

## ВІДГУК

офіційного опонента

на дисертаційну роботу Кіюсака Володимира Анатолійовича  
«Відображення спеціальних псевдоріманових просторів»,  
подану на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук  
за спеціальністю 01.01.04 – геометрія та топологія

Представлена до розгляду дисертаційна робота присвячена дослідженню псевдо-ріманових і афінно-зв'язних просторів та спеціальних відображень між ними, головним чином – геодезичних відображень. Цей геометричний напрямок, започаткований в роботах Е. Бельтрамі, отримав розвиток в працях багатьох відомих математиків минулого століття, серед яких - Т. Леві-Чивіта, Г. Вейль, В. Ф. Каган, О.З. Петров, П.А. Широков, А.П. Норден, І.П.Єгоров та інші. Слід підкреслити, що ця тематика була і залишається доволі традиційною і для сучасної одеської школи геометрії, створеної зусиллями М.С. Синюкова та його учнів (С.Г. Лейка, Й. Мікеша та інших).

Наразі теорія геодезичних відображень є доволі розвиненою областю сучасної геометрії, в якій отримано багато фундаментальних результатів. В той же час тут залишається ще широка низка актуальних та цікавих проблем, пов'язаних, наприклад, з виокремленням нових спеціальних класів просторів та дослідженням їх мобільності щодо геодезичних та інших відображень. Саме подібній проблематиці і присвячена дисертаційна робота В. А. Кіюсака.

Основна частина дисертації складається з п'яти розділів.

Два початкових розділи носять здебільшого методологічний характер. Зокрема, в першому розділі автором детально проаналізовано системи диференціальних рівнянь, що описують загальні та спеціальні відображення між просторами афінної зв'язності в тих чи інших термінах. Крім того, представлено формули, що описують поведінку та взаємозв'язок фундаментальних характеристик (зокрема – тензорів Рімана, Річчі, Вейля) розглянутих просторів в термінах тензора деформації зв'язності. Введено поняття вкорочення відображення просторів афінної зв'язності, завдяки чому показано, що вивчення геодезичних відображень просторів афінної зв'язності на псевдо-ріманові простори може бути зведене до вивчення геодезичних відображень еквафінних просторів афінної зв'язності.

Другий розділ присвячений методам спеціалізації псевдо-ріманових просторів, що здійснюються накладанням умов алгебраїчного чи диференціального характеру на ту чи іншу внутрішню характеристику. Зокрема, представлено аргументовану мотивацію до виокремлення таких спеціальних класів псевдо-ріманових просторів, як звідні, напівзвідні, еквідистантні, слабо симетричні, слабо рекуретні, зі спеціальною векторною оболонкою, гармонійні та простори розділеної кривини. Всі ці спеціальні класи псевдо-ріманових просторів мають ті чи інші характерні деформаційні

властивості, пов'язані з поведінкою тензорів Рімана, Річчі, Ейнштейна, Брінкмана, конциркулярної кривини, проективної кривини, конформної кривини, та інш. З аналітичної точки зору, виокремлення того чи іншого спеціального класу просторів призводить до додаткових диференціальних та/або алгебраїчних обмежень, що дозволяє більш ефективно вирішувати питання розв'язності систем диференціальних рівнянь, які описують геодезичні (та деякі інші) відображення псевдо-ріманових просторів.

Найбільш насиченим з точки зору головних результатів дисертації є її третій розділ, в якому вже безпосередньо розглянуто геодезичні відображення загальних та спеціальних псевдо-ріманових просторів. Головну увагу приділено поняттю степені мобільності простору відносно геодезичних відображень. Встановлено, що якщо для псевдоріманового простору  $V$  степінь його мобільності відносно нетривіальних геодезичних відображень є більше 2, то простір  $V$  є так званим простором  $V(B)$ , де  $B$  – константа. При цьому, будь яке геодезичне відображення псевдо-ріманового простору  $V(B)$ ,  $B \neq 0$ , є або нетривіальним, або гомотетичним. Проаналізовано окремі властивості просторів  $V(B)$ , зокрема – їх зв'язок з рівнянням Обати-Тано.

З іншого боку, доведено що деякі інші псевдо-ріманові простори вже не є геодезично мобільними, на відміну від просторів  $V(B)$ . Так, встановлено, що чотиримірні простори Ейнштейна, відмінні від просторів сталої кривини, не допускають нетривіальних геодезичних відображень на псевдо-ріманові простори – цей результат узагальнює аналогічну теорему Петрова щодо чотиримірних ейнштейнових просторів сигнатури Мінковського. В той же час, спростовано гіпотезу Петрова щодо того, що  $n$ -мірні,  $n > 4$ , простори Ейнштейна сигнатури Мінковського, відмінні від просторів сталої кривини, не допускають нетривіальних геодезичних відображень на ейнштейнові простори тієї ж сигнатури – в дисертації побудовано відповідний контрприклад. В якості ілюстрації, описано геодезичні відображення простору Казнера і виявлено його досить високу степінь мобільності. Також розглянуто псевдо-ріманові простори квазі-сталої кривини та Річчі-узагальнено симетричні псевдо-ріманові простори, відмінні від ейнштейнових просторів, і для них доведено, що степінь мобільності відносно геодезичних відображень є не більше 2.

Найбільш ефектним, на мій погляд, є заключний підрозділ третього розділу, що стосується геодезичних відображень псевдо-ріманових просторів в «цілому». Виявилось, що, на відміну від локальних результатів, застосування додаткових умов компактності або повноти створює перешкоди для існування нетривіальних геодезичних відображень, навіть для просторів  $V(B)$ .

В четвертому розділі розроблена автором техніка застосовується до вивчення конформних відображень псевдо-ріманових просторів на простори Ейнштейна. Детально проаналізовано розподіл значень степені мобільності відносно вказаних відображень та наявність лакун в цьому розподілі. Крім того, описано характеристичні властивості спеціальних конформних відображень (конциркулярних), що визначаються

інваріантністю відповідних аналітичних та геометричних об'єктів. Також розглянуто інфінітезимальні геодезичні деформації гіперповерхонь псевдо-ріманових просторів: описано аналітичні (тензорні) умови, необхідні та достатні для існування таких деформацій, і, як наслідок, встановлено, що якщо псевдо-ріманів простір допускає нетривіальні інфінітезимальні геодезичні деформації, то тоді він допускає нетривіальні геодезичні відображення (це твердження узагальнює попередні результати Н.С. Синюкова). Нарешті, застосовуючи розвинену ним техніку, автором дисертації розглянуто потоки Річчі на многовидах та їх спеціальні розв'язки – солітони Річчі: досліджено властивості геометричних об'єктів, що породжують солітони Річчі на многовидах, і, зокрема, встановлено, що якщо в псевдо-рімановому просторі є не менше двох суттєвих векторних полів, що породжують солітони Річчі, то цей простір є еквідістантним; більш того, векторне поле на еквідістантному псевдо-рімановому просторі, що породжує солітон Річчі, або є колінеарним конциркулярному в.п., або конциркулярне в.п. є коваріантно сталим.

У п'ятому розділі автор демонструє застосування розроблених методів в теорії голоморфно-проективних відображень келерових просторів. Як один з основних результатів, доведено, що якщо келеровий простір допускає нетривіальні голоморфно-проективні відображення зі збереженням тензора Ейнштейна, то такий простір має сталу скалярну кривину.

Зауваження.

1. В Теоремах 3.6.3 та 3.6.5 присутня умова одночасної діагоналізації метричних форм (або форм Річчі) псевдо-ріманових просторів, пов'язаних геодезичними відображеннями. Чи мають ці обмеження суто технічний характер (з точки зору спрощення доведення), чи все ж таки вони є дійсно суттєвими?

2. В Означенні 1.3.1 слід було б вказати, що відображення є вкороченим *відносно* початкового відображення.

3. На мій погляд, слід було більше уваги приділити оформленню цитування використаних першоджерел. Зокрема, бажано було б більш чітко вказувати, в якій саме публікації автора доведено той чи інший його результат, що виноситься на захист. Крім того, доцільно при цитуванні монографій (як, скажімо, на стор.68) додатково вказувати конкретні сторінки або параграфи, в яких міститься згадана автором інформація.

4. В тексті роботи зустрічаються окремі похибки друкарського характеру, що інколи затрудняють перевірку коректності наведених математичних тверджень (наприклад – доведення Теореми 3.2.3).

5. На мій погляд, не дуже вдалим є вибраний автором спосіб нумерації, коли твердження, леми, наслідки, визначення та ін. нумеруються окремо. Використання наскрізної нумерації значно спростило б пошук того чи іншого твердження або визначення в тексті роботи.

Вказані зауваження мають виключно редакційний характер і не впливають на загальне позитивне враження від винесених на захист результатів.

Підсумовуючи, можу сказати, що представлена на розгляд дисертаційна робота є завершеною науковою працею, у якій отримано нові науково обґрунтовані результати, що в сукупності є суттєвими для розвитку теорії відображень узагальнених просторів як одного з актуальних напрямків сучасної геометрії.

Основні положення роботи нові, належно обґрунтовані, вони представлені в 34 наукових роботах здобувача, серед яких – 22 наукові статті у фахових виданнях, 2 монографії та 10 тез доповідей на наукових конференціях.

Автореферат в цілому правильно відображає основний зміст дисертації.

Робота має теоретичний характер і може бути основою для наступних досліджень у галузі диференціальної геометрії. Результати дисертації можуть бути використані у Одеському, Київському, Харківському національних університетах, Фізико-технічному інституті низьких температур, Інституті математики, Інституті прикладних проблем механіки та математики НАН України.

Вважаю, що дисертаційна робота «Відображення спеціальних псевдоріманових просторів» задовольняє всім вимогам щодо докторських дисертацій відповідно до «Порядку присудження наукових ступенів...», затвердженого постановами Кабінету Міністрів України, а її автор Володимир Анатолійович Кіосак заслуговує присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.04 – геометрія та топологія.

Офіційний опонент  
провідний науковий співробітник  
Фізико-технічного інституту низьких  
температур ім. Б. І. Веркіна НАН України,  
д.ф.-м.н.

В.О. Горькавий

08.11.2017р.



Підпис гр. Горькавий В.О.

ЗАСВІДЧУЮ  
Учений секретар ФТІНТ  
ім. Б.І. Веркіна НАН України  
Кіосак Володимир Анатолійович

Надійшов зо спеціалізованої  
вченої ради Д.В. 206.03 16.11.2017р.  
секретар ради Канцелярія  
Підтвердженням Ж.Я.1