривіальні геодезичні відображення, то V_n є простором $V_n(B)$, причому $B=-(\alpha+\beta)$.*

Враховуючи (3.4.26) і заміни (3.1.9), (3.1.10), можна записати

$$\bar{B}\bar{g}_{ij}-Bg_{ij}=\varphi_{ij}. \tag{3.4.27}$$

Остання формула дає можливість досліджувати метричні тензори псевдоріманових просторів $\bar{V}_n$, що знаходяться в геодезичній відповідності з простором квазісталої кривини.

Умови інтегрування основної системи теорії геодезичних відображень для просторів $V_n(B)$ мають вигляд

$$a_{\alpha i}Z^\alpha_{jkl}+a_{\alpha j}Z^\alpha_{ikl}=0, \tag{3.4.28}$$

$$\lambda_\alpha Z^\alpha_{ikl}=0. \tag{3.4.29}$$

Розглянемо псевдоріманові простори V_n, в яких виконується умова узагальненої Річчі рекурентності, або, що те саме, узагальненої гармонічності —

$$R^{\alpha}_{ijk,\alpha} = R_{ij,k} - R_{ik,j} = \rho_k g_{ij} - \rho_j g_{ik}, \tag{3.4.30}$$

де $\rho_i = \dfrac{1}{2(n-1)} R_{,i}$.

Має місце

Лема 3.4.1. *Псевдоріманові простори $V_n(B)$, $B-const$, які задовольняють* (3.4.30), *при $R \not\equiv const$, дозволяють тільки канонічні розв'язки рівнянь* (3.1.5).

Доведення.

Нехай V_n належить до класу просторів $V_n(B)$, то тоді в ньому мають місце умови (3.4.11) і (3.4.12). Коваріантно диференціюючи умови (3.4.11), з урахуванням того, що $B - const$ і (3.4.12), отримаємо:

$$a_{\alpha(i} R^{\alpha}_{j)kl,m} + \lambda_{(i} Z_{j)mlk} = 0, \tag{3.4.31}$$

тут $Z_{ij} \overset{def}{=} Z^{\alpha}_{ijk} g_{\alpha h}$.

Згортаючи останнє за індексами l та m і враховуючи тотожність Біанкі і (3.4.30), будемо мати:

$$\lambda_{(i} Z_{j)k} + \rho^{\alpha} a_{\alpha(i} g_{j)k} - \rho_{(i} a_{j)k} = 0, \tag{3.4.32}$$

де $\rho^i \stackrel{def}{=} \rho_\alpha g^{\alpha i}$.

Проальтернуємо (3.4.32) за індексами j та k

$$\lambda_{[j} Z_{k]i} + \rho^\alpha a_{\alpha[j} g_{k]i} + \rho_{[k} a_{j]i} = 0, \tag{3.4.33}$$

Поміняємо в отриманому місцями індекси i та k і, складаючи з (3.4.32), знаходимо

$$\lambda_j Z_{ik} + \rho^\alpha a_{\alpha j} g_{ik} - \rho_j a_{ik} = 0. \tag{3.4.34}$$

З (3.4.34), легко бачити, що V_n дозволяє канонічні розв'язки системи рівнянь (3.1.5).

Що і вимагалося довести.

Наведена лема дозволяє довести наступну теорему:

Теорема 3.4.5. *Степінь мобільності відносно геодезичних відображень псевдоріманових просторів V_n, що задовольняють умовам* (3.4.30) *при $\rho_i \not\equiv 0$, не перевищує числа два.*

Доведення.

Проведемо доведення методом від протилежного. Припустимо, що псевдоріманів простір, що задовольняє умовам (3.4.30) при $R_{,i} \not\equiv 0$ має степінь мобільності відносно геодезичних відображень більше двох.

Але тоді, на підставі теореми 3.1.1 воно є простором $V_n(B)$, $B - const$, і в силу леми 3.4.1 дозволяє канонічний розв'язок рівнянь (3.1.5). Степінь мобільності в цьому випадку є не більше двох.

Отримане протиріччя доказує справедливість теореми.

Якщо ж $R - const$, то рівняння (3.4.30) набувають вигляду:

$$R^{\alpha}_{ijk,\alpha} = R_{ij,k} - R_{ik,j} = 0. \tag{3.4.35}$$

Такі ріманові простори називають Річчі узагальнено симетричними або гармонічними, або належними до класу $\underset{2}{\Omega}$. Геодезичні відображення цих просторів вивчав В.С. Собчук [184]. Методом аналогічним використаному при доведенні леми 3.4.1 можна переконатися в справедливості теореми:

Теорема 3.4.6. *Не існує псевдоріманових просторів $V_n(B), B - const$, відмінних від просторів Ейнштейна, які задовольняють умовам* (3.4.35).

Крім того, має місце, в силу теорем 3.1.1 і 3.4.6, наслідок:

Наслідок 3.4.2. *Річчі узагальнено симетричні псевдоріманові простори, відмінні від просторів Ейнштейна, мають степінь мобільності відносно нетривіальних геодезичних відображень не більше двох.*

3.5 Інваріантні відносно геодезичних відображень об'єкти псевдоріманових просторів

Об'єкт, обчислений в псевдорімановому просторі V_n, називають інваріантним відносно геодезичних відображень, якщо він дорівнює аналогічному об'єкту, обчисленому в псевдорімановому просторі $\bar{V}_n$, причому V_n дозволяє геодезичне відображення на $\bar{V}_n$.

Інваріантними відносно геодезичних відображень є диференціальні параметри Томаса

$$\bar{T}^h_{ij} = T^h_{ij};$$
$$T^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} - \tfrac{1}{n-1}(\delta^h_i \Gamma^\alpha_{j\alpha} + \delta^h_j \Gamma^\alpha_{i\alpha}) \tag{3.5.1}$$

та тензор Вейля

$$\bar{W}^h_{ijk} = W^h_{ijk};$$
$$W^h_{ijk} = R^h_{ijk} - \tfrac{1}{n-1}(\delta^h_k R_{ij} - \delta^h_j R_{ik}). \tag{3.5.2}$$

При відображені псевдоріманових просторів $V_n(B)$ інваріантним буде тензор Z^h_{ijk} та $Z_{ij} = Z^\alpha_{ij\alpha}$, тобто

$$Z^h_{ijk} = \bar{Z}^h_{ijk}; \qquad Z_{ij} = \bar{Z}_{ij}. \tag{3.5.3}$$

Останні умови виконуються за необхідністю.

Розглянемо псевдоріманів простір V_n, який дозволяє геодезичні відображення, при яких зберігається тензор Z^h_{ijk}.

Тоді для тензора деформації тензора Рімана виконуються умови

$$\bar{R}^h_{ijk} - R^h_{ijk} = \bar{B}(\delta^h_k \bar{g}_{ij} - \delta^h_j \bar{g}_{ik}) - B(\delta^h_k g_{ij} - \delta^h_j g_{ik}). \tag{3.5.4}$$

Враховуючи (3.1.3), отримаємо

$$\varphi_{ij} = \bar{B}\bar{g}_{ij} - Bg_{ij}. \tag{3.5.5}$$

Коваріантно диференціюючи (3.1.10), з урахуванням останнього, будемо мати

$$\begin{aligned} \lambda_{i,j} &= -e^{2\varphi}\varphi_{\alpha,j}\,\bar{g}^{\alpha\beta}g_{\beta i} + e^{2\varphi}\varphi_\alpha\varphi_\beta\bar{g}^{\alpha\beta}g_{ji} + \\ &+ e^{2\varphi}\varphi_j\varphi_\alpha\bar{g}^{\alpha\beta}g_{\beta i} \end{aligned} \tag{3.5.6}$$

або, остаточно

$$\lambda_{i,j} = \mu g_{ij} + Ba_{ij}, \tag{3.5.7}$$

де

$$\mu = e^{2\varphi}(\varphi_\alpha\varphi_\beta\bar{g}^{\alpha\beta} - B). \tag{3.5.8}$$

Очевидно, що, використовуючи тіж міркування можна довести і зворотне.

Таким чином, має місце теорема

Теорема 3.5.1. *Для того, щоб при геодезичних відображеннях псевдоріманових просторів V_n зберігався тензор Z^h_{ijk}, необхідно і достатньо, щоб псевдоріманів простір V_n був простором $V_n(B)$.*

Ця теорема дозволяє сформулювати наслідок

Наслідок 3.5.1. *Якщо при геодезичних відображеннях псевдоріманового простору зберігається тензор Рімана, конциркулярної кривини, Річчі, Ейнштейна, енергії-імпульсу, Брінкмана, то такий простір є простором* $V_n(B)$*, причому виконуються умови* (3.5.8).

Також, неважко показати, що умови зберігання тензора Рімана та тензора Річчі еквівалентні. Теж має місце і для тензора конциркулярної кривини та тензора Ейнштейна.

Використовуючи рівняння (1.2.6) для геодезичних відображень, отримаємо

$$\begin{gathered} S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q ; k} - S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q , k} = \\ = \delta^{i_1}_k \varphi_\alpha S^{\alpha i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q} + \delta^{i_2}_k \varphi_\alpha S^{i_1 \alpha i_3 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q} + \ldots + \delta^{i_p}_k \varphi_\alpha S^{i_1 i_2 \ldots i_{p-1} \alpha}_{j_1 j_2 \ldots j_q} - \\ -\varphi_{j_1} S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{k j_2 \ldots j_q} - \varphi_{j_2} S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 k \ldots j_q} - \ldots - \varphi_{j_q} S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_{q-1} k} + \\ +(p-q) \varphi_k S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q , k}, \\ (i_1, \ldots, i_p; \quad j_1, \ldots j_q; \quad k = 1, 2, \ldots, n), \end{gathered} \tag{3.5.9}$$

тут “;“ та „,“ — знак коваріантної похідної в псевдорімановому просторі $\bar{V}_n$ та V_n відповідно.

Згортаючи (3.1.5), переконаємось, що

$$\bar{\Gamma}^\beta_{\beta i} - \Gamma^\beta_{\beta i} = (n+1)\varphi_i. \tag{3.5.10}$$

Причому згортки символів Христофеля задовольняють формулі Фосса-Вейля:

$$\Gamma^{\beta}_{\beta i} = \partial_k ln\sqrt{|g|}. \qquad (3.5.11)$$

Враховуючи (3.5.10), (3.5.9) запишемо в вигляді

$$\bar{S}^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q k} = S^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q k}, \qquad (3.5.12)$$

де

$$\begin{gathered}
S^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q k} = S^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q , k} - \\
-(\delta^{i_1}_k \Gamma^{\beta}_{\beta\alpha} S^{\alpha i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q} + \delta^{i_2}_k \Gamma^{\beta}_{\beta\alpha} S^{i_1 \alpha i_3 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q} + \dots + \delta^{i_p}_k \Gamma^{\beta}_{\beta\alpha} S^{i_1 i_2 \dots i_{p-1} \alpha}_{j_1 j_2 \dots j_q} - \\
-\Gamma^{\beta}_{\beta j_1} S^{i_1 i_2 \dots i_p}_{k j_2 \dots j_q} - \Gamma^{\beta}_{\beta j_2} S^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 k \dots j_q} - \dots - \Gamma^{\beta}_{\beta j_q} S^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_{q-1} k} + \\
+(p-q)\Gamma^{\beta}_{\beta k} S^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q , k}) \frac{1}{n+1}, \\
(i_1, \dots, i_p; \quad j_1, \dots j_q; \quad k = 1, 2, \dots, n).
\end{gathered} \qquad (3.5.13)$$

Таким чином, доведено теорему:

Теорема 3.5.2. *При геодезичних відображеннях псевдоріманових просторів інваріантним є тензор* $S^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q k}$, *що визначається формулою* (3.5.13).

Якщо тензор S — носить внутрішній характер, тобто визначається через об'єкти, побудовані із метрики, що інваріантні відносно геодезичних відображень, то ця теорема дозволяє будувати внутрішні інваріантні об'єкти.

Запишемо рівності, що випливають із (3.5.9) для основних внутрішніх об'єктів псевдоріманових просторів, що пов'язані геодезичними відображеннями.

Для тензора Вейля —

$$W^h_{ijl;k} - W^h_{ijl,k} = \delta^h_k \varphi_\alpha W^\alpha_{ijl} -$$

$$-\varphi_i W^h_{kjl} - \varphi_j W^h_{ikl} - \varphi_l W^h_{ijk} - 2\varphi_k W^h_{ijl}. \tag{3.5.14}$$

Диференціюючи (3.5.2), отримаємо з урахуванням попереднього —

$$\bar{W}^h_{ijl;k} = W^h_{ijl,k} + \delta^h_k \varphi_\alpha W^\alpha_{ijl} -$$

$$-2\varphi_k W^h_{ijl} - \varphi_i W^h_{kjl} - \varphi_j W^h_{ikl} - \varphi_l W^h_{ijk}. \tag{3.5.15}$$

Нехай значення коваріантних похідних тензора Вейля в геодезично відповідних просторах співпадають, тобто

$$\bar{W}^h_{ijl;k} = W^h_{ijl,k}. \tag{3.5.16}$$

Тоді з (3.5.15) переконаємось, що

$$\varphi_\alpha W^\alpha_{ijl} = \varphi_\alpha R^\alpha_{ijl} - \frac{1}{n-1}(\varphi_l R_{ij} - \varphi_j R_{il}) = 0, \tag{3.5.17}$$

а (3.5.15) прийме вигляд

$$2\varphi_k W^h_{ijl} + \varphi_i W^h_{kjl} + \varphi_j W^h_{ikl} + \varphi_l W^h_{ijk} = 0. \tag{3.5.18}$$

Рівняння (3.5.17) приведуть до

$$\varphi_i(\lambda_{kj} - \frac{1}{n-1}a^\alpha_j R_{\alpha k}) + \frac{1}{n-1}R_{kj}\varphi_\alpha a^\alpha_i = \varphi^\alpha \lambda_{\alpha i} g_{jk}. \tag{3.5.19}$$

Помножуючи на вектор ξ^i такий, що $\varphi_\alpha \xi^\alpha = 1$, отримаємо

$$\lambda_{kj} - \frac{1}{n-1}a^\alpha_j R_{\alpha k} = -\overset{2}{\tau} R_{jk} + \overset{1}{\tau} g_{jk}, \tag{3.5.20}$$

тут $\overset{2}{\tau} = \varphi_\alpha a^\alpha_\beta \xi^\beta \frac{1}{n-1}; \quad \overset{1}{\tau} = \varphi_\alpha \lambda^\alpha_\beta \xi^\beta.$

Підставимо, групуючи, будемо мати

$$R_{kj}(\frac{1}{n-1}\varphi_\alpha a^\alpha_i - \overset{2}{\tau}\varphi_i) = g_{jk}(\varphi^\alpha \lambda_{\alpha i} - \overset{1}{\tau}\varphi_i). \tag{3.5.21}$$

Згорнемо з g^{jk}

$$(\varphi^\alpha \lambda_{\alpha i} - \overset{1}{\tau}\varphi_i) = \frac{R}{n}(\frac{1}{n-1}\varphi_\alpha a^\alpha_i - \overset{2}{\tau}\varphi_i). \tag{3.5.22}$$

Враховуючи це —

$$(R_{kj} - \frac{R}{n}g_{kj})(\frac{1}{n-1}\varphi_\alpha a^\alpha_i - \overset{2}{\tau}\varphi_i) = 0. \tag{3.5.23}$$

Тобто, або псевдоріманів простір є простором Ейнштейна, або в ньому виконуються умови

$$
\begin{cases}
\varphi^{\alpha}\lambda_{\alpha i} & = & \overset{1}{\tau}\varphi_i \\
\varphi^{\alpha}a_{\alpha i} & = & (n-1)\,\overset{2}{\tau}\varphi_i
\end{cases} \tag{3.5.24}
$$

Нехай псевдоріманів простір V_n є простором Ейнштейна, тоді тензор Вейля дорівнює тензору конциркулярної кривини і задовольняє умові

$$
g_{\alpha h}W^{\alpha}_{ijk} + g_{\alpha i}W^{\alpha}_{hjk} = 0. \tag{3.5.25}
$$

Опустимо індекс h в рівнянні (3.5.18) :
проальтернуємо —

$$
\varphi_i g_{\alpha h}W^{\alpha}_{kjl} + \varphi_h g_{\alpha i}W^{\alpha}_{kjl} = 0. \tag{3.5.26}
$$

Із останнього отримаємо $W^h_{ijk} = 0$, тобто V_n — є простором сталої кривини.

В результаті, можемо сформулювати теорему [137, 138, 144]

Теорема 3.5.3. *Якщо при геодезичному відображені псевдоріманового простору V_n зберігається коваріантна похідна тензора Вейля, то це або простір сталої кривини, або в ньому виконуються умови* (3.5.24).

Розглянемо геодезичні відображення майже Ейнштейнових просторів, тобто псевдоріманових просторів $V_n (n > 2)$, в яких виконуються вимоги

$$
R_{ij} = \frac{R}{n}g_{ij} + U_iU_j, \tag{3.5.27}
$$

де U_i — за визначенням градієнтний вектор, тобто

$$
U_i = U_{,i} = \partial_i U. \tag{3.5.28}
$$

З визначення випливає, що вектор U_i — за необхідністю ізотропний вектор. Враховуючи (3.5.27), рівняння (3.4.7), приймуть вигляд

$$U_l U^\alpha a_{\alpha i} = U_i a_{\alpha l} U^\alpha. \tag{3.5.29}$$

Із останнього маємо

$$U^\alpha a_{\alpha i} = \rho U_i, \tag{3.5.30}$$

де $\rho \overset{def}{=} a_{\alpha\beta} U^\alpha \xi^\beta$, ξ^i — деякий вектор, такий, що $U_\alpha \xi^\alpha = 1$.

Таким чином, нами доведено

Теорема 3.5.4. *Якщо майже ейнштейнів V_n дозволяє нетривіальні геодезичні відображення, то вектор U_i є власним вектором матриці тензора a_{ij}.*

Доведемо наступну теорему

Теорема 3.5.5. *Якщо майже ейнштейнів V_n дозволяє нетривіальні геодезичні відображення, то вектори U_i та λ_i взаємо ортогональні, тобто*

$$U^\alpha \lambda_\alpha = 0. \tag{3.5.31}$$

Доведення.

Диференціюючи (3.5.30) з урахуванням (3.1.5), отримаємо

$$U^{\alpha}{}_{,j}a_{\alpha i}+U^{\alpha}\lambda_{\alpha}g_{ij}+\lambda_i U_j=\rho_{,j}U_i+\rho U_{i,\,j}. \tag{3.5.32}$$

Через ізотропність вектора U_i, домножуючи (3.5.32) на нього і згортаючи, будемо мати

$$2U^{\alpha}\lambda_{\alpha}U_i=0, \tag{3.5.33}$$

оскільки U_i не нульовий вектор, то теорему доведено.

Перейдемо до розгляду питання про нетривіальні геодезичні відображення майже ейнштейнових просторів сталої скалярної кривини.

Доведемо наступну теорему

Теорема 3.5.6. *Якщо майже ейнштейнів простір сталої скалярної кривини дозволяє нетривіальні геодезичні відображення, то вектор λ_i задовольняє умовам*

$$\lambda_{\alpha j,}{}^{\alpha}=\tau\lambda_j, \tag{3.5.34}$$

тут $\lambda_{i\alpha,}{}^{\alpha}=\lambda_{i,\alpha}{}^{\alpha}=\lambda_{i,\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$, а τ — деякий інваріант.

Доведення.

Диференціюючи (3.4.5), з урахуванням (3.1.5), отримаємо

$$\lambda_\alpha R^\alpha_{jkl} g_{im} + \lambda_i R_{mjkl} + \lambda_\alpha R^\alpha_{ikl} g_{jm} +$$

$$+\lambda_j R_{mikl} + a_{\alpha i} R^\alpha_{jkl,m} + a_{\alpha j} R^\alpha_{ikl,m} = \tag{3.5.35}$$

$$= \lambda_{li,m} g_{jk} + \lambda_{lj,m} g_{ik} - \lambda_{ki,m} g_{jl} - \lambda_{kj,m} g_{il}.$$

Згортаючи останнє по l та m, будемо мати

$$\lambda_\alpha R^\alpha_{jki} + \lambda_\alpha R^\alpha_{ikj} + \lambda_i R_{jk} + \lambda_j R_{ik} +$$

$$+a^\alpha_i R^\beta_{kj\alpha,\beta} + a^\alpha_j R^\beta_{ki\alpha,\beta} = \tag{3.5.36}$$

$$= \lambda_{\alpha i,}{}^\alpha g_{jk} + \lambda_{\alpha j,}{}^\alpha g_{ik} - \lambda_{ki,j} - \lambda_{kj,i}.$$

Враховуючи, що $R^\alpha_{ijk,\alpha} = R_{ij,k} - R_{ik,j}$ та (3.5.27), отримаємо

$$
\begin{gathered}
\lambda_\alpha R^\alpha_{jki} + \lambda_\alpha R^\alpha_{ikj} + \lambda_i R_{jk} + \lambda_j R_{ik} + \\
+U_j(\rho_k U_i + \rho U_{i,k} - \lambda_i U_k) - \rho U_i U_{k,j} + \\
+U_i(\rho_k U_j + \rho U_{j,k} - \lambda_j U_k) - \rho U_j U_{k,i} = \\
= \lambda_{\alpha i,}{}^{\alpha} g_{jk} + \lambda_{\alpha j,}{}^{\alpha} g_{ik} - \lambda_{ki,j} - \lambda_{kj,i}.
\end{gathered} \tag{3.5.37}
$$

Або, що теж саме,

$$
\begin{gathered}
\lambda_\alpha R^\alpha_{jki} + \lambda_\alpha R^\alpha_{ikj} + \lambda_i R_{jk} + \lambda_j R_{ik} + \\
+U_j(\rho_k U_i - \lambda_i U_k) + U_i(\rho_k U_j - \lambda_j U_k) = \\
= \lambda_{\alpha i,}{}^{\alpha} g_{jk} + \lambda_{\alpha j,}{}^{\alpha} g_{ik} - \lambda_{ki,j} - \lambda_{kj,i}.
\end{gathered} \tag{3.5.38}
$$

Альтернуючи останнє по j, k, будемо мать

$$
\begin{gathered}
4\lambda_\alpha R^\alpha_{ikj} + \\
+2U_j U_i \rho_k - 2U_i U_k \rho_j + \tfrac{R}{n}(\lambda_j g_{ik} - \lambda_k g_{ji}) = \\
= \lambda_{\alpha j,}{}^{\alpha} g_{ik} - \lambda_{\alpha k,}{}^{\alpha} g_{ij}.
\end{gathered} \tag{3.5.39}
$$

Домножимо (3.5.39) на λ^i та згорнемо по i, отримаємо

$$\lambda_{\alpha j,}{}^{\alpha}\lambda_k - \lambda_{\alpha k,}{}^{\alpha}\lambda_j = 0. \tag{3.5.40}$$

З цього випливає (3.5.34), де τ — деякий інваріант, такий що $\tau = \lambda_{\beta\alpha,}{}^{\alpha}\eta^{\beta}$; а η^i — вектор, який задовольняє умові $\lambda_\alpha\eta^\alpha = 1$.

Таким чином, теорему доведено.

Враховуючи (3.5.34), рівняння (3.5.39) прийме вид

$$\begin{gathered} 4\lambda_\alpha R^\alpha_{ikj} + 2U_jU_i\rho_k - 2U_iU_k\rho_j + \\ +(\frac{R}{n} - \tau)(\lambda_j g_{ik} - \lambda_k g_{ij}) = 0. \end{gathered} \tag{3.5.41}$$

Домножуючи (3.4.5) на λ^l, та згортаючи по l з урахуванням (3.5.41), отримаємо

$$\begin{gathered} 2a^\alpha_i\rho_\alpha U_kU_j - 2\rho\rho_jU_kU_i + (\frac{R}{n} - \tau)(\lambda_j a_{ik} - \lambda_\alpha a^\alpha_i g_{jk}) + \\ +2a^\alpha_j\rho_\alpha U_kU_i - 2\rho\rho_iU_kU_j + (\frac{R}{n} - \tau)(\lambda_i a_{jk} - \lambda_\alpha a^\alpha_j g_{ik}) = \\ = 4\lambda^\alpha\lambda_{\alpha i}g_{jk} + 4\lambda^\alpha\lambda_{\alpha j}g_{ik} - 4\lambda_{ki}\lambda_j - 4\lambda_{kj}\lambda_i. \end{gathered} \tag{3.5.42}$$

Проальтернуємо останнє по j та k, в отриманому виразі поміняємо місцями індекси $i \longleftrightarrow k$ та складемо результат з (3.5.42). Будемо мати

$$
\begin{gathered}
2(a_i^\alpha \rho_\alpha - \rho\rho_i)U_k U_j + \lambda_i((\frac{R}{n} - \tau)a_{jk} + 4\lambda_{kj}) = \\
= (4\lambda^\alpha \lambda_{\alpha i} + (\frac{R}{n} - \tau)\lambda_\alpha a_i^\alpha)g_{jk}.
\end{gathered}
\tag{3.5.43}
$$

Згортаємо з g^{jk}, тоді

$$
4\lambda^\alpha \lambda_{\alpha i} + (\frac{R}{n} - \tau)\lambda_\alpha a_i^\alpha = 4\mu\lambda_i,
\tag{3.5.44}
$$

де

$$
4\mu = \frac{1}{n}((\frac{R}{n} - \tau)a_{\alpha\beta} + 4\lambda_{\alpha\beta})g^{\alpha\beta}.
\tag{3.5.45}
$$

Враховуючи це, (3.5.43) запишемо в вигляді

$$
\begin{gathered}
2(a_i^\alpha \rho_\alpha - \rho\rho_i)U_k U_j + \\
+\lambda_i((\frac{R}{n} - \tau)a_{jk} + 4\lambda_{kj} - 4\mu\, g_{kj}) = 0.
\end{gathered}
\tag{3.5.46}
$$

Згортаючи останнє з η^i, отримаємо

$$
(\frac{R}{n} - \tau)a_{jk} + 4\lambda_{kj} - 4\mu\, g_{kj} - 4\,\overset{1}{c}\,U_k U_j = 0.
\tag{3.5.47}
$$

Тут

$$2(a^{\alpha}{}_{\beta}\rho_{\alpha} - \rho\rho_{\beta})\eta^{\beta} \stackrel{def}{=} -4\overset{1}{c}. \tag{3.5.48}$$

Неважко переконатись, що

$$\tau = \frac{R(n+3)}{n(n-1)}. \tag{3.5.49}$$

І тоді (3.5.47) прийме остаточний вигляд

$$\lambda_{kj} = \mu g_{kj} + \frac{R}{n(n-1)} a_{kj} + \overset{1}{c} U_k U_j. \tag{3.5.50}$$

Диференціюючи (3.5.50), будемо мати

$$\begin{gathered}\lambda_{i,jk} = \mu_{,k} g_{ij} + \frac{R}{n(n-1)}(\lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik}) + \\ + \overset{1}{c}_{,k} U_i U_j + \overset{1}{c} U_{i,k} U_j + \overset{1}{c} U_i U_{j,k}.\end{gathered} \tag{3.5.51}$$

Згортаючи по $i,\ j$ —

$$g^{\alpha\beta}\lambda_{\alpha,\beta k} = n\mu_{,k} + \frac{2R}{n(n-1)}\lambda_k. \tag{3.5.52}$$

Використовуючи тотожність Річчі для майже ейнштейнових просторів

$$g^{\alpha\beta}(\lambda_{\alpha,\beta k} - \lambda_{\alpha,k\beta}) = \frac{R}{n}\lambda_k, \tag{3.5.53}$$

тоді отримаємо

$$\mu_{,i} = \frac{2R}{n(n-1)}\lambda_i \tag{3.5.54}$$

Таким чином, має місце теорема

Теорема 3.5.7. *Якщо майже ейнштейнів простір V_n сталої скалярної кривини дозволяє нетривіальні геодезичні відображення, то в ньому виконуються умови* (3.5.50), (3.5.54).

Нами знайдено вид системи основних рівнянь для геодезичних відображень майже ейнштейнових просторів.

3.6 Про геодезичні відображення ріманових просторів $V_n(B)$ „в цілому“

У цьому параграфі ми вивчимо питання про існування „в цілому„ ріманових просторів $V_n(B), B - const$, зі знаковизначеною метрикою. При розгляданні „в цілому„ вважаємо, що простір зв'язний [5, 34].

Зауважимо, що не існує компактних просторів $V_n(B)$, $B = 0$. Це витікає для просторів зі знаковизначеною метрикою з результатів [104] і для просторів зі знаконевизначеною метрикою з [82, 162, 188].

Тому ми обмежимося дослідженням простору $V_n(B), B = const \neq 0$. Нагадаємо, що на підставі теореми 3.2.3, вектор λ_i, що бере участь в рівняннях (3.1.28), є неізотропним.

Має місце теорема:

Теорема 3.6.1. *Не існує компактних орієнтованих просторів $V_n(B)$, B – $const$, для яких*

$$B\lambda_\alpha\lambda^\alpha \geq 0. \tag{3.6.1}$$

Доведення.

Припустимо протилежне. Нехай існують $V_n(B)$, які задовольняють умовам теореми.

Через сказане вище, можемо вважати, що $B \neq 0$. І тоді на підставі теореми 3.2.3 витікає: $\lambda_\alpha\lambda^\alpha \neq 0$.

Згорнемо лінійну форму основних рівнянь теорії геодезичних відображень з g^{ij}. Отримаємо

$$(a_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta})_{,i} = 2\lambda_{,i}.$$

Тому

$$a_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} = 2\lambda + c, \tag{3.6.2}$$

де c - стала.

Потім згорнемо (3.2.11) з g^{ij}, враховуючи (3.6.2), маємо

$$\lambda^\alpha_{,\alpha} = n\mu + B(2\lambda + c), \tag{3.6.3}$$

тут $\lambda^i \overset{def}{=} g^{i\alpha}\lambda_{,\alpha}$.

Введемо в розгляд вектор

$$\varphi_i \stackrel{def}{=} (n\mu + B(2\lambda + c))\lambda_i, \tag{3.6.4}$$

дивергенція цього вектору дорівнює:

$$\varphi^{\alpha}_{,\alpha} = (n\mu + B(2\lambda + c))\lambda^{\alpha}_{,\alpha} + (n\mu_{,\alpha}\lambda^{\alpha} + 2B\lambda^{\alpha}\lambda_{\alpha}).$$

Враховуючи, що $\mu_{,\alpha}\lambda^{\alpha} = 2B\lambda^{\alpha}\lambda_{\alpha}$ і (3.6.3), матимемо

$$\varphi^{\alpha}_{,\alpha} = (n\mu + B(2\lambda + c))^2 + 2(n+1)B\lambda^{\alpha}\lambda_{\alpha}. \tag{3.6.5}$$

Оскільки в орієнтованих компактних просторах [55]

$$\int_{V_n} \varphi^{\alpha}_{,\alpha} dv = 0. \tag{3.6.6}$$

Враховуючи невід'ємність виразу (3.6.5) при виконанні умов теореми, рівність (3.6.6) виконується тільки для $B\lambda^{\alpha}\lambda_{\alpha} = 0$ в кожній точці, а це суперечить припущенню, що $B \neq 0$ і $\lambda^{\alpha}\lambda_{\alpha} \neq 0$. Теорему доведено.

З теореми 3.6.1, очевидно, витікає наслідок

Наслідок 3.6.1. *Не існує компактних орієнтованих ріманових просторів $V_n(B), B = const \geq 0$.*

З цієї теореми також випливає наступна лема:

Лема 3.6.1. *Для просторів $V_n(B), B - const$, умова (3.6.1) еквівалентна*

$$\lambda^\alpha \lambda^\beta R_{\alpha\beta} \geq 0. \tag{3.6.7}$$

Доведення.

Умова інтегрованості рівнянь (3.2.11) має вигляд:

$$\lambda_\alpha R^\alpha_{ijk} = B(\lambda_k g_{ij} - \lambda_j g_{ik}).$$

Згортаючи його з $\lambda^k g^{ij}$, отримаємо:

$$(n-1)B\lambda_\alpha \lambda^\alpha = \lambda^\alpha \lambda^\beta R_{\alpha\beta}.$$

З останнього витікає справедливість леми, дійсно, $\lambda^\alpha \lambda^\beta R_{\alpha\beta} \geq 0$ еквівалентно $B\lambda^\alpha \lambda_\alpha \geq 0$. Оскільки для $B = 0$ наслідок справедливий, то розглянемо $B \neq 0$, але тоді $\lambda^\alpha \lambda_\alpha \neq 0$ і, таким чином, $B\lambda^\alpha \lambda_\alpha > 0$. Що й треба було довести.

На підставі леми 3.6.1 з теореми 3.6.1 безпосереднім чином випливає справедливість наступної теореми :

Теорема 3.6.2. *Не існує компактних орієнтованих просторів $V_n(B), B - const$, форма тензора Річчі яких невід'ємна.*

Доведене узагальнює результати [68, 69], про геодезичні відображення „в цілому„ просторів Ейнштейна і просторів сталої кривини. Очевидно, що отримані результати можна розповсюдити і на ряд інших псевдоріманових просторів, в яких має місце теорема Гріна, див. наприклад, [68, 71, 72, 182].

Розглянемо компактні ріманови простори $V_n(B), B - const$, без вимоги орієнтованості. Доведемо наступну теорему:

Теорема 3.6.3. *Компактні ріманові простори $V_n(B), B - const$, не дозволяють нетривіальні геодезичні відображення на простори $\bar{V}_n$, метрика $\bar{g}_{ij}$ яких має відмінну сигнатуру від сигнатури метрики g_{ij}, за умови, що метричні тензори в усіх відповідних точках V_n і $\bar{V}_n$ одночасно зводятъся до діагонального виду.*

Доведення.

Як було сказано в розділі **3.1**, простір $V_n(B)$ і $\bar{V}_n$ знаходиться в геодезичній відповідності тоді і тільки тоді, коли має місце рівняння (3.1.2) і вектор φ_i задовольняє умові

$$\varphi_{,ij} = \psi_i\psi_j + \bar{B}\bar{g}_{ij} - Bg_{ij}. \tag{3.6.8}$$

Неважко переконатись, що якщо B є сталою, то тоді і $\bar{B}$ — стала.

Для визначеності вважатимемо $B > 0$. Припустимо, що $g_{ij}(x)$ і $\bar{g}_{ij}(x)$ в точці приводяться одночасно до діагонального виду

$$g_{ij} = diag(g_{11},\, g_{22},\, \ldots,\, g_{nn}) \quad \text{і} \quad \bar{g}_{ij} = diag(\bar{g}_{11},\, \bar{g}_{22},\, \ldots,\, \bar{g}_{nn}).$$

Вимога неспівпадання сигнатур метрик цих просторів рівносильна тому, що, наприклад, $\bar{g}_{11},\, \bar{g}_{22} > 0$ і $g_{11} > 0,\ g_{22} < 0$.

Побудуємо позитивно визначену форму $A^{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta$ таку, що

$$A^{ij}(\bar{B}\bar{g}_{ij} - Bg_{ij}) > 0. \tag{3.6.9}$$

Коефіцієнти цієї форми шукатимемо в наступному виді

$$A^{ij} = diag(A^{11},\, A^{22},\, \ldots,\, A^{nn}), \quad A^{ii} > 0.$$

Тоді нерівність (3.6.9) запишеться так

$$A^{11}(\bar{B}\bar{g}_{11} - Bg_{11}) \,+\, \ldots \,+ A^{nn}(\bar{B}\bar{g}_{nn} - Bg_{nn}) > 0. \tag{3.6.10}$$

Очевидно, що залежно від знаку сталої $\bar{B}$

$$\bar{B}\bar{g}_{11} - Bg_{11} > 0 \quad \text{або} \quad \bar{B}\bar{g}_{22} - Bg_{22} > 0. \tag{3.6.11}$$

З (3.6.10) і (3.6.11) легко бачити, що можна побудувати матрицю A^{ij}, що задовольняє умовам (3.6.9).

Тоді, згортаючи (3.6.8) з A^{ij}, враховуючи (3.6.9), маємо

$$A^{ij}\varphi_{,ij} - A^{ij}\varphi_{,i}\varphi_{,j} = (\bar{B}\bar{g}_{ij} - Bg_{ij})A^{ij} > 0. \tag{3.6.12}$$

Через компактність V_n існує точка $x_0 \in V_n$, в якій функція $\varphi(x)$ досягає мінімуму. У цій точці, очевидно

$$A^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha\beta} \leq 0 \quad \text{та} \quad \varphi_{,i} = 0. \tag{3.6.13}$$

Таким чином, отримано вираз, що заперечує нерівність (3.6.12).

Аналогічним чином розглядається випадок, коли $\bar{g}_{11} \cdot \bar{g}_{22} < 0$ і $g_{11} \cdot g_{22} > 0$. Теорему доведено.

Відомо, що дві квадратичні форми, одна з яких знаковизначена, можна одночасно привести до діагонального виду. Тому безпосередньо з теореми 3.6.3 випливає

Теорема 3.6.4. *Компактні власне ріманові простори $V_n(B), B - const$, не дозволяють нетривіальні геодезичні відображення на псевдоріманові V_n „в цілому„.*

Зауважимо, що теореми 3.6.3 і 3.6.4 можуть бути сформульовані для просторів Ейнштейна і просторів сталої кривини, тому що вони при геодезичному відображенні є просторами $V_n(B), B = const$.

Помітимо, що з (3.1.4) випливає

$$\varphi_{,ij} = \varphi_i \varphi_j + \frac{1}{n-1}\bar{R}_{ij} - \frac{1}{n-1}R_{ij}. \tag{3.6.14}$$

Формули (3.6.8) і (3.6.14) аналогічні. Тому, подібним чином, як для теореми 3.6.3, можна переконатися в справедливості наступної теореми :

Теорема 3.6.5. *Компактні ріманові простори V_n не дозволяють нетривіальні геодезичні відображення на ріманові простори $\bar{V}_n$, форма Річчі $\bar{R}_{ij}$ яких має відмінну сигнатуру від сигнатури форми Річчі R_{ij}, за умови, що форми Річчі в усіх відповідних точках V_n і $\bar{V}_n$ одночасно приводяться до діагонального виду і їх ранг не нижче двох.*

Нагадаємо, що С. Танно довів [91], якщо в повному зв'язному рімановому просторі V_n існує градієнтне векторне поле f_i, що задовольняє умові

$$f_{,ijk} = A(2f_{,k}g_{ij} + f_{,i}g_{jk} + f_{,j}g_{ik}), \tag{3.6.15}$$

де $f_{,i} = \partial_i f,\ A$ — деяка від'ємна стала, то тоді V_n є простором сталої кривини.

Враховуючи це, теорему 3.2.5 та лему 3.6.1, сформулюємо наступні теореми [42]:

Теорема 3.6.6. *Не існує повних зв'язних ріманових просторів* $V_n(B)$, $B = const < 0$, *відмінних від просторів сталої кривини.*

Теорема 3.6.7. *Не існує повних зв'язних з позитивно визначеною формою Річчі ріманових просторів* $V_n(B), B - const$, *відмінних від просторів сталої кривини.*

Відмітимо, що приклад псевдоріманового простору $V_n(B), B = const$, „в цілому„ побудовано Й. Мікешем [76].

Висновки з розділу 3

В третьому розділі розглянуті геодезичні відображення спеціальних псевдоріманових просторів. Особливу увагу приділено вивченню спеціальних геодезичних відображень, при яких тензор $\varphi_{ij} \overset{def}{=} \varphi_{i,j} - \varphi_i\varphi_j$, утворений вектором, що задає дане відображення, є лінійною комбінацією метричних тензорів геодезично відповідних псевдоріманових просторів, тобто

$$\bar{B}\bar{g}_{ij} - Bg_{ij} = \varphi_{ij}.$$

Знайдено особливість такого типу відображень, а саме, якщо таке відображення дозволяє заданий простір V_n, то він не дозволяє ніяких інших відображень.

А простори, що належать до його геодезичного класу також дозволяють лише геодезичні відображення з умовою, вказаною вище.

Доведено, що до таких просторів належать всі псевдоріманові простори, степінь мобільності яких більше двох. Вивчено деякі їх геометричні властивості.

Такі простори називають псевдорімановими просторами $V_n(B)$. До них належать всі простори Ейнштейна, що дозволяють нетривіальні геодезичні відображення.

Спираючись на це, доведено, що чотирьохвимірні простори Ейнштейна, відмінні від просторів сталої кривини, не дозволяють нетривіальних геодезичних відображень. Якщо розмірність простору Ейнштейна більше чотирьох, то існують такі простори, відмінні від просторів сталої кривини, що дозволяють нетривіальні геодезичні відображення. Наведено приклад таких просторів, на якому показано, що сигнатура простору не впливає на його властивість дозволяти чи не дозволяти геодезичні відображення. Також, для прикладу, досліджено геодезичні відображення просторів Казнера.

Потім вивчені геодезичні відображення псевдоріманових просторів з алгебраїчними умовами на тензор Рімана. Доведено, що простори квазісталої кривини, які дозволяють нетривіальні геодезичні відображення, хоч і належать до просторів $V_n(B)$, але мають степінь мобільності два.

В п'ятому параграфі цього розділу вивчені простори, в яких при геодезичних відображеннях зберігаються відповідні об'єкти. Наведено умови, яким задовольняють псевдоріманові простори, в яких при геодезичних відображеннях зберігаються внутрішні тензори, їх коваріантні похідні та інші властивості.

Для отримання результатів в цілому при переході від локальних теорем, застосовують три основних методи: „техніку Бохнера“, метод Швеця та теорему Обати. Кожен із цих методів, модифікований для теорії геодезичних відображень, застосовано до просторів $V_n(B)$. У всіх випадках доведені „теореми зникнення“, тобто показано, що такі простори не дозволяють нетривіальних геодезичних відображень „в цілому“.

Розділ 4

Фундаментальні відображення спеціальних псевдоріманових просторів

4.1 Конформні відображення псевдоріманових просторів

Нехай V_n $(n > 2)$ псевдоріманів простір з метричним тензором $g_{ij}(x)$ і $\bar{V}_n$ також псевдоріманів простір з метричним тензором $\bar{g}_{ij}(x)$. Конформним відображенням називають взаємно-однозначну відповідність між точками просторів V_n і $\bar{V}_n$ таку, що

$$\bar{g}_{ij}(x) = e^{2\sigma(x)} g_{ij}(x), \tag{4.1.1}$$

тут σ - деяка функція.

Якщо σ - стала, то відображення називають гомотетією. Надалі, якщо це не обумовлено особливо, ми обмежимося розглядом відображень відмінних від гомотетичних.

З (4.1.1) отримаємо

$$\bar{g}^{ij} = e^{-2\sigma} g^{ij}.$$

Мають місце формули [100, 109, 170]:

$$\bar{\Gamma}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} + \delta^h_i \sigma_j + \delta^h_j \sigma_i - \sigma^h g_{ij}; \tag{4.1.2}$$

Для тензора Рімана

$$\begin{aligned} \bar{R}^h_{ijk} = \;& R^h_{ijk} + \delta^h_k \sigma_{ij} - \delta^h_j \sigma_{ik} + g^{h\alpha}(\sigma_{\alpha h} g_{ij} - \\ - \;& \sigma_{\alpha j} g_{ik}) + \Delta_1 \sigma (\delta^h_k g_{ij} - \delta^h_j g_{ik}); \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

Для тензора Річчі

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + (n-2)\sigma_{ij} + (\Delta_2 \sigma + (n-2)\Delta_1 \sigma) g_{ij}; \tag{4.1.4}$$

Для скалярної кривини

$$\bar{R} = e^{-2\sigma}(R + 2(n-1)\Delta_2 \sigma + (n-1)(n-2)\Delta_1 \sigma). \tag{4.1.5}$$

Тут і надалі $\quad \sigma_i \equiv \dfrac{\partial \sigma}{\partial x^i} \equiv \sigma_{,i}, \qquad \sigma^h = \sigma_\alpha g^{\alpha h},$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{,ij} - \sigma_{,i} \sigma_{,\,j}, \tag{4.1.6}$$

$\Delta_1 \sigma$ і $\Delta_2 \sigma$ - перший і другий символи Бельтрамі, що визначаються

$$\Delta_1 \sigma = g^{\alpha\beta} \sigma_{,\alpha} \sigma_{,\beta}; \qquad \Delta_2 \sigma = g^{\alpha\beta} \sigma_{,\alpha\beta},$$

кома "," — знак коваріантної похідної по зв'язності V_n.

Об'єкти конформно відповідного V_n простору $\bar{V}_n$ позначатимемо рисою.

Простір V_n називають конформно-звідним, якщо його метрика в деякій голономній системі координат має вигляд

$$ds^2 = \sigma^2 \sum_{k=1}^{r} ds_k^2, \tag{4.1.7}$$

де ds_k^2 визначається як квадратична форма простору $V_{m_k}(m_1+m_2+\ldots+m_r = n)$, $r > 1$, а $\sigma = \sigma(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ — деякий інваріант. Для пошуку тензорної ознаки конформно-звідних просторів, розглянемо два випадки.

Перший випадок, коли $r = 2$, тобто

$$ds^2 = \sigma^2(ds_1^2 + ds_2^2), \tag{4.1.8}$$

тут квадратичні форми

$$\begin{gathered} ds_1^2 = g_{i_1 j_1}(x^1, x^2, \ldots, x^p) dx^{i_1} dx^{j_1} \ \ (i_1, j_1 = 1, 2, \ldots, p), \\ ds_2^2 = g_{i_2 j_2}(x^{p+1}, x^{p+2}, \ldots, x^n) dx^{i_2} dx^{j_2} \ \ (i_2, j_2 = p+1, p+2, \ldots, n). \end{gathered} \tag{4.1.9}$$

Цей випадок називають основним типом.

Для того, щоб псевдоріманів простір був конформно-звідним основного типу необхідно і достатньо, щоб в ньому існував симетричний (непропорційний метричному) тензор c_{ij}, що разом з деяким інваріантом σ задовольняє умовам [170]

$$c_{i\alpha}c_j^{\alpha} = c_{ij}; \tag{4.1.10}$$

$$c_{ij,k} = -(\sigma_i c_{jk} + \sigma_j c_{ik}) + \sigma_\alpha (c_i^\alpha g_{jk} + c_j^\alpha g_{ik}), \tag{4.1.11}$$

де $\sigma_i = \partial_i \sigma;\;\; c_j^i = g^{\alpha i} c_{\alpha j}$.

Умови інтегрування рівнянь (4.1.11) з урахуванням тотожності Річчі мають вигляд

$$\begin{gathered} c_{i\alpha}R^{\alpha}_{jkl} + c_{j\alpha}R^{\alpha}_{ikl} = \sigma_{jk}c_{li} - \sigma_{jl}c_{ki} + \sigma_{ik}c_{lj} - \sigma_{il}c_{kj} + \\ +\sigma_{\alpha l}(g_{ik}c_j^\alpha + g_{jk}c_i^\alpha) - \sigma_{\alpha k}(g_{il}c_j^\alpha + g_{jl}c_i^\alpha) + \\ +\Delta_1\sigma(g_{jl}c_{ik} - g_{jk}c_{il} + g_{il}c_{jk} - g_{ik}c_{jl}). \end{gathered} \tag{4.1.12}$$

Псевдоріманів простір V_n називається конформно-звідним спеціального типу, коли його метрика записується у вигляді

$$ds^2 = \sigma^2(e_1 {dx^1}^2 + g_{ij}dx^i dx^j), \tag{4.1.13}$$

де $e_1 = \pm 1,\;\; g_{ij} = g_{ij}(x^2, x^3, \dots, x^n),\;\; i, j = 2, 3, \dots, n.$

Для того, щоб V_n був конформно-звідним спеціального типу необхідно і достатньо, щоб в ньому існувало неізотропне векторне поле c_i, яке разом з інваріантом σ задовольняє умові [170]

$$c_{i,\,j} = -(c_i\sigma_j + c_j\sigma_i) + c^\alpha \sigma_\alpha g_{ij}, \tag{4.1.14}$$

тут $\sigma_i = \partial_i ln\sigma;\;\; c^i = g^{\alpha i} c_\alpha$.

Умови інтегрування останнього рівняння мають вигляд

$$\begin{gathered} c_\alpha R^\alpha_{ijk} = c_k\sigma_{ij} - c_j\sigma_{ik} + c^\alpha(g_{ij}\sigma_{\alpha k} - g_{ik}\sigma_{\alpha j}) + \\ + \Delta_1\sigma(c_j g_{ik} - c_k g_{ij}). \end{gathered} \tag{4.1.15}$$

Якщо псевдоріманів простір V_n дозволяє конформні відображення на плаский простір, то його називають конформно-пласким [170].

Такий простір характеризується умовами

$$R_{hijk} = P_{hk}g_{ij} - P_{hj}g_{ik} + P_{ij}g_{hk} - P_{ik}g_{hj}; \tag{4.1.16}$$

$$P_{ij,k} - P_{ik,j} = 0, \tag{4.1.17}$$

тут

$$P_{ij} = \frac{1}{n-2}\left(R_{ij} - \frac{1}{2(n-1)}Rg_{ij}\right). \tag{4.1.18}$$

Умови (4.1.16) та (4.1.17) – це необхідні та достатні умови того, щоб псевдоріманів простір V_n був конформно-пласким [170].

Зауважимо, що умові (4.1.16) задовольняють всі трьохвимірні псевдоріманові простори.

Конформно-пласкі простори належать до класу конформно-звідних псевдоріманових просторів.

Розглянемо тензорну ознаку конформної звідності для конформно-пласких просторів. Для цього підставимо (4.1.16) в (4.1.12). Отримаємо

$$\begin{gathered}\underset{1}{\Omega}_{il}g_{jk} - \underset{1}{\Omega}_{ik}g_{jl} + \underset{1}{\Omega}_{jl}g_{ik} - \underset{1}{\Omega}_{jk}g_{il} + \\ + \underset{2}{\Omega}_{il}c_{jk} - \underset{2}{\Omega}_{ik}c_{jl} + \underset{2}{\Omega}_{jl}c_{ik} - \underset{2}{\Omega}_{jk}c_{il} = 0,\end{gathered} \tag{4.1.19}$$

тут

$$\underset{1}{\Omega}_{ij} = c_{\alpha i}P^{\alpha}_{j} - \sigma_{\alpha i}c^{\alpha}_{j} + \Delta_1\sigma c_{ij} \tag{4.1.20}$$

$$\underset{2}{\Omega}_{ij} = P_{ij} + \sigma_{ij}. \tag{4.1.21}$$

Альтернуючи (4.1.18) за індексами $[j\ l]$,

$$
\begin{gathered}
\underset{1}{\Omega}_{il} g_{jk} - \underset{1}{\Omega}_{jk} g_{il} + \underset{2}{\Omega}_{il} c_{jk} - \underset{2}{\Omega}_{jk} c_{il} - \\
- \underset{1}{\Omega}_{ij} g_{lk} + \underset{1}{\Omega}_{lk} g_{ij} - \underset{2}{\Omega}_{ij} c_{lk} + \underset{2}{\Omega}_{lk} c_{ij} = 0.
\end{gathered} \tag{4.1.22}
$$

Перепозначимо в останньому індекси i та l,

$$
\begin{gathered}
\underset{1}{\Omega}_{li} g_{jk} - \underset{1}{\Omega}_{jk} g_{li} + \underset{2}{\Omega}_{li} c_{jk} - \underset{2}{\Omega}_{jk} c_{li} - \\
- \underset{1}{\Omega}_{lj} g_{ik} + \underset{1}{\Omega}_{ik} g_{lj} - \underset{2}{\Omega}_{lj} c_{ik} + \underset{2}{\Omega}_{ik} c_{lj} = 0.
\end{gathered} \tag{4.1.23}
$$

Додамо отримане до (4.1.19), будемо мати

$$
\underset{1}{\Omega}_{il} g_{jk} - \underset{1}{\Omega}_{jk} g_{il} + \underset{2}{\Omega}_{il} c_{jk} - \underset{2}{\Omega}_{jk} c_{il} = 0. \tag{4.1.24}
$$

Згортаючи останнє, отримаємо

$$
\underset{1}{\Omega}_{il} = \frac{\underset{1}{\Omega}}{n} g_{il} + \frac{\underset{2}{\Omega}}{n} c_{il} - \frac{c}{n} \underset{2}{\Omega}_{il} = 0, \tag{4.1.25}
$$

тут

$$
\begin{gathered}
\underset{1}{\Omega} = \underset{1}{\Omega}_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}; \qquad \underset{2}{\Omega} = \underset{2}{\Omega}_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}; \\
c = c_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}.
\end{gathered}
\tag{4.1.26}
$$

Тоді (4.1.24) прийме вигляд

$$
\begin{gathered}
c_{il}\left(\frac{\underset{2}{\Omega}}{n} g_{jk} - \underset{2}{\Omega}_{jk}\right) - c_{jk}\left(\frac{\underset{2}{\Omega}}{n} g_{il} - \underset{2}{\Omega}_{il}\right) - \\
-\frac{c}{n}\underset{2}{\Omega}_{il} g_{jk} + \frac{c}{n}\underset{2}{\Omega}_{jk} g_{il} = 0.
\end{gathered}
\tag{4.1.27}
$$

Перетворимо останній вираз

$$
\begin{gathered}
c_{il}\left(\frac{\underset{2}{\Omega}}{n} g_{jk} - \underset{2}{\Omega}_{jk}\right) - c_{jk}\left(\frac{\underset{2}{\Omega}}{n} g_{il} - \underset{2}{\Omega}_{il}\right) - \\
-\frac{c}{n}\underset{2}{\Omega}_{il} g_{jk} + \frac{c\,\underset{2}{\Omega}}{n\cdot n} g_{il} g_{jk} - \frac{c\,\underset{2}{\Omega}}{n\cdot n} g_{il} g_{jk} + \\
+\frac{c}{n}\underset{2}{\Omega}_{jk} g_{il} - \frac{c\,\underset{2}{\Omega}}{n\cdot n} g_{il} g_{jk} + \frac{c\,\underset{2}{\Omega}}{n\cdot n} g_{il} g_{jk} = 0.
\end{gathered}
\tag{4.1.28}
$$

Групуючи відповідним чином, отримаємо

$$\left(c_{il} - \frac{c}{n}g_{il}\right)\left(\frac{\underset{2}{\Omega}}{n}g_{jk} - \underset{2}{\Omega}_{jk}\right) -$$

$$- \left(c_{jk} - \frac{c}{n}g_{jk}\right)\left(\frac{\underset{2}{\Omega}}{n}g_{il} - \underset{2}{\Omega}_{il}\right) = 0. \tag{4.1.29}$$

Оскільки $c_{il} \neq \dfrac{c}{n}g_{il}$, то можна підібрати тензор ξ^{ij} так, що

$$\left(c_{\alpha\beta} - \frac{c}{n}g_{\alpha\beta}\right)\xi^{\alpha\beta} = 1. \tag{4.1.30}$$

Домножуючи (4.1.29) на ξ^{il}, та згортаючи за індексами i та l, переконаємось, що

$$\underset{2}{\Omega}_{ij} = \frac{\underset{2}{\Omega}}{n}g_{ij}. \tag{4.1.31}$$

Врахуємо (4.1.21)

$$P_{ij} + \sigma_{,ij} - \sigma_{,i}\sigma_{,j} = \frac{\underset{2}{\Omega}}{n}g_{ij}. \tag{4.1.32}$$

Таким чином, [151]

Теорема 4.1.1. *Конформно-пласкі конформно-звідні основного типу псевдоріманові простори характеризуються умовами*

$$R_{hijk} = \sigma_{hk}g_{ij} - \sigma_{hj}g_{ik} + \sigma_{ij}g_{hk} -$$
$$-\sigma_{ik}g_{hj} + \frac{2}{n}\underset{2}{\Omega}(g_{hk}g_{ij} - g_{hj}g_{ik}). \tag{4.1.33}$$

Цікавим класом конформно-пласких конформно-звідних псевдоріманових просторів є субпроективні простори. В деяких джерелах їх називають просторами Кагана. Субпроективні простори Кагана характеризуються умовами

$$R_{ijkl} = Q(v)(g_{ik}v_{,j}v_{,l} + g_{jl}v_{,i}v_{,k} - g_{il}v_{,j}v_{,k} - g_{jk}v_{,i}v_{,l}) -$$
$$-2S(v)(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}); \tag{4.1.34}$$

$$P_{jk} = S(v)g_{jk} + Q(v)v_{,j}v_{,k}. \tag{4.1.35}$$

Метрика субпроективного простору V_n може бути зведена в деякій системі координат до одного з трьох видів

1.
$$ds^2 = e^{-2\sigma(x^1)}(e_1dx^{1^2} + e_2dx^{2^2} + \ldots + e_ndx^{n^2}). \tag{4.1.36}$$

2.
$$ds^2 = e^{-2\sigma(x)}(e_1dx^{1^2} + e_2dx^{2^2} + \ldots + e_ndx^{n^2}),$$
$$x = \sqrt{e_1x^{1^2} + e_2x^{2^2} + \ldots + e_nx^{n^2}}. \tag{4.1.37}$$

3.
$$ds^2 = e^{-2\sigma(x^1)}(2dx^1dx^2 + e_3dx^{3^2} + \ldots + e_ndx^{n^2}). \qquad (4.1.38)$$

Із будови метрики видно, що субпроективні простори належать до конформно-звідних псевдоріманових просторів, причому множник конформності залежить від неізотропної в першому випадку, а в третьому — від ізотропної координати x^1 плаского простору, метрика якого наведена в дужках. В другому випадку, цей множник залежить лише від віддалі від початку координат.

4.2 Про конформні відображення на простори Ейнштейна

Питання про те, чи дозволяє $V_n \quad (n > 2)$ конформне відображення [19] на деякий простір Ейнштейна було зведено Г. Брінкманом [6] до проблеми існування розв'язків деякої нелінійної системи диференціальних рівнянь типу Коші відносно $(n + 1)$ невідомої функції. Ця задача детально викладена в монографії О.З.Петрова [170]. В роботах [118, 164] основна система зведена до лінійної системи, за допомогою якої вдалось оцінити степінь параметричної довільності r в розв‘язку вказаної задачі, в нашій термінології, степінь мобільності псевдоріманового простору відносно конформних відображень на простори Ейнштейна.

Далі оцінюємо першу лакуну в розподілі степені мобільності псевдоріманових просторів відносно конформних відображень на простори Ейнштейна. Як відомо [164], максимальне значення $r = n + 2$ дозволяють конформно-пласкі псевдоріманові простори і тільки вони. Одержана тензорна ознака просторів відмінних від конформно-пласких, для яких $r = n-1$, що є максимально можливим значенням. Таким чином, одержана оцінка першої лакуни в розподілі степенів мобільності псевдоріманових просторів відносно конформних відображень на простори Ейнштейна і виділені максимально мобільні відносно вказаних степенів простори, відмінні від конформно-пласких.

При конформних відображеннях інваріантним об'єктом є тензор конформної кривини

$$\bar{C}^h_{ijk} = C^h_{ijk}. \tag{4.2.1}$$

Оскільки вивчаємо відображення на простори Ейнштейна, то

$$C^h_{ijk} = \bar{Y}^h_{ijk}.$$

У роботі [164] доведено, що псевдоріманів простір V_n дозволяє конформне відображення на простір Ейнштейна V_n тоді і тільки тоді, коли в V_n існує розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь в коваріантних похідних типу Коші відносно інваріантів $u(x)$, $s(x)(>0)$ і вектору $s_i(x)$:

$$\text{(а) } s_{,i} = s_i; \quad \text{(б) } s_{i,j} = s\, L_{ij} + u\; g_{ij}; \quad \text{(в) } u_{,i} = s_\alpha L^\alpha_i; \tag{4.2.2}$$

де $L_{ij} = \dfrac{1}{n-2}(R_{ij} - \dfrac{R}{2(n-1)} g_{ij}), \quad L^\alpha_i = g^{\alpha\beta} L_{i\beta}.$

При цьому $s = \mathrm{e}^{-\sigma}$, тоді (4.1.1) набирає вигляду:

$$\bar{g}_{ij} = s^{-2} g_{ij}.$$

Рівняння (4.2.2) мають для початкових значень $s(x_0) = \overset{\circ}{s}$, $u(x_0) = \overset{\circ}{u}$, $s_i(x_0) = \overset{\circ}{s}_i$ не більше одного розв'язку. Таким чином, загальний розв'язок рівнянь (4.2.2) залежить від $r \leq n+2$ істотних параметрів. Число r назвемо *степеню мобільності псевдоріманового простору відносно конформних відображень на простори Ейнштейна.*

Максимум $r = n+2$, як відзначалося вище, дозволяють конформно-пласкі простори. Для неконформно-пласких просторів V_n розв'язок рівнянь (4.2.2) залежить не більше ніж від $(n-1)$ параметра.

Попередньо доведемо наступну теорему:

Теорема 4.2.1. *Якщо загальний розв'язок* (4.2.2) *у* V_n *залежить від* $r = n-1$ *істотних параметрів, то тензор конформної кривини має вигляд:*

$$C_{hijk} = \varepsilon(a_h b_i - a_i b_h)(a_j b_k - a_k b_j), \tag{4.2.3}$$

де $\varepsilon = \pm 1$ *і* a_i, b_i *– деякі неколінеарні вектори.*

Доведення.

Умови інтегрованості рівнянь (4.2.2)(б) і їх диференціальні продовження мають відповідно вигляд:

$$s_\alpha C^\alpha_{ijk} = s\, P_{ijk}; \tag{4.2.4}$$

$$s_\alpha C^\alpha_{ijk,l} - s_l P_{ijk} + s\,(L_\alpha C^\alpha_{ijk} - P_{ijk,l}) + uC_{ijkl} = 0, \tag{4.2.5}$$

тут $P_{ijk} = L_{ij,k} - L_{ik,j}$. З (4.2.5) для неконформно-пласких просторів витікає, що інваріант u виражається наступним чином:

$$u = \nu^\alpha s_\alpha + \omega s,$$

де ω – деякий інваріант, а ν^i – деякий вектор, які у свою чергу виражаються, може бути і неоднозначно, через об'єкти простору V_n.

Тензор конформної кривини C^h_{ijk} – можна представити у вигляді:

$$C^h_{ijk} = \sum_{\tau=1}^{m} \underset{\tau}{b}^h \underset{\tau}{\Omega}_{ijk}.$$

Тут $\underset{\tau}{b}^h$ — лінійно незалежні вектори, а $\underset{\tau}{\Omega}_{ijk}$ — лінійно незалежні тензори. Оскільки V_n неконформно-плаский простір, то $m \geq 2$. Враховуючи це, умови (4.2.4) наберуть вигляду:

$$\sum_{\tau=1}^{m} s_\alpha \underset{\tau}{b}^\alpha \underset{\tau}{\Omega}_{ijk} = s\, P_{ijk}. \tag{4.2.6}$$

З (4.2.6), зважаючи на лінійну незалежність тензорів $\underset{\tau}{\Omega}_{ijk}$, витікає, що

$$s_\alpha \underset{\tau}{b}^\alpha = s \underset{\tau}{P}, \quad \tau = 1, \ldots, m,$$

де $\underset{\tau}{P}$ – деякі інваріанти, породжені об'єктами V_n. Очевидно, що, якщо серед компонент вектору s_i більше ніж дві залежні, то $r \leq n - 2$, а отже $m \leq 2$. Але випадок, коли $m = 1$ призводить до конформно-пласких просторів, що неможливо, оскільки для них $r = n + 2$. При $m = 2$, після додаткового аналізу з урахуванням алгебраїчних властивостей тензора конформної кривини переконуємося в справедливості формули (4.2.3). Що і було потрібне довести.

З виду тензора конформної кривини (4.2.3), й подальшого згортання останнього зі g^{ij} витікає, що

$$a_\alpha a_\beta g^{\alpha\beta} = 0; \quad a_\alpha b_\beta g^{\alpha\beta} = 0; \quad b_\alpha b_\beta g^{\alpha\beta} = 0; \tag{4.2.7}$$

тобто вектори a_i і b_i є ізотропними і взаємно ортогональними. Оскільки, в ріманових просторах V_n не існує ізотропних векторних полів, то справедлива теорема:

Теорема 4.2.2. *Для неконформно-пласких ріманових просторів* V_n $(n \geq 4)$ *розв'язок рівнянь* (4.2.2) *залежить не більше ніж від* $(n-2)$ *істотних параметрів.*

Детальнішим аналізом рівнянь (4.2.2) і їх умов інтегрованості доведемо наступну теорему, що дає нам ознаку, необхідні і достатні умови максимально мобільних просторів:

Теорема 4.2.3. *Псевдоріамановий простір* V_n *дозволяє конформне відображення на простір Ейнштейна з довільністю* $r = n-1$, *тоді і тільки тоді, коли виконуються умови* (4.2.3), *причому:*

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= -c_i a_j + a_i \overset{1}{\xi}_j + b_i \overset{2}{\xi}_j; && (4.2.8) \\ b_{i,j} &= -c_i b_j + a_i \overset{3}{\xi}_j + b_i \overset{4}{\xi}_j; && (4.2.9) \\ c_{i,j} &= -c_i c_j + a_i \overset{5}{\xi}_j + b_i \overset{6}{\xi}_j + L_{ij} + \frac{1}{2}\, c^\alpha c_\alpha g_{ij}; && (4.2.10) \end{aligned}$$

де $c_i, \overset{\tau}{\xi}_i$, $\tau = 1, \ldots, 6$ *– деякі вектори, а тензор* P_{ijk} *має вид:*

$$P_{ijk} = \varepsilon(Ab_i - Ba_i)(a_j b_k - a_k b_j). \qquad (4.2.11)$$

Доведення.

На підставі теореми 4.2.1 тензор конформної кривини досліджуваного простору V_n має вид (4.2.3). Тоді умови (4.2.4) матимуть вигляд:

$$\varepsilon(a^\alpha s_\alpha b_i - b^\alpha s_\alpha a_i)(a_j b_k - b_j a_k) = s\, P_{ijk}.$$

Через лінійну незалежність a_i і b_i з останнього виразу витікає, що

$$a^\alpha s_\alpha = A\,s; \quad b^\alpha s_\alpha = B\,s, \tag{4.2.12}$$

тут A і B – деякі інваріанти. Диференціюючи (4.2.12), отримаємо співвідношення, які при використанні основних рівнянь (4.2.2), зведуться до виду:

$$s^\alpha(a_{\alpha},_j - A\,g_{\alpha j}) = s\,(A_{,j} - a_\alpha L^\alpha_j) - u\,a_j, \tag{4.2.13}$$

де $L^\alpha_j = g^{\alpha\beta} L_{\beta j}$.

З урахуванням (4.2.5) матимемо:

$$s^\alpha(a_{\alpha},_j - A\,g_{\alpha j} + c_\alpha a_j) = s\,(A,_j - a_\alpha L^\alpha_j - \omega a_j). \tag{4.2.14}$$

Аналізуючи (4.2.14), як і при доведенні теореми 4.2.1, переконаємося, що, з необхідністю:

$$a_{i,j} - A\,g_{ij} + c_i a_j = a_i \overset{1}{\xi}_j + b_i \overset{2}{\xi}_j; \tag{4.2.15}$$

тут і далі $\overset{\tau}{\xi}_i$, як і раніше, деякі вектори. Враховуючи (4.2.12), (4.2.13), (4.2.15), з урахуванням довільності інваріанту s, отримаємо

$$A_{,j} - a_\alpha L^\alpha_j - \omega\,a_j = A\,\overset{1}{\xi}_j + B\,\overset{2}{\xi}_j. \tag{4.2.16}$$

Аналогічно, після диференціювання (4.2.12), матимемо

$$b_{i,j} - B g_{ij} + c_i b_j = a_i \overset{3}{\xi}_j + b_i \overset{4}{\xi}_j; \quad B_{,j} - b_\alpha L^\alpha_j - \omega b_j = A\,\overset{3}{\xi}_j + B\,\overset{4}{\xi}_j. \tag{4.2.17}$$

Диференціюванням умов (4.2.7) переконаємося, що

$$a^\alpha{}_{,j}\,a_\alpha = 0; \quad b^\alpha{}_{,j}\,b_\alpha = 0; \quad a^\alpha{}_{,j}\,b_\alpha + b^\alpha{}_{,j}\,a_\alpha = 0.$$

Після підстановки в останнє (4.2.15), (4.2.16) отримаємо, що

$$A = c_\alpha a^\alpha; \quad B = c_\alpha b^\alpha. \tag{4.2.18}$$

Диференціюючи (4.2.5) та враховуючи (4.2.2), отримаємо

$$s^{\alpha}(c_{\alpha,j} + \omega\, g_{\alpha j} - L_{\alpha j} + c_{\alpha}c_j) + s(\omega_{,j} + c^{\alpha}L_{\alpha j} + \omega c_j) = 0. \tag{4.2.19}$$

З урахуванням незалежності компонент вектору s^i, матимемо

$$c_{i,j} + \omega g_{ij} - L_{ij} + c_i c_j = a_i \overset{5}{\xi}_j + b_i \overset{6}{\xi}_j; \quad \omega_{,j} + c^{\alpha}L_{\alpha j} + \omega\, c_j = -A \overset{5}{\xi}_j - B \overset{6}{\xi}_j.$$

Диференціюючи формули (4.2.18), після приведення з урахуванням (4.2.15)-(4.2.18), переконаємося, що

$$(\omega - \frac{1}{2}\, c^{\alpha}c_{\alpha})\, a_j = A\, c_j; \quad (\omega - \frac{1}{2}\, c^{\alpha}c_{\alpha})\, b_j = B\, c_j. \tag{4.2.20}$$

Оскільки вектори a_i і b_i лінійно незалежні, то з необхідністю:

$$\omega = \frac{1}{2}\, c^{\alpha}c_{\alpha}.$$

Але тоді, або $A = B = 0$, або $c_i = 0$. Останнє з урахуванням (4.2.18) також призводить до вимоги $A = B = 0$.

Враховуючи, окрім цього, (4.2.20), переконаємося, що формули (4.2.15), (4.2.17), (4.2.19) набирають вигляду (4.2.8), (4.2.9), (4.2.10).

Тим самим необхідність доведено.

Доведемо достатність. Нехай в псевдорімановому просторі V_n виконуються умови на тензор конформної кривини (4.2.3), (4.2.8), (4.2.9), (4.2.10), (4.2.11).

Покажемо, що цей простір V_n дозволяє конформні відображення на простір Ейнштейна з кількістю істотних параметрів $r = n - 1$.

Розглянувши основні рівняння (4.2.2), за алгебраїчними умовами (4.2.5), матимемо

$$u = c_{\alpha}s^{\alpha} + \frac{1}{2}\, c_{\alpha}c^{\alpha}s; \quad a_{\alpha}s^{\alpha} = 0; \quad b_{\alpha}s^{\alpha} = 0. \tag{4.2.21}$$

Умова інтегрованості рівнянь (4.2.2) виконуються тотожно, з урахуванням диференціального подовження (4.2.5).

Передусім, переконаємося, що з умов (4.2.8), (4.2.9), (4.2.10) в силу (4.2.7) витікає, що

$$c_\alpha a^\alpha = 0; \quad c_\alpha b^\alpha = 0.$$

Диференціюючи ці співвідношення, отримаємо:

$$c_{\alpha,j} a^\alpha + c_\alpha a^\alpha_{,j} = 0; \quad c_{\alpha,j} b^\alpha + c_\alpha b^\alpha_{,j} = 0$$

Після підстановки (4.2.8), (4.2.9), (4.2.10) переконаємося, що

$$a^\alpha L_{\alpha j} = \frac{1}{2}\, c_\alpha c^\alpha a_j; \quad b^\alpha L_{\alpha j} = \frac{1}{2}\, c_\alpha c^\alpha b_j.$$

Тепер видно, що диференціальні подовження (4.2.20) виконуються тотожно. Але тоді система рівнянь (4.2.2) при (4.2.21) має розв'язок при будь-яких початкових значеннях $s(x_0) = \overset{\circ}{s}$, $s_i(x_0) = \overset{\circ}{s}_i$, $u(x_0) = \overset{\circ}{u}$, які задовольняють умовам (4.2.21). Легко бачити, що число незалежних умов $r = n - 1$.

Теорему доведено.

Нами одержана тензорна ознака, необхідні і достатні умови, максимально мобільних відносно конформних відображень на простори Ейнштейна псевдоріманових просторів, тобто псевдоріманових просторів, що дозволяють точно $n - 1$ істотний параметр у загальному розв'язку основної системи (4.2.2).

Таким чином, була оцінена лакуна в розподілі степенів мобільності та знайдена тензорна ознака просторів другої лакунарності. "В цілому", для повних просторів, задача розв‘язана в роботі [40]. Аналіз основних рівнянь дозволив довести наступні твердження [133, 150]:

Теорема 4.2.4. *Якщо степінь мобільності псевдоріманового простору V_n відносно конформних відображень на простори Ейнштейна більше одиниці, то простір Ейнштейна дозволяє конциркулярне векторне поле.*

Теорема 4.2.5. *Степінь мобільності псевдоріманового простору V_n відносно конформних відображень на простори Ейнштейна на одиницю більша від кількості лінійно незалежних конциркулярних векторних полів, що їх дозволяє простір Ейнштейна.*

Теорема 4.2.6. *Серед просторів другої лакунарності відносно конформних відображень на простори Ейнштейна не може бути просторів Ейнштейна.*

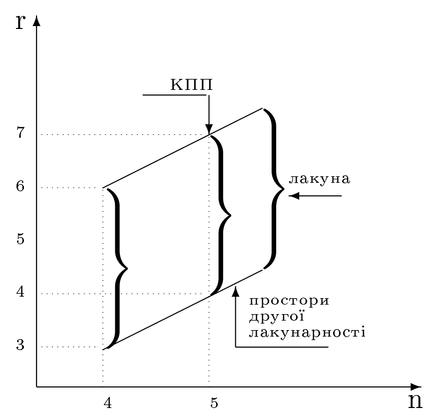

Рис. 4.1. Розподіл степенів мобільності при конформних відображеннях на простори Ейнштейна

Це, в свою чергу, зробило можливим побудувати повну картину розподілу вказаних степенів та класифікувати псевдоріманові простори, що дозволяють конформні відображення на простори Ейнштейна.

4.3 Про конформні відображення зі збереженням спеціальних тензорів

Розглянемо тензор виду

$$Z_{ij} = R_{ij} - B(n-1)g_{ij}. \tag{4.3.1}$$

Для $\bar{V}_n$ має місце такий же тензор

$$\bar{Z}_{ij} = \bar{R}_{ij} - \bar{B}(n-1)\bar{g}_{ij}. \tag{4.3.2}$$

Віднімаючи з (4.3.2) рівняння (4.3.1), отримаємо

$$(\bar{R}_{ij} - R_{ij}) - (n-1)(\bar{B}\bar{g}_{ij} - Bg_{ij}) = \bar{Z}_{ij} - Z_{ij}$$

Враховуючи (4.1.1), (4.1.2) і (4.1.4), матимемо

$$\sigma_{ij} - \rho g_{ij} = \frac{1}{n-2}(\bar{Z}_{ij} - Z_{ij}), \tag{4.3.3}$$

де

$$\rho = \frac{1}{n-2}\left((n-1)(\bar{B}e^{2\sigma} - B) - (\Delta_2\sigma + (n-2)\Delta_1\sigma)\right).$$

Таким чином, має місце теорема

Теорема 4.3.1. *Якщо V_n і $\bar{V}_n$ два конформно відповідні псевдоріманові простори, то їх тензори Z_{ij} та $\bar{Z}_{ij}$ задовольняють співвідношенням (4.3.3).*

Конформні відображення псевдоріманового простору V_n на $\bar{V}_n$, за яких

$$Z_{ij} = \bar{Z}_{ij}, \tag{4.3.4}$$

називають конформними відображеннями із збереженням тензора Z_{ij}.

З урахуванням (4.3.4) рівняння (4.3.3) наберуть вигляду

$$\sigma_{ij} = \rho g_{ij} \tag{4.3.5}$$

або

$$\sigma_{ij} = \frac{\Delta_2\sigma - \Delta_1\sigma}{n} g_{ij}. \tag{4.3.6}$$

Серед конформних відображень виділяють спеціальний тип відображень, які зберігають геодезичні кола [96, 108, 111].

Означення 4.3.1. *Крива в псевдорімановому просторі V_n називається геодезичним колом, якщо для неї перша кривина є сталою, а друга тотожно дорівнює нулю.*

Означення 4.3.2. *Конформні відображення псевдоріманового простору V_n, при яких зберігаються геодезичні кола, тобто кожне геодезичне коло простору V_n переходить у геодезичне коло конформного до нього $\bar{V}_n$, називають конциркурярними відображеннями.*

Необхідною і достатньою умовою того, що конформне відображення буде конциркулярним, є виконання у ньому для функції σ рівнянь (4.1.2), (4.1.6), умов (4.3.5), (4.3.6).

Враховуючи це, сформулюємо таку теорему

Теорема 4.3.2. *Якщо при конформному відображенні псевдоріманових просторів V_n зберігається тензор Z_{ij}, то при ньому зберігаються і геодезичні кола.*

З іншого боку, вивчаючи (4.3.5) і (4.3.6), можна переконатися, що, якщо V_n дозволяє конциркулярні відображення і виконується умова

$$\frac{2\Delta_2 + (n-2)\Delta_1}{n} = \bar{B}e^{2\sigma} - B, \tag{4.3.7}$$

то при цьому відображенні зберігається і тензор Z_{ij}.

Введемо в розгляд інваріант S такий, що

$$\sigma = -ln|S|. \tag{4.3.8}$$

Тоді (4.1.1) наберуть вигляду

$$\bar{g}_{ij}(x) = S^{-2}g_{ij}.$$

Послідовно диференціюючи (4.3.8), отримаємо

$$\begin{aligned} \sigma_{,\,i} &= -\frac{1}{S}S_{,\,i} \\ \sigma_{,\,ij} &= -(S \cdot S_{,\,ij} - S_{,\,i}S_{,\,j}) \cdot S^{-2} \\ \sigma_{ij} &= -S_{,\,ij} \cdot S^{-1} \end{aligned}$$

Крім того

$$\Delta_1\sigma = \Delta_1 S \cdot S^{-2}; \qquad \Delta_2\sigma = (\Delta_1 S - S\Delta_2 S) \cdot S^{-2}.$$

Враховуючи це, рівняння (4.3.6) наберуть вигляду

$$S_{,\,ij} = \frac{\Delta_2 S}{n} g_{ij}, \tag{4.3.9}$$

а (4.3.7) —

$$S\Delta_2 S = \frac{n}{2}\Delta_1 S. \tag{4.3.10}$$

Вектор $S_{,i}$, що задовольняє умовам (4.3.9), називають конциркулярним, а простори, дозволяючи такі поля – еквідистантними [178].

Таким чином, нами доведено теорему [45, 141, 142, 146, 148]:

Теорема 4.3.3. *Якщо псевдоріманів простір V_n дозволяє конформні відображення зі збереженням тензора Z_{ij}, то V_n є еквідистантним простором.*

При $\Delta_2 S \neq 0$ еквідистантний простір вважатимемо таким, що належить основному типу, а при $\Delta_2 S \equiv 0$ — особливому. Якщо вектор $S_{,i}$ ізотропний, тобто $\Delta_1 S = 0$, той еквідистантний простір належить з необхідності до особливого типу. Еквідистантні простори основного типу характеризуються тим, що в них існує спеціальна система координат, в якій метричний тензор еквідистантного простору може бути представлений у виді

$$ds_n^2 = dx^{12} + f(x_1)ds_{n-1}^2(x_2, ..., x_n). \tag{4.3.11}$$

Тут $f(x^1) \neq 0$ - деяка функція, а ds_{n-1}^2 - метрика $(n-1)$ – мірного псевдоріманового простору.

Враховуючи теорему 4.3.3, можна сформулювати

Теорема 4.3.4. *Якщо псевдоріманів простір $V_n (n > 2)$ дозволяє конформні відображення зі збереженням тензора Z_{ij} і $\Delta_2 S \neq 0$, то в деякій системі координат його метричний тензор має вид (4.3.11).*

В подальшому об'єктом дослідження є рівняння

$$E_{ij} = u_i u_j, \tag{4.3.12}$$

де $E_{ij} \stackrel{def}{=} R_{ji} - \dfrac{R}{n} g_{ij}$ — тензор Ейнштейна.

Означення 4.3.3. *Псевдоріманів простір V_n, відмінний від простору сталої кривини, називають майже ейнштейновим і позначають через M_n, якщо в ньому виконуються умови* (4.3.12).

Зауважимо, що, згортаючи (4.3.12) і враховуючи безслідність тензора Ейнштейна, можна легко переконатись, що вектор u_i за необхідністю є ізотропним, тобто

$$u_\alpha u^\alpha = 0.$$

Далі розглянемо конциркулярні відображення майже ейнштейнових просторів. Враховуючи теорему 4.3.2 і означення 4.3.3, отримуємо

Наслідок 4.3.1. *Майже ейнштейнові простори M_n є замкнутими відносно конциркулярних відображень, тобто, якщо майже ейнштейнів простір M_n дозволяє конциркулярне відображення на псевдоріманів простір $\bar{V}_n$, то $\bar{V}_n$ - також майже ейнштейнів простір.*

Умови інтегрованості рівнянь (4.3.6) з урахуванням тотожності Річчі мають вигляд

$$\sigma_\alpha R^\alpha_{ijk} = \rho_k g_{ij} - \rho_j g_{ik}, \tag{4.3.13}$$

де
$$\rho_k = \frac{1}{n}(\Delta_2\sigma - \Delta_1\sigma)_{,k} - (\Delta_2\sigma - \Delta_1\sigma)\sigma_k. \tag{4.3.14}$$

Домножуючи (4.3.13) на σ^i і згортаючи за i, з огляду на те, що $\sigma^\alpha\sigma^\beta R_{\alpha\beta jk} = 0$, отримаємо

$$\rho_k\sigma_j - \rho_j\sigma_k = 0.$$

Звідси будемо мати
$$\rho_k = B\sigma_k. \tag{4.3.15}$$

Тут B — деякий інваріант. Тоді (4.3.13) набуде такого вигляду:

$$\sigma_\alpha R^\alpha_{ijk} = B(\sigma_k g_{ij} - \sigma_j g_{ik}).$$

Згортаючи з g^{ij} , запишемо

$$\sigma_\alpha R^\alpha_k = B(n-1)\sigma_k. \tag{4.3.16}$$

Враховуючи в (4.3.16) те, що простір майже ейнштейнів, отримуємо

$$\frac{R}{n}\sigma_k + \sigma^\alpha u_\alpha u_k = B(n-1)\sigma_k. \tag{4.3.17}$$

Домножимо (4.3.17) на u^k і виконаємо згортку за індексом k :

$$\sigma^\alpha u_\alpha \left(\frac{R}{n} - B(n-1)\right) = 0. \tag{4.3.18}$$

Із (4.3.17) та (4.3.18), оскільки і $u_i \neq 0$, і $\sigma_i \neq 0$, випливає, що обидва співмножники в (4.3.18) дорівнюють нульові, тобто

$$\sigma^\alpha u_\alpha = 0$$

та

$$B = \frac{R}{n(n-1)}. \tag{4.3.19}$$

Отже, доведено такі твердження.

Теорема 4.3.5. *Якщо майже ейнштейнів простір M_n дозволяє концциркулярні відображення, то вектори u_i та σ_i взаємно ортогональні.*

Теорема 4.3.6. *Для майже ейнштейнових просторів M_n умови інтегрованості рівнянь* (4.3.6) *мають вигляд*

$$\sigma_\alpha Y^\alpha_{ijk} = 0.$$

З метою вивчення геометричних властивостей майже ейнштейнових просторів, що дозволяють концциркулярні відображення, доведемо таку теорему.

Теорема 4.3.7. *Якщо при концциркулярних відображеннях майже ейнштейнових просторів M_n вектор σ_i має сталу довжину, то простір M_n є простором сталої скалярної кривини.*

Доведення

Нехай вектор σ_i має сталу довжину, тобто

$$\sigma^\alpha\sigma_\alpha = c,$$

де c — деяка стала.

Тоді

$$\sigma^\alpha\sigma_{\alpha,j} = 0,$$

або з урахуванням (4.1.5) та (4.3.6)

$$c + \frac{1}{n}(\Delta_2\sigma - \Delta_1\sigma) = 0,$$

звідки

$$(\Delta_2\sigma - \Delta_1\sigma)_{,i} = 0.$$

І тоді умова (4.3.14) набуває вигляду

$$\rho_k = nc\sigma_k. \tag{4.3.20}$$

Враховуючи (4.3.15), (4.3.19) та (4.3.20), отримаємо

$$\frac{R}{n(n-1)} = nc,$$

тобто

$$R_{,i} = 0,$$

що й потрібно було довести.

4.4 Інваріантні перетворення зі збереженням геодезичних

Свого часу перед дослідниками, що працювали в теорії геодезичних відображень, стало питання про кількість просторів, що дозволяють нетривіальні геодезичні відображення. Відповідь на це питання своїми дослідженнями дав М.С. Сінюков, побудувавши нескінченну послідовність псевдоріманових просторів, що знаходяться в нетривіальній геодезичній відповідності [178].

Нехай псевдоріманової простір V_n дозволяє нетривіальне геодезичне відображення, що відповідає вектору φ_i, на простір $\bar{V}_n$. Тоді в V_n існує розв'язок системи (3.1.5), що задовольняє (3.1.9).

Розглядатимемо a_{ij} як метричний тензор псевдоріманового простору $\overset{1}{V}_n$:

$$a_{ij} \overset{def}{=} \overset{1}{g}_{ij}. \tag{4.4.1}$$

Метричний тензор $\overset{1}{\bar{V}}_n$ побудуємо таким чином

$$\overset{1}{\bar{g}}_{ij} = e^{2\varphi} g_{ij}, \tag{4.4.2}$$

тобто, встановимо конформну відповідність між просторами V_n і $\overset{1}{\bar{V}}_n$, яка відповідає тому ж векторному полю φ_i.

Тоді, як доведено М.С. Сінюковим [178], якщо псевдоріманів простір V_n з метричним тензором g_{ij} дозволяє нетривіальне геодезичне відображення, що відповідає вектору φ_i, на простір $\bar{V}_n$ з метричним тензором $\bar{g}_{ij}$, то псевдоріманів простір $\overset{1}{V}_n$ з метричним тензором $\overset{1}{g}_{ij}$, що задовольняє (4.4.1), дозволяє геодезичне відображення, що відповідає тому ж вектору, на псевдоріманової простір $\overset{1}{\bar{V}}_n$ з метричним тензором $\overset{1}{\bar{g}}_{ij}$, визначеним формулою (4.4.2).

Означення 4.4.1. *Закон, представлений формулами (3.1.5), (4.4.1), (4.4.2), що переводить пару псевдоріманових просторів V_n і $\bar{V}_n$, для яких* *існує нетривіальне геодезичне відображення, що зв'язує їх, в іншу пару просторів* $\overset{1}{V}_n$ *і* $\overset{1}{\bar{V}}_n$ *, пов'язаних тим же відображенням, називають інваріантним перетворенням псевдоріманових просторів зі збереженням геодезичних.*

$$\begin{tikzcd} V_n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] \arrow[dr, "\varphi"] & \bar{V}_n \\ \overset{1}{V}_n \arrow[r, "\varphi"] & \overset{1}{\bar{V}}_n \end{tikzcd}$$

Ця схема описує введені перетворення зі збереженням геодезичних, враховуючи формули (3.1.5) і (3.1.9). Вона може бути записана в наступному виді —

$$\begin{tikzcd} V_n \arrow[r] \arrow[d, "a^i_j"'] & \bar{V}_n \arrow[d, "a^i_j"] \\ \overset{1}{V}_n \arrow[r] & \overset{1}{\bar{V}}_n \end{tikzcd}$$

тут $a^i_j = a_{\alpha j} g^{\alpha i}$, а

$$\overset{1}{g}_{ij} = g_{\alpha i} a^\alpha_j \tag{4.4.3}$$

$$\overset{1}{\bar{g}}_{ij} = \bar{g}_{\alpha i} a^\alpha_j \tag{4.4.4}$$

Приведені дві схеми еквівалентні. Використовуючи першу з них, проведемо дослідження випадку, коли псевдоріманові простори V_n і $\bar{V}_n$ знаходяться в нетривіальному геодезичному відображенні, за якого зберігається тензор Ейнштейна, що відповідає вектору φ_i.

Тоді, в V_n виконуються умови

$$\varphi_{ij} = \frac{\bar{R}}{n(n-1)}\bar{g}_{ij} - \frac{R}{n(n-1)}g_{ij} \tag{4.4.5}$$

Диференціюючи і враховуючи (3.1.2), отримаємо

$$\begin{gathered}\varphi_{ij\,,\,k} = \frac{\bar{R}_{,\,k}}{n(n-1)}\bar{g}_{ij} + \frac{\bar{R}}{n(n-1)}(2\varphi_k\bar{g}_{ij} + \\ +\varphi_i\bar{g}_{jk} + \varphi_j\bar{g}_{ik}) - \frac{R_{,\,k}}{n(n-1)}g_{ij}\end{gathered} \tag{4.4.6}$$

Оскільки V_n і $\overset{1}{\bar{V}}_n$ пов'язані конформним відображенням (4.4.2), то для них виконуються умови (4.1.4) :

$$\varphi_{ij} = P_{ij} + \rho g_{ij}, \tag{4.4.7}$$

де

$$P_{ij} \overset{def}{=} \frac{1}{n-2}(\overset{1}{\bar{R}}_{ij} - R_{ij});$$

$$\rho = \frac{\Delta_2\varphi}{n-2} + \Delta_1\varphi.$$

Продиференціюємо (4.4.7)—

$$\varphi_{ij\,,\,k} = P_{ij\,,\,k} + \rho_k g_{ij}. \tag{4.4.8}$$

Віднімемо (4.4.8) з рівнянь (4.4.6) :

$$\begin{gathered}P_{ij\,,\,k} = \frac{\bar{R}_{,\,k}}{n(n-1)}\bar{g}_{ij} + \frac{\bar{R}}{n(n-1)}(2\varphi_k\bar{g}_{ij} + \\ +\varphi_i\bar{g}_{jk} + \varphi_j\bar{g}_{ik}) - (\frac{R_{,\,k}}{n(n-1)} - \rho_k)g_{ij}\end{gathered} \tag{4.4.9}$$

Виключимо з останнього $\frac{\bar{R}}{n(n-1)}\bar{g}_{ij}$ за допомогою формули (4.4.5)

$$\begin{aligned} P_{ij\,,\,k} \ &= \frac{\bar{R}_{,\,k}}{n(n-1)}\bar{g}_{ij} + 2\varphi_k\varphi_{ij} + \varphi_i\varphi_{jk} + \\ &+\varphi_j\varphi_{ik} + \frac{R}{n(n-1)}(2\varphi_k g_{ij} + \\ &+ \ \varphi_i g_{jk} + \varphi_j g_{ik}) - (\frac{R_{,\,k}}{n(n-1)} - \rho_k)g_{ij} \end{aligned} \tag{4.4.10}$$

Перейдемо до похідної за зв'язністю простору $\bar{\overset{1}{V}}_n$, позначивши її $\overset{1}{,}$ і, використовуючи формули (4.1.2) (4.4.10)—

$$\begin{aligned} & P_{ij\overset{1}{,}k} + 2\varphi_k P_{ij} + \varphi_i P_{jk} + \varphi_j P_{ik} - 2P_{\alpha k}\varphi^{\alpha}g_{ij} = \\ &= \frac{\bar{R}_{,\,k}}{n(n-1)}\bar{g}_{ij} + 2\varphi_k\varphi_{ij} + \varphi_i\varphi_{jk} + \\ &+\varphi_j\varphi_{ik} + \frac{R}{n(n-1)}(2\varphi_k g_{ij} + \\ &+\varphi_i g_{jk} + \varphi_j g_{ik}) - (\frac{R_{,\,k}}{n(n-1)} - \rho_k)g_{ij} \end{aligned} \tag{4.4.11}$$

Використовуючи (4.4.7), отримаємо

$$\begin{aligned} P_{ij\overset{1}{,}k} &= \frac{\bar{R}_{,\,k}}{n(n-1)}\bar{g}_{ij} + (\frac{R}{n(n-1)} - \rho)(2\varphi_k g_{ij} + \\ &+\varphi_i g_{jk} + \varphi_j g_{ik}) - (\frac{R_{,\,k}}{n(n-1)} - \rho_k - 2P_{\alpha k}\varphi^{\alpha})g_{ij} \end{aligned} \tag{4.4.12}$$

І, нарешті, використовуючи (4.4.2), матимемо

$$P_{ij\overset{1}{,}k} = \frac{\bar{R}_{,\,k}}{n(n-1)}\bar{g}_{ij} + (\frac{R}{n(n-1)} - \rho)e^{-2\varphi}(2\varphi_k \overset{1}{\bar{g}}_{ij} + \\ +\varphi_i \overset{1}{\bar{g}}_{jk} + \varphi_j \overset{1}{\bar{g}}_{ik}) - e^{-2\varphi}(R_{,\,k} - \rho_k - 2P_{\alpha k}\varphi^{\alpha}) \overset{1}{\bar{g}}_{ij} \tag{4.4.13}$$

Таким чином, доведено теорему [139, 149]

Теорема 4.4.1. *Якщо псевдоріманові простори V_n і $\bar{V}_n$ знаходятъся в нетривіальній геодезичній відповідності зі збереженням тензора Ейнштейна, то в просторі $\overset{1}{\bar{V}}_n$, отриманому інваріантним перетворенням зі збереженням геодезичних, існує тензор P_{ij}, що задовольняє умовам (4.4.13).*

Якщо скалярна кривина псевдоріманового простору $\bar{V}_n$ стала, то рівняння (4.4.13) набирають вигляду

$$P_{ij\overset{1}{,}k} = u_k \overset{1}{\bar{g}}_{ij} + v_i \overset{1}{\bar{g}}_{jk} + v_j \overset{1}{\bar{g}}_{ik}, \tag{4.4.14}$$

тут u_i і v_i — деякі вектори.

Теорема 4.4.1 посилює і узагальнює результати М.С. Сінюкова [178] і С. Формели [24, 25] про інваріантні перетворення зі збереженням геодезичних для просторів сталої кривини і просторів Ейнштейна.

4.5 Геодезичні деформації гіперповерхонь псевдоріманових просторів

У теорії геодезичних відображень псевдоріманових просторів передбачається така відповідність між їх точками, при якій кожна геодезична лінія одного простору переходить точно в геодезичну іншого.

У цьому параграфі розглядаються такі нескінченно малі деформації псевдоріманових просторів, при яких кожна його геодезична переходить в геодезичну деформованого простору з деякою контрольованою точністю. Такий підхід, якщо мати на увазі прикладні питання моделювання, може виявитися таким, що навіть більше відповідає реальним фізичним подіям, які виникають в гравітаційному або електромагнітному полі, при реальному русі деякої механічної системи і т.п.

Нехай V_m - псевдоріманів простір, віднесений до локальних координат $(y^1, y^2, \ldots, y^m)$, тоді формулами

$$y^\alpha = f^\alpha(x^1, x^2, \ldots, x^n), \quad Rang \left\| \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \right\| = n < m, \tag{4.5.1}$$

визначається деякий підпростір $V_n \subset V_m$.

Якщо $a_{\alpha\beta}$ та g_{ij} - метричні тензори V_m і V_n, то

$$ds^2 = e a_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta = e a_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} dx^i dx^j = e g_{ij} dx^i dx^j, \tag{4.5.2}$$

де

$$g_{ij} = a_{\alpha\beta}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j}. \tag{4.5.3}$$

Тут і далі грецькі індекси $\alpha, \beta, \ldots = 1, 2, \ldots, m$, латинські $i, j, \ldots = 1, 2, \ldots, n$, якщо не обумовлене протилежне.

Нехай, далі, $\xi^\alpha(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ - деяке контраваріантне векторне поле V_m, задане в точках V_n. Формули

$$\tilde{y}^\alpha = y^\alpha(x) + \varepsilon\xi^\alpha(x), \tag{4.5.4}$$

де ε - малий числовий параметр, визначає деякий $\tilde{V}_n$, який ми називатимемо нескінченно малою деформацією V_n. Поле $\xi^\alpha(x)$ природно назвати полем зміщень або вектором зміщень [27, 130].

Вивчаючи V_n, вважатимемо, що величинами порядку ε^2 і вище, через мализну ε або через достатню точність, можна знехтувати.

Ми розглядаємо, таким чином, нескінченно малу деформацію 1-го порядку, хоча два останні слова в назві теорії скорочено опускатимемо, як це прийнято зазвичай.

Якщо $A = A(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ — деяка величина, що характеризує ту або іншу властивість V_n, то для V_n відповідна величина $\tilde{A} = \tilde{A}(x^1, x^2, \ldots, x^n, \varepsilon)$ і її можна представити у виді

$$\tilde{A}(x, \varepsilon) = A(x) + \delta A \cdot \varepsilon + \delta^2 A \cdot \varepsilon^2 + \ldots. \tag{4.5.5}$$

Величина параметра деформації ε у формулі (4.5.4) вибирається з міркувань, що забезпечують потрібну збіжність ряду (4.5.5), безвідносно до того, що характеризує $A(x)$.

Коефіцієнти розкладання в (4.5.5) $\delta, \delta^2, \ldots,$ називатимемо відповідно до першої, другої і так далі варіаціями величини при нескінченно малій деформації V_n [27].

Ми розглядатимемо варіант теорії, як відзначалося вище, коли цей ряд обривається після другого члена.

Через сказане, метричний тензор V_n

$$\tilde{g}_{ij} = g_{ij} + \varepsilon \delta g_{ij}. \tag{4.5.6}$$

Знайдемо тензор g_{ij}. Для цього помітимо, що формула (4.5.4) дає $\delta y^\alpha \ = \ \xi^\alpha(x)$.

$$a_{\alpha\beta}(\tilde{y}) = a_{\alpha\beta}(y + \varepsilon\xi) = a_{\alpha\beta}(y) + \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^\gamma}\xi^\gamma \cdot \varepsilon + \ldots, \tag{4.5.7}$$

отже $\delta a_{\alpha\beta} = \dfrac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^\gamma}\xi^\gamma$.

По відношенню до перетворення координат в просторі V_n усі y^α та ξ^α інваріантні, тому їх перші частинні похідні співпадають з коваріантними. Помітивши усе це, матимемо через співвідношення (4.5.3) :

$$\delta a_{ij} = \delta(a_{\alpha\beta}y^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,j}) = \delta a_{\alpha\beta}y^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,j} + a_{\alpha\beta}\delta y^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,j} + a_{\alpha\beta}y^{\alpha}_{,i}\delta y^{\beta}_{,j} =$$
$$= \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}}\xi^{\gamma}y^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,j} + a_{\alpha\beta}(\xi^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,j} + y^{\alpha}_{,i}\xi^{\beta}_{,j}). \tag{4.5.8}$$

Формула (4.5.8) справедлива для будь-якої нескінченно малої деформації і у будь-якій системі координат.

Означення 4.5.1. *Нескінченно малі деформації V_n називатимемо геодезичними, якщо при цих деформаціях зберігаються геодезичні лінії V_n.*

Іншими словами, V_n і $\tilde{V}_n$, віднесені до загальних координат x^i, повинні дозволяти геодезичне відображення один на одного. Але у такому разі для V_n та $\tilde{V}_n$ повинні виконуватися рівняння Леві - Чивіти (3.1.1) і співвідношення (3.1.2) :

$$\tilde{g}_{ij,k} = 2\psi_k\tilde{g}_{ij} + \psi_i\tilde{g}_{jk} + \psi_j\tilde{g}_{ik}, \quad \psi_i = \frac{1}{2(n+1)}\partial_i ln\left|\frac{\tilde{g}}{g}\right|. \tag{4.5.9}$$

У нашому випадку

$$2(n+1)\psi = ln\left|\frac{\tilde{g}}{g}\right| = ln\left|1 + \frac{\delta g}{g}\varepsilon\right| = ln\left(1 + \frac{\delta g}{g}\varepsilon\right) = \varepsilon\frac{\delta g}{g} + \ldots, \tag{4.5.10}$$

отже ψ_i в (4.5.9) потрібно замінити на $\varepsilon\psi_i$.

Враховуючи (4.5.6), рівняння Леві-Чивіти дають

$$\delta g_{ij,k} = 2\psi_k g_{ij} + \psi_i g_{jk} + \psi_j g_{ik}. \tag{4.5.11}$$

Навпаки, при виконанні (4.5.9) для тензора $\tilde{g}_{ij} = g_{ij} + \varepsilon\delta g_{ij}$ будуть виконані і (4.5.11). Невиродженість $\tilde{g}_{ij}$ забезпечується потрібним вибором параметра ε. Таким чином, (4.5.11) необхідні і достатні для того, щоб деформація V_n була геодезичною. З деяких міркувань симетричний тензор δg_{ij} зручніше надалі означати h_{ij}.

Нами отримана [130]

Теорема 4.5.1. *Для того, щоб псевдоріманів простір V_n дозволяв нескінченно малі геодезичні деформації, необхідно і достатньо, щоб в ньому існував симетричний тензор h_{ij}, що задовольняє рівнянням*

$$h_{ij,k} = 2\psi_k g_{ij} + \psi_i g_{jk} + \psi_j g_{ik} \tag{4.5.12}$$

при деякому градієнтному векторі ψ_i.

Якщо в (4.5.12) $\psi_i = 0$, то $h_{ij,k} = 0$, що можливо в наступних двох випадках:

1. $h_{ij} = Cg_{ij}$, $C = const$, але тоді $\tilde{g}_{ij} = g_{ij}(1 + \varepsilon C)$, тобто деформація зводиться до нескінченно малої гомотетії.

2. $h_{ij} \neq Cg_{ij}$. В цьому випадку в V_n існує симетричний коваріантно сталий тензор.

А з (4.5.9) витікає, що в обох випадках $\tilde{g} = Cg$, тобто деформація є гомотетично ареальною.

Вважатимемо ці випадки тривіальними, нетривіальний випадок характеризується умовою $\psi_i \neq 0$. Але тоді (4.5.12) можна переписати так:

$$(h_{ij} - 2\psi g_{ij})_{,k} = \psi_i g_{jk} + \psi_j g_{ik}, \tag{4.5.13}$$

тобто в V_n тензор $h_{ij} - 2\psi g_{ij}$ задовольняє системі (3.1.5) при $\lambda_i = \psi_i$.

Порівнюючи це з лінійною формою основних рівнянь теорії ГВ, приходимо до висновку:

Теорема 4.5.2. *Якщо псевдоріманів простір V_n дозволяє нетривіальні нескінченно малі геодезичні деформації, то воно дозволяє і нетривіальні геодезичні відображення.*

Зворотна теорема також має місце. Дійсно, систему (3.1.5) завжди можна записати у виді

$$(a_{ij} + 2\lambda g_{ij})_{,k} = 2\lambda_k g_{ij} + \lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik}, \tag{4.5.14}$$

а це означає, що для тензора

$$h_{ij} = a_{ij} + 2\lambda g_{ij}$$

виконуються умови (4.5.12). Метричний тензор V_n має представлення

$$\tilde{g}_{ij} = (1 + 2\lambda\varepsilon) g_{ij} + \varepsilon a_{ij}.$$

Теорему 4.5.2 уперше було доведено в спільній роботі М.С. Сінюкова і М. Л. Гаврильченко, але тільки для ріманових просторів першого класу.

З теореми 4.5.2 витікає

Теорема 4.5.3. *Чотирьохвимірні простори Ейнштейна несталої кривини не дозволяють нетривіальних геодезичних деформацій.*

Навпаки, для просторів $V_n(B)$ такі деформації існують.

Основним завданням теорії геодезичних деформацій є усебічне вивчення взаємозв'язків і взаємозалежностей псевдоріманова простору V_n, його охоплюючого простору V_m і згинального поля $\xi^\alpha(x)$. Ідеальною ситуацією, очевидно, можна вважати випадок, коли вдається знайти поле $\xi^\alpha(x)$. Легко отримати рівняння для нього.

Дійсно, підставляючи (4.5.8) в (4.5.11), отримаємо

$$\frac{\partial^2 a_{\alpha\beta}}{\partial y^\gamma \partial y^\nu} y^\alpha_{,i} y^\beta_{,j} \xi^\gamma y^\nu_{,k} + \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^\gamma} (y^\alpha_{,i} y^\beta_{,j} \xi^\gamma_{,k} + y^\alpha_{,i} y^\beta_{,jk} \xi^\gamma + y^\alpha_{,ik} y^\beta_{,j} \xi^\gamma) +$$

$$+\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^\gamma} (y^\alpha_{,i} y^\beta_{,j} + y^\alpha_{,i} \xi^\beta_{,j}) y^\gamma_{,k} + a_{\alpha\beta} (\xi^\alpha_{,ik} y^\beta_{,j} + \xi^\alpha_{,i} y^\beta_{,jk} + y^\alpha_{,i} \xi^\beta_{,jk} + y^\alpha_{,ik} \xi^\beta_{,jk}) =$$

$$= 2\psi_k g_{ij} + \psi_i g_{jk} + \psi_j g_{ik} \tag{4.5.15}$$

Ми скористалися тим, що $a_{\alpha\beta}$ інваріантні в V_n.

Рівняння (4.5.15) ускладнені тією обставиною, що старша похідна поля зміщень $\xi^\alpha_{,ik}$ входить двічі.

Від цього можна позбавитися, виконавши операцію з такою підстановкою індексів i, j, k: $(i, j, k) + (i, k, j) - (j, k, i)$. Отримаємо

$$a_{\alpha\beta}y^{\alpha}_{,i}\xi^{\beta}_{,jk}+a_{\alpha\beta}\xi^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,jk}+\Gamma_{\gamma\beta\alpha}(y^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,j}\xi^{\gamma}_{,k}+y^{\alpha}_{,i}\psi^{\beta}_{,j}y^{\gamma}_{,k}+\xi^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,j}y^{\gamma}_{,k})+$$

$$+\xi^{\gamma}\left(\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}}y^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,jk}+\frac{\partial\Gamma_{\nu\beta\alpha}}{\partial y^{\gamma}}y^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,j}y^{\nu}_{,k}\right)= \tag{4.5.16}$$

$$=\psi_i g_{jk}+\psi_j g_{ik},$$

де $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ — символи Кристоффеля, складені для $a_{\alpha\beta}$. Рівняння (4.5.15) і (4.5.16) еквівалентні. Вони представляють необхідні і достатні умови нескінченно малих геодезичних деформацій $V_n\subset V_m$ з полем зміщень $\xi^{\alpha}(x)$.

Нехай $m=n+1$, тобто V_n — гіперповерхня V_m. Умова (3.1.5) дозволяє вектори $y^{\alpha}_{,i}$ вибрати в якості базису V_n. Ми вважаємо, що $det\,\|g_{ij}\|\neq 0$, отже, нормаль до гіперповерхні $\eta^{\alpha}(x)$ неізотропна [27, 130], тобто

$$a_{\alpha\beta}y^{\alpha}_{,i}\eta^{\beta}=0,\quad a_{\alpha\beta}\eta^{\alpha}\eta^{\beta}=e,\quad e=\pm 1. \tag{4.5.17}$$

Система векторів $\{y^{\alpha}_{,i},\eta^{\alpha}\}$ утворює базис V_m. Нехай тому

$$\xi^{\alpha}(x)=\lambda^{i}y^{\alpha}_{,i}+\mu\eta^{\alpha}, \tag{4.5.18}$$

де

$$\lambda_j=g_{ij}\lambda^{i}=a_{\alpha\beta}\xi^{\alpha}y^{\beta}_{,j},\quad \mu=e a_{\alpha\beta}\xi^{\alpha}\eta^{\beta}, \tag{4.5.19}$$

тобто невідомі λ^{i} і μ є вектор і інваріант V_n. Умови (4.5.19) дають їх геометричний сенс.

Оскільки V_n - гіперповерхня V_{n+1}, то справедливі дериваційні формули

- Гауса: $y^{\alpha}_{,ij} = -\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} y^{\mu}_{,i} y^{\nu}_{,j} + e\Omega_{ij}\eta^{\alpha}$;
- Вейнгартпена: $\eta^{\alpha}_{,ij} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} y^{\mu}_{,i}\eta^{\nu} - \Omega^{k}_{i} y^{\alpha}_{,k}$,

де Ω_{ij} — другий основний тензор V_n, $\Omega^{k}_{i} \overset{def}{=} \Omega_{ij} g^{jk}$.

Ці формули дозволяють, використовуючи (4.5.18), виразити $\xi^{\alpha}_{,i}$ і $\xi^{\alpha}_{,ij}$ в тому ж базисі $\{y^{\alpha}_{,i}, \eta^{\alpha}\}$.

Так, наприклад,

$$\xi^{\alpha}_{,i} = (\lambda^{s}_{,i} - \mu\Omega^{s}_{i}) y^{\alpha}_{,s} - \lambda^{s}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} y^{\mu}_{,s} y^{\nu}_{,i} + (e\lambda^{s}\Omega_{si} - \mu_{,i})\eta^{\alpha} - \mu\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} y^{\mu}_{,i}\eta^{\nu}. \qquad (4.5.20)$$

Якщо усі ці вирази підставити в рівняння (4.5.14), врахувати, що

$$\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y_{\gamma}} = \Gamma_{\alpha\gamma\beta} + \Gamma_{\beta\gamma\alpha},$$

то після нескладних, але досить громіздких підрахунків отримаємо

$$\lambda_{i,jk} = -\lambda_s R^{s}_{kij} + \psi_j g_{ik} + \psi_k g_{ij} + (\mu\Omega_{ij})_{,k} + (\mu\Omega_{ik})_{,j} - (\mu\Omega_{jk})_{,i}. \qquad (4.5.21)$$

Теорема 4.5.4. *Для того, щоб псевдоріманів простір $V_n \subset V_{n+1}$ дозволяв нескінченно малі деформації, необхідно і достатньо, щоб в ньому існував вектор λ_i і інваріант μ, що задовольняють рівнянням* (4.5.21).

Система (4.5.21) є координатним записом (4.5.16) у базисі $\{y^{\alpha}_{,i}, \eta^{\alpha}\}$, а тому вона дає необхідні і достатні умови геодезичній деформації гіперповерхні V_n. Ми систему (4.5.21) називатимемо основною [130].

Симетруванням (4.5.21) за індексами i і j отримаємо вираз

$$(\lambda_{i,j} + \lambda_{j,i} - 2\mu\Omega_{ij})_{,k} = 2\psi_k g_{ij} + \psi_i g_{jk} + \psi_j g_{ik}. \tag{4.5.22}$$

Аналогічними підрахунками як для рівняння (4.5.15) можна довести, що системи (4.5.21) і (4.5.22) еквівалентні. А (4.5.22) показує, що для тензора

$$a_{ij} \overset{def}{=} \lambda_{i,j} + \lambda_{j,i} - 2\mu\Omega_{ij} - 2\psi g_{ij} \tag{4.5.23}$$

вона перетворюється на (3.1.5), що ще раз підтверджує теорему 4.5.2.

Для тензора

$$h_{ij} \overset{def}{=} \lambda_{i,j} + \lambda_{j,i} - 2\mu\Omega_{ij}$$

рівняння (4.5.22) запишуться у формі (4.5.12).

Зауважимо, що якщо V_n співпадає з V_m, то (4.5.4) визначають нескінченно малі перетворення V_n, що вивчалися раніше [130]. В цьому випадку $y^{\alpha} = x^{\alpha}$, в (4.5.18) $\mu = 0, \xi^{\alpha} = \lambda^{\alpha}$, а з (4.5.21) виходить добре відома система для нескінченно малих перетворень, які зберігають геодезичні

$$\xi_{i,jk} = -\xi_s R^s_{kij} + \psi_i g_{jk} + \psi_j g_{ik}. \tag{4.5.24}$$

Питання про нескінченно малі геодезичні деформації гіперповерхонь псевдоріманового простору зводиться до розв'язання нелінійної системи (4.5.21), права частина яких містить, окрім λ_i, похідні від невідомих μ і ψ_i. Ця система дозволяє зведення до змішаної тензорної системи типу Коші. Дійсно, умови інтегрованості (4.5.21) мають вигляд

$$
\begin{gathered}
\lambda_{s,j} R^s_{ikl} + \lambda_{s,i} R^s_{jkl} = \lambda_{s,[k} R^s_{l]ij} + \lambda_s R^s_{[l|ij|,k]} + \psi_{j,[l} g_{k]i} + \\
+\mu \Omega_{s(i} R^s_{j)kl} + (\mu \Omega_{ik})_{,jl} + (\mu \Omega_{jl})_{,ik} - (\mu \Omega_{il})_{,jk} - (\mu \Omega_{jk})_{,il},
\end{gathered}
\tag{4.5.25}
$$

дужки ( ), [] означають відповідно симетрування і альтернування без ділення, риски | | укладають індекси, що не беруть участь в операції.

Якщо (4.5.25) помножити на g^{il}, а потім (4.5.25) помножити на g^{jk}, згорнути по усіх індексах і з першого виразу відняти другий, то отримаємо

$$
n\psi_{j,k} = h_{js} R^s_k - h_{sp} R^{s\ \ p}_{.jk.} + \omega g_{jk}, \tag{4.5.26}
$$

де R_{ij} — тензор Річчі, ω — деякий інваріант, індекси підняті тензором g^{ij}, h_{ij} визначається (4.5.25). Якщо покласти

$$
b_{ij} \stackrel{def}{=} \lambda_{i,j}, \tag{4.5.27}
$$

то

$$
h_{ij} = b_{(ij)} - 2\mu \Omega_{ij},
$$

і (4.5.26) дає лінійний вираз $\psi_{j,k}$ через b_{ij}, μ і ω. Вимога $\psi_{j,k} = \psi_{k,j}$ накладає алгебраїчну умову на b_{ij} і μ:

$$h_{s[k}R^s_{j]} = 0 \tag{4.5.28}$$

Знайдемо умови на невідомий інваріант ω. Умови інтегрованості (4.5.26) приводяться до виду

$$(n+3)\psi_s R^s_{jkl} = \psi_s R^s_{[k} g_{l]j} + h_{js} R^s_{[k,l]} - h_{sp} R^{s\ \ \ p}_{\cdot\ j[k\cdot\ ,\ l]} + g_{j[k}\omega_{,l]} \tag{4.5.29}$$

Згортаючи (4.5.29) з g^{jk}, отримаємо

$$(n-1)\omega_{,l} = 2(n+1)\psi_s R^s_l + h_{js} R^{s\ \ j}_{\cdot\ l,\ \cdot} - h_{sp} R^{sk\ \ p}_{\cdot\ \cdot\ l\cdot\ ,\ k} + g_{j[k}\omega_{,l]} \tag{4.5.30}$$

Якщо $\psi_{j,k}$ з (4.5.26) підставити в (4.5.25), то їх можна переписати так:

$$\begin{gathered} b_{sp}A^{sp}_{ijkl} + \lambda_s B^s_{ijkl} + \nu_s C^s_{ijkl} + \mu D_{ijkl} + \omega E_{ijkl} = \\ = \nu_{j,l}\Omega_{ik} - \nu_{j,k}\Omega_{il} - \nu_{i,l}\Omega_{jk} + \nu_{i,k}\Omega_{jl}, \end{gathered} \tag{4.5.31}$$

де

$$\begin{gathered} A^{sp}_{ijkl} \overset{def}{=} \delta^p_j R^s_{ikl} + \delta^s_i R^p_{jkl} + \delta^p_l R^s_{kij} + \delta^s_k R^p_{lji} - \\ -\frac{1}{n} g_{ik}(\delta^{(s}_j R^{p)}_l - R^{(s\ \ p)}_{\cdot\ jl\ \cdot}) + \frac{1}{n} g_{il}(\delta^{(s}_j R^{p)}_k - R^{(s\ \ \ p)}_{\cdot\ \ jk\ \cdot}) \end{gathered} \tag{4.5.32}$$

$$B^s_{ijkl} \stackrel{def}{=} R^s_{kij,l} - R^s_{lij,k}, \tag{4.5.33}$$

$$C^s_{ijkl} \stackrel{def}{=} \delta^s_{[i}\Omega_{j][k,l]} + \delta^s_{[k}\Omega_{l][i,j]}, \tag{4.5.34}$$

$$\begin{gathered} D_{ijkl} \stackrel{def}{=} -\Omega_{s(i}R^s_{j)kl} - \Omega_{k[i,j]l} + \Omega_{l[i,j]k} + \\ +\frac{2}{n}\Omega_{js}g_{i[k}R^s_{l]} + \frac{2}{n}\Omega_{sp}R^{s\ \ \ p}_{\cdot j[k\cdot}g_{l]i}, \end{gathered} \tag{4.5.35}$$

$$E_{ijkl} \stackrel{def}{=} -\frac{1}{n}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}), \tag{4.5.36}$$

$$\nu_i \stackrel{def}{=} \mu_{,i} = \frac{\partial\mu}{\partial x^i}. \tag{4.5.37}$$

Істотно відмітити, що п'ять останніх тензорів (4.5.32)–(4.5.36) кінець кінцем визначаються або тільки метрикою V_n, або тензором Ω_{ij} .

В силу (4.5.27) і (4.5.37) формули (4.5.21) перепишуться так

$$\begin{gathered} b_{ij,k} = -\lambda_s R^s_{kij} + g_{ij}\psi_k + g_{ik}\psi_j + \\ +\mu(\Omega_{ij,k} + \Omega_{ik,j} - \Omega_{jk,i}) + \nu_k\Omega_{ij} + \nu_j\Omega_{ik} - \nu_i\Omega_{jk}. \end{gathered} \tag{4.5.38}$$

а) Спочатку вважатимемо, починаючи з цього місця, що тензор Ω_{ij} невироджений і компоненти зворотного до нього позначимо через M^{ij}.

Згортаючи (4.5.31) з M^{ij}, отримаємо

$$-(n-2)\nu_{j,k} = b_{sp}A^{sp}_{jk} + \lambda_s B^s_{jk} +$$
$$+\nu_s C^s_{jk} + \mu D_{jk} + \omega E_{jk} + \tau\Omega_{jk}, \tag{4.5.39}$$

де $A^{sp}_{jk}, B^s_{jk}, C^s_{jk}, D_{jk}, E_{jk}$ отримані з (4.5.32) — (4.5.36) згорткою з M^{ij}, τ - деякий інваріант.

Якщо (4.5.39) коваріантно продиференціювати по x^l, похідні від $b_{ij}, \lambda_i, \nu_i, \mu, \omega$ замінити їх виразами з (4.5.38), (4.5.27), (4.5.39), (4.5.37), (4.5.30), альтернувати по k і l, то ми отримаємо умови інтегрованості (4.5.39), які будуть лінійними відносно усіх вказаних величин. Якщо ці умови згорнути з M^{ij}, отримаємо

$$(n-1)\tau_{,i} = b_{ij}P^{ij}_l + \lambda_i Q^i_l +$$
$$+\psi_i S^i_l + \nu_i T^i_l + \mu p_l + \omega q_l + \tau r_l. \tag{4.5.40}$$

Тензори $P^{ij}_i, Q^i_l, S^i_l, T^i_l, p_l, q_l, r_l$ неважко виписати фактично, усі вони є функціями тільки g_{ij} і Ω_{ij}.

Сукупність рівнянь (4.5.26), (4.5.27), (4.5.30), (4.5.37), (4.5.38), (4.5.39), яку ми коротко позначимо через (A), дає лінійний вираз перших коваріантних похідних від $b_{ij}, \lambda_i, \psi_i, \nu_i, \mu, \omega, \tau$ через ці ж тензори з коефіцієнтами, однозначно визначеними V_n і V_{n+1}, тобто ми маємо систему типу Коші.

Помітимо, що система (A) носить інваріантний характер відносно вибору системи координат в V_n. Отже, отримана

Теорема 4.5.5. *Для того, щоб псевдоріманів простір $V_n \subset V_{n+1}, |\Omega_{ij}| \neq 0$, дозволяв нетривіальні нескінченно малі геодезичні деформації, необхідно і достатньо, щоб система рівнянь (A) мала нетривіальний розв'язок.*

Методи досліджень такої системи достатньо добре розроблені [130]. Використовуючи ці досягнення, відмітимо, приміром, що загальний розв'язок системи (A) містить не більше ніж $n^2 + 3n + 3$ довільних сталих, число лінійно незалежних розв'язків системи (A) теж не перевершує цього числа і розв'язок не може мати функціональної довільності.

б) Теорема 4.5.5 дозволяє ширше узагальнення для гіперповерхонь $V_n \subset V_{n+1}$ за умови, що $Rang\,\|\Omega_{ij}\| > 2$.

Скористаємося викладеннями доведення попередньої теореми до формули (4.5.38) і припустимо, що $Rang\,\|\Omega_{ij}\| > 2$.

Тоді в V_n, очевидно, існують три некомпланарні вектори a^i, b^i, c^i такі, що

$$\Omega_{ij}a^ia^j = \pm e_a; \quad \Omega_{ij}b^ib^j = \pm e_b; \quad \Omega_{ij}c^ic^j = \pm e_c;$$
$$\Omega_{ij}a^ib^j = 0; \quad \Omega_{ij}a^ic^j = 0; \quad \Omega_{ij}b^ic^j = 0. \tag{4.5.41}$$

Зауважимо, що ці вектори визначаються Ω_{ij}. Не дивлячись на те, що вони визначені неоднозначно, ми маємо право їх вважати об'єктами простору V_n, тобто визначеними через метрику і другу форму V_n.

По черзі помножимо (4.5.31) з $a^i a^k, b^i b^k, c^i c^k$, а потім підсумуємо по i і k. Отримаємо

$$e_a \nu_{j,l} = \overset{a}{\nu}_j \overset{a}{\Omega}_l + \overset{a}{\nu}_l \overset{a}{\Omega}_j + \overset{a}{\nu}\,\Omega_{jl} + \overset{1}{T}_{jl}(b_{sp}, \lambda_s, \nu_s, \mu, \omega), \tag{4.5.42}$$

$$e_b \nu_{j,l} = \overset{b}{\nu}_j \overset{b}{\Omega}_l + \overset{b}{\nu}_l \overset{b}{\Omega}_j + \overset{b}{\nu}\,\Omega_{jl} + \overset{2}{T}_{jl}(b_{sp}, \lambda_s, \nu_s, \mu, \omega), \tag{4.5.43}$$

$$e_c \nu_{j,l} = \overset{c}{\nu}_j \overset{c}{\Omega}_l + \overset{c}{\nu}_l \overset{c}{\Omega}_j + \overset{c}{\nu}\,\Omega_{jl} + \overset{3}{T}_{jl}(b_{sp}, \lambda_s, \nu_s, \mu, \omega), \tag{4.5.44}$$

де

$$\begin{aligned} &\overset{a}{\nu}_j \overset{def}{=} \nu_{j,k} a^k; \quad \overset{b}{\nu}_j \overset{def}{=} \nu_{j,k} b^k; \quad \overset{c}{\nu}_j \overset{def}{=} \nu_{j,k} c^k; \\ &\overset{a}{\Omega}_l \overset{def}{=} \Omega_{lk} a^k; \quad \overset{b}{\Omega}_l \overset{def}{=} \Omega_{lk} b^k; \quad \overset{c}{\Omega}_l \overset{def}{=} \Omega_{lk} c^k, \end{aligned} \tag{4.5.45}$$

$\overset{a}{\nu}, \overset{b}{\nu}, \overset{c}{\nu}$ - деякі інваріанти, $\overset{\sigma}{T}, (\sigma = 1, 2, \ldots)$ — тензори, що лінійно виражаються через ті об'єкти, які вказані в якості аргументу, з коефіцієнтами визначеними метрикою g_{ij} простору V_n і його другою квадратичною формою Ω_{ij}, а також векторів a^i, b^i, c^i, які визначені по суті Ω_{ij}.

За допомогою (4.5.43) виключимо з (4.5.42) тензор $\nu_{j,l}$.

$$
\begin{gathered}
e_a(\overset{a}{\nu}_j \overset{a}{\Omega}_l + \overset{a}{\nu}_l \overset{a}{\Omega}_j) - e_b(\overset{a}{\nu}_j \overset{b}{\Omega}_l + \overset{b}{\nu}_l \overset{b}{\Omega}_j) + \\
+(e_a \overset{a}{\nu} - e_b \overset{b}{\nu})\Omega_{jl} + e_a \overset{1}{T}_{jl} - e_b \overset{2}{T}_{jl} = 0.
\end{gathered}
\tag{4.5.46}
$$

Згорнемо (4.5.46) з a^l, на основі (4.5.41) отримаємо:

$$
\overset{a}{\nu}_j = \alpha \overset{a}{\Omega}_j + \beta \overset{b}{\Omega}_j + \overset{4}{T}_j(b_{sp}, \lambda_s, \nu_s, \mu, \omega), \tag{4.5.47}
$$

де α, β — деякі інваріанти. Аналогічним шляхом з (4.5.42) і (4.5.44) отримаємо

$$
\overset{a}{\nu}_j = \gamma \overset{a}{\Omega}_j + \delta \overset{c}{\Omega}_j + \overset{5}{T}_j(b_{sp}, \lambda_s, \nu_s, \mu, \omega). \tag{4.5.48}
$$

Віднімаємо (4.5.48) з (4.5.47), маємо

$$
(\alpha - \gamma) \overset{a}{\Omega}_j + \beta \overset{b}{\Omega}_j - \delta \overset{c}{\Omega}_j + \overset{4}{T}_j - \overset{5}{T}_j = 0. \tag{4.5.49}
$$

Згортаючи (4.5.49) з b^j, переконаємося, що

$$
\beta = \overset{6}{T}_j(b_{sp}, \lambda_s, \nu_s, \mu, \omega). \tag{4.5.50}
$$

Тоді формула (4.5.42) з урахуванням (4.5.47) і (4.5.50) набирає вигляду:

$$
e_a \nu_{j,l} = 2\alpha \overset{a}{\Omega}_j \overset{a}{\Omega}_l + \overset{a}{\nu}\, \Omega_{jl} + \overset{7}{T}_{jl}(b_{sp}, \lambda_s, \nu_s, \mu, \omega). \tag{4.5.51}
$$

Очевидно, має місце аналогічна формула:

$$e_b \nu_{j,l} = 2\beta \overset{b}{\Omega}_j \overset{b}{\Omega}_l + \overset{b}{\nu} \Omega_{jl} + \overset{8}{T}_{jl}(b_{sp}, \lambda_s, \nu_s, \mu, \omega). \tag{4.5.52}$$

Після віднімання цих формул отримаємо

$$2\alpha \overset{a}{\Omega}_j \overset{a}{\Omega}_l - 2\beta \overset{b}{\Omega}_j \overset{b}{\Omega}_l + (\overset{a}{\nu} - \overset{b}{\nu})\Omega_{jl} + \overset{7}{T}_{jl} - \overset{8}{T}_{jl} = 0. \tag{4.5.53}$$

Згортаючи (4.5.53) із $c^j c^l$ переконаємося, що $(\overset{a}{\nu} - \overset{b}{\nu}) = \overset{9}{T}_{jl}(b_{sp}, \lambda_s, \nu_s, \mu, \omega)$.

Але тоді, згортаючи (4.5.53) з $a^j a^l$ і $\alpha = \overset{10}{T}_{jl}(b_{sp}, \lambda_s, \nu_s, \mu, \omega)$.

Формула (4.5.51) тоді набирає наступного вигляду:

$$\nu_{j,l} = \tau \Omega_{jl} + \overset{11}{T}_{jl}(b_{sp}, \lambda_s, \nu_s, \mu, \omega), \tag{4.5.54}$$

де $\tau \overset{def}{=} e_a \overset{a}{\nu}$.

Отримаємо умови інтегрованості рівнянь (4.5.54):

$$\tau_{,k}\Omega_{jl} - \tau_{,l}\Omega_{jk} + \overset{12}{T}_{jkl}(b_{sp}, \lambda_s, \nu_s, \mu, \omega) = 0. \tag{4.5.55}$$

З них неважко отримати, що

$$\tau_{,k} = \overset{13}{T}_k(b_{sp}, \lambda_s, \nu_s, \mu, \omega). \tag{4.5.56}$$

Через (A) позначимо рівняння (4.5.26), (4.5.27), (4.5.37), (4.5.38), (4.5.54), (4.5.56). У результаті бачимо, що справедлива

Теорема 4.5.6. *Для того, щоб ріманів простір $V_n \subset V_{n+1}$, $Rang \|\Omega_{ij}\| > 2$, дозволяв нетривіальні нескінченно малі геодезичні деформації, необхідно і достатньо, щоб система рівнянь (A) мала нетривіальний розв'язок.*

Умови інтегрованості усіх рівнянь системи (A) (теореми 4.5.5 і 4.5.6) суть лінійні однорідні алгебраїчні рівняння відносно $b_{ij}, \lambda_i, \psi_i, \nu_i, \mu, \omega, \tau$. Позначимо їх Б. Такими ж будуть їх диференціальні подовження будь-якого порядку, оскільки (A) лінійна. Подовження позначимо $Б_1, Б_2$ і так далі.

За аналогією з відповідним результатом з теорії геодезичних відображень [130] виходить така

Теорема 4.5.7. *Для того, щоб ріманів простір $V_n \subset V_{n+1}$ $Rang \|\Omega_{ij}\| > 2$ дозволяв нетривіальні нескінченно малі геодезичні деформації, необхідно і достатньо, щоб система лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь*

$$(Б), \quad (Б_1), \quad (Б_2), \quad \dots, \quad (Б_s) \qquad (s < n^2 + 3n + 3)$$

мала розв'язок відносно

$$b_{ij}, \quad \lambda_i, \quad \psi_i(\not\equiv 0), \ \dots, \ \nu_i, \quad \mu, \quad \omega, \quad \tau.$$

Отримані результати дозволяють застосувати до вивчення деформацій методи розроблені для вивчення відображень спеціальних псевдоріманових просторів.

4.6 Про солітони Річчі в спеціальних ріманових просторах

Потоком Річчі називають сімейство метрик на многовиді M таке, що

$$\frac{d}{dt}g_t = -2Ric(g_t), \tag{4.6.1}$$

де $Ric(g)$ — тензор Річчі метрики g.

В роботах, пов'язаних з доведенням гіпотези Пуанкаре, потоки Річчі ріманових просторів використовувались як важливий технічний засіб дослідження, і було отримано багато результатів про існування та властивості таких потоків [31].

З іншого боку, інтерес до геометричних властивостей таких метрик привів до солітонів Річчі [31], а також до $\varphi(Ric)$ – векторних полів [38, 43].

З самоподібним розв'язком рівняння (4.6.1), яке має назву рівняння Гамільтона, пов'язане поняття солітона Річчі як метрики, що задовольняє рівнянням

$$-2Ric_o = L_{X_o}g_o + 2\lambda g_o, \tag{4.6.2}$$

для деякого векторного поля X_o на M, похідної Лі L_{X_o} по відношенню до X_o і сталої λ. Якщо $\lambda = 0$ солітон Річчі називають стійким, при $\lambda < 0$ — стискаючим, а при $\lambda > 0$ — розтягуючим. Ми будемо користуватись цими визначеннями, хоча застосовуються й інші.

λ	**Солітон Річчі**		
	1	**2**	**3**
$\lambda = 0$	стійкий	сталий	параболічний
$\lambda < 0$	стискаючий	спадний	еліптичний
$\lambda > 0$	розтягуючий	зростаючий	гіперболічний

Таким чином, під солітоном розуміють трійку: метрику g, векторне поле X_o та сталу λ. Векторне поле X_o називають задаючим солітон-вектором. Якщо задаючий вектор градієнтний, то градієнтним називають і солітон.

Цей параграф присвячений вивченню градієнтних солитонів в псевдоріманових просторах. Дослідження ведуться локально в класі аналітичних функцій.

Нехай V_n псевдоріманів простір з метричним тензором g_{ij}, тоді рівняння (4.6.2) для градієнтних солітонів в індексній формі запишеться [31]

$$\varphi_{i,j} = \lambda g_{ij} - R_{ij}, \tag{4.6.3}$$

$$\lambda_{,i} = 0, \tag{4.6.4}$$

де кома “,“ — знак коваріантної похідної в V_n, а R_{ij} — тензор Річчі, а $\varphi_i = \varphi_{,i}$ — деякий ненульовий градієнтний вектор.

Умови інтегрованості, з урахуванням тотожності Річчі приймуть вид

$$\varphi_\alpha R^\alpha_{ijk} = -(R_{ij,k} - R_{ik,j}), \tag{4.6.5}$$

тут R^h_{ijk} — тензор Рімана V_n.

Враховуючи тотожність Біанкі (4.6.5), запишемо так

$$\varphi_\alpha R^\alpha_{ijk} = R^\alpha_{ikj,\alpha}. \tag{4.6.6}$$

Згортаючи останнє з g^{ij}, де g^{ij} — елементи оберненої до $\|g_{ij}\|$ матриці, будемо мати

$$\varphi_\alpha R^\alpha_k = -\frac{R_{,k}}{2}, \tag{4.6.7}$$

тут $R = R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}$ — скалярна кривина V_n.

Якщо вектор φ_i має сталу довжину, тобто

$$\varphi_\alpha \varphi^\alpha = const, \tag{4.6.8}$$

де $\varphi^h = \varphi_\alpha g^{\alpha h}$, то коваріантно диференціюючи та враховуючи (4.6.3) та (4.6.6), отримаємо

$$\lambda \varphi_i + \frac{R_{,i}}{2} = 0. \tag{4.6.9}$$

Останнє дає можливість сформулювати теорему

Теорема 4.6.1. *В псевдоріман овому просторі V_n з задаючим солітон-вектором сталої довжини скалярна кривина стала тоді і тільки тоді, коли солітон стійкий.*

Векторне поле називають конциркулярним, якщо воно задовольняє умові

$$\zeta_{i,j} = \rho g_{ij}, \tag{4.6.10}$$

тут $\zeta_i = \zeta_{,i} \neq 0$, ρ — деякий інваріант.

Якщо $\rho = const$, то векторне поле називають — збіжним, а в випадку $\rho = 0$ — коваріантно сталим. Простори, в яких існує конциркулярне векторне поле, називають еквідистантними.

Розглянемо псевдоріманів простір V_n, в якому виконуються рівняння (4.6.3), (4.6.4) та (4.6.10). Має місце теорема [131, 132]

Теорема 4.6.2. *Якщо в еквідистантному псевдорімановому просторі V_n існує градієнтний задаючий солітон вектор, то або він колінеарний конциркулярному, або конциркулярне векторне поле є коваріантно сталим.*

Доведення.

Умови інтегрування (4.6.10) мають вигляд

$$\zeta_\alpha R^\alpha_{ijk} = c(\zeta)(\zeta_k g_{ij} - \zeta_j g_{ik}), \tag{4.6.11}$$

де $c(\zeta)$ — деякий інваріант, що залежить від ζ, такий що $\rho_{,i} = c(\zeta)\zeta_\alpha$.

Із останнього, враховуючи (4.6.10) отримаємо

$$\rho R_{hijk} + \zeta_\alpha R^\alpha_{ijk,h} = c`(\zeta)(g_{ij}\zeta_k\zeta_h - g_{ik}\zeta_j\zeta_h) + c(\zeta)\rho(g_{ij}g_{kh} - g_{ik}g_{jh}), \tag{4.6.12}$$

тут $R_{hijk} = g_{\alpha n} R^\alpha_{ijk}$.

Згортаючи з g^{hk} та приймаючи до уваги (4.6.6), (4.6.10) будемо мати

$$\rho R_{ij} + c(\zeta)(\zeta_j\varphi_i - \varphi^{\alpha}\zeta_{\alpha}g_{ij}) = \tag{4.6.13}$$

$$= c\grave{}(\zeta_{\alpha}\zeta^{\alpha}g_{ij} - \zeta_i\zeta_j) + c(\zeta)\rho(n-1)g_{ij}.$$

Із останнього, враховуючи симетричність тензорів g_{ij} та R_{ij}, витікає

$$c(\zeta)(\zeta_j\varphi_i - \zeta_i\varphi_j) = 0. \tag{4.6.14}$$

Якщо $c(\zeta) = 0$, то $\rho_{,i} = 0$, і конциркулярне поле коваріантно стале, в протилежному випадку $\zeta_i = k\varphi_i$, де k - деякий інваріант. Таким чином, теорему доведено.

Наведемо приклад псевдоріманового простору V_n, який дозволяє градієнтні векторні поля, що задають солітони Річчі.

Розглянемо псевдоріманів простір V_3 з метрикою

$$ds^2 = -(dx^1)^2 + (x^1)^{2cos(\Theta)}(dx^2)^2 + (x^1)^{2sin(\Theta)}(dx^3)^2. \tag{4.6.15}$$

Побудуємо векторне поле φ^i, що задає параболічний солітон Річчі $\varphi^i = (\varphi^1(x^1), 0, 0)$.

Обчислимо тензор Річчі псевдоріманового простору V_3:

$$R_{11} = \frac{1 - cos(\Theta) - sin(\Theta)}{(x^1)^2}, \tag{4.6.16}$$

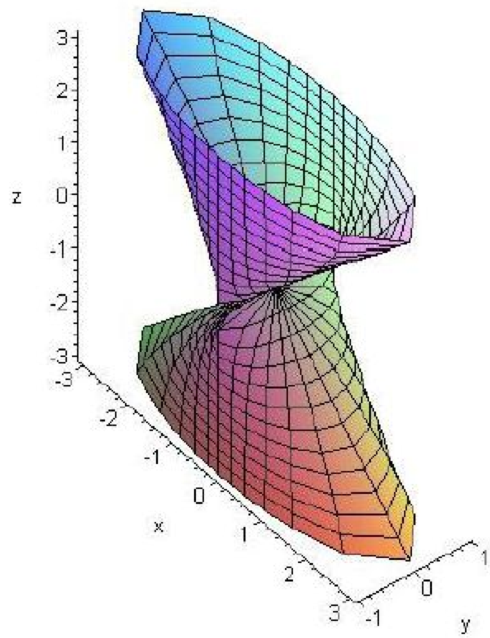

Рис. 4.2. Приклад солітона Річчі

$$R_{22} = \frac{cos(\Theta)(1 - cos(\Theta) - sin(\Theta))}{(x^1)^{2(1-cos(\Theta))}}, \tag{4.6.17}$$

$$R_{33} = \frac{(1 - cos(\Theta))(sin(\Theta) - 1 - cos(\Theta))}{(x^1)^{2(1-sin(\Theta))}}. \tag{4.6.18}$$

Скалярна кривина

$$R = -\frac{2(1 - cos(\Theta))(1 - sin(\Theta))}{(x^1)^2}. \tag{4.6.19}$$

В цьому просторі існує параболічний солітон Річчі (рис.4.2), що задається векторним полем:

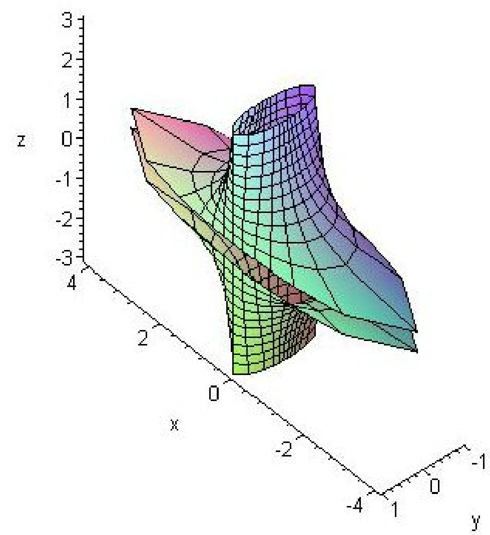

Рис. 4.3. Приклад солітона Річчі

$$\varphi^h = \frac{(1 - cos(\Theta) - sin(\Theta))}{x^1}\delta_1^h. \qquad (4.6.20)$$

Якщо $\Theta = \pi$, то компоненти метричного тензора $g_{33} = 1$, і в просторі існує коваріантна стале векторне поле $v = (0,\, 0,\, 1)$, ортогональне гіперповерхні

$$ds^2 = -(dx^1)^2 + \frac{1}{(x^1)^2}(dx^2)^2. \qquad (4.6.21)$$

В цьому випадку, простір буде еквідистантним, відмінним від простору сталої кривини. (Див. рис.4.3).

Всі псевдоріманові простори V_3 задовольняють умові

$$C^h_{ijk} = 0. \qquad (4.6.22)$$

Розглянемо простори $n > 3$, в яких виконуються ці умови. З (4.6.6) переконаємось, що

$$\varphi^{\beta} R^{\alpha}_{\beta jk,\alpha} = 0 \tag{4.6.23}$$

для всіх просторів, які дозволяють вектори φ^h, що задають солітони Річчі.

З (4.6.23) для просторів $n > 3$, в яких виконуються (4.6.22), отримаємо

$$R_{,k}\varphi_j - R_{,j}\varphi_k = 0. \tag{4.6.24}$$

Таким чином, доведено теорему

Теорема 4.6.3. *Для конформно-пласких псевдоріманових просторів V_n $(n > 3)$ градієнтне векторне поле, що задає солітон Річчі задовольняє умові*

$$\varphi_{,i} = f(R) R_{,i} \tag{4.6.25}$$

для $f(R)$ – деяка функція, що залежить від скалярної кривини простору V_n.

Рівняння (4.4.3), (4.4.4) представляють систему диференціальних рівнянь в коваріантних похідних типу Коші відносно невідомих векторів φ_i та сталої λ. Дослідження її та умов інтегрування (4.4.5) методами, аналогічними розробленим в параграфі 4.2, дають можливість довести, що максимальну кількість розв'язків системи $(n+1)$ дозволяють пласкі простори. Не існує псевдоріманових просторів, які дозволяють n та $n-1$

розв'язок вказаної системи. Якщо кількість розв'язків більше одного, тобто крім рівняння (4.4.3), виконується

$$\Phi_{i\,,\,j} = \Lambda g_{ij} - R_{ij} \tag{4.6.26}$$

принаймні ще для одного деякого вектора Φ_i та сталої Λ, то

$$(\varphi_i - \Phi_i)_{,\,j}) = (\lambda - \Lambda) g_{ij}. \tag{4.6.27}$$

Таким чином, справджується

Теорема 4.6.4. *Якщо в псевдорімановому просторі V_n існує більше ніж одне суттєве градієнтне векторне поле, що задає солітон Річчі, то цей простір еквідистантний.*

Рівняння (4.6.27) задають збіжне конциркулярне векторне поле, яке або колінеарне векторному полю, що задає градієнтний солітон Річчі, або коваріантно стале.

Перший випадок проводить до гармонійних псевдоріманових просторів, а другий — дозволяє сформулювати наслідок.

Наслідок 4.6.1. *Стала λ однозначно визначається для псевдоріманових просторів V_n, відмінних від гармонійних, що дозволяють солітони Річчі.*

Висновки з розділу 4

В цьому розділі розглянуті спеціальні фундаментальні відображення псевдоріманових просторів. При $\underset{1}{\alpha} = 1; \underset{2}{\alpha} = 0; \underset{3}{\alpha} = 1$, $a_{ij} = -g_{ij}$, фундаментальні відображення стають конформними.

Вивчення конформних відображень псевдоріманових просторів це одна з актуальних задач сучасної диференціальної геометрії.

Розглянуті конформні відображення псевдоріманових просторів на простори Ейнштейна. Оцінена лакуна в розподілі степенів мобільності псевдоріманових просторів відносно конформних відображень на простори Ейнштейна.

Доведено, якщо степінь мобільності псевдоріманового простору V_n відносно конформних відображень на простори Ейнштейна більше одиниці, то простір Ейнштейна дозволяє конциркулярне векторне поле; степінь мобільності псевдоріманового простору V_n відносно конформних відображень на простори Ейнштейна на одиницю більша від кількості лінійно незалежних конциркулярних векторних полів, що їх дозволяє простір Ейнштейна; серед просторів другої лакунарності відносно конформних відображень на простори Ейнштейна не може бути просторів Ейнштейна.

Вивчені конформні відображення із збереженням деяких спеціальних тензорів. Одержані основні рівняння, що дають можливість визначити: дозволяє або не дозволяє цей псевдоріманів простір конформні відображення.

При $\underset{1}{\alpha} = \underset{2}{\alpha} = 0$; $\underset{3}{\alpha} = 1$, фундаментальні відображення зводяться до інваріантних перетворень з збереженням геодезичних.

Інваріантні перетворення із збереженням геодезичних дозволяють довести, що існує безліч псевдоріманових просторів різних степенів мобільності відносно геодезичних відображень.

Розроблені методи застосовані в теорії геодезичних деформацій гіперповерхонь довільних псевдоріманових просторів. Розв'язок зведено до вивчення системи диференціальних рівнянь типу Коші в коваріантних похідних. Запропоновані формули переходу дозволяють переносити результати отримані в теорії геодезичних відображень на дослідження геодезичних деформацій.

Солітони Річчі, що, природно, виникають із теорії потоків Річчі, дають один тип спеціальних псевдоріманових просторів. Зокрема доведено, що в псевдорімановому просторі V_n з градієнтним задаючим вектором сталої довжини, скалярна кривина стала тоді і тільки тоді, коли солітон Річчі стійкий.

Теорема 4.6.2 стверджує, що, якщо в еквідистантному псевдорімановому просторі V_n існує градієнтний задаючий солітон вектор, то або він колінеарний конциркулярному, або конциркулярне векторне поле є коваріантно сталим.

Обґрунтовано, що, якщо в псевдорімановому просторі V_n існує більше ніж одне суттєве градієнтне векторне поле, що задає солітон Річчі, то цей простір еквідистантний, а також, що стала λ однозначно визначається для псевдоріманових просторів V_n, відмінних від гармонійних, що дозволяють солітони Річчі.

Розділ 5

Голоморфно-проективні відображення

Розглянемо C_n комплексно-аналітичний многовид розмірності n. Нехай $z^\alpha = x^\alpha + ix^{\bar{\alpha}}$ локальні комплексні координати, причому $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, а $\bar{\alpha} = n+1, n+2, \ldots, 2n$. Числа x^α та $x^{\bar{\alpha}}$ будемо розглядати як локальні координати дійсного парновимірного аналітичного многовиду M_{2n}.

Якщо R_z — дотичний до многовиду C_n простір в точці z, T_x — дотичний простір до M_{2n} в точці x. Добуток вектора із R_z на число i породжує в T_x лінійне перетворення F. Лінійне перетворення F задається на M_{2n} тензорним полем з локальними компонентами F^i_j. Це поле задовольняє умові

$$F^i_\alpha F^\alpha_j = -\delta^i_j,$$

$$(i, j, \alpha = 1, 2, \ldots, 2n).$$

Тензорне поле F^i_j — називають майже комплексною структурою на M_{2n}, що породжена комплексною аналітичною структурую на C_n.

Майже ермітова структура визначається на многовиді з майже комплексною структурую завданням метричного тензору, що задовольняє умові

$$g_{\alpha\beta}F_i^{\alpha}F_j^{\beta} = g_{ij}.$$

Накладаючи умови на ермітову структуру отримують три основних типи майже ермітових просторів [30, 32, 33, 117, 181, 196]:

1. Келерові
$$F_{ij,k} = 0.$$
2. K–простори
$$F_{ij,k} + F_{ik,j} = 0.$$
3. H–простори
$$F_{ij,k} + F_{jk,i} + F_{ki,j} = 0.$$

Ми розглянемо перший тип просторів — келерові простори.

5.1 Спеціальні келерові простори

Келеровим простором K_n $(n = 2N)$ називається псевдоріманів простір з метричним тензором $g_{ij}(x)$, у якому існує структура $F_i^h(x)$, що задовольняє співвідношенням [117], [178]:

$$F_{\alpha}^{h}F_i^{\alpha} = -\delta_i^h; \qquad F_{(ij)} = 0; \qquad F_{i,j}^{h} = 0, \tag{5.1.1}$$

де $F_{ij} \equiv g_{i\alpha}F_j^{\alpha}$, кома — знак коваріантної похідної по зв'язності K_n.

Зауважимо, що келерові простори вперше вивчалися П. А. Широковим, які він назвав A-просторами. Потім ці простори вивчав Є. Келер. В літературі, як правило, ці простори називають келеровими.

Задля зручності, введемо в K_n операцію спряження :

$$A_{\bar{i}\dots}^{\dots} \equiv A_{\alpha\dots}^{\dots} F_i^\alpha; \qquad B_{\dots}^{\bar{i}\dots} \equiv B_{\dots}^{\alpha\dots} F_\alpha^i. \tag{5.1.2}$$

Тут A і B довільні тензори будь-якої валентності. В силу (5.1.1) та (5.1.2) мають місце наступні властивості:

$$\begin{gathered} A_{\bar{\bar{i}}} = -A_i; \qquad B^{\bar{\bar{i}}} = -B^i; \\ A_{\bar{\alpha}} B^\alpha = A_\alpha B^{\bar{\alpha}}; \qquad A_{\bar{\alpha}} B^{\bar{\alpha}} = -A_\alpha B^\alpha; \\ (A_{\bar{i}})_{,\, j} = A_{\bar{i}\,,\, j}; \qquad (B^{\bar{i}})_{,\, j} = B^{\bar{i}}_{\ ,\, j}. \end{gathered} \tag{5.1.3}$$

Метричний тензор та символи Кронекера задовольняють співвідношенням:

$$g_{\bar{i}\,\bar{j}} = g_{ij}; \qquad g_{\bar{i}j} = -g_{i\bar{j}}; \qquad \delta_{\bar{i}}^h = \delta_i^{\bar{h}} = F_i^h; \qquad \delta_{\bar{i}}^{\bar{h}} = -\delta_i^h. \tag{5.1.4}$$

Тензори Рімана и Річчі додатково до відомих тотожностей задовольняють наступним властивостям:

$$R_{\bar{h}\bar{i}jk} = R_{hijk}; \qquad R_{\bar{\alpha}jk}^\alpha = 2R_{j\bar{k}}; \qquad R_{\bar{i}\,\bar{j}} = R_{ij}. \tag{5.1.5}$$

До внутрішніх об'єктів K_n відносять об'єкти, що визначаються з метричного тензора g_{ij} та структури F_i^h.

У келерових просторах K_n визначені наступні тензори:

- тензор голоморфно-проективної кривини

$$P^h_{ijk} \equiv R^h_{ijk} - \frac{1}{n+2}(\delta^h_{[k} R_{j]i} + \delta^h_{[\bar{k}} R_{\bar{j}]i} + 2\delta^h_{\bar{i}} R_{\bar{j}k}); \tag{5.1.6}$$

- тензор голоморфно-секційної кривини K_n

$$H^h_{ijk} \equiv R^h_{ijk} - \frac{R}{n(n+2)}(\delta^h_{[k} g_{j]i} + \delta^h_{[\bar{k}} g_{\bar{j}]i} + 2\delta^h_{\bar{i}} g_{\bar{j}k}); \tag{5.1.7}$$

- тензор Бохнера K_n

$$\begin{gathered} B^h_{jik} \equiv R^h_{ijk} + (\delta^h_{[j} B_{k]i} + \delta^h_{[\bar{j}} B_{\bar{k}]i} + 2\delta^h_{\bar{i}} B_{\bar{j}k} + \\ + B^h_{[j} g_{k]i} + B^h_{[\bar{j}} g_{\bar{k}]i} + 2B^h_{\bar{i}} g_{\bar{j}k}), \end{gathered} \tag{5.1.8}$$

де

$$\begin{gathered} B^h_i \equiv g^{h\alpha} B_{\alpha i}, \\ B_{ij} \equiv \frac{1}{n+4}\left(R_{ij} - \frac{R}{2(n+2)} g_{ij}\right). \end{gathered} \tag{5.1.9}$$

Для тензора голоморфно-проективної кривини маємо:

$$\begin{gathered} P_{hijk} = P_{hi\bar{j}\bar{k}} = P_{\bar{h}\bar{i}jk} = -P_{hikj}; \quad P_{h(ijk)} = 0; \\ P^\alpha_{\alpha jk} = P^\alpha_{\bar{\alpha}jk} = P^\alpha_{jk\alpha} = P^\alpha_{jk\bar{\alpha}} = 0, \end{gathered} \tag{5.1.10}$$

де (i, j, k) - означає циклювання по i, j, k.

Тензори голоморфно-секційної кривини та Бохнера задовольняють умовам:

$$H_{hijk} = -H_{ihjk} = H_{jkhi} = H_{\bar{h}\bar{i}jk};$$

$$H_{hijk} + H_{hjki} + H_{hkij} = 0;$$

$$B_{hijk} = -B_{ihjk} = B_{jkhi} = B_{\bar{h}\bar{i}jk}; \tag{5.1.11}$$

$$B_{hijk} + B_{hjki} + B_{hkij} = 0.$$

Розглянемо спеціальні келерові простори з прийнятою для псевдоріманових просторів спеціалізацією по двохвалентних тензорах.

Заздалегідь доведемо наступну лему:

Лема 5.1.1. *Нехай в келеровому просторі K_n визначений тензор A_{ij}, що задовольняє умовам :*

$$A_{ij} = A_{ji} = A_{\bar{i}\bar{j}};; \tag{5.1.12}$$

$$A_{ij,k} - A_{ik,j} = \rho_k A_{ij} - \rho_j A_{ik} + \tau_k g_{ij} - \tau_j g_{ik}, \tag{5.1.13}$$

де ρ_k, τ_k — деякі вектори.

Тоді виконуються наступні співвідношення:

$$A_{ij,k} = \rho_k A_{ij} + \tau_k g_{ij}. \tag{5.1.14}$$

Доведення.

Враховуючи (5.1.1) і (5.1.12), неважко переконатися, що для тензора A_{ij} виконуються умови

$$A_{\bar{i}\bar{j}} + A_{ij} = 0. \tag{5.1.15}$$

Подієм операцією спряження по індексах i та j на співвідношення (5.1.13), враховуючи (5.1.12), отримаємо

$$A_{ij,k} - A_{\bar{i}k,\bar{j}} = \rho_k A_{ij} - \rho_{\bar{j}} A_{kj} + \tau_k g_{ij} - \tau_{\bar{j}} g_{\bar{i}k}. \tag{5.1.16}$$

Просиметруємо останнє за індексами i та k, використовуючи (5.1.15), матимемо:

$$A_{ij,k} + A_{kj,i} = \rho_k A_{ij} + \rho_i A_{kj} + \tau_k g_{ij} + \tau_j g_{kj}. \tag{5.1.17}$$

Помінявши місцями індекси j та i в (5.1.17), складемо отримане з (5.1.13), у результаті переконаємося, що має місце (5.1.14). Таким чином, лему 5.1.1 доведено.

Має місце

Теорема 5.1.1. *Келерові простори є гармонійними RM_n, тоді і тільки тоді, коли вони Річчі-симетричні.*

Доведення.

Очевидно, що Річчі-симетричні простори є гармонійними.

Доведемо зворотне. Дійсно, враховуючи (5.1.5) і властивості тензора Річчі, неважко бачити, що тензор Річчі келерового простору RM_n, задовольняє умовам (5.1.12), (5.1.13) при $A_{ij} = R_{ij}$ та $\tau_k = \rho_k = 0$. Тоді за лемою 5.1.1 має місце (5.1.14).

Теорему доведено.

Доведена теорема посилює результати багатьох авторів, які розглядали келерові простори RM_n з припущенням, що $R_{ij,k} \neq 0$ [79].

Теорема 5.1.2. *Конформно-гармонійні келерові простори CM_n $(n > 3)$ є Річчі-симетричними.*

Доведення.

Використовуючи лему 5.1.1 при

$$A_{ij} = R_{ij}; \quad \tau_i = \frac{1}{2(n-1)} R_{,i}; \quad \rho_i = 0,$$

отримаємо, що

$$R_{ij,k} = \frac{1}{2(n-1)} R_{,k} g_{ij}. \tag{5.1.18}$$

Згортаючи останнє з g^{ij}, переконаємося в тому, що при $n > 3$

$$R_{,k} = 0 \tag{5.1.19}$$

і, отже, (5.1.18) набирає вигляду (2.3.70), що і вимагалося довести.

З (5.1.18) і теореми 5.1.2 переконаємося, що келерові простори M_n і CM_n будуть просторами сталої скалярної кривини, отже, має місце:

Наслідок 5.1.1. *У келерових просторах $K_n (n > 3)$ виконані умови*

$$RM_n \equiv CM_n \subset LM_n \equiv EM_n \equiv RicM_n. \tag{5.1.20}$$

Далі розглянемо спеціальні келерові простори, в яких виконуються більш загальні умови. Заздалегідь доведемо наступну лему [47, 136]:

Лема 5.1.2. *Нехай в келеровому просторі K_n визначений тензор T_{ij}, що задовольняє умовам :*

$$T_{ij} = T_{ji} = T_{\bar{i}\bar{j}}; \tag{5.1.21}$$

$$\begin{gathered} T_{ij,k} - T_{ik,j} = \tau_k T_{ij} - \tau_j T_{ik} + \psi_k g_{ij} - \psi_j g_{ik} + \\ + \tau_{\bar{k}} T_{i\bar{j}} - \tau_{\bar{j}} T_{i\bar{k}} + \psi_{\bar{k}} g_{i\bar{j}} - \psi_{\bar{j}} g_{i\bar{k}} + 2\tau_{\bar{i}} T_{\bar{j}k} + 2\psi_{\bar{i}} g_{\bar{j}k}, \end{gathered} \tag{5.1.22}$$

де τ_i і ψ_i — деякі вектори.

Тоді для тензора T_{ij} виконуються співвідношення:

$$\begin{gathered} T_{ij,k} = 2\tau_k T_{ij} + \tau_{(i} T_{j)k} + \tau_{(\bar{i}} T_{\bar{j})k} + \\ + 2\psi_k g_{ij} + \psi_{(i} g_{j)k} + \psi_{(\bar{i}} g_{\bar{j})k}. \end{gathered} \tag{5.1.23}$$

Доведення.

Нехай тензор T_{ij} задовольняє умовам (5.1.21) та (5.1.22). Подіємо операцією спряження за індексами i та j на формулу (5.1.22). Враховуючи (5.1.21), отримаємо

$$
\begin{gathered}
T_{ij,k} - T_{\bar{i}k,\bar{j}} = 2\tau_i T_{jk} + 2\psi_i g_{jk} + \tau_k T_{ij} - \tau_{\bar{j}} T_{\bar{i}k} + \\
+\psi_k g_{ij} - \psi_{\bar{j}} g_{\bar{i}k} + \tau_{\bar{k}} T_{i\bar{j}} + \tau_j T_{ik} + \psi_{\bar{k}} g_{i\bar{j}} + \psi_j g_{ik}.
\end{gathered}
\tag{5.1.24}
$$

Останню формулу просиметруємо за індексами i та k:

$$
\begin{gathered}
T_{ij,k} + T_{kj,i} = 2\tau_j T_{ik} + 3\tau_i T_{jk} + 3\tau_k T_{ji} + 2\psi_j g_{ik} + \\
+3\psi_i g_{jk} + 3\psi_k g_{ji} + \tau_{\bar{k}} T_{i\bar{j}} + \tau_{\bar{i}} T_{k\bar{j}} + \psi_{\bar{k}} g_{i\bar{j}} + \psi_{\bar{i}} g_{k\bar{j}}.
\end{gathered}
\tag{5.1.25}
$$

Після перепозначення індексів i та j один з одним, складаючи отримане з (5.1.22), матимемо (5.1.23), що і вимагалося довести.

Доведена вище теорема 5.1.2 знаходить серйозні застосування, зокрема, в питанні про існування келерових просторів L_n.

Дійсно, нагадаємо наступне означення [178]

Означення 5.1.1. *Псевдоріманові простори, в яких скалярна кривина нестала і тензор Річчі задовольняє умовам :*

$$R_{ij,k} = a_k g_{ij} + b_{(i} g_{j)k}, \tag{5.1.26}$$

де a_i, b_i — деякі вектори, називають просторами L_n.

Альтернуючи останні формули по j та k переконаємося, що простори L_n є конформно-гармонійними CM_n.

Тоді на підставі теореми 5.1.2 має місце:

Наслідок 5.1.2. *Не існує келерових просторів L_n.*

Введемо аналог просторів L_n таким чином:

Означення 5.1.2. *Простором L_n^* називатимемо келеровий простір, тензор Річчі якого задовольняє умові:*

$$R_{ij,k} = a_k g_{ij} + b_{(i} g_{j)k} + b_{(\bar{i}} g_{\bar{j})k}, \tag{5.1.27}$$

де a_i та b_i — деякі ненульові ковектори.

Згортанням співвідношень (5.1.27) з тензором g^{ij} і g^{ik} переконаємося, що ці ковектори задовольняють умовам:

$$a_i \equiv \frac{1}{n+2} R_{,i}; \qquad b_i \equiv \frac{1}{2(n+2)} R_{,i}. \tag{5.1.28}$$

Таким чином, в співвідношеннях (5.1.27) містяться об'єкти, обчислені за допомогою метричного і структурного тензорів, отже, ці співвідношення мають внутрішній характер.

Справедлива

Теорема 5.1.3. *Бохнер-гармонійні простори BM_n несталої скалярної кривини і тільки вони є просторами L_n^*.*

Доведення.

Підставивши (5.1.27) в (5.1.23) легко переконаємося, що простори L_n^* є Бохнер-гармонійними просторами BM_n.

З іншого боку, з (5.1.23),враховуючи лему 5.1.2 при

$$T_{ij} = R_{ij}; \quad \psi_i = -\frac{1}{2(n+2)} R_{,i}; \quad \tau_i = 0, \tag{5.1.29}$$

витікають умови (5.1.27).

Теорему доведено.

5.2 Геодезичні відображення спеціальних келерових просторів

Розглянемо геодезичні відображення келерових просторів [11, 12, 83, 106].

Теорема 5.2.1. *Бохнер-гармонійні простори L_n^* дозволяють нетривіальні геодезичні відображення на псевдоріманові простори.*

Доведення.

Нехай простір L_n^* дозволяє нетривіальне геодезичне відображення. Тоді в L_n^* мають розв'язок рівняння М.С. Сінюкова геодезичних відображень:

$$a_{ij,k} = \lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik} \tag{5.2.1}$$

відносно симетричного невиродженого тензора a_{ij} і ненульового вектору λ_i.

З досліджень Й. Мікеша [79] геодезичних відображень келерових просторів витікає, що вектор λ_i породжує збіжне векторне поле, тобто мають місце умови

$$\lambda_{i,j} = \mu g_{ij}, \tag{5.2.2}$$

де $\mu - const$.

Коваріантно продиференціюємо (5.2.2) по x^k, а потім проальтернуємо по j та k. Враховуючи тотожність Річчі, отримаємо:

$$\lambda_\alpha R^\alpha_{ijk} = 0. \tag{5.2.3}$$

Звідси згортанням зі g^{ij} знаходимо:

$$\lambda_\alpha R^\alpha_i = 0. \tag{5.2.4}$$

Коваріантно продиференціюємо (5.2.4) по x^j. Враховуючи (5.1.27) і (5.2.2), матимемо

$$\mu R_{ji} + a_j\lambda_i + \lambda^\alpha b_\alpha g_{ij} + b_i\lambda_j + \lambda^\alpha b_{\bar\alpha} g_{\bar i j} - b_{\bar i}\lambda_{\bar j} = 0, \tag{5.2.5}$$

де, як і раніше,

$$a_i \equiv \frac{1}{n+2} R_{,i}; \qquad b_i \equiv \frac{1}{2(n+2)} R_{,i}.$$

Віднімаючи зі (5.2.5) вираз, отриманий з (5.2.5) спряженням за індексами i та j, знаходимо після перетворень

$$a_j\lambda_i + a_i\lambda_j = 0. \tag{5.2.6}$$

Оскільки $a_i \neq 0$, то існує вектор ε^i такий, що $\varepsilon^\alpha a_\alpha = 1$. Згорнемо (5.2.6) зі ε^j і переконаємося, що вектори λ_i та a_i колінеарні, тобто $\lambda_i = \alpha a_i$. Але це можливо тільки, коли $\lambda_i = 0$.

Через отриману суперечність, теорему 5.2.1 доведено.

5.3 Основні рівняння теорії голоморфно-проективних відображень келерових просторів

Аналітично планарною кривою L келерового простору називають криву, задану рівняннями $x^h = x^h(t)$, таку, що виконуються наступні умови:

$$\frac{d\xi^h}{dt} + \Gamma^h_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta = \rho_1(t)\xi^h + \rho_2(t)F^h_\alpha\xi^\alpha, \tag{5.3.1}$$

де $\xi^h \equiv \dfrac{dx^h}{dt}$, ρ_1, ρ_2 - функції аргументу t.

Дифеоморфізм γ між точками келерових просторів K_n і $\bar{K}_n$ називається голоморфно-проективним відображенням, якщо кожна аналітично планарна крива K_n переходить в аналітично планарну криву $\bar{K}_n$ [70, 73, 74].

Необхідними і достатніми умовами голоморфно-проективних відображень K_n на $\bar{K}_n$ є виконання в загальній за відображенням системі координат умов [178]:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^h_{ij} &= \Gamma^h_{ij} + \delta^h_{(i}\psi_{j)} - \delta^h_{(\bar{i}}\psi_{\bar{j})}, \\ \bar{F}^h_i &= F^h_i, \end{aligned} \tag{5.3.2}$$

де $\psi_i \equiv \psi_{,i}$.

Помітимо, що в роботі [83] передбачалося апріорне збереження структури при голоморфно-проективних відображеннях. У роботах Й. Мікеша показана необхідність її збереження [163]. Голоморфно-проективні відображення K_n на $\bar{K}_n$ називають нетривіальними, якщо $\psi_i \neq 0$. Випадок, коли $\psi_i \equiv 0$, тобто, коли відображення є афінним, не розглядатимемо. Співвідношення (5.3.2) еквівалентні рівнянням [178]:

$$\bar{g}_{ij,k} = 2\psi_k \bar{g}_{ij} + \psi_{(i}\bar{g}_{j)k} + \psi_{(\bar{i}}\bar{g}_{\bar{j})k}, \tag{5.3.3}$$

де $\bar{g}_{ij}$ - метричний тензор простору $\bar{K}_n$. Як відомо, зі (5.3.2), за необхідністю випливає:

$$\bar{R}^h_{ijk} = R^h_{ijk} + \delta^h_k\psi_{ji} - \delta^h_j\psi_{ki} + \delta^h_k\psi_{\bar{j}i} - \delta^h_{\bar{j}}\psi_{\bar{k}i} + 2\delta^h_{\bar{i}}\psi_{\bar{j}k}; \tag{5.3.4}$$

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + (n+2)\psi_{ij}; \tag{5.3.5}$$

$$\bar{P}^h_{ijk} = P^h_{ijk}, \tag{5.3.6}$$

де $R^h_{ijk}(\bar{R}^h_{ijk})$ $R_{ij}(\bar{R}_{ij})$ $P^h_{ijk}(\bar{P}^h_{ijk})$ - тензори Рімана, Річчі і голоморфно-проективної кривини $K_n(\bar{K}_n)$

$$\psi_{ij} \equiv \psi_{i,\,j} - \psi_i\psi_j + \psi_{\bar{i}}\psi_{\bar{j}}. \tag{5.3.7}$$

Також виконуються співвідношення

$$\psi_{ij} = \psi_{ji} = \psi_{\bar{i}\bar{j}}. \tag{5.3.8}$$

З іншого боку, якщо K_n дозволяє нетривіальне голоморфно-проективне відображення на $\bar{K}_n$, то в K_n існує розв'язок наступних рівнянь :

$$a_{ij,k} = \lambda_i g_{ik} + \lambda_j g_{ik} + \lambda_{\bar{i}} g_{\bar{j}k} + \lambda_{\bar{j}} g_{\bar{i}k} \tag{5.3.9}$$

відносно тензора a_{ij}, що задовольняє умовам

$$a_{ij} = a_{ji}; \qquad a_{\bar{i}\bar{j}} = a_{ij}, \qquad deta_{ij} \neq 0 \tag{5.3.10}$$

і ненульового вектору λ_i. Для цього вектору за необхідністю виконуються умови:

$$\lambda_{i,\,j} = \lambda_{j,i} = \lambda_{\bar{i},\,\bar{j}}. \tag{5.3.11}$$

Розв'язки рівнянь (5.3.3) і (5.3.9) пов'язані співвідношеннями:

$$a_{ij} = e^{2\psi}\bar{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta i}; \tag{5.3.12}$$

$$\lambda_i = -e^{2\psi}\bar{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha i}\psi_\beta, \tag{5.3.13}$$

де $\left\|\bar{g}^{ij}\right\| = \|\bar{g}_{ij}\|^{-1}$.

З умов інтегрованості (5.3.9) отримаємо

$$n\lambda_{i\,,\,j} = \mu g_{ij} - a_{\alpha\beta} R^{\alpha\ \beta}_{.ij.} + a_{\alpha i} R^{\alpha}_{.j} \tag{5.3.14}$$

Співвідношення (5.3.14) представляє собою диференціальне рівняння відносно вектора λ_i, в яке входить невідома функція μ. Із умов інтегрованості (5.3.14) знайдемо

$$\mu_i = 2\lambda_\alpha R^{\alpha}_{i}. \tag{5.3.15}$$

В.В. Домашев та Й. Мікеш довели [120], що, для того, щоб келеровий простір K_n допустив нетривіальні голоморфно-проективні відображення необхідно і достатньо, щоб система диференціальних рівнянь (5.3.9), (5.3.14), (5.3.15) мала нетривіальний розв'язок відносно

$$a_{ij} = a_{ji} = a_{\bar{j}\bar{i}}, \qquad \lambda_i \neq 0 \qquad \text{та} \qquad \mu.$$

Розглянемо келерові простори K_n, які дозволяють конциркулярні відображення. Тоді в K_n має місце рівняння

$$\upsilon_{i\,,\,j} = \rho g_{ji}. \tag{5.3.16}$$

Якщо келеровий простір дозволяє геодезичне відображення зі збереженням тензора Ейнштейна, то в ньому

$$\lambda_{i\,,\,j} = \mu g_{ji}. \tag{5.3.17}$$

Конструюючи тензор a_{ij} наступним чином

$$a_{ij} = \alpha g_{ji} + \upsilon_i \upsilon_j + \upsilon_{\bar{i}} \upsilon_{\bar{j}}, \tag{5.3.18}$$

де α — деяка стала;
переконаємося, що для a_{ij} виконуються умови (5.3.9).

Теорема 5.3.1. *Якщо келеровий простір K_n дозволяє конциркулярні відображення і вектор υ_i, відмінний від коваріантно сталого, то воно дозволяє і нетривіальні голоморфно-проективні відображення.*

Будуючи аналогічну конструкцію для вектора λ_i та враховуючи (5.3.17), одержимо

Теорема 5.3.2. *Якщо келеровий простір K_n дозволяє геодезичне відображення зі збереженням тензора Ейнштейна і вектор λ_i — відмінний від коваріантно сталого, то K_n дозволяє і нетривіальні голоморфно-проективні відображення.*

Із (5.3.5) для тензорів Ейнштейна келерових просторів K_n і $\bar{K}_n$ отримаємо

$$\bar{E}_{ij} - E_{ij} + \frac{\bar{R}}{n}\bar{g}_{ij} = \frac{R}{n} + (n+2)\psi_{ij}. \tag{5.3.19}$$

Якщо при голоморфно-проективних відображеннях зберігається тензор Ейнштейна, тобто

$$\bar{E}_{ij} = E_{ij}, \tag{5.3.20}$$

то рівняння (5.3.19) приймають вигляд

$$B\bar{g}_{ij} = Bg_{ij} + \psi_{ij}, \tag{5.3.21}$$

де $B = \dfrac{R}{n(n+2)}$.

Підставляючи (5.3.21) в (5.3.4) і групуючи з урахуванням (5.1.7), переклонаємося, що

$$\bar{H}^h_{ijk} = H^h_{ijk}. \tag{5.3.22}$$

З іншого боку, якщо виконуються умови (5.3.22), то, згортаючи, одержимо (5.3.20) і, таким чином, доведено теорему [48, 135]:

Теорема 5.3.3. *Для того, щоб при голоморфно-проективних відображеннях келерових просторів зберігався тензор Ейнштейна необхідно и достатньо, щоб при цьому відображенні зберігався тензор голоморфно-секційною кривини.*

Коваріантно диференціюючи (5.3.13), враховуючи (5.3.9) і (5.3.21), одержимо

$$\lambda_{i\,,\,j} = \mu g_{ij} + B a_{ij}. \tag{5.3.23}$$

Вивчаючи умови інтегрованості (5.3.23), при $B = const$, переконаємося, що

$$\mu_{,\,i} = 2B\lambda_i. \tag{5.3.24}$$

Таким чином, доведено:

Теорема 5.3.4. *Якщо келеровий простір K_n дозволяє голоморфно-проективні відображення зі збереженням тензора Ейнштейна, то в ньому, за необхідністю, має розв'язок система рівнянь* (5.3.9), (5.3.23), (5.3.24) *відносно тензора a_{ij}, вектора λ_i та інваріанта μ.*

Келерові простори, в яких вектор λ_i задовольняє умовам (5.3.23), позначають $K_n(B)$ [53, 181].

Враховуючи означення сталої B, переконаємося в справедливості наслідку:

Наслідок 5.3.1. *Якщо келеровий простір K_n дозволяє нетривіальні голоморфно-проективні відображення зі збереженням тензора Ейнштейна, то K_n — простір сталої скалярної кривини.*

Таким чином, методи, які розроблені в теорії відображень псевдоріманових просторів, перенесені в теорію голоморфно-проективних відображень келерових просторів.

Висновки з розділу 5

Оскільки додаткові структури псевдоріманових просторів в основному мають властивість не дозволяти геодезичних відображень, дослідники звертались до різного роду узагальнень [88, 89, 98].

Найбільш відомою з них є теорія голоморфно-проективних відображень келерових просторів, тобто відображень, при яких зберігаються аналітично планарні криві і комплексні структури келерового простору.

Доведено, що виділені в теорії псевдоріманових просторів типи спеціальних просторів зводяться до одного типу, і така спеціалізація є неефективною.

Запропонований новий аналогічний спосіб розбиття на спеціальні класи келерових просторів з урахуванням комплексної структури.

Досліджено голоморфно-проективні відображення спеціальних келерових просторів з обмеженнями на тензор Бохнера, Річчі, Рімана.

Зокрема доведено, якщо келеровий простір K_n дозволяє геодезичне відображення зі збереженням тензора Ейнштейна і вектор λ_i — відмінний від коваріантно сталого, то K_n дозволяє і нетривіальні голоморфно-проективні відображення.

А також, що для того, щоб при голоморфно-проективних відображеннях келерових просторів зберігався тензор Ейнштейна необхідно и достатньо, щоб при цьому відображенні зберігався тензор голоморфно-секційної кривини.

Висновки

Маючи довгу історію, теорія відображень отримала нове дихання завдяки тензорним методам дослідження. Введене сто років тому поняття афінної зв'язності, дозволило по-новому поглянуть на класичні геометричні задачі.

Модифікуючи методику Нордена, знайдено формули, що пов'язують основні тензори, тензор деформації, тензор Рімана, тензор Річчі та їх перші і другі коваріантні похідні для просторів A_n та $\bar{A}_n$, які пов'язані заданим відображенням. В цих формулах присутні як об'єкти A_n, так і $\bar{A}_n$ з коваріантними похідними по відповідних зв'язностях. Для спрощення, введене поняття укороченого відображення і його спеціального випадку — половинного відображення. Зв'язність, яка випливає при половинному відображенні, названа середньою.

Попередні формули при переході до коваріантних похідних в середній зв'язності значно спрощуються.

На прикладі відображення, що зберігає тензор Вейля, показано, як задачі такого типу зводяться до систем диференціальних рівнянь.

Через значні технічні труднощі локальних розв'язків задач такого типу виникає необхідність спеціалізації просторів або відображень.

Доведено, як впливає на характер відображення обмеження на внутрішні об'єкти просторів афінної зв'язності A_n. А саме, якщо в двох просторах афінної зв'язності A_n та $\bar{A}_n$ співпадають значення тензорів Рімана R^1_{223} та $\bar{R}^1_{223}$, то відображення за необхідністю набувають спеціального характеру.

Далі розглянуті системи диференціальних рівнянь першого порядку типу Коші.

Відмічена можливість та особливості використання тотожності Річчі в якості умов інтегрування вказаних систем.

Введено поняття фундаментальних відображень. Коли $\underset{1}{\alpha} = 1$, а $\underset{2}{\alpha} = \underset{3}{\alpha} = 0$, то фундаментальні відображення стають геодезичними, тобто при них зберігаються геодезичні лінії.

Розглянуті геодезичні відображення просторів афінної зв'язності на пседоріманові простори.

Доведено, що вивчення геодезичних просторів афінної зв'язності на псевдоріманові простори можна вкоротити і звести до розгляду геодезичних відображень еквіафінних просторів на псевдоріманові простори.

$$\begin{tikzcd}
A_n \arrow[rr] \arrow[dr] & & V_n \\
& EA_n \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Спеціалізація псевдоріманових просторів, як засіб введення додаткових обмежень в перевизначені системи рівнянь, має два основних джерела. По-перше, це геометричні умови об'єктів, що досліджуються, по-друге, це технологічні можливості методів дослідження. Враховуючи ці засоби та маючи на увазі дослідження відображень, запропоновано метод спеціалізації псевдоріманових просторів по типу внутрішніх об'єктів.

Серед псевдоріманових просторів, що дозволяють спеціальний вид метрики в деякій системі координат, виділені звідні та напівзвідні простори. Вивчені їх тензорні ознаки та, спираючись на це, деякі геометричні властивості.

У теорії спеціальних псевдоріманових просторів особливе місце займають симетричні і рекурентні простори. Узагальнення цих просторів йшло в основному в двох напрямах: збільшення порядку коваріантних похідних і розгляд в якості симетричних (рекурентних) інших тензорів. Природним чином виник новий тип рекурентності — слабка симетричність.

Якщо узагальнення рекурентних псевдоріманових просторів вести шляхом алгебраїчних умов, то ми прийдемо до псевдоріманових просторів із спеціальною векторною оболонкою. Їх вивчення ведеться з допомогою удосконалення метода В. Кайгородова. Узагальнення симетричних псевдоріманових просторів приводить до гармонійних просторів. Для двохвалентних тензорів найбільш вдалою є запропонована С. Степановим для тензора енергії–імпульсу методика розбиття на класи Ω. Модифікувавши її, застосовуємо для спеціалізації двічі коваріантних внутрішніх тензорів.

Розглянуті геодезичні відображення спеціальних псевдоріманових просторів. Особливу увагу приділено вивченню спеціальних геодезичних відображень, при яких тензор $\varphi_{ij} \overset{def}{=} \varphi_{i,j} - \varphi_i\varphi_j$, утворений вектором, що задає дане відображення, є лінійною комбінацією метричних тензорів геодезично відповідних псевдоріманових просторів, тобто

$$\bar{B}\bar{g}_{ij} - Bg_{ij} = \varphi_{ij}.$$

На такі псевдоріманові простори звернули увагу Г. Кручкович та

Й. Мікеш, виходячи з різних міркувань.

Знайдено особливість такого типу відображень, а саме, якщо таке відображення дозволяє заданий простір V_n, то він не дозволяє ніяких інших відображень.

А простори, що належать до його геодезичного класу, також дозволяють лише геодезичні відображення з умовою, вказаною вище.

Доведено, що до таких просторів належать всі псевдоріманові простори, степінь мобільності яких, більше двох. Вивчено деякі їх геометричні властивості. Спираючись на це, доведено, що чотирьохвимірні простори Ейнштейна, відмінні від просторів сталої кривини, не дозволяють нетривіальних геодезичних відображень. Якщо розмірність простору Ейнштейна більше чотирьох, то існують такі простори, відмінні від просторів сталої кривини, що дозволяють нетривіальні геодезичні відображення. Наведено приклад таких просторів, на якому показано, що сигнатура простору не впливає на його властивість — дозволяти чи не дозволяти геодезичні відображення. Також, для прикладу, досліджено геодезичні відображення просторів Казнера.

При спеціальних значеннях параметрів фундаментальні відображення стають конформними.

Вивчені простори, в яких при геодезичних відображеннях зберігаються відповідні об'єкти. Наведено умови, яким задовольняють псевдоріманові простори, в яких при геодезичних відображеннях зберігаються внутрішні тензори, їх коваріантні похідні та інші властивості.

Вивчення конформних відображень псевдоріманових просторів — це одна з актуальних задач сучасної диференціальної геометрії.

Розглянуті конформні відображення псевдоріманових просторів на простори Ейнштейна. Оцінена лакуна в розподілі степенів мобільності псевдоріманових просторів відносно конформних відображень на простори Ейнштейна.

Доведено, якщо степінь мобільності псевдоріманового простору V_n відносно конформних відображень на простори Ейнштейна більше одиниці, то простір Ейнштейна дозволяє конциркулярне векторне поле; степінь мобільності псевдоріманового простору V_n відносно конформних відображень на простори Ейнштейна на одиницю більша від кількості лінійно незалежних конциркулярних векторних полів, що їх дозволяє простір Ейнштейна; серед просторів другої лакунарності відносно конформних відображень на простори Ейнштейна не може бути просторів Ейнштейна.

Вивчені конформні відображення із збереженням деяких спеціальних тензорів. Одержані основні рівняння, що дають можливість визначити: дозволяє або не дозволяє цей псевдоріманів простір конформні відображення.

Інваріантні перетворення із збереженням геодезичних дозволяють довести, що існує безліч псевдоріманових просторів різних степенів мобільності відносно геодезичних відображень.

Розроблені методи застосовані в теорії геодезичних деформацій гіперповерхонь довільних псевдоріманових просторів.

Розв'язок зведено до вивчення системи диференціальних рівнянь типу Коші в коваріантних похідних. Запропоновані формули переходу дозволяють переносити результати отримані в теорії геодезичних відображень на дослідження геодезичних деформацій.

Солітони Річчі, що природно, виникають із теорії потоків Річчі, дають один тип спеціальних псевдоріманових просторів. Зокрема доведено, що в псевдоріманововому просторі V_n з градієнтним задаючим вектором сталої довжини скалярна кривина стала тоді і тільки тоді, коли солітон Річчі стійкий.

Обґрунтовано, що, якщо в псевдоріманововому просторі V_n існує більше ніж одне суттєве векторне поле, що задає солітон Річчі, то цей простір еквідистантний, а також, що стала λ однозначно визначається для псевдоріманових просторів V_n, відмінних від гармонійних, що дозволяють солітони Річчі.

Ще одним видом фундаментальних відображень є голоморфно-проективні відображення, тобто відображення, при яких зберігаються аналітично-планарні криві.

Досліджено голоморфно-проективні відображення спеціальних келерових просторів з обмеженнями на тензор Бохнера, Річчі, Рімана.

Всі основні результати дисертації наведені з повними та строгими математичними доведеннями. Вони носять теоретичний характер. Одержані конструкції, методи та методології можуть бути використані в різних розділах диференціальної геометрії, загальній теорії відносності та механіці суцільного середовища.

Список використаної літератури

1. Aminova A. V. Projective transformations of pseudo-Riemannian manifolds/ A. V. Aminova // J. Math. Sci. — 2003. — №3. — P. 367-470.

2. Akbar-Zadeh H., Couty R. Espaces a tenseur de Ricci parailele admetant des transformations projectives/ H. Akbar-Zadeh, R. Couty // Rend. Mat. — 1978. — Vol.11, №1. — P. 85-96.

3. Beltrami E. Risoluzione del problema: riportari i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentante da linee rette. / E. Beltrami// Ann. Mat. — 1865. — Opere 1, №7. — P. 185-204.

4. Beltrami E. Teoria fondamentale degli spazi di curvature constante/ E. Beltrami //Ann. Mat. — 1868. — Vol.2, №2. — P. 232-255.

5. Bochner S. Curvature in hermitian metric/ S. Bochner// Bull. Am. Math. Soc. — 1947. — №53. — P. 179-195.

6. Brinkmann H. W. Einstein spaces which mapped conformally on each other/ H. W. Brinkmann. — Math. Ann. — 1925. — 94p.

7. Bryant R., Dunajski M., Eastwood M. Metrisability of two-dimensional projective structures /R. Bryant, M., Dunajski, M. Eastwood // ArXiv: 0801.0300vl [math.DG] 1 Jan. — 2008.

8. Cartan H. Theorie Elementaire des Fonctions Analytiques D'une ou Plusieurs Variables Complex/Cartan H.— Paris, Hermann. — 1961.— 229p.

9. Coburn N. Unitary spaces with corresponding geodesic/ N. Coburn // Bull. Am. Math. Soc. — 1941. — №47. — P. 901-910.

10. Cocos M. A note on symmetric connections/ M. Cocos // J. Geom. Phys. — 2006. — Vol.56, №3. — P. 337-343.

11. Couty R. Transformations projectives sur un espace d'Emstem complect/ R. Couty // C. R. Acad. Sci. — 1961. — Vol.252, №8. — P. 1096-1097.

12. Couty R. Transformations projectives des varietes Presque kahleriennes/ R. Couty // C. R. Acad. Sci. — 1962. — Vol.254, №24. — P. 4132-4134.

13. Defever F., Deszcz R. A note on geodesic mappings of pseudosymmetric Riemannian manifolds/ F. Defever, R. Deszcz // Colloq. Math. — 1991. — №62. — P. 313-319.

14. Deszcz R., Hotlos M. On geodesic mappings in pseudo-symmetric manifolds/ R. Deszcz, M. Hotlos // Bull. Inst. Math. Sinica. — 1988. — Vol.16, №3. — P. 251-262.

15. Dini U. Sobre un problema che is presenta nella theoria generale delle rappresentazioni geografiche di una superficie su di un'altra/U. Dini//Ann. Mat.— 1869. — S.2,III. — P. 269-293.

16. Eastwood M. Notes on projective differential geometry /M. Eastwood // IMA Math, Appl. — 2008. — Vol.144. — P. 2-16.

17. Eastwood M., Matveev V. Metric connections in projective differential geometry/M. Eastwood, V. Matveev // IMA Math. Appl. — 2008. — Vol.144. — P. 339-350.

18. Eisenhart L. P. Riemannian geometry/L.P. Eisenhart.— Princeton Univ. Press. — 1926. — 272p.

19. Eisenhart L. P. Non-Riemannian Geometry/L.P. Eisenhart.— Amer. Math. Soc, N. Y. — 1927.— 184p.

20. Eisenhart L. P. Continuous Groups of Transformations/L.P. Eisenhart.— Princeton Univ. Press, London. — 1933.—319p.

21. Fialkow A. Conformal geodesic /A. Fialkow // Trans. Am. Math. Soc. — 1939. — Vol.45. — P. 443-473.

22. Florea D. Spatii Riemann in correspondenta geodesica/D. Florea // Stud. Si cerc. mat. — 1988. — Vol.40, №6. — P. 467-470.

23. Fesko M. Differential Geometry and Lie Groups for Physicists/ Fesko M. — Gambridge University Press.— 2006. — Vol.XV. — 697p.

24. Formella S. On gedesic mappings in some riemannian and pseudoriemannian manifolds/ S. Formella // Tensor. — 1987. — №46. — P. 311-315.

25. Formella S. Generalized Einstein manifolds/ S. Formella // Rend. Circ. Mat. Palermo. — 1990. — №22. — P. 49-58.

26. Fubini G. Sui gruppi transformazioni geodetiche/G. Fubini // Mem. Acad.Sci.Torino. — 1903. — Vol.53, №2. — P. 261-313.

27. Gavrilcenko M. L. Geodesic deformations of Riemannian spaces /M.L. Gavrilcenko //Diff. Geom. and Its Appl. Int. Conf. Brno. — 1989. — P. 47-53.

28. Gavrilchenko M. L., Kinzerska N. N. Infinitesimal geodesic deformations of the totally geodesic manifolds /M. L. Gavrilchenko, N. N. Kinzerska// Differ. Geom. and Appl.: Proc. 7th Int. Conf., DGA 98. Brno: Masaryk Univ. — 1999. — P. 185-189.

29. Glodek W. A note on riemannian spaces with recurrent projective curvature /W. Glodek // Pr. nauk. Inst, matem. i fiz. teor. Ser. stud, mater. — 1970. — №1. — P. 9-12.

30. Gray A., Hervella L. M. The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants /A. Gray, L.M. Hervella // Ann. Mat. Pura Appl. — 1980. — Vol.123, №4. — P. 35-58.

31. Hamilton R. S. The Ricci flow on surfaces/R. S. Hamilton// Math. and general relativity. Santa Cruz, CA. — 1986. — P. 237-262.

32. Hinterleitner I., Mikes J. On F-planar mappings of spaces with affine connections /I. Hinterleitner, J. Mikes // Note Mat. — 2007. — Vol.27, №1. — P. 111-118.

33. Kahler E. Uber eine bemerkenswerte Hermitische Metrik/E. Kahler // Abh. Math. Semin. Hamburg. Univ. — 1933. — №9. — P. 173-186.

34. Katzin G., Levine J. Applications of Lie derivatives to symmetries, geodesic mappings and .first integrals in Riemannian spaces/G.N. Katzin, J. Levine // Colloq. Math. — 1972. — №26. — P. 21-38.

35. Kiosak V. A. Geodesic mapping of the special Riemannian spaces/ V. A. Kiosak //Colloq. on Differ. Geom., Eger (Hungaria). — 1989. — P. 15-17.

36. Kiosak V.A. On the Theory of Geodesic Mappings of Einstein Spaces and their Generalizations/V.A. Kiosak, J. Mikes, I. Hinterleitner// Proceedings of American Institute of Physics. —2006. — Vol.861. — P. 428-435.

37. Kiosak V. Geodesic mappings of manifolds with affine connection /V. A. Kiosak, J. Mikes, O. Vanzurova. — Palacky University, Olomouc. — 2008. — 220p.

38. Kiosak V.A. φ(Ric)–Vector Fields sn Riemannian Spaces/ V.A. Kiosak, I. Hinterleitner //Archivum-mathematicum (Brno). — 2008. — Vol.44. — P. 385-390.

39. Kiosak V.A. On geodesic mappings of affine connection manifolds/V. A. Kiosak, J. Mikes, I. Hinterleitner // Acta Physica Debrecina (ISSN 1789-6088).— 2008. — Vol.42. — P. 19-28.

40. Kiosak V.A. There are no conformal Einstein rescalings of complete pseudo-Riemannian Einstein metrics/V.A. Kiosak, V.S.Matveev// C. R. Acad. Sci. Paris.— 2009. — Ser. I 347. — P. 1067-1069.

41. Kiosak V.A. Fubini Theorem for pseudo-Riemannian metrics/V. A. Kiosak, A. Bolsinov, V. S. Matveev //Journal of the London Mathematical Society. — 2009. — Vol.80. — №2. — P. 341-356.

42. Kiosak V.A. Complete Einstein metrics are geodesically rigid/V.A. Kiosak, V.S. Matveev // Comm. Math. Phys. — 2009. — Vol.289. — №1. — P. 383-400.

43. Kiosak V.A. (Ric)-Vector Fields on Conformally Flat Spaces/V.A. Kiosak, I. Hinterleitner // Proceedings of American Institute of Physics. — 2009. — Vol.1191. — P. 98-103.

44. Kiosak V.A. Proof of the Projective Lichnerowicz Conjecture for Pseudo-Riemannian Metrics with Degree of Mobility Greater than Two/V.A. Kiosak, V.S.Matveev//Communications in Mathematical Physics, Springer. — 2010. — Vol.297. — P. 401-426.

45. Kiosak V.A. Confomal mappings of Riemannian Spaces which Preserve the Einstein tensor/V. Kiosak, O. Chepurna, J.Mikes//Journal of Applied Mathematics. — 2010. — Vol.III, №1. — P. 253-258.

46. Kiosak V.A. On Geodesic Mappings Preserving the Einstein tensor/V. Kiosak, O. Chepurna, J. Mikes // Acta Univ. Palacki. Olomouc., fac. rer. nat., Mathematika.— 2010. — Vol.49, №2. — P. 49-52.

47. Kiosak V.A. Special Einstein's equations on Kahler manifolds /V. A. Kiosak, I. Hinterleitner// Archivum Mathematicum.— 2010. — Vol.46, №5. — P. 333–337.

48. Kiosak V. The only closed Kahler manifold with degree of mobility >2 is (CP(n), g-Fubini-Study/V. Kiosak, V. Matveev, A. Fedorova, S. Rosemann //Proc. London Math. Soc.— 2012. — Vol.105, №1. — P. 153-188.

49. Kiosak V. There exist no 4-dimensional geodesically equivalent metrics with the same stress-energy tensor/V. Kiosak, V. Matveev //J. Geom. Phys. — 2014. — Vol.78. — P. 1-11.

50. Kobayashi S. Transformations groups in differential geometry/ S. Kobayashi. - Berlin: Springer-Verlag.— 1972. — 182p.

51. Kobayashi S., Nomizu K. Foundation of differential geometry/ S. Kobayashi, K. Nomizu. — N.Y.-L.: Interscience.— 1963. — Vol.1. — 344p.; N.Y.-L.: Interscience. — 1969. — Vol.2. — 416p.

52. Lagrange J. L. Sur la construction des cartes geographiques/J.L. Lagrange. — Noveaux Memoires de l'Academie des Sciences et Bell-Lettres de Berlin. — 1779.

53. Al Lamy Raad J., Mikes J., Skodova M. On holomorphically projective mappings from equiaffine generally recurrent spaces onto Kaehlerian spaces /J. Al Lamy Raad, J. Mikes, M. Skodova// Arch. Math.(Brno).— 2006.— №42. — P. 291-299.

54. Levi-Civita T. Sulle transformationi delle equazioni dinamiche/ T. Levi-Civita //Ann. Mat. Milano. — 1896. — Ser. 2, №24. — P. 255–300.

55. Lichnerowicz A. Courbure, nombres de Betti et espaces symmetriques/A. Lichnerowicz // Am. Math. Soc. — 1952. — №2. — P. 216–223.

56. Lie Jian-cheng, Du Li. A note on the 2-harmonic submanifolds of quasi constant curvature spaces / Jian-cheng Lie, Li Du // J. Northw. Norm. Univ. Natur. Sci. — 2008. — Vol.44, №2. — P. 18-21.

57. Matveev V.S. Beltrami problem, Lichnerowicz-Obata conjecture and applications of integrable systems in differential geometry/V.S. Matveev //Tr. Semin. Vektorn. Tenzorn. Anal/—2005.—Vol.26. — P. 214–238.

58. Matveev V.S. Lichnerowicz-Obata conjecture in dimension two/V.S. Matveev //Comm. Math. Helv. — 2005. — Vol.80, №.3. — P. 541-570.

59. Matveev V.S. On degree of mobility of complete metrics/V.S. Matveev //Compt. Math. — 2006. — Vol.43. — P. 221–250.

60. Matveev V.S. On the rigidity of magnetic systems with the same magnetic geodesics/V.S. Matveev, K. Burns// Proc. Amer. Math. Soc. — 2006. — Vol.134. — P. 427-434.

61. Matveev V.S. Strictly non-proportional geodesically equivalent metrics have zero topological entropy/V.S. Matveev, B. Kruglikov// Ergodic Theory and Dynamical Systems. — 2006.— Vol.26, №. 1. — P. 247-266.

62. Matveev V.S. On vanishing of topological entropy for certain integrable systems/V.S. Matveev, B. Kruglikov// Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. — 2006. — Vol.12. — P. 19-28.

63. Matveev V.S. Geometric explanation of the Beltrami Theorem/V.S. Matveev //Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. — 2006. — Vol.3, №3. — P. 623-629.

64. Matveev V.S. Metric Connections in Projective Differential Geometry/V. S. Matveev, M. Eastwood//Symmetries and Overdetermined Systems of Partial Differential Equations (Minneapolis, MN, 2006), Springer, New York. — 2007. — Vol. Math. Appl. Vol.144. — P. 339–351.

65. Matveev V.S. Gallot-Tanno theorem for pseudo-Riemannian metrics and a proof that decomposable cones over closed complete pseudo-Riemannian manifolds do not exist/V.S. Matveev //J. Differential Geometry and Its Applications. — 2010. — Vol.28, №2. —P. 236-240.

66. Matveev V.S. Differential invariants for cubic integrals of geodesic flows on surfaces/V.S. Matveev, V. V. Shevchishin//J. Geom. Phys. — 2010. — Vol.60, №6-8. —P. 833-856.

67. Matveev V.S. Two-dimensional superintegrable metrics with one linear and one cubic integral/V.S. Matveev, V. Shevchishin// J. Geom. Phys.—2011.— Vol.61, №8.— P. 1353-1377.

68. Matveev V.S. Geodesically equivalent metrics in general relativity/V. S. Matveev //J. Geom. Phys. — 2012. — Vol.62. — P. 675-691.

69. Matveev V.S. Local normal forms for geodesically equivalent pseudo-Riemannian metrics/V.S. Matveev, A. Bolsinov// Trans. Amer. Math. Soc. — 2015. — Vol.367. — P. 6719-6749.

70. Matveev V.S. Conification construction for Kahler manifolds and its application in c-projective geometry/V.S. Matveev, S. Rosemann// Adv. Math. — 2015. — Vol.274. — P. 1-38.

71. Matveev V.S. The degree of mobility of Einstein metrics/V. S. Matveev, S. Rosemann// J. Geom. Phys. — 2016. — Vol.99. — P. 42-56.

72. Matveev V.S. On the number of nontrivial projective transformations of closed manifolds/V.S. Matveev //Fundam. Prikl. Mat. — 2015. — Vol.20. — P. 125-131.

73. Matveev V.S. Cones, curvature and high degree of c-projective moblity of Kahler metrics with Hamiltonian 2-forms/V.S. Matveev, D. Calderbank, S. Rosemann// Compositio Math. — 2016. — Vol.152. — P. 1555-1575.

74. Matveev V.S. Submaximal c-projective structures/V. S. Matveev, B. Kruglikov, D. The// Int. J. Math. (1650022) — 2016. — Vol.27. — 34 p.

75. Mikes J. On an order of special transformation of Riemannian spaces/ J. Mikes // Proc. Conf. Diff. Geom. Appl. Dubrovnik. — 1988. — P. 199-208.

76. Mikes J. On existence of nontrivial global geodesic mappings of n-dimensional compact surfaces of revolution/ J. Mikes // Diff. Geom. and Its Appl. Singapore: World Scientific. — 1990. — P. 129-137.

77. Mikes J. F-planar mappings and transformations/ J. Mikes // Differ. Geom. and Appl.: Proc. Conf, Aug. 24-30. Brno. — 1986. — P. 245-254.

78. Mikes J. Geodesic mappings of affine-connected and Riemannian spaces/ J. Mikes // J.Math. Sci. — 1996. — Vol.78, №3. — P. 311-333.

79. Mikes J. Holomorphically projective mappings and their generalizations/ J. Mikes // J. Math. Sci. — 1998. — Vol.89, №3. — P. 1334-1353.

80. Mikes J. On geodesic mappings onto Riemannian spaces/ J. Mikes. — Res. Abstr. the First Int. Conf. of Math, in Al-Baath Univ. Homs.Syria. — 2008. — 19p.

81. Mikes J. One remark on variational properties of geodesies in pseudoriemannian and generalized Finsler spaces/ J. Mikes, I. Hinterleitner, A. Vanzurova // 9 Int. Conf. On Geometry, Integrability and Quantization. June 8-13, 2007, Varna, Bulharka. SOFTEX, Sofia. — 2008. — P. 261-264.

82. Mikes J. Concircular vector fields on compact manifolds, with affine connections/ J. Mikes, M. Skodova // Publ. De la RSME. — 2007. — №10. — P. 302-307.

83. Mitsuru K. On projective diffeomorphismus not necessarily preserving complex structure /K. Mitsuru // Math. J. Okayama Univ. — 1977. — Vol.19, №2. — P. 183-191.

84. Penrose R.Spinors and space-time/ R. Penrose, W. Rindler// Cambridge Monographs on Math. Phys. Cambridge Univ. Press. — 1986. — Vol.1: Two-spinor calculus and relativistic fields. — Vol.10. — 458p.; Vol.2: Spinor and twistor methods in space-time geometry. — Vol.9. — 501p.

85. Reynolds R. F. Projective-symmetric spaces /R. F. Reynolds, A. H. Thompson // J. Austral. Math. Soc. — 1967. — Vol.7, №1. — P. 48-54.

86. Roter W. A note infinitesimal projective transformations in recurrent spaces of second order /W. Roter // Zesz. Nauk. Politechn.Wroclawsk. — 1968. — №197. — P. 87-94.

87. Schouten J. A. Introduction into new Methods in Differential Geometry/ J. A. Schouten, D. J. Struik// Germ. Einfuhrung in die neueren Methoden der Differentialeometrie. — 1935.

88. Shiha M. On the theory of holomorphically-projective mappings of parabolically-Kahlerian spaces/M. Shiha// Differ. Geom. and Appl. — 1992. — P. 157-160.

89. Shiha M. On holomorphically protective fiat parabolically Kahlerian spaces /M. Shiha, J. Mikes // Contemporary Geom. And Related Topics. Cigoja Publ. Сотр. — 2006. — Vol.250. — P. 467-474.

90. Simonescu C. Varietati Riemann in corepondenta geodezica definite pe un suport compact / S. Simonescu // Lucr. sti. Inst, politech. Brasov. Fac. mec. — 1961. — №5. — P. 15-19.

91. Tanno S. Same differential equations on Riemannian manifolds/S. Tanno//J.Math. Soc. Jap. — 1978.— Vol.30, №3. — P. 509-531.

92. Takeno H. Theory of the spherically symmetric spacetimes/H. Takeno, M. Ikeda// VII. Space-times with corresponding geodesies. J. Sci. Hiroshima Univ. — 1953. — A17, №1. — P. 75-81.

93. Thomas T. Y. On projective and equiprojective geometries of paths/T. Y. Thomas // PWC. Nat. Acad. Sci. USA. — 1925. — №11. — P. 198-203.

94. Venzi P. On geodesic mapping on Riemannian and pseudoriemannian manifolds/P. Venzi// Tensor. — 1978. — Vol.32, №2.— P. 192-198.

95. Venzi P. Geodatische Abbildungen in Riemanscher Mannigfaltigkeiten/P. Venzi // Tensor. — 1979. — №33. — P. 313-321.

96. Venzi P. On concircular mapping in Riemannian and pseudo-Riemannian manifolds with symmetry conditions/P. Venzi //Tensor. — 1979. — №33. — P. 109-113.

97. Venzi P. On geodesic mappings in Riemannian and pseudo-Riemannian manifolds/P. Venzi //Tensor. — 1979. — №33. — P. 23-28.

98. Venzi P. Geodatische Abbildungen mit $\lambda_{ij} = \Delta g_{ij}$ /P. Venzi //Tensor. — 1979. — Vol.34, №2. — P. 230-234.

99. Venzi P. On q-projectively recurrent spaces/P. Venzi // Rend. Circ. Math. Palermo. — 1981. — Vol.30, №3. — P. 421-434.

100. Venzi P. Uber konforme und geodatische Abbildungen/P. Venzi // Result. Math. — 1982. — Vol.5, №2. — P. 184-198.

101. Venzi P. The metric $ds^2 = F(u)du^2 + G(u)d\sigma^2$ and an application to concircular mappings/P. Venzi // Util. Math. — 1982. — №22. — P. 221-233.

102. Venzi P. Klassifikation der geodatischen Abbildungen mit $\bar{Ric} - Ric = \Delta g$ /P. Venzi // Tensor. — 1982. — №37. — P. 137-147.

103. Venzi P. The geodesic mappings in Riemannian and pseudo-Riemannian manifolds/P. Venzi // Lect. Notes Phys. — 1986. — 262. — P. 512-516.

104. Vranceanu G. Proprietati globale ale spatiilor bui Riemann cu conexiune abina constanta /G. Vranceanu // Stud. si cerc. mat. Acad. RPR. — 1963. — Vol.14, №1. — P. 7-22.

105. Vries H. L. Uber Riemannsche Raume die infinitesimale konforme Transformationen gestatten /H.L. Vries // Math. Z. — 1954. — Vol.60, №3.— P. 328-347.

106. Westlake W. J. Hermitian spaces in geodesic correspondence/W.J. Westlake //Proc.Am. Math. Soc. — 1954. — Vol.5, №2. — P. 301-303.

107. Weyl H. Zur Infinitesimalgeometrie Einordnung der projectiven und der konformen Auffassung /H. Weyl // Gottinger Nachtr. — 1921. — P. 99-112.

108. Yano K. Concircular geometry, I-IV/K. Yano // info Proc. Imp. Acad. Tokyo. — 1940. — №16. — P. 195-200; 354-360; 442-448; 505-511.

109. Yano K. Differential geometry on complex and almost complex spaces /K. Yano.— Oxford: Pergamon Press. — 1965. — 326 p.

110. Yano K. Sur la correspondence projective entre deux espaces pseudohermitens/ K. Yano // C. R. Acad. Sci. — 1956. — Vol.239. — P. 1346-1348.

111. Yano K. Curvature and Betti numbers /K. Yano, S. Bochner//Ann. Math. Stud. — 1953. — Vol.32. — 190 p.

112. Абдуллин В.Н. n-мерные римановы пространства, допускающие поля ковариантно постоянных симметрических тензоров общего типа/В. Н. Абдуллин//Изв.вузов Матем. — 1970. — №6. — С. 3-15.

113. Аминова А. В. Проективно-групповые свойства некоторых римановых пространств/А. В. Аминова//Тр. геом. семин. - М.: ВИНИТИ. — 1974. — №6. — С. 295-316.

114. Аминова А. В. Группы преобразований римановых многообразий/А. В. Аминова// Итоги науки и техн. Проблемы геометрии. М.: ВИНИТИ. — 1990. — №22. — С. 97-166.

115. Аминова А. В. Проективные и аффинные движения, определяемые концциркулярными векторными полями/А. В. Аминова, Т. П. Тогулева//Гравитация и теория относительности. Изд-во Казанск. ун-та. — 1975. — №10-11. — С. 139-153.

116. Аминова А. В. Псевдоримановы мнообразия с общими геодезическими/А. В. Аминова// Успехи математических наук.— 1993.— Т.48, №2. - С. 107-164.

117. Беклемишев Д. В. Дифференциальная геометрия пространств с почти комплексной структурой/Д. В. Беклемишев//Итоги науки и техн. Геометрия. — 1963. — С. 165-212.

118. Гаврильченко М. Л. Конформнi перетворення симетричних просторiв/М.Л. Гаврильченко, Й. Мiкеш, В.А. Кiосак //Geometry in Odessa — 2004, Differential geometry and its applications. Theses of Reports to the international Conference. — 2004. — С.18.

119. Горбатый Е. З. О геодезическом отображении эквидистантных римановых пространств и пространств первого класса/Е. З. Горбатый//Укр. геом. сб. — 1982. —№12. — С. 45-53.

120. Домашев В. В. К теории голоморфно-проективных отображений келеровых пространств/В. В. Домашев, Й. Микеш//Мат.заметки. — 1978. — №23. — С. 297-303.

121. Евтушик Л. Е. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях/Л. Е. Евтушик, Ю. Г. Лумисте, Н. М. Остиану, А. П. Широков//Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии. М.Ж. ВИНИТИ. — 1979. — №9. — 246с.

122. Егоров И. П. Автоморфизмы в обобщенных пространствах/И. П. Егоров//Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии. М.: ВИНИТИ. — 1978. — С. 147-191.

123. Каган В. Ф. Субпроективные пространства/В. Ф. Каган. — М.: Физматгиз. — 1961. — 220с.

124. Кайгородов В. Р. О римановых пространствах D_n^m/В. Р. Кайгородов//Тр. геом. семин.М.: ВИНИТИ. — 1974. — №5. — С. 359-373.

125. Кайгородов В. Р. Структура кривизны пространства-времени/В. Р. Кайгородов//Итоги науки и техн. Сер. Проблемы геометрии.М.: ВИНИТИ. — 1983. — №14. — С. 177-204.

126. Киосак В. А. О степени подвижности римановых пространств относительно геодезических отображений/В.А. Киосак, Й.Й.Мікеш// Геометрия погруженных многообразий.М. — 1986. — С. 35-39.

127. Киосак В. А. Геодезические отображения и проективные преобразования римановых пространств/В.А. Киосак, Й.Й.Мікеш//

Межвуз. сб. науч. тр. Движение в обобщенных пространствах. Рязань. — 1988. — С. 29-31.

128. Киосак В. А. Об эквидистантных римановых пространствах//В.А. Киосак//Геометрия обобщенных пространств. Пенза. — 1992. — С. 60-65.

129. Киосак В. А. О геодезических отображениях пространств Ейнштейна/В.А. Киосак, Й.Й. Мікеш // Известия высших учебных заведений, Математика, Казань. — 2003. — Т.498, №11. — С. 36-41.

130. Киосак В. А. Геодезические деформации гиперповерхностей римановых пространств/В.А. Киосак, Й.Й. Мікеш, М.Л. Гаврильченко//Известия высших учебных заведений, Математика, Казань. — 2004. — Т. 509, № 10. — С. 23-29.

131. Киосак В.А. Специальные векторные поля в римановых пространствах/ В.А. Киосак, И. Й. Гинтерлейтнер// Тези доповідей міжнародної конференції „X Белорусская математическая конференция“, Мінськ. — 2008. — С.153.

132. Кіосак В.А. Спеціальні векторні поля в ріманових просторах/ В. А. Кіосак, І. Гінтерлейтнер// Геометрія в Одесі-2008, Тези доповідей міжнародної конференції. — 2008. — С.45.

133. Киосак В. А. О мобильности римановых пространств относительно конформных отображений на пространства Эйнштейна/В.Киосак, Л. Евтушик, Й. Микеш//Известия вузов. Математика. — 2010. — Т.8. — С. 36-41.

134. Киосак В. А. О степени геодезической подвижности римановых метрик/В.А. Киосак, В.С. Матвеев, Й. Микеш, И.Г.Шандра // Мат. заметки. —2010. — Т.87, №4. — С. 628-629.

135. Киосак В. А. Голоморфно-проективные отображения келеровых пространств с сохранением тензора Эйнштейна/В. А. Киосак, О. Є. Чепурна//Proceedings international geometry center. — 2010. — Т.3, №4. — С. 52-57.

136. Кіосак В. А. Рівняння Ейнштейна в келерових просторах/ В.А. Кіосак, І. Гінтерлейтнер//Геометрія в Одесі-2010, Тези доповідей міжнародної конференції, Одеса. — 2010. — С.20.

137. Киосак В. А. О квази-конциркулярных отображениях псевдоримановых пространств с сохранением тензора Ейнштейна/ В.А. Киосак, Е.Чепурная // Геометрия в Кисловодске-2010. Тезисы международной конференции, Кисловодск. — 2010. — С.42.

138. Киосак В. А. О геодезических отображениях пространств квазипостоянной кривизны/ В.А. Киосак// Материалы 2-й Рос. школы-конференции с международным участием. Математика, информатика, их приложения и роль в образовании. Тезисы докладов. Тверь: Твер. гос. ун-т. — 2010. — С.144-149.

139. Киосак В. А. Инвариантные преобразования с сохранением геодезических/В. А. Киосак, О. Є. Чепурна // Proceedings international geometry center. — 2011.— Т.4, №2. — С. 43-50.

140. Кіосак В. А. Про еквідістантні псевдоріманові простори/В. А. Кіосак //Математичні студії, Львов. — 2011.— Т.36, №1. — С. 21-25.

141. Кіосак В. А. Про конформні відображення майже Ейнштейнових просторів /В. А. Кіосак//Математичні методи та фізико-механічні поля. — 2011. — Т.54, №2. — С. 17-22.

142. Киосак В. А. Конформные отображения с сохранением тензора энергии-импульса/В. А. Киосак //Известия ПГПУ им. Белинского, Пенза. — 2011. — №26. — С. 98-104.

143. Киосак В. А. О слабо конциркулярно симметрических псевдоримановых пространствах/В. А. Киосак, Е.Е.Чепурная// Proceedings international geometry center. — 2011. — Т.4, №3. — С. 15-22.

144. Киосак В. А. О геодезических отображениях пространств квазипостоянной кривизны/В. А. Киосак // Proceedings international geometry center. —2011. — Т.4, №4. — С. 59-65.

145. Кіосак В.А. Про слабо симетричні псевдоріманові простори/ В. Киосак, О. Чепурна, Є. Черевко //Тези доповідей міжнародної конференції Геометрія в Одесі-2011 Одеса. — 2011. — С.18.

146. Кіосак В.А. Дифеоморфізми узагальнених просторів і моделювання динамічних систем/ В.А. Кіосак, О.Э. Чепурна// 15 International Conference Dynamical system modeling and stability investigation, 24-27 травня, 2011:Київ. — 2011. — С.177.

147. Кіосак В. А. Про кількість розв'язків однієї системи алгебраїчних рівнянь/В. А. Кіосак //Proceedings international geometry center. — 2012. — Т.5, №2. — С. 43-52.

148. Киосак В. А. Диффеоморфизмы с сохранением тензора Эйнштейна/В. А. Киосак, Е. Е. Чепурная. — Lambert Academic Publishing. — 2012. — 105с.

149. Кіосак В.А Інваріантні перетворення просторів Вейля із збереженням геодезичних/В.А. Кіосак, В.С. Васьковець//XIV Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука, 19-21 квітня, 2012: Київ. — 2012. — С. 119.

150. Кіосак В.А. Про конформні відображення на простори Ейнштейна / В.А. Кіосак, М.Л. Гаврильченко//Тези доповідей міжнародної конференції Геометрія в Одесі-2013, Одеса. — 2013. — С. 144.

151. Кіосак В.А. Про спеціальні майже ейнштейнові простори/ В.А. Кіосак//Тези доповідей міжнародної конференції Геометрія і топологія в Одесі-2016, 2-8 червня 2016: Одеса. — 2016. — С.78.

152. Кручкович Г. И. Римановы и псевдоримановы пространства/ Г. И. Кручкович // Итоги науки и техн. Алгебра. Топология. Геометрия. — 1966. — М., ВИНИТИ. — 1968. — С. 191-220.

153. Кручкович Г. И. О пространствах $V(K)$ и их геодезических отображениях/Г. И. Кручкович//Тр. Всес. заочн. энергетич. ин-та. Мат. — 1967. — №33.— С. 3-18.

154. Лумисте Ю. Г. Полусимметрические многообразия/Ю. Г. Лумисте//Итоги науки и техн. Проблемы геометрии. М.: ВИНИТИ. — 1991. — №23. — С. 3-28

155. Микеш Й. Геодезические отображения полусимметрических римановых пространств/Й. Микеш //Одесск. ун-т.ВИНИТИ — 1976. — 19с.

156. Микеш Й. О геодезических отображениях Риччи 2-симметрических римановых пространств/Й. Микеш // Мат. заметки. — 1980. — Т. 28, №2. — С. 313-317.

157. Микеш Й. О геодезических отображениях пространств Эйнштейна/Й. Микеш //Мат.заметки. — 1980. — Т.28, №6. — С. 935-939.

158. Микеш Й. Проективно симметрические и проективно рекуррентные пространства аффинной связности/Й. Микеш // Тр. геом. семин. Казань: Казанск. ун-т. — 1981.— №13. — С. 61-62.

159. Микеш Й. Об эквидистантных келеровых пространствах/Й. Микеш //Мат.заметки. — 1985. — Т.38, №4. — С. 627-633.

160. Микеш Й. О сасакиевых и эквидистантных келеровых пространствах/Й. Микеш //Докл. АН СССР. — 1986. — Т.291, №1. - С. 33-36.

161. Микеш Й. Об оценках порядков групп проективных преобразований римановых пространств/Й. Микеш //Мат. заметки. — 1988. — Т.43, №2. — С. 256-262.

162. Микеш Й. О существовании n-мерных компактных римановых пространств, допускающих нетривиальные проективные преобразования "в целом"/Й. Микеш //Докл. АН СССР. — 1989. — Т.305, №3. — С. 534-536.

163. Микеш Й. О голоморфно-проективных отображениях келеровых пространств/Й. Микеш //Укр. геом. сб. — 1980. — №23. — С. 90-98.

164. Микеш Й. Конформные отображения на пространства Эйнштейна/Й. Микеш, М. Л. Гаврильченко, Е. И. Гладышева//Вестн. МГУ. 1994. - №3. - С. 13-17.

165. Микеш Й. О геодезических отображениях четырехмерных пространств Эйнштейна/Й. Микеш, В. А. Киосак // Одесск. ун-т.ВИНИТИ. — 1982. — 19с.

166. Микеш Й. О геодезических отображениях специальных римановых пространств/Й. Микеш, В. А. Киосак // Одесск. ун-т.УкрНИИНТИ — 1985. — 24с. в УкрНИИНТИ 05.05.85, 904-Ук85.

167. Микеш Й. О геодезических отображениях 3-симметрических римановых пространств/Й. Микеш, В. С. Собчук// Укр. геом. сб. — 1991. — №34. — С. 80-83.

168. Мирзоян В. А. Ric-полусимметрические подмногообразия/ В. А. Мирзоян // Итоги науки и техн. Проблемы геометрии. М.: ВИНИТИ. — 1991. — №23. — С. 29-66.

169. Норден А. П. Пространства аффинной связности/А. П. Норден. — М.: Наука. — 1976. — 432с.

170. Петров А. З. Новые методы в общей теории относительности/А. З. Петров. — М.: Наука.— 1966. — 495 с.

171. Петров А. З. Моделирование физических полей/А. З. Петров.// В сб. Гравитация и теория относительности.Казань. — 1968. — Вып. 4-5. — С. 7-21.

172. Погорелов А. В. Об одной теореме Бельтрами/А. В. Погорелов// Докл. АН СССР. —- 1991.— Т.316, №2. — С. 297-299.

173. Рашевский П. К. Геометрическая теория уравнений с частными производными/П. К. Рашевский//М.-Л.: Гостехиздат. — 1947. — 356с.

174. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ/П. К. Рашевский. — М.: Наука. — 1967. — 664с.

175. Родионов Е. Д. Локально конформно однородные псевдоримановые пространства/Е. Д. Родионов, В. В. Славский, Л. Н. Чибрикова// Мат. труды. — 2006. — Т.9, №1. — С. 130-168.

176. Розенфельд Д. И. Геодезическое соответствие конформно-плоских римановых пространств/Д. И. Розенфельд// Укр. геометр, сб. — 1968. — Т.5, №6. — С. 139-146.

177. Розенфельд Д. И. О геодезических отображениях римановых пространств на конформно-плоские римановы пространства/Д. И. Розенфельд, Е. 3. Горбатый//Укр. геометр, сб. — 1972. — №12. — С. 115-124.

178. Синюков Н. С. Геодезические отображения римановых пространств/Н. С. Синюков. — М.: Наука. — 1979. — 255 с.

179. Синюков Н. С. К теории геодезических отображений римановых пространств/Н. С. Синюков// Докл. АН СССР. — 1966. — Т.269. — С. 770-772.

180. Синюков Н. С. Почти геодезические отображения аффинносвязных и римановых пространств/Н. С. Синюков// Итоги науки и техн. Сер. Проблемы геометрии. - М.: ВИНИТИ. — 1982. — Т.13. — С. 3-26.

181. Синюков Н. С. Голоморфно-проективные отображения келеровых пространств/Н. С. Синюков, И. Н. Курбатова, Й. Микеш//Одесск. ун-т. — 1985. — 69 с.

182. Синюкова Е. Н. О геодезических отображениях некоторых специальных римановых пространств/Е. Н. Синюкова// Мат. заметки. — 1981. — Т.30, №6. — С. 889-894.

183. Синюкова Е. Н. Геодезические отображения пространств L_n/Е. Н. Синюкова//Изв. вузов. Мат. — 1982. — №3. — С. 57-61.

184. Собчук В. С. Риччи-обобщенно-симметрические римановы пространства допускают нетривиальные геодезические отображения/В. С. Собчук//Докл.АН СССР. — 1982. — Т.267, №4. — С. 793-795.

185. Собчук В. С. О геодезическом отображении Риччи 4-симметрических римановых пространств/В. С. Собчук// Изв. вузов. Мат. — 1991. — №4. — С. 69-70.

186. Солодовников А. С. Геодезические классы пространств $V(K)$/А. С. Солодовников//Докл. АН СССР. — 1956. — Т.3, №1. — С. 33-36.

187. Солодовников А. С. Геометрическое описание всевозможных представлений римановой метрики в форме Леви-Чивита/А. С. Солодовников// Тр. семин. по вект. и тензорн. анализу. — 1963. — №12. — С. 131-173.

188. Степанов С.Е. К теории отбражений римановых многообразий в целом/С. Е. Степанов//Известия вузов. Математика. — 1994. — №10. — С.81-88.

189. Степанов С.Е. О групповом подходе к изучению уравнений Эйнштейна и Максвелла/С. Е. Степанов// ТМФ.— 1997.— Т. 111, №1.— С.32-43.

190. Схоутен И. А. Введение в новые методы дифференциальной геометрии/И. А. Схоутен, Д. Дж. Стройк. — М.-Л.: Гостехиздат. — 1939.—183с.

191. Фомин В. Е. О геодезическом отображении бесконечномерных римановых пространств на симметрические пространства аффинной связности/В. Е. Фомин // Тр. геом. семин.Казань. — 1979. — №11. — С. 93-99.

192. Фомин В. Е. Пара бесконечных пространств Леви-Чивита может не иметь общих геодезических/В. Е. Фомин// Тр. геом. семин. Казань. — 1986. — №17. — С. 79-83.

193. Цыганок И. И. Торсообразующее векторное поле и группа аффинных гомотетий/И. И. Цыганок// Ткани и квазигруппы. Калинин. — 1988. — С. 114-119.

194. Шапиро Я. Л. О геодезических полях многомерных направлений/Я. Л. Шапиро//Докл. АН СССР. — 1941. — Т.32, №4. — С. 237-239.

195. Широков А. П. Структуры на дифференцируемых многообразиях/А. П. Широков//Итоги науки и техн. Алгебра.

Топология. Геометрия. — 1967. — М.: ВИНИТИ. — 1969. — С. 127-188.

196. Широков А. П. К вопросу об А-пространствах. Сто двадцать пять лет неевклидовой геометрии Лобачевского 1826-1951/А. П. Широков//М.-Л.: ГИТТЛ. — 1952. — С. 195-200.

197. Широков П. А. Избранные работы по геометрии/П. А. Широков. — Изд-во Казанск. ун-та. — 1966. — 432 с.