Національна академія наук України
Інститут математики

Гарко Ірина Ігорівна

УДК 519.21

Фрактальні властивості ймовірнісних мір, породжених поліосновними розкладами дійсних чисел, та їх застосування

01.01.05 — теорія ймовірностей і математична статистика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2017

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Національному педагогічному університеті імені М. П. Драгоманова Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Торбін Григорій Мирославович,
Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, проректор з наукової роботи.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Іванов Олександр Володимирович,
Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", професор кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей;

кандидат фізико-математичних наук, доцент
Млавець Юрій Юрійович,
ДВНЗ "Ужгородський національний університет", доцент кафедри кібернетики та прикладної математики.

Захист відбудеться «5» грудня 2017 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.02 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий «3» листопада 2017 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради Г. П. Пелюх

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дисертація присвячена розвитку підходів до дослідження сингулярно неперервних ймовірнісних мір, породжених поліосновними розкладами дійсних чисел. На сьогодні існує багато систем числення (методів зображення дійсних чисел чи елементів з деякого простору) з використанням постійного (скінченного чи нескінченного) алфавіту або змінного алфавіту (послідовності алфавітів). Кожна система числення має свою специфіку і переваги у заданні чи дослідженні певних математичних об'єктів, відповідну метричну, ймовірнісну та розмірнісні (в сенсі розмірності Хаусдорфа–Безиковича та інших фрактальних розмірностей) теорії. Метрична, ймовірнісна та фрактальна теорії розкладів дійсних чисел інтенсивно розвивались протягом XX століття, починаючи з робіт В. Ярніка, Б. Біссінджера, С. Еверетта, А. Рен'ї, П. Ердеша, П. Біллінгслі, Дж. Кінні, Т. Пітчера, Ф. Швайгера та ін. Інтерес до розвитку таких теорій суттєво посилився наприкінці XX століття у зв'язку з «фрактальним бумом» у математиці та природознавстві. Незважаючи на це, для багатьох класичних розкладів дійсних чисел відповідні ймовірнісні та розмірнісні теорії все ще перебувають на конструктивному етапі розвитку. В якості прикладу можна навести розклади Кантора, розклади Остроградського–Серпінського–Пірса, Q_∞-розклади та багато інших.

Добре відомо, що клас сингулярно неперервних ймовірнісних мір є найменш дослідженим сімейством чистих мір, хоча їх дослідження здійснювалось протягом майже всього XX ст. Значна кількість робіт присвячена дослідженню фрактальних властивостей ймовірнісних мір, що породжуються різними розкладами дійсних чисел та створенню індивідуальної теорії певних класів сингулярних мір. Варто відзначити, що нетривіальні складнощі на цьому шляху виникають навіть для класів самоподібних та самоафінних мір.

Тому особливо важливим для розвитку фрактального аналізу та теорії сингулярних ймовірнісних мір є розвиток та удосконалення методів обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича (та інших фрактальних розмірностей) множин та мір, пов'язаних з певними системами числення; методів встановлення сингулярності ймовірнісних мір та дослідження їх тонких фрактальних властивостей; усвідомлення аналогій між метричними, ймовірнісними та розмірнісними теоріями різних розкладів та узагальнення на основі цього відповідних методів побудови цих теорій.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана у рамках досліджень математичних об'єктів зі складною локальною будовою, що проводяться у відділі фрактального аналізу Інституту математики НАН України та на кафедрі математичного аналізу та диференціальних рівнянь Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова.

Автор дисертації брав участь у розробці держбюджетних тем «Багаторівневий аналіз сингулярних ймовірнісних мір та його застосування» (номер державної реєстрації 0113U003005) та «Фрактальний аналіз розподілів випадкових величин типу Джессена–Вінтнера та його застосування» (номер державної реєстрації 0117U004905), та науково-дослідного проекту STREVCOMS FP-7-IRSES 612669 (ЄС).

Мета і завдання дослідження. Метою дослідження є розвиток методів фрактального аналізу сингулярно неперервних ймовірнісних мір, вивчення тонких фрактальних властивостей ймовірнісних мір з незалежними I-Q_∞-символами та використання отриманих результатів для ймовірнісного підходу до вивчення перетворень, що зберігають фрактальну розмірність, та до фрактального аналізу підмножин множини анормальних чисел.

Основними завданнями дисертаційної роботи є:

— розробка методів доведення довірчості локально тонких систем покриттів для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича підмножин одиничного відрізка та застосування цих методів для знаходження умов порівнянності та довірчості систем надциліндрів Q_∞- та I-Q_∞-зображень дійсних чисел для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича (у тому числі і для тих моделей, коли відповідні системи циліндрів не є довірчими);

— дослідження властивостей (лебегівська структура, топологометричні властивості спектрів, спектральна структура) розподілів випадкових величин з незалежними I-Q_∞-символами.

— дослідження фрактальних властивостей мінімальних розмірнісних носіїв розподілів випадкових величин з незалежними I-Q_∞-символами.

— доведення гіпотези про те, що відображення φ, яке переводить символи Q_∞-зображення в символи I-Q_∞-зображення, зберігає міру Лебега та розмірність Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку;

— дослідження фрактальних властивостей спектрів розподілів випадкових величин з незалежними I-Q_∞-символами

— розвиток ймовірнісного підходу (на основі дослідження властивостей ймовірнісних мір з незалежними Q-, I-Q_∞-, Q^*-, I-F-символами) до вивчення залежності метричних та фрактальних властивостей множини суттєво анормальних чисел від обраної системи числення.

Об'єктом дослідження є фрактальні властивості сингулярно неперервних ймовірнісних мір.

Предметом дослідження є фрактальні властивості розподілів випадкових величин з незалежними I-Q_∞-, Q^*- та I-F-символами та їх застосування в метричній теорії чисел.

Методи дослідження. У роботі використовувалися методи теорії ймовірностей, математичного аналізу, теорії функцій дійсної змінної, метричної теорії чисел, фрактального аналізу та запропоновані автором конструктивні прийоми та методи.

Наукова новизна одержаних результатів. Основними науковими результатами, що виносяться на захист, є такі:

— розроблено новий метод доведення довірчості локально тонких систем покриттів для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича підмножин одиничного відрізка; даний метод застосовано для доведення гіпотези про довірчість систем надциліндрів Q_∞- та I-Q_∞-зображень дійсних чисел для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича (у тому числі і для тих моделей, коли відповідні системи циліндрів не є довірчими); знайдено достатні умови порівнянності мір Хаусдорфа, породжених системою надциліндрів узагальненого F-зображення дійсних чисел;

— досліджено лебегівську структуру, тополого-метричні властивості спектрів, спектральну структуру розподілів випадкових величин з незалежними I-Q_∞-символами;

— знайдено явні формули для обчислення розмірності Хаусдорфа розподілів випадкових величин з незалежними I-Q_∞-символами.

— доведено гіпотезу про те, що відображення φ, яке переводить символи Q_∞-зображення в символии I-Q_∞-зображення, зберігає міру Лебега та розмірність Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку; на основі даного результату показано ізоморфізм ймовірнісних та розмірнісних теорій Q_∞- та I-Q_∞-зображень дійсних чисел;

— досліджено фрактальні властивості спектрів розподілів випадкових величин з незалежними I-Q_∞-символами;

- на основі ймовірнісного підходу доведено суперфрактальність множини Q-суттєво анормальних чисел; доведено суперфрактальність множини I-Q_∞-суттєво анормальних чисел;
- спростовано гіпотезу про суперфрактальність множини суттєво анормальних чисел незалежно від вибору системи числення; знайдено достатні умови аномальної фрактальності множини Q^*-суттєво анормальних чисел.

Практичне значення одержаних результатів. Робота має теоретичний характер. Отримані результати є внеском у теорію сингулярних розподілів ймовірностей, фрактальний аналіз, метричну теорію чисел, теорію функцій дійсної змінної та теорію DP-перетворень. Запропоновані в дисертації методи можуть бути корисними як при дослідженні тонких фрактальних властивостей ймовірнісних мір, породжених різними представленнями дійсних чисел над скінченними та змінними алфавітами, так і при застосуванні відповідних результатів в метричній теорії чисел та теорії DP-перетворень.

Особистий внесок здобувача. Основні результати, що виносяться на захист, отримані автором самостійно. Зі статей, опублікованих у співавторстві, до дисертації включені лише ті результати, що належать автору.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дослідження доповідалися на наукових конференціях різного рівня та наукових семінарах. Це такі конференції:

- Міжнародна наукова конференція «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь», присвячена 80-річчю Шкіля М. І., Київ, 13–14 грудня 2012 р.;
- Міжнародна наукова конференція «Актуальні проблеми методології та методики навчання фізико-математичних дисциплін», присвячена 80-річчю Горбачука І. Т., Київ, 18 січня 2013 р.;
- XVI Всеукраїнська науково-практична конференція «Молодь, освіта, наука, культура і національна самосвідомість в умовах європейської інтеграції», Київ, 25–26 квітня 2013 р.;
- The Fifth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations, Kyiv, September 16–20, 2013;
- Fractal Geometry and Stochastics V, Germany, March 24–29, 2014;
- XVII Всеукраїнська науково-практична конференція «Молодь, освіта, наука, культура і національна самосвідомість в умовах європейської інтеграції», Київ, 25–26 квітня 2014 р.;

— П'ятнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, Київ, 15–17 травня 2014 р.;
— International Conference «Probability, Reability and Stochastic Optimization», Kyiv, April 7–10, 2015;
— International Conference «Dynamical System And Their Application», Kyiv, June 22–26, 2015;
— П'ята Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання», Київ, 25–26 квітня 2016 р.;
— Сімнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, Київ, 19–20 травня 2016 р.;
— Конференція «Методика викладання математики в середній та вищій школі», присвячена 75-річчю Колесник Т. В., Київ, 4–5 грудня 2013 р.;
— Всеукраїнська науково-методична конференція «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі», пам'яті С. С. Левіщенка, Київ, 7–8 жовтня 2016 р.;
— Шоста Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, 21–22 квітня 2017 р.;
— International Conference «Numeration 2017», Rome, Italy, June 5–9, 2017.

Основні результати дисертаційного дослідження були оприлюднені на засіданнях наступних наукових семінарів:
— науковий семінар «Статистичні проблеми для випадкових процесів і полів» кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут» ім. І. Сікорського (керівник семінару — проф. Іванов О. В.);
— науковий семінар відділу випадкових процесів Інституту математики НАН України (керівники семінару — проф. Дороговцев А. А., проф. Портенко М. І.);
— науковий семінар відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник семінару — проф. Романюк А. С.);
— науковий семінар з фрактального аналізу (спільний семінар НПУ імені М. П. Драгоманова та Інституту математики НАН України, керівник семінару — проф. Працьовитий М. В.);
— науковий семінар кафедри математичного аналізу та диференціальних рівнянь НПУ імені М. П. Драгоманова (керівник семінару — проф. Торбін Г. М.).

Публікації. Основні результати роботи викладено у 22 наукових публікаціях, серед яких 5 статей у фахових виданнях [1-5], 3 статті у інших виданнях [6-8] та 14 тез доповідей на конференціях [9-22]. Три статті [2, 3, 4] опубліковано у наукових виданнях, які включено до переліку фахових видань МОН України. Одна стаття [1] опублікована у журналі, що індексується міжнародною наукометричною базою Scopus. Одна стаття [5] опублікована у фаховому виданні, переклад якої індексований в наукометричній базі Scopus.

Структура дисертації. Дисертація складається зі вступу, трьох розділів, розбитих на підрозділи, висновків та списку використаних джерел. Повний обсяг дисертації становить 176 сторінок, список використаних джерел займає 26 сторінок і містить 236 найменувань.

Подяка. Автор щиро вдячний науковому керівнику професору Григорію Мирославовичу Торбіну за постановку задач, постійну підтримку та допомогу.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку використаної літератури.

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, визначені мета і задачі дослідження, об'єкт та предмет дослідження, виділено наукову новизну, практичну значущість отриманих результатів, особистий внесок здобувача, апробацію отриманих результатів та представлено основний зміст дисертаційного дослідження.

Перший розділ дисертації містить опис основних понять, фактів та методів, які відіграють важливу роль у дослідженні.

У підрозділі 1.1 висвітлено основні властивості міри Хаусдорфа та розмірності Хаусдорфа–Безиковича. Задача обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича множини або ймовірнісної міри, будучи однією з основних задач фрактального аналізу, є досить нетривіальною проблемою, розв'язанню якої для різних множин та мір присвячено значну кількість дослідницьких статей у провідних математичних журналах світу. Це стало причиною розвитку методів знаходження точних або хоча б наближених значень розмірності Хаусдорфа–Безиковича. Один з таких методів полягає у суттєвому зменшенні класу допустимих покриттів при обчисленні розмірності до деякого специфічного (зчисленного) класу покриттів, який є достатнім (довірчим) для правильного обчислення розмірності, що дає досліднику суттєві технічні переваги. Саме з цією метою у підрозділі 1.4 даються означення локально тонких систем покриттів, які є довірчими для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича.

Нехай (M, ρ) — метричний простір і $E \subset M$.

Сімейство Φ підмножин метричного простору (M, ρ) називається локально тонкою системою покриттів цього простору, якщо для довільної множини $E \subset M$ і для довільного $\varepsilon > 0$ існує не більш ніж зліченне ε-покриття множини E множинами з Φ.

Нехай α — деяке додатне число.

Означення 1.1.7. α-мірною мірою Хаусдорфа множини E відносно локально тонкої системи покриттів Φ називається число

$$H^{\alpha}(E, \Phi) := \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\inf_{|E_j| \leqslant \varepsilon} \left\{ \sum_j |E_j|^{\alpha} \right\} \right],$$

де інфімум береться за всіма не більш як зліченними ε-покриттями $\{E_j\}$ множини E множинами $E_j \in \Phi$.

Означення 1.1.8. Розмірністю Хаусдорфа–Безиковича множини E відносно сімейства підмножин Φ називається таке невід'ємне число

$$\dim_H(E, \Phi) = \inf\{\alpha : \quad H^{\alpha}(E, \Phi) = 0\}.$$

Означення 1.4.1. Локально тонка система покриттів Φ називається довірчою системою покриттів на W, якщо

$$\dim_H(E, \Phi) = \dim_H(E), \forall E \subset W.$$

У цьому ж підрозділі подано детальну історію досліджень умов довірчості сімейств циліндрів, породжених різними розкладами дійсних чисел, порівняння підходів до доведення довірчості та недовірчості різних локально тонких сімейств покриттів. Окреслено нерозв'язані проблеми у цьому напрямі.

Додатковим аргументом дослідження проблем довірчості локально тонких систем покриттів є необхідність розвитку ймовірнісного підходу до обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича фрактальних множин на основі розвинутого П. Біллінгслі методу (на основі теорем Біллінгслі оцінки хаусдорфової розмірності), суть якого коротко викладена в підрозділі 1.2 дисертації.

У підрозділі 1.5 наведено базові означення, що стосуються теорії сингулярно неперервних ймовірнісних мір, описано спектральну класифікацію сингулярних ймовірнісних мір.

Розділ 2 присвячений дослідженню фрактальних властивостей розподілів випадкових величин з незалежними I-Q_∞-символами.

У підрозділі 2.1 вводиться в розгляд I-Q_∞-зображення дійсних чисел, представлені його частинні випадки. Підрозділ 2.2 присвячено ергодичним властивостям введених зображень дійсних чисел.

Нехай I — довільне дійсне число з одиничного відрізка, записане у двійковій системі числення

$$I=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k(I)}{2^k}=:0,\beta_1(I)\beta_2(I)\ldots\beta_k(I)\ldots,\quad \beta_k(I)\in\{0,1\}.$$

Для тих чисел з одиничного відрізка, які мають по два різні двійкові розклади, зафіксуємо той, який має цифру 1 в періоді.

Нехай $Q_\infty=(q_0,q_1,\ldots,q_k,\ldots)$ — нескінченний стохастичний вектор з додатними координатами. При фіксованому дійсному числі $I\in[0,1]$ (тобто при фіксованій послідовності $\{\beta_k(I)\}$) та фіксованому стохастичному векторі Q_∞ здійснюється зчисленна послідовність розбиттів одиничного відрізка за наступними правилами.

Крок 1. Розбиваємо одиничний відрізок зліва направо, якщо $\beta_1(I)=1$; (і справа наліво, якщо $\beta_1(I)=0$) на зчисленну кількість відрізків $\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1}$, $\alpha_1\in\{0,1,2,\ldots\}$, довжини яких дорівнюють $\left|\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1}\right|=q_{\alpha_1}$. Кожен з відрізків $\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1}$ називається циліндром 1-го рангу I-Q_∞-розкладу.

Крок k ($k\geqslant 2$). Кожен з циліндрів $(k-1)$-рангу $\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}}$ розбиваємо (зліва направо, якщо $\beta_k(I)=1$; і справа наліво, якщо $\beta_k(I)=0$) на зчисленну кількість відрізків $\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}$, довжини яких

$$\left|\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}\right|=q_{\alpha_1}\cdot q_{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot q_{\alpha_k}=\prod_{s=1}^{k}q_{\alpha_s} \tag{1}$$

відносяться як

$$\left|\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}0}\right|:\left|\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}1}\right|:\ldots:\left|\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}m}\right|:\ldots=q_0:q_1:\ldots:q_m:\ldots.$$

Кожен з відрізків $\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}$ називається циліндром k-го рангу I-Q_∞-розкладу.

Для довільної послідовності індексів $\{\alpha_k\}$, $\alpha_k\in\{0,1,2,\ldots\}$, існує послідовність вкладених циліндрів

$$\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1}\supset\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2}\supset\cdots\supset\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}\supset\cdots,$$

таких, що $|\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\ldots\alpha_k}| \to 0$, $k \to \infty$. Тому існує єдина точка x, яка належить всім цим циліндрам $\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1}$, $\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2}, \ldots, \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}, \ldots$.

І навпаки, для кожної точки $x \in [0,1]$, яка не є межовою для жодного циліндра жодного рангу, існує єдина (оскільки кожна така точка належить рівно одному циліндру n-го рангу) послідовність вкладених циліндрів $\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1(x)} \supset \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)} \supset \ldots \supset \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)} \supset \ldots$, які містять x, тобто

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)} =: \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}.$$

Останній вираз називатимемо I-Q_∞-зображенням точки x.

Нехай $D = D(I)$ — множина точок одиничного відрізка, які мають I-Q_∞-зображення, тобто

$$D = \left\{ x: \ x \in [0,1], \ \forall n \in N \ \exists \ \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_n(x)} : \ x \in \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_n(x)} \right\}.$$

Очевидно, що дійсне число x не має I-Q_∞-зображення тоді і тільки тоді, коли знайдеться таке число $n_0 = n_0(x)$, що x не належить до жодного циліндра n_0-го рангу.

Підрозділи 2.3 та 2.4 присвячено вивченню випадкових величин з незалежними I-Q_∞-символами, дослідженню їх лебегівської та тополого-метричної структури.

Нехай $\{\xi_k\}$ — послідовність незалежних випадкових величин з наступними розподілами:

$$P(\xi_k = i) := p_{ik} \geqslant 0, \quad \text{де} \quad \sum_{i=0}^{\infty} p_{ik} = 1, \quad \forall k \in N.$$

Використовуючи послідовність $\{\xi_k\}$ та I-Q_∞-зображення, розглянемо випадкову величину $\xi := \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_k\ldots}$, яку називають випадковою величиною з незалежними I-Q_∞-символами. Позначимо через μ_ξ відповідну ймовірнісну міру, яку будемо називати ймовірнісною мірою з незалежними I-Q_∞-символами.

Теорема 2.4.2. *Сингулярно неперервно розподілена випадкова величина з незалежними I-Q_∞-символами має чистий тополого-метричний тип, причому*

1) μ_ξ має чистий GS-тип тоді і тільки тоді, коли матриця P містить лише скінченну кількість стовпчиків, що містять нульові елементи.

2) μ_ξ має чистий GC-тип тоді і тільки тоді, коли матриця P містить нескінченну кількість стовпчиків, що містять нульові елементи, і

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i:p_{ik}=0} q_i\right) = \infty\ . \tag{2}$$

3) μ_ξ має чистий GP-тип тоді і тільки тоді, коли матриця P містить нескінченну кількість стовпчиків, що містять нульові елементи і

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i:p_{ik}=0} q_i\right) < \infty. \tag{3}$$

У розділі 2.5 досліджуються тонкі фрактальні властивості ймовірнісних мір з незалежними I-Q_∞-символами.

Теорема 2.5.1. *Нехай $\Phi(I\text{-}Q_\infty)$ — довірче для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича сімейство циліндрів I-Q_∞-зображення. Якщо*

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sum\limits_{i=0}^{\infty} p_{ij}\ln^2 p_{ij}}{j^2} < \infty, \quad \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sum\limits_{i=0}^{\infty} p_{ij}\ln^2 q_i}{j^2} < \infty, \tag{4}$$

то розмірність Хаусдорфа міри μ_ξ з незалежними I-Q_∞-символами дорівнює

$$\dim_H \mu_\xi = \varliminf_{n\to\infty}\frac{H_n}{B_n} =: D, \tag{5}$$

де

$$H_n = -\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{\infty} p_{ij}\ln p_{ij}, \qquad B_n = -\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{\infty} p_{ij}\ln q_i.$$

Підрозділ 2.6 присвячений розвитку нового метода побудови метричної, ймовірнісної та розмірнісної (хаусдорфової) теорій для I-Q_∞-зображень дійсних чисел та континуального сімейства формально різних зображень дійсних чисел на основі дослідження спеціальних відображень, які символи певного зображення переводять у ті ж символи іншого зображення з досліджуваного сімейства, і при цьому зберігають міру Лебега та розмірність Хаусдорфа–Безиковича (хоча при цьому можуть бути розривними на всюди щільних множинах). Такі відображення називатимемо G-відображеннями (G-ізоморфізмами систем числення) і вважатимемо, системи числення, між якими існує

G-відображення, тотожними (з точністю до G-ізоморфізму). В цьому ж підрозділі показується глибокий зв'язок між довірчістю систем покриттів, породжених різними системами числення, та DP-властивостями (збереженням розмірності Хаусдорфа-Безиковича) вказаних вище відображень. З цією метою ми розвиваємо методи доведення довірчості систем покриттів, породжених Q_∞- та I-Q_∞-зображеннями, та показуємо у підрозділі 2.7 як отримані результати дозволяють отримувати ймовірнісні, метричні та розмірнісні теорії нових систем числення.

Ми пропонуємо наступний підхід до дослідження ймовірнісних мір з незалежними I-Q_∞-символами: для фіксованого стохастичного вектора Q_∞ та фіксованого дійсного числа $I \in [0,1]$ ввести в розгляд відображення

$$\varphi\left(\Delta^{Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}\right) = \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots},$$

і дослідити умови, при виконанні яких дане відображення зберігає міру Лебега та розмірність Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку. Зауважимо, що властивості вказаного відображення суттєво залежать від обраного дійсного числа I.

Теорема 2.6.5. *Якщо системи $\hat{\Phi}$ і $\hat{\Phi}'$ є довірчими, то відображення φ зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку.*

Наступні теореми встановлюють довірчість для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича сімейств $\hat{\Phi}(Q_\infty)$ та $\hat{\Phi}(I\text{-}Q_\infty)$ при довільному виборі стохастичного вектора Q_∞ та дійсного числа I.

Теорема 2.6.6. *Нехай $\hat{\Phi} = \hat{\Phi}(Q_\infty)$ — сімейство, яке складається з циліндрів Q_∞-зображення та множин, які є об'єднаннями суміжних циліндрів одного рангу і належать до одного циліндра попереднього рангу. Сімейство $\hat{\Phi}(Q_\infty)$ є довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку при довільному виборі стохастичного вектора Q_∞.*

Теорема 2.6.7. *Нехай $\hat{\Phi} = \hat{\Phi}(I\text{-}Q_\infty)$ — сімейство, яке складається з циліндрів I-Q_∞-зображення та множин, які є об'єднаннями суміжних циліндрів одного рангу і належать до одного циліндра попереднього рангу. Нехай D — множина точок одиничного відрізка, які мають I-Q_∞-зображення. Тоді сімейство $\hat{\Phi}(I\text{-}Q_\infty)$ є довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на множині D при довільному виборі дійсного числа $I \in [0,1]$ та стохастичного вектора Q_∞.*

Таким чином наслідком трьох вище наведених теорем є наступний результат:

Теорема 2.6.8. *Відображення φ зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку.*

Метод, який використовується при доведенні теореми 2.6.6, можна застосувати для знаходження загальних достатніх умов довірчості для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича для сімейства $\Phi(Q_\infty)$, яке містить лише циліндри Q_∞-зображення.

Теорема 2.6.9. *Нехай*

$$f(\alpha, k, m) := \frac{\sum\limits_{i=k}^{m} q_i^\alpha}{\left(\sum\limits_{i=k}^{m} q_i\right)^\alpha} \quad i \quad f^*(\alpha) := \sup_{k,m} f(\alpha, k, m).$$

Якщо $f^*(\alpha) < +\infty, \forall \alpha > 0$, то сімейство циліндрів $\Phi(Q_\infty)$ — довірче для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на $[0, 1)$.

Наступна теорема важлива для розвитку метричної теорії I-Q_∞-зображень та дослідження лебегівської і спектральної структури ймовірнісних мір з незалежними I-Q_∞-символами.

Лема 2.6.3. *При довільному виборі стохастичного вектора Q_∞ та дійсного числа $I \in [0, 1]$ відображення φ зберігає міру Лебега на $(0, 1)$.*

У підрозділі 2.7 показано як отримані результати підрозділу 2.6 дозволяють досліджувати фрактальні властивості ймовірнісних мір з незалежними I-Q_∞-символами.

Наступна теорема узагальнює результати Р. Нікіфорова і Г. Торбіна про фрактальні властивості спектрів випадкових величин з незалежними однаково розподіленими Q_∞-символами, при довільному виборі параметра I та стохастичного вектора Q_∞ та P_∞.

Теорема 2.7.1. *Нехай ξ_k — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, які набувають значень $0, 1, 2, \ldots$ з ймовірностями $p_0, p_1, p_2, \ldots$ відповідно і нехай $V := \{i : p_i > 0\} = \{i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots\}$.*

Якщо для фіксованого вектора Q_∞ рівняння $\sum\limits_{i \in V} q_i^x = 1$ має корінь α_0 на одиничному відрізку, то розмірність Хаусдорфа–Безиковича спектра випадкової величини з незалежними I-Q_∞-символами дорівнює $\dim_H S_{\mu_\xi} = \alpha_0$.

Якщо ж рівняння $\sum\limits_{i\in V} q_i^x = 1$ *не має коренів на* $[0,1]$, *то*

$$\dim_H S_{\mu_\xi} = \dim_H(C[I\text{-}Q_\infty, V]) = \lim_{k\to\infty} \dim_H(C[I\text{-}Q_\infty, V_k]),$$

де $V_k = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, $k \in N, k \geqslant 2$.

В цьому ж підрозділі показано як отримані результати стосовно збереження міри Лебега та розмірності Хаусдорфа–Безиковича відображенням φ дозволяють досить просто отримати метричну та розмірнісну класифікацію дійсних чисел за асимптотичною поведінкою частот символів у їх I-Q_∞-зображенні, що природно узагальнює результати роботи С. Альбеверіо, Ю. Кондратьєва, Р. Нікіфорова і Г. Торбіна.

Теорема 2.7.4. *Метричні, фрактальні та топологічні властивості множин* $N(I\text{-}Q_\infty)$, $W(I\text{-}Q_\infty)$, $P(I\text{-}Q_\infty)$ *та* $L(I\text{-}Q_\infty)$ *характеризує наступна таблиця:*

	Міра Лебега	$\dim_H(\cdot)$	Категорія Бера
$N(I\text{-}Q_\infty)$	1	1	перша
$W(I\text{-}Q_\infty)$	0	1	перша
$P(I\text{-}Q_\infty)$	0	1	перша
$L(I\text{-}Q_\infty)$	0	1	друга

У підрозділі 2.8 знайдено загальні достатні умови довірчості для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича сімейств надциліндричних множин, породжених F- та I-F-зображеннями дійсних чисел та показано як отримані результати застосовуються до доведення довірчості сімейств надциліндричних множин, породжених розкладами Люрота, Остроградського–Серпінського–Пірса, Остроградського 2-го роду, Енгеля, Сільвестера, ланцюговими дробами.

Теорема 2.8.1. *Нехай* $x = \Delta^{I\text{-}F}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}$ *— деяке* I-F*-зображення дійсних чисел над послідовністю алфавітів* N_k. *Нехай* D *— множина точок одиничного відрізка, які мають* I-F*-зображення. Нехай* $\hat{\Phi} = \hat{\Phi}(I\text{-}F)$ *— сімейство множин, які є об'єднанням суміжних* I-F*-циліндрів одного рангу, що належать одному і тому ж* I-F*-циліндру попереднього рангу.*
Якщо існує константа $c \geqslant 1$ *така, що*

$$\frac{1}{c} \leqslant \frac{|\Delta^{I\text{-}F}_{\alpha_1\ldots\alpha_k m}|}{|\Delta^{I\text{-}F}_{\alpha_1\ldots\alpha_k(m+1)}|} \leqslant c, \forall k \in N, m \in N_{k+1}, (m+1) \in N_{k+1},$$

то $\hat{\Phi}(I\text{-}F)$ — довірче для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на множині D. Більше того $\hat{\Phi}(I\text{-}F)$ є порівнянним і

$$H^\alpha(E) \leqslant H^\alpha(E, \hat{\Phi}(I\text{-}F)) \leqslant 4c \cdot H^\alpha(E), \forall E \subset D.$$

Третій розділ дисертації присвячений розвитку ймовірнісного підходу до вивчення фрактальних властивостей підмножин анормальних чисел.

Підрозділи 3.1–3.6 присвячені розвитку ймовірнісного підходу до вивчення метричних властивостей анормальних чисел та застосуванню тонких фрактальних властивостей ймовірнісних мір з незалежними Q- та Q^*-символами до дослідження фрактальних властивостей підмножин множини анормальних чисел.

Властивості підмножин множини анормальних чисел інтенсивно вивчались останні роки з використанням різних підходів у роботах S. Albeverio , L. Barreira, Yu. Kondratiev, P. Нікіфорова, L. Olsen, M. Працьовитого, B. Saussol, J. Schmeling, N. Snigireva, Г. Торбіна, S. Winter та інших.

Нехай $\Omega_k = \{0, 1, 2, \ldots, s-1\}$ і $\Omega = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \Omega_k$. Для довільного $\omega \in \Omega$ означимо

$$\nu_i(\omega) = \lim_{k \to \infty} \frac{N_i(\omega, k)}{k}$$

(якщо границя існує) і розглянемо множини

$$E(\Omega) = \{\omega : \nu_i(\omega) \ \text{ існує } \ \forall i \in A = \{0, 1, \ldots, s-1\}\},$$

$$P(\Omega) = \{\omega : (\exists\ i \in A) : \nu_i(\omega) \ \text{ існує}, \quad (\exists\ j \in A) : \nu_j(\omega) \ \text{ не існує}\},$$

$$L(\Omega) = \{\omega : (\forall i \in A) : \nu_i(\omega) \ \text{ не існує}\}.$$

Оскільки на просторі Ω не введено ні метрики, ні міри, ні топології, то питання про метричні, топологічні чи фрактальні властивості множин $E(\Omega), P(\Omega), L(\Omega)$ не може бути вирішеним. З іншого боку, зрозуміло, що всі ці множини є континуальними.

Розглянемо тепер відображення $f : \Omega \to R^1$. Нехай $f(E), f(P), f(L)$ будуть образами $E(\Omega), P(\Omega), L(\Omega)$ при відображенні f. Властивості цих множин суттєво залежать від відображення f. Насправді, f породжує топологію та метрику на просторі Ω^*, який отриманий з простору Ω злиттям тих точок з Ω, які мають однакові f-образи.

Якщо, для прикладу, $f(\omega) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_k}{s^k}$, тоді $f(E) = E(s)$, $f(P) = P(s)$, $f(L) = L(s)$, і існує така підмножина $N(s) \subset E(s)$, що $\lambda(N(s)) = 1$ (де λ — міра Лебега на $[0, 1]$.)

У роботі С. Альбеверіо, Ю. Кондратьєва, Р. Нікіфорова і Г. Торбіна було сформульоване питання про залежність метричних, топологічних та фрактальних властивостей підмножин дійсних чисел від вибраного зображення f. Зокрема, було поставлено два питання:

«Суперфрактальність (тобто, рівність розмірності Хаусдорфа–Безиковича одиниці) множини суттєво анормальних чисел була доведена для ряду різних зображень дійсних чисел. Тому природно запитати чи існує таке зображення f, що:

2.1. для відповідної множини $L(f)$ f-суттєво анормальних чисел розмірність Хаусдорфа–Безиковича не рівна одиниці;

2.2. вся множина $D(f)$ f-анормальних чисел має розмірність Хаусдорфа–Безиковича не рівну одиниці?»

Основна мета підрозділів 3.5. та 3.6 полягає у вивченні фрактальних властивостей множин $f(E), f(P), f(L)$ для випадку коли відображення f індуковане Q^*-зображенням дійсних чисел. У цих підрозділах дано відповіді на наведені вище запитання.

Теорема 3.5.1. *Нехай* $Q^* = \|q_{ik}\|$, $i \in \{0, 1, 2\}$, $q_{2k} = \frac{1}{(k+1)^{k+1}}$, $q_{0k} = q_{1k} = \frac{1-q_{2k}}{2}$.
Тоді $\dim_H(L(Q^*)) = 0$.

Теорема 3.6.1. *Нехай* $Q^* = \|q_{ik}\|$, $i \in \{0, 1, 2, \ldots, s-1\}$,

$$q_{1k} = q_{2k} = \ldots = q_{s-1,k} = \begin{cases} \frac{1}{(s-1)(k+1)^{k+1}}, & \textit{якщо } k \in B; \\ \frac{1}{s}, & \textit{якщо } k \in A. \end{cases}$$

$$q_{0k} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{(k+1)^{k+1}}, & \textit{якщо } k \in B; \\ \frac{1}{s}, & \textit{якщо } k \in A. \end{cases},$$

де $A = \{n : n = 10^k, k \in N\}$, $B = \{n : n \neq 10^k, k \in N\}$.
Тоді $\dim_H(D(Q^*)) = 0$.

Крім того, у підрозділі 3.5 наведено загальні достатні умови аномальної фрактальності множини Q^*-суттєво анормальних чисел.

Теорема 3.5.2. *Нехай* $Q^* = \|q_{ik}\|$, $i \in A = \{0, 1, \ldots, s-1\}$, *і нехай* $\exists\ i_0 \in A$ *таке, що* $\forall \alpha > 0 : \lim\limits_{k\to\infty} s^k \cdot q^{\alpha}_{i_0,k} = 0$.
Тоді $\dim_H(L(Q^*)) = 0$.

У підрозділі 3.7 наведено приклад такого зображення дійсних чисел, для якого множина суттєво анормальних чисел є множиною першої категорії Бера.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена розвитку методів фрактального аналізу сингулярно неперервних ймовірнісних мір, вивченню тонких фрактальних властивостей ймовірнісних мір з незалежними I-Q_∞-символами. В роботі запропоновано новий підхід до розвитку метричної, ймовірнісної та розмірнісної теорій дійсних чисел на основі ідеї G-ізоморфізму. На основі здійснених в роботі нових підходів до доведення довірчості (для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича) локально тонких систем покриттів, отримано нові результати в теорії DP-перетворень та досліджено фрактальні властивості спектрів розподілів випадкових величин з незалежними I-Q_∞-символами. У роботі також спростовано гіпотезу про суперфрактальність множини суттєво анормальних чисел незалежно від обраної системи числення.

Основними науковими результатами, що виносяться на захист, є такі:

— розроблено новий метод доведення довірчості локально тонких систем покриттів для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича підмножин одиничного відрізка; даний метод застосовано для доведення гіпотези про довірчість систем надциліндрів Q_∞- та I-Q_∞-зображень дійсних чисел для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича (у тому числі і для тих моделей, коли відповідні системи циліндрів не є довірчими); знайдено достатні умови порівнянності мір Хаусдорфа, породжених системою надциліндрів узагальненого F-зображення дійсних чисел;

— досліджено лебегівську структуру, тополого-метричні властивості спектрів, спектральну структуру розподілів випадкових величин з незалежними I-Q_∞-символами;

— знайдено явні формули для обчислення розмірності Хаусдорфа розподілів випадкових величин з незалежними I-Q_∞-символами.

— доведено гіпотезу про те, що відображення φ, яке переводить символи Q_∞-зображення в символи I-Q_∞-зображення, зберігає міру Лебега та розмірність Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку; на основі даного результату показано ізо-

морфізм ймовірнісних та розмірнісних теорій Q_∞- та I-Q_∞-зображень дійсних чисел;
— досліджено фрактальні властивості спектрів розподілів випадкових величин з незалежними I-Q_∞-символами;
— на основі ймовірнісного підходу доведено суперфрактальність множини Q-суттєво анормальних чисел; доведено суперфрактальність множини I-Q_∞-суттєво анормальних чисел;
— спростовано гіпотезу про суперфрактальність множини суттєво анормальних чисел незалежно від вибору системи числення; знайдено достатні умови аномальної фрактальності множини Q^*-суттєво анормальних чисел.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Albeverio S. Non-normal numbers: Full Hausdorff dimensionality vs zero dimensionality / S. Albeverio, I. Garko, M. Ibragim, G. Torbin // Bulletin des Sciences Mathematiques. — 2016. — Vol. 141, no. 1. — P. 1–19.
2. Гарко І. Про залежність фрактальних властивостей множини суттєво анормальних чисел від системи числення / І. Гарко, Г. Торбін // Науковий часопис НПУ імені Драгоманова. Серія 1: Фізико-математичні науки. — 2012. — Т. 13. — С. 73–80.
3. Гарко І. G-ізоморфізм систем числення та довірчість систем покриттів. I / І. Гарко, Р. Нікіфоров, Г. Торбін // Науковий часопис НПУ імені Драгоманова. Серія 1: Фізико-математичні науки. — 2014. — Т. 16, № 1. — С. 120–133.
4. Гарко І. G-ізоморфізм систем числення та довірчість систем покриттів. II / І. Гарко, Р. Нікіфоров, Г. Торбін // Науковий часопис НПУ імені Драгоманова. Серія 1: Фізико-математичні науки. — 2014. — Т. 16, № 2. — С. 6–17.
5. Гарко І. Про G-ізоморфізм ймовірнісних та розмірнісних теорій розкладів дійсних чисел та фрактальну довірчість систем покриттів / І. Гарко, Р. Нікіфоров, Г. Торбін, // Теорія ймовірностей та математична статистика. — 2016. — № 94. — С. 16–35.
6. Гарко І. Самоподібні фрактали в метричних просторах // Студентські фізико-математичні етюди. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2010. — № 9. — С. 70–77.
7. Гарко І. Про суперфрактальність множини Q-суттєво анормальних чисел // Студентські фізико-математичні етюди. — Київ:

Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2012. — № 11, Т. 1. — С. 41–48.

8. Гарко І. Про топологічні властивості графіків функцій, що зберігають розмірність Хаусдорфа-Безиковича // Студентські фізико-математичні етюди. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2013. — № 12, Т. 1. — С. 5–12.
9. Гарко І. Про зображення дійсних чисел та проблеми, з ним пов'язані / І. Гарко, Г. Торбін // Матеріали міжнародної наукової конференції «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь», присвячена 80-річчю Шкіля М. І., 13–14 грудня 2012 р., Київ, Україна. — С. 48–49.
10. Гарко І. Методичні аспекти вивчення елементів фракталів у школі // Матеріали міжнародної наукової конференції «Актуальні проблеми методології та методики навчання фізико-математичних дисциплін», присвяченої 80-річчю Горбачука І. Т., 18 січня 2013 р, Київ, Україна. — С. 199.
11. Гарко І. Про залежність фрактальних властивостей множини суттєво анормальних чисел від системи числення // Матеріали XVI Всеукраїнської науково-практичної конференції «Молодь, освіта, наука, культура і національна самосвідомість в умовах європейської інтеграції», 25–26 квітня 2013 р., Київ, Україна. — С. 24.
12. Garko I. On relations between systems of numerations and fractal properties of sets of non-normal and essentially non-normal numbers // Materials of The Fifth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations, September 16–20, 2013, Kyiv, Ukraine. — P. 93–95.
13. Гарко І. Про залежність суперфрактальності множини суттєво анормальних чисел від системи числення // Матеріали міжнародної наукової конференції «Методика викладання математики в середній та вищій школі», присвяченої 75-річчю Колесник Т. В., 4 грудня 2013 р, Київ, Україна. — С. 45.
14. Гарко І. Суттєво анормальні числа: нові результати та відкриті проблеми // Матеріали XVII Всеукраїнської науково-практичної конференції «Молодь, освіта, наука, культура і національна самосвідомість в умовах європейської інтеграції», 25–26 квітня 2014 р., Київ, Україна. — С. 34.
15. Гарко І. Про ймовірнісний підхід до аналізу фрактатальних властивостей множини суттєво анормальних чисел // Матеріали

П'ятнадцятої міжнародної наукової конференції імені академіка М. Кравчука, 15–17 травня 2014 р., Київ, Україна. — С. 39.
16. Garko I. On new approach to the study of fractal properties of probability measures with independent $x-Q_\infty$-digits // Materials of the International conference «Probability, Reability and Stochastic Optimization», April 7–10, 2015, Kyiv, Ukraine. — P. 18–19.
17. Garko I. On fractal properties of probability measures with independent I-Q_∞-digits // Materials of the International Conference Dynamical System And Their Application, June 22–26, 2015, Kyiv, Ukraine. — P. 59.
18. Гарко I. Про фрактальну довірчість систем покриттів, породжену I-Q_∞-розкладами та її застосування // Матеріали П'ятої Всеукраїнської наукової конференції молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання», 25–26 квітня 2016 р., Київ, Україна. — С. 48.
19. Гарко I. Фрактальні властивості ймовірнісних мір, породжених поліосновними розкладами дійсних чисел та їх застосування // Матеріали Всеукраїнської науково-методичної конференції «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі», пам'яті Левіщенка С. С., 7–8 жовтня 2016 р., Київ, Україна. — С. 39.
20. Гарко I. Про G-ізоморфізм ймовірнісних теорій систем числення та фрактальну довірчість сімейств покриттів / I. Гарко, Р. Нікіфоров, Г. Торбін // Матеріали Сімнадцятої міжнародної наукової конференції імені академіка М. Кравчука, секція III: Теорія ймовірностей та математична статистика, 19–20 травня 2016 р., Київ, Україна. — С. 36–39.
21. Гарко I. Фрактальні властивості ймовірнісних мір, породжених поліосновними розкладами дійсних чисел та їх застосування // Матеріали Шостої Всеукраїнської наукової конференції молодих вчених з математики та фізики, 21–22 квітня 2017 р., Київ, Україна. — С. 59.
22. Garko I. On relations between systems of numerations and fractal properties of subsets of non-normal numbers // Materials of the International Conference «Numeration 2017», June 5–9, 2017, Rome, Italy. — P. 125.

АНОТАЦІЯ

Гарко І. І. Фрактальні властивості ймовірнісних мір, породжених поліосновними розкладами дійсних чисел, та їх застосування. — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 — теорія ймовірностей та математична статистика. — Інститут математики НАН України, Київ, 2017.

Дисертація присвячена розвитку підходів до дослідження сингулярно неперервних ймовірнісних мір, породжених поліосновними розкладами дійсних чисел. У роботі представлено новий метод побудови метричної, ймовірнісної та розмірнісної теорій сімейств зображень дійсних чисел на основі дослідження спеціальних відображень, які символи одного з цих зображень переводять у ті ж символи іншого зображення з досліджуваного сімейства, і при цьому зберігають міру Лебега та розмірність Хаусдорфа–Безиковича. Особлива увага приділена розвитку ймовірнісної та розмірнісної теорій Q_∞- та I-Q_∞-зображень дійсних чисел.

У дисертації знайдено загальні достатні умови довірчості для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича сімейств надциліндричних множин, породжених I-F-зображенням дійсних чисел, яке містить в собі як частинні випадки ланцюгові розклади, Q^*-розклади, Q_∞-розклади, розклади Люрота, Сільвестера, Остроградського–Серпінського–Пірса, Енгеля.

Також розвинено ймовірнісний підхід до дослідження залежності метричних, топологічних і фрактальних властивостей множин анормальних та суттєво анормальних чисел від системи числення. Доведено суперфрактальність множини $L(Q)$ Q-суттєво анормальних чисел для довільного Q-зображення дійсних чисел. Спростовано дві гіпотези, які були домінуючими серед фахівців протягом останніх 10 років: по-перше, показано, що існують системи числення, для яких множина суттєво анормальних дійсних чисел не є множиною другої категорії Бера; по-друге, спростована гіпотеза про суперфрактальність множини суттєво анормальних чисел для довільного зображення дійсних чисел.

Ключові слова: сингулярно неперервні ймовірнісні міри, розмірність Хаусдорфа–Безиковича, фрактали, Q_∞-зображення, I-Q_∞-зображення, Q^*-зображення, I-F-зображення, довірчі системи покриттів, DP-перетворення, G-ізоморфізм систем числення, анормальні чи-

сла, суттєво анормальні числа.

АННОТАЦИЯ

Гарко И. И. Фрактальные свойства вероятностных мер, порожденных полиосновными разложениями вещественных чисел, и их приложения.— Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика. — Институт математики НАН Украины, Киев, 2017.

Диссертационная работа посвящена развитию подходов к исследованию сингулярно непрерывных вероятностных мер, порожденных полиосновными разложениями вещественных чисел. В работе представлено новый метод построения метрической, вероятностной и размерностной теорий семейств изображений вещественных чисел на основании исследования специальных отображений, которые символы одного из этих изображений переводят в те же символы другого изображения из исследуемого семейства, и при этом сохраняют меру Лебега и размерность Хаусдорфа–Безиковича. Особое внимание уделено развитию вероятностной и размерностной теорий Q_∞- и I-Q_∞-изображений вещественных чисел.

В диссертации найдены общие достаточные условия доверительности для вычисления размерности Хаусдорфа–Безиковича семейств надцилиндрических множеств, порожденных I-F-изображениями вещественных чисел, которое содержит в себе в качестве частных случаев разложения цепными дробями, Q^*-разложения, Q_∞-разложения, разложения Люрота, Сильвестера, Остроградского–Серпинского–Пирса, Энгеля.

В работе развит вероятностный подход к исследованию зависимости метрических, топологических и фрактальных свойств множеств анормальных и существенно анормальных чисел от системы исчисления. Доказана суперфрактальность множества $L(Q)$ Q-существенно анормальных чисел для произвольного Q-изображения вещественных чисел. Опровергнуто две гипотезы, которые были доминирующими среди специалистов в течении последних 10 лет: во-первых, показано, что существуют системы исчисления, для которых множество существенно анормальных вещественных чисел может не быть множеством второй категории Бэра; во-вторых, опровергнута гипотеза о суперфрактальности множества существенно анормальных чисел для

произвольного изображения вещественных чисел.

Ключевые слова: сингулярно непрерывные вероятностные меры, размерность Хаусдорфа–Безиковича, фракталы, I-Q_∞-изображение, Q_∞-изображение, Q^*-изображение, I-F-изображение, доверительные системы покрытий, DP-преобразования, G-изоморфизм систем счисления, анормальные числа, существенно анормальные числа.

ABSTRACT

Harko I. I. Fractal properties of probability measures generated by polybasic expansions of real numbers, and its applications. — Manuscript.

The thesis for Ph. D. on Physics and Mathematics, speciality 01.01.05 — probability theory and mathematical statistics. — Institute for Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2017.

Thesis is devoted to the development of methods for the study of singularly continuous probability measures generated by polybasic expansions of real numbers. The metric, probabilistic and dimensional theories for families of representations of real numbers were intensively developed during the XX century, beginning with the works of V. Jarnik, B. Bissinger, S. Everett, A. Renyi, P. Erdos, P. Billingsley, J. Kinney, F. Schweiger, T. Pitcher etc. We develop a new method for the construction of metric, probabilistic and dimensional theories for families of representations of real numbers via studies of spacial mappings under which symbols of a given representation are mapped into the same symbols of other representation from the same family, and they preserve the Lebesgue measure and the Hausdorff–Besicovitch dimension. We show a rather deep connection between the faithfulness of systems of coverings, generated by different representations, and DP-properties of the above mentioned mappings. A special attention is paid to the development of probabilistic and dimensional theory of Q_∞- and I-Q_∞-representations of real numbers. We prove that the random variable with independent I-Q_∞-symbols has a distribution of pure type. We also show that a singularly continuous random variable with independent I-Q_∞-digits has a distribution of a pure topological-metric type. Furthermore we get the spectral characterization and exact formula for the Hausdorff–Besicovitch dimension of spectra resp. minimal dimensional supports of probability measures with independent I-Q_∞-digits.

In the thesis we found general sufficient conditions of faithfulness

for the calculation of the Hausdorff–Besicovitch dimension of families of overcylindrical sets generated by I-F-representation of real numbers, which contains as partial cases the continued fractions expansion, Q^*-expansions, Q_∞-expansions, Lüroth expansions, Sylvester expansion, Ostrogradsky–Serpinsky–Pierce expansion, Engel expansion.

We also study a relation between the "normality" properties of real numbers and properties of the "asymptotic frequencies" of their digits in some system of numeration (this problem was intensively investigated during last decade by S. Albeverio, M. Pratsiovytyi, G. Torbin, R. Nikiforov, L. Olsen, E. Zoli and others). The last section of the thesis is devoted to the development of probabilistic approach to the study the dependence of metric, topological and fractal properties of numbers which are non-normal resp. essentially non-normal w.r.t. a chosen system of numeration. In particular, we solve open problems mentioned in the paper of Albeverio S., Kondratiev Yu., Nikiforov R., Torbin G. and prove that there exist representations (the Q^*-representations) for real numbers such that the corresponding sets of essentially non-normal numbers and even the whole set of non-normal numbers are of zero Hausdorff–Besicovitch dimension. Sufficient conditions for full dimensionality resp. zero dimensionality of the set of essentially non-normal numbers are also presented. We also introduce a generalized cylindrical representation of real numbers which contains as partial cases all representations for real numbers, which were considered in the existing literature. Based on this representation, we consider the generated class of probability distributions with independent symbols which are not necessary of a pure Lebesgue type. We also show that there exist generalized cylindrical representations for which the set of essentially non-normal numbers is not of the second Baire category.

Key words: singularly continuous probability measures, Hausdorff–Besicovitch dimension, fractals, Q_∞-representations, I-Q_∞-representations, Q^*-expansion, I-F-representation, faithful covering systems, DP-transformations, G-isomorphism of expansions, non-normal numbers, essentially non-normal numbers.