Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова
Міністерство освіти і науки України
Інститут математики
Національна академія наук України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Гарко Ірина Ігорівна

УДК 519.21

ДИСЕРТАЦІЯ

Фрактальні властивості ймовірнісних мір, породжених поліосновними розкладами дійсних чисел, та їх застосування

01.01.05 – Теорія ймовірностей і математична статистика

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень.
Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело І.І. Гарко

Науковий керівник
Торбін Григорій Мирославович,
доктор фізико-математичних наук, професор

Київ – 2017

АНОТАЦІЯ

Гарко І.І. Фрактальні властивості ймовірнісних мір, породжених поліосновними розкладами дійсних чисел, та їх застосування. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.05 «Теорія ймовірностей і математична статистика». Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова, Інститут математики НАН України, Київ, 2017.

Дисертація присвячена розвитку нових підходів до дослідження сингулярно неперервних ймовірнісних мір, породжених поліосновними розкладами дійсних чисел, вивченню фрактальних властивостей розподілів випадкових величин з незалежними символами таких розкладів і застосуванню отриманих результатів у ймовірнісній, метричній та розмірнісній теорії чисел. На сьогодні існує значна кількість систем зображення дійсних чисел, які суттєво між собою відрізняються (див., наприклад, [1–5]). Для кожної системи існують класи фракталів та інших математичних об'єктів, які активно досліджуються сучасними математиками. Метрична, ймовірнісна та фрактальна теорії розкладів дійсних чисел інтенсивно розвивались протягом XX століття, починаючи з робіт В.Ярніка (V.Jarnik), Б.Біссінджера (B.Bissinger), С.Еверетта (S.Everett), А.Рен'ї (A.Renyi), П.Ердеша (P.Erdos), П. Біллінгслі (P.Billingsley), Дж.Кінні (J. Kinney), Т.Пітчера (T. Pitcher), Ф. Швайгера (F. Schweiger) та ін. Особливо важливим для розвитку фрактального аналізу та теорії сингулярних ймовірнісних мір є розвиток та удосконалення методів обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича (та інших фрактальних розмірностей) множин та мір, пов'язаних з певними си-

стемами числення; методів встановлення сингулярності ймовірнісних мір та дослідження їх тонких фрактальних властивостей; усвідомлення аналогій між метричними, ймовірнісними та розмірнісними теоріями різних розкладів та узагальнення на основі цього відповідних методів побудови цих теорій.

Перший розділ дисертації містить опис основних понять, фактів та методів, які відіграють важливу роль у дослідженні. Основними в дисертації є другий та третій розділи.

Другий розділ дисертації присвячений розвитку нового методу побудови метричної, ймовірнісної та розмірнісної теорій сімейств зображень дійсних чисел на основі дослідження спеціальних відображень, які символи одного з цих зображень переводять у ті ж символи іншого зображення з досліджуваного сімейства, і при цьому зберігають міру Лебега та розмірність Хаусдорфа–Безиковича (хоча можуть бути розривними на всюди щільних множинах). Такі відображення називаються G-відображеннями (G-ізоморфізмами систем числення). Метричні, ймовірнісні та розмірнісні теорії системи числення, між якими існує G-відображення, є тотожними (з точністю до G-ізоморфізму). У роботі показується глибокий зв'язок між довірчістю систем покриттів, породжених різними системами числення, та DP-властивостями вказаних вище відображень. Особлива увага приділена розвитку розмірнісної теорії Q_∞- та I-Q_∞-зображень дійсних чисел. З цією метою ми розвиваємо методи доведення довірчості систем покриттів, породжених Q_∞ та I-Q_∞-зображенням, та показуємо як отримані результати дозволяють отримувати розмірнісні теорії нових систем числення.

У роботі знайдено загальні достатні умови довірчості для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича сімейств надциліндричних множин, породжених I-F-зображенням дійсних чисел, яке містить в собі як частинні випадки ланцюгові розклади, Q^*-розклади ([6,7]), Q_∞-розклади ([8,9]), розклади Люрота ([3, 4]), Сільвестера ([10]), Остроградського–Серпінського–

Пірса ([5, 11]), Енгеля ([12, 13]).

Однією із актуальних проблем є залежність між властивостями «нормальності» дійсних чисел та частотами їх цифр у системі числення, в якій вони розглядаються. Дослідженнями цієї проблематики для класичного s-адичного зображення числа займалися С. Альбеверіо, М. Працьовитий, Г. Торбін, L.Olsen, E.Zoli та ін. До 1994 року множина анормальних чисел вважалась «достатньо малою» як в смислі міри Лебега, так і в смислі розмірності Хаусдорфа-Безиковича. У 2005 р. в роботі [14] було отримано посилений результат роботи 1995 р. і доведено, що множина $L(s)$ суттєво анормальних чисел суперфрактальна і є множиною другої категорії Бера, тобто множина $L(s)$ є наймасивнішою як в топологічному, так і в фрактальному розумінні, але при цьому є «малою» в сенсі міри Лебега. Крім того, у роботі [14] було розглянуто узагальнення s-адичного зображення — Q^*-зображення дійсних чисел і було встановлено існування таких Q^*-зображень дійсних чисел, що частоти всіх цифр не існують для майже всіх (в сенсі міри Лебега) дійсних чисел з $[0, 1]$. Після доведення суперфрактальності множин анормальних та суттєво анормальних чисел для s-адичного та деяких інших розкладів і конструювання таких систем числення, для яких множина суттєво анормальних чисел мала повну міру Лебега, домінуючою стала гіпотеза про те, що суперфрактальність (як і належність до другої категорії Бера) є інваріантною властивістю множини суттєво анормальних чисел і не залежить від вибору системи числення.

Третій розділ дисертації присвячений розвитку ймовірнісного підходу до дослідження залежності метричних, топологічних і фрактальних властивостей множин анормальних та суттєво анормальних чисел від системи числення. Спочатку в роботі досліджуються сімейства сингулярно неперервних ймовірнісних мір, в якості спектрів яких виступають підмножини Q-суттєво анормальних чисел. Тонкий фрактальний аналіз таких мір дозволяє отримати оцінки фрактальної розмірності множини $L(Q)$ суттєво анормальних дійсних чисел відрізка $[0,1]$, тобто множини дійсних чисел, в Q-розкладі яких жодна цифра не має частоти. На основі цих оцінок доводиться, що множина $L(Q)$ є суперфракталом, тобто множиною нульової міри Лебега, розмірність Хаусдорфа–Безиковича якої дорівнює 1.

В роботі введено в розгляд і обґрунтовано узагальнене циліндричне зображення дійсних чисел, яке містить як часткові випадки всі методи зображення дійсних чисел, які розглядались в існуючій літературі (в роботах К.Даяні, К.Краaікампа, М.Працьовитого, Г.Торбіна, Ф.Швайгера). На основі введеного зображення розглядається породжений клас ймовірнісних розподілів, які, на відміну від традиційно розглядуваних в літературі ([15]), не завжди мають чистий тип розподілу.

Використовуючи апарат введеного зображення спростовано дві гіпотези, які були домінуючими серед фахівців протягом останніх 10 років.

По-перше, показано, що існують узагальнені циліндричні системи числення, для яких множина суттєво анормальних дійсних чисел не є множиною другої категорії Бера (але при цьому доведено, що множина анормальних чисел, тобто тих дійсних чисел, для яких відсутня частота хоча б однієї цифри, завжди є залишковою, тобто множиною, доповнення якої є множиною першої категорії Бера).

По-друге, в роботі спростована гіпотеза про суперфрактальність множини суттєво анормальних чисел для довільного зображення дійсних чисел. Показано, що навіть для структурно подібних Q^*-розкладів дійсних чисел множина $L(Q^*)$-суттєво анормальних чисел може мати нульову розмірність Хаусдорфа-Безиковича: $\dim_H(L(Q^*)) = 0$. Більше того, в роботі доведено існування Q^*-розкладів, для яких навіть множина $D(Q^*)$ всіх анормальних чисел має нульову розмірність Хаусдорфа-Безиковича. На основі запропонованих в роботі методів знайдено загальні достатні умови, при виконанні яких розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини суттєво анормальних чисел дорівнює нулю.

Ключові слова: сингулярно неперервні ймовірнісні міри, розмірність Хаусдорфа–Безиковича, фрактали, Q_∞-зображення, I-Q_∞-зображення, довірчі системи покриттів, DP-перетворення, G-ізоморфізм систем числення, анормальні числа, суттєво анормальні числа, Q^*-зображення, I-F-зображення.

Thesis is devoted to the development of new approaches to the study of singularly continuous probability measures generated by polybasic expansions of real numbers, to the study of fractal properties of distributions of random variables with independent symbols of such expansions and to the applications of obtained results to probabilistic, metric and dimensional theories of numbers. There are a lot of different systems of numerations and each of them has its own specificity in the investigation of some mathematical objects (see, [1–5]). The metric, probabilistic and dimensional theories for families of representations of real numbers were intensively developed during the XX century, starting from works of V.Jarnik, B.Bissinger, S.Everett, A.Renyi, P.Erdos, P.Billingsley, J. Kinney, T. Pitcher, F. Schweiger etc. For the development of the fractal analysis and the theory of singularly probability measures it is important to understand the analogy between the metric, probabilistic and dimensional theories of different representations.

The first section of the thesis contains descriptions of main notions, facts and methods which play important role in our investigations.

The second section of the thesis is devoted to the development of a new method for the construction of metric, probabilistic and dimensional theories for families of representations of real numbers via studies of spacial mappings, under which symbols of a given representation are mapped into the same symbols of other representation from the same family, and they preserve the Lebesgue measure and the Hausdorff–Besicovitch dimension (for such mappings the set of points of discontinuity can be everywhere dense). These mappings are

said to be G-mappings (G-isomorphisms of representations). Metric, probabilistic and dimensional theories of G-isomorphic representations are identical. We show a rather deep connection between the faithfulness of systems of coverings, generated by different representations, and DP-properties of the above mentioned mappings. A special attention is paid to the development of the dimensional theory of Q_∞- and I-Q_∞-representations of real numbers and to methods for proving of faithfulness of coverings, generated by Q_∞- and I-Q_∞-representations.

In the thesis we found general sufficient conditions of faithfulness for the calculation of the Hausdorff–Besikovich dimension of families of hyper-cylindrical sets, generated by I-F-representation of real numbers, which contains as partial cases the continued fractions expansions, Q^*-expansions ([6, 7]), Q_∞-expansions ([8, 9]), Lüroth expansions ([3, 4]), Sylvester expansions ([10]), Ostrogradsky-Serpinsky– Pierce expansions ([5, 11]), Engel expansions ([12, 13]).

For each system of numeration there exist specific connections between «normal» properties of real numbers and properties of the «asymptotic frequencies».

One of the main problems is the relation between the «normal» properties of real numbers and properties of the «asymptotic frequencies» their digits in some system of numeration. This problem was investigated for the classical s-sdic expansion by S. Albeverio, M. Pratsiovytyi, G. Torbin, L.Olsen, E.Zoli. By 1994 the set of non-normal $D(s)$ was considered as a «rather small» one in the sense of Lebesgue measure as well as in the sense of the Hausdorff–Besicovitch dimension. But it has been proven in 1994 by M.Pratsiovytyi and G.Torbin, that the set $D(s)$ is superfractal (i.e., $\dim_H D(s) = 1$). From these results it follows that essentially non-normal numbers are generic in the topological sense as well as in the sense of fractal geometry, nevertheless the set $L(s)$ is small from the Lebesgue measure point of view. After the proving of superfractality of sets of non-normal and essentially non-normal numbers for s -adic and some other expansions and constructing such systems of numeration for which the set of essentially non-normal numbers is of full Lebesgue measure, the conjecture on superfractality (as belonging to the second Baire category) of the set of essentially non-normal numbers became dominating for all systems of numeration.

In the thesis we study the dependence of fractal and metric properties of numbers which are non-normal resp. essentially non-normal w.r.t. a chosen system of numeration. In particular, we solve open problems mentioned in [16] and prove that there exist expansions (the Q^*-expansions or Q^*-representations) for real numbers such that the corresponding sets of essentially non-normal numbers and even the whole set of non-normal numbers are of zero Hausdorff dimension. Sufficient conditions for full dimensionality resp. zero dimensionality of the set of essentially non-normal numbers are also presented.

Key words: singularly continuous probability measures, Hausdorff-Besicovitch dimension, fractals, Q_∞-representations, I-Q_∞-representations, faithful covering systems, DP-transformations, G-isomorphism of expansions, non-normal numbers, essentially non-normal numbers, Q^*-expansion, I-F-representation.

Список публікацій здобувача:

1. Albeverio S., Garko I., Ibragim M., Torbin G. *Non-normal numbers: full Hausdorff dimensionality vs zero dimensionality* // Bull. Sci. Math. **141** (2016), № 1, P. 1–19.

2. Гарко І.І., Нікіфоров Р.О., Торбін Г.М. *Про G-ізоморфізм ймовірнісних та розмірнісних теорій розкладів дійсних чисел та фрактальну довірчість систем покриттів.* // Теорія ймовірностей і математична статистика, – 2016, №94, С. 16–35.

3. Гарко І.І., Торбін Г.М. *Про залежність фрактальних властивостей множини суттєво анормальних чисел від системи числення* //Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.

Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова,– 2012, -№ 13. — С.73-80.

4. Гарко І.І., Нікіфоров Р.О., Торбін Г.М. *G-ізоморфізм систем числення та довірчість систем покриттів. I.* // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1: Фізико-математичні науки, 16 (2014), №1, С. 120–133.

5. Гарко І.І., Нікіфоров Р.О., Торбін Г.М. *G-ізоморфізм систем числення та довірчість систем покриттів. II.* // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1: Фізико-математичні науки, 16 (2014), №2, С. 6-17.

6. Гарко І.І. *Самоподібні фрактали в метричних просторах.* // Студентські фізико-математичні етюди. – Київ: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова. -– 2010. – № 9, – С.70-77.

7. Гарко І.І. *Про суперфрактальність множини Q-суттєво анормальних чисел.* // Студентські фізико-математичні етюди. – Київ: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова. -– 2012. – № 11, том 1, – С.41-48.

8. Гарко І.І. *Про топологічні властивості графіків функцій, що зберігають розмірність Хаусдорфа-Безиковича.* // Студентські фізико-математичні етюди. – Київ: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова. -– 2013. – № 12, том 1, – С.5-12.

9. Гарко І.І., Торбін Г.М. *Про x-Q_∞-зображення дійсних чисел та проблеми, з ним пов'язані*// Матеріали міжнародної наукової конференції «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь», присвячена 80-річчю Шкіля М.І., 13-14 грудня 2012 р., Київ, Україна, С. 48.

10. Гарко І.І. *Методичні аспекти вивчення елементів фракталів у школі* // Матеріали міжнародної наукової конференції «Актуальні проблеми методології та методики навчання фізико-математичних дисциплін», присвяченої 80-річчю Горбачука І.Т., 18 січня 2013 р, Київ, Україна, С. 199.

11. Гарко І.І. *Про залежність фрактальних властивостей множини суттєво анормальних чисел від системи числення* // Матеріали XVI Все-

української науково-практичної конференції «Молодь, освіта, наука, культура і національна самосвідомість в умовах європейської інтеграції», 25-26 квітня 2013 р., Київ, Україна, С. 24.

12. Garko I. *On relations between systems of numerations and fractal properties of sets of non-normal and essentially non-normal numbers* // Materials of The Fifth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations, September 16-20, 2013, Kyiv, Ukraine, P. 93-95.

13. Гарко І.І. *Про залежність суперфрактальності множини суттєво анормальних чисел від системи числення* // Матеріали міжнародної наукової конференції «Методика викладання математики в середній та вищій школі», присвяченої 75-річчю Колесник Т.В., 4 грудня 2013 р, Київ, Україна, С. 45.

14. Гарко І.І. *Суттєво анормальні числа: нові результати та відкриті проблеми* // Матеріали XVII Всеукраїнської науково-практичної конференції «Молодь, освіта, наука, культура і національна самосвідомість в умовах європейської інтеграції», 25-26 квітня 2014 р., Київ, Україна, С. 34.

15. Гарко І.І. *Про ймовірнісний підхід до аналізу фрактатальних властивостей множини суттєво анормальних чисел* // Матеріали П'ятнадцятої міжнародної наукової конференції імені академіка Михайла Кравчука, секція III: Теорія ймовірностей та математична статистика, 15–17 травня 2014 р., Київ, Україна, С. 39.

16. Garko I.I. *On New Approach to the Study of Fractal Properties of Probability Measures with Independent* x-Q_∞*-digits* // Materials of the International conference «Probability, Reability and Stochastic Optimization», April 7-10, 2015, Kyiv, Ukraine, P.18-19.

17. Garko I. *On Fractal Properties of Probability Measures with Independent* $I - Q_\infty$*-digits* // Materials of the International Conference Dynamical System And Their Application, June 22-26, 2015, Kyiv, Ukraine, P. 59.

18. Гарко І.І. *Про фрактальну довірчість систем покриттів, породже-*

ну I-Q_∞-розкладами та її застосування // Матеріали П'ятої Всеукраїнської наукової конференції молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання», 25–26 квітня 2016 р., Київ, Україна, С. 48.

19. Гарко І.І., Нікіфоров Р.О., Торбін Г.М. *Про G-ізоморфізм ймовірнісних теорій систем числення та фрактальну довірчість сімейств покриттів*// Матеріали Сімнадцятої міжнародної наукової конференції імені академіка Михайла Кравчука, секція III: Теорія ймовірностей та математична статистика, 19–20 травня 2016 р., Київ, Україна, С. 36–39.

20. Гарко І.І. *Фрактальні властивості ймовірнісних мір, породжених поліосновними розкладами дійсних чисел та їх застосування* // Матеріали Всеукраїнської науково-методичної конференції «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі», пам'яті Левіщенка С.С., 7-8 жовтня 2016 р., Київ, Україна, С. 39.

21. Гарко І.І. *Фрактальні властивості ймовірнісних мір, породжених поліосновними розкладами дійсних чисел та їх застосування*// Матеріали Шостої Всеукраїнської наукової конференції молодих вчених з математики та фізики, 21–22 квітня 2017 р., Київ, Україна, С. 59.

22. Garko I.I. *On relations between systems of numerations and fractal properties of subsets of non-normal numbers* // Materials of the International conference «Numeration 2017», June 5–9, 2017, Roma, Italy, P. 125.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Дисертація присвячена розвитку підходів до дослідження сингулярно неперервних ймовірнісних мір, породжених поліосновними розкладами дійсних чисел. На сьогодні існує багато систем числення (методів зображення (кодування) дійсних чисел чи елементів з деякого простору) з використанням постійного (скінченного чи нескінченного) алфавіту або змінного алфавіту (послідовності алфавітів) (див., наприклад, монографії [1–5]). Кожна система числення має свою специфіку і переваги у заданні чи дослідженні певних математичних об'єктів, відповідну метричну, ймовірнісну та розмірнісні (в сенсі розмірності Хаусдорфа–Безиковича та інших фрактальних розмірностей) теорії. Метрична, ймовірнісна та фрактальна теорії розкладів дійсних чисел інтенсивно розвивались протягом XX століття, починаючи з робіт В.Ярніка (V.Jarnik), Б.Біссінджера (B.Bissinger), С.Еверетта (S.Everett), А.Рен'ї (A.Renyi), П.Ердеша (P.Erdos), П. Біллінгслі (P.Billingsley), Дж.Кінні (J. Kinney), Т.Пітчера (T. Pitcher), Ф. Швайгера (F. Schweiger) та ін. Інтерес до розвитку таких теорій суттєво посилився наприкінці XX століття у зв'язку з «фрактальним бумом» у математиці та природознавстві. Незважаючи на це, для багатьох класичних розкладів дійсних чисел відповідні ймовірнісні та розмірнісні теорії все ще перебувають на конструктивному етапі розвитку. В якості прикладу можна навести ланцюгові дроби ([17, 18]), розклади Кантора ([19, 20]), розклади Остроградського–Серпінського–Пірса ([5, 11]), Q_∞-розклади ([8, 16, 21]) та багато інших.

Добре відомо, що клас сингулярно неперервних ймовірнісних мір є найменш дослідженим сімейством чистих мір, хоча їх дослідження здійснювалось протягом майже всього XX ст. (див., наприклад, [8, 22–62]) Значна кількість робіт присвячена дослідженню фрактальних властивостей ймовірнісних мір, що породжуються різними розкладами дійсних чисел. Протягом двох останніх десятиліть проводяться досить інтенсивні дослідження із загальної теорії сингулярно неперервних ймовірнісних мір та методів встановлення сингулярності, створення нових методів фрактального та мультифрактального аналізу та їх реалізація в певних класах мір, класифікації сингулярних мір. Значна кількість робіт присвячена створенню індивідуальної теорії певних класів сингулярних мір та дослідженню їх властивостей. Варто відзначити, що нетривіальні складнощі на цьому шляху виникають навіть для класів самоподібних та самоафінних мір. Вищезгадані дослідження та їх застосування пов'язані як з іменами вітчизняних математиків (М. Працьовитий, О. Барановський, Я. Виннишин, Я. Гончаренко, В. Королюк, В. Кошманенко, Д. Кюрчев, О. Лещинський, А. Литвинюк, Р. Нікіфоров, О. Слуцький, Г. Торбін, О. Школьний), так із широким колом закордонних математиків (K. Dajani, D. Damanik, M. Das, K. Falconer, D. Feng, M. Iosifescu, S. Jitomirskaya, Yu. Kifer, R. Killip, A. Kiselev, C. Kraaikamp, D. Krutikov, N. Makarov, Yu. Peres, R. del Rio, Ch. Remling, E. Olivier, L. Olsen, W. Schlag, B. Simon, K. Simon, B. Solomyak, B. Weiss).

Тому особливо важливим для розвитку фрактального аналізу та теорії сингулярних ймовірнісних мір є розвиток та удосконалення методів обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича (та інших фрактальних розмірностей) множин та мір, пов'язаних з певними системами числення; методів встановлення сингулярності ймовірнісних мір та дослідження їх тонких фрактальних властивостей; усвідомлення аналогій між метричними, ймовірнісними та розмірнісними теоріями різних розкладів та узагальнення на основі цього відповідних методів побудови цих теорій.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана у рамках досліджень математичних об'єктів зі складною локальною будовою, що проводяться у відділі фрактального аналізу Інституту математики НАН України та на кафедрі математичного аналізу та диференціальних рівнянь Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова.

Автор дисертації брав участь у розробці держбюджетних тем «Багаторівневий аналіз сингулярних ймовірнісних мір та його застосування» (номер державної реєстрації 0113U003005) та «Фрактальний аналіз розподілів випадкових величин типу Джессена–Вінтнера та його застосування» (номер державної реєстрації 0117U004905), та науково-дослідного проекту STREVCOMS FP-7-IRSES 612669 (ЄС).

Мета і завдання дослідження. Метою дослідження є розвиток методів фрактального аналізу сингулярно неперервних ймовірнісних мір, вивчення тонких фрактальних властивостей ймовірнісних мір з незалежними I-Q_∞-символами та використання отриманих результатів для ймовірнісного підходу до вивчення перетворень, що зберігають фрактальну розмірність, та до фрактального аналізу підмножин множини анормальних чисел.

Основними завданнями дисертаційної роботи є:

— розробка нових методів доведення довірчості локально тонких систем покриттів для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича підмножин одиничного відрізка та застосування цих методів для знаходження умов порівнянності та довірчості систем надциліндрів Q_∞- та I-Q_∞-зображень дійсних чисел для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича (у тому числі і для тих моделей, коли відповідні системи циліндрів не є довірчими);

— дослідження властивостей (лебегівська структура, тополого-метричні властивості спектрів, спектральна структура) розподілів випадкових величин з незалежними I-Q_∞-символами.

— дослідження фрактальних властивостей мінімальних розмірнісних носіїв розподілів випадкових величин з незалежними I-Q_∞-символами.

— доведення гіпотези про те, що відображення φ, яке переводить символи Q_∞-зображення в символи I-Q_∞-зображення, зберігає міру Лебега та розмірність Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку;

— дослідження фрактальних властивостей спектрів розподілів випадкових величин з незалежними I-Q_∞-символами

— розвиток ймовірнісного підходу (на основі дослідження властивостей ймовірнісних мір з незалежними Q-, I-Q_∞-, Q^*-, I-F-символами) до вивчення залежності метричних та фрактальних властивостей множини суттєво анормальних чисел від обраної системи числення.

Об'єктом дослідження є фрактальні властивості сингулярно неперервних ймовірнісних мір.

Предметом дослідження є фрактальні властивості розподілів випадкових величин з незалежними I-Q_∞-, Q^*- та I-F-символами та їх застосування в метричній теорії чисел.

Методи дослідження. У роботі використовувалися методи теорії ймовірностей, математичного аналізу, теорії функцій дійсної змінної, метричної теорії чисел, фрактального аналізу та запропоновані автором конструктивні прийоми та методи.

Наукова новизна одержаних результатів. Основними науковими результатами, що виносяться на захист, є такі:

— розроблено новий метод доведення довірчості локально тонких систем покриттів для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича підмножин одиничного відрізка; даний метод застосовано для доведення гіпотези про довірчість систем надциліндрів Q_∞- та I-Q_∞-зображень дійсних чисел для обчислення розмірності Хаусдорфа-

Безиковича (у тому числі і для тих моделей, коли відповідні системи циліндрів не є довірчими); знайдено достатні умови порівнянності мір Хаусдорфа, породжених системою надциліндрів узагальненого F-зображення дійсних чисел;

— досліджено лебегівську структуру, тополого-метричні властивості спектрів, спектральну структуру розподілів випадкових величин з незалежними I-Q_∞-символами;

— знайдено явні формули для обчислення розмірності Хаусдорфа розподілів випадкових величин з незалежними I-Q_∞-символами.

— доведено гіпотезу про те, що відображення φ, яке переводить символи Q_∞-зображення в символи I-Q_∞-зображення, зберігає міру Лебега та розмірність Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку; на основі даного результату показано ізоморфізм ймовірнісних та розмірнісних теорій Q_∞- та I-Q_∞-зображень дійсних чисел;

— досліджено фрактальні властивості спектрів розподілів випадкових величин з незалежними I-Q_∞-символами;

— на основі ймовірнісного підходу доведено суперфрактальність множини Q-суттєво анормальних чисел; доведено суперфрактальність множини I-Q_∞-суттєво анормальних чисел;

— спростовано гіпотезу про суперфрактальність множини суттєво анормальних чисел незалежно від вибору системи числення; знайдено достатні умови аномальної фрактальності множини Q^*-суттєво анормальних чисел.

Практичне значення одержаних результатів. Робота має теоретичний характер. Отримані результати є внеском у теорію сингулярних розподілів ймовірностей, фрактальний аналіз, метричну теорію чисел, теорію функцій дійсної змінної та теорію DP-перетворень. Запропоновані в дисертації методи можуть бути корисними як при дослідженні тонких фрактальних властивостей ймовірнісних мір, породжених різними представленнями дійсних чисел над скінченними та змінними алфавітами, так і при застосуванні відповідних результатів в метричній теорії чисел та теорії DP-перетворень.

Особистий внесок здобувача. Основні результати, що виносяться на захист, отримані автором самостійно. Зі статей, опублікованих у співавторстві, до дисертації включені лише ті результати, що належать автору.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дослідження доповідалися на наукових конференціях різного рівня та наукових семінарах. Це такі конференції:

— Міжнародна наукова конференція «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь», присвячена 80-річчю Шкіля М.І., Київ, 13-14 грудня 2012 р.;

— Міжнародна наукова конференція «Актуальні проблеми методології та методики навчання фізико-математичних дисциплін», присвячена 80-річчю Горбачука І.Т., Київ, 18 січня 2013 р.;

— XVI Всеукраїнська науково-практична конференція «Молодь, освіта, наука, культура і національна самосвідомість в умовах європейської інтеграції», Київ, 25-26 квітня 2013 р.;

— The Fifth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations, Kyiv, September 16-20, 2013;

— Fractal Geometry and Stochastics V, Germany, March 24-29, 2014;

— XVII Всеукраїнська науково-практична конференція «Молодь, освіта, наука, культура і національна самосвідомість в умовах європейської інтеграції», Київ, 25-26 квітня 2014 р.;

— П'ятнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, Київ, 15–17 травня 2014 р.;

— International Conference «Probability, Reability and Stochastic Optimization», Kyiv, April 7-10, 2015;

— International Conference «Dynamical System And Their Application», Kyiv, June 22-26, 2015;

— П'ята Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання», Київ, 25–26 квітня 2016 р.;

— Сімнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, Київ, 19–20 травня 2016 р.;

— Конференція «Методика викладання математики в середній та вищій школі». (присвячена 75-річчю лауреата Державної премії України в галузі науки і техніки, академіка Академії наук вищої освіти, професора Колесник Тамари Всеволодівни), Секція 3: Вибрані питання сучасної математики, 4–5 грудня 2013 р.;

— Всеукраїнська науково-методична конференція «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі», пам'яті професора С. С. Левіщенка, Київ, 7–8 жовтня 2016 р.;

— Шоста Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, 21–22 квітня 2017 р.;

— International Conference «Numeration 2017», Rome, Italy, June 5–9, 2017.

Основні результати дисертаційного дослідження були оприлюднені на засіданнях наступних наукових семінарів:

— науковий семінар «Статистичні проблеми для випадкових процесів і полів» кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут» ім. І. Сікорського (керівник семінару — проф. Іванов О.В.);

— науковий семінар відділу випадкових процесів Інституту математики НАН України (керівники семінару — проф. Дороговцев А.А., проф. Портенко М.І.);

— науковий семінар відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник семінару — проф. Романюк А.С.);

— науковий семінар з фрактального аналізу (спільний семінар НПУ імені М.П.Драгоманова та Інституту математики НАН України, керівник семінару — проф. Працьовитий М.В.);

— науковий семінар кафедри математичного аналізу та диференціальних рівнянь НПУ імені М.П.Драгоманова (керівник семінару — проф. Торбін Г.М.).

Публікації. Основні результати роботи викладено у 22 наукових публікаціях, серед яких 5 статей у фахових виданнях [6, 63–66], 3 статті у інших виданнях [67, 67, 68] та 14 тез доповідей на конференціях [69–82]. Три статті [63, 64, 66] опубліковано у наукових виданнях, які включено до переліку фахових видань МОН України. Одна стаття [6] опублікована у журналі, що індексуються міжнародною наукометричною базою Scopus. Одна стаття [65] опублікована у фаховому виданні, переклад якої індексований в наукометричній базі Scopus.

Основний зміст роботи. Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку використаної літератури.

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, визначені мета і задачі дослідження, об'єкт та предмет дослідження, виділено наукову новизну, практичну значущість отриманих результатів, особистий внесок здобувача, апробацію отриманих результатів та представлено основний зміст дисертаційного дослідження.

Перший розділ дисертації містить опис основних понять, фактів та методів, які відіграють важливу роль у дослідженні.

У підрозділі 1.1 висвітлено основні властивості міри Хаусдорфа та розмірності Хаусдорфа–Безиковича, показано відмінність між розмірністю Хаусдорфа та розмірністю Хаусдорфа–Безиковича. Задача обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича множини або ймовірнісної міри, будучи однією з основних задач фрактального аналізу, є досить нетривіальною проблемою, розв'язанню якої для різних множин та мір присвячено значну кількість дослідницьких статей у провідних математичних журналах світу. Це стало причиною розвитку методів знаходження точних або хоча б наближених значень розмірності Хаусдорфа–Безиковича. Один з таких методів полягає у суттєвому зменшенні класу допустимих покриттів при обчисленні розмірності до деякого специфічного (зчисленного) класу покриттів, який є достатнім (довірчим) для правильного обчислення розмірності, що дає досліднику суттєві технічні переваги. Саме з цією метою у підрозділі 1.4 даються означення локально тонких систем покриттів, які є довірчими для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича.

Нехай (M, ρ) — метричний простір і $E \subset M$.

Сімейство Φ підмножин метричного простору (M, ρ) називається локально тонкою системою покриттів цього простору, якщо для довільної множини $E \subset M$ і для довільного $\varepsilon > 0$ існує не більш ніж зліченне ε-покриття множини E множинами з Φ.

Нехай α — деяке додатне число.

Означення 1.1.7. α-мірною мірою Хаусдорфа множини E відносно локально тонкої системи покриттів Φ називається число

$$H^{\alpha}(E, \Phi) := \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\inf_{|E_j| \leqslant \varepsilon} \left\{ \sum_j |E_j|^{\alpha} \right\} \right] = \lim_{\varepsilon \to 0} H^{\alpha}_{\varepsilon}(E, \Phi),$$

де інфімум береться за всіма не більш як зліченними ε-покриттями $\{E_j\}$ множини E множинами $E_j \in \Phi$.

Оскільки при зменшенні ε інфімум визначається за «біднішим» класом ε-покриттів, то границя (скінченна чи нескінченна) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} H^{\alpha}_{\varepsilon}(E, \Phi)$ завжди існує.

Означення 1.1.8 Розмірністю Хаусдорфа–Безиковича множини E відносно сімейства підмножин Φ називається таке невід'ємне число, що

$$\dim_H(E,\Phi) = \inf\{\alpha : \quad H^{\alpha}(E,\Phi) = 0\}.$$

Означення 1.4.1. Локально тонка система покриттів Φ називається довірчою системою покриттів на W, якщо

$$\dim_H(E,\Phi) = \dim_H(E), \forall E \subset W.$$

Перевірка довірчості чи знаходження достатніх умов довірчості сімейств покриттів є важливою задачею фрактального аналізу. Умови при яких локально тонка сім'я покриттів є довірчою для обчислення розмірності Хаусдорфа - Безиковича на $[0,1]$, досліджувались багатьма вченими (див., наприклад, [7,83–87]). Перші кроки у цьому напрямку зробив А. С. Безикович ([83]), довівши довірчість сім'ї циліндричних відрізків двійкового представлення. Його результати узагальнили: П. Біллінслі ([88]) для сімейств циліндрів, що породжуються s-адичним представленням; М. В. Працьовитий ([84]) для сімейств покриттів, що породжуються Q - представленням; С. Альбеверіо та Г. М. Торбін ([7]) для сімейств покриттів, що породжуються Q^* - представленням для яких $\inf\limits_k\{q_{0k}, q_{(n-1)k}\} > 0$.

У цьому ж підрозділі подано детальнішу історію досліджень умов довірчості сімейств циліндрів, породжених різними розкладами дійсних чисел, порівняння підходів до доведення довірчості та недовірчості різних локально тонких сімейств покриттів. Окреслено нерозв'язані проблеми у цьому напрямі.

Додатковим аргументом дослідження проблем довірчості локально тонких систем покриттів є необхідність розвитку ймовірнісного підходу до обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича фрактальних множин на основі розвинутого П.Біллінгслі методу (на основі теорем Біллінгслі оцінки хаусдорфової розмірності), суть якого коротко викладена в підрозділі

1.2 дисертації.

У підрозділі 1.5 наведено базові означення, що стосуються теорії сингулярно неперервних ймовірнісних мір, описано спектральну класифікацію сингулярних ймовірнісних мір.

Розділ 2 присвячений дослідженню фрактальних властивостей розподілів випадкових величин з незалежними I-Q_∞-символами.

У підрозділі 2.1 вводиться в розгляд I-Q_∞-зображення дійсних чисел, представлені його частинні випадки. Підрозділ 2.2 присвячено ергодичним властивостям введених зображень дійсних чисел.

Нехай I — довільне дійсне число з одиничного відрізка, записане у двійковій системі числення

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k(I)}{2^k} =: 0,\beta_1(I)\beta_2(I)\ldots\beta_k(I)\ldots, \quad \beta_k(I) \in \{0,1\}.$$

Для тих чисел з одиничного відрізка, які мають по два різні двійкові розклади, зафіксуємо той, який має цифру 1 в періоді.

Нехай $Q_\infty = (q_0, q_1, \ldots, q_k, \ldots)$ — нескінченний стохастичний вектор з додатніми координатами. При фіксованому дійсному числі $I \in [0,1]$ (тобто при фіксованій послідовності $\{\beta_k(I)\}$) та фіксованому стохастичному векторі Q_∞ здійснюється зчисленна послідовність розбиттів одиничного відрізка за наступними правилами.

Крок 1. Розбиваємо одиничний відрізок зліва направо, якщо $\beta_1(I) = 1$; (і справа наліво, якщо $\beta_1(I) = 0$) на зчисленну кількість відрізків $\Delta_{\alpha_1}^{I\text{-}Q_\infty}$, $\alpha_1 \in \{0,1,2,\ldots\}$, довжини яких дорівнюють $\left|\Delta_{\alpha_1}^{I\text{-}Q_\infty}\right| = q_{\alpha_1}$. Кожен з відрізків $\Delta_{\alpha_1}^{I\text{-}Q_\infty}$ називається циліндром 1-го рангу I-Q_∞-розкладу.

Крок 2. Кожен з циліндрів 1-го рангу $\Delta_{\alpha_1}^{I\text{-}Q_\infty}$ розбиваємо (зліва направо, якщо $\beta_2(I) = 1$; і справа наліво, якщо $\beta_2(I) = 0$) на зчисленну кількість відрізків $\Delta_{\alpha_1\alpha_2}^{I\text{-}Q_\infty}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \{0,1,2,\ldots\}$, довжини яких дорівнюють $\left|\Delta_{\alpha_1\alpha_2}^{I\text{-}Q_\infty}\right| = q_{\alpha_1} \cdot q_{\alpha_2}$. Кожен з відрізків $\Delta_{\alpha_1\alpha_2}^{I\text{-}Q_\infty}$ називається циліндром 2-го рангу I-Q_∞-розкладу.

Крок k $(k > 2)$. Кожен з циліндрів $(k-1)$-рангу $\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}}$ розбиваємо (зліва направо, якщо $\beta_k(I) = 1$; і справа наліво, якщо $\beta_k(I) = 0$) на зчисленну кількість відрізків $\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}$, довжини яких

$$\left|\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}\right| = q_{\alpha_1} \cdot q_{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot q_{\alpha_k} = \prod_{s=1}^{k} q_{\alpha_s} \qquad (1)$$

відносяться як

$$\left|\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}0}\right| : \left|\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}1}\right| : \ldots : \left|\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}m}\right| : \ldots = q_0 : q_1 : \ldots : q_m : \ldots .$$

Кожен з відрізків $\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}$ називається циліндром k-го рангу I-Q_∞-розкладу.

Для довільної послідовності індексів $\{\alpha_k\}$, $\alpha_k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, існує послідовність вкладених циліндрів

$$\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1} \supset \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2} \supset \cdots \supset \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} \supset \cdots,$$

таких, що $|\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\ldots\alpha_k}| \to 0$, $k \to \infty$. Тому існує єдина точка x, яка належить всім цим циліндрам $\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1}$, $\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2}, \ldots, \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}, \ldots$.

І навпаки, для кожної точки $x \in [0, 1]$, яка не є межовою для жодного циліндра жодного рангу, існує єдина (оскільки кожна така точка належить рівно одному циліндру n-го рангу) послідовність вкладених циліндрів $\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1(x)} \supset \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)} \supset \ldots \supset \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)} \supset \ldots$, які містять x, тобто

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)} =: \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}.$$

Останній вираз називатимемо I-Q_∞-зображенням точки x.

Нехай $D = D(I)$ — множина точок одиничного відрізка, які мають I-Q_∞-зображення, тобто

$$D = \left\{x : \ x \in [0, 1], \ \forall n \in N \ \exists \ \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)} : \ x \in \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)}\right\}.$$

Очевидно, що дійсне число x не має I-Q_∞-зображення тоді і тільки тоді, коли знайдеться таке число $n_0 = n_0(x)$, що x не належить до жодного циліндра n_0-го рангу.

Підрозділи 2.3 та 2.4 присвячено вивченню випадкових величин з незалежними I-Q_∞-символами, дослідженню їх лебегівської та тополого-метричної структури.

Нехай $\{\xi_k\}$ — послідовність незалежних випадкових величин з наступними розподілами:

$$P(\xi_k = i) := p_{ik} \geqslant 0, \quad \text{де} \quad \sum_{i=0}^{\infty} p_{ik} = 1, \ \ \forall k \in N.$$

Використовуючи послідовність $\{\xi_k\}$ та I-Q_∞-розклад, розглянемо наступну випадкову величину:

$$\xi := \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_k\ldots} \ ,$$

яку називають випадковою величиною з незалежними I-Q_∞-символами.

Позначимо через μ_ξ відповідну ймовірнісну міру, яку будемо називати ймовірнісною мірою з незалежними I-Q_∞-символами.

Теорема 2.4.2. Сингулярно неперервно розподілена випадкова величина з незалежними I-Q_∞-символами має чистий тополого-метричний тип, причому

1) μ_ξ має чистий GS-тип тоді і тільки тоді, коли матриця P містить лише скінченну кількість стовпчиків, що містять нульові елементи.

2) μ_ξ має чистий GC-тип тоді і тільки тоді, коли матриця P містить нескінченну кількість стовпчиків, що містять нульові елементи, і

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i:p_{ik}=0} q_i \right) = \infty \ . \tag{2}$$

3) μ_ξ має чистий GP-тип тоді і тільки тоді, коли матриця P містить нескінченну кількість стовпчиків, що містять нульові елементи і

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i:p_{ik}=0} q_i \right) < \infty. \tag{3}$$

У розділі 2.5 досліджуються тонкі фрактальні властивості ймовірнісних мір з незалежними I-Q_∞-символами. Основним завданням цього розділу є знаходження розмірності Хаусдорфа $\dim_H \mu_\xi$ ймовірнісних мір з незалежними I-Q_∞-символами, тобто, знаходження розмірності Хаусдорфа–Безиковича мінімальних розмірнісних носіїв вказаних ймовірнісних мір.

Нехай

$$h_j := -\sum_{i=0}^{s-1} p_{ij} \ln p_{ij}, \qquad 0 \ln 0 := 0; \quad H_n := \sum_{j=1}^{n} h_j.$$

$$b_j := -\sum_{i=0}^{s-1} p_{ij} \ln q_{ij}; \quad B_n := \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

$$d_j := -b_j^2 + \sum_{i=0}^{s-1} p_{ij} \ln^2 q_{ij}.$$

Теорема 2.5.1 *Нехай $\Phi(I\text{-}Q_\infty)$ — довірче для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича сімейство циліндрів I-Q_∞-зображення. Якщо*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sum_{i=0}^{\infty} p_{ij} \ln^2 p_{ij}}{j^2} < \infty, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sum_{i=0}^{\infty} p_{ij} \ln^2 q_i}{j^2} < \infty, \tag{4}$$

то розмірність Хаусдорфа міри μ_ξ з незалежними I-Q_∞-символами дорівнює

$$\dim_H \mu_\xi = \varliminf_{n\to\infty} \frac{H_n}{B_n} =: D, \tag{5}$$

де

$$H_n = -\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{\infty} p_{ij} \ln p_{ij}, \qquad B_n = -\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{\infty} p_{ij} \ln q_i.$$

Підрозділ 2.6 присвячений розвитку нового метода побудови метричної, ймовірнісної та розмірнісної (хаусдорфової) теорій для I-Q_∞-зображень дійсних чисел та континуального сімейства формально різних зображень дійсних чисел на основі дослідження спеціальних відображень, які символи певного зображення переводять у ті ж символи іншого зображення з досліджуваного сімейства, і при цьому зберігають міру Лебега та розмірність Хаусдорфа–Безиковича (хоча при цьому можуть бути розривними на всюди щільних множинах). Такі відображення називатимемо G-відображеннями (G-ізоморфізмами систем числення) і вважатимемо, системи числення, між якими існує G-відображення, тотожними (з точністю до G-ізоморфізму). В цьому ж підрозділі показується глибокий зв'язок між довірчістю систем покриттів, породжених різними системами числення, та DP-властивостями (збереженням розмірності Хаусдорфа-Безиковича) вказаних вище відображень. З цією метою ми розвиваємо методи доведення довірчості систем покриттів, породжених Q_∞- та I-Q_∞-зображеннями, та показуємо у підрозділі 2.7 як отримані результати дозволяють отримувати ймовірнісні, метричні та розмірнісні теорії нових систем числення.

Ми пропонуємо наступний підхід до дослідження ймовірнісних мір з незалежними I-Q_∞-символами: для фіксованого стохастичного вектора Q_∞ та фіксованого дійсного числа $I \in [0,1]$ ввести в розгляд відображення

$$\varphi\left(\Delta^{Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}\right) = \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots},$$

і дослідити умови, при виконанні яких дане відображення зберігає міру Лебега та розмірність Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку. Зауважимо, що властивості вказаного відображення суттєво залежать від обраного дійсного числа I.

Теорема 2.6.5 *Якщо системи $\hat{\Phi}$ і $\hat{\Phi}'$ є довірчими, то відображення φ зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку.*

Наступні теореми встановлюють довірчість сімейств $\hat{\Phi}(Q_\infty)$ та $\hat{\Phi}(I\text{-}Q_\infty)$ при довільному виборі стохастичного вектора Q_∞ та дійсного числа I, а метод, який використовується при доведенні, також дозволяє отримувати загальні достатні умови довірчості сімейств $\Phi(Q_\infty)$ циліндрів Q_∞-

зображення.

Теорема 2.6.6 *Нехай $\hat{\Phi} = \hat{\Phi}(Q_\infty)$ — сімейство, яке складається з циліндрів Q_∞-зображення та множин, які є об'єднаннями суміжних циліндрів одного рангу і належать до одного циліндра попереднього рангу. Сімейство $\hat{\Phi}(Q_\infty)$ є довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку при довільному виборі стохастичного вектора Q_∞.*

Теорема 2.6.7 *Нехай $\hat{\Phi} = \hat{\Phi}(I\text{-}Q_\infty)$ — сімейство, яке складається з циліндрів I-Q_∞-зображення та множин, які є об'єднаннями суміжних циліндрів одного рангу і належать до одного циліндра попереднього рангу. Нехай D — множина точок одиничного відрізка, які мають I-Q_∞-зображення. Тоді сімейство $\hat{\Phi}(I\text{-}Q_\infty)$ є довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на множині D при довільному виборі дійсного числа $I \in [0,1]$ та стохастичного вектора Q_∞.*

Таким чином наслідком трьох вище наведених теорем є наступний результат:

Теорема 2.6.8 *Відображення φ зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку.*

Отриманий результат теореми 2.6.6 можна застосувати для знаходження достатніх умов довірчості для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича для сімейства $\Phi(Q_\infty)$, яке містить лише циліндри Q_∞-зображення.

Теорема 2.6.9 *Нехай*

$$f(\alpha, k, m) := \frac{\sum\limits_{i=k}^{m} q_i^{\alpha}}{\left(\sum\limits_{i=k}^{m} q_i\right)^{\alpha}}$$

і

$$f^*(\alpha) := \sup_{k,m} f(\alpha, k, m).$$

Якщо

$$f^*(\alpha) < +\infty, \forall \alpha > 0, \tag{6}$$

то сімейство циліндрів $\Phi(Q_\infty)$ *— довірче для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на* $[0, 1)$.

Наступна лема важлива для розвитку метричної теорії I-Q_∞-зображень та дослідження лебегівської і спектральної структури ймовірнісних мір з незалежними I-Q_∞-символами.

Лема 2.6.3 *При довільному виборі стохастичного вектора* Q_∞ *та дійсного числа* $I \in [0, 1]$ *відображення* φ *зберігає міру Лебега на* $(0, 1)$.

У підрозділі 2.7 показано як отримані результати підрозділу 2.6 дозволяють досліджувати фрактальні властивості ймовірнісних мір з незалежними I-Q_∞-символами.

Спочатку досліджено фрактальні властивості спектра міри μ_ξ. Варто зазначити, що у тому випадку, коли I є ірраціональним числом (тобто послідовність $\beta_k(I)$ є неперіодичною), то розвинені в роботах [8, 89] методи незастосовні для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича спектра випадкової величини ξ навіть у найпростішому випадку однакової розподіленості незалежних випадкових величин ξ_k, оскільки відповідні множини вже не будуть ні самоподібними, ні N-самоподібними.

Наступна теорема узагальнює результати Р. Нікіфорова і Г. Торбіна ([8]) про фрактальні властивості спектрів випадкових величин з незалежними однаково розподіленими Q_∞-символами, при довільному виборі параметра I та стохастичного вектора Q_∞ та P_∞.

Теорема 2.7.1 *Нехай* ξ_k *— послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, які набувають значень* $0, 1, 2, \ldots$ *з ймовірностями* $p_0, p_1, p_2, \ldots$ *відповідно.*
Нехай $V := \{i : p_i > 0\} = \{i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots\}$.
Якщо для фіксованого стохастичного вектора Q_∞ *рівняння* $\sum\limits_{i \in V} q_i^x = 1$ *має*

корінь α_0 *на* $[0,1]$, *то розмірність Хаусдорфа–Безиковича спектра випадкової величини з незалежними* I-Q_∞*-символами дорівнює*

$$\dim_H S_{\mu_\xi} = \alpha_0.$$

Якщо ж рівняння $\sum\limits_{i\in V} q_i^x = 1$ *не має коренів на* $[0,1]$, *то*

$$\dim_H S_{\mu_\xi} = \dim_H(C[I\text{-}Q_\infty, V]) = \lim_{k\to\infty} \dim_H(C[I\text{-}Q_\infty, V_k]),$$

де $V_k = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, $k \in N, k \geqslant 2$.

Наступна теорема дозволяє обчислювати розмірність Хаусдорфа міри з незалежними I-Q_∞-символами.

Теорема 2.7.2 *Нехай сімейство* $\Phi(Q_\infty)$ *циліндрів* Q_∞*-зображення є довірчими для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича.*
Якщо

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sum\limits_{i=0}^{\infty} p_{ij} \ln^2 p_{ij}}{j^2} < \infty, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sum\limits_{i=0}^{\infty} p_{ij} \ln^2 q_i}{j^2} < \infty, \tag{7}$$

то при довільному виборі дійсного числа $I \in [0,1]$ *розмірність Хаусдорфа міри* μ_ξ *з незалежними* I-Q_∞*-символами дорівнює*

$$\dim_H \mu_\xi = \varliminf_{n\to\infty} \frac{H_n}{B_n}, \tag{8}$$

де

$$H_n = -\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{\infty} p_{ij} \ln p_{ij}, \quad B_n = -\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{\infty} p_{ij} \ln q_i.$$

В цьому ж підрозділі показано як отримані результати стосовно збереження міри Лебега та розмірності Хаусдорфа–Безиковича відображенням φ дозволяють досить просто отримати метричну та розмірнісну класифікацію дійсних чисел за асимптотичною поведінкою частот символів у їх I-Q_∞-зображенні, що природньо узагальнює результати роботи [16].

Теорема 2.7.4 *Метричні, фрактальні та топологічні властивості множин* $N(I\text{-}Q_\infty)$, $W(I\text{-}Q_\infty)$, $P(I\text{-}Q_\infty)$ *та* $L(I\text{-}Q_\infty)$ *характеризує наступна таблиця:*

	Міра Лебега	$\dim_H(\cdot)$	Категорія Бера
$N(I\text{-}Q_\infty)$	1	1	перша
$W(I\text{-}Q_\infty)$	0	1	перша
$P(I\text{-}Q_\infty)$	0	1	перша
$L(I\text{-}Q_\infty)$	0	1	друга

У підрозділі 2.8 знайдено загальні достатні умови довірчості для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича сімейств надциліндричних множин, породжених F- та I-F-зображеннями дійсних чисел та показано як отримані результати застосовуються до доведення довірчості сімейств надциліндричних множин, породжених розкладами Люрота, Остроградського–Серпінського–Пірса, Остроградського 2-го роду, Енгеля, Сільвестера, ланцюговими дробами.

Нехай I — довільне дійсне число з одиничного відрізка, записане у двійковій системі числення

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k(I)}{2^k} =: 0,\beta_1(I)\beta_2(I)...\beta_k(I)..., \quad \beta_k(I) \in \{0,1\}.$$

Для тих чисел, які мають по два різні двійкові розклади, зафіксуємо той, який має цифру 1 в періоді. Нехай $\{N_k\}$ — послідовність алфавітів, де $N_k = \{0, 1, \ldots, n_k\}, 0 < n_k \leqslant \infty$. При фіксованому дійсному числі $I \in [0, 1]$ (тобто при фіксованій послідовності $\{\beta_k(I)\}$) та фіксованій послідовності алфавітів $\{N_k\}$ здійснюється зчисленна послідовність розбиттів одиничного відрізка за наступними правилами.

Крок 1. Розбиваємо одиничний відрізок зліва направо, якщо $\beta_1(I) = 1$ (справа наліво, якщо $\beta_1(I) = 0$) на не більш як злічeнну кількість відрізків $\Delta^{I\text{-}F}_{i_1}$, $i_1 \in N_1$, довжини яких дорівнюють $\left|\Delta^{I\text{-}F}_{i_1}\right| = q_{i_1}, i_1 \in N_1$. Кожен з відрізків $\Delta^{I\text{-}F}_{i_1}$ називається циліндром 1-го рангу I-F-розкладу.

Крок k $(k > 1)$**.** Кожен з циліндрів $(k-1)$-рангу $\Delta^{I\text{-}F}_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}$ розбиваємо зліва направо, якщо $\beta_k(I) = 1$ (справа наліво, якщо $\beta_k(I) = 0$) на не більш як зліченну кількість відрізків $\Delta^{I\text{-}F}_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, довжини яких задовольняють умови

$$\frac{\left|\Delta^{I\text{-}F}_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} i_k}\right|}{\left|\Delta^{I\text{-}F}_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}\right|} = q^{(i_1,\ldots,i_{k-1})}_{i_k}, \sum_{i_k \in N_k} q^{(i_1,\ldots,i_{k-1})}_{i_k} = 1, \forall (i_1, \ldots, i_{k-1}) \in N_1 \times \ldots \times N_{k-1}.$$

Кожен з відрізків $\Delta^{I\text{-}F}_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ називається циліндром k-го рангу I-F-розкладу (I-F-циліндром).

Для довільної послідовності індексів $\{i_k\}$, $i_k \in N_k$, існує послідовність вкладених циліндрів

$$\Delta^{I\text{-}F}_{i_1} \supset \ \Delta^{I\text{-}F}_{i_1 i_2} \supset \ldots \supset \Delta^{I\text{-}F}_{i_1 i_2 \ldots i_k} \supset \ldots,$$

таких, що $\forall (i_1, i_2, \ldots\ i_k, \ldots) : |\Delta^{I\text{-}F}_{i_1 i_2 \ldots i_k}| \to 0$, $k \to \infty$.

Тому існує єдина точка x, яка належить всім цим циліндрам $\Delta^{I\text{-}F}_{i_1}$, $\Delta^{I\text{-}F}_{i_1 i_2}$, ..., $\Delta^{I\text{-}F}_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, ...

І навпаки, для кожної точки $x \in (0,1)$, яка не є межовою для жодного циліндра жодного рангу, існує єдина (оскільки кожна така точка належить рівно одному циліндру n-го рангу) послідовність вкладених циліндрів

$$\Delta^{I\text{-}F}_{i_1(x)} \supset \Delta^{I\text{-}F}_{i_1(x) i_2(x)} \supset \ldots \supset \Delta^{I\text{-}F}_{i_1(x) i_2(x) \ldots i_k(x)} \supset \ldots,$$

які містять x, тобто

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta^{I\text{-}F}_{i_1(x) i_2(x) \ldots i_k(x)} =: \Delta^{I\text{-}F}_{i_1(x) i_2(x) \ldots i_k(x) \ldots}.$$

Останній вираз називатимемо I-F-зображенням (розкладом) дійсного числа x.

Очевидно, що ланцюгові розклади, Q^*-розклади ([6, 7]), Q_∞-розклади ([8,84]), розклади Люрота ([3,4]), Сільвестера ([10]), Остроградського–Серпінського–Пірса ([5, 11]), Енгеля ([12, 13]) є частковими випадками I-F-розкладів.

Нехай $D = D(I)$ — множина точок одиничного відрізка, які мають I-F-зображення,

$$D = \{x: \ x \in [0,1], \ \ \forall n \in N \ \exists \Delta^{I\text{-}F}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_n(x)}: \ \ x \in \Delta_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_n(x)}\}.$$

Очевидно, що дійсне число x не має I-F-зображення тоді і тільки тоді, коли знайдеться таке число $n_0 = n_0(x)$, що x не належить до жодного з циліндрів рангу n_0.

Теорема 2.8.1 *Нехай $x = \Delta^{I\text{-}F}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}$ — деяке I-F-зображення дійсних чисел над послідовністю алфавітів N_k. Нехай D — множина точок одиничного відрізка, які мають I-F-зображення. Нехай $\hat{\Phi} = \hat{\Phi}(I\text{-}F)$ — сімейство множин, які є об'єднанням суміжних I-F-циліндрів одного рангу, що належать одному і тому ж I-F-циліндру попереднього рангу. Якщо існує константа $c \geqslant 1$ така, що*

$$\frac{1}{c} \leqslant \frac{|\Delta^{I\text{-}F}_{\alpha_1\ldots\alpha_k m}|}{|\Delta^{I\text{-}F}_{\alpha_1\ldots\alpha_k(m+1)}|} \leqslant c, \forall k \in N, m \in N_{k+1}, (m+1) \in N_{k+1},$$

то $\hat{\Phi}(I\text{-}F)$ — довірче для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на множині D. Більше того $\hat{\Phi}(I\text{-}F)$ є порівнянним і

$$H^{\alpha}(E) \leqslant H^{\alpha}(E, \hat{\Phi}(I\text{-}F)) \leqslant 4c \cdot H^{\alpha}(E), \forall E \subset D.$$

Третій розділ «Про ймовірнісний підхід до дослідження фрактальних властивостей підмножин суттєво анормальних чисел» дисертаційного дослідження присвячений розвитку ймовірнісного підходу до вивчення фрактальних властивостей підмножин анормальних чисел.

Підрозділи 3.1 – 3.6. присвячені розвитку ймовірнісного підходу до вивчення метричних властивостей анормальних чисел та застосуванню тонких фрактальних властивостей ймовірнісних мір з незалежними Q- та Q^*-символами до дослідження фрактальних властивостей підмножин множини анормальних чисел.

Відома теорема Бореля (E.Borel, 1909) стверджує, що для класичного s-адичного зображення дійсних чисел для майже всіх $x \in [0,1]$ відносно міри Лебега і для будь-якої цифри i з алфавіту $A = \{0, 1, ..., s-1\}$ асимптотична частота $\nu_i(x)$ існує і дорівнює $\frac{1}{s}$, тобто,

$$\nu_i(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{N_i(x,k)}{k} = \frac{1}{s}, \qquad \forall i \in \{0, 1, \ldots, s-1\}, \tag{9}$$

де $N_i(x,k)$ — кількість цифри «i» серед перших k цифр s-адичного зображення x, $i \in A$.

Множину

$$N(s) = \{x | (\forall i \in A) \quad \lim_{k\to\infty} \frac{N_i(x,k)}{k} = \frac{1}{s}\}$$

називають множиною *s-нормальних* чисел (або множиною дійсних чисел, які просто нормальні відносно основи s).

Одиничний відрізок $[0,1]$ може бути представлений як

$$[0,1] = E(s) \bigcup D(s),$$

де

$$E(s) = \{x | \nu_i(x) \quad \textit{існує}, \forall i \in A\},$$
$$D(s) = \{x | \exists i \in A, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{N_i(x,k)}{k} \quad \text{не існує}\}.$$

Множину $D(s)$ називають множиною s-анормальних дійсних чисел. Кожна з цих множин може бути розкладена на підмножини наступним чином.

Множину

$$W(s) = \{x | (\forall i \in A): \quad \nu_i(x) \quad \text{існує}, \quad (\exists j \in A) : \nu_j(x) \neq \frac{1}{s}\}$$

називають множиною *s-квазінормальних* чисел. Очевидно, що

$$E(s) = W(s) \bigcup N(s), \quad W(s) \bigcap N(s) = \varnothing.$$

Множину

$$P(s) = \{x | (\exists i \in A): \quad \lim_{k\to\infty} \frac{N_i(x,k)}{k} \quad \text{не існує},$$

$$\text{і } (\exists j \in A): \quad \lim_{k\to\infty} \frac{N_j(x,k)}{k} \quad \text{існує}\}$$

називають множиною s-*частково анормальних* чисел.

Множину

$$L(s) = \{x | (\forall i \in A) \quad \lim_{k\to\infty} \frac{N_i(x,k)}{k} \quad \text{не існує}\}$$

називають множиною s-*суттєво анормальних* чисел.

Очевидно, що

$$D(s) = L(s) \bigcup P(s), \quad L(s) \bigcap P(s) = \varnothing.$$

Множини $N(s), W(s), P(s), L(s)$ є всюди щільними на $[0,1]$, оскільки частоти $\nu_i(x)$ не залежать від скінченної кількості перших s-адичних цифр числа x. Також зрозумілим є те, що ці множини континуальні.

Фрактальні властивості підмножин множини $W(s)$ вивчалися A. Besicovitch і H. Eggleston ([90, 91]). Використовуючи їхні результати легко показати

$$\dim_H W(s) = 1.$$

Властивості підмножин множини анормальних чисел інтенсивно вивчались останні роки з використанням різних підходів у роботах S. Albeverio, L. Barreira, Yu. Kondratiev, Р. Нікіфорова, L. Olsen, М. Працьвитого, B. Saussol, J. Schmeling, N. Snigireva, Г. Торбіна, S. Winter та інших (див. [16,21,92–103] та посилання в них). Зокрема, цікаві підмножини множини $D(s)$ досліджувалися у [98] з використанням техніки та результатів теорії мультифрактальних дивергентних точок. У [102] було показано, що множина $D(s)$ є суперфрактальною (тобто $\dim_H D(s) = 1$). У роботах [92,93] доведено, що множини $L(s)$ і $P(s) (s > 2)$ також мають розмірність Хаусдорфа–Безиковича рівною одиниці. Добре відомим є факт, що множина $L(s)$ є множиною другої категорії Бера (більше того, $L(s)$ містить всюди щільну

G_δ-множину). Тому множини $N(s), W(s), P(s)$ є множинами першої категорії Бера. З вище сказаного слідує, що суттєво анормальні числа є домінуючими як у топологічному розумінні, так і у розумінні фрактальної геометрії. Між тим множина $L(s)$ є малою у розумінні міри Лебега:

	Міра Лебега	$\dim_H(\cdot)$	Категорія Бера
$N(s)$	1	1	перша
$W(s)$	0	1	перша
$P(s)$ (для $s > 2$)	0	1	перша
$L(s)$	0	1	друга

Подібні результати були отримані для декількох інших зображень дійсних чисел (див., наприклад,[16] та огляд результатів там). При дослідженні фрактальних властивостей підмножин Q_∞-анормальних чисел для цього випадку не можна застосувати традиційні ймовірнісні методи та методи теорії динамічних систем з низки причин: потенційно можлива нескінченна ентропія стохастичного вектора Q_∞, який визначає метричні співвідношення розбиття; потенційна недовірчість системи циліндрів $\Phi(Q_\infty)$; відсутність загальної формули для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича навіть для ймовірнісної міри з незалежними однаково розподіленими символами узагальненого зображення Люрота. Також не можемо застосувати техніку дивергентних точок, оскільки вона не розроблена для мір, породжених нескінченними IFS. Не зважаючи на перелічені складнощі, у [16,21] було розроблено новий підхід дослідження Q_∞-анормальних чисел і, зокрема, було доведено, що множина Q_∞-суттєво анормальних чисел має розмірність Хаусдорфа–Безиковича рівну одиниці (без будь-яких додаткових обмежень на стохастичний вектор Q_∞).

Нехай $\Omega_k = \{0, 1, 2, \ldots, s-1\}$ і

$$\Omega = \prod_{k=1}^{\infty} \Omega_k = \{\omega : \quad \omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k, \ldots),\ \omega_k \in \Omega_k\}.$$

Для довільного $\omega \in \Omega$ означимо

$$\nu_i(\omega) = \lim_{k\to\infty} \frac{N_i(\omega, k)}{k}$$

(якщо границя існує) і розглянемо множини:

$$E(\Omega) = \{\omega : \nu_i(\omega) \text{ існує } \ \forall i \in A = \{0, 1, \dots, s-1\}\},$$

$$P(\Omega) = \{\omega : (\exists\ i \in A) : \nu_i(\omega) \text{ існує}, \quad (\exists\ j \in A) : \nu_j(\omega) \text{ не існує}\},$$

$$L(\Omega) = \{\omega : (\forall i \in A) : \nu_i(\omega) \text{ не існує}\}.$$

Оскільки на просторі Ω не введено ні метрики, ні міри, ні топології, то питання про метричні, топологічні чи фрактальні властивості множин $E(\Omega), P(\Omega), L(\Omega)$ не може бути вирішеним. З іншого боку, зрозуміло, що всі ці множини є континуальними.

Розглянемо тепер відображення $f : \Omega \to R^1$. Нехай $f(E), f(P), f(L)$ будуть образами $E(\Omega), P(\Omega), L(\Omega)$ при відображенні f. Властивості цих множин суттєво залежать від відображення f. Насправді, f породжує топологію та метрику на просторі Ω^*, який отриманий з простору Ω злиттям тих точок з Ω, які мають однакові f-образи.

Якщо, для прикладу, $f(\omega) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_k}{s^k}$, тоді $f(E) = E(s)$, $f(P) = P(s)$, $f(L) = L(s)$, і існує така підмножина $N(s) \subset E(s)$, що $\lambda(N(s)) = 1$ (де λ — міра Лебега на $[0, 1]$.)

У [16] було сформульоване питання про залежність метричних, топологічних та фрактальних властивостей підмножин дійсних чисел від вибраного зображення f. Зокрема, було поставлено два питання:

«Суперфрактальність (тобто, рівність розмірності Хаусдорфа–Безиковича одиниці) множини суттєво анормальних чисел була доведена для ряду різних зображень дійсних чисел (див., [16, 21, 92, 93, 98–102]). Тому природно запитати чи існує таке зображення f, що:

2.1. для відповідної множини $L(f)$ f-суттєво анормальних чисел розмірність Хаусдорфа–Безиковича не рівна одиниці;

2.2. вся множина $D(f)$ f-анормальних чисел має розмірність Хаусдорфа–Безиковича не рівну одиниці?»

Основна мета підрозділів 3.5. та 3.6 полягає у вивченні фрактальних властивостей множин $f(E), f(P), f(L)$ для випадку коли відображення f індуковане Q^*-зображенням дійсних чисел.

У цих підрозділах дано відповіді на наведені запитання з роботи [16], що обидві множини $L(Q^*)$ та $D(Q^*)$ можуть мати нульову розмірність Хаусдорфа–Безиковича при відповідному підборі матриці Q^*.

Теорема 3.5.1 *Нехай* $Q^* = \|q_{ik}\|$, $i \in \{0,1,2\}$, $q_{2k} = \frac{1}{(k+1)^{k+1}}$, $q_{0k} = q_{1k} = \frac{1-q_{2k}}{2}$.
Тоді $\dim_H(L(Q^*)) = 0$.

Теорема 3.6.1 *Нехай* $Q^* = \|q_{ik}\|$, $i \in \{0,1,2,\dots,s-1\}$,

$$q_{1k} = q_{2k} = \ldots = q_{s-1,k} = \begin{cases} \frac{1}{(s-1)(k+1)^{k+1}}, & \text{якщо } k \in B; \\ \frac{1}{s}, & \text{якщо } k \in A. \end{cases}$$

$$q_{0k} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{(k+1)^{k+1}}, & \text{якщо } k \in B; \\ \frac{1}{s}, & \text{якщо } k \in A. \end{cases},$$

де $A = \{n : n = 10^k, k \in N\}$, $B = \{n : n \neq 10^k, k \in N\}$.
Тоді $\dim_H(D(Q^*)) = 0$.

Крім того, у підрозділі 3.5 наведено загальні достатні умови аномальної фрактальності множини Q^*-суттєво анормальних чисел.

Теорема 3.5.2 *Нехай* $Q^* = \|q_{ik}\|$, $i \in A = \{0,1,\dots,s-1\}$, *і нехай* $\exists$ $i_0 \in A$ *таке, що* $\forall \alpha > 0 : \lim\limits_{k\to\infty} s^k \cdot q^{\alpha}_{i_0,k} = 0$.
Тоді $\dim_H(L(Q^*)) = 0$.

У підрозділі 3.7 наведено приклад такого зображення дійсних чисел, для якого множина суттєво анормальних чисел є множиною першої категорії Бера.

Розглянуто наступне циліндричне зображення дійсних чисел із змінним алфавітом.

Нехай $A = \{0, 1\}$.

$A_0 = \{0, 1\}, A_1 = \{0, 1, 2\}$.

$A_{00} = A_{01} = A_{10} = A_{11} = \{0, 1\}, A_{12} = \{0, 1, 2, 3\}$

Тоді на k-му кроці матимемо:

$$A_{i_1 i_2 \dots i_k} = \begin{cases} \{0, 1, \dots, k+1\}, & \text{якщо} \quad (i_1, i_2, \dots, i_k) = (1, 2, \dots, k), \\ \{0, 1\}, & \text{якщо} \quad (i_1, i_2, \dots, i_k) \neq (1, 2, \dots, k). \end{cases}$$

Для даного G^*–розкладу спостерігається несподіваний феномен: довільна цифра «i»($i \geqslant 2$) в розкладі довільного числа $x \in [0, 1]$ зустрічається лише скінченну кількість разів. Тому $\forall \ \nu_i(x) = 0, \ \forall \ i \geqslant 2 \ \forall \ x \in [0, 1]$.

А це означає, що в такій системі числення не існує жодного суттєво анормального числа.

Подяка. Автор щиро вдячний науковому керівнику професору Григорію Мирославовичу Торбіну за постановку задач, постійну підтримку та допомогу.

РОЗДІЛ 1
ФРАКТАЛИ І СИНГУЛЯРНІ МІРИ

1.1. Розмірність Хаусдорфа–Безиковича та її узагальнення

Міра Хаусдорфа, розмірність Хаусдорфа–Безиковича та їх властивості.

Нагадаємо означення міри Хаусдорфа та наведемо її властивості [2, 84, 104].

Нехай (M, ρ) — метричний простір. Діаметром обмеженої множини $E \subset M$ називають число $|E| = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in E\}$. Нехай $\varepsilon > 0$. Не більш ніж зліченна сукупність множин $\{E_j\}$ така, що $|E_j| \leqslant \varepsilon$, $(\bigcup\limits_j E_j) \supset E$ називається ε-покриттям множини E.

Нехай α — деяке додатне число. Для будь-якого $\varepsilon > 0$ визначимо поняття α-ε-передміри Хаусдорфа:

$$H^\alpha_\varepsilon(E) := \inf_{|E_j| \leqslant \varepsilon} \left\{ \sum_j |E_j|^\alpha \right\},$$

де інфімум береться за всіма не більш як зліченними ε-покриттями $\{E_j\}$ множини E підмножинами $E_j \subset M$.

Оскільки при зменшенні ε інфімум визначається за біднішим класом ε-покриттів, то границя $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} H^\alpha_\varepsilon(E)$ існує для довільної підмножини E з M, хоча граничне значення може бути (і зазвичай є) 0 або ∞.

Означення 1.1.1. α-мірною мірою Хаусдорфа множини $E \subset M$ називається число

$$H^\alpha(E) := \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\inf_{|E_j| \leqslant \varepsilon} \left\{ \sum_j |E_j|^\alpha \right\} \right] = \lim_{\varepsilon \to 0} H^\alpha_\varepsilon(E).$$

Зауваження 1. В силу монотонності $H^\alpha_\varepsilon(E)$ як функції від ε при обчисленні $H^\alpha(E)$ можна вибирати довільну «зручну» послідовність $\{\varepsilon_k\} \downarrow 0$ і тоді $H^\alpha(E) = \lim\limits_{k\to\infty} H^\alpha_{\varepsilon_k}(E)$.

Властивості мір Хаусдорфа та їх узагальнень вивчались багатьма авторами (див., наприклад, [83, 105–129]).

Нагадаємо деякі властивості міри Хаусдорфа:

1. $H^\alpha(\varnothing) = 0$, $\forall \alpha > 0$;
2. $H^\alpha(E) \geqslant 0$, $\forall \alpha > 0$;
3. $A \subset B \;\Rightarrow\; H^\alpha(A) \leqslant H^\alpha(B)$;
4. $H^\alpha(\bigcup\limits_j A_j) \leqslant \sum\limits_j H^\alpha(A_j)$;
5. Якщо $A_i \bigcap A_j = \varnothing$ для $i \neq j$, то $H^\alpha(\bigcup\limits_j A_j) = \sum\limits_j H^\alpha(A_j)$;
6. Нехай $0 < \alpha < \beta$. Якщо $H^\alpha(E) < \infty$, то $H^\beta(E) = 0$;
7. Нехай $0 < \alpha < \beta$. Якщо $H^\beta(E) > 0$, то $H^\alpha(E) = \infty$;
8. Якщо f — перетворення подібності з коефіцієнтом подібності $c > 0$, то $H^\alpha(f(E)) = c^\alpha H^\alpha(E)$;
9. Якщо f — таке відображення, що $\rho(f(x), f(y)) \leqslant c(\rho(x,y))^s$ для довільних $x, y \in E$ та деяких фіксованих $c > 0$ і $s > 0$, то для довільного $\alpha \in [0, 1]$ виконується $H^{\alpha/s}(f(E)) \leqslant c^{\alpha/s} H^\alpha(E)$.
10. Якщо $H^\alpha(E) = c_0 < +\infty$, то $H^{\alpha+\delta}(E) = 0$, $\forall\ \delta > 0$.
11. Якщо $H^\alpha(E) > 0$, то $H^{\alpha-\delta}(E) = +\infty$, $\forall\ \delta > 0$.

Отже, $\exists! \alpha_0$:   якщо $\alpha > \alpha_0$, то $H^\alpha(E) = 0$; якщо $\alpha < \alpha_0$, то $H^\alpha(E) = +\infty$.

Означення 1.1.2. [Ф. Хаусдорф, 1918, [130]] Розмірністю Хаусдорфа множини E називається таке невід'ємне число α_0, для якого

$$0 < H^\alpha(E) < +\infty.$$

Проте розмірність Хаусдорфа визначена не для всіх множин, міра Хаусдорфа таких множин рівна нулю або нескінченності при всіх $\alpha > 0$, і перший приклад множини, для якої дане поняття є невизначеним, побудував А. С. Безикович.

Після цього А. С. Безикович запропонував нове, «удосконалене» означення метричної розмірності, яка в сучасній математиці називається розмірністю Хаусдорфа–Безиковича.

Означення 1.1.3 ([84]). Розмірністю Хаусдорфа–Безиковича множини E називається невід'ємне число:

$$\dim_H(E) = \inf\{\alpha : H^\alpha(E) = 0\}.$$

Нагадаємо деякі властивості розмірності Хаусдорфа–Безиковича [2,131]:

1. Якщо E_1 і E_2 — геометрично подібні множини, то $\dim_H(E_1) = \dim_H(E_2)$;
2. Якщо $E_1 \subset E_2$, то $\dim_H(E_1) \leqslant \dim_H(E_2)$;
3. $\dim_H(E) = 0$ для довільної не більш ніж зчисленної множини E;
4. $\dim_H(\bigcup\limits_n E_n) = \sup\limits_n \dim_H(E_n)$.

Відомо ([104]), що α-мірна міра Хаусдорфа у просторі $\mathbb{R}^1$ при $\alpha = 1$ співпадає із зовнішньою мірою Лебега. Тому розмірність Хаусдорфа–Безиковича множин додатної міри Лебега дорівнює 1.

Фрактали та суперфрактали.

Нехай (T, τ) — топологічний простір. E — довільна підмножина з T. Нагадаємо означення топологічної розмірності $\dim E$ множини E (за Урисоном ([84, 132]):

1. $\dim E = -1$, якщо множина E порожня;

2. $\dim E = 0$, якщо

   1. $\dim E \neq -1$;
   2. для будь-якого $x \in E$ і для довільного околу $O(x) \in \tau$ існує $O_1(x) \in \tau : O_1(x) \subset O(x)$ і $\dim(\partial O_1(x) \cap E) = -1$, де $\partial O_1(x)$ — межа околу $O_1(x)$.

Вищі розмірності означаються за індукцією. Припустимо, що означені множини розмірності меншої за n. Тоді

$n+2$. $\dim E = n$, якщо

1. $\dim E \neq i, \forall i \in \{-1, 0, \ldots, n-1\}$;
2. $\forall x \in E$ і $\forall O(x) \in \tau$ існує $O_1(x) \in \tau : O_1(x) \subset O(x)$ і $\dim(\partial O_1(x) \cap E) \leqslant n-1$.

З означення зрозуміло, що топологічна розмірність множини $E \subset T$ залежить від обраної топології τ.

Між поняттями топологічної розмірності та розмірності Хаусдорфа–Безиковича існує тісний взаємозв'язок, виявлений Л. С. Понтрягіним і Л. Г. Шнірельманом [133], а саме: нижня грань розмірностей Хаусдорфа–Безиковича для всіх метрик компакта E дорівнює його топологічній розмірності. Як наслідок, топологічна розмірність і розмірність Хаусдорфа-Безиковича компакта E пов'язані між собою нерівністю

$$\dim E \leqslant \dim_H(E).$$

Означення 1.1.4 ([134]). Множина E називається фракталом у широкому розумінні, якщо її розмірність Хаусдорфа–Безиковича строго більша за топологічну розмірність.

Означення 1.1.5 ([134]). Множина E називається фракталом у вузькому розумінні, якщо її розмірність Хаусдорфа–Безиковича не є цілим числом.

Оскільки топологічна розмірність є цілим числом, то, за результатом Понтрягіна–Шнірельмана, фрактал у вузькому розумінні є фракталом і у широкому розумінні.

Але при таких означеннях лишилися поза увагою множини, які варто віднести до фракталів, наприклад, континуальні множини з нульовою розмірністю Хаусдорфа–Безиковича. М. В. Працьовитий [2] запропонував наступне означення.

Означення 1.1.6. Фракталом називається кожна континуальна множина з $[0, 1]$, яка має тривіальну (рівну 0 або ∞) α-міру Хаусдорфа, порядок α якої дорівнює топологічній розмірності.

Підмножини числової прямої з нульовою мірою Лебега і розмірністю Хаусдорфа–Безиковича рівною 1 називаються суперфрактальними. Якщо E — суперфрактальна множина, то для довільного $\alpha \in (0, 1)$ міра $H^\alpha(E) = \infty$ за властивістю міри Хаусдорфа і $H^1(E) = \lambda(E) = 0$. Тому розмірність Хаусдорфа за означенням 1.1.2 не визначена для суперфракталів.

Міра Хаусдорфа та розмірність Хаусдорфа–Безиковича відносно сімейств покриттів.

Нехай (M, ρ) — метричний простір і $E \subset M$.

Сімейство Φ підмножин метричного простору (M, ρ) називається локально тонкою системою покриттів цього простору, якщо для довільної множини $E \subset M$ і для довільного $\varepsilon > 0$ існує не більш ніж зліченне ε-покриття множини E множинами з Φ.

Нехай α — деяке додатне число.

Означення 1.1.7. α-мірною мірою Хаусдорфа множини E відносно локально тонкої системи покриттів Φ називається число

$$H^\alpha(E, \Phi) := \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\inf_{|E_j| \leqslant \varepsilon} \left\{ \sum_j |E_j|^\alpha \right\} \right] = \lim_{\varepsilon \to 0} H^\alpha_\varepsilon(E, \Phi),$$

де інфімум береться за всіма не більш як зліченними ε-покриттями $\{E_j\}$ множини E множинами $E_j \in \Phi$.

Оскільки при зменшенні ε інфімум визначається за «біднішим» класом ε-покриттів, то границя (скінченна чи нескінченна) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} H^\alpha_\varepsilon(E, \Phi)$ завжди існує.

Означення 1.1.8. Розмірністю Хаусдорфа–Безиковича множини E відносно локально тонкої системи покриттів Φ називається таке невід'ємне число, що

$$\dim_H(E,\Phi) := \inf\{\alpha : \quad H^\alpha(E,\Phi) = 0\}.$$

Нагадаємо деякі властивості розмірності Хаусдорфа–Безиковича відносно локально тонкої системи покриттів Φ:

1. Якщо $E_1 \subset E_2$, то $\dim_H(E_1,\Phi) \leqslant \dim_H(E_2,\Phi)$;
2. $\dim_H\left(\bigcup\limits_n E_n,\Phi\right) = \sup\limits_n \dim_H(E_n,\Phi)$;
3. $\dim_H(E) \leqslant \dim_H(E,\Phi)$, $\forall E \subset M$;
4. Якщо $\Phi = 2^M$, то $\dim_H(E) = \dim_H(E,\Phi)$, $\forall E \subset M$.

Міра Хаусдорфа та розмірність Хаусдорфа–Безиковича відносно локально тонкої системи покриттів та міри.

Нехай Φ — локально тонка система покриттів на (M,ρ). І нехай $E \subset M$, μ — неперервна міра.

Нехай α — деяке додатне число.

Означення 1.1.9. α-мірною мірою Хаусдорфа множини E відносно локально тонкої системи покриттів Φ та міри μ називається число

$$H^\alpha(E,\Phi,\mu) := \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\inf_{|E_j|\leqslant\varepsilon}\left\{\sum_j \left(\mu(E_j)\right)^\alpha\right\}\right] = \lim_{\varepsilon\to 0} H^\alpha_\varepsilon(E,\Phi,\mu),$$

де інфімум береться за всіма не більш як зліченними ε-покриттями $\{E_j\}$ множини E множинами $E_j \in \Phi$.

Оскільки при зменшенні ε інфімум визначається за «біднішим» класом ε-покриттів, то границя (скінченна чи нескінченна) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} H^\alpha_\varepsilon(E,\Phi,\mu)$ завжди існує.

Означення 1.1.10. Розмірністю Хаусдорфа–Безиковича множини E відносно локально тонкої системи покриттів Φ та міри μ називається таке невід'ємне число, що

$$\dim_H(E,\Phi,\mu) := \inf\{\alpha : \quad H^\alpha(E,\Phi,\mu) = 0\}.$$

Нагадаємо деякі властивості розмірності Хаусдорфа–Безиковича відносно локально тонкої системи покриттів Φ та міри μ:

1. Якщо $E_1 \subset E_2$, то $\dim_H(E_1, \Phi, \mu) \leqslant \dim_H(E_2, \Phi, \mu)$;
2. $\dim_H\left(\bigcup\limits_n E_n, \Phi, \mu\right) = \sup\limits_n \dim_H(E_n, \Phi, \mu)$;
3. Якщо $\mu = \lambda$, Φ — сукупність циліндрів деякого зображення дійсних чисел, то $\dim_H(E, \Phi, \mu) = \dim_H(E, \Phi)$, $\forall E \subset M$.

Зауваження 2. Розмірність Хаусдорфа–Безиковича відносно сукупності циліндрів деякого зображення дійсних чисел та міри називають розмірністю Біллінгслі [88].

1.2. Теореми Біллінгслі

Нехай $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ — деякий ймовірнісний простір з неперервною мірою μ, а $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ — визначений на ньому стохастичний процес із не більш ніж зліченним простором станів σ.

Означення 1.2.1. Циліндром рангу n з основою $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \sigma$ називається множина виду

$$\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} := \{\omega : \omega \in \Omega,\ \ x_1(\omega) = \alpha_1,\ x_2(\omega) = \alpha_2,\ \ldots\ ,\ x_n(\omega) = \alpha_n\}.$$

Для $\omega \in \Omega$ і $n = 1, 2, \ldots$, покладемо

$$\Delta_n(\omega) = \{\omega' : x_k(\omega') = x_k(\omega), k = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Іншими словами, $\Delta_n(\omega)$ — це циліндр рангу n, який містить ω.

Нехай μ і ν — дві ймовірнісні міри міри на $\mathfrak{B}$.

У роботі Біллінгслі [88] були отримані наступні теореми, перша з яких по суті є узагальненням результату Гілліса [135] і є дуже корисною у теорії кодувань. Введемо позначення:

$$A_1 := \left\{\omega : \lim_{n\to\infty} \inf \frac{\ln \nu(\Delta_n(\omega))}{\ln \mu(\Delta_n(\omega))} \leqslant \delta\right\}.$$

Теорема 1.2.1 ([88]). *Якщо* $\mu\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\Delta_n(\omega)\right)=0$ *для довільного* ω *(тобто, якщо всі циліндри рангу* ∞ *мають нульову* μ*-міру), і якщо* $\delta \geqslant 0$, *то*

$$\dim_H(A_1,\Phi,\mu)\leqslant\delta.$$

Теорема 1.2.2 ([88]). *Якщо*

$$E\subset\left\{\omega:\liminf_{n\to\infty}\frac{\ln\nu(\Delta_n(\omega))}{\ln\mu(\Delta_n(\omega))}\geqslant\delta\right\},$$

то

$$\dim_H(E,\Phi,\mu)\geqslant\delta\dim_H(E,\Phi,\nu).$$

Якщо поміняти ролями μ та ν в теоремі 1.2.2 і замінити δ відповідно, отримується наступна теорема:

Теорема 1.2.3 ([88]). *Якщо*

$$E\subset\left\{\omega:\limsup_{n\to\infty}\frac{\ln\nu(\Delta_n(\omega))}{\ln\mu(\Delta_n(\omega))}\leqslant\delta\right\},$$

то

$$\dim_H(E,\Phi,\mu)\leqslant\delta\dim_H(E,\Phi,\nu).$$

Поєднавши результати теорем 1.2.2 і 1.2.3, отримується наступна теорема:

Теорема 1.2.4 ([88]). *Якщо*

$$E\subset\left\{\omega:\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\nu(\Delta_n(\omega))}{\ln\mu(\Delta_n(\omega))}=\delta\right\},$$

то

$$\dim_H(E,\Phi,\mu)=\delta\dim_H(E,\Phi,\nu).$$

Наступна теорема дає результат, що є більш корисним для обчислення розмірностей конкретних множин.

Теорема 1.2.5 ([88]). *Нехай* $\nu\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\Delta_n(\omega)\right)=0$ *при всіх* ω, *для яких*

$$E\subset\left\{\omega:\ \limsup_{n\to\infty}\frac{\ln\nu(\Delta_n(\omega))}{\ln\mu(\Delta_n(\omega))}\leqslant\delta\right\}$$

і

$$E_0\subset\left\{\omega:\ \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\nu(\Delta_n(\omega))}{\ln\mu(\Delta_n(\omega))}=\delta\right\}$$

для деякої підмножини E_0 *множини* E.

Якщо $\nu(E_0)>0$, *то*

$$\dim_H(E,\Phi,\mu)=\delta.$$

1.3. Порівнянні міри Хаусдорфа

Означення 1.3.1. Нехай Φ — локально тонка система покриттів на M та $\alpha>0$. Міра $H^{\alpha}(\cdot,\Phi)$ називається порівнянною з мірою Хаусдорфа, якщо існує додатна константа $C=C(\alpha)>0$ така, що

$$H^{\alpha}(E)\leqslant H^{\alpha}(E,\Phi)\leqslant CH^{\alpha}(E),\forall E\subset M.$$

Означення 1.3.2. Локально тонка система покриттів Φ називається порівнянною, якщо $\forall\alpha>0$ відповідна міра $H^{\alpha}(\cdot,\Phi)$ є порівнянною з мірою Хаусдорфа.

Перший приклад порівнянної системи покриттів виникає в роботі А.С. Безиковича ([83]), де доведено порівнянність системи циліндрів двійкового розкладу. Пізніше цей результат був узагальнений для системи s-адичних циліндрів П. Біллінгслі ([136]). Прикладами порівнянних локально тонких систем покриттів також є системи покриттів, що породжуються Q-розкладами ([84]), а також Q^*-розкладами дійсних чисел (за умови, що $\inf\limits_k q_{0k}>0$ та $\inf\limits_k q_{(s-1)k}>0$) ([7]).

У роботах [85, 87] було знайдено деякі загальні достатні умови, які гарантують порівнянність локально тонких систем покриттів.

Теорема 1.3.1 ([85]). *Нехай для сімейств Φ_1 і Φ_2 існує число $N^* \in N$ таке, що:*

1) для довільного елемента E_1 з Φ_1 існує не більш як N^* елементів з Φ_2, які покривають E_1 і діаметри яких не перевищують $|E_1|$;

2) для довільного елемента E_2 з Φ_2 існує не більш як N^* елементів з Φ_1, які покривають E_2 і діаметри яких не перевищують $|E_2|$.

Тоді системи Φ_1 і Φ_2 є порівнянними.

Означення 1.3.3. Нехай Φ — локально тонка система покриттів на M та $\alpha > 0$. Міра $H^\alpha(E, \Phi)$ називається непорівнянною з мірою Хаусдорфа, якщо існує множина $E \subset M$ така, що

$$H^\alpha(E) = 0,\ H^\alpha(E, \Phi) > 0$$

або

$$H^\alpha(E) \in (0, +\infty),\ H^\alpha(E, \Phi) = +\infty.$$

Означення 1.3.4. Локально тонка система покриттів Φ називається непорівнянною, якщо існує $\alpha > 0$ таке , що відповідна міра $H^\alpha(\cdot, \Phi)$ є непорівнянною з мірою Хаусдорфа.

1.4. Довірчі системи покриттів

Розмірність Хаусдорфа–Безиковича є добре відомим поняттям, яке активно використовується в різних галузях математики. Задача обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича множини або міри є однією з основних задач фрактального аналізу, розв'язанню якої для різних множин та мір присвячено значну кількість дослідницьких статей у провідних математичних журналах світу (див., наприклад, [8, 40, 41, 44, 45, 61, 86, 90, 98–101, 108, 124, 136–181]). Це стало причиною розвитку методів знаходження точних або хоча б наближених значень розмірності Хаусдорфа–Безиковича. Один з таких методів полягає у суттєвому зменшенні класу допустимих покриттів при обчисленні розмірності до деякого специфічного (зчисленного) класу покриттів, який є достатнім (довірчим) для правильного обчислення розмірності, що дає досліднику суттєві технічні переваги.

Означення 1.4.1. Локально тонка система покриттів Φ називається довірчою системою покриттів на M, якщо при обчисленні розмірності Хаусдорфа–Безиковича довільної підмножини з M можна обмежитись розглядом покриттів з Φ, тобто якщо

$$\dim_H(E,\Phi) = \dim_H(E), \forall E \subset M.$$

Варто зауважити, що для всіх систем покриттів виконується нерівність

$$\dim_H(E) \leqslant \dim_H(E,\Phi), \ \forall E \subset M.$$

Безпосередньо з означення 1.3.1 випливає, що довільна система Φ порівнянних покриттів є довірчою для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича. Якщо Φ недовірча для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича, то вона породжує міру Хаусдорфа $H^{\alpha}(\cdot,\Phi)$, яка не є порівнянною з класичною мірою Хаусдорфа. Природнім чином постає питання про існування довірчих локально тонких систем покриттів, які не є порівнянними. Відповідь на це запитання знайдено у роботі [182].

Теорема 1.4.1 ([182]). *Нехай $n_k = 4^k$ та Φ — система циліндричних відрізків розкладу Кантора (для означення розкладу Кантора див. [183]).*

Тоді локально тонка система покриттів Φ є довірчою для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича на одиничному відрізку, але породжена нею міра Хаусдорфа $H^{\alpha}(\cdot,\Phi)$ є непорівнянною з класичною мірою Хаусдорфа.

Останнє твердження показує, що клас довірчих систем покриттів значно ширший за клас порівнянних.

Перевірка довірчості чи знаходження достатніх умов довірчості систем покриттів є важливою задачею фрактального аналізу. Перші кроки у цьому напрямку були зроблені А.С. Безиковичем ([83]), який довів довірчість системи циліндрів двійкового розкладу. Цей результат був розширений П. Біллінгслі ([136]) на систему s-адичних циліндрів та М.В. Працьовитим ([84]) на систему циліндрів Q-S-розкладів дійсних чисел. Ці дослідження об'єднує спільний метод доведення довірчості, який полягає у існуванні такої додатної константи $K \in N$, що для довільного додатного ε і для довільного відрізка $[a, b]$ існує не більш як K циліндрів відповідної системи, які покривають $[a, b]$ і діаметр кожного з циліндрів не перевищує ε.

Надалі достатні умови довірчості локально тонких систем покриттів досліджувались багатьма авторами (див. [2, 7, 21, 85, 87] та відповідні посилання).

Дослідження достатніх умов довірчості для системи $\Phi(Q^*)$ циліндрів Q^*-зображення дійсних чисел проводились в роботах S. Albeverio, M. Ібрагіма, M. Працьовитого, Г. Торбіна.

Зокрема, отримано наступні результати.

Теорема 1.4.2 ([184]). *Нехай матриця Q^* має властивість:*

$$\inf_{i,j} q_{ij} = q > 0.$$

Тоді для будь-якої множини $E \subset [0; 1]$:

$$\dim_H(E, \Phi(Q^*)) = \dim_H(E).$$

Теорема 1.4.3 ([7]). *Якщо матриця Q^* володіє властивістю:*

$$\inf_j q_{0j} = q_0 > 0, \quad \inf_j q_{(s-1)j} = q_{s-1} > 0,$$

то для будь-якої множини $E \subset [0; 1]$:

$$\dim_H(E, \Phi(Q^*)) = \dim_H(E).$$

Теорема 1.4.4 ([185]). *Нехай $q_k^* := \max\{q_{0k}, q_{1k}, \ldots, q_{(s-1)k}\}$.*

Якщо для будь-якого $\delta > 0$ виконуються умови

$$\begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{q_{0k}} \left(q_1^* q_2^* ... q_k^*\right)^{\delta} = 0, \\ \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{q_{(s-1)k}} \left(q_1^* q_2^* ... q_k^*\right)^{\delta} = 0, \end{cases}$$

то

$$\dim_H(E) = \dim_H(E, \Phi(Q^*)), \quad \forall E \subset [0, 1].$$

Теорема 1.4.5 ([186]). *Нехай* $q_k^* := \max\{q_{0k}, q_{1k}, \ldots, q_{(s-1)k}\}$. *Якщо*

$$\begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\ln q_{0k}}{\ln(q_1^* q_2^* ... q_k^*)} = 0, \\ \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\ln q_{(s-1)k}}{\ln(q_1^* q_2^* ... q_k^*)} = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

то

$$\dim_H(E) = \dim_H(E, \Phi(Q^*)), \quad \forall E \subset [0, 1].$$

Теорема 1.4.6 ([187]). *Нехай* $q := \sup\limits_{ik} q_{ik} < 1$.

Тоді система $\Phi(Q^*)$ *циліндрів, породжених* Q^**-розкладом дійсних чисел, є довірчою для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку, тобто,*

$$\dim_H(E) = \dim_H(E, \Phi(Q^*)), \quad \forall E \subset [0, 1].$$

Теорема 1.4.7 ([166]). *Нехай* $q_k := \max\limits_i q_{ik}$, *нехай*

$$S(m, \delta) := \sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{i=m+1}^{m+k} q_i \right)^{\delta},$$

і нехай

$$S(\delta) := \sup_m S(m, \delta).$$

Якщо

$$S(\delta) < +\infty, \quad \forall \delta > 0,$$

то система $\Phi(Q^*)$ *циліндрів, породжених* Q^*-*розкладом дійсних чисел є довірчою для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку, тобто,*

$$\dim_H(E) = \dim_H(E, \Phi(Q^*)), \quad \forall E \subset [0, 1].$$

Проте у всіх вищевказаних роботах клас допустимих покриттів породжувався або зображенням дійсних чисел зі скінченним алфавітом, або задовольняв додаткові BVC-умови (bounded Vitali covering), тобто для кожної точки x з одиничного відрізка вимагалося існування послідовності $\{I_j(x)\}$ множин (інтервалів) з Φ таких, що:

$$x \in I_j(x), \forall j \in N; \quad \lim_{j\to\infty} |I_j(x)| = 0; \quad \inf_j \frac{|I_{j+1}(x)|}{|I_j(x)|} > 0.$$

Очевидно, що для системи циліндрів Q_∞-зображення вказані припущення не виконуються. Крім того, для системи циліндрів Q_∞-розкладів не можна застосувати метод, що використовувався для доведення довірчості системи циліндрів двійкового розкладу, системи s-адичних циліндрів та системи циліндрів Q-S-розкладів дійсних чисел. Проте для систем покриттів, породжених Q_∞-розкладами, також отримано низку результатів:

Теорема 1.4.8 ([188]). *Нехай $\Phi(Q_\infty)$ — система, яка складається з циліндрів всеможливих рангів Q_∞-розбиття інтервалу $[0,1)$.*

Якщо $q_i = \frac{1}{2^i}$, то $\dim_H(E,\Phi) = \dim_H(E), \forall E \subset [0,1)$.

Теорема 1.4.9 ([8]). *Якщо існують дійсні числа c_1 та c_2 такі, що*

$$0 < c_1 \leqslant \frac{q_i}{q_{i-1}} \leqslant c_2 < 1, \quad \forall i \in N,$$

то система $\Phi(Q_\infty)$ циліндрів Q_∞-розкладу є довірчою для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича.

Теорема 1.4.10 ([21]). *Нехай $Q_\infty = (q_0, \dots, q_i, \dots)$ — стохастичний вектор, такий що для довільного $\alpha > 0$ існує константа $c = c(\alpha)$ така, що*

$$\sum_{k=i+1}^{\infty} q_k^\alpha \leqslant c(\alpha) q_i^\alpha, \ \forall i \in \mathbb{N}_0.$$

Тоді система Φ є довірчою для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку.

У роботі [19] знайдено критерій довірчості системи циліндрів, пордженої розкласдом Кантора.

Теорема 1.4.11. *Система Φ циліндрів розкладу Кантора є довірчою для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку тоді і тільки тоді, коли*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln n_k}{\ln(n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-1})} = 0$$

У розділі 2 буде представлено отримані нами результати щодо довірчості систем, що породжені Q_∞- та I-Q_∞-розкладами дійсних чисел.

Перші приклади недовірчих систем покриттів виникли в двовимірному випадку як результат активних досліджень фрактальних властивостей самоафінних множин в 90-х роках 20-го століття (див. [189]). Напевно, першим (і досить несподіваним) прикладом одновимірної недовірчої локально тонкої системи покриттів є сукупність циліндрів класичного ланцюгового зображення (див. [18]). Використовуючи підхід, який був запропонований Ювалом Пересом для доведення недовірчості сімейства циліндрів ланцюгового розкладу, в роботі [21] доведено недовірчість сімейства циліндрів Q_∞-розкладів при поліноміальній швидкості спадання членів послідовності $\{q_i\}$:

Теорема 1.4.12 ([21]). *Якщо існує додатне ціле число m_0 і дійсні числа A та B такі, що*

$$\frac{A}{(i+1)^{m_0}} \leqslant q_i \leqslant \frac{B}{(i+1)^{m_0}}, \forall i \in N,$$

то система циліндричних відрізків, яка породжена таким Q_∞-зображенням, є недовірчою для обчислення розмірності Хайсдорфа–Безиковича.

Окрему увагу варто приділити особливим системам покриттів $\hat{\Phi}$, які складаються з циліндрів та множин, що є об'єднаннями суміжних циліндрів одного рангу і належать до одного циліндру попереднього рангу.

1.5. Сингулярні міри

Нехай $(\Omega, \mathcal{A})$ — вимірний простір з ймовірнісними мірами μ і λ.

Означення 1.5.1. Міра μ називається дискретною, якщо вона зосереджена на не більш ніж зчисленній множині точок. Міра μ називається неперервною, якщо міра кожної одноточкової множини рівна нулю.

Означення 1.5.2. Міра μ називається абсолютно неперервною відносно міри λ, якщо $\mu(E) = 0$ для всіх $E \in \mathcal{A}$, для яких $\lambda(E) = 0$. Позначають це $\mu \ll \lambda$. Якщо μ абсолютно неперервна відносно λ і λ абсолютно неперервна відносно μ, то міри μ і λ називають еквівалентними.

Означення 1.5.3. Міри μ і λ називаються сингулярними, якщо існує така множина $E \in \mathcal{A}$, що $\lambda(E) = 0$ і $\mu(E) = 1$. Сингулярність мір позначають $\mu \perp \lambda$. Зрозуміло, що довільна дискретна міра сингулярна відносно довільної неперервної.

Оскільки нас цікавлять лише міри, задані на відрізку $[0, 1]$, тому надалі $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{A}$ — σ-алгебра вимірних за Лебегом підмножин одиничного відрізка, λ — міра Лебега на $[0, 1]$.

Під сингулярністю або абсолютно неперервністю міри μ будемо розуміти її сингулярність чи абсолютну неперервність відносно міри Лебега, якщо не буде сказано інше.

Означення 1.5.4. Міра μ називається сингулярно неперервною, якщо вона неперервна і зосереджена на множині нульової міри Лебега.

Як відомо, функція розподілу є сингулярно неперервною, якщо вона неперервна і її похідна λ-майже скрізь рівна нулю.

Теорема 1.5.1 (Лебега). *Довільна ймовірнісна міра μ на $[0, 1]$ може бути єдиним чином розкладена у вигляді*

$$\mu = \alpha_1 \mu_d + \alpha_2 \mu_{ac} + \alpha_3 \mu_{sc}, \tag{1.2}$$

де μ_d — *дискретна міра,* μ_{ac} — *абсолютно неперервна міра,* μ_{sc} — *сингулярно неперервна міра,* $\alpha_i \geqslant 0 \ \forall i \in \{1,2,3\}$, $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$.

Клас сингулярно неперервних мір є найменш вивченим, хоча існує значна кількість робіт, присвячених вивченню властивостей сингулярних мір (див., наприклад, [15,26,37,43,44,47,52,56–58,61,62,84,86,108,126–128,152, 164,169,171,178,190–211,211,212]).

Спектральна класифікація сингулярних мір.

Означення 1.5.5 ([32]). Сингулярно неперервна ймовірнісна міра μ на $\mathbb{R}^1$ називається мірою чистого GC-типу (узагальненого канторівського типу), якщо існує така ніде не щільна множина E, що

$$\begin{cases} E \subset S_\mu, \\ \mu(E) = 1, \\ \forall x \in E \ \exists \varepsilon(x) > 0 : \ \lambda\big([x-\varepsilon(x), x+\varepsilon(x)] \cap S_\mu\big) = 0. \end{cases}$$

Приклад. Найпростішим прикладом міри GC-типу є класична міра Кантора, тобто міра, що відповідає розподілу випадкової величини η з незалежними трійковими знаками:

$$\eta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_k}{3^k},$$

де η_k — незалежні випадкові величини, які набувають значень 0 та 2 з ймовірностями p_0 та p_2, $p_0 = p_2 = 1/2$.

Означення 1.5.6 ([32]). Сингулярно неперервна ймовірнісна міра μ називається мірою чистого GS-типу, якщо існує послідовність таких неперекривних відрізків $\{[a_i,b_i]\}$, що

$$\begin{cases} [a_i,b_i] \subset S_\mu, \\ \mu\left(\bigcup\limits_i [a_i,b_i]\right) = 1. \end{cases}$$

Приклад. Прикладом міри GS-типу є несиметрична міра Салема, тобто міра, що відповідає розподілу випадкової величини ψ з незалежними двійковими знаками:

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k}{2^k},$$

де ψ_k — незалежні випадкові величини, що набувають значення 0 та 1 з ймовірностями p_0 та p_1, $0 < p_0 < p_1 < 1$, $p_0 + p_1 = 1$.

Означення 1.5.7 ([32]). Сингулярно неперервна ймовірнісна міра μ називається мірою чистого GP-типу, якщо існує така ніде не щільна множина E, що

$$\begin{cases} E \subset S_\mu, \\ \mu(E) = 1, \\ \forall x \in E \ \ \forall \varepsilon > 0 : \quad [x - \varepsilon, x + \varepsilon] \cap S_\mu \text{ — множина додатної міри Лебега.} \end{cases}$$

Сингулярно неперервні міри GC-, GP- та GS- типів утворюють неперетинні сімейства. Об'єднання цих сімейств не співпадає з сімейством усіх сингулярно неперервних ймовірнісних мір на $\mathbb{R}^1$, оскільки існують сингулярно неперервні ймовірнісні міри на $\mathbb{R}^1$, які не належать до жодного з вищеназваних класів, але має місце така теорема.

Теорема 1.5.2 ([32]). *Довільна сингулярно неперервна ймовірнісна міра μ на R^1 може бути представлена у вигляді*

$$\mu = \alpha_1 \mu^{GS} + \alpha_2 \mu^{GC} + \alpha_3 \mu^{GP}, \tag{1.3}$$

де $\alpha_1 \geqslant 0$, $\alpha_2 \geqslant 0$, $\alpha_3 \geqslant 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$; μ^{GS}, μ^{GC} і μ^{GP} — сингулярно неперервні ймовірнісні міри GS, GC та GP-типу відповідно.

РОЗДІЛ 2
ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ З НЕЗАЛЕЖНИМИ I-Q_∞-СИМВОЛАМИ ТА ЇХ ФРАКТАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ

2.1. I-Q_∞-зображення дійсних чисел

Нагадаємо поняття I-Q_∞-зображення дійсних чисел, яке було введено в розгляд в роботі [69]. Нехай I — довільне дійсне число з одиничного відрізка, записане у двійковій системі числення

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k(I)}{2^k} =: 0,\beta_1(I)\beta_2(I)\ldots\beta_k(I)\ldots, \quad \beta_k(I) \in \{0,1\}.$$

Для тих чисел з одиничного відрізка, які мають по два різні двійкові розклади, зафіксуємо той, який має цифру 1 в періоді.

Нехай $Q_\infty = (q_0, q_1, \ldots, q_k, \ldots)$ — нескінченний стохастичний вектор з додатніми координатами. При фіксованому дійсному числі $I \in [0,1]$ (тобто при фіксованій послідовності $\{\beta_k(I)\}$) та фіксованому стохастичному векторі Q_∞ здійснюється зчисленна послідовність розбиттів одиничного відрізка за наступними правилами.

Крок 1. Розбиваємо одиничний відрізок зліва направо, якщо $\beta_1(I) = 1$; (і справа наліво, якщо $\beta_1(I) = 0$) на зчисленну кількість відрізків $\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1}$, $\alpha_1 \in \{0,1,2,\ldots\}$, довжини яких дорівнюють $\left|\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1}\right| = q_{\alpha_1}$. Кожен з відрізків $\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1}$ називається циліндром 1-го рангу I-Q_∞-розкладу.

Крок 2. Кожен з циліндрів 1-го рангу $\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1}$ розбиваємо (зліва направо, якщо $\beta_2(I) = 1$; і справа наліво, якщо $\beta_2(I) = 0$) на зчисленну кількість відрізків $\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \{0,1,2,\ldots\}$, довжини яких дорівнюють $\left|\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2}\right| = q_{\alpha_1} \cdot q_{\alpha_2}$. Кожен з відрізків $\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2}$ називається циліндром 2-го рангу I-Q_∞-розкладу.

Крок k $(k>2)$**.** Кожен з циліндрів $(k-1)$-рангу $\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}}$ розбиваємо (зліва направо, якщо $\beta_k(I)=1$; і справа наліво, якщо $\beta_k(I)=0$) на зчисленну кількість відрізків $\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}$, довжини яких

$$\left|\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}\right| = q_{\alpha_1}\cdot q_{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot q_{\alpha_k} = \prod_{s=1}^{k} q_{\alpha_s} \tag{2.1}$$

відносяться як

$$\left|\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}0}\right| : \left|\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}1}\right| : \ldots : \left|\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}m}\right| : \ldots = q_0 : q_1 : \ldots : q_m : \ldots .$$

Кожен з відрізків $\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}$ називається циліндром k-го рангу I-Q_∞-розкладу.

Для довільної послідовності індексів $\{\alpha_k\}$, $\alpha_k\in\{0,1,2,\ldots\}$, існує послідовність вкладених циліндрів

$$\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1} \supset \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2} \supset \cdots \supset \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} \supset \cdots,$$

таких, що $|\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\ldots\alpha_k}|\to 0$, $k\to\infty$. Тому існує єдина точка x, яка належить всім цим циліндрам $\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1}$, $\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2}, \ldots$, $\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}, \ldots$.

І навпаки, для кожної точки $x\in[0,1]$, яка не є межовою для жодного циліндра жодного рангу, існує єдина (оскільки кожна така точка належить рівно одному циліндру n-го рангу) послідовність вкладених циліндрів $\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1(x)} \supset \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)} \supset \ldots \supset \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)} \supset \ldots$, які містять x, тобто

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)} =: \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}.$$

Останній вираз називатимемо I-Q_∞-зображенням точки x.

Нехай $D=D(I)$ — множина точок одиничного відрізка, які мають I-Q_∞-зображення, тобто

$$D = \left\{x:\ \ x\in[0,1],\ \ \forall n\in N\ \ \exists\ \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)} :\ \ x\in\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)}\right\}.$$

Очевидно, що дійсне число x не має I-Q_∞-зображення тоді і тільки тоді, коли знайдеться таке число $n_0=n_0(x)$, що x не належить до жодного циліндра n_0-го рангу.

Точку x назвемо I-Q_∞-раціональною, якщо вона є межовою для деякого циліндра. Якщо ж точка x не є межовою для жодного циліндра жодного рангу, то назвемо її I-Q_∞-ірраціональною.

Означення 2.1.1. Циліндричною множиною m-го рангу з основою $c_1c_2\ldots c_m$ називається множина

$$\tilde{\Delta}^{I\text{-}Q_\infty}_{c_1c_2\ldots c_m} = \{x : x = \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{c_1c_2\ldots c_m\alpha_{m+1}\alpha_{m+2}\ldots}, \alpha_j \in N_0, \forall j > m\}.$$

Означення 2.1.2. Циліндричним відрізком m-го рангу з основою $c_1c_2\ldots c_m$ називається множина

$$\left[\inf \tilde{\Delta}^{I\text{-}Q_\infty}_{c_1c_2\ldots c_m}; \sup \tilde{\Delta}^{I\text{-}Q_\infty}_{c_1c_2\ldots c_m}\right].$$

Властивості циліндричних відрізків I-Q_∞-зображення:

1. Якщо $\beta_m(I) = 1$, то $\sup \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{c_1c_2\ldots c_m} = \inf \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{c_1c_2\ldots(c_m+1)}, \forall c_m \in N_0$.
   Якщо $\beta_m(I) = 0$, то $\inf \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{c_1c_2\ldots c_m} = \sup \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{c_1c_2\ldots(c_m+1)}, \forall c_m \in N_0$.
2. $Int\left(\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{c_1c_2\ldots c_m}\right) \bigcap Int\left(\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{d_1d_2\ldots d_m}\right) = \varnothing$,
   якщо $(c_1, c_2, \ldots, c_m) \neq (d_1, d_2, \ldots, d_m)$, $\forall I \in [0, 1]$.
3. $\dfrac{\left|\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{c_1c_2\ldots c_{m-1}i}\right|}{\left|\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{c_1c_2\ldots c_{m-1}}\right|} = q_i, \forall (c_1, c_2, \ldots, c_{m-1}) \in N_0^{m-1}, \forall i \in N_0, \forall I \in [0, 1]$.
4. $\left|\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{c_1c_2\ldots c_m}\right| = q_{c_1} \cdot q_{c_2} \cdot \ldots \cdot q_{c_m}, \forall m \in N_0, \forall I \in [0, 1]$.
5. $\left|\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{c_1c_2\ldots c_m}\right| \to 0 (m \to \infty), \forall I \in [0, 1]$.
6. $\left|\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{c_1c_2\ldots c_m}\right| \leqslant q^m$, де $q := \max\limits_{i \in N_0} q_i, \forall I \in [0, 1]$.

Зауважимо, що Q_∞-зображення є частковим випадком I-Q_∞-зображення (його можна отримати, поклавши $I = 1$). Якщо $I = 0$ і при цьому додатково $q_i = \frac{1}{(i+1)(i+2)}$, то I-Q_∞-зображення співпадає з розкладом Люрота ([4]). При $I = 0, (01) = \frac{1}{3}$ отримаємо $\widetilde{Q}_\infty$-зображення дійсних чисел([84]). Якщо ж додатково до умови $I = \frac{1}{3}$ вибрати стохастичний вектор Q_∞ так, щоб $q_i = \frac{1}{(i+1)(i+2)}$, то отримаємо знакопочережний розклад Люрота.

Нехай $\{\xi_k\}$ — послідовність незалежних випадкових величин з наступними розподілами:

$$P(\xi_k = i) := p_{ik} \geqslant 0, \quad \text{де} \quad \sum_{i=0}^{\infty} p_{ik} = 1, \ \ \forall k \in N.$$

Використовуючи послідовність $\{\xi_k\}$ та I-Q_∞-розклад, розглянемо наступну випадкову величину:

$$\xi := \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_k\ldots} \,,$$

яку називають випадковою величиною з незалежними I-Q_∞-символами.

Позначимо через μ_ξ відповідну ймовірнісну міру, яку будемо називати ймовірнісною мірою з незалежними I-Q_∞-символами.

2.2. Ергодичні властивості I-Q_∞-зображення дійсних чисел

Нехай $\Omega_k = \{0, 1, 2, \ldots\} =: N_0$, $\mathcal{A}_k = 2^{\Omega_k}$.

Нехай $(\Omega, \mathcal{A}) := \prod\limits_{k=1}^{\infty} (\Omega_k, \mathcal{A}_k)$.

Як відомо (див., наприклад [213]), σ-алгебра $\mathcal{A}$ є мінімальною σ-алгеброю, яка породжена циліндрами з Ω, тобто множинами виду

$$\omega_{c_1c_2\ldots c_m} = \{\omega : \ \omega = (c_1, c_2, \ldots, c_m, \omega_{m+1}, \omega_{m+2} \ldots), \omega_j \in N_0, \forall j > m\} =$$

$$= \{c_1\} \times \{c_2\} \times \ldots \times \{c_m\} \times \Omega_{m+1} \times \Omega_{m+2} \times \ldots \ .$$

Розглянемо відображення $f : \Omega \to [0, 1]$, означене наступним чином:

$$\forall \omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k, \ldots) \in \Omega : f(\omega) = x = \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}$$

з $\omega_k = \alpha_k(x), k \in N$.

Покажемо, що відображення $f : \ (\Omega, \mathcal{A}) \to ([0, 1], \mathcal{B})$ є бівимірним. Оскільки σ-алгебра $\mathcal{A}$ є мінімальною σ-алгеброю, яка породжена циліндричними відрізками з Ω, σ-алгебра $\mathcal{B}$ є мінімальною σ-алгеброю, яка породжена циліндричними відрізками I-Q_∞-зображення, то для доведення вимірності відображення f достатньо довести, що прообраз довільного циліндра

I-Q_∞-зображення є циліндр з Ω. А це випливає з означення відображення f. Аналогічним чином можна показати вимірність відображення f^{-1}. Отже, відображення f є бівимірним.

Таким чином, відображення f породжує I-Q_∞-зображення, причому якщо точка $x \in [0,1]$ має I-Q_∞-зображення, то воно єдине.

Означимо міри μ_k та ν_k наступним чином:

$$\mu_k(i) = p_{ik}, \nu_k(i) = q_i, i \in \Omega_k.$$

Нехай

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = \prod_{k=1}^{\infty}(\Omega_k, \mathcal{A}_k, \mu_k), (\Omega, \mathcal{A}, \nu) = \prod_{k=1}^{\infty}(\Omega_k, \mathcal{A}_k, \nu_k).$$

Означимо міри μ^* та ν^* як образи мір μ та ν під дією відображення f:

$$\mu^*(B) = \mu(f^{-1}(B)), \nu^*(B) = \nu(f^{-1}(B)), \forall B \in \mathcal{B}. \tag{2.2}$$

Зрозуміло, що ν^* співпадає з мірою Лебега λ на $[0,1]$, а міра μ^* співпадає з μ_ξ.

Означення 2.2.1. Відображення f будемо називати майже бієктивним, якщо існує вимірна підмножина $\Omega_0 \subset \Omega$ така, що $\mu(\Omega_0) = \nu(\Omega_0) = 0$ і відображення $f: \ (\Omega \setminus \Omega_0) \to \Omega^*$ є бієктивним.

Розглянемо відображення T одностороннього зсуву, яке діє в просторі $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$:

$$\forall \omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k \ldots) : T(\omega) = (\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_k \ldots).$$

З метою дослідження ергодичних властивостей I-Q_∞-зображення дійсних чисел розглянемо символьну динамічну систему, що породжується відображенням T^* одностороннього зсуву по I-Q_∞-зображенню:

$$\forall x = \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots} : T^*(x) = \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_2(x)\alpha_3(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}.$$

Нехай $T^{*-1}A = \{x : T(x) \in A\}, A \subset [0,1]$. Нагадаємо, що множина A називається інваріантною відносно перетворення T^*, якщо $A = T^{*-1}A$. Міра μ називається ергодичною відносно перетворення T^*, якщо довільна інваріантна множина $A \subset [0,1]$ є множиною або нульової, або одиничної міри. Міра μ називається інваріантною відносно перетворення T^*, якщо для довільної множини $E \subset [0,1]$ має місце рівність: $\mu(T^{*-1}E) = \mu(E)$.

Теорема 2.2.1. *Ймовірнісна міра μ^* є ергодичною відносно перетворення T^*.*

Якщо $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k = \ldots$, то міра μ^* є інваріантною відносно перетворення T^*.

Доведення. В роботі [24] було доведено, що продакт-міра μ є ергодичною відносно перетворення T, і якщо $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k = \ldots$, то продакт-міра μ є інваріантною відносно перетворення T.

Нехай A^* — деяка борелівська множина, інваріантна відносно перетворення T^*. Оскільки f є майже бієктивним відображенням, то множина $A = f^{-1}(A^*)$ є інваріантною відносно перетворення T. Тому $\mu(A) = 0$ або $\mu(A) = 1$. Оскільки відображення f є майже бієктивним і бівимірним, то $\mu(A) = \mu^*(f(A))$ для будь-якої множини $A \in \mathcal{A}$. Тому $\mu^*(A^*) = 0$ або $\mu^*(A^*) = 1$. Отже, міра μ^* — ергодична відносно перетворення T^*.

Нехай $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k = \ldots$. Оскільки σ-алгебра борелівських підмножин одиничного відрізка породжується сімейством циліндричних відрізків I-Q_∞-зображення, то для доведення інваріантності міри μ^* відносно перетворення T^* достатньо довести її інварантність на довільному циліндричному відрізку. Очевидно, що $\mu^*\left(\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{c_1c_2\ldots c_n}\right) = p_{c_1} \cdot p_{c_2} \cdot \ldots \cdot p_{c_n}$.

Оскільки $T^{-1}\left(\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{c_1c_2\ldots c_n}\right) = \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{ic_1c_2\ldots c_n}, i \in N$, то

$$\mu^*\left(T^{-1}\left(\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{c_1c_2\ldots c_n}\right)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*\left(\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{c_1c_2\ldots c_n}\right) = p_{c_1} \cdot p_{c_2} \cdot \ldots \cdot p_{c_n} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} p_i =$$

$$= p_{c_1} \cdot p_{c_2} \cdot \ldots \cdot p_{c_n} = \mu^*\left(\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{c_1c_2\ldots c_n}\right),$$

що і треба було довести. $\square$

Оскільки міра Лебега за побудовою є образом продакт-міри з однаково розподіленими I-Q_∞-символами ($p_i = q_i, \forall i \in N$), то має місце наступне твердження:

Наслідок 2.2.1. *Міра Лебега є ергодичною та інваріантною відносно перетворення T^*.*

Покажемо, як наведені результати можна використати для дослідження ергодичних властивостей I-Q_∞-зображення.

Позначимо через $N_i(x,k)$ кількість символів «i» в I-Q_∞-зображенні числа x до k-го місця включно.

Означення 2.2.2. Якщо існує границя $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{N_i(x,k)}{k}$, то її значення $\nu_i(x)$ називається частотою цифри «i» в I-Q_∞-зображенні числа x.

Теорема 2.2.2. *Для майже всіх (в смислі міри Лебега) чисел одиничного відрізка:*

$$\nu_i(x) = q_i \quad (i \in \{0, 1, 2, \ldots\}).$$

Доведення. За ергодичною теоремою Біркгофа [136]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(T^0(x)) + g(T^1(x)) + \ldots + g(T^{n-1}(x))}{n} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)d\lambda(x), \forall g \in L_1(dx).$$

Виберемо

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \alpha_1(x) = i, \\ 0, & \text{якщо } \alpha_1(x) \neq i. \end{cases}$$

Тоді $g(x) = \alpha_1(x), g(Tx) = \alpha_2(x), \ldots, g(T^{n-1}x) = \alpha_n(x)$, і

$$g(x) + g(Tx) + \ldots + g(T^{n-1}x) = N_i(x,n).$$

З іншого боку,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)d\lambda(x) = \int\limits_{0}^{1} g(x)dx = \int\limits_{\Delta_i^{I\text{-}Q_\infty}} 1dx = |\Delta_i^{I\text{-}Q_\infty}| = q_i,$$

де $\Delta_i^{I\text{-}Q_\infty} = \{x: \ \alpha_1(x) = i\}$.

Отже, для λ-майже всіх $x \in [0,1]$ границя $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{N_i(x,k)}{k}$ існує і дорівнює q_i. Позначимо множину таких чисел $N_i(I\text{-}Q_\infty)$. Нехай

$$N(I\text{-}Q_\infty) = \bigcap_{i=0}^{\infty} N_i(I\text{-}Q_\infty) = \{x: \ \nu_i(x) = q_i, \ \forall i \in \{0,1,2,\ldots\}\}.$$

Оскільки $\lambda\left(N_i(I\text{-}Q_\infty)\right) = 1$, то $\lambda\left(N(I\text{-}Q_\infty)\right) = 1$.

Теорема доведена. □

Теорема 2.2.3. *Якщо* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nq_n =: c < +\infty$ *і* $x = \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}$, *то для майже всіх (в смислі міри Лебега) чисел x одиничного відрізка середнє арифметичне цифр I-Q_∞-зображення дорівнює c:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_1(x) + \alpha_2(x) + \ldots + \alpha_n(x)}{n} = c.$$

Доведення. Виберемо $g(x) = \alpha_1(x)$.

Тоді

$$\frac{g(x) + g(Tx) + \ldots + g(T^{n-1}x)}{n} = \frac{\alpha_1(x) + \alpha_2(x) + \ldots + \alpha_n(x)}{n}.$$

З іншого боку,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)d\lambda(x) = \int_{\Delta_0^{I\text{-}Q_\infty}} 0dx + \int_{\Delta_1^{I\text{-}Q_\infty}} 1dx + \ldots + \int_{\Delta_n^{I\text{-}Q_\infty}} ndx + \ldots =$$

$$= 0\cdot|\Delta_0^{I\text{-}Q_\infty}| + 1\cdot|\Delta_1^{I\text{-}Q_\infty}| + \ldots + n\cdot|\Delta_n^{I\text{-}Q_\infty}| + \ldots = 0\cdot q_0 + 1\cdot q_1 + \ldots + n\cdot q_n + \ldots.$$

Отже, для λ-майже всіх $x \in [0,1]$ середнє арифметичне цифр I-Q_∞-зображення дорівнює $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nq_n$.

Теорема доведена. □

Наслідок 2.2.2. *Для λ-майже всіх дійсних чисел одиничного відрізка середнє арифметичне цифр зображення розкладами Люрота дорівнює $+\infty$.*

Теорема 2.2.4. *Якщо стохастичний вектор* $Q_\infty = (q_0, q_1, \dots, q_i, \dots)$ *має скінченну ентропію, то для довільного дійсного числа* $I \in [0,1]$ *та майже всіх (в смислі міри Лебега) чисел* $x = \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_n(x)\dots}$ *одиничного відрізка:*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_n(x)}\right|} = e^{-H},$$

де $H = -\sum\limits_{i=0}^{\infty} q_i \ln q_i$.

Доведення. Виберемо $g(x) = \ln q_{\alpha_1}(x)$.

Тоді

$$\frac{g(x) + g(Tx) + \ldots + g(T^{n-1}x)}{n} = \frac{\ln q_{\alpha_1}(x) + \ln q_{\alpha_2}(x) + \ldots + \ln q_{\alpha_n}(x)}{n} =$$

$$= \ln \sqrt[n]{q_{\alpha_1}(x) \cdot q_{\alpha_2}(x) \cdot \ldots \cdot q_{\alpha_n}(x)} = \ln \sqrt[n]{\left|\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_n(x)}\right|}.$$

Застосовуючи ергодичну теорему Біркгофа, маємо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(x) + g(Tx) + \ldots + g(T^{n-1}x)}{n} = \lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{q_{\alpha_1}(x) \cdot q_{\alpha_2}(x) \cdot \ldots \cdot q_{\alpha_n}(x)} =$$

$$= \int\limits_0^1 \ln q_{\alpha_1}(x)dx = \sum_{i=0}^{\infty} \ln q_i \cdot |\Delta_i| = \sum_{i=0}^{\infty} q_i \ln q_i.$$

Якщо $\sum\limits_{i=0}^{\infty} q_i \ln q_i < \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_n(x)}\right|} = e^{-H}$.
Теорема доведена. $\square$

Зауважимо, що обираючи в якості функції g інші функції та застосовуючи ергодичну теорему, можна отримувати нові ергодичні властивості I-Q_∞-зображення дійсних чисел.

2.3. Випадкові величини з незалежними I-Q_∞-символами та їх лебегівська структура

Нехай $\xi := \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\xi_1\xi_2\dots\xi_k\dots}$ — випадкова величина з незалежними I-Q_∞-символами, μ_ξ — відповідна ймовірнісна міра, тобто ймовірнісна міра з незалежними I-Q_∞-символами.

У роботі [214] було доведено наступну теорему:

Теорема 2.3.1. *Нехай f — бівимірне відображення. Якщо існує вимірна підмножина $\Omega_0 \subset \Omega$ така, що $\mu(\Omega_0) = \nu(\Omega_0) = 0$ і відображення $f : \ (\Omega \setminus \Omega_0) \to \Omega^*$ є бієктивним, тобто відображення f є майже бієктивним, то*

$$\mu \ll \nu \ \ \textit{тоді і тільки тоді, коли} \ \ \mu^* \ll \nu^*,$$

$$\mu \perp \nu \ \ \textit{тоді і тільки тоді, коли} \ \ \mu^* \perp \nu^*.$$

Наступна теорема описує лебегівську структуру розподілу випадкової величини ξ з незалежними I-Q_∞-символами.

Теорема 2.3.2. *Випадкова величина ξ має розподіл чистого типу, причому*

1) μ_ξ є чисто абсолютно неперервною тоді і тільки тоді, коли

$$\rho := \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \sqrt{p_{ik} \cdot q_i} \right\} > 0;$$

2) μ_ξ є чисто дискретною тоді і тільки тоді, коли

$$P_{max} := \prod_{k=1}^{\infty} \max_i \{p_{ik}\} > 0;$$

3) μ_ξ є чисто сингулярно неперервною у всіх інших випадках, тобто тоді і тільки тоді, коли

$$\rho = 0 = P_{max}.$$

Доведення. Відображення f є бівимірним і майже бієктивним, тому за вище наведеною теоремою 2.3.1 роботи [214] міра μ_ξ є абсолютно (сингулярно) неперервною відносно міри Лебега тоді і тільки тоді, коли μ є абсолютно (сингулярно) неперервною відносно міри ν. Оскільки $q_i > 0$, то

$\mu_k \ll \nu_k, \forall k \in N$. Застосовуючи теорему Какутані та враховуючи бівимірність і майже бієктивність відображення f, маємо

$$\mu_\xi \ll \lambda \Leftrightarrow \prod_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega_k} \sqrt{\frac{d\mu_k}{d\nu_k}} d\nu_k > 0 \Leftrightarrow \prod_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \sqrt{p_{ik} q_i} \right) > 0,$$

$$\mu_\xi \perp \lambda \Leftrightarrow \prod_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega_k} \sqrt{\frac{d\mu_k}{d\nu_k}} d\nu_k = 0 \Leftrightarrow \prod_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \sqrt{p_{ik} q_i} \right) = 0.$$

Проте, сингулярно розподілена відносно міри Лебега випадкова величина ξ може бути розподілена дискретно. Кожна точка $x \in [0,1]$ має єдиний прообраз в Ω. Отже, міра μ_ξ буде дискретною тоді і лише тоді, коли міра μ — дискретна.

Якщо $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\limits_i p_{ik} = 0$, то

$$\mu(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} p_{\omega_k k} \leqslant \prod_{k=1}^{\infty} \max_i p_{ik} = 0, \forall \omega \in \Omega,$$

і μ є неперервною.

Якщо $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\limits_i p_{ik} > 0$, то розглянемо множину $A_+ = \{\omega : \mu(\omega) > 0\}$.

$$A_+ = \{\omega^* = (\omega_1^*, \omega_2^*, \ldots, \omega_k^*, \ldots) : p_{\omega_k^* k} = \max_i p_{ik}\}.$$

Очевидно, що для всіх точок $\omega \in A_+$ умова $p_{\omega_k k} \neq \max\limits_i p_{ik}$ виконується тільки для скінченної кількості значень k. Таким чином, множина A_+ – зчисленна і подія «$\omega \in A_+$» не залежить від довільної скінченної кількості координат точки ω. Тому, застосувавши закон нуля та одиниці Колмогорова, отримуємо, що $\mu(A_+) = 0$ або $\mu(A_+) = 1$. Так як $\mu(A_+) \geqslant \mu(\omega^*) > 0$, то $\mu(A_+) = 1$, звідки випливає дискретність міри μ.

□

Наслідок 2.3.1. *Якщо ξ_k — незалежні і однаково розподілені випадкові величини, то*

1) μ_ξ дискретна, тоді і тільки тоді коли існує таке i_0, що $p_{i_0} = 1$;

2) μ_ξ абсолютно неперервна, тоді і тільки тоді коли $p_i = q_i$ для довільного $i \in \mathbb{N}$;

3) μ_ξ сингулярно неперервна у всіх інших випадках.

Зауваження 3. Теорему 2.3.2 можна довести і іншим шляхом: отримати її як наслідок того факту, що відображення φ, яке буде введено в пункті 2.6, зберігає міру Лебега і відношення «бути дискретною», «бути абсолютно неперервною та сингулярною відносно міри Лебега» для ймовірнісних мір з незалежними Q_∞- та I-Q_∞-символами.

2.4. Тополого-метрична структура сингулярних розподілів з незалежними I-Q_∞-символами

У випадку сингулярності дослідимо спектральну структуру розподілу випадкової величини з незалежними I-Q_∞-символами.

Нагадаємо означення спектра розподілу випадкової величини.

Означення 2.4.1. Спектром розподілу випадкової величини ξ називається множина

$$S_\xi = \{x: \ \forall\varepsilon > 0 \ \ \mu_\xi\left((x-\varepsilon, x+\varepsilon)\right) > 0\} =$$
$$= \{x: \ \forall\varepsilon > 0 \ \ F_\xi(x+\varepsilon) - F_\xi(x-\varepsilon) > 0\}.$$

З метою дослідження тополого-метричних властивостей розподілу випадкової величини з незалежними I-Q_∞-символами вивчимо властивості одного класу множин.

Нехай $V := \{V_k\}_{k=1}^{\infty}$, $V_k \subseteq \{0, 1, 2, \ldots\} =: N_0$.

Означимо

$$C[I\text{-}Q_\infty, \{V_k\}] = \{x \in [0,1]: \quad x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}, \ \alpha_k \in V_k\}^{cl}, \tag{2.3}$$

тобто, $C[I\text{-}Q_\infty, \{V_k\}]$ є замиканням множини точок, які можуть бути I-Q_∞-представленими з використанням лише символів α_k з множини V_k на k-й позиції їх I-Q_∞-зображення.

Якщо $V_k \neq \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ для щонайменше одного $k < k_0$, і $V_k = \{0, 1, 2, \ldots\}$ для всіх $k \geqslant k_0$ (при деякому $k_0 > 1$), то $C[I\text{-}Q_\infty, \{V_k\}]$ є об'єднанням піввідрізків. У цьому випадку множина $C[I\text{-}Q_\infty, \{V_k\}]$ отримується шляхом вилучення з $[0, 1]$ всіх інтервалів $\dot{\Delta}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}$, $k < k_0$ з $\alpha_k \notin V_k$ (де точка над Δ означає, що $\dot{\Delta}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}$, є відкритим). Якщо умова $V_k \neq \{0, 1, 2, \ldots\}$ виконується для нескінченної кількості значень k, то, очевидно, $C[I\text{-}Q_\infty, \{V_k\}]$ є ніде не щільною множиною.

Теорема 2.4.1. *Нехай $V := \{i : p_i > 0\}$. Тоді спектр випадкової величини ξ є замиканням множини*

$$C[I\text{-}Q_\infty, V] = \{x : x = \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}, \alpha_j \in V, \forall j \in N\}.$$

Доведення. Нехай

$$C[I\text{-}Q_\infty, V] = \{x : x = \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}, \alpha_j \in V, \forall j \in N\},$$

де $V = \{i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots\} \subset N$.

Розглянемо випадкову величину ξ з незалежними однаково розподіленими $I\text{-}Q_\infty$-символами, задану законом

$$P(\xi_k = i_k) := p_{i_k} \geqslant 0, \quad \text{де} \quad \sum_{i_k=0}^{\infty} p_{i_k} = 1, \quad \forall k \in N.$$

1) Покажемо, що якщо x належить множині $(C[I\text{-}Q_\infty, V])^{cl}$, то x належить спектру S_ξ.

а) Нехай $x_0 \in C[I\text{-}Q_\infty, V]$. Тоді

$$x_0 = \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}, \alpha_j \in V, \forall j \in N.$$

Для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $k_0(\varepsilon)$, що циліндр

$$\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_{1(x_0)}\alpha_{2(x_0)}\ldots\alpha_{k_0(x_0)}} \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

З монотонності міри μ_ξ випливає, що

$$\mu_\xi\left(\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_{1(x_0)}\alpha_{2(x_0)}\ldots\alpha_{k_0(x_0)}}\right) \leqslant \mu_\xi((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)).$$

$$\mu_\xi\left(\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_{1(x_0)}\alpha_{2(x_0)}\ldots\alpha_{k_0(x_0)}}\right) = p_{\alpha_{1(x_0)}} \cdot p_{\alpha_{2(x_0)}} \cdot \ldots \cdot p_{\alpha_{k_0(x_0)}} > 0, p_{\alpha_j} > 0, \alpha_j \in V.$$

З останніх двох нерівностей випливає, що

$$\mu_\xi((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)) > 0.$$

Отже, за означенням спектра випадкової величини, x_0 належить до S_ξ.

б) Розглянемо випадок, коли x_0 не належить множині $C[I\text{-}Q_\infty, V]$, але належить до її замикання $(C[I\text{-}Q_\infty, V])^{cl}$.

Якщо $x_0 \in (C[I\text{-}Q_\infty, V])^{cl}$, то для довільного $\varepsilon > 0$ інтервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ містить точки множини $C[I\text{-}Q_\infty, V]$. А це означає, що існує такий номер $k_0(\varepsilon)$, що

$$\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_{1(x_0)}\alpha_{2(x_0)}\ldots\alpha_{k_0(x_0)}} \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), \alpha_{j(x_0)} \in V.$$

Аналогічно, до випадку а)

$$\mu_\xi\left(\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_{1(x_0)}\alpha_{2(x_0)}\ldots\alpha_{k_0(x_0)}}\right) = p_{\alpha_{1(x_0)}} \cdot p_{\alpha_{2(x_0)}} \cdot \ldots \cdot p_{\alpha_{k_0(x_0)}} > 0, p_{\alpha_j} > 0, \alpha_j \in V$$

і

$$\mu_\xi((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)) > 0.$$

Таким чином, якщо $x \in (C[I\text{-}Q_\infty, V])^{cl}$, то $x \in S_\xi$.

2) Покажемо тепер, що якщо x не належить множині $(C[I\text{-}Q_\infty, V])^{cl}$, то x не належить спектру S_ξ випадкової величини ξ.

Якщо x_0 не належить до $(C[I\text{-}Q_\infty, V])^{cl}$, то точка x_0 є зовнішньою для множини $(C[I\text{-}Q_\infty, V])^{cl}$ і, відповідно, для множини $C[I\text{-}Q_\infty, V]$. Тоді,

$$x_0 \in Int(C[I\text{-}Q_\infty, V]).$$

Тобто,

$$x_0 = \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_{1(x_0)}\alpha_{2(x_0)}\ldots\alpha_{k-1(x_0)}\alpha_{k(x_0)}\ldots},$$

де α_k не належить множині V.

Тоді знайдеться таке $\varepsilon > 0$, що

$$\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_{1(x_0)}\alpha_{2(x_0)}\ldots\alpha_{k-1(x_0)}\alpha_{k(x_0)}} \supset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon),$$

а тому

$$\mu_\xi\left(\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_{1(x_0)}\alpha_{2(x_0)}\ldots\alpha_{k-1(x_0)}\alpha_{k(x_0)}}\right) \geqslant \mu_\xi((x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)).$$

З іншого боку

$$\mu_\xi\left(\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_{1(x_0)}\alpha_{2(x_0)}\ldots\alpha_{k_0(x_0)}}\right) = p_{\alpha_{1(x_0)}}\cdot p_{\alpha_{2(x_0)}}\cdot\ldots\cdot p_{\alpha_{k-1(x_0)}}p_{\alpha_{k(x_0)}} = 0,$$

оскільки $p_{\alpha_k} = 0$.

Звідси випливає, що

$$\mu_\xi((x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)) = 0.$$

Отже, якщо x не належить множині $(C[I\text{-}Q_\infty, V])^{cl}$, то x не належить спектру S_ξ.

З 1) і 2) випливає, що спектр випадкової величини ξ є замиканням множини

$$C[I\text{-}Q_\infty, V] = \{x : x = \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}, \alpha_j \in V, \forall j \in N\}.$$

□

Вивчимо метричні властивості множини $C[I\text{-}Q_\infty, \{V_k\}]$.
Нехай $S_k(V) := \sum\limits_{i\in V_k} q_i$. Зауважимо, що $0 < S_k(V) \leqslant 1$.

Лема 2.4.1. *Міра Лебега множини $C[I\text{-}Q_\infty, \{V_k\}]$ дорівнює*

$$\lambda\left(C[I\text{-}Q_\infty, \{V_k\}]\right) = \prod_{k=1}^{\infty} S_k(V). \tag{2.4}$$

Доведення. Нехай

$$C_n := \bigcup_{\alpha_k\in V_k} \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}.$$

Легко бачити, що $C_n \subseteq C_{n-1}$ і

$$C[I\text{-}Q_\infty, \{V_k\}] = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

З означення множин C_n випливає, що $\lambda(C_n) = \prod\limits_{k=1}^{n} S_k(V)$, і, отже,

$$\lambda(C[I\text{-}Q_\infty, \{V_k\}]) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \lambda(C_n) = \prod_{k=1}^{\infty} S_k(V).$$

$\square$

Наслідок 2.4.1. *Нехай* $W_k(V) = 1 - S_k(V) \geqslant 0$.

Множина $C[I\text{-}Q_\infty, \{V_k\}]$ *має нульову міру Лебега тоді і тільки тоді, коли*

$$\sum_{k=1}^{\infty} W_k(V) = \infty\ . \tag{2.5}$$

Наступна теорема встановлює необхідні та достатні умови належності μ_ξ до кожного з чистих тополого-метричних (GS-, GC-, GP-) типів.

Теорема 2.4.2. *Сингулярно неперервно розподілена випадкова величина з незалежними* $I\text{-}Q_\infty$*-символами має чистий тополого-метричний тип, причому*

1) μ_ξ *має чистий* GS*-тип тоді і тільки тоді, коли матриця* P *містить лише скінченну кількість стовпчиків, що містять нульові елементи.*

2) μ_ξ *має чистий* GC*-тип тоді і тільки тоді, коли матриця* P *містить нескінченну кількість стовпчиків, що містять нульові елементи, і*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i: p_{ik}=0} q_i \right) = \infty\ . \tag{2.6}$$

3) μ_ξ *має чистий* GP*-тип тоді і тільки тоді, коли матриця* P *містить нескінченну кількість стовпчиків, що містять нульові елементи і*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i: p_{ik}=0} q_i \right) < \infty. \tag{2.7}$$

Доведення. Розглянемо множину $C[I\text{-}Q_\infty, \{V_k\}]$, де послідовність $V = \{V_k\}_{k=1}^{\infty}$ визначається матрицею P наступним чином: $V_k = \{i : \ p_{ik} \neq 0\}$.

Спектр міри μ_ξ співпадає з замиканням множини $C[I\text{-}Q_\infty, \{V_k\}]$ (у цьому випадку межа множини $C[I\text{-}Q_\infty, \{V_k\}]$ є не більш як зчисленною). Тому для встановлення тополого-метричної структури множини S_ξ можемо застосувати вищенаведені результати.

Отже, якщо матриця P містить лише скінченну кількість стовпчиків, що містять нулеві елементи, то $V_k = N_0$, $\forall k > k_0$ для деякого $k_0 > 0$. У цьому випадку $C[I\text{-}Q_\infty, \{V_k\}]$ є об'єднанням не більш як зчисленної кількості відрізків. Тому міра μ_ξ має GS-тип.

У протилежному випадку матриця P містить нескінченну кількість стовпчиків, що містять нулеві елементи, і, отже, $C[I\text{-}Q_\infty, \{V_k\}]$ є ніде не щільною множиною. За результатами попередньої леми, міра Лебега множини $C[I\text{-}Q_\infty, \{V_k\}]$ дорівнює

$$\lambda(C[I\text{-}Q_\infty, \{V_k\}]) = \prod_{k=1}^{\infty} S_k(V) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i \in V_k} q_i \right) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \sum_{i:p_{ik}=0} q_i \right).$$

Отже, або $\lambda(C[I\text{-}Q_\infty, \{V_k\}]) = 0$ (при виконанні умови (2.6)), або $\lambda(C[I\text{-}Q_\infty, \{V_k\}]) > 0$, (якщо виконується умова (2.7)).

Тому у цьому випадку μ_ξ є або чистого GC-типу, або чистого GP-типу.

Оскільки умови 1), 2) і 3) теореми є взаємно виключаючими і одна з них завжди виконується, то розподіл випадкової величини ξ з незалежними $I\text{-}Q_\infty$-символами завжди має чистий тополого-метричний тип. □

2.5. Розмірність Хаусдорфа ймовірнісної міри з незалежними $I\text{-}Q_\infty$-символами

Нагадаємо, що розмірністю Хаусдорфа ймовірнісної міри μ називається число

$$\dim_H \mu = \inf_{A \in \mathcal{A}_\mu} \{\dim_H(A)\},$$

де $\mathcal{A}_\mu = \{A : A \in \mathcal{B},\ \mu(A) = 1\}$ — множина всеможливих борелівських носіїв міри μ.

Нехай ν та μ — дві неперервні ймовірнісні міри на борелівських підмножинах $[0,1]$, $\Delta_n(x) = \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)}$ — циліндр n-го рангу I-Q_∞-зображення числа x. Дві наступні леми є прямим наслідком двох класичних теорем Біллінгслі ([88]), які застосовані до I-Q_∞-зображень.

Лема 2.5.1. *Нехай*

$$B = \left\{ x : \quad \varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln \nu(\Delta_n(x))}{\ln \mu(\Delta_n(x))} \leqslant \delta \right\},$$

і нехай $\Phi(I\text{-}Q_\infty)$ *— сімейство циліндрів* I-Q_∞*-зображення.*

Тоді, для довільного $\delta \geqslant 0$ *має місце нерівність*

$$\dim_H(B, \Phi(I\text{-}Q_\infty), \mu) \leqslant \delta.$$

Лема 2.5.2. *Якщо*

$$M \subset \left\{ x : \quad \varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln \nu(\Delta_n(x))}{\ln \mu(\Delta_n(x))} \geqslant \delta \right\}, \tag{2.8}$$

то

$$\dim_H(M, \Phi(I\text{-}Q_\infty), \mu) \geqslant \delta \cdot \dim_H(M, \Phi(I\text{-}Q_\infty), \nu). \tag{2.9}$$

Теорема 2.5.1. *Нехай* $\Phi(I\text{-}Q_\infty)$ *— довірче для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича сімейство циліндрів* I-Q_∞*-зображення. Якщо*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sum\limits_{i=0}^{\infty} p_{ij} \ln^2 p_{ij}}{j^2} < \infty, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sum\limits_{i=0}^{\infty} p_{ij} \ln^2 q_i}{j^2} < \infty, \tag{2.10}$$

то розмірність Хаусдорфа міри μ_ξ *з незалежними* I-Q_∞*-символами дорівнює*

$$\dim_H \mu_\xi = \varliminf_{n\to\infty} \frac{H_n}{B_n} =: D, \tag{2.11}$$

де

$$H_n = \sum_{j=1}^{n} h_j, \qquad B_n = \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

$$h_j = -\sum_{i=0}^{\infty} p_{ij} \ln p_{ij}, \quad b_j = -\sum_{i=0}^{\infty} p_{ij} \ln q_i.$$

Доведення. Нехай $x = \Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}$ — випадкова величина, така, що

$$P(\alpha_j(x) = i) = p_{ij}$$

(тобто розподіл випадкової величини x описується мірою μ). Розглянемо дві допоміжні послідовності випадкових величин

$$\{\eta_j(x)\} = \{\ln p_{\alpha_j(x)j}\}$$

та

$$\{\psi_j(x)\} = \{\ln q_{\alpha_j(x)}\}.$$

η_j	$\ln p_{0j}$	$\ln p_{1j}$	$\ldots$	$\ln p_{kj}$	$\ldots$
	p_{0j}	p_{1j}	$\ldots$	p_{kj}	$\ldots$

ψ_j	$\ln q_0$	$\ln q_1$	$\ldots$	$\ln q_k$	$\ldots$
	p_{0j}	p_{1j}	$\ldots$	p_{kj}	$\ldots$

З (2.10) випливає, що другі моменти випадкових величин η_j скінченні і ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{D\eta_j}{j^2}$ збігається. Тому з теореми Колмогорова (посилений закон великих чисел) випливає, що для μ_ξ-майже всіх $x \in [0,1]$ має місце рівність

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\eta_1 + \eta_2 + ... + \eta_n) - M(\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n)}{n} = 0. \qquad (2.12)$$

Зауважимо, що

$$M(\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_n) = M\eta_1+M\eta_2+\ldots+M\eta_n = -h_1-h_2+\ldots+(-h_n) = -H_n.$$

Аналогічно, з (2.10) випливає, що для μ_ξ-майже всіх $x \in [0,1]$ має місце

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_n) - M(\psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_n)}{n} = 0 \qquad (2.13)$$

і $M(\psi_1+\psi_2+\ldots+\psi_n) = M\psi_1+M\psi_2+\ldots+M\psi_n = -b_1+(-b_2)+\ldots+(-b_n) = -B_n$.

Розглянемо множину

$$A = \left\{x : \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\eta_1(x) + \eta_2(x) + \ldots + \eta_n(x)}{\psi_1(x) + \psi_2(x) + \ldots + \psi_n(x)} - \frac{H_n}{B_n}\right) = 0\right\} =$$

$$\left\{x : \lim_{n\to\infty} \frac{(\eta_1(x) + \eta_2(x) + \ldots + \eta_n(x)) - \frac{H_n}{B_n}(\psi_1(x) + \psi_2(x) + \ldots + \psi_n(x))}{\psi_1(x) + \psi_2(x) + \ldots + \psi_n(x)} = 0\right\}$$

$$= \left\{ x : \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+\ldots+\eta_n(x)+H_n}{n}\right) - \frac{H_n}{B_n}\left(\frac{\psi_1(x)+\psi_2(x)+\ldots+\psi_n(x)+B_n}{n}\right)}{\left(\frac{\psi_1(x)+\psi_2(x)+\ldots+\psi_n(x)+B_n}{n}\right) - \frac{B_n}{n}} = 0 \right\}.$$

Для заданого стохастичного вектора Q_∞ завжди існує $\max\limits_j\{q_j\} =: q < 1$. Тому

$$\left|\frac{B_n}{n}\right| = \left|\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=0}^{\infty} p_{ij}\ln q_i}{n}\right| \geqslant \frac{|\ln q| n}{n} = |\ln q| > 0. \tag{2.14}$$

З класичної нерівності Гіббса (одне з добре відомих її доведень можна знайти в ([188])), яка рівносильна твердженню про невід'ємність відстані Кульбака–Лейблера ([215]), випливає, що $h_j \leqslant b_j$.

Тому

$$\frac{H_n}{B_n} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} h_j}{\sum\limits_{j=1}^{n} b_j} \leqslant 1. \tag{2.15}$$

Підсумовуючи, ми бачимо, що з (2.12), (2.13), (2.14) та (2.15) слідує, що для μ_ξ-майже всіх $x \in [0,1)$ має місце рівність

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+\ldots+\eta_n(x)+H_n}{n}\right) - \frac{H_n}{B_n}\left(\frac{\psi_1(x)+\psi_2(x)+\ldots+\psi_n(x)+B_n}{n}\right)}{\left(\frac{\psi_1(x)+\psi_2(x)+\ldots+\psi_n(x)+B_n}{n}\right) - \frac{B_n}{n}} = 0.$$

Отже, $\mu_\xi(A) = 1$.

Розглянемо тепер множини

$$A_1 = \left\{ x : \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+\ldots+\eta_n(x)}{\psi_1(x)+\psi_2(x)+\ldots+\psi_n(x)} - \frac{H_n}{B_n} \right) = 0 \right\};$$

$$A_2 = \left\{ x : \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+\ldots+\eta_n(x)}{\psi_1(x)+\psi_2(x)+\ldots+\psi_n(x)} \right) \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{H_n}{B_n} \right\};$$

$$A_3 = \left\{ x : \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+\ldots+\eta_n(x)}{\psi_1(x)+\psi_2(x)+\ldots+\psi_n(x)} \right) \geqslant \lim_{n\to\infty} \frac{H_n}{B_n} \right\}.$$

Очевидно, що $A \subset A_1$. Покажемо, що $A_1 \subset A_3$ та $A \subset A_2$. Як добре відомо, для двох довільних послідовностей дійсних чисел $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ має місце нерівність

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n - y_n) \leqslant \varliminf_{n\to\infty}(x_n) - \varliminf_{n\to\infty}(y_n).$$

Якщо $x \in A_1$, то

$$\varliminf_{n\to\infty}\left(\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+\ldots+\eta_n(x)}{\psi_1(x)+\psi_2(x)+\ldots+\psi_n(x)}\right) - \quad \varliminf_{n\to\infty}\frac{H_n}{B_n} \geqslant$$
$$\geqslant \quad \varliminf_{n\to\infty}\left(\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+\ldots+\eta_n(x)}{\psi_1(x)+\psi_2(x)+\ldots+\psi_n(x)} - \frac{H_n}{B_n}\right) = 0.$$

Отже, $x \in A_3$.

Якщо $x \in A$, то
$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+\ldots+\eta_n(x)}{\psi_1(x)+\psi_2(x)+\ldots+\psi_n(x)} - \frac{H_n}{B_n}\right) = 0$, і

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{H_n}{B_n} - \varliminf_{n\to\infty}\left(\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+\ldots+\eta_n(x)}{\psi_1(x)+\psi_2(x)+\ldots+\psi_n(x)}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \varliminf_{n\to\infty}\left(\frac{H_n}{B_n} - \frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+\ldots+\eta_n(x)}{\psi_1(x)+\psi_2(x)+\ldots+\psi_n(x)}\right) =$$
$$= \varliminf_{n\to\infty}\left(\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+\ldots+\eta_n(x)}{\psi_1(x)+\psi_2(x)+\ldots+\psi_n(x)} - \frac{H_n}{B_n}\right) = 0.$$

Отже, $x \in A_2$.

Оскільки

$$A \subset A_2 = \left\{x : \quad \varliminf_{n\to\infty}\frac{\ln\mu_\xi(\Delta_n(x))}{\ln\lambda(\Delta_n(x))} \leqslant D\right\},$$

то з леми 2.5.1 випливає, що $\dim_H(A, \Phi(I\text{-}Q_\infty)) = \dim_H(A, \Phi(I\text{-}Q_\infty), \lambda) \leqslant D$.

Так як

$$A \subset A_3 = \left\{x : \quad \varliminf_{n\to\infty}\frac{\ln\mu_\xi(\Delta_n(x))}{\ln\lambda(\Delta_n(x))} \geqslant D\right\},$$

то з леми 2.5.2 випливає, що

$$\dim_H(A, \Phi(I\text{-}Q_\infty)) \geqslant D \cdot \dim_H(A, \Phi(I\text{-}Q_\infty), \mu_\xi) = D.$$

Тому $\dim_H(A, \Phi(I\text{-}Q_\infty)) = D$.

Залишилось показати, що множина A є «розмірнісно мінімальним» носієм міри μ_ξ.

Нехай C — довільний носій міри μ_ξ. Тоді множина $C_1 = C \cap A$ теж є носієм для μ_ξ і $C_1 \subset C$. Отже, $\dim_H(C_1, \Phi(I\text{-}Q_\infty)) \leqslant \dim_H(C, \Phi(I\text{-}Q_\infty))$. Доведемо, що $\dim_H(C_1, \Phi(I\text{-}Q_\infty)) = \dim_H(A, \Phi(I\text{-}Q_\infty))$.

Оскільки $C_1 \subset A$, то $\dim_H(C_1, \Phi(I\text{-}Q_\infty)) \leqslant \dim_H(A, \Phi(I\text{-}Q_\infty))$. У той же час

$$C_1 \subset A \subset A_3 = \left\{ x : \quad \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\ln \mu_\xi(\Delta_n(x))}{\ln \lambda(\Delta_n(x))} \geqslant D \right\}$$

і з леми 2.5.2 випливає, що $\dim_H(C_1, \Phi(I\text{-}Q_\infty)) \geqslant D$.

Отже, $\dim_H(C_1, \Phi(I\text{-}Q_\infty)) = D = \dim_H(A, \Phi(I\text{-}Q_\infty))$. Оскільки $\Phi(I\text{-}Q_\infty)$ — довірче сімейство циліндрів $I\text{-}Q_\infty$-зображення дійсних чисел, то

$$\dim_H(A, \Phi(I\text{-}Q_\infty)) = \dim_H(A),$$

і тому множина A є мінімальним (в смислі розмірності Хаусдорфа-Безиковича) носієм ймовірнісної міри μ_ξ. □

Зауваження 4. У тому випадку, коли $I = 1$ (тобто $I\text{-}Q_\infty$-розклад співпадає з Q_∞-розкладом) метрична теорія відповідного розкладу та фрактальні властивості відповідних ймовірнісних мір вивчені досить добре (див., наприклад, [8] та огляд літератури там), хоча навіть у цьому випадку залишається значна кількість нерозв'язаних задач (особливо у випадку, коли стохастичний вектор Q_∞ має нескінченну ентропію). Якщо I є двійково-раціональною точкою (тобто $\alpha_k(I) = 1$ для всіх достатньо великих $k > k_0(x)$), то метрична і ймовірнісна теорія таких розкладів залишиться без змін, оскільки на всіх циліндрах, починаючи з $k_0(x)$, буде здійснюватись Q_∞-розбиття і відповідна ймовірнісна міра, звужена на циліндричні відрізки рангу k_0+1 співпадатиме зі звуженням на цей циліндр стандартної ймовірнісної міри з незалежними Q_∞-символами. У тому ж випадку, коли I є ірраціональним числом (тобто послідовність $\alpha_k(I)$ є неперіодичною), то розвинені в роботах [8, 84, 188] методи незастосовні для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича спектра випадкової величини ξ навіть у найпростішому випадку однакової розподіленості незалежних випадкових величин ξ_k, оскільки відповідні множини вже не будуть ні самоподібними, ні N-самоподібними.

2.6. G-ізоморфізм ймовірнісних, метричних та розмірнісних теорій дійсних чисел

Добре відомо (див., наприклад, [1–5, 63]), що існує багато систем числення (методів зображення (кодування) дійсних чисел чи елементів з деякого простору) з використанням постійного (скінченного чи нескінченного) алфавіту або змінного алфавіту (послідовності алфавітів). Кожна система числення має свою специфіку і переваги у заданні чи дослідженні певних математичних об’єктів, відповідну метричну, ймовірнісну та розмірнісні (в сенсі розмірності Хаусдорфа–Безиковича та інших фрактальних розмірностей) теорії. Фрактальний бум у математиці та природознавстві наприкінці XX століття суттєво простимулював розвиток методів побудови розмірнісних теорій (особливо це стосується класичної розмірності Хаусдорфа–Безиковича та пакувальної розмірності) різних розкладів. Незважаючи на це, для багатьох класичних розкладів дійсних чисел відповідні ймовірнісні та розмірнісні теорії все ще перебувають на конструктивному етапі розвитку. В якості прикладу можна навести ланцюгові дроби ([17, 18]), розклади Кантора ([19, 20]), розклади Остроградського–Серпінського–Пірса ([5,11]), Q_∞-розклади ([8,16,21]) та багато інших. Тому особливо важливим для розвитку фрактального аналізу та теорії сингулярних ймовірнісних мір є розвиток та кристалізація методів обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича (та інших фрактальних розмірностей) множин та мір, пов'язаних з певними системами числення; методів встановлення сингулярності ймовірнісних мір та дослідження їх тонких фрактальних властивостей; усвідомлення аналогій між метричними, ймовірнісними та розмірнісними теоріями різних розкладів та узагальнення на основі цього відповідних методів побудови цих теорій.

Даний підрозділ присвячений розвитку нового метода побудови метричної, ймовірнісної та розмірнісної (хаусдорфової) теорій для I-Q_∞-зображень дійсних чисел та континуального сімейства формально різних зображень дійсних чисел на основі дослідження спеціальних відображень , які символи певного зображення переводять у ті ж символи іншого зображення з досліджуваного сімейства, і при цьому зберігають міру Лебега та розмірність Хаусдорфа–Безиковича (хоча при цьому можуть бути розривними на всюди щільних множинах). Такі відображення називатимемо G-відображеннями (G-ізоморфізмами систем числення) і вважатимемо, системи числення, між якими існує G-відображення, тотожними (з точністю до G-ізоморфізму). Показується глибокий зв'язок між довірчістю систем покриттів, породжених різними системами числення, та DP-властивостями (збереженням розмірності Хаусдорфа-Безиковича) вказаних вище відображень. З цією метою ми розвиваємо методи доведення довірчості систем покриттів, породжених Q_∞- та I-Q_∞-зображеннями, та показуємо як отримані результати дозволяють отримувати ймовірнісні, метричні та розмірнісні теорії нових систем числення.

Ми пропонуємо наступний підхід до дослідження ймовірнісних мір з незалежними I-Q_∞-символами: для фіксованого стохастичного вектора Q_∞ та фіксованого дійсного числа $I \in [0,1]$ ввести в розгляд відображення

$$\varphi\left(\Delta^{Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}\right) = \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots},$$

і дослідити умови, при виконанні яких дане відображення зберігає міру Лебега та розмірність Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку. Зауважимо, що властивості вказаного відображення суттєво залежать від обраного дійсного числа I.

Для спрощення подальших викладок введемо наступні позначення:

$$E' := \varphi(E), \ \ \forall E \subset [0,1];$$

$$\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} := \Delta^{Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k};$$

$$\Delta^{'}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} := \varphi(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}) = \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}.$$

Теорема 2.6.1. *Якщо x_0 є Q_∞-ірраціональною точкою, то функція $\varphi(x)$ неперервна в точці x_0 (незалежно від вибору числа $I \in [0,1]$).*

Доведення. Оскільки $\Delta^{'}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} = \varphi(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k})$, то графік функції $y = \varphi(x)$ є деякою підмножиною множини

$$\Gamma_1 := (\Delta_0 \times \Delta'_0) \cup (\Delta_1 \times \Delta'_1) \cup \ldots .$$

Якщо x_0 є Q_∞-ірраціональною, то x_0 є внутрішньою точкою $\Delta_{\alpha_1(x_0)}$. Тому існує таке δ_1, що $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ міститься в $\Delta_{\alpha_1(x_0)}$, то коливання

$$\omega_{\delta_1}(\varphi, x_0) := \sup_{x,y \in (x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)} |\varphi(x) - \varphi(y)|$$

функції φ в δ_1-околі точки x_0 не перевищує $|\Delta_{\alpha_1(x_0)}| = q_{\alpha_1(x_0)}$.

Аналогічно, незалежно від вибору дійсного числа I графік функції φ є підмножиною множини

$$\Gamma_2 := \bigcup_{\alpha_1=0}^{\infty} \bigcup_{\alpha_2=0}^{\infty} \left(\Delta_{\alpha_1\alpha_2} \times \Delta'_{\alpha_1\alpha_2}\right).$$

Якщо x_0 є Q_∞-ірраціональною, то x_0 є внутрішньою для циліндра $\Delta_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)}$. Тоді $\exists \delta_2 : (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2) \subset \Delta_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)}$ і при цьому

$$\omega_{\delta_2}(\varphi, x_0) \leqslant |\Delta'_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)}| = q_{\alpha_1(x_0)} \cdot q_{\alpha_2(x_0)} \leqslant q^2_{max},$$

де $q_{max} := \max\limits_i q_i$.

Аналогічно означаємо

$$\Gamma_n := \bigcup_{\alpha_1=0}^{\infty} \dots \bigcup_{\alpha_n=0}^{\infty} \left(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n} \times \Delta'_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}\right).$$

Оскільки x_0 є внутрішньою для $\Delta_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)\dots\alpha_n(x_0)}$, то

$$\exists\delta_n : (x_0 - \delta_n, x_0 + \delta_n) \subset \Delta_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)\dots\alpha_n(x_0)}$$

і

$$\omega_{\delta_n}(\varphi, x_0) \leqslant |\Delta'_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)\dots\alpha_n(x_0)}| \leqslant q^n_{max} \to 0 (n \to \infty).$$

Звідси $\lim\limits_{\delta\to 0} \omega_\delta(\varphi, x_0) = 0$. Отже, φ неперервна в точці x_0. □

Безпосередньо з означення відображення φ випливає наступна теорема.

Теорема 2.6.2. *1) якщо $I = 0$ або $I = 1$, то $\varphi(x)$ неперервна (і навіть лінійна) на $(0, 1)$;*

2) якщо $I = 0, \beta_1(I)\beta_2(I)...\beta_{k-1}(I)0(1)$, то $\varphi(x)$ буде неперервною на всіх циліндрах $(k + 1)$-го рангу, і всі точки поділу рангу m при $m \leqslant k$ є точками розриву;

3) якщо серед $\beta_k(I)$ є безліч «0» та «1» (тобто I є двійково-ірраціональною точкою), то $\varphi(x)$ буде розривною в усіх Q_∞-раціональних точках.

З метою дослідження DP-властивостей введеного нами відображення φ, дослідимо питання довірчості сімейств покриттів, пов'язаних з вищезгадуваними розкладами, для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича.

Однією з проблем, які досліджуються в даному підрозділі, є знаходження достатніх умов довірчості для локально тонких сімейств покриттів, пов'язаних з Q_∞- та I-Q_∞- розкладами (зокрема, сімейства циліндрів всіх рангів та сімейства множин, які є об'єднаннями суміжних циліндрів одного рангу, що належать спільному циліндру попереднього рангу).

Наступна теорема є досить очевидною і ми наводимо її лише для повноти викладу.

Теорема 2.6.3. *Якщо I є двійково-раціональною точкою, то відображення $y = \varphi(x)$ є DP-перетворенням на $[0,1]$, тобто*

$$\dim_H(E) = \dim_H(E'), \quad \forall E \subset [0,1].$$

Доведення. Справді, якщо $I = 1 = 0,(1)$, то $\varphi(x) = x$ і якщо $I = 0 = 0,(0)$, то $\varphi(x) = 1 - x$.

Якщо $I = 0, \beta_1(I)\beta_2(I)...\beta_{k-1}(I)0(1)$, то $\varphi(x)$ є лінійною на всіх циліндрах $(k+1)-$го рангу. Занумеруємо їх: $\Box_i$.

Нехай $E_i = E \cap \Box_i$.

Оскільки $\varphi(x)$ зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича на кожному $\Box_i$, то

$$\dim_H(E) = \dim_H\left(\bigcup_i E_i\right) = \sup_i \dim_H E_i = \sup_i \dim_H E'_i.$$

З іншого боку,

$$E' = \varphi(E) = \varphi\left(\bigcup_i E_i\right) = \bigcup_i \varphi(E_i) = \bigcup_i E'_i.$$

Тому

$$\dim_H E' = \sup_i \dim_H E'_i, \quad \forall E \subset [0,1].$$

Отже,

$$\dim_H E = \dim_H E', \quad \forall E \subset [0,1].$$

$\Box$

Якщо I є двійково-ірраціональною точкою, то для дослідження DP-властивостей функції $\varphi(x)$ доведемо наступні леми.

Нехай $\hat{\Phi} = \hat{\Phi}(Q_\infty)$ — сімейство множин, які є об'єднанням суміжних циліндрів одного рангу, що належать одному і тому ж циліндру попереднього рангу.

Лема 2.6.1. *Нехай існує таке* $c > 0$, *що*

$$\frac{q_i}{\sum\limits_{k=i+1}^{+\infty} q_k} \leqslant c, \ \forall i \in N. \tag{2.16}$$

Тоді сімейство $\hat{\Phi}$ *є порівнянним, тобто,* $\forall \alpha \ \exists d_0 = d_0(\alpha)$:

$$H^{\alpha}(E) \leqslant H^{\alpha}(E, \hat{\Phi}) \leqslant d_0 H^{\alpha}(E), \quad \forall E \subset [0,1).$$

Доведення. Нехай E — довільна підмножина з $[0,1)$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ та $\alpha > 0$.

Нехай $\{E_j\} = \{(a_j, b_j)\}$ — довільне ε-покриття множини E інтервалами. Нехай Δ_{m_j-1} — циліндр максимального рангу Q_∞-зображення, який містить E_j.

Розіб'ємо циліндр Δ_{m_j-1} на циліндри m_j-го рангу: $\Delta^0_{m_j}, \Delta^1_{m_j}, \ldots$. Нехай $\Delta^{l_j}_{m_j}$ — той з цих циліндрів, що містить точку a_j, а $\Delta^{r_j}_{m_j}$ — той з цих циліндрів, що містить точку b_j. Нехай $M_j := \bigcup\limits_{i:\Delta^i_{m_j} \subset E_j} \Delta^i_{m_j}$.

Очевидно, що $M_j \in \hat{\Phi}$ і $|M_j| \leqslant |E_j|$.

I. Нехай $\Delta^{r_j0}_{m_j+1}$ — найлівіший підциліндр з $\Delta^{r_j}_{m_j}$. І нехай $d_j = \sup M_j$.

Якщо $\Delta^{r_j0}_{m_j+1} \subset [d_j, b_j]$, то $\left|\Delta^{r_j0}_{m_j+1}\right| \leqslant |E_j|$.

З іншого боку, $\left|\Delta^{r_j0}_{m_j+1}\right| = q_0 \cdot \left|\Delta^{r_j}_{m_j}\right|$, звідси $\left|\Delta^{r_j}_{m_j}\right| = \frac{1}{q_0} \cdot \left|\Delta^{r_j0}_{m_j+1}\right| \leqslant \frac{1}{q_0} \cdot |E_j|$. Тому $[d_j, b_j]$ можна покрити одним циліндром $\Delta^{r_j}_{m_j}$:

$$\left|\Delta^{r_j}_{m_j}\right| \leqslant \frac{1}{q_0} \cdot |E_j|.$$

У випадку, коли $\Delta^{r_j0}_{m_j+1} \not\subset [d_j, b_j]$, розглянемо циліндр $\Delta^{r_j00}_{m_j+2}$.

Якщо $\Delta^{r_j00}_{m_j+2} \subset [d_j, b_j]$, то $[d_j, b_j]$ можна покрити одним циліндром

$$\left|\Delta^{r_j0}_{m_j+1}\right| \leqslant \frac{1}{q_0} \cdot |E_j|.$$

$$\vdots$$

Таким чином, існує номер $k_j \in N$ такий, що:

$$\Delta^{r_j \overbrace{0...0}^{k_j}}_{m_j+k_j} \subset [d_j, b_j], \quad \Delta^{r_j \overbrace{0...0}^{k_j-1}}_{m_j+k_j} \not\subset [d_j, b_j].$$

Тоді $[d_j, b_j]$ можна покрити одним циліндром $\Delta^{r_j \overbrace{0...0}^{k_j}}_{m_j+k_j}$, діаметр якого не перевищує $\frac{1}{q_0} \cdot |E_j|$, тобто

$$\left|\Delta^{r_j \overbrace{0...0}^{k_j}}_{m_j+k_j}\right| \leqslant \frac{1}{q_0} \cdot |E_j|.$$

II. Враховуючи умову (2.16), отримуємо

$$\left|\Delta^{l_j}_{m_j}\right| \leqslant c \cdot |E_j|.$$

Таким чином, E_j можна покрити за допомогою множин $L_j := \Delta^{l_j}_{m_j}$, M_j і $R_j := \Delta^{r_j \overbrace{0...0}^{k_j}}_{m_j+k_j}$, причому $L_j \in \hat{\Phi},\ M_j \in \hat{\Phi},\ R_j \in \hat{\Phi}$ і

$$|L_j| \leqslant c_0 \cdot |E_j|,\ |M_j| \leqslant c_0 \cdot |E_j|,\ |R_j| \leqslant c_0 \cdot |E_j|,$$

де $c_0 = \max\{c, \frac{1}{q_0}\}$.

Тому

$$|E_j|^\alpha \geqslant \frac{1}{{c_o}^\alpha} \cdot |L_j|^\alpha,$$

$$|E_j|^\alpha \geqslant \frac{1}{{c_o}^\alpha} \cdot |M_j|^\alpha,$$

$$|E_j|^\alpha \geqslant \frac{1}{{c_o}^\alpha} \cdot |R_j|^\alpha.$$

Отже,

$$|E_j|^\alpha \geqslant \frac{1}{3{c_o}^\alpha} \cdot (|L_j|^\alpha + |M_j|^\alpha + |R_j|^\alpha)$$

і

$$\sum_j |E_j|^\alpha \geqslant \frac{1}{3{c_o}^\alpha} \cdot \sum_j (|L_j|^\alpha + |M_j|^\alpha + |R_j|^\alpha).$$

Таким чином, для довільного ε-покриття множини E існує $c_0\varepsilon$-покриття
$\{L_j, M_j, R_j\}$:

$$\bigcup_j (L_j \cup M_j \cup R_j) \supset E.$$

Маємо

$$\sum_j (|L_j|^\alpha + |M_j|^\alpha + |R_j|^\alpha) \leqslant 3{c_o}^\alpha \cdot \sum_j |E_j|^\alpha.$$

Таким чином, для довільного $\varepsilon > 0$, для довільного $\alpha > 0$, для довільної множини $E \subset [0, 1)$ і для довільного ε-покриття $\{E_j\}$ множини E ми одержуємо:

$$H^\alpha_{c_0\varepsilon}(E, \hat{\Phi}) \leqslant 3{c_o}^\alpha \cdot \sum_j |E_j|^\alpha.$$

Тому

$$H^\alpha_{c_0\varepsilon}(E, \hat{\Phi}) \leqslant 3{c_o}^\alpha \cdot H^\alpha_\varepsilon(E).$$

Переходячи до границі при $\varepsilon \to 0$, отримуємо

$$H^\alpha(E) \leqslant H^\alpha(E, \hat{\Phi}) \leqslant 3{c_o}^\alpha \cdot H^\alpha(E)$$

для довільного $\alpha > 0$ і для довільної множини $E \subset [0, 1)$. □

Зауваження 5. Якщо $\frac{q_i}{\sum\limits_{k=i+1}^{+\infty} q_k} \leqslant c, \ \forall\ i$, то сімейство $\Phi(Q_\infty)$ циліндрів Q_∞-зображення, взагалі кажучи, не є навіть довірчим. В якості контрприкладу можна взяти стохастичний вектор Q_∞ з $q_i = \frac{1}{(i+1)(i+2)}$ (у цьому випадку Q_∞-розклад співпадає з розкладом Люрота). Оскільки для даного стохастичного вектора виконуються умови теореми 1.4.12 , то сімейство циліндрів $\Phi(Q_\infty)$ не є довірчим. Але при цьому сімейство $\hat{\Phi}(Q_\infty)$ є не просто довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку, але навіть порівнянним. Справді, в цьому випадку

$$\sum_{k=i+1}^{+\infty} q_k = \frac{1}{(i+2)(i+3)} + \frac{1}{(i+3)(i+4)} + \ldots = \frac{1}{i+2}.$$

Тому

$$\frac{q_i}{\sum\limits_{k=i+1}^{+\infty} q_k} = \frac{1}{i+1} \leqslant 1,$$

тобто виконуються умови теореми 2.6.1 і відповідне сімейство $\hat{\Phi}(Q_\infty)$ є порівнянним.

Лема 2.6.2. *Якщо виконується умова (2.16), то сімейство $\hat{\Phi}' = \varphi(\hat{\Phi})$ є порівнянним.*

Доведення. Нехай E — довільна підмножина з $[0,1)$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ та $\alpha > 0$.

Нехай $\{E_j\} = \{(a_j, b_j)\}$ — довільне ε-покриття множини E. І нехай Δ_{m_j-1} — циліндр максимального рангу I-Q_∞-зображення, який містить E_j.

Розбиваємо циліндр Δ_{m_j-1} на циліндри m_j-го рангу. Якщо $\beta_{m_j}(I) = 1$, то циліндр Δ_{m_j} розбивається зліва направо. Якщо $\beta_{m_j}(I) = 0$, то — справа наліво.

Нехай $M_j := \bigcup\limits_{i:\Delta^i_{m_j} \subset E_j} \Delta^i_{m_j}$. Очевидно, що $M_j \in \hat{\Phi}'$ і $|M_j| \leqslant |E_j|$.
І нехай $M_j \neq \varnothing$ та $\inf M_j = c_j$.

Не порушуючи загальності, вважатимемо $\beta_{m_j}(I) = 0$.

Нехай $L_1 := \Delta^{l_j}_{m_j}$ — циліндр, що містить a_j, а $\Delta^{r_j}_{m_j}$– циліндр, що містить b_j.
Враховуючи умову (2.16), отримуємо $\left|\Delta^{r_j}_{m_j}\right| \leqslant c \cdot |E_j|$.

Циліндр $\Delta^{l_j}_{m_j}$ розіб'ємо на циліндри (m_j+1)-го рангу. При цьому, у випадку, якщо $\beta_{m_j+1}(I) = 1$, то таке розбиття відбуватиметься зліва направо.

Позначимо об'єднання циліндрів (m_j+1)-го рангу, які попали в $[a_j, c_j]$ через M_2, $|M_2| \leqslant |E_j|$. Тоді найлівіший з цих циліндрів міститиметься в $[a_j, c_j]$ і суміжний зліва з ним циліндр L_2 має довжину, що не перевищує $c \cdot |E_j|$.

Тоді $[a_j, c_j]$ можна покрити за допомогою двох множин: L_2 та M_2, причому

$$|L_2| \leqslant c \cdot |E_j|, \quad |M_2| \leqslant |E_j|.$$

Якщо ж $\beta_{m_j}(I) = 0$ і $\beta_{m_j+1}(I) = 0$, то перевіримо чи міститься $\Delta^{l_j 0}_{m_j+1}$ в E_j.

Таким чином, якщо $\Delta^{l_j 0}_{m_j+1} \subset E_j$, то циліндр $\Delta^{l_j}_{m_j}$ покриває залишок E_j і

$$\left|\Delta^{l_j}_{m_j}\right| \leqslant \frac{1}{q_0} \cdot |E_j|.$$

Якщо $\Delta^{l_j 0}_{m_j+1} \not\subset E_j$, то циліндр $\Delta^{l_j 0}_{m_j+1}$ покриває ту частину множини E_j, яку перед цим покривав циліндр $\Delta^{l_j}_{m_j}$.

Над циліндром $\Delta^{l_j 0}_{m_j+1}$ знову проробляємо ту ж процедуру: якщо $\beta_{m_j+2}(I) = 1$, то замість $\Delta^{l_j 0}_{m_j+1}$ отримаємо L_3 і M_3.

Якщо $\beta_{m_j+2}(I) = 0$, то перевіримо чи міститься $\Delta^{l_j 00}_{m_j+2}$ в E_j.

І тоді, якщо $\Delta^{l_j 00}_{m_j+2} \subset E_j$, то $\left|\Delta^{l_j 0}_{m_j+1}\right| \leqslant \frac{1}{q_0} \cdot |E_j|$.

Якщо ж $\Delta^{l_j 00}_{m_j+2} \not\subset E_j$, то замість $\Delta^{l_j 0}_{m_j+1}$ залишаємо $\Delta^{l_j 00}_{m_j+2}$.

Повторюючи дану процедуру, на деякому кроці k_j отримаємо, $\beta_{m_j+k_j}(I) = 1$ (і тоді $[a_j, c_j]$ покриється двома множинами $M_{k_j} \in \hat{\Phi}'$ та $L_{k_j} \in \hat{\Phi}'$), або $\left|\Delta^{l_j \overbrace{0...0}^{k_j}}_{m_j+k_j}\right|$ покриває $[a_j, c_j]$ і

$$\left|\Delta^{l_j \overbrace{0...0}^{k_j}}_{m_j+k_j}\right| \leqslant \frac{1}{q_0} \cdot |E_j|.$$

Проводячи міркування, аналогічні до тих, що використовувалися при доведенні попередньої леми, отримаємо

$$H^{\alpha}(E) \leqslant H^{\alpha}(E, \hat{\Phi}) \leqslant 3{c_o}^{\alpha} \cdot H^{\alpha}(E)$$

для довільного $\alpha > 0$ і для довільної множини $E \subset D$. $\square$

На основі двох вказаних лем отримана наступна теорема.

Теорема 2.6.4. *Якщо виконується умова (2.16), то відображення φ зберігає нетривіальність міри Хаусдорфа, а, отже, і розмірність Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку.*

Доведення. Оскільки при виконанні умови (2.16) сімейства $\hat{\Phi} = \hat{\Phi}(Q_\infty)$ і $\hat{\Phi}' = \hat{\Phi}'(Q_\infty)$ є довірчими, то для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича довільної множини $E \subset [0,1]$ досить використовувати покриття множинами $K_j \in \hat{\Phi}$.

Нехай $K'_j = \varphi(K_j)$. Оскільки K_j є об'єднанням суміжних циліндричних відрізків одного рангу, що належать до одного циліндра попереднього рангу, то з конструкції I-Q_∞-розкладу випливає, що $K'_j \in \hat{\Phi}'$ і $|K_j| = |K'_j|$.

Нехай E — довільна множина з $[0,1]$, $\{K_j\}$ — довільне її ε-покриття множинами з $\hat{\Phi}$. Тоді $\{K'_j\}$ буде ε-покриттям для $E' = \varphi(E)$.

Відповідні α-об'єми будуть рівними, а тому

$$H^\alpha_\varepsilon(E, \hat{\Phi}) = H^\alpha_\varepsilon(E', \hat{\Phi}').$$

Перейшовши до границі при $\varepsilon \to 0$ отримаємо:

$$H^\alpha(E, \hat{\Phi}) = H^\alpha(E', \hat{\Phi}').$$

А тому,

$$\dim_H(E, \hat{\Phi}) = \dim_H(E', \hat{\Phi}').$$

Оскільки $\hat{\Phi}$ і $\hat{\Phi}'$ — довірчі для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича, то

$$\dim_H E = \dim_H E', \quad \forall E \subset [0,1].$$

Отже, φ зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку. $\square$

Як видно з доведення останньої теореми, вона допускає очевидне узагальнення.

Теорема 2.6.5. *Якщо системи $\hat{\Phi}$ і $\hat{\Phi}'$ є довірчими, то відображення φ зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку.*

Зауваження 6. З останньої теореми випливає, що для доведення того, що φ завжди зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича, досить довести довірчість сімейств $\hat{\Phi}(Q_\infty)$ та $\hat{\Phi}'(Q_\infty) = \hat{\Phi}(I\text{-}Q_\infty)$.

Наступна теорема встановлює довірчість сімейства $\hat{\Phi}(Q_\infty)$ при довільному виборі стохастичного вектора Q_∞, а метод, який використовується при її доведенні, також дозволяє отримувати загальні достатні умови довірчості сімейств $\Phi(Q_\infty)$ циліндрів Q_∞-зображення.

Теорема 2.6.6. *Нехай $\hat{\Phi} = \hat{\Phi}(Q_\infty)$ — сімейство, яке складається з циліндрів Q_∞-зображення та множин, які є об'єднаннями суміжних циліндрів одного рангу і належать до одного циліндра попереднього рангу.*

Сімейство $\hat{\Phi}(Q_\infty)$ є довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку при довільному виборі стохастичного вектора Q_∞.

Доведення. Для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича довільних підмножин з $[0,1)$ досить розглядати покриття піввідрізками $[a_j, b_j)$, де a_j та b_j належать деякій всюди щільній множині A (при цьому відповідна міра Хаусдорфа збігається з класичною мірою Хаусдорфа). Виберемо в якості A множину всіх Q_∞-раціональних точок, тобто точок, які є кінцями циліндрів певного рангу Q_∞-зображення.

Нехай E — довільна підмножина з $[0,1)$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ та $\alpha > 0$. Нехай $\{E_j\}$ — довільне ε-покриття множини E, $E_j = [a_j, b_j)$, $a_j \in A$, $b_j \in A$, $|E_j| < \varepsilon$.

Для множини E_j існує єдиний циліндр $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_j}}$, який повністю містить E_j, але будь-який циліндр більшого рангу не містить E_j. У тому випадку, коли a_j та b_j належать двом різним циліндрам першого рангу, в якості циліндра $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_j}}$ виберемо $[0,1)$, вважаючи його циліндром нульового рангу.

Оскільки $a_j \in A$, то існує таке невід'ємне число l_j, що

$$a_j = \Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n_j} \alpha_{n_j+1} \ldots \alpha_{n_j+l_j} 0 \ldots 0 \ldots},$$

де $\alpha_k = \alpha_k(a_j), l_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Розіб'ємо циліндр $\Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n_j}}$ на циліндри наступного рангу. З максимальності рангу циліндра $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n_j}}$ випливає, що існує хоча б одна точка, яка є кінцем циліндру $(n_j + 1)$-го рангу і яка належить до інтервала (a_j, b_j). В якості такої точки виберемо точку

$$c_j = \Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n_j} (\alpha_{n_j+1}+1) 0 \ldots 0},$$

яка є найлівішою точкою поділу $(n_j + 1)$-рангу, що належить до (a_j, b_j).

Для покриття множини E_j множинами з сімейства $\hat{\Phi}(Q_\infty)$ окремо розглянемо покриття множин $[a_j, c_j)$ та $[c_j, b_j)$.

Спочатку оцінимо α-об'єм покриття $[c_j, b_j)$ множинами з $\hat{\Phi}(Q_\infty)$.

Якщо циліндр $\Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n_j} (\alpha_{n_j+1}+1)}$ містить $[c_j, b_j)$, то існує таке натуральне число t_j, що циліндр

$$\Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n_j} (\alpha_{n_j+1}+1) \underbrace{0 \ldots 0}_{t_j - 1}}$$

буде містити $[c_j, b_j)$, а циліндр

$$\Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n_j} (\alpha_{n_j+1}+1) \underbrace{0 \ldots 0}_{t_j}}$$

вже буде міститися в $[c_j, b_j)$. Тоді $[c_j, b_j)$ можна покрити одним циліндром

$$L = L(j) := \Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n_j} (\alpha_{n_j+1}+1) \underbrace{0 \ldots 0}_{t_j - 1}},$$

довжина якого не перевищує $\frac{1}{q_0}|E_j|$.

Якщо циліндр $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n_j} (\alpha_{n_j+1}+1)}$ міститься в $[c_j, b_j)$, то позначимо через $M_0 = M_0(j)$ об'єднання всіх циліндрів $(n_j + 1)$-го рангу, які містяться в $[c_j, b_j)$. Зрозуміло, що множина M_0 залежить від вибору множини E_j і для кожного значення j буде своєю. Це ж зауваження стосується і введених нижче множин M_i.

Очевидно, що $|M_0| < |E_j|$.

Якщо множина $[c_j, b_j) \setminus M_0$ непорожня, то її можна покрити одним циліндром, довжина якого не перевищує $\frac{1}{q_0}|E_j|$ аналогічно до того, як це було зроблено для розглянутого вище випадку, коли $[c_j, b_j) \subset \Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n_j}(\alpha_{n_j+1}+1)}$. Такий циліндр, як і раніше, будемо позначати через $L = L(j)$.

Таким чином, множину $[c_j, b_j)$ можна покрити не більш як двома множинами з сімейства $\hat{\Phi}(Q_\infty)$. Відповідний α-об'єм такого покриття не перевищує $(1 + \frac{1}{q_0^\alpha})|E_j|^\alpha$.

Оцінимо тепер α-об'єм покриття множини $[a_j, c_j)$ множинами з $\hat{\Phi}(Q_\infty)$.

Якщо a_j — точка поділу $n_j + 1$-го рангу або меншого, то

$$[a_j, c_j) = \Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n_j} \alpha_{n_j+1}} \in \Phi(\hat{Q}_\infty).$$

У іншому разі позначимо

$$M_1 := \bigcup_{i=(\alpha_{n_j+2})+1}^{\infty} \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n_j}(\alpha_{n_j+1})i} \in \hat{\Phi}(Q_\infty),$$

$$M_2 := \bigcup_{i=(\alpha_{n_j+3})+1}^{\infty} \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n_j} \alpha_{n_j+1}(\alpha_{n_j+2})i} \in \hat{\Phi}(Q_\infty),$$

$$\vdots$$

$$M_{l_j-2} := \bigcup_{i=(\alpha_{n_j+l_j-1})+1}^{\infty} \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n_j} \alpha_{n_j+1} \ldots (\alpha_{n_j+l_j-2})i} \in \hat{\Phi}(Q_\infty),$$

$$M_{l_j-1} := \bigcup_{i=\alpha_{n_j+l_j}}^{\infty} \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n_j} \alpha_{n_j+1} \ldots (\alpha_{n_j+l_j-1})i} \in \hat{\Phi}(Q_\infty).$$

Нехай $q = \max\{1 - q_0, \max\limits_i q_i\}$. Нескладно бачити, що

$$|M_k| \leqslant q^{k-1} |\Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n_j+1}}| \leqslant q^{k-1}, \quad \forall\, k \in \{1, 2, \ldots, l_j - 1\}.$$

Таким чином, множину $[a_j, c_j)$ можна покрити за допомогою не більш ніж $l_j - 1$ множини з сімейства $\hat{\Phi}(Q_\infty)$: або однією множиною $\Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n_j} \alpha_{n_j+1}}$

або об'єднанням множин $\bigcup\limits_{i=1}^{l_j-1} M_i$. Зауважимо, що всі ці множини є підмножинами множини E_j.

Для заданої множини E, $\alpha \in (0,1]$ та $\varepsilon > 0$ виберемо $\delta \in (0,\alpha)$. Тоді α-об'єм описаного вище покриття множини E_j множинами з сімейства $\hat{\Phi}(Q_\infty)$ дорівнює

$$\sum_{i=1}^{l_j-1}|M_i|^\alpha + |M_0|^\alpha + |L|^\alpha < \sum_{i=1}^{l_j-1}|M_i|^{\alpha-\delta}|M_i|^\delta + (1+\frac{1}{q_0^\alpha})|E_j|^\alpha$$
$$< |E_j|^{\alpha-\delta}\sum_{i=1}^{\infty}|M_i|^\delta + (1+\frac{1}{q_0^\alpha})|E_j|^{\alpha-\delta}$$
$$< |E_j|^{\alpha-\delta}(1+\frac{1}{q_0^\alpha}+\sum_{i=1}^{\infty}q^{(i-1)\delta}) = |E_j|^{\alpha-\delta}(1+\frac{1}{q_0^\alpha}+\frac{1}{1-q^\delta}).$$

Отже, для заданої множини E_j існує скінченний набір множин з сімейства $\hat{\Phi}(Q_\infty)$, якими можна покрити E_j і відповідний α-об'єм покриття не перевищує $S(\alpha,\delta)|E_j|^{\alpha-\delta}$, де $S(\alpha,\delta) = 1+\frac{1}{q_0^\alpha}+\frac{1}{1-q^\delta}$.

Таким чином, для довільного $\alpha \in (0,1]$, довільного $\delta \in (0,\alpha)$ і довільної множини $E \subset [0,1)$ маємо

$$H^\alpha(E) \leqslant H^\alpha(E,\hat{\Phi}(Q_\infty)) \leqslant S(\alpha,\delta)H^{\alpha-\delta}(E).$$

Тому $\dim_H(E,\hat{\Phi}(Q_\infty)) \leqslant \dim_H(E)+\delta, \forall\delta \in (0,\alpha)$, що доводить нерівність

$$\dim_H(E,\hat{\Phi}(Q_\infty)) \leqslant \dim_H(E),$$

а, отже, і рівність

$$\dim_H(E,\hat{\Phi}(Q_\infty)) = \dim_H(E)$$

для довільної множини $E \in [0,1)$. □

Наступна теорема встановлює довірчість сімейства $\hat{\Phi}(I\text{-}Q_\infty)$ при довільному виборі дійсного числа $I \in [0,1]$ та стохастичного вектора Q_∞.

Теорема 2.6.7. *Нехай $\hat{\Phi} = \hat{\Phi}(I\text{-}Q_\infty)$ — сімейство, яке складається з циліндрів I-Q_∞-зображення та множин, які є об'єднаннями суміжних* *циліндрів одного рангу і належать до одного циліндра попереднього рангу. Нехай D — множина точок одиничного відрізка, які мають I-Q_∞-зображення.*

Тоді сімейство $\hat{\Phi}(I\text{-}Q_\infty)$ є довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на множині D при довільному виборі дійсного числа $I \in [0,1]$ та стохастичного вектора Q_∞.

Доведення. Для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича довільних підмножин з одиничного відрізка досить розглядати покриття інтервалами (a_j, b_j), де a_j та b_j належать деякій всюди щільній множині A (при цьому відповідна міра Хаусдорфа збігається з класичною мірою Хаусдорфа). Виберемо в якості A множину всіх I-Q_∞-ірраціональних точок, тобто точок, які не є межовими для жодного циліндра жодного рангу I-Q_∞-зображення.

Нехай E — довільна підмножина з D. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ та $\alpha > 0$. Нехай $\{E_j\}$ — довільне ε-покриття множини E, $E_j = (a_j, b_j)$, $a_j \in A$, $b_j \in A$, $|E_j| \leqslant \varepsilon$.

Для множини E_j існує єдиний циліндр $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_j}}$, який повністю містить E_j, але будь-який циліндр більшого рангу не містить E_j. У тому випадку, коли a_j та b_j належать двом різним циліндрам першого рангу, в якості циліндра $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_j}}$ виберемо $(0,1)$, вважаючи його циліндром нульового рангу.

Нехай $I = 0,\beta_1(I)\beta_2(I)\ldots\beta_k(I)\ldots$. Розіб'ємо циліндр $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_j}}$ на циліндри $(n_j{+}1)$-го рангу. Не порушуючи загальності, вважатимемо $\beta_{n_j+1}(I) = 0$, тобто на (n_j+1)-му кроці розбиття кожного з циліндрів n_j-го рангу здійснюватиметься справа наліво.

Нехай M_0 — об'єднання циліндрів $(n_j + 1)$-го рангу, які повністю містяться в (a_j, b_j). Якщо $c_j := \sup \Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(a_j)}$ співпадає з $d_j := \inf \Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)}$, то $M_0 = \varnothing$. Якщо $M_0 \neq \varnothing$, то $M_0 \in \hat{\Phi}$ і $|M_0| \leqslant |E_j|$.

Розіб'ємо циліндри $\Delta_{\alpha_1(a_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(a_j)}$ та $\Delta_{\alpha_1(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)}$ на циліндри (n_j+2)-го рангу.

I. Нехай $\beta_{n_j+2}(I)=0$, тобто на (n_j+2)-му кроці розбиття кожного з циліндрів (n_j+1)-го рангу здійснюватиметься справа наліво.

Якщо $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(a_j)0}\subset(a_j,c_j)$, то (a_j,c_j) можна покрити одним циліндром (n_j+1)-го рангу $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(a_j)}$, довжина якого не перевищує $\frac{1}{q_0}|E_j|$.

Якщо $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(a_j)0}\not\subset(a_j,c_j)$, то (a_j,c_j) можна покрити одним циліндром (n_j+2)-го рангу $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(a_j)\alpha_{n_j+2}(a_j)}$. При цьому $\alpha_{n_j+2}(a_j)=0$.

Нехай M_1 — об'єднання циліндрів (n_j+2)-го рангу, які повністю містяться в (d_j,b_j), тобто

$$M_1:=\bigcup_{i=1}^{\infty}\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)(\alpha_{n_j+2}(b_j)+i)}.$$

Тоді (d_j,b_j) можна покрити за допомогою множини M_1 та циліндра (n_j+2)-го рангу

$$\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)\alpha_{n_j+2}(b_j)}.$$

Отже, E_j можна покрити чотирма множинами: M_0; M_1;
циліндром $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(a_j)}$, якщо $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(a_j)0}\subset(a_j,c_j)$
або $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(a_j)\alpha_{n_j+2}(a_j)}$, якщо $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(a_j)0}\not\subset(a_j,c_j)$;
та циліндром $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)\alpha_{n_j+2}(b_j)}$.

II. Нехай $\beta_{n_j+2}(I)=1$, тобто на (n_j+2)-му кроці розбиття кожного з циліндрів (n_j+1)-го рангу здійснюватиметься зліва направо.

Якщо $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)0}\subset(d_j,b_j)$, то (d_j,b_j) можна покрити одним циліндром (n_j+1)-го рангу $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)}$, довжина якого не перевищує $\frac{1}{q_0}|E_j|$.

Якщо $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)0}\not\subset(d_j,b_j)$, то (d_j,b_j) можна покрити одним циліндром (n_j+2)-го рангу $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)\alpha_{n_j+2}(b_j)}$. При цьому $\alpha_{n_j+2}(b_j)=$

0.

Нехай M_1 — об'єднання циліндрів (n_j+2)-го рангу, які повністю містяться в (a_j, c_j), тобто

$$M_1 := \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(a_j)(\alpha_{n_j+2}(a_j)+i)}.$$

Тоді (a_j, c_j) можна покрити за допомогою множини M_1 та циліндра (n_j+2)-го рангу

$$\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(a_j)\alpha_{n_j+2}(a_j)}.$$

Отже, E_j можна покрити чотирма множинами: M_0; M_1;
циліндром $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)}$, якщо $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)0} \subset (d_j, b_j)$
або $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)\alpha_{n_j+2}(b_j)}$, якщо $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)0} \not\subset (d_j, b_j)$;
та циліндром $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(a_j)\alpha_{n_j+2}(a_j)}$.

Якщо $\beta_{n_j+2}(I) = 0$, то розіб'ємо циліндри $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(a_j)\alpha_{n_j+2}(a_j)}$ (у випадку, коли $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(a_j)0} \not\subset (a_j, c_j)$) та $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)\alpha_{n_j+2}(b_j)}$ на циліндри (n_j+3)-го рангу.

Якщо $\beta_{n_j+2}(I) = 1$, то розіб'ємо циліндри $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)\alpha_{n_j+2}(b_j)}$ (у випадку, коли $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)0} \not\subset (d_j, b_j)$) та $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(a_j)\alpha_{n_j+2}(a_j)}$ на циліндри (n_j+3)-го рангу.

Можливі наступні випадки.

I.1. $\beta_{n_j+2}(I) = 0$ і $\beta_{n_j+3}(I) = 0$.

Якщо $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)0} \subset (a_j, c_j)$, то (a_j, c_j) можна покрити одним циліндром (n_j+2)-го рангу $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)}$, довжина якого не перевищує $\frac{1}{q_0}|E_j|$.

Якщо $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)0} \not\subset (a_j, c_j)$, то (a_j, c_j) можна покрити одним циліндром (n_j+3)-го рангу $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)\alpha_{n_j+3}(a_j)}$.
При цьому $\alpha_{n_j+2}(a_j) = \alpha_{n_j+3}(a_j) = 0$.

Нехай M_2 — об'єднання циліндрів (n_j+3)-го рангу, які повністю містяться в множині $(d_j, b_j) \cap \Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(b_j)}$, тобто

$$M_2 := \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(b_j)(\alpha_{n_j+3}(b_j)+i)}.$$

Тоді (d_j, b_j) можна покрити за допомогою множин M_1, M_2 та циліндра (n_j+3)-го рангу $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(b_j)\alpha_{n_j+3}(b_j)}$.

Отже, у випадку I.1 E_j можна покрити п'ятьма множинами: M_0; M_1; M_2;

циліндром $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)}$, якщо $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)0} \subset (a_j, c_j)$

або $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)\alpha_{n_j+3}(a_j)}$, якщо $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)0} \not\subset (a_j, c_j)$;

та циліндром $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(b_j)\alpha_{n_j+3}(b_j)}$.

I.2. $\beta_{n_j+2}(I) = 0$ і $\beta_{n_j+3}(I) = 1$.

Якщо $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(b_j)0} \subset (d_j, b_j) \setminus M_1$, то $(d_j, b_j) \setminus M_1$ можна покрити одним циліндром (n_j+2)-го рангу $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(b_j)}$, довжина якого не перевищує $\frac{1}{q_0}|E_j|$.

Якщо $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)0} \not\subset (d_j, b_j) \setminus M_1$, то $(d_j, b_j) \setminus M_1$ можна покрити одним циліндром (n_j+3)-го рангу $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(b_j)\alpha_{n_j+3}(b_j)}$. При цьому $\alpha_{n_j+3}(b_j) = 0$.

Нехай M_2 — об'єднання циліндрів (n_j+3)-го рангу, які повністю містяться в множині $(a_j, c_j) \cap \Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)}$, тобто

$$M_2 := \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)(\alpha_{n_j+3}(a_j)+i)}.$$

Тоді (a_j, c_j) можна покрити за допомогою множини M_2 та циліндра (n_j+3)-го рангу $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)\alpha_{n_j+3}(a_j)}$.

Отже, у випадку I.2 E_j можна покрити п'ятьма множинами: M_0; M_1; M_2;

циліндром $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(b_j)}$, якщо $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(b_j)0} \subset (d_j, b_j) \setminus M_1$

або $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(b_j)\alpha_{n_j+3}(b_j)}$, якщо $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(b_j)0} \not\subset (d_j, b_j) \setminus M_1$;

та циліндром $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)\alpha_{n_j+3}(a_j)}$.

II.1. $\beta_{n_j+2}(I) = 1$ і $\beta_{n_j+3}(I) = 0$.

Якщо $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)0} \subset (a_j, c_j)\backslash M_1$, то $(a_j, c_j)\backslash M_1$ можна покрити одним циліндром (n_j+2)-го рангу $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)}$, довжина якого не перевищує $\frac{1}{q_0}|E_j|$.

Якщо $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)0} \not\subset (a_j, c_j)\backslash M_1$, то $(a_j, c_j)\backslash M_1$ можна покрити одним циліндром (n_j+3)-го рангу $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)\alpha_{n_j+3}(a_j)}$.

Нехай M_2 — об'єднання циліндрів (n_j+3)-го рангу, які повністю містяться в множині $(d_j, b_j) \cap \Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(b_j)}$, тобто

$$M_2 := \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(b_j)(\alpha_{n_j+3}(b_j)+i)}.$$

Тоді (d_j, b_j) можна покрити за допомогою множини M_2 та циліндра (n_j+3)-го рангу $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(b_j)\alpha_{n_j+3}(b_j)}$.

Отже, у випадку II.1 E_j можна покрити п'ятьма множинами: M_0; M_1; M_2;
циліндром $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)}$, якщо $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)0} \subset (a_j, c_j) \setminus M_1$
або $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)\alpha_{n_j+3}(a_j)}$, якщо $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)0} \not\subset (a_j, c_j) \setminus M_1$;
та циліндром $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(b_j)\alpha_{n_j+3}(b_j)}$.

II.2. $\beta_{n_j+2}(I) = 1$ і $\beta_{n_j+3}(I) = 1$.

Якщо $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(b_j)0} \subset (d_j, b_j)$, то (d_j, b_j) можна покрити одним циліндром (n_j+2)-го рангу $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(b_j)}$, довжина якого не перевищує $\frac{1}{q_0}|E_j|$.

Якщо $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)0} \not\subset (d_j, b_j)$, то (d_j, b_j) можна покрити одним циліндром (n_j+3)-го рангу $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(b_j)\alpha_{n_j+3}(b_j)}$.

Нехай M_2 — об'єднання циліндрів (n_j+3)-го рангу, які повністю містяться в множині $(a_j, c_j) \cap \Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)}$, тобто

$$M_2 := \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)(\alpha_{n_j+3}(a_j)+i)}.$$

Тоді (a_j, c_j) можна покрити за допомогою множини M_2 та циліндра (n_j+3)-го рангу $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)\alpha_{n_j+3}(a_j)}$.

Отже, у випадку II.2 E_j можна покрити п'ятьма множинами: M_0; M_1; M_2;

циліндром $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(b_j)}$, якщо $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(b_j)0} \subset (d_j, b_j)$
або $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(b_j)\alpha_{n_j+3}(b_j)}$, якщо $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(b_j)0} \not\subset (d_j, b_j)$;
та циліндром $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)\alpha_{n_j+3}(a_j)}$.

Повторюючи аналогічні кроки далі, на певному кроці k отримаємо, що E_j можна покрити за допомогою наступних множин:

1) M_0 — об'єднання циліндрів (n_j+1)-го рангу, які повністю містяться в (a_j, b_j);

2) множинами $M_1, M_2, \ldots, M_k$, де M_k — об'єднання циліндрів (n_j+k+1)-го рангу, які повністю містяться в $(d_j, b_j) \cap \Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+k}(b_j)}$, якщо $\beta_{n_j+k+1}(I) = 0$, або в $(a_j, c_j) \cap \Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+k}(a_j)}$, якщо $\beta_{n_j+k+1}(I) = 1$;

3) $L_j := \Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+k}(a_j)}$ або $L_j := \Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+k}(b_j)\alpha_{n_j+k+1}(b_j)}$, у випадку, коли $\beta_{n_j+k+1}(I) = 0$;
або $R_j := \Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+k}(b_j)}$ або $R_j := \Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+k}(a_j)\alpha_{n_j+k+1}(a_j)}$, у випадку, коли $\beta_{n_j+k+1}(I) = 1$;

4) $R_j := \Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+k}(b_j)\alpha_{n_j+k+1}(b_j)}$, якщо $\beta_{n_j+k+1}(I) = 0$;
або $L_j := \Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+k}(a_j)\alpha_{n_j+k+1}(a_j)}$, якщо $\beta_{n_j+k+1}(I) = 1$.

Нехай $q := \max\limits_i q_i$.

Оскільки M_k є підмножиною циліндра (n_l+k)-го рангу, то $|M_k| \leqslant q^{n_j+k} \leqslant q^k$.

Для заданого E_j виберемо $k_0 = k_0(E_j)$ таке, що $q^k < |E_j| \forall k \geqslant k_0$. Тоді $|\Delta_{\alpha_1(a_j)\ldots\alpha_{n_j+k}(a_j)}| \leqslant |E_j|$ та $|\Delta_{\alpha_1(b_j)\ldots\alpha_{n_j+k}(b_j)}| \leqslant |E_j|$, $\forall k \geqslant k_0(E_j)$.

Для заданої множини E, дійсних чисел $\alpha \in (0,1]$ та $\varepsilon > 0$ виберемо $\delta \in (0, \alpha)$. Тоді α-об'єм описаного вище покриття множини E_j множинами з сімейства $\hat{\Phi}(I\text{-}Q_\infty)$ дорівнює:

$$\sum_{i=0}^{k}|M_i|^\alpha+|L_j|^\alpha+|R_j|^\alpha \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}|M_i|^{\alpha-\delta}\cdot|M_i|^\delta+(1+\frac{2}{q_0^\alpha})|E_j|^\alpha$$
$$\leqslant |E_j|^{\alpha-\delta}\sum_{i=0}^{\infty}|M_i|^\delta+(1+\frac{2}{q_0^\alpha})|E_j|^{\alpha-\delta}$$
$$\leqslant |E_j|^{\alpha-\delta}\cdot\sum_{i=0}^{\infty}q^{i\delta}+(1+\frac{2}{q_0^\alpha}|E_j|^{\alpha-\delta})=|E_j|^{\alpha-\delta}(1+\frac{2}{q_0^\alpha}+\frac{1}{1-q^\delta}).$$

Отже, $\forall\varepsilon>0$ множину E_j можна покрити за допомогою скінченної кількості множин з сімейства $\hat{\Phi}(I\text{-}Q_\infty)$, діаметр кожної з яких не перевищує $\frac{1}{q_0}|E_j|$. Відповідний α-об'єм покриття не перевищує $S(\alpha,\delta)|E_j|^{\alpha-\delta}$, де $S(\alpha,\delta)=1+\frac{2}{q_0^\alpha}+\frac{1}{1-q^\delta}$.

Таким чином, $\forall\varepsilon>0$, $\forall\alpha>0$, $\forall\delta\in(0,\alpha)$ і довільної множини $E\subset D$ маємо:

$$H^\alpha(E)\leqslant H^\alpha(E,\hat{\Phi}(I\text{-}Q_\infty))\leqslant S(\alpha,\delta)H^{\alpha-\delta}(E).$$

Тому $\dim_H(E,\hat{\Phi}(I\text{-}Q_\infty))\leqslant\dim_H(E)+\delta,\forall\delta\in(0,\alpha)$, а отже

$$\dim_H(E,\hat{\Phi}(I\text{-}Q_\infty))\leqslant\dim_H(E),$$

а тому доведено і рівність

$$\dim_H(E,\hat{\Phi}(I\text{-}Q_\infty))=\dim_H(E)$$

для довільної множини $E\subset D$. □

Таким чином наслідком теорем 2.6.5, 2.6.6 і 2.6.7 є наступний результат:

Теорема 2.6.8. *Відображення φ зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку.*

Покажемо як отриманий результат теореми 2.6.6 можна застосувати для знаходження достатніх умов довірчості для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича для сімейства $\Phi(Q_\infty)$, яке містить лише циліндри Q_∞-зображення.

Теорема 2.6.9. *Нехай*

$$f(\alpha, k, m) := \frac{\sum\limits_{i=k}^{m} q_i^{\alpha}}{\left(\sum\limits_{i=k}^{m} q_i\right)^{\alpha}}$$

і

$$f^*(\alpha) := \sup_{k,m} f(\alpha, k, m).$$

Якщо

$$f^*(\alpha) < +\infty, \forall \alpha > 0, \tag{2.17}$$

то сімейство циліндрів $\Phi(Q_\infty)$ — довірче для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на $[0, 1)$.

Доведення. Нехай E — довільна підмножина $[0, 1)$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ та $\alpha > 0$.

Нехай $\{\hat{E}_j\}$ — довільне ε-покриття множини E, $\hat{E}_j \in \hat{\Phi}(Q_\infty)$, $|\hat{E}_j| \leqslant \varepsilon$:

$$\hat{E}_j = \bigcup_{i=k_j}^{m_j} \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k_j-1}i}, m_j \in N \cup \{\infty\}.$$

Оскільки

$$|\hat{E}_j|^{\alpha} = |\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k_j-1}}|^{\alpha} \cdot \left(\sum_{i=k_j}^{m_j} q_i\right)^{\alpha},$$

то

$$\sum_{i=k_j}^{m_j} |\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k_j-1}i}|^{\alpha} = |\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k_j-1}}|^{\alpha} \cdot \sum_{i=k_j}^{m_j} q_i^{\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant |\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k_j-1}}|^{\alpha} \cdot f^*(\alpha) \cdot (\sum_{i=k_j}^{m_j} q_i)^{\alpha} = f^*(\alpha) \cdot |\hat{E}_j|^{\alpha}.$$

Оцінимо α-об'єм вказаного покриття циліндрами:

$$\sum_j \sum_{i=k_j}^{m_j} |\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k_j-1}i}|^{\alpha} \leqslant \sum_j |\hat{E}_j|^{\alpha} \cdot f^*(\alpha), \quad \forall \{\hat{E}_j\}.$$

Отже,

$$H^{\alpha}_{\varepsilon}(E, \Phi(Q_\infty)) \leqslant f^*(\alpha) \cdot \sum_j |\hat{E}_j|^{\alpha}, \quad \forall \{\hat{E}_j\}.$$

Тому

$$H^{\alpha}_{\varepsilon}(E, \Phi(Q_\infty)) \leqslant f^*(\alpha) \cdot H^{\alpha}_{\varepsilon}(E, \hat{\Phi}(Q_\infty)).$$

Оскільки сімейство $\hat{\Phi}(Q_\infty)$ ширше за сімейство $\Phi(Q_\infty)$, то

$$H^{\alpha}(E, \hat{\Phi}(Q_\infty)) \leqslant H^{\alpha}(E, \Phi(Q_\infty)) \leqslant f^*(\alpha) \cdot H^{\alpha}(E, \hat{\Phi}(Q_\infty)).$$

Так як $f^*(\alpha) < +\infty, \forall \alpha > 0$, то

$$\dim_H(E, \Phi(Q_\infty)) = \dim_H(E, \hat{\Phi}(Q_\infty)).$$

Оскільки сімейство $\hat{\Phi}(Q_\infty)$ є довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на $[0,1)$, то з останньої рівності випливає, що і $\Phi(Q_\infty)$ — довірче для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на $[0,1)$. $\square$

Теорема 2.6.10. *Якщо сімейство циліндрів $\Phi = \Phi(Q_\infty)$ є довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на $[0,1)$, то сімейство цидіндрів $\Phi' = \Phi(I\text{-}Q_\infty)$ буде довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича на множині $D(I)$, $\forall I \in [0,1]$.*

Доведення. Зафіксуємо довільне $I\text{-}Q_\infty$-зображення.

Нехай E' — довільна підмножина з $D(I)$, $E = \varphi^{-1}(E')$.
Покажемо, що $\dim_H E' = \dim_H(E', \Phi(I\text{-}Q_\infty))$.

Нехай $\{E'_j\}$ — довільне ε-покриття множини E', $E'_j \in \Phi'$.
Тоді $\{E_j\}$ буде ε-покриттям множини E, причому $E_j \in \Phi$, $|E_j| = |E'_j|$. Тому

$$\sum_j |E_j|^{\alpha} = \sum_j |E'_j|^{\alpha}, \quad \forall \alpha > 0, \forall \varepsilon > 0.$$

Отже,

$$\inf_{|E_j| \leqslant \varepsilon} \sum_j |E_j|^{\alpha} = \inf_{|E'_j| \leqslant \varepsilon} \sum_j |E'_j|^{\alpha}, \quad \forall \alpha > 0, \forall \varepsilon > 0.$$

Тоді

$$H^\alpha(E,\Phi) = H^\alpha(E',\Phi'), \quad \forall\alpha > 0,$$

а тому

$$\dim_H(E,\Phi) = \dim_H(E',\Phi').$$

Оскільки Φ — довірче для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на $[0,1)$, то

$$\dim_H E = \dim_H(E,\Phi).$$

Так як відображення φ зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича на $[0,1]$, то

$$\dim_H E = \dim_H E', \quad \forall E \subset [0,1].$$

Отже,

$$\dim_H(E',\Phi') = \dim_H(E,\Phi) = \dim_H E = \dim_H E',$$

тобто

$$\dim_H(E',\Phi') = \dim_H E', \quad \forall E' \subset D(I).$$

□

Зауваження 7. У теоремі 2.6.9 було доведено довірчість сімейства $\Phi(Q_\infty)$ для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на $[0,1)$ при виконанні умови (2.17). Тому з теореми 2.6.10 випливає, що при виконанні вказаної умови сімейство $\Phi' = \Phi(I\text{-}Q_\infty)$ є довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на множині $D(I)$, $\forall I \in [0,1]$.

Наступна лема важлива для розвитку метричної теорії I-Q_∞-зображень та дослідження лебегівської і спектральної структури ймовірнісних мір з незалежними I-Q_∞-символами.

Лема 2.6.3. *При довільному виборі стохастичного вектора Q_∞ та дійсного числа $I \in [0,1]$ відображення φ зберігає міру Лебега на $(0,1)$.*

Доведення. Для доведення досить показати, що φ зберігає міру Лебега інтервалів.

Нехай $A = (a, b)$ — довільний інтервал з $(0, 1)$. І нехай $A^{'} := \varphi\left((a, b)\right)$.

Для довільного $\varepsilon > 0$ існує сукупність циліндрів $\hat{\Delta}_j$ одного рангу, для якої

$$\left(\bigcup_j \hat{\Delta}_j\right) \supset (a, b) \text{ і } \sum_j \lambda(\hat{\Delta}_j) \leqslant (b - a) + \varepsilon;$$

і сукупність циліндрів $\check{\Delta}_j$ одного рангу, для якої

$$\left(\bigcup_j \check{\Delta}_j\right) \subset (a, b) \text{ і } \sum_j \lambda(\check{\Delta}_j) \geqslant (b - a) - \varepsilon.$$

Тоді такі ж співвідношення будуть виконуватися і для $A^{'}$, $\{\hat{\Delta}_j^{'}\}$, $\{\check{\Delta}_j^{'}\}$.

Тому

$$\sum_j \lambda(\hat{\Delta}_j) - \varepsilon \leqslant \lambda(A) \leqslant \sum_j \lambda(\check{\Delta}_j) + \varepsilon$$

і

$$\sum_j \lambda(\hat{\Delta}_j^{'}) - \varepsilon \leqslant \lambda(A^{'}) \leqslant \sum_j \lambda(\check{\Delta}_j^{'}) + \varepsilon.$$

Звідси

$$\lambda(A) - 2\varepsilon \leqslant \lambda(A^{'}) \leqslant \lambda(A) + 2\varepsilon, \forall \varepsilon > 0.$$

Отже, $\lambda(A^{'}) = \lambda(A)$.

$\square$

З леми 2.6.3 та теореми 2.6.8 випливає, що відображення φ є G-ізоморфізмом.

2.7. DP-підхід до побудови ймовірнісної та розмірнісної теорій I-Q_∞-розкладів

Покажемо як отримані результати дозволяють досліджувати фрактальні властивості ймовірнісних мір з незалежними I-Q_∞-символами.

Спочатку дослідимо фрактальні властивості спектра міри μ_ξ. Як зазначалося вище, у тому ж випадку, коли I є ірраціональним числом (тобто послідовність $\beta_k(I)$ є неперіодичною), то розвинені в роботах [8, 89] методи незастосовні для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича спектра випадкової величини ξ навіть у найпростішому випадку однакової розподіленості незалежних випадкових величин ξ_k, оскільки відповідні множини вже не будуть ні самоподібними, ні N-самоподібними.

Наступна теорема узагальнює результати Р. Нікіфорова і Г. Торбіна ([8]) про фрактальні властивості спектрів випадкових величин з незалежними однаково розподіленими Q_∞-символами, при довільному виборі параметра I та стохастичного вектора Q_∞ та P_∞.

Теорема 2.7.1. *Нехай ξ_k — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, які набувають значень $0, 1, 2, \ldots$ з ймовірностями $p_0, p_1, p_2, \ldots$ відповідно.*

Нехай $V := \{i : p_i > 0\} = \{i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots\}$.

Якщо для фіксованого стохастичного вектора Q_∞ рівняння $\sum\limits_{i \in V} q_i^x = 1$ має корінь α_0 на $[0, 1]$, то розмірність Хаусдорфа–Безиковича спектра випадкової величини з незалежними I-Q_∞-символами дорівнює

$$\dim_H S_{\mu_\xi} = \alpha_0.$$

Якщо ж рівняння $\sum\limits_{i \in V} q_i^x = 1$ не має коренів на $[0, 1]$, то

$$\dim_H S_{\mu_\xi} = \dim_H(C[I\text{-}Q_\infty, V]) = \lim_{k \to \infty} \dim_H(C[I\text{-}Q_\infty, V_k]),$$

де $V_k = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, $k \in N, k \geqslant 2$.

Доведення. Як було доведено в [8], якщо для фіксованого стохастичного вектора Q_∞ рівняння $\sum\limits_{i \in V} q_i^x = 1$ має корінь α_0 на $[0, 1]$, то розмірність Хаусдорфа–Безиковича спектра випадкової величини з незалежними Q_∞-символами дорівнює $\dim_H S_{\mu_\xi} = \alpha_0$. Якщо рівняння $\sum\limits_{i \in V} q_i^x = 1$ не має коренів на $[0, 1]$, то

$$\dim_H S_{\mu_\xi} = \dim_H(C[Q_\infty, V]) = \lim_{k \to \infty} \dim_H(C[Q_\infty, V_k]),$$

де $C[Q_\infty,\{V_k\}] := \{x \in [0,1] : x = \Delta^{Q_\infty}_{i_1 i_2 \ldots i_k}, i_k \in V_k\}$, $V_k = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, $k \in N, k \geqslant 2$.

Легко бачити, що

$$\varphi(C[Q_\infty, V_k]) = C[I\text{-}Q_\infty, V_k], \forall k \in N, k \geqslant 2$$

і

$$\varphi(C[Q_\infty, V]) = C[I\text{-}Q_\infty, V].$$

Тому, якщо для фіксованого дійсного числа $I \in [0,1]$ і для фіксованого стохастичного вектора Q_∞ рівняння $\sum\limits_{i \in V} q_i^x = 1$ має корінь α_0 на $[0,1]$, то $\dim_H S_{\mu_\xi} = \alpha_0$. У випадку, якщо рівняння $\sum\limits_{i \in V} q_i^x = 1$ не має коренів на $[0,1]$, маємо

$$\dim_H S_{\mu_\xi} = \dim_H(C[I\text{-}Q_\infty, V]) = \lim_{k \to \infty} \dim_H(C[I\text{-}Q_\infty, V_k]),$$

де $V_k = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, $k \in N, k \geqslant 2$. $\square$

Теорема 2.7.2. *Нехай сімейство $\Phi(Q_\infty)$ циліндрів Q_∞-зображення є довірчими для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича.*

Якщо

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sum\limits_{i=0}^{\infty} p_{ij} \ln^2 p_{ij}}{j^2} < \infty, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sum\limits_{i=0}^{\infty} p_{ij} \ln^2 q_i}{j^2} < \infty, \tag{2.18}$$

то при довільному виборі дійсного числа $I \in [0,1]$ розмірність Хаусдорфа міри μ_ξ з незалежними I-Q_∞-символами дорівнює

$$\dim_H \mu_\xi = \varliminf_{n \to \infty} \frac{H_n}{B_n}, \tag{2.19}$$

де

$$H_n = \sum_{j=1}^{n} h_j, \qquad B_n = \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

$$h_j = -\sum_{i=0}^{\infty} p_{ij} \ln p_{ij}, \quad b_j = -\sum_{i=0}^{\infty} p_{ij} \ln q_i.$$

Доведення. В роботі [188] доведено, що якщо система $\Phi(Q_\infty)$ циліндричних відрізків Q_∞-розкладу є довірчою і виконуються умови (2.18), то розмірність Хаусдорфа ймовірнісної міри з незалежними Q_∞-символами обчислюється за формулою: $\dim_H \mu_\xi = \varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{H_n}{B_n}$.

Оскільки відображення φ зберігає розмірність Хаусдорфа-Безиковича довільної множини, то φ зберігає розмірність кожного носія міри з незалежними Q_∞-символами. Оскільки розподіли символів для Q_∞- та I-Q_∞-символів співпадають (за побудовою), то образом довільного носія (не обов'язково замкненого) першої міри є носій іншої міри. Тому відображення φ зберігає також розмірність Хаусдорфа міри. □

Зауваження 8. Отримані результати стосовно збереження міри Лебега та розмірності Хаусдорфа–Безиковича відображенням φ дозволяють досить просто отримати метричну та розмірнісну класифікацію дійсних чисел за асимптотичною поведінкою частот символів у їх I-Q_∞-зображенні, що природно узагальнює результати роботи [16].

З леми 2.6.3 випливає, що для λ-майже всіх дійсних чисел з одиничного відрізка символ «i» зустрічається з асимптотичною частотою q_i. Тому множину

$$N(I\text{-}Q_\infty) = \left\{ x: \lim_{k\to\infty} \frac{N_i(x,k)}{k} = q_i, \ \forall\ i \right\}$$

природно назвати множиною I-Q_∞-нормальних чисел.

Нехай $\bar{D} = \bar{D}(I)$ — множина точок одиничного відрізка, які не мають I-Q_∞-зображення. Одиничний відрізок можна розкласти таким чином:

$$[0,1] = E(I\text{-}Q_\infty) \bigcup D(I\text{-}Q_\infty) \bigcup \bar{D},$$

де $E(I\text{-}Q_\infty) = \{x: \ \nu_i(x) \text{ існує}, \forall\, i\}$ і $D(I\text{-}Q_\infty) = \{x : \exists\, i, \ \lim\limits_{k\to\infty} \frac{N_i(x,k)}{k} \text{ не існує}\}$.

Множина $D(I\text{-}Q_\infty)$ називається множиною I-Q_∞-анормальних дійсних чисел.

Множина $W(I\text{-}Q_\infty) = \{x: \ (\forall\ i): \ \ \nu_i(x) \ \text{ існує, і } \ (\exists j): \nu_j(x) \neq q_j\}$ називається множиною I-Q_∞-квазінормальних чисел.

Множина $L(I\text{-}Q_\infty) = \{x : \ (\forall\ i)\ \ \lim\limits_{k\to\infty}\frac{N_i(x,k)}{k}$ не існує$\}$ називається множиною $I\text{-}Q_\infty$-суттєво анормальних чисел.

Множина $P(I\text{-}Q_\infty) = \{x : \ (\exists\ i) : \ \lim\limits_{k\to\infty}\frac{N_i(x,k)}{k}$ не існує, і $(\exists j)$: $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{N_j(x,k)}{k}$ існує$\}$ називається множиною $I\text{-}Q_\infty$-частково анормальних чисел.

Очевидно, що множини $W(I\text{-}Q_\infty), P(I\text{-}Q_\infty)$ та $L(I\text{-}Q_\infty)$ є малими з точки зору міри Лебега. Суперфрактальність вказаних вище множин випливає з факту збереження розмірності Хаусдорфа-Безиковича відображенням φ та результатів роботи [16].

Дослідимо топологічні властивості даних множин.

Теорема 2.7.3. *Множина $L(I\text{-}Q_\infty)$ $I\text{-}Q_\infty$-суттєво анормальних чисел є множиною другої категорії Бера.*

Доведення. Розглянемо послідовність множин $\{C_n\}$:

$$C_n = \{x : \ \ x = \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2^n}\underbrace{0\ldots0}_{2^n}\underbrace{1\ldots1}_{2^{n-1}}\ldots\underbrace{i\ldots i}_{2^{n-i}}\ldots n\beta_1\beta_2\beta_3\ldots}\},$$

де α_i і β_i — довільні цифри з $N_0 = \{0, 1, \ldots, k, \ldots\}$.

Зафіксуємо цифру $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ і нехай

$$k'_n(i) = 3\cdot 2^n - 2^{n+1-i}, \ \ k''_n(i) = k'_n(i) + 2^{n-i} = 3\cdot 2^n - 2^{n-i},$$

тобто $k'_n(i)$ — номер, на якому закінчується серія цифри $i-1$, $k''_n(i)$ — номер, на якому починається серія цифри i.

Позначимо через $j_n(x, i)$ кількість цифр i серед цифр послідовності $\alpha_k(x), k \in \{0, 1, \ldots, 2^n\}$.

Тоді для довільного $x \in C_n$ і довільної цифри $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$:

$$\frac{N_i\left(x, k'_n(i)\right)}{k'_n(i)} = \frac{j_n(x,i)}{3\cdot 2^n - 2^{n+1-i}}, \ \ \frac{N_i\left(x, k''_n(i)\right)}{k''_n(i)} = \frac{j_n(x,i) + 2^{n-i}}{3\cdot 2^n - 2^{n-i}}.$$

Оцінимо різницю

$$\frac{N_i\left(x, k''_n(i)\right)}{k''_n(i)} - \frac{N_i\left(x, k'_n(i)\right)}{k'_n(i)}.$$

Нехай $0 \leqslant s < p$ і z — деяке число з множини N_0. Розглянемо функцію

$$\phi(s) := \frac{s+z}{p+z} - \frac{s}{p} = \frac{z(p-s)}{p(p+z)}.$$

Легко бачити, що

$$\max_{0 \leqslant s < p} \phi(s) = \phi(0) = \frac{zp}{p(p+z)}.$$

Тоді

$$\phi(j_n(x,i)) = \frac{j_n(x,i) + 2^{n-i}}{k''_n(i)} - \frac{j_n(x,i)}{k'_n(i)} = \frac{j_n(x,i) + 2^{n-i}}{k'_n(i) + 2^{n-i}} - \frac{j_n(x,i)}{k'_n(i)}.$$

Очевидно, що

$$\max \phi(j_n(x,i)) = \phi(0), \quad \min \phi(j_n(x,i)) = \phi(2^n).$$

Якщо $j_n(x,i) = 2^n$, то

$$\frac{N_i\left(x, k''_n(i)\right)}{k''_n(i)} - \frac{N_i\left(x, k'_n(i)\right)}{k'_n(i)} \geqslant \frac{2^n + 2^{n-i}}{3 \cdot 2^n - 2^{n+1-i} + 2^{n-i}} - \frac{2^n}{3 \cdot 2^n - 2^{n+1-i}} =$$

$$= \frac{2^i + 1}{3 \cdot 2^i - 1} - \frac{2^i}{3 \cdot 2^i - 2} = \frac{(2^i+1)(3 \cdot 2^i - 2) - 2^i(3 \cdot 2^i - 1)}{(3 \cdot 2^i - 1)(3 \cdot 2^i - 2)} =$$

$$= \frac{2(2^i - 1)}{(3 \cdot 2^i - 1)(3 \cdot 2^i - 2)} =: \psi(i).$$

Таким чином,

$$\frac{N_i\left(x, k''_n(i)\right)}{k''_n(i)} - \frac{N_i\left(x, k'_n(i)\right)}{k'_n(i)} \geqslant \psi(i).$$

Якщо $i = 0$, то покладемо $k'_n(i) = 2 \cdot 2^n$ і $k''_n(i) = 2 \cdot 2^n + 2^n - 1$. В цьому випадку $N_i(x, k'_n(i)) = N_i(x, k''_n(i)) = 2^n + j_n(x,i)$.

Тоді

$$\left| \frac{N_i\left(x, k''_n(i)\right)}{k''_n(i)} - \frac{N_i\left(x, k'_n(i)\right)}{k'_n(i)} \right| = \left| \frac{j_n(x,i) + 2^n}{3 \cdot 2^n - 1} - \frac{j_n(x,i) + 2^n}{2 \cdot 2^n} \right| =$$

$$= (j_n(x,i) + 2^n) \cdot \frac{3 \cdot 2^n - 1 - 2 \cdot 2^n}{2 \cdot 2^n \cdot (3 \cdot 2^n - 1)} = \frac{(2^n + j_n(x,i)) \cdot (2^n - 1)}{(3 \cdot 2^n - 1) \cdot 2^{n+1}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2^n(2^n-1)}{2\cdot 2^n\cdot(3\cdot 2^n-1)} = \frac{2^n-1}{2\cdot(3\cdot 2^n-1)} \geqslant \frac{1}{12}.$$

Внутрішність множини C_n позначимо як I_n, вона складається з континуальної кількості відкритих I-Q_∞-інтервалів рангу $3\cdot 2^n-1$. Якщо $x\in I_n$, то для довільної цифри $i\in\{0,1,\dots,n\}$:

$$\left|\frac{N_i\left(x,k''_n(i)\right)}{k''_n(i)} - \frac{N_i\left(x,k'_n(i)\right)}{k'_n(i)}\right| \geqslant \psi(i) \quad (\textit{при } \ i>0)$$

і

$$\left|\frac{N_i\left(x,k''_n(i)\right)}{k''_n(i)} - \frac{N_i\left(x,k'_n(i)\right)}{k'_n(i)}\right| \geqslant \frac{1}{12} \quad (\textit{при } \ i=0).$$

Нехай $D_n=\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} I_k$ і $F=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D_n$. Оскільки всі множини I_n є відкритими, то і множини D_n — відкриті, а, отже, F є G_δ-множиною.

Так як для $x\in C_n$ цифри $\alpha_k(x),\ k\in\{1,2,\dots,2^n\}$ можуть бути вибрані довільним чином і незалежно, то F — всюди щільна в $[0,1]$.

Якщо $x\in F$, то $x\in D_n$, $\forall\ n\in N$. Таким чином, існує зростаюча послідовність $\{n_m\}$ така, що $x\in I_{n_m}$ для всіх $m\in N$. Для довільного фіксованого $i_0\in N_0$ існує $m_0\in N$ таке, що $n_m>i_0$, $\forall\ m>m_0$. Отже, для довільного фіксованого $x\in F$ і для довільного $i\in N_0$ можна обрати дві послідовності $k'_{n_m}(i)$ і $k''_{n_m}(i)$ $m>m_0$ такі, що

$$\left|\frac{N_i\left(x,k''_{n_m}(i)\right)}{k''_{n_m}(i)} - \frac{N_i\left(x,k'_{n_m}(i)\right)}{k'_{n_m}(i)}\right| \not\to 0 \ (m\to\infty).$$

Отже, $F\subset L(I\text{-}Q_\infty)$. Оскільки F є всюди щільною G_δ-множиною в $[0,1]$, то $L(I\text{-}Q_\infty)$ — залишкова множина, а, отже, множина другої категорії Бера.

□

Наслідок 2.7.1. *Оскільки $L(I\text{-}Q_\infty)$ — залишкова множина, то множини $N(I\text{-}Q_\infty)$, $W(I\text{-}Q_\infty)$, $P(I\text{-}Q_\infty)$ є множинами першої категорії Бера.*

Теорема 2.7.4. *Метричні, фрактальні та топологічні властивості множин $N(I\text{-}Q_\infty)$, $W(I\text{-}Q_\infty)$, $P(I\text{-}Q_\infty)$ та $L(I\text{-}Q_\infty)$ характеризує наступна таблиця:*

	Міра Лебега	*Розмірність Хаусдорфа-Безиковича*	*Категорія Бера*
$N(I\text{-}Q_\infty)$	*1*	*1*	*перша*
$W(I\text{-}Q_\infty)$	*0*	*1*	*перша*
$P(I\text{-}Q_\infty)$	*0*	*1*	*перша*
$L(I\text{-}Q_\infty)$	*0*	*1*	*друга*

2.8. I-F-розклади дійсних чисел та фрактальна довірчість породжених сімейств покриттів

Нехай $t \in [0,1]$, $\Delta^{\tilde{Q}}_{i_1(t)i_2(t)\ldots i_k(t)\ldots}$ — $\tilde{Q}$-зображення числа t, $\Delta^{\tilde{Q}}_{i_1(t)i_2(t)\ldots i_k(t)}$ — $\tilde{Q}$-циліндр k-го рангу, що містить точку t (див. [216] для огляду властивостей $\tilde{Q}$-зображення). Розглянемо функцію $y = F(t)$, яка володіє наступними властивостями:

1)$F(0) = 0, F(1) = 1$;

2) $F(t)$ — неперервна і строго зростаюча на $[0,1]$.

Нехай $N_k = \{0, 1, ..., n_k\}$, $0 < n_k \leqslant +\infty$ і $\Delta^F_{i_1 i_2 \ldots i_k} := F(\Delta^{\tilde{Q}}_{i_1 i_2 \ldots i_k})$. Множину $\Delta^F_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ назвемо F-циліндром k-го рангу з основою $(i_1 i_2 \ldots i_k)$. Оскільки $y = F(t)$ є неперервною і строго зростаючою, то F-циліндри мають наступні властивості:

1. $\Delta^F_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} = \bigcup\limits_{i_k \in N_k} \Delta^F_{i_1 i_2 \ldots i_k}$;
2. $\Delta^F_{i_1} \supset \Delta^F_{i_1 i_2} \supset ... \supset \Delta^F_{i_1 i_2 \ldots i_n} \supset ...$;
3. $|\Delta^F_{i_1 i_2 \ldots i_k}| \to 0$, при $k \to \infty$.

Очевидно, що для довільної послідовності індексів $\{i_k\}, i_k \in N_k$ існує послідовність вкладених циліндрів $\Delta^F_{i_1} \supset \Delta^F_{i_1 i_2} \supset ... \supset \Delta^F_{i_1 i_2 \ldots i_n} \supset ...$, які стягуються в деяку точку з $[0,1]$.

І навпаки, для довільного $x \in [0,1)$ існує послідовність вкладених циліндрів

$$\Delta^F_{i_1(x)} \supset \Delta^F_{i_1(x)i_2(x)} \supset ... \supset \Delta^F_{i_1(x)i_2(x)...i_k(x)} \supset ...,$$

які містять x і при цьому

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta^F_{i_1(x)i_2(x)...i_k(x)} =: \Delta^F_{i_1(x)i_2(x)...i_k(x)...}.$$

Останній вираз називатимемо F-розкладом дійсного числа x.

Розглянемо інший (еквівалентний) підхід до означення F-розкладу. Нехай $\{N_k\}$ — послідовність алфавітів, де $N_k = \{0, 1, \ldots, n_k\}, 0 < n_k \leqslant \infty$. При фіксованій послідовності алфавітів $\{N_k\}$ здійснюється зчисленна послідовність розбиттів одиничного відрізка за наступними правилами.

Крок 1. Розбиваємо одиничний відрізок зліва направо на не більш ніж зчисленну кількість відрізків $\Delta^F_{i_1}$, $i_1 \in N_1$, довжини яких дорівнюють $\left|\Delta^F_{i_1}\right| = q_{i_1}, i_1 \in N_1$. Кожен з відрізків $\Delta^F_{i_1}$ називається циліндром 1-го рангу F-розкладу.

Крок k $(k > 1)$**.** Кожен з циліндрів $(k-1)$-рангу $\Delta^F_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}$ розбиваємо зліва направо на не більш ніж зчисленну кількість відрізків $\Delta^F_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, довжини яких задовольняють умови

$$\frac{\left|\Delta^F_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} i_k}\right|}{\left|\Delta^F_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}\right|} = q^{(i_1,\ldots,i_{k-1})}_{i_k}, \sum_{i_k \in N_k} q^{(i_1,\ldots,i_{k-1})}_{i_k} = 1, \forall (i_1, \ldots, i_{k-1}) \in N_1 \times \ldots \times N_{k-1}.$$

Кожен з відрізків $\Delta^F_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ називається циліндром k-го рангу F-розкладу.

Накладемо додаткову умову: для довільної послідовності індексів $\{i_k\}$, $i_k \in N_k$ нескінченний добуток $\prod\limits_{j=1}^{\infty} q^{(i_1,\ldots,i_{j-1})}_{i_j}$ розбігається до нуля. Тоді для довільної послідовності індексів $\{i_k\}$, $i_k \in N_k$, існує послідовність вкладених циліндрів

$$\Delta^F_{i_1} \supset \Delta^F_{i_1 i_2} \supset \ldots \supset \Delta^F_{i_1 i_2 \ldots i_k} \supset \ldots,$$

таких, що $|\Delta^F_{i_1 i_2 \ldots i_k}| \to 0$, $k \to \infty$. Тому існує єдина точка x, яка належить всім цим циліндрам $\Delta^F_{i_1}$, $\Delta^F_{i_1 i_2}$, $\ldots$, $\Delta^F_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, $\ldots$.

І навпаки, для кожної точки $x \in [0, 1)$ існує послідовність вкладених циліндрів

$$\Delta^F_{i_1(x)} \supset \Delta^F_{i_1(x)i_2(x)} \supset ... \supset \Delta^F_{i_1(x)i_2(x)...i_k(x)} \supset ...,$$

які містять x, і при цьому

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta^F_{i_1(x)i_2(x)...i_k(x)} =: \Delta^F_{i_1(x)i_2(x)...i_k(x)...}.$$

Очевидно, що при фіксованому $\widetilde{Q}$-розкладі між множиною неперервних строго зростаючих на $[0, 1]$ функцій F, які задовольняють умову $F(0) = 0, F(1) = 1$, та множиною F-розкладів дійсних чисел існує бієкція (кожна функція F із вказаними властивостями однозначно визначає систему F-циліндрів всіх рангів як F-образів циліндрів $\widetilde{Q}$-розкладу; і навпаки, описана система F-циліндрів визначає значення неперервної функції F на всюди щільній множині точок, які є межовими точками $\widetilde{Q}$-циліндрів, а, отже, повністю визначає F).

Природнім узагальненням F-розкладу є I-F-розклад дійсних чисел, який отримується за наступним алгоритмом. Нехай I — довільне дійсне число з одиничного відрізка, записане у двійковій системі числення

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k(I)}{2^k} =: 0, \beta_1(I)\beta_2(I)...\beta_k(I)..., \quad \beta_k(I) \in \{0, 1\}.$$

Для тих чисел, які мають по два різні двійкові розклади, зафіксуємо той, який має цифру 1 в періоді. Нехай $\{N_k\}$ — послідовність алфавітів, де $N_k = \{0, 1, \ldots, n_k\}, 0 < n_k \leqslant \infty$. При фіксованому дійсному числі $I \in [0, 1]$ (тобто при фіксованій послідовності $\{\beta_k(I)\}$) та фіксованій послідовності алфавітів $\{N_k\}$ здійснюється зчисленна послідовність розбиттів одиничного відрізка за наступними правилами.

Крок 1. Розбиваємо одиничний відрізок зліва направо, якщо $\beta_1(I) = 1$ (справа наліво, якщо $\beta_1(I) = 0$) на не більш як зліченну кількість відрізків

$\Delta^{I\text{-}F}_{i_1}$, $i_1 \in N_1$, довжини яких дорівнюють $\left|\Delta^{I\text{-}F}_{i_1}\right| = q_{i_1}, i_1 \in N_1$. Кожен з відрізків $\Delta^{I\text{-}F}_{i_1}$ називається циліндром 1-го рангу I-F-розкладу.

Крок k $(k>1)$**.** Кожен з циліндрів $(k-1)$-рангу $\Delta^{I\text{-}F}_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}$ розбиваємо зліва направо, якщо $\beta_k(I) = 1$ (справа наліво, якщо $\beta_k(I) = 0$) на не більш як зліченну кількість відрізків $\Delta^{I\text{-}F}_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, довжини яких задовольняють умови

$$\frac{\left|\Delta^{I\text{-}F}_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} i_k}\right|}{\left|\Delta^{I\text{-}F}_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}\right|} = q^{(i_1,\ldots,i_{k-1})}_{i_k}, \sum_{i_k \in N_k} q^{(i_1,\ldots,i_{k-1})}_{i_k} = 1, \forall (i_1,\ldots,i_{k-1}) \in N_1 \times \ldots \times N_{k-1}.$$

Кожен з відрізків $\Delta^{I\text{-}F}_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ називається циліндром k-го рангу I-F-розкладу (I-F-циліндром).

Для довільної послідовності індексів $\{i_k\}$, $i_k \in N_k$, існує послідовність вкладених циліндрів

$$\Delta^{I\text{-}F}_{i_1} \supset \Delta^{I\text{-}F}_{i_1 i_2} \supset \ldots \supset \Delta^{I\text{-}F}_{i_1 i_2 \ldots i_k} \supset \ldots,$$

таких, що $\forall (i_1, i_2, \ldots i_k, \ldots) : |\Delta^{I\text{-}F}_{i_1 i_2 \ldots i_k}| \to 0,\ k \to \infty$.

Тому існує єдина точка x, яка належить всім цим циліндрам $\Delta^{I\text{-}F}_{i_1}$, $\Delta^{I\text{-}F}_{i_1 i_2}$, ..., $\Delta^{I\text{-}F}_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, ...

І навпаки, для кожної точки $x \in (0,1)$, яка не є межовою для жодного циліндра жодного рангу, існує єдина (оскільки кожна така точка належить рівно одному циліндру n-го рангу) послідовність вкладених циліндрів

$$\Delta^{I\text{-}F}_{i_1(x)} \supset \Delta^{I\text{-}F}_{i_1(x) i_2(x)} \supset \ldots \supset \Delta^{I\text{-}F}_{i_1(x) i_2(x) \ldots i_k(x)} \supset \ldots,$$

які містять x, тобто

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta^{I\text{-}F}_{i_1(x) i_2(x) \ldots i_k(x)} =: \Delta^{I\text{-}F}_{i_1(x) i_2(x) \ldots i_k(x) \ldots}.$$

Останній вираз називатимемо I-F-зображенням (розкладом) дійсного числа x.

Зауваження 9. Очевидно, що F-розклад отримується з I-F-розкладу шляхом вибору $I = 1$. Ланцюгові розклади, Q^*-розклади ([6, 7]), Q_∞-розклади ([8,9]), розклади Люрота ([3,4]), Сільвестера ([10]), Остроградського–Серпінського–Пірса ([5, 11]), Енгеля ([12, 13]) є частковими випадками I-F-розкладів.

Нехай $D = D(I)$ — множина точок одиничного відрізка, які мають I-F-зображення,

$$D = \{x : \ x \in [0, 1], \quad \forall n \in N \ \exists \Delta^{I\text{-}F}_{\alpha_1(x)\dots\alpha_n(x)} : \quad x \in \Delta_{\alpha_1(x)\dots\alpha_n(x)}\}.$$

Очевидно, що дійсне число x не має I-F-зображення тоді і тільки тоді, коли знайдеться таке число $n_0 = n_0(x)$, що x не належить до жодного з циліндрів рангу n_0.

Теорема 2.8.1. *Нехай* $x = \Delta^{I\text{-}F}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_k(x)\dots}$ *— деяке I-F-зображення дійсних чисел над послідовністю алфавітів N_k. Нехай D — множина точок одиничного відрізка, які мають I-F-зображення. Нехай $\hat{\Phi} = \hat{\Phi}(I\text{-}F)$ — сімейство множин, які є об'єднанням суміжних I-F-циліндрів одного рангу, що належать одному і тому ж I-F-циліндру попереднього рангу.*

Якщо існує константа $c \geqslant 1$ така, що

$$\frac{1}{c} \leqslant \frac{|\Delta^{I\text{-}F}_{\alpha_1\dots\alpha_k m}|}{|\Delta^{I\text{-}F}_{\alpha_1\dots\alpha_k(m+1)}|} \leqslant c, \forall k \in N, m \in N_{k+1}, (m+1) \in N_{k+1},$$

то $\hat{\Phi}(I\text{-}F)$ — довірче для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на множині D. Більше того $\hat{\Phi}(I\text{-}F)$ є порівнянним і

$$H^\alpha(E) \leqslant H^\alpha(E, \hat{\Phi}(I\text{-}F)) \leqslant 4c \cdot H^\alpha(E), \forall E \subset D.$$

Доведення. Нехай E — довільна підмножина множини D. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ та $\alpha > 0$. Нехай $\{E_j\}$ — довільне ε-покриття множини E, $E_j = (a_j, b_j)$, $a_j \in B$, $b_j \in B$, $|E_j| \leqslant \varepsilon$, де B — множина всіх I-F-ірраціональних точок, тобто точок, які не є межовими для жодного циліндра жодного рангу I-F-зображення.

Для множини E_j існує єдиний циліндр $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_j}}$, який повністю містить E_j, але будь-який циліндр більшого рангу не містить E_j. У тому випадку, коли a_j та b_j належать двом різним циліндрам першого рангу, в якості циліндра $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_j}}$ виберемо $[0,1]$, вважаючи його циліндром нульового рангу.

Нехай $I = 0,\beta_1(I)\beta_2(I)\ldots\beta_k(I)\ldots$. Розіб'ємо циліндр $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_j}}$ на циліндри (n_j+1)-го рангу. Не порушуючи загальності, вважатимемо $\beta_{n_j+1}(I) = 1$, тобто на (n_j+1)-му кроці розбиття кожного з циліндрів n_j-го рангу здійснюватиметься зліва направо.

Нехай M_0 — об'єднання циліндрів (n_j+1)-го рангу, які повністю містяться в (a_j, b_j).

Якщо $c_j := \sup \Delta_{\alpha_1(a_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(a_j)}$ співпадає з $d_j := \inf \Delta_{\alpha_1(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)}$, то $M_0 = \varnothing$.

I. Нехай $M_0 \neq \varnothing$, очевидно, що $M_0 \in \hat{\Phi}$ і $|M_0| \leqslant |E_j|$.

Тоді E_j можна покрити трьома множинами: M_0, циліндром (n_j+1)-го рангу $L_j := \Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(a_j)}$ та циліндром (n_j+1)-го рангу $R_j := \Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)}$, причому $|M_0| \leqslant |E_j|$, $|L_j| \leqslant c\cdot|E_j|$, $|R_j| \leqslant c\cdot|E_j|$.

II. Нехай $M_0 = \varnothing$.

Розіб'ємо циліндри $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(a_j)}$ та $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)}$ на циліндри наступних рангів.

Незалежно від того, розбиття здійснюватиметься зліва направо чи справа наліво, знайдуться такі k і s, що (a_j, c_j) може бути покритим за допомогою циліндра (n_j+k)-го рангу

$$L_j := \Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+k}(a_j)}$$

та множини M_k, що є об'єднанням циліндрів (n_j+k)-го рангу, які повністю містяться в

$$\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+k-1}(a_j)} \cap E_j,$$

причому $M_k \in \hat{\Phi}$ і $|M_k| \leqslant |E_j|$,$|L_j| \leqslant c \cdot |E_j|$, а (c_j, b_j) може бути покритим за допомогою циліндра (n_j+s)-го рангу $R_j := \Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+s}(b_j)}$ та множини M_s, що є об'єднанням циліндрів $(n_j + s)$-го рангу, які повністю містяться в $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+s-1}(b_j)} \cap E_j$, причому $M_s \in \hat{\Phi}$ і $|M_s| \leqslant |E_j|$, $|R_j| \leqslant c \cdot |E_j|$.

Отже, E_j можна покрити за допомогою не більш як чотирьох множин: M_k — об'єднання циліндрів $(n_j + k)$-го рангу, які повністю містяться в множині

$\Delta_{\alpha_1(a_j)\ldots\alpha_{n_j+k-1}(a_j)} \cap E_j$, M_s — об'єднання циліндрів $(n_j + s)$-го рангу, які повністю містяться в $\Delta_{\alpha_1(b_j)\ldots\alpha_{n_j+s-1}(b_j)} \cap E_j$, циліндра (n_j+k)-го рангу $L_j := \Delta_{\alpha_1(a_j)\ldots\alpha_{n_j+k}(a_j)}$ та циліндра (n_j+s)-го рангу $R_j := \Delta_{\alpha_1(b_j)\ldots\alpha_{n_j+s}(b_j)}$, діаметри яких не перевищують величини $c \cdot |E_j|$.

Таким чином, для довільного $\alpha > 0$ і довільної множини $E \subset D$ маємо:

$$H^\alpha(E) \leqslant H^\alpha(E, \hat{\Phi}(I\text{-}F)) \leqslant 4c \cdot H^\alpha(E).$$

Отже,

$$\dim_H(E, \hat{\Phi}(I\text{-}F)) = \dim_H(E)$$

для довільної множини $E \subset D$. □

Оскільки F-розклад дійсних чисел отримується з I-F-розкладу шляхом вибору $I = 1$, то з доведеної теореми випливає наступне твердження.

Теорема 2.8.2. *Нехай $x = \Delta^F_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}$ — деякий F-розклад над послідовністю алфавітів $\{N_k\}$. Якщо існує константа $c \geqslant 1$ така, що*

$$\frac{1}{c} \leqslant \frac{|\Delta^F_{\alpha_1\ldots\alpha_k m}|}{|\Delta^F_{\alpha_1\ldots\alpha_k(m+1)}|} \leqslant c, \forall k \in \mathbb{N}, m \in N_{k+1}, (m+1) \in N_{k+1}, \tag{2.20}$$

то $\hat{\Phi}(F)$ — довірче для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на $[0, 1)$. Більше того, $\hat{\Phi}(F)$ є порівнянним і

$$H^\alpha(E) \leqslant H^\alpha(E, \hat{\Phi}(F)) \leqslant 4c \cdot H^\alpha(E), \forall E \subset [0, 1).$$

Наслідок 2.8.1. *Для розкладів Люрота справедливе метричне відношення (див., наприклад, [217]):*

$$\frac{|\Delta^L_{c_1\ldots c_m i}|}{|\Delta^L_{c_1\ldots c_m}|} = \frac{1}{i(i+1)}.$$

Тому

$$\frac{|\Delta^L_{c_1\ldots c_m(s+1)}|}{|\Delta^L_{c_1\ldots c_m s}|} = \frac{s}{s+2}.$$

Очевидно, що $\frac{1}{3} \leqslant \frac{s}{s+2} \leqslant 1$. *Тому в якості константи c теореми 2.8.1 можна взяти* $c = 3$.

Отже, сімейство $\hat{\Phi}(L)$ *є порівнянним, а отже, довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку.*

Наслідок 2.8.2. *Для розкладів Остроградського–Серпінського–Пірса справедливе наступне метричне відношення (див., наприклад, [12]):*

$$\frac{|\Delta^{OSP}_{c_1c_2\ldots c_m s}|}{|\Delta^{OSP}_{c_1c_2\ldots c_m}|} = \frac{\sigma_m + 1}{(\sigma_m + s)(\sigma_m + s + 1)}, \quad \text{де} \ \ \sigma_m = c_1 + c_2 + \ldots + c_m.$$

Тому

$$\frac{|\Delta^{OSP}_{c_1c_2\ldots c_m(s+1)}|}{|\Delta^{OSP}_{c_1c_2\ldots c_m s}|} = \frac{\sigma_m + s}{\sigma_m + s + 2}, \quad \text{де} \ \ \sigma_m = c_1 + c_2 + \ldots + c_m.$$

Очевидно, що $\frac{1}{3} \leqslant \frac{1+c+\sigma_m}{3+c+\sigma_m} \leqslant 1$. *В якості константи c теореми 2.8.1 можна взяти* $c = 3$. *Таким чином, сімейство* $\hat{\Phi}(OSP)$ *є порівнянним, а отже, довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку.*

Наслідок 2.8.3. *Для розкладів Остроградського 2-го роду справедливе наступне метричне відношення (див., наприклад, [218]):*

$$\frac{|\Delta^{O_2}_{c_1c_2\ldots c_n c_{n+1}}|}{|\Delta^{O_2}_{c_1c_2\ldots c_n}|} = \frac{c_n(c_n + 1)}{c_{n+1}(c_{n+1} + 1)}.$$

Тому

$$\frac{|\Delta^{O_2}_{c_1c_2\ldots c_m(s+1)}|}{|\Delta^{O_2}_{c_1c_2\ldots c_m s}|} = \frac{s}{s+2}.$$

Очевидно, що $\frac{1}{3} \leqslant \frac{s}{s+2} \leqslant 1$. *Тому в якості константи c теореми 2.8.1 можна взяти* $c = 3$. *Таким чином, сімейство* $\hat{\Phi}(O_2)$ *є порівнянним, а отже, довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку.*

Наслідок 2.8.4. *Для розкладів Енгеля справедливе наступне метричне відношення (див., наприклад, [13]):*

$$\frac{|\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m s}|}{|\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m}|} = \frac{\sigma_m + 1}{(\sigma_m + s)(\sigma_m + s + 1)}, \quad \text{де} \;\; \sigma_m = c_1 + c_2 + \ldots + c_m.$$

Тому

$$\frac{|\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m(s+1)}|}{|\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m s}|} = \frac{\sigma_m + s}{\sigma_m + s + 2}, \quad \text{де} \;\; \sigma_m = c_1 + c_2 + \ldots + c_m.$$

Очевидно, що $\frac{1}{3} \leqslant \frac{1+s+\sigma_m}{3+s+\sigma_m} \leqslant 1$. *Тому в якості константи c теореми 2.8.1 можна взяти* $c = 3$. *Таким чином, сімейство* $\hat{\Phi}(E)$ *є порівнянним, а отже, довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку.*

Наслідок 2.8.5. *Для розкладів Сільвестера справедливе наступне метричне відношення (див., наприклад, [10]):*

$$\frac{|\Delta^S_{g_1g_2\ldots g_n i)}|}{|\Delta^S_{g_1g_2\ldots g_n s}|} = \frac{q_n(q_n - 1)}{(q_n(q_n - 1) + i)(q_n(q_n - 1) + i - 1)},$$

де $q_1 = g_1 + 1, q_{k+1} = g_{k+1} + q_k(q_k - 1), 1 < k \leqslant m$.

Тому

$$\frac{|\Delta^S_{g_1g_2\ldots g_m(s+1)}|}{|\Delta^S_{g_1g_2\ldots g_m s}|} = \frac{q_m(q_m - 1) + s - 1}{q_m(q_m - 1) + s + 1},$$

де $q_1 = g_1 + 1, q_{k+1} = g_{k+1} + q_k(q_k - 1), 1 < k \leqslant m$. *Очевидно, що* $\frac{1}{2} \leqslant \frac{q_m(q_m-1)+s-1}{q_m(q_m-1)+s+1} \leqslant 1$. *А тому в якості константи c теореми 2.8.1 можна взяти* $c = 2$. *Таким чином, сімейство* $\hat{\Phi}(S)$ *є порівнянним, а отже, довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку.*

Наслідок 2.8.6. *Для розкладів ланцюговими дробами справедливе наступне метричне відношення (див., наприклад, [12]):*

$$\frac{|\Delta^{c.f.}_{c_1c_2\ldots c_m s}|}{|\Delta^{c.f.}_{c_1c_2\ldots c_m}|} = \frac{1}{s^2}\cdot\frac{1+\frac{Q_{m-1}}{Q_m}}{\left(1+\frac{Q_{m-1}}{sQ_m}\right)\left(1+\frac{1}{s}+\frac{Q_{m-1}}{sQ_m}\right)},$$

де Q_m — знаменник підхідного дробу порядку m ланцюгового дробу.

Тому

$$\frac{|\Delta^{c.f.}_{c_1c_2\ldots c_m(s+1)}|}{|\Delta^{c.f.}_{c_1c_2\ldots c_m s}|} = \frac{s\cdot Q_m+Q_{m-1}}{(s+2)\cdot Q_m+Q_{m-1}},$$

де Q_m — знаменник підхідного дробу порядку m ланцюгового дробу.

Очевидно, що $\frac{1}{2}\leqslant\frac{s\cdot Q_m+Q_{m-1}}{(s+2)\cdot Q_m+Q_{m-1}}\leqslant 1$. Тому в якості константи c теореми 2.8.1 можна взяти $c=2$. Таким чином, $\hat{\Phi}(C)$ є порівнянним, а отже, довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку.

РОЗДІЛ 3
ПРО ЙМОВІРНІСНИЙ ПІДХІД ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ФРАКТАЛЬНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ПІДМНОЖИН СУТТЄВО АНОРМАЛЬНИХ ЧИСЕЛ

3.1. Загальна постановка проблеми

Застосування теорії сингулярно неперервних мір та фракталів до проблем метричної та розмірнісної теорії чисел інтенсивно розвивається протягом останніх 30 років (див., наприклад, [3,4,34,35,46,98–101,145,148,153, 219–231]).

Відома теорема Бореля (E.Borel, 1909) стверджує, що для класичного s-адичного зображення дійсних чисел для майже всіх $x \in [0,1]$ відносно міри Лебега і для будь-якої цифри i з алфавіту $A = \{0, 1, ..., s-1\}$ асимптотична частота $\nu_i(x)$ існує і дорівнює $\frac{1}{s}$, тобто,

$$\nu_i(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{N_i(x,k)}{k} = \frac{1}{s}, \qquad \forall i \in \{0, 1, \dots, s-1\}, \tag{3.1}$$

де $N_i(x, k)$ — кількість цифри «i» серед перших k цифр s-адичного зображення x, $i \in A$.

Множину $N(s) = \{x | (\forall i \in A) \quad \lim\limits_{k\to\infty} \frac{N_i(x,k)}{k} = \frac{1}{s}\}$ називають множиною *s-нормальних* чисел (або множиною дійсних чисел, які просто нормальні відносно основи s).

Одиничний відрізок $[0, 1]$ може бути представлений як

$$[0,1] = E(s) \bigcup D(s),$$

де

$$E(s) = \{x | \nu_i(x) \quad \textit{існує}, \forall i \in A\},$$

$$D(s) = \{x | \exists i \in A, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{N_i(x,k)}{k} \quad \text{не існує}\}.$$

Множину $D(s)$ називають множиною s-анормальних дійсних чисел. Кожна з цих множин може бути розкладена на підмножини наступним чином.

Множину

$$W(s) = \{x | (\forall i \in A): \quad \nu_i(x) \quad \text{існує}, \quad (\exists j \in A) : \nu_j(x) \neq \frac{1}{s}\}$$

називають множиною *s-квазінормальних* чисел. Очевидно, що

$$E(s) = W(s) \bigcup N(s), \quad W(s) \bigcap N(s) = \varnothing.$$

Множину

$$P(s) = \{x | (\exists i \in A): \quad \lim_{k\to\infty} \frac{N_i(x,k)}{k} \quad \text{не існує},$$

$$\text{і } (\exists j \in A): \quad \lim_{k\to\infty} \frac{N_j(x,k)}{k} \quad \text{існує}\}$$

називають множиною *s-частково анормальних* чисел.

Множину

$$L(s) = \{x | (\forall i \in A) \quad \lim_{k\to\infty} \frac{N_i(x,k)}{k} \quad \text{не існує}\}$$

називають множиною *s-суттєво анормальних* чисел.

Очевидно, що

$$D(s) = L(s) \bigcup P(s), \quad L(s) \bigcap T(s) = \varnothing.$$

Множини $N(s), W(s), P(s), L(s)$ є всюди щільними на $[0,1]$, оскільки частоти $\nu_i(x)$ не залежать від скінченної кількості перших s-адичних цифр числа x. Також зрозумілим є, що ці множини континуальні.

Фрактальні властивості підмножин множини $W(s)$ вивчалися A. Besicovitch і H. Eggleston ([90, 91]). Використовуючи їхні результати легко показати,

$$\dim_H W(s) = 1.$$

Властивості підмножин множини анормальних чисел інтенсивно вивчались останні роки з використанням різних підходів у роботах S. Albeverio, L. Barreira, Yu. Kondratiev, P. Нікіфорова, L. Olsen, M. Працьвитого, B. Saussol, J. Schmeling, N. Snigireva, Г. Торбіна, S. Winter та інших (див. [16, 21, 92–94, 98–102, 232–234] та посилання в них). Зокрема, цікаві підмножини множини $D(s)$ досліджувалися у [98] з використанням техніки та результатів теорії мультифрактальних дивергентних точок. У [102] було показано, що множина $D(s)$ є суперфрактальною (тобто $\dim_H D(s) = 1$). У роботах [92, 93] доведено, що множини $L(s)$ і $P(s)(s > 2)$ також мають розмірність Хаусдорфа–Безиковича рівною одиниці. Добре відомим є факт, що множина $L(s)$ є множиною другої категорії Бера (більше того, $L(s)$ містить всюди щільну G_δ-множину, [230, 235]). Тому множини $N(s), W(s), P(s)$ є множинами першої категорії Бера. З вище сказаного слідує, що суттєво анормальні числа є домінуючими як у топологічному розумінні, так і у розумінні фрактальної геометрії. Між тим множина $L(s)$ є малою у розумінні міри Лебега:

	Міра Лебега	$\dim_H(\cdot)$	Категорія Бера
$N(s)$	1	1	перша
$W(s)$	0	1	перша
$P(s)$ (для $s > 2$)	0	1	перша
$L(s)$	0	1	друга

При дослідженні фрактальних властивостей підмножин анормальних чисел у випадку Q_∞-зображення ([16]) не можна застосувати традиційні ймовірнісні методи та методи теорії динамічних систем з низки причин: потенційно можлива нескінченна ентропія стохастичного вектора Q_∞, який визначає метричні співвідношення розбиття; потенційна недовірчість системи циліндрів $\Phi(Q_\infty)$; відсутність загальної формули для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича навіть для ймовірнісної міри з незалежними однаково розподіленими символами узагальненого зображення Люрота. Також не можемо застосувати техніку дивергентних точок, оскільки вона не розроблена для мір, породжених нескінченними IFS. Не зважаючи на перелічені складнощі, у [16, 21] було розроблено новий підхід дослідження Q_∞-анормальних чисел і, зокрема, було доведено, що множина Q_∞-суттєво анормальних чисел має розмірність Хаусдорфа–Безиковича рівну одиниці (без будь-яких додаткових обмежень на стохастичний вектор Q_∞).

Нехай $\Omega_k = \{0, 1, 2, \ldots, s-1\}$ і

$$\Omega = \prod_{k=1}^{\infty} \Omega_k = \{\omega : \quad \omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k, \ldots),\ \omega_k \in \Omega_k\}.$$

Для довільного $\omega \in \Omega$ означимо

$$\nu_i(\omega) = \lim_{k\to\infty} \frac{N_i(\omega, k)}{k}$$

(якщо границя існує) і розглянемо множини:

$$E(\Omega) = \{\omega : \nu_i(\omega) \ \text{ існує } \ \forall i \in A = \{0, 1, \ldots, s-1\}\},$$

$$P(\Omega) = \{\omega : (\exists\ i \in A) : \nu_i(\omega) \ \text{ існує}, \quad (\exists\ j \in A) : \nu_j(\omega) \ \text{ не існує}\},$$

$$L(\Omega) = \{\omega : (\forall i \in A) : \nu_i(\omega) \ \text{ не існує}\}.$$

Оскільки на просторі Ω не введено ні метрики, ні міри, ні топології, то питання про метричні, топологічні чи фрактальні властивості множин $E(\Omega), P(\Omega), L(\Omega)$ не може бути вирішеним. З іншого боку, зрозуміло, що всі ці множини є континуальними.

Розглянемо тепер відображення $f : \Omega \to R^1$. Нехай $f(E), f(P), f(L)$ будуть образами $E(\Omega), P(\Omega), L(\Omega)$ при відображенні f. Властивості цих множин суттєво залежать від відображення f. Насправді, f породжує топологію та метрику на просторі Ω^*, який отриманий з простору Ω злиттям тих точок з Ω, які мають однакові f-образи.

Якщо, для прикладу, $f(\omega) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_k}{s^k}$, тоді $f(E) = E(s)$, $f(P) = P(s)$, $f(L) = L(s)$, і існує така підмножина $N(s) \subset E(s)$, що $\lambda(N(s)) = 1$ (де λ — міра Лебега на $[0,1]$.)

У [16] була сформульоване питання про залежність метричних, топологічних та фрактальних властивостей підмножин дійсних чисел від вибраного зображення f. Зокрема, було поставлено два питання:

«Суперфрактальність множини суттєво анормальних чисел була доведена для ряду різних зображень дійсних чисел (див., [16,21,92,93,98–102]). Тому природно запитати чи існує таке зображення f, що:

2.1. для відповідної множини $L(f)$ f-суттєво анормальних чисел розмірність Хаусдорфа–Безиковича не рівна одиниці;

2.2. вся множина $D(f)$ f-анормальних чисел має розмірність Хаусдорфа–Безиковича не рівну одиниці?»

У даному розділі буде дано відповіді на вище наведені запитання.

3.2. Ймовірнісний підхід до дослідження метричних та фрактальних властивостей підмножин Q-анормальних чисел

Нехай $N_i(x,n)$ — кількість цифр «i» серед перших n цифр Q-розкладу числа $x = \Delta^Q_{i_1(x)i_2(x)\ldots i_n(x)\ldots}$, $i \in A := \{0, 1, \ldots, (s-1)\}$.

Означення 3.2.1. Множина $N(Q) = \{x : \lim\limits_{n\to\infty} \frac{N_i(x,n)}{n} = q_i, \forall i \in A\}$ називається множиною нормальних чисел.

Теорема 3.2.1. *Множина $N(Q)$ нормальних чисел є множиною повної міри Лебега, тобто*

$$\lambda(N(Q)) = 1.$$

Покажемо, що для майже всіх в сенсі міри Лебега дійсних чисел та всіх

$i \in A$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{N_i(x,n)}{n} - q_i\right) = 0. \tag{3.2}$$

Доведення. Нехай $\Omega_k = \{0, 1, \ldots, s-1\}$, $\mathcal{A}_k = 2^{\Omega_k}$, $\nu_k(i) = q_i$, де числа q_i – елементи зафіксованої матриці $Q = \|q_i\|$.

Розглянемо нескінчений добуток ймовірнісних просторів

$$(\Omega, \mathcal{A}, \nu) = \prod_{k=1}^{\infty}(\Omega_k, \mathcal{A}_k, \nu_k)$$

і вимірне відображення $f : \Omega \to [0,1]$, задане як $f(\omega) = \Delta^Q_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_k\ldots}$ для довільного $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k, ...) \in \Omega$.

Циліндричні відрізки Q-розбиття є образами циліндрів з простору Ω при відображенні f, і породжують борелівську σ-алгебру на $[0,1]$. Тому відображення f і f^{-1} є вимірними.

Для довільної борелівської множини $E \subset [0,1]$ задамо образ-міру ν^* як

$$\nu^*(E) = \nu(f^{-1}(E)),$$

де $f^{-1}(E) = \{\omega : \ \omega \in \Omega, \ \ f(\omega) \in E\}$. Міра ν^* співпадає з мірою Лебега λ на одиничному відрізку.

Розглянемо послідовність випадкових величин $\psi_n^{(i)}$ на $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$:

$$\psi_n^{(i)} = \psi_n^{(i)}(\omega) = \psi_n^{(i)}(\omega_n) = 0 \ \textit{при} \ \omega_n \neq i, \quad i \ \ \psi_n^{(i)} = 1 \ \textit{при} \ \omega_n = i.$$

Тому випадкова величина $\psi_n^{(i)}$ має наступний розподіл:

$\psi_n^{(i)}$	0	1
	$1 - q_i$	q_i

За посиленим законом великих чисел для ν–майже всіх $\omega \in \Omega$ виконується рівність:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{(\psi_1^{(i)} + \psi_2^{(i)} + ... + \psi_n^{(i)}) - M(\psi_1^{(i)} + \psi_2^{(i)} + ... + \psi_n^{(i)})}{n} = 0.$$

Через $\mathcal{I}(Q)$ позначимо множину всіх Q-ірраціональних дійсних чисел одиничного інтервалу, тобто, множину дійсних чисел, Q-зображення яких не містить (0) чи $(s-1)$ в періоді. Множина $[0,1]\setminus \mathcal{I}(Q)$ є зчисленою. Нехай $\mathcal{I}(\Omega)=f^{-1}(\mathcal{I}(Q))$. Множина $\Omega\setminus\mathcal{I}(\Omega)$ також буде зчисленою. $\nu(\mathcal{I}(\Omega)) = \nu^*(\mathcal{I}(Q)) = 1$, бо міри ν і ν^* неперервні. Відображення є біекцією між $\mathcal{I}(\Omega)$ і $\mathcal{I}(Q^*)$. Таким чином, $\nu(E)=\nu^*(f(E))$ для довільної множини $E\in\mathcal{A}$, і довільне дійсне число $x\in\mathcal{I}(Q)$ однозначно визначає послідовність $\omega_1(x),\omega_2(x),\ldots,\omega_n(x),\ldots$ таку, що $x=f(\omega(x))$ і послідовність $\{\psi_n^{(i)}(x)\} = \{\psi_n^{(i)}(\omega(x))\}=\{\psi_n^{(i)}(\omega_n(x))\}$, де $\psi_n^{(i)}(x)$ дорівнює кількості цифр «i» серед перших n цифр Q-зображення числа x.

Таким чином, для λ-майже всіх $x\in[0,1]$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\psi_1^{(i)}(x)+...+\psi_n^{(i)}(x)\ )-M(\psi_1^{(i)}(x)+...+\psi_n^{(i)}(x)\ )}{n}=0.$$

Оскільки $M(\psi_n^{(i)}(x))=q_i$ і $\psi_1^{(i)}(x)+\psi_2^{(i)}(x)+...+\psi_n^{(i)}(x)=N_i(x,n)$, то для λ-майже всіх $x\in[0,1]$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{N_i(x,n)}{n}-q_i\right)=0.$$

Нехай $T_i=\{x:\ \ \lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{N_i^*(x,k)}{k}-q_i\right)=0\}$ і $T=\bigcap\limits_{i=0}^{s-1}T_i$. Оскільки $\lambda(T_i)=1,\forall i\in A$, робимо висновок, що $\lambda(T)=1$, що і доводить теорему. □

Означення 3.2.2. Множина $L(Q)=\{x:\lim\limits_{n\to\infty}\frac{N_i(x,n)}{n}$ не існує $\forall i\in A\}$ називається множиною суттєво анормальних чисел.

Теорема 3.2.2. *Множина $L(Q)$ суттєво анормальних чисел є суперфракталом, тобто множиною нульової міри Лебега, розмірність Хаусдорфа-Безиковича якої дорівнює 1.*

Доведення. Розглянемо множину

$$I_p=\{x:x=\Delta^Q\underbrace{\alpha_1\ldots\alpha_p01\ldots(s-1)}_{\text{перша серія}}\underbrace{\alpha_{r_1+1}\ldots\alpha_{r_1+2p}0011\ldots(s-1)(s-1)\ldots}_{\text{друга серія}}$$

$$\ldots\underbrace{\alpha_{r_{m-1}+1}\ldots\ldots\alpha_{r_{m-1}+2^{m-1}p}\overbrace{00\ldots0}^{2^{m-1}}\overbrace{11\ldots1}^{2^{m-1}}\ldots\overbrace{(s-1)(s-1)\ldots(s-1)}^{2^{m-1}}}_{m\text{-та серія}}\ldots\},$$

де α_{r_m+j} - довільна цифра з множини A: $r_m = (p+s)(2^m - 1)$, $j = j(m)$ пробігає множину $\{1, 2, \ldots, 2^m p\}$,$m \in N$.

Нескладно показати, що $I_p \subset L(Q)$. Для цього треба показати, що для довільного $x \in I_p$ та довільного $i \in A$ границі $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{N_i(x,n)}{n}$ не існує.

Нехай x - довільне фіксоване дійсне число з множини I_p і i - довільне фіксоване ціле з A. Розглянемо дві послідовності $k'_m(i) = k'_m$ і $k''_m(i) = k''_m$, $m \in N$, де $k'_m + 1$ - номер позиції, з якої починається m-та серія фіксованої цифри «i» і k''_m - номер позиції, на якій m-та серія фіксованої цифри «i» закінчується.

Після підрахунку отримаємо:

$k'_m = r_{m-1} + 2^{m-1}p + i \cdot 2^{m-1} = (p+s)(2^{m-1} - 1) + 2^{m-1}(p+i)$,

$k''_m = r_{m-1} + 2^{m-1}p + i \cdot 2^{m-1} + 2^{m-1} = (p+s)(2^{m-1} - 1) + 2^{m-1}(p+i+1)$,

$N_i(x, k'_m) = (2^{m-1} - 1) + \tau_i(x, k'_m)$,

$N_i(x, k''_m) = (2^{m-1} - 1) + \tau_i(x, k'_m) + 2^{m-1}$,

де $\tau_i(x, k'_m)$ - кількість цифр «i» серед цифр послідовності $\alpha_{r_k+j_k}(x)$, $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, $j_k \in \{1, 2, \ldots, 2^k p\}$.

Очевидно, що $0 \leqslant \tau_i(x, k'_m) \leqslant (2^m - 1)p$.

Розглянемо вираз

$$\frac{N_i(x, k'_m)}{k'_m} = \frac{(2^{m-1} - 1) + \tau_i(x, k'_m)}{(p+s)(2^{m-1} - 1) + 2^{m-1}(p+i)} = \frac{1 - \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{\tau_i(x,k'_m)}{2^{m-1}}}{(1 - \frac{1}{2^{m-1}})(p+s) + p + i}. \tag{3.3}$$

Якщо границі

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\tau_i(x, k'_m)}{2^{m-1}} \tag{3.4}$$

не існує, то границі виразу (3.3) також не існує. Якщо границя (3.4) існує і рівна $\tau_i(x)$, то $\tau_i(x) \leqslant 2p$.

Тоді $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{N_i(x,k'_m)}{k'_m} = \frac{1+\tau_i(x)}{(p+s)+p+i}$.

В такому випадку існує наступна границя:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{N_i(x,k''_m)}{k''_m}=\frac{2+\tau_i(x)}{(p+s)+p+i+1}\neq\frac{1+\tau_i(x)}{(p+s)+p+i}.$$

Таким чином, цифра «i» не має частоти в Q-розкладі числа $x\in I_p$. А отже, множина I_p є підмножиною множини $L(Q)$.

Для того, щоб знайти розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини I_p, побудуємо таку сингулярну ймовірнісну міру, що множина I_p буде її спектром.

Нехай $Fix(j)$ - множина номерів місць, на яких стоїть фіксована цифра «j» в Q-розкладі числа $x\in I_p$.
Тобто $Fix(j)=\bigcup\limits_{m=0}^{\infty}\{r_m+2^m(p+j)+1,r_m+2^m(p+j)+2,\ldots,r_m+2^m(p+j)+2^m\}$.

Нехай $Fix:=\bigcup\limits_{j}Fix(j)$, $Flex=N\backslash Fix$.

Тоді множину I_p можна задати наступним чином:

$$I_p=\{x:x=\Delta^Q_{i_1(x)\ldots i_k(x)\ldots};i_k(x)=j, \textit{якщо}\ \ k\in Fix(j);$$

$$i_k(x)\in\{0,1,\ldots,s-1\}, \textit{якщо}\ \ k\in Flex\}.$$

Нехай $\xi=\Delta^Q_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_k\ldots}$ - випадкова величина з незалежними Q-символами (див. [7,84]). Виберемо розподіли випадкових величин ξ_k наступним чином:
1) Якщо $k\in Fix(j)$, то

ξ_k	j
	$p_{jk}=1$

2) Якщо $k\in Flex$, то

ξ_k	0	1	$\ldots$	$s-1$
	q_0	q_1	$\ldots$	q_{s-1}

Нехай μ_ξ ймовірнісна міра, відповідна випадковій величині ξ з незалежнмими Q-символами. За побудовою, множина I_p є спектром міри μ_ξ. Тому

$$\dim_H(I_p) \geqslant \dim_H \mu_\xi.$$

За теоремою 1 роботи [7]: $dim_H \mu_\xi = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{H_n}{B_n}$,
де $H_n = \sum\limits_{j=1}^{n} h_j$, $h_j = -\sum\limits_{i=0}^{s-1} p_{ij} \ln p_{ij}$; $B_n = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$, $b_j = -\sum\limits_{i=0}^{s-1} q_{ij} \ln p_{ij}$.

В нашому випадку

$$h_k = \begin{cases} -\sum\limits_{i=0}^{s-1} q_i \ln q_i, & \text{при } k \in Flex, \\ 0, & \text{при } k \in Fix(j). \end{cases}$$

$$b_k = \begin{cases} -\sum\limits_{i=0}^{s-1} q_i \ln q_i, & \text{при } k \in Flex, \\ -\ln q_j, & \text{при } k \in Fix(j). \end{cases}$$

Розглянемо послідовність $\frac{h_1}{b_1}, \frac{h_1+h_2}{b_1+h_2}, \ldots, \frac{h_1+h_2+\ldots+h_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}, \ldots$.

Нехай $\frac{h_1+h_2+\ldots+h_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n} = c_n$. Тоді маємо послідовність $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$, для якої $c_1 = c_2 = \ldots = c_p = 1$, $c_{p+1} = \frac{p \cdot h_1 + 0}{p \cdot h_1 + \ln \frac{1}{q_0}} < 1 = c_p$, $c_{p+2} = \frac{p \cdot h_1 + 0 + 0}{p \cdot h_1 + \ln \frac{1}{q_0 \cdot q_1}} < c_{p+1}$, …, $c_{r_1} = c_{p+s} = \frac{p \cdot h_1}{p \cdot h_1 + \ln \frac{1}{q_0 \cdot q_1 \cdot \ldots \cdot q_{s-1}}} < c_{p+s-1}$, $c_{p+s+1} = \frac{(p+1) \cdot h_1}{(p+1) \cdot h_1 + \ln \frac{1}{q_0 \cdot q_1 \cdot \ldots \cdot q_{s-1}}} > c_{p+s}$ і т.д.

Позначимо $\ln \frac{1}{q_0 \cdot q_1 \cdot \ldots \cdot q_{s-1}} = b$.

Отже, перші p членів послідовності $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ рівні одиниці. Далі, починаючи з члена c_{p+1} і до $c_{p+s} = c_{r_1}$ значення спадають, а з c_{p+s+1} до $c_{p+s+2p} = c_{3p+s}$ зростають, але вже не досягають одиниці, і з c_{3p+s+1} до $c_{p+s+2p+2s} = c_{3(p+s)} = c_{r_2}$ знову спадають, і ситуація повторюється. За допомогою таких міркувань, можна зробити висновок, що найменших значень послідовність $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ буде набувати в кінці серій.

Тому

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h_1 + h_2 + \ldots + h_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{h_1 + h_2 + \ldots + h_{r_n}}{b_1 + b_2 + \ldots + b_{r_n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2^n-1)p\cdot h_1}{(2^n-1)p\cdot h_1 + (2^n-1)b} = \frac{p\cdot h_1}{p\cdot h_1 + b}.$$

Отже, $\dim_H \mu_\xi = \frac{p\cdot h_1}{p\cdot h_1+b} \leqslant \dim_H(I_p)$.

Легко бачити, що $L(Q) \supset \bigcup\limits_{p=1}^{\infty} I_p$, а отже,

$$\dim_H(L(Q)) \geqslant \dim_H(\bigcup_{p=1}^{\infty} I_p) = \sup_p \dim_H(I_p) = \sup_p \frac{p\cdot h_1}{p\cdot h_1 + b} = 1.$$

З іншого боку, $L(Q) \subset [0,1]$, тому $\dim_H(L(Q)) \leqslant 1$.

Отже, $\dim_H(L(Q)) = 1$ і множина $L(Q)$ суттєво анормальних чисел є суперфракталом. $\square$

Означення 3.2.3. Множина $W(Q) = \{x : \lim\limits_{n\to\infty} \frac{N_i(x,n)}{n}$ існує $\forall i \in A\} \setminus N(Q)$ називається множиною Q-квазінормальних чисел.

Означення 3.2.4. Множина $P(Q) = \{x : \exists i \in A : \lim\limits_{n\to\infty} \frac{N_i(x,n)}{n}$ не існує, $\exists i \in A : \lim\limits_{n\to\infty} \frac{N_j(x,n)}{n}$ існує $\}$ називається множиною частково анормальних чисел.

Для дослідження топологічних властивостей вищевказаних множин $N(Q)$, $W(Q)$, $P(Q)$ і $L(Q)$ розглянемо відображення g, яке кожному числу x, заданому за допомогою s-кового зображення ставить у відповідність число з такими ж цифрами, але Q-зображення, тобто:

$$g\left(\Delta^s_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}\right) = \Delta^Q_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}.$$

Розглянемо випадкову величину ξ з незалежними символами s-кового зображення:

$$\xi = \Delta^s_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_k\ldots}.$$

Випадкові величини ξ_k мають наступні розподіли:

ξ_k	0	1	$\ldots$	$s-1$
	q_0	q_1	$\ldots$	q_{s-1}

Таким чином, функція розподілу F_ξ випадкової величини ξ співпадає з функцією $g(x)$. Тому $g(x)$ є неперервною і строго зростаючою. Крім того, функція $g^{-1}(x)$ також неперервна, тому $y = g(x)$ задає гомеоморфізм. Враховуючи те, що гомеоморфізм зберігає всі топологічні властивості, маємо: $L(Q)$ – множина другої категорії Бера, а $N(Q)$, $W(Q)$, $P(Q)$ є множинами першої категорії Бера.

Основна мета наступних параграфів полягає у вивченні фрактальних властивостей множин $f(E), f(P), f(L)$ для випадку коли відображення f індуковане Q^*-зображенням дійсних чисел для відповіді на запитання, поставлені в кінці параграфу 3.1.

3.3. Q^*-зображення дійсних чисел та його властивості

Нагадаємо означення Q^*-зображення дійсних чисел (див. [236]).

Нехай $N_0^{s-1} = \{0, 1, \ldots, s-1\}$, і нехай $Q^* = ||q_{ij}||, i \in N_0^{s-1}, j \in N$ — матриця з наступними властивостями:

$$1)\ q_{ij} > 0, \quad 2)\ \sum_{i=0}^{s-1} q_{ij} = 1, \quad 3)\ \prod_{j=1}^{\infty} \max_i q_{ij} = 0.$$

Використовуючи матрицю Q^*, означимо Q^*-розбиття відрізка $[0, 1]$.

1 крок. Розіб'ємо відрізок $[0, 1]$ зліва направо на s відрізків $\Delta_0^{Q^*}$, $\Delta_1^{Q^*}$, $\ldots$, $\Delta_{s-1}^{Q^*}$, де $|\Delta_i^{Q^*}| = q_{i1}$. Назвемо $\Delta_i^{Q^*}$ циліндрами першого рангу.

2 крок. Кожен циліндр першого рангу ми розіб'ємо зліва направо на s відрізків, які назвемо циліндрами другого рангу, причому $|\Delta_{i_1 0}^{Q^*}| : |\Delta_{i_2 1}^{Q^*}| : \ldots : |\Delta_{i_s (s-1)}^{Q^*}| = q_{02} : q_{12} : \ldots : q_{(s-1)2}$.

n-й крок. Кожен циліндр $(n-1)$-го рангу $\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}^{Q^*}$ розіб'ємо зліва направо на s відрізків n-го рангу, довжини яких знаходяться в пропорції: $q_{0n} : q_{1n} : \ldots : q_{(s-1)n}$.

Нескладно показати, що

$$|\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_n}^{Q^*}| = q_{i_1 1} \cdot q_{i_2 2} \cdot \ldots \cdot q_{i_n n} \to 0 (n \to \infty),$$

і послідовність вкладених відрізків $\Delta^{Q^*}_{i_1} \supset \Delta^{Q^*}_{i_1 i_2} \supset \ldots \supset \Delta^{Q^*}_{i_1 i_2 \ldots i_n} \supset \ldots$ має спільну точку x.

І навпаки, якщо точка x не є кінцем будь-якого відрізка вищезазначеного розбиття, тоді для точки x існує єдина послідовність вкладених відрізків $\Delta^{Q^*}_{i_1(x)} \supset \Delta^{Q^*}_{i_1(x) i_2(x)} \supset \ldots \supset \Delta^{Q^*}_{i_1(x) i_2(x) \ldots i_n(x)} \supset \ldots$, що мають єдину спільну точку x.

Символічно писатимемо

$$x = \Delta^{Q^*}_{i_1(x) i_2(x) \ldots i_n(x) \ldots}. \tag{3.5}$$

Рівність (3.5) називається Q^*-зображенням числа x. Якщо точка x є кінцем будь-якого відрізка розбиття, то x має два Q^*-зображення.

Властивості циліндричних відрізків Q^*-зображення:

1. $\Delta^{Q^*}_{c_1 c_2 \ldots c_m i} \subset \Delta^{Q^*}_{c_1 c_2 \ldots c_m}, \forall c_m \in N_0^{s-1}, \forall m \in N.$
2. $\bigcup\limits_{i=0}^{s-1} \Delta^{Q^*}_{c_1 c_2 \ldots c_m i} = \Delta^{Q^*}_{c_1 c_2 \ldots c_m}.$
3. $\sup \Delta^{Q^*}_{c_1 c_2 \ldots c_m} = \inf \Delta^{Q^*}_{c_1 c_2 \ldots (c_m + 1)}, \forall c_m \in N_0^{s-1}, \forall m \in N.$
4. $Int\left(\Delta^{Q^*}_{c_1 c_2 \ldots c_m}\right) \bigcap Int\left(\Delta^{Q^*}_{d_1 d_2 \ldots d_m}\right) = \varnothing,$
   якщо $(c_1, c_2, \ldots, c_m) \neq (d_1, d_2, \ldots, d_m)$.
5. $\dfrac{\left|\Delta^{Q^*}_{c_1 c_2 \ldots c_{m-1} i}\right|}{\left|\Delta^{Q^*}_{c_1 c_2 \ldots c_{m-1}}\right|} = q_{i(m-1)}, \forall (c_1, c_2, \ldots, c_{m-1}) \in {N_0^{s-1}}^{m-1}, \forall i \in N_0^{s-1}.$
6. $\left|\Delta^{Q^*}_{c_1 1 c_2 2 \ldots c_m m}\right| = q_{c_1 1} \cdot q_{c_2 2} \cdot \ldots \cdot q_{c_m m}, \forall m \in N_0^{s-1}.$
7. $\left|\Delta^{Q^*}_{c_1 c_2 \ldots c_m}\right| \to 0 (m \to \infty).$
8. $\left|\Delta^{Q^*}_{c_1 c_2 \ldots c_m}\right| \leqslant q^m$, де $q := \max\limits_{i \in N_0^{s-1}, j \in N} q_{ij}$.

Зауважимо, що якщо вибрати матрицю Q^* так, щоб $q_{ij} = q_i, \forall j \in N$ (тобто, коли всі стовпці матриці Q^* співпадають), то отримаємо Q-зображення. Якщо ж накласти умову $q_{ij} = \frac{1}{s}, \forall i \in N_0^{s-1}, \ \forall j \in N$, то отримаємо класичне s-кове зображення дійсних чисел.

3.4. Випадкові величини з незалежними Q^*-символами та їх властивості

Нехай $\{\xi_k\}$ - послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значення $0, 1, ..., s-1$ з ймовірностями $p_{0k}, p_{1k}, ..., p_{s-1k}$ відповідно. Випадкова величина

$$\psi = \Delta^{Q^*}_{\xi_1\xi_2...\xi_k...} \tag{3.6}$$

називається випадковою величиною з незалежними Q^*-символами, а відповідна їй ймовірнісна міра ν_ψ називається ймовірнісною мірою з незалежними Q^*-символами.

Лебегівська структура розподілу ν_ψ добре досліджена (див., наприклад, $[7, 216]$). Відомо, зокрема, що розподіл випадкової величини ψ має чистий тип, причому

чисто дискретний тоді і тільки тоді, коли

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max_i p_{ik} > 0, \tag{3.7}$$

тобто, коли $\max\limits_i p_{ik} \to 1$ достатньо швидко;

ν_ψ абсолютно неперервна (відносно міри Лебега) тоді і тільки тоді, коли

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{p_{0k}q_{0k}} + \sqrt{p_{1k}q_{1k}} + ... + \sqrt{p_{(s-1)k}q_{(s-1)k}}\right) > 0, \tag{3.8}$$

тобто, коли $\frac{p_{ik}}{q_{ik}} \to 1$ достатньо швидко;

ν_ψ сингулярно неперервна тоді і тільки тоді, коли нескінченні добутки (3.7) і (3.8) рівні нулю.

У випадку сингулярності розподілу більш тонко його властивості описуються засобами фрактального аналізу. Для вивчення тонких фрактальних властивостей таких розподілів принципову роль відіграють питання довірчості (недовірчості) локально тонких систем циліндрів, породжених Q^*-розкладами дійсних чисел.

Дослідження достатніх умов довірчості для системи $\Phi(Q^*)$ циліндричних множин Q^* -розкладу проводились в роботах S. Albeverio, M. Ібрагіма та Г. Торбіна (див. огляд в розділі 1 даної роботи).

Для подальших викладок введемо позначення.

$$h_j := -\sum_{i=0}^{s-1} p_{ij} \ln p_{ij}, \qquad 0 \ln 0 := 0; \quad H_n := \sum_{j=1}^{n} h_j.$$

$$b_j := -\sum_{i=0}^{s-1} p_{ij} \ln q_{ij}; \quad B_n := \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

$$d_j := -b_j^2 + \sum_{i=0}^{s-1} p_{ij} \ln^2 q_{ij}.$$

Наведемо важливий наслідок щодо нижньої оцінки розмірності Хаусдорфа–Безиковича спектрів випадкових величин з незалежними Q^*-символами (як добре відомо, нижні оцінки розмірності Хаусдорфа–Безиковича отримуються значно складніше за відповідні верхні оцінки).

Наслідок 3.4.1. *Нехай S_ψ - спектр (топологічний носій) випадкової величини ψ з незалежними Q^*-символами (тобто, S_ψ — мінімальний замкнений носій випадкової величини ψ). Тоді*

$$\dim_H(S_\psi) \geqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{H_n}{B_n}. \tag{3.9}$$

3.5. Фрактальні властивості множини Q^*-суттєво анормальних чисел

Даний розділ присвячений спростуванню гіпотези про те, що множина суттєво анормальних чисел є суперфрактальною незалежно від обраної системи числення. Покажемо, що дана гіпотеза неправильна навіть для Q^*–розкладів дійсних чисел.

Теорема 3.5.1. *Нехай* $Q^* = \|q_{ik}\|$, $i \in \{0,1,2\}$, $q_{2k} = \frac{1}{(k+1)^{k+1}}$, $q_{0k} = q_{1k} = \frac{1-q_{2k}}{2}$.

Тоді $\dim_H(L(Q^*)) = 0$.

Доведення. Нехай $I = \{x :$ *в* Q^* *– розкладі числа* x *є безліч цифр* «2»$\}$.

Покажемо, що $\dim_H I = 0$.

Зафіксуємо деяке $\alpha > 0$. Тоді для α $\exists$ $k_0 \in N : \forall$ $k > k_0$, $\frac{3}{k^\alpha} < 1$.
Завжди можна вибрати k_1 так, щоб $\frac{3}{(k+1)^{k+1}} < 1$, $\forall$ $k > k_1$.
Також існує $k_2 : \frac{1}{2^k} < \varepsilon, \forall$ $k > k_2$. Тоді $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$.

Розглянемо множини:

$$I_{G,1} = \{x : \Delta^{Q^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_{G-1}(x)\alpha_G(x)2\alpha_{G+2}(x)\ldots}, \alpha_j(x) \in \{0,1,2\}\},$$

$$I_{G,2} = \{x : \Delta^{Q^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_G(x)\alpha_{G+1}(x)2\alpha_{G+3}(x)\ldots}, \alpha_j(x) \in \{0,1,2\}\},$$

$$\ldots$$

$$I_{G,m} = \{x : \Delta^{Q^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_{G+m-2}(x)\alpha_{G+m-1}(x)2\alpha_{G+m+1}(x)\ldots}, \alpha_j(x) \in \{0,1,2\}\}.$$

Нехай $x \in I \Rightarrow x \in I_{G,m}$ для деякого $m \in N$, $\forall G \in N$. А отже, з того, що $x \in I$ випливає, що $x \in \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} I_{G,m}$.

Множину $I_{G,1}$ можна покрити за допомогою 3^G циліндрів виду $\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_{G-1}(x)\alpha_G(x)2}$, довжиною

$$|\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_{G-1}(x)\alpha_G(x)2}| = q_{\alpha_1(x)1} \cdot q_{\alpha_2(x)2} \cdot \ldots \cdot q_{2(G+1)} < q_{2(G+1)} = \frac{1}{(G+2)^{G+2}}.$$

Тоді α-об'єм даного покриття не перевищує

$$3^G \cdot \left(\frac{1}{(G+2)^{G+2}}\right)^\alpha \leqslant \frac{3^G}{G^{G\alpha}} = \left(\frac{3}{G^\alpha}\right)^G, (G > k_0)$$

Множину $I_{G,2}$ можна покрити за допомогою 3^{G+1} циліндрів виду $\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_G(x)\alpha_{G+1}(x)2}$, довжиною

$$|\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_G(x)\alpha_{G+1}(x)2}| = q_{\alpha_1(x)1} \cdot q_{\alpha_2(x)2} \cdot \ldots \cdot q_{2(G+2)} < q_{2(G+2)} = \frac{1}{(G+3)^{G+3}}.$$

Тоді α-об'єм даного покриття не перевищує

$$3^{G+1}\cdot\left(\frac{1}{(G+3)^{G+3}}\right)^{\alpha}\leqslant\frac{3^{G+1}}{G^{(G+1)\alpha}}=\left(\frac{3}{G^{\alpha}}\right)^{G+1},(G>k_0)\dots$$

Множину $I_{G,m}$ можна покрити за допомогою 3^{G+m-1} циліндрів виду $\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_{G+m-2}(x)\alpha_{G+m-1}(x)2}$, довжиною

$$|\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_{G+m-2}(x)\alpha_{G+m-1}(x)2}|=q_{\alpha_1(x)1}\cdot q_{\alpha_2(x)2}\cdot\ldots\cdot q_{2(G+m-1)}<$$
$$<q_{2(G+m-1)}=\frac{1}{(G+m)^{G+m}}.$$

Тоді α-об'єм даного покриття не перевищує

$$3^{G+m-1}\cdot\left(\frac{1}{(G+m)^{G+m}}\right)^{\alpha}\leqslant\frac{3^{G+m-1}}{G^{(G+m-1)\alpha}}=\left(\frac{3}{G^{\alpha}}\right)^{G+m-1},(G>k_0)$$

Таким чином множину I можна покрити, покривши всі $I_{G,1},\dots,I_{G,m},\dots$. Тоді для довільного $G>k_0$ відповідний α-об'єм не перевищує величини

$$\left(\frac{3}{G^{\alpha}}\right)^{G}+\left(\frac{3}{G^{\alpha}}\right)^{G+1}+\ldots+\left(\frac{3}{G^{\alpha}}\right)^{G+m-1}+\ldots=\frac{\left(\frac{3}{G^{\alpha}}\right)^{G}}{1-\frac{3}{G^{\alpha}}}=\frac{G^{\alpha}}{G^{\alpha}-3}\cdot\left(\frac{3}{G^{\alpha}}\right)^{G}.$$

Якщо $G\to\infty$, то $\left(\frac{3}{G^{\alpha}}\right)^{\alpha}\to 0$, тому $H^{\alpha}_{\varepsilon}(I)=0$, $\forall\varepsilon>0$, $\forall\alpha>0$. Тоді $H^{\alpha}(I)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}H^{\alpha}_{\varepsilon}(I)=0$, і $\dim_H I=\inf\{\alpha: H^{\alpha}(I)=0\}=0$.

Ми показали, що $\dim_H I=0$. Треба показати, що з того, що $\dim_H I=0$ випливає $\dim_H(L(Q^*))=0$.

Нехай $x\in L(Q^*)$. Тоді $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{N_2(x,k)}{k}$ не існує, а тому послідовність $\left\{\frac{N_2(x,k)}{k}\right\}$ має хоча б дві різні часткові границі, а це означає, що хоча б одна з них не рівна нулю, тобто $\exists\{k_s\}:\lim\limits_{s\to\infty}\frac{N_2(x,k_s)}{k_s}=c_0>0$, що свідчить про те, що в Q^*-розкладі x є безліч цифр «2», а отже, $x\in I$.

Отже, $I\supset L(Q^*)$, а тому $\dim_H(L(Q^*))=0$. $\square$

Таким чином, гіпотеза про те, що множина суттєво анормальних чисел буде суперфрактальною незалежно від вибору системи числення, в якій вона розглядається, спростована.

Використовуючи підходи, які розвинені у попередніх пунктах, знайдемо загальні достатні умови аномальної фрактальності множини Q^*-суттєво анормальних чисел.

Теорема 3.5.2. *Нехай* $Q^* = \|q_{ik}\|$, $i \in A = \{0, 1, \dots, s-1\}$, *і нехай* $\exists\ i_0 \in A$ *таке, що* $\forall \alpha > 0 : \lim\limits_{k\to\infty} s^k \cdot q^{\alpha}_{i_0,k} = 0$.
Тоді $\dim_H(L(Q^*)) = 0$.

Доведення. Нехай $I = \{x :$ *в* Q^* *– розкладі числа* x *є безліч цифр* «i_0»$\}$.
Покажемо, що $\dim_H I = 0$.

Зафіксуємо довільне $\alpha > 0$. Для заданого α та фіксованого $\varepsilon > 0$ виберемо k_0 таке, щоб для $\forall k > k_0$:

$$\begin{cases} s^k \cdot q^{\alpha}_{i_0,k} < 1, \\ \qquad q_{i_0,k} < \varepsilon. \end{cases}$$

Розглянемо множини:

$$I_{k_0,1} = \{x : \Delta^{Q^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_{k_0-1}(x)\alpha_{k_0}(x)i_0\alpha_{k_0+2}(x)\dots}, \alpha_j(x) \in \{0, 1, \dots, s-1\}\},$$

$$I_{k_0,2} = \{x : \Delta^{Q^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_{k_0}(x)\alpha_{k_0+1}(x)i_0\alpha_{k_0+3}(x)\dots}, \alpha_j(x) \in \{0, 1, \dots, s-1\}\},$$

$$\dots$$

$$I_{k_0,l} = \{x : \Delta^{Q^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_{k_0+l-2}(x)\alpha_{k_0+l-1}(x)i_0\alpha_{k_0+l+1}(x)\dots}, \alpha_j(x) \in \{0, 1, \dots, s-1\}\}.$$

Нехай $x \in I \Rightarrow x \in I_{k_0,l}$ для деякого $l \in N$, $\forall k_0 \in N$. А отже, з того, що $x \in I$ випливає, що $x \in \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} I_{k_0,l}$.

Множину $I_{k_0,1}$ можна покрити за допомогою s^{k_0} циліндрів виду $\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_{k_0-1}(x)\alpha_{k_0}(x)i_0}$, довжиною

$$|\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_{k_0-1}(x)\alpha_{k_0}(x)i_0}| = q_{\alpha_1(x),1} \cdot q_{\alpha_2(x),2} \cdot \ldots \cdot q_{i_0,k_0+1} < q_{i_0,k_0+1}.$$

Тоді α-об'єм даного покриття не перевищує

$$s^{k_0} \cdot q^{\alpha}_{i_0,k_0+1} = s^{k_0} \cdot q^{\frac{\alpha}{2}}_{i_0,k_0+1} \cdot q^{\frac{\alpha}{2}}_{i_0,k_0+1} < q^{\frac{\alpha}{2}}_{i_0,k_0+1}.$$

Множину $I_{k_0,2}$ можна покрити за допомогою s^{k_0+1} циліндрів виду $\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_{k_0}(x)\alpha_{k_0+1}(x)i_0}$, довжиною

$$|\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_{k_0}(x)\alpha_{k_0+1}(x)i_0}| = q_{\alpha_1(x),1} \cdot q_{\alpha_2(x),2} \cdot \ldots \cdot q_{i_0,k_0+2} < q_{i_0,k_0+2}.$$

Тоді α-об'єм даного покриття не перевищує

$$s^{k_0+1} \cdot q^{\alpha}_{i_0,k_0+2} = s^{k_0+1} \cdot q^{\frac{\alpha}{2}}_{i_0,k_0+2} \cdot q^{\frac{\alpha}{2}}_{i_0,k_0+2} < q^{\frac{\alpha}{2}}_{i_0,k_0+2}.$$

Множину $I_{k_0,l}$ можна покрити за допомогою s^{k_0+l-1} циліндрів виду $\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_{k_0+l-2}(x)\alpha_{k_0+l-1}(x)i_0}$, довжиною

$$|\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_{k_0+l-2}(x)\alpha_{k_0+l-1}(x)i_0}| = q_{\alpha_1(x),1} \cdot q_{\alpha_2(x),2} \cdot \ldots \cdot q_{i_0,k_0+l} < q_{i_0,k_0+l}.$$

Тоді α-об'єм даного покриття не перевищує

$$s^{k_0+l-1} \cdot q^{\alpha}_{i_0,k_0+l} = s^{k_0+l-1} \cdot q^{\frac{\alpha}{2}}_{i_0,k_0+l} \cdot q^{\frac{\alpha}{2}}_{i_0,k_0+l} < q^{\frac{\alpha}{2}}_{i_0,k_0+l}.$$

Множину I можна покрити, покривши всі $I_{k_0,1}, \ldots, I_{k_0,l}, \ldots$. Тоді відповідний α-об'єм не перевищує:

$$q^{\frac{\alpha}{2}}_{i_0,k_0+1} + q^{\frac{\alpha}{2}}_{i_0,k_0+2} + \ldots + q^{\frac{\alpha}{2}}_{i_0,k_0+l} + \ldots =: \varphi(\alpha, k_0).$$

Покажемо, шо даний ряд збігається. Нехай $\beta = \frac{\alpha}{2}$.
Очевидно, що $\lim\limits_{k\to\infty} s^k \cdot q^{\beta}_{i_0,k} = 0$, тому існує $M > 0$ таке, що $s^k \cdot q^{\beta}_{i_0,k} \leqslant M$.
Отже, $q^{\beta}_{i_0,k} \leqslant \frac{M}{s^k}, \forall k \in N$. Отже,

$$q^{\beta}_{i_0,k_0+1} + q^{\beta}_{i_0,k_0+2} + \ldots + q^{\beta}_{i_0,k_0+l} + \ldots \leqslant \frac{M}{s^{k+1}} + \frac{M}{s^{k+2}} + \ldots = \frac{M}{2 \cdot s^k} < \infty.$$

Отже, $H^{\alpha}_{\varepsilon}(\bigcup\limits_{l=1}^{\infty} I_{k_0,l}) < \infty, \forall\varepsilon > 0, \forall\alpha > 0$.
Тому $H^{\alpha}_{\varepsilon}(I) < \infty, \forall\varepsilon > 0, \forall\alpha > 0$.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^{\frac{\alpha}{2}}_{i_0,k}$ збігається за умовою для довільного $\alpha > 0$. Його можна представити у вигляді: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^{\frac{\alpha}{2}}_{i_0,k} = s_{k_0-1} + r_{k_0-1}$, де $s_{k_0-1} = \sum\limits_{k=1}^{k_0-1} q^{\frac{\alpha}{2}}_{i_0,k}$ і $r_{k_0-1} =$

$\sum\limits_{k=k_0}^{\infty} q_{i_0,k}^{\frac{\alpha}{2}}$.
Легко бачити, що $r_{k_0-1} \to 0$ (при $k_0 \to \infty$).

Тоді $H^\alpha(I) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} H_\varepsilon^\alpha(I) \leqslant \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varphi(\alpha, k_0) = 0$.
Звідси $\dim_H I = \inf\{\alpha : H^\alpha(I) = 0\} = 0$.

Ми показали, що $\dim_H I = 0$. Покажемо тепер, що з умови $\dim_H I = 0$ випливає рівність $\dim_H(L(Q^*)) = 0$.

Нехай $x \in L(Q^*)$. Тоді $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{N_{i_0}(x,k)}{k}$ не існує, а тому послідовність $\left\{\frac{N_{i_0}(x,k)}{k}\right\}$ має хоча б дві різні часткові границі. Тоді хоча б одна з них не рівна нулю, тобто $\exists\{k_s\} : \lim\limits_{s\to\infty} \frac{N_{i_0}(x,k_s)}{k_s} = c_0 > 0$, що свідчить про те, що в Q^*-розкладі x є безліч цифр «i_0», а отже, $x \in I$.

Отже, $I \supset L(Q^*)$, а тому $\dim_H(L(Q^*)) = 0$. □

3.6. Фрактальні властивості множини Q^*-анормальних чисел

Теорема 3.6.1. *Нехай* $Q^* = \|q_{ik}\|$, $i \in \{0, 1, 2, \ldots, s-1\}$,

$$q_{1k} = q_{2k} = \ldots = q_{s-1,k} = \begin{cases} \frac{1}{(s-1)(k+1)^{k+1}}, & \text{якщо } k \in B; \\ \frac{1}{s}, & \text{якщо } k \in A. \end{cases}$$

$$q_{0k} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{(k+1)^{k+1}}, & \text{якщо } k \in B; \\ \frac{1}{s}, & \text{якщо } k \in A. \end{cases},$$

де $A = \{n : n = 10^k, k \in N\}$, $B = \{n : n \neq 10^k, k \in N\}$.

Тоді $\dim_H(D(Q^*)) = 0$.

Доведення. Нехай i — довільний фіксований символ з $\{1, 2, \ldots, (s-1)\}$. Розглянемо множину

$$I_i^* = \{x : \text{в } Q^* - \text{розкладі числа } x \ \varliminf_{k\to\infty} \frac{N_i(x,k)}{k} > 0, \quad i \in \{1, 2, \ldots, s-1\}\}.$$

Виберемо деяке $G \in N$ і занумеруємо елементи множини

$$B \bigcap \{G, G+1, G+2, \ldots\} = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}.$$

Розглянемо множини:

$$I^*_{G,1} = \{x : \Delta^{Q^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_{b_1-1}(x)i\alpha_{b_1+1}\ldots}, \alpha_j(x) \in \{0,1,2,\ldots,s-1\}\},$$

$$I^*_{G,2} = \{x : \Delta^{Q^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_{b_2-1}(x)i\alpha_{b_2+1}\ldots}, \alpha_j(x) \in \{0,1,2,\ldots,s-1\}\},$$

$$\ldots$$

$$I^*_{G,k} = \{x : \Delta^{Q^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_{b_k-1}(x)i\alpha_{b_k+1}\ldots}, \alpha_j(x) \in \{0,1,2,\ldots,s-1\}\}.$$

Зафіксуємо деяке $\alpha > 0$. Тоді для α $\exists\ k_0 \in N : \forall k > k_0, \frac{3}{k^\alpha} < 1$.

Нехай $x \in I^*_i$, тоді $x \in I^*_{G,k}$ для деякого $k \in N, \forall G \in N$. А тому, $x \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I^*_{G,k}$.

Множину $I^*_{G,1}$ можна покрити за допомогою 3^{b_1-1} циліндрів виду $\Delta_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_{b_1-1}(x)i}$, довжиною

$$|\Delta_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_{b_1-1}(x)i}| = q_{\alpha_1(x)1} \cdot \ldots \cdot q_{b_1-1(x)(b_1-1)} \cdot q_{ib_1} < q_{ib_1} =$$

$$= \frac{1}{(s-1)(b_1+1)^{b_1+1}}, \quad (b_1 \geqslant G)$$

Тоді α–об'єм даного покриття не перевищує:

$$3^{b_1-1} \cdot \Big(\frac{1}{(s-1)(b_1+1)^{b_1+1}}\Big)^\alpha \leqslant \Big(\frac{3}{b_1^\alpha}\Big)^{b_1-1} \leqslant \Big(\frac{3}{G^\alpha}\Big)^{G-1}.$$

Множину $I^*_{G,2}$ можна покрити за допомогою 3^{b_2-1} циліндрів виду $\Delta_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_{b_2-1}(x)i}$, довжиною

$$|\Delta_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_{b_2-1}(x)i}| = q_{\alpha_1(x)1} \cdot \ldots \cdot q_{b_2-1(x)(b_2-1)} \cdot q_{ib_2} < q_{ib_2} =$$

$$= \frac{1}{(s-1)(b_2+1)^{b_2+1}}, \quad (b_2 \geqslant G+1)$$

Тоді α–об'єм даного покриття не перевищує:

$$3^{b_2-1} \cdot \Big(\frac{1}{(s-1)(b_2+1)^{b_2+1}}\Big)^\alpha \leqslant \Big(\frac{3}{b_2^\alpha}\Big)^{b_2-1} \leqslant \Big(\frac{3}{G^\alpha}\Big)^{G}.$$

Множину $I^*_{G,k}$ можна покрити за допомогою 3^{b_k-1} циліндрів виду $\Delta_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_{b_k-1}(x)i}$, довжиною

$$|\Delta_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_{b_k-1}(x)i}| = q_{\alpha_1(x)1}\cdot\ldots\cdot q_{b_k-1(x)(b_k-1)}\cdot q_{ib_k} <$$
$$< q_{ib_k} = \frac{1}{(s-1)(b_k+1)^{b_k+1}}, \quad (b_k \geqslant G+k-1)$$

Тоді α–об'єм даного покриття не перевищує:

$$3^{b_k-1}\cdot\Big(\frac{1}{(s-1)(b_k+1)^{b_k+1}}\Big)^{\alpha} \leqslant \Big(\frac{3}{b_k^{\alpha}}\Big)^{b_k-1} \leqslant \Big(\frac{3}{G^{\alpha}}\Big)^{G+k-2}.$$

Таким чином, I^*_i можна покрити, покривши усі множини $I^*_{G,1},\ldots,I^*_{G,k},\ldots$.

Тоді α–об'єм відповідного покриття не перевищує

$$\Big(\frac{3}{G^{\alpha}}\Big)^{G-1}+\Big(\frac{3}{G^{\alpha}}\Big)^{G}+\ldots+\Big(\frac{3}{G^{\alpha}}\Big)^{G+k-2}+\ldots=\frac{\Big(\frac{3}{G^{\alpha}}\Big)^{G-1}}{1-\frac{3}{G^{\alpha}}}=\frac{3}{G^{\alpha-3}}\cdot\Big(\frac{3}{G^{\alpha}}\Big)^{G-2}.$$

При $G\to\infty$, $\Big(\frac{3}{G^{\alpha}}\Big)^{G-2}\to 0$. Тому $H^{\alpha}(I^*_i)=0$, $\forall\ \alpha>0$. Отже, $\dim_H(I^*_i)=0$.

Розглянемо множину $I^*=\bigcup\limits_{i=1}^{s-1} I^*_i$. Так як $\dim_H(I^*_i)=0, \forall\ i\in\{1,2,\ldots,s-1\}$, то $\dim_H(I^*)=0$.

Розглянемо тепер множину $\hat{I}=\overline{I^*}=[0,1]\setminus I^*$.

Якщо $x\in\hat{I}$, то $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{N_i(x,k)}{k}=0, \forall\ i\in\{1,2,\ldots,s-1\}$.
Тому $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{N_0(x,k)}{k}=1, \forall\ x\in\hat{I}$.

Отже, для майже всіх (за виключенням множини нульової розмірності Хаусдорфа-Безиковича) $x\in[0,1]:\nu_0(x)=1,\nu_1(x)=\nu_2(x)=\ldots=\nu_{s-1}(x)=0$.

Оскільки $D(Q^*)\subset I^*$, то $\dim_H(D(Q^*))=0$. $\square$

3.7. Топологічні властивості підмножин анормальних чисел

Введемо до розгляду узагальнене циліндричне зображення дійсних чисел одиничного відрзка.

$1-$*ий крок.* Відрізок $[0,1]$ розбиваємо на скінченну або зчисленну кількість циліндрів $(< a_j, b_j >)$, які можуть мати спільні внутрішні точки, або не мати їх. Занумеруємо їх (це можна, зокрема, зробити за спаданням їх довжини, а у випадку однакових довжин - зліва направо) та позначимо: $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{i_1}, \ldots, \quad i_1 \in A$ і назвемо їх циліндрами *першого* рангу.

$2-$ *ий крок.* Кожен з циліндрів Δ_{i_1} представимо у вигляді об'єднання циліндрів другого рангу $\Delta_{i_1 i_2}$, де $i_2 \in A_{i_1}$.

Кожен з циліндрів Δ_{i_1} може розбиватися на свою кількість циліндрів другого рангу, в різній пропорції з єдиною умовою: $\Delta_{i_1} = \bigcup\limits_{i_2 \in A_{i_1}} \Delta_{i_1 i_2}, \quad A_{i_1} \supset \{0,1\}$.

Для кожного циліндра Δ_{i_1} першого рангу зафіксуємо нумерацію підциліндрів другого рангу $\Delta_{i_1 0}, \Delta_{i_1 1}, \ldots$.

$k-$ *ий крок.* Аналогічно: $\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} = \bigcup\limits_{i_k \in A_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}} \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} i_k}$.

Крім того, накладемо вимогу: $\lim\limits_{k\to\infty} \max\limits_{(i_1 i_2 \ldots i_k)} |\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k}| = 0$.

Тоді для довільної послідовності символів $\{i_k\}$, $i_j \in A_{i_1 i_2 \ldots i_{j-1}}, \quad i_1 \in A$ відповідна система вкладених відрізків $\Delta_{i_1}, \Delta_{i_1 i_2}, \ldots, \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k}, \ldots$ стягується в точку x:

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k}.$$

І навпаки,

$$\forall x \in [0,1] \ \exists \ i_1(x) \in A, \exists \ i_2(x) \in A_{i_1(x)}, \ldots, \exists \ i_k(x) \in A_{i_1(x) i_2(x) \ldots i_{k-1}(x)}, \ldots :$$

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_{i_1(x) i_2(x) \ldots i_k(x)} =: \Delta^{G^*}_{i_1(x) i_2(x) \ldots i_k(x) \ldots} \tag{3.10}$$

Зображення (3.10) називатимемо *узагальненим циліндричним зображенням* точки $x \in [0,1]$, або G^*-зображенням.

Зауваження. Провівши аналогічні міркування, можна задати узагальнене циліндричне розбиття квадрата, куба тощо. Але при цьому потрібно враховувати дві умови:

1. Лінії (поверхні), якими здійснюватиметься розбиття квадрата (куба), повинні мати нульову довжину (площу).
2. Діаметри циліндрів $k-$го ранку повинні прямувати до нуля при $k \to \infty$.

Частковими випадками такого зображення є s-адичні розклади, Q-, Q^*-, $\tilde{Q}$-, Q_∞- розклади, розклади чисел в ряди Остроградського, ряди Кантора, ланцюгові дроби, f–розклади.(див. [3], [2]) Термін «циліндричне зображення» був запропонований В. Д. Кошманенком.

Як приклад розглянемо циліндричне зображення дійсних чисел із змінним алфавітом.

Нехай $A = \{0, 1\}$.
$A_0 = \{0, 1\}, A_1 = \{0, 1, 2\}$.
$A_{00} = A_{01} = A_{10} = A_{11} = \{0, 1\}, A_{12} = \{0, 1, 2, 3\}$

Тоді на k-му кроці матимемо:

$$A_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \begin{cases} \{0, 1, \ldots, k+1\}, & \text{якщо} \;\; (i_1, i_2, \ldots, i_k) = (1, 2, \ldots, k), \\ \{0, 1\}, & \text{якщо} \;\; (i_1, i_2, \ldots, i_k) \neq (1, 2, \ldots, k). \end{cases}$$

Для даного G^*–розкладу спостерігається несподіваний феномен: довільна цифра «i»($i \geqslant 2$) в розкладі довільного числа $x \in [0, 1]$ зустрічається лише скінченну кількість разів. Тому $\forall \;\; \nu_i(x) = 0, \;\; \forall \;\; i \geqslant 2 \;\; \forall \;\; x \in [0, 1]$.

А це означає, що **в такій системі числення не існує жодного суттєво анормального числа**.

Означення 3.7.1. Множина $D(G^*) = \{x :$ в G^*–розкладі $x \;\; \exists \;\; i$, для якого $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{N_i(x,k)}{k}$ не існує$\}$ називається множиною анормальних чисел в G^*–зображенні.

Теорема 3.7.1. *Для довільного узагальненого циліндричного зображення множина $D(G^*)$ анормальних чисел є множиною другої категорії Бера, тобто, майже всі (в топологічному розумінні) дійсні числа є анормальними.*

Доведення. Розглянемо множину

$$D_{G^*}^{(01)} = \{x : \lim_{k\to\infty} \frac{N_0(x,k)}{k} \;\wedge\; \lim_{k\to\infty} \frac{N_1(x,k)}{k} \;\; \textit{не існує}\} \subset D_{G^*}.$$

Розглянемо послідовність множин C_n:

$$C_n = \{x : x = \Delta^{G^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_n \underbrace{0\ldots0}_{n}\underbrace{1\ldots1}_{n}\beta_1\beta_2\beta_3\ldots}\},$$

де $\begin{cases} \alpha_1 \in A, \\ \alpha_2 \in A_{i_1}, \\ \alpha_3 \in A_{i_1 i_2}, \\ \vdots \\ \alpha_n \in A_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}. \end{cases}$ і $\beta_j \in N$, $j \in N$.

Нехай $k'_n(0) = 2n$, $k''_n(0) = 3n$.

Тоді

$$\frac{N_0(x,k'_n(0))}{k'_n(0)} = \frac{n+\tau_0(x,n)}{2n}, \frac{N_0(x,k''_n(0))}{k''_n(0)} = \frac{n+\tau_0(x,n)}{3n},$$

де $\tau_0(x,n)$ — кількість цифр «0» серед перших n цифр числа x.

Легко перевірити, що

$$\left|\frac{N_0(x,k'_n(0))}{k'_n(0)} - \frac{N_0(x,k''_n(0))}{k''_n(0)}\right| = \frac{n+\tau_0(x,n)}{6n} \geqslant \frac{1}{6}.$$

Нехай $k'_n(1) = 2n$, $k''_n(1) = 3n$.

Тоді

$$\frac{N_1(x,k'_n(1))}{k'_n(1)} = \frac{\tau_1(x,n)}{2n}, \frac{N_1(x,k''_n(1))}{k''_n(1)} = \frac{n+\tau_1(x,n)}{3n},$$

де $\tau_1(x,n)$ — кількість цифр «1» серед перших n цифр числа x.

Легко перевірити, що

$$\left|\frac{N_1(x,k'_n(1))}{k'_n(1)} - \frac{N_1(x,k''_n(1))}{k''_n(1)}\right| = \frac{2n-\tau_1(x,n)}{6n} \geqslant \frac{1}{3}.$$

Нехай I_n– внутрішність C_n, $J_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} I_k$ і $F = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} J_n$. З конструкції множини F слідує, що F є G_δ–множиною. Покажемо, що F – всюди щільна множина. Для цього досить показати, що $\forall\ (a,b)\ \exists\ x \in F\bigcap(a,b)$.

Очевидно, що для $\forall\ (a,b)$ існує такий циліндр деякого (m–го) рангу, що:

$$\Delta_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_m} \subset (a,b).$$

Розглянемо $x^* = \Delta_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_m \underbrace{0\ldots0}_{m}\underbrace{1\ldots1}_{m}\underbrace{0\ldots0}_{3m}\underbrace{1\ldots1}_{3m}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{3^k\cdot m}\underbrace{1\ldots1}_{3^k\cdot m}\ldots}$

Легко бачити, що $x^* \in I_m\bigcap I_{3m}\bigcap\ldots\bigcap I_{3^k\cdot m}\bigcap\ldots = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} I_{3^k\cdot m} \Rightarrow x^* \in J_n, \forall n \in N \Rightarrow x^* \in F$.

Таким чином, множина F - всюди щільна.

Якщо $x \in F$, то $x \in J_n,\ \ \forall\ n \in N$. Таким чином, існує зростаюча послідовність цілих чисел $\{n_m\}$ така, що $x \in I_{n_m}$ для всіх $m \in N$. Отже, для будь-якого фіксованого $x \in F$ і будь-якого i можемо вибрати дві послідовності $k'_{n_m}(i)$ і $k''_{n_m}(i)$ такі, що

$$\left|\frac{N_i(x,k'_n(i))}{k'_n(i)} - \frac{N_i(x,k''_n(i))}{k''_n(i)}\right| \geqslant \frac{1}{6}.$$

Отже, $F \subset D^{(01)}_{G^*} \subset D_(G^*)$ і F є всюди щільною G_δ–множиною. Тому $D_(G^*)$ має другу категорію Бера (більше того, $D(G^*)$ — залишкова множина) для довільного узагальненого циліндричного зображення. $\square$

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена розвитку методів фрактального аналізу сингулярно неперервних ймовірнісних мір, вивченню тонких фрактальних властивостей ймовірнісних мір з незалежними I-Q_∞-символами. В роботі запропоновано новий підхід до розвитку метричної, ймовірнісної та розмірнісної теорій дійсних чисел на основі ідеї G-ізоморфізму. На основі здійснених в роботі нових підходів до доведення довірчості (для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича) локально тонких систем покриттів, отримано нові результати в теорії DP-перетворень та досліджено фрактальні властивості спектрів розподілів випадкових величин з незалежними I-Q_∞-символами. Принципово несподіваними є результати щодо спростування гіпотези про суперфрактальність множини суттєво анормальних чисел незалежно від обраної системи числення.

Основними науковими результатами, що виносяться на захист, є такі:

— розроблено новий метод доведення довірчості локально тонких систем покриттів для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича підмножин одиничного відрізка; даний метод застосовано для доведення гіпотези про довірчість систем надциліндрів Q_∞- та I-Q_∞-зображень дійсних чисел для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича (у тому числі і для тих моделей, коли відповідні системи циліндрів не є довірчими); знайдено достатні умови порівнянності мір Хаусдорфа, породжених системою надциліндрів узагальненого F-зображення дійсних чисел;

— досліджено лебегівську структуру, тополого-метричні властивості спектрів, спектральну структуру розподілів випадкових величин з незалежними I-Q_∞-символами;

— знайдено явні формули для обчислення розмірності Хаусдорфа розподілів випадкових величин з незалежними I-Q_∞-символами.

— доведено гіпотезу про те, що відображення φ, яке переводить символи Q_∞-зображення в символи I-Q_∞-зображення, зберігає міру Лебега та розмірність Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку; на основі даного результату показано ізоморфізм ймовірнісних та розмірнісних теорій Q_∞- та I-Q_∞-зображень дійсних чисел;

— досліджено фрактальні властивості спектрів розподілів випадкових величин з незалежними I-Q_∞-символами;

— на основі ймовірнісного підходу доведено суперфрактальність множини Q-суттєво анормальних чисел; доведено суперфрактальність множини I-Q_∞-суттєво анормальних чисел;

— спростовано гіпотезу про суперфрактальність множини суттєво анормальних чисел незалежно від вибору системи числення; знайдено достатні умови аномальної фрактальності множини Q^*-суттєво анормальних чисел.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] *Galambos J.* Representations of real numbers by infinite series / J. Galambos. — Berlin and New York : Springer-Verlag, 1976. — Vol. 502 of *Lecture Notes in Mathematics.* — vi, 146 p.

[2] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів / М. В. Працьовитий. — Київ : Вид–во НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. — 296 с.

[3] *Schweiger F.* Ergodic theory of fibred systems and metric number theory / F. Schweiger. Oxford science publications. — Oxford and New York : Clarendon Press and Oxford University Press, 1995. — xiii, 295 p.

[4] *Dajani K.* Ergodic theory of numbers / K. Dajani, C. Kraaikamp. — Washington, DC : Mathematical Association of America, 2002. — Vol. 29 of *Carus mathematical monographs.* — x, 190 p.

[5] *Барановський О. М.* Ряди Остроградського–Серпінського–Пірса та їхні застосування / О. М. Барановський, М. В. Працьовитий, Г. М. Торбін. Проект «Наукова книга». — Київ : Наук. думка, 2013. — 288 с. — ISBN 9660013159.

[6] *Albeverio S.* Non-normal numbers: Full Hausdorff dimensionality vs zero dimensionality / S. Albeverio, I. Garko, M. H. Ibragim, G. Torbin // *Bulletin des Sciences Mathématiques.* — 2016. — Vol. 141, № 1. — P. 1–19.

[7] *Albeverio S.* Fractal properties of singularly continuous probability distributions with independent Q^*-digits / S. Albeverio, G. Torbin // *Bull. Sci. Math.* — 2005. — Vol. 129, № 4. — P. 356–367.

[8] *Нікіфоров Р. О.* Фрактальні властивості випадкових величин з незалежними Q_∞-символами / Р. О. Нікіфоров, Г. М. Торбін // *Теорія ймовірностей та мат. статистика.* — 2012. — Т. 86. — С. 150–162.

[9] *Турбин А. Ф.* Фрактальные множества, функции, распределения / А. Ф. Турбин, Н. В. Працевитый. — Киев : Наукова думка, 1992. — 208 с.

[10] *Працьовитий М.* Геометрія і основи метричної теорії зображення дійсних чисел рядами Сільвестера / М. Працьовитий, М. Задніпряний // *Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* — 2011. — Т. 11. — С. 76–85.

[11] *Albeverio S.* The Ostrogradsky series and related Cantor-like sets / S. Albeverio, O. Baranovskyi, M. Pratsiovytyi, G. Torbin // *Acta Arithmetica.* — 2007. — Vol. 130, № 3. — P. 215–230. — ISSN 0065-1036.

[12] *Барановсъкий О.* Порівняльний аналіз метричних теорій представлень чисел рядами Енгеля і Остроградського та ланцюговими дробами / О. Барановський, М. Працьовитий, Б. Гетьман // *Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* — 2011. — Т. 12. — С. 130–139.

[13] *Гетьман Б.* Метричні властивості множини чисел, визначених умовами на їх розклади в ряд Енгеля / Б. Гетьман // *Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* — 2009. — Т. 10. — С. 88–99.

[14] *Albeverio S.* Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff–Besicovitch dimension / S. Albeverio, M. Pratsiovytyi, G. Torbin // *Ergodic Theory and Dynamical Systems.* — 2004. — Vol. 24, № 1. — P. 1–16.

[15] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів / М. В. Працьовитий. — Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

[16] *Albeverio S.* On fractal properties of non-normal numbers with respect to Rényi f-expansions generated by piecewise linear functions / S. Albeverio, Y. Kondratiev, R. Nikiforov, G. Torbin // *Bulletin des Sciences*

Mathématiques. — 2014. — Vol. 138, № 3. — P. 440–455.

[17] *Albeverio S.* On singularity and fine spectral structure of random continued fractions / S. Albeverio, Y. Kulyba, M. Pratsiovytyi, G. Torbin // *Mathematische Nachrichten.* — 2015. — Vol. 288, № 16. — P. 1803–1813.

[18] *Peres Y.* Continued fractions and dimensional gaps / Y. Peres, G. Torbin.

[19] *Albeverio S.* On the Hausdorff dimension faithfulness and the Cantor series expansion / S. Albeverio, G. Ivanenko, M. Lebid, G. Torbin. arXiv:1305.6036.

[20] *Kondratiev Y.* Cantor series expansions and packing dimension faithfulness / Y. Kondratiev, M. Lebid, O. Slutskyi, G. Torbin. arXiv:1507.05663.

[21] *Albeverio S.* On fractal phenomena connected with infinite linear IFS / S. Albeverio, Y. Kondratiev, R. Nikiforov, G. Torbin // *Math. Nachr.* — 2017. — Vol. 290, № 8-9. — P. 1163–1176.

[22] *Брагин А. Б.* Сингулярные распределения случайных величин, заданных с помощью цепных дробей / А. Б. Брагин // *Случайные эволюции: теоретические и прикладные задачи.* — 1992. — С. 10–16.

[23] *Булдыгин В. В.* Функциональные методы в задачах суммирования случайных величин / В. В. Булдыгин, С. А. Солнцев. — Киев : Наук. думка, 1989. — 186 с.

[24] *Іваненко Г. В.* Ергодичний підхід до дослідження сингулярних ймовірнісних мір / Г. В. Іваненко, Р. О. Нікіфоров, Г. М. Торбін // *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* — 2006. — № 7. — С. 126–142.

[25] *Кахан Ж. П.* Случайные функциональные ряды / Ж. П. Кахан. — Москва : Мир, 1973. — 302 с.

[26] *Лузин Н. Н.* Интеграл и тригонометрический ряд / Н. Н. Лузин. — Москва : ГИТТЛ, 1951. — 550 с.

[27] *Працевитый Н. В.* Случайные величины с фрактальными носителями канторовского типа / Н. В. Працевитый.

[28] *Працевитый Н. В.* Равномерные и квазиравномерные сингулярные распределения канторовского типа / Н. В. Працевитый // Исследования по теоретическим и прикладным вопросам математики. — Киев : Ин-т математики АН Украины, 1986. — С. 100.

[29] *Працевитый Н. В.* Геометрические вероятности на фрактальных совершенных абсолютно самоподобных множествах пространства R^1 / Н. В. Працевитый // Применение аналитических методов в вероятностных задачах. — Киев : Ин-т математики АН Украины, 1986. — С. 100–109.

[30] *Працевитый Н. В.* Случайные величины с независимыми Q_2-символами / Н. В. Працевитый // *Асимптотические методы в исследовании стохастических моделей.* — 1987. — С. 92–102.

[31] *Працьовитий М. В.* Один клас випадкових величин типу Джессена–Вінтнера / М. В. Працьовитий, Г. М. Торбін // *Доповіді НАН України.* — 1998. — Т. 4. — С. 48–54.

[32] *Працьовитий М. В.* Про класифікацію одновимірних сингулярно неперервних ймовірнісних мір за їх спектральними властивостями / М. В. Працьовитий, Г. М. Торбін // *Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* — 2006. — Т. 7. — С. 95–104.

[33] *Торбін Г. М.* Критерії належності випадкової величини з незалежними Q^*-знаками до кожного з чистих типів / Г. М. Торбін // *Наукові записки НПУ імені М.П.Драгоманова. Фізико-математичні науки.* — 1999. — Т. 1. — С. 152–166.

[34] *Торбін Г. М.* Випадкові величини типу Джессена–Вінтнера та їх фрактальні властивості : Дис. на здобуття наукового ступеня канд. фіз.-мат. наук. / Торбін Григорій Мирославович. — Київ : НПУ імені

М.П.Драгоманова, 1998. — 130 с.

[35] *Торбін Г. М.* Фрактальні розподіли ймовірностей і перетворення, що зберігають розмірність Хаусдорфа–Безиковича: : дис... доктора фіз.-мат. наук: 01.01.05 / Торбін Григорій Мирославович. — Інститут математики НАН України, 2008. — 404 с.

[36] *Торбін Г. М.* Топологічні властивості спектра випадкової величини, заданої за допомогою збіжного знакододатного ряду / Г. М. Торбін // *Фрактальний аналіз та суміжні питання.* — 1998. — № 1. — С. 45–52.

[37] *Хеннекен П. Л.* Теория вероятностей и некоторые ее приложения / П. Л. Хеннекен, А. Тортра. — Москва : Наука, 1974. — 472 с.

[38] *Школьний О. В.* Випадкові величини, задані розподілами своїх цифр в системі числення з комплексною основою / О. В. Школьний // *Укр. мат. журн.* — 1998. — Т. 50, № 12. — С. 1715–1720.

[39] *Alexander J. C.* The entropy of a certain infinitely convolved Bernoulli measure / J. C. Alexander, D. B. Zagier // *Journal of the London Mathematical Society.* — 1991. — Vol. s2-44, № 1. — P. 121–134.

[40] Fractal Geometry and Stochastics II / Ed. by C. Bandt, S. Graf, M. Zähle. — Basel, Boston, Berlin : Birkhäuser, 2000.

[41] Fractal Geometry and Stochastics III / Ed. by C. Bandt, S. Graf, M. Zähle. — Basel, Boston, Berlin : Birkhäuser, 2003.

[42] *Bovier A.* Bernoulli convolutions, dynamical systems and automata / A. Bovier // Disordered systems / Ed. by R. Bamón, J.-M. Gambaudo, S. Martínez. — Paris : Hermann, 1996. — Travaux en Cours [Works in Progress]. — P. 63–86.

[43] *Chatterji S. D.* Certain induced measures on the unit interval / S. D. Chatterji // *Journal of the London Mathematical Society.* — 1963. — Vol. s1-38, № 1. — P. 325–331.

[44] *Chatterji S. D.* Certain induced measures and the fractional dimensions of their «supports» / S. D. Chatterji // *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw Gebiete.* — 1964. — Vol. 3, № 3. — P. 184–192.

[45] *Csiszár I.* On the dimension and entropy of order α of the mixture of probability distributions / I. Csiszár // *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae.* — 1962. — Vol. 13, № 3-4. — P. 245–255.

[46] *Das M.* Hausdorff measures, dimensions and mutual singularity / M. Das // *Transactions of the American Mathematical Society.* — 2005. — Vol. 357, № 11. — P. 4249–4269.

[47] *Erdos P.* On a family of symmetric Bernoulli convolutions / P. Erdos // *American Journal of Mathematics.* — 1939. — Vol. 61, № 4. — P. 974–976.

[48] *Feng D.-J.* Bernoulli convolutions associated with certain non-Pisot numbers / D.-J. Feng, Y. Wang // *Advances in Mathematics.* — 2004. — Vol. 187, № 1. — P. 173–194.

[49] *Garsia A. M.* Entropy and singularity of infinite convolutions / A. M. Garsia // *Pacific Journal of Mathematics.* — 1963. — Vol. 13, № 4. — P. 1159–1169.

[50] *Kakutani S.* Equivalence of infinite product measures / S. Kakutani // *Annals of Mathematics.* — 1948. — Vol. 49, № 1. — P. 214–224.

[51] *Kinney J. R.* Note on a singular function of Minkowski / J. R. Kinney // *Proceedings of the American Mathematical Society.* — 1960. — Vol. 11, № 5. — P. 788–794.

[52] *Lévy P. M.* Sur les séries dont les termes sont des variables éventuelles indépendantes / P. M. Lévy // *Studia Mathematica.* — 1931. — T. 3, № 1. — P. 119–155.

[53] *Marsaglia G.* Random variables with independent binary digits / G. Marsaglia // *The Annals of Mathematical Statistics.* — 1971. — Vol. 42, № 6. — P. 1922–1929.

[54] *Mauldin R. D.* The equivalence of some Bernoulli convolutions to Lebesgue measure / R. D. Mauldin, K. Simon // *Proceedings of the American Mathematical Society.* — 1998. — Vol. 126, № 9. — P. 2733–2737.

[55] *Нікіфоров Р. О.* Ергодичні властивості Q_∞-зображень та фрактальні властивості ймовірнісних мір з незалежними Q_∞-символами / Р. О. Нікіфоров, Г. М. Торбін // *Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* — 2008. — № 9. — С. 81–103.

[56] *Peres Y.* Absolute continuity of Bernoulli convolutions, a simple proof / Y. Peres, B. Solomyak // *Math. Res. Lett.* — 1996. — Vol. 3, no. 2. — P. 231–239.

[57] *Peres Y.* Sixty years of Bernoulli convolutions. In fractal geometry and stochastics II / Y. Peres, W. Schlag, B. Solomyak // *Studia Math.* — 2000. — P. 39–65.

[58] *Salem R.* On some singular monotonic functions which are strictly increasing / R. Salem // *Transactions of the American Mathematical Society.* — 1943. — Vol. 53, № 3. — P. 427–439.

[59] *Sidorov N.* Ergodic-theoretic properties of certain Bernoulli convolutions / N. Sidorov // *Acta Mathematica Hungarica.* — 2003. — Vol. 101, № 4. — P. 345–355.

[60] *Sidorov N.* Bijective arithmetic codings of hyperbolic automorphisms of the 2-torus, and binary quadratic forms / N. Sidorov, A. Vershik // *Journal of Dynamical and Control Systems.* — 1998. — Vol. 4, № 3. — P. 365–399.

[61] *Solomyak B.* Measure and dimension for some fractal families / B. Solomyak // *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.* — 1998. — Vol. 124, № 3. — P. 531–546.

[62] *Solomyak B.* On the random series $\sum \pm\lambda^n$ (an Erdös problem) / B. Solomyak // *Annals of Mathematics.* — 1995. — Vol. 142. — P. 611–

625.

[63] *Гарко І.* G-ізоморфізм систем числення та довірчість систем покриттів. I / І. Гарко, Р. Нікіфоров, Г. М. Торбін // *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* — 2014. — Т. 16, № 1. — С. 120–133.

[64] *Гарко І.* G-ізоморфізм систем числення та довірчість систем покриттів. II / І. Гарко, Р. Нікіфоров, Г. М. Торбін // *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* — 2014. — Т. 16, № 2. — С. 6–17.

[65] *Гарко І.* Про G-ізоморфізм ймовірнісних та розмірнісних теорій розкладів дійсних чисел та фрактальну довірчість систем покриттів / І. Гарко, Р. Нікіфоров, Г. М. Торбін // *Теорія ймовірностей та математична статистика.* — 2016. — Т. 94. — С. 16–35.

[66] *Гарко І.* Про залежність фрактальних властивостей множини суттєво анормальних чисел від системи числення / І. Гарко, Г. М. Торбін // *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* — 2012. — Т. 13. — С. 73–80.

[67] *Гарко І.* Самоподібні фрактали в метричних просторах / І. Гарко // *Студентські фізико-математичні етюди.* — 2010. — Т. 9. — С. 70–77.

[68] *Гарко І.* Про суперфрактальність множини Q-суттєво анормальних чисел / І. Гарко // *Студентські фізико-математичні етюди.* — 2012. — Т. 11, № 1. — С. 41–48.

[69] *Гарко І.* Про x-Q_∞-зображення дійсних чисел та проблеми, з ним пов'язані // Міжнародна наукова конференція «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь», присвячена 80-річчю Шкіля М.І., Київ, 13–14 грудня 2012 р.: Тези допов. — Київ : 2012. — С. 48.

[70] *Гарко І.* Методичні аспекти вивчення елементів фракталів у школі // Міжнародна наукова конференція «Актуальні проблеми методо-

логії та методики навчання фізико-математичних дисциплін», присвячена 80-річчю Горбачука І.Т., Київ, 18 січня 2013 р.: Тези допов. — Київ : 2013. — С. 199.

[71] *Гарко І.* Про залежність фрактальних властивостей множини суттєво анормальних чисел від системи числення // XVI Всеукраїнська науково-практична конференція «Молодь, освіта, наука, культура і національна самосвідомість в умовах європейської інтеграції», Київ, 25-26 квітня 2013 р.: Тези допов. — Київ : 2013. — С. 24.

[72] *Garko I.* On relations between systems of numerations and fractal properties of sets of non-normal and essentially non-normal numbers // The Fifth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations, September 16–20, 2013, Kyiv, Ukraine: Abstacts. — Kyiv : 2013. — P. 93–95.

[73] *Гарко І.* Про залежність суперфрактальності множини суттєво анормальних чисел від системи числення // Міжнародна наукова конференція «Методика викладання математики в середній та вищій школі», присвячена 75-річчю Колесник Т.В., Київ, 4 грудня 2013 р.: Тези допов. — Київ : 2013. — С. 45.

[74] *Гарко І.* Суттєво анормальні числа: нові результати та відкриті проблеми // XVII Всеукраїнська науково-практична конференція «Молодь, освіта, наука, культура і національна самосвідомість в умовах європейської інтеграції», Київ, 25-26 квітня 2014 р.: Тези допов. — Київ : 2014. — С. 34.

[75] *Гарко І.* Про ймовірнісний підхід до аналізу фрактатальних властивостей множини суттєво анормальних чисел // П'ятнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, секція III: Теорія ймовірностей та математична статистика, Київ, 15–17 травня 2014 р.: Тези допов. — Київ : 2014. — С. 39.

[76] *Garko I.* On new approach to the study of fractal properties of probabil-

ity measures with independent x-Q_∞-digits // International Conference «Probability, Reability and Stochastic Optimization», April 7-10, 2015, Kyiv, Ukraine: Abstacts. — Kyiv : 2015. — P. 18–19.

[77] *Garko I.* On fractal properties of probability measures with independent I-Q_∞-digits // International Conference «Dynamical System And Their Application», June 22-26, 2015, Kyiv, Ukraine: Abstacts. — Kyiv : 2015. — P. 59.

[78] *Гарко І.* Про фрактальну довірчість систем покриттів, породжену I-Q_∞-розкладами та її застосування // П'ята Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання», Київ, 25–26 квітня 2016 р.: Тези допов. — Київ : 2016. — С. 48.

[79] *Гарко І.* Фрактальні властивості ймовірнісних мір, породжених поліосновними розкладами дійсних чисел та їх застосування // Всеукраїнська науково-методична конференція «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі», пам'яті Левіщенка С.С., Київ, 7-8 жовтня 2016 р.: Тези допов. — Київ : 2016. — С. 39.

[80] *Гарко І.* Про G-ізоморфізм ймовірнісних теорій систем числення та фрактальну довірчість сімейств покриттів // Сімнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, секція III: Теорія ймовірностей та математична статистика, Київ, 19–20 травня 2016 р.: Тези допов. — Київ : 2016. — С. 36–39.

[81] *Гарко І.* Фрактальні властивості ймовірнісних мір, породжених поліосновними розкладами дійсних чисел та їх застосування // Шоста Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, 21–22 квітня 2017 р.: Тези допов. — Київ : 2017. — С. 59.

[82] *Garko I.* On relations between systems of numerations and fractal properties of subsets of non-normal numbers // International Conference «Numeration 2017», June 5–9, 2017, Roma, Italy: Abstacts. — Roma : 2017. —

P. 125.

[83] *Besicovitch A. S.* On existence of subsets of finite measure of sets of infinite measure / A. S. Besicovitch // *Indagationes Math.* — 1952. — Vol. 14. — P. 339–344.

[84] *Турбин А. Ф.* Фрактальные множества, функции, распределения / А. Ф. Турбин, Н. В. Працевитый. — Киев : Наукова думка, 1992. — 208 с.

[85] *Працьовитий М. В.* Аналітичне (символьне) представлення неперервних перетворень $\mathbb{R}^1$, що зберігають розмірність Хаусдорфа-Безиковича / М. В. Працьовитий, Г. М. Торбін // *Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* — 2003. — Т. 4. — С. 207–215.

[86] *Billingsley P.* Hausdorff dimension in probability theory II / P. Billingsley // *Illinois Journal of Mathematics.* — 1961. — Vol. 5, № 2. — P. 291–298.

[87] *Cutler C. D.* A note on equivalent interval covering systems for Hausdorff dimension on R / C. D. Cutler // *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences.* — 1988. — Vol. 11, № 4. — P. 643–649.

[88] *Billingsley P.* Hausdorff dimension in probability theory. II. / P. Billingsley // *Illinois J. Math.* — 1961. — Vol. 5. — P. 291–298.

[89] *Нікіфоров Р. О.* Про розмірність Хаусдорфа–Безиковича узагальнених самоподібних множин, породжених нескінченними IFS / Р. О. Нікіфоров, Г. М. Торбін // *Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* — 2012. — Т. 13, № 1. — С. 151–162.

[90] *Besicovitch A. S.* On the fundamental geometrical properties of linearly measurable plane sets of points / A. S. Besicovitch // *Mathematische Annalen.* — 1928. — Vol. 98, № 1. — P. 422–464.

[91] *Eggleston H. G.* The fractional dimension of a set defined by decimal properties / H. G. Eggleston // *The Quarterly Journal of Mathematics.* —

1949. — Vol. 20, № 1. — P. 31–36.

[92] *Albeverio S.* Topological and fractal properties of real numbers which are not normal / S. Albeverio, M. Pratsiovytyi, G. Torbin // *Bulletin des Sciences Mathématiques.* — 2005. — Vol. 129, № 8. — P. 615–630.

[93] *Albeverio S.* Singular probability distributions and fractal properties of sets of real numbers defined by the asymptotic frequencies of their s-adic digits / S. Albeverio, M. Pratsiovytyi, G. Torbin // *Ukrainian Mathematical Journal.* — 2005. — Vol. 57, № 9. — P. 1361–1370.

[94] *Barnsley M. F.* Fractals everywhere / M. F. Barnsley. — Boston : Academic Press, 1988. — xii, 394 p.

[95] *Barreira L.* Distribution of frequencies of digits via multifractal analysis / L. Barreira, B. Saussol, J. Schmeling // *Journal of Number Theory.* — 2002. — Vol. 97, № 2. — P. 410–438.

[96] *Barreira L.* Frequency of digits in the Lüroth expansion / L. Barreira, G. Iommi // *Journal of Number Theory.* — 2009. — Vol. 129, № 6. — P. 1479–1490.

[97] *Kraaikamp C.* On a problem of Schweiger concerning normal numbers / C. Kraaikamp, H. Nakada // *Journal of Number Theory.* — 2001. — Vol. 86, № 2. — P. 330–340.

[98] *Olsen L.* Applications of multifractal divergence points to some sets of d-tuples of numbers defined by their N-adic expansion / L. Olsen // *Bull. Sci. Math.* — 2004. — Vol. 128. — P. 265–289.

[99] *Olsen L.* Applications of multifractal divergence points to sets of numbers defined by their N-adic expansion / L. Olsen // *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* — 2004. — Vol. 136, № 1. — P. 139–165.

[100] *Olsen L.* Extremely non-normal continued fractions / L. Olsen // *Acta Arithmetica.* — 2003. — Vol. 108, № 2. — P. 191–202.

[101] *Olsen L.* Normal and non-normal points of self-similar sets and divergence points of self-similar measures / L. Olsen, S. Winter // *Journal of the*

London Mathematical Society. — 2003. — Vol. 67, № 1. — P. 103–122.

[102] *Працьовитий М. В.* Суперфрактальність множини чисел, які не мають частоти n-адичних знаків, та фрактальні розподіли ймовірностей / М. В. Працьовитий, Г. М. Торбін // *Укр. мат. журн.* — 1995. — Т. 47, № 7. — С. 971–975.

[103] *Kempton T.* Digit frequencies and Bernoulli convolutions / T. Kempton // *Indagationes Mathematicae.* — 2014. — Vol. 25, № 4. — P. 832–842.

[104] *Edgar G. A.* Measure, topology, and fractal geometry / G. A. Edgar. Undergraduate texts in mathematics. — 2nd ed edition. — New York : Springer-Verlag, 2008. — xv, 268 p.

[105] *Гливенко Е. В.* О мере типа Хаусдорфа / Е. В. Гливенко // *Математический сборник.* — 1956. — Т. 39 (81), № 4. — С. 423–432.

[106] *Ивашев-Мусатов О. С.* m-множества и h-меры / О. С. Ивашев-Мусатов // *Матем. заметки.* — 1968. — Т. 3, № 4. — С. 441–447.

[107] *Марков Н. Г.* Гармоническая мера и мера Хаусдорфа / Н. Г. Марков // *Докл. АН СССР.* — 1985. — Т. 280, № 3. — С. 545–548.

[108] *Федерер Г.* Геометрическая теория меры / Г. Федерер. — Москва : Наука, 1987. — 760 с.

[109] *Шалат Т.* О мере Хаусдорфа линейных множеств / Т. Шалат // *Чехословацкий математический журнал.* — 1961. — Т. 11 (86), № 1. — С. 24–56.

[110] *Bandt C.* Some questions and examples concerning Hausdorff measures / C. Bandt, U. Feiste // *Mathematische Nachrichten.* — 1981. — Vol. 104, № 1. — P. 171–182.

[111] *Besicovitch A. S.* On the Kolmogoroff maximum and minimum measures / A. S. Besicovitch // *Mathematische Annalen.* — 1937. — Vol. 113, № 1. — P. 416–423.

[112] *Besicovitch A. S.* On the fundamental geometrical properties of linearly measurable plane sets of points (II) / A. S. Besicovitch // *Mathematische*

Annalen. — 1938. — Vol. 115, № 1. — P. 296–329.

[113] *Besicovitch A. S.* On the fundamental geometrical properties of linearly measurable plane sets of points (III) / A. S. Besicovitch // *Mathematische Annalen.* — 1939. — Vol. 116, № 1. — P. 349–357.

[114] *Besicovitch A. S.* On density of perfect sets / A. S. Besicovitch // *Journal of the London Mathematical Society.* — 1956. — Vol. s1-31, № 1. — P. 48–53.

[115] *Besicovitch A. S.* On fundamental geometric properties of plane line-sets / A. S. Besicovitch // *Journal of the London Mathematical Society.* — 1964. — Vol. s1-39, № 1. — P. 441–448.

[116] *Carathéodory C.* Über das lineare Mass von Punktmengen – eine Verallgemeinerung des Längenbegriffs / C. Carathéodory // *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse.* — 1914. — S. 404–426.

[117] *Carleson L.* On null-sets for continuous analytic functions / L. Carleson // *Arkiv för Matematik.* — 1951. — Vol. 1, № 4. — P. 311–318.

[118] *Carleson L.* On the connection between Hausdorff measures and capacity / L. Carleson // *Arkiv för Matematik.* — 1958. — Vol. 3, № 5. — P. 403–406.

[119] *Csörnyei M.* Scaling properties of Hausdorff and packing measures / M. Csörnyei, R. D. Mauldin // *Mathematische Annalen.* — 2001. — Vol. 319, № 4. — P. 817–836.

[120] *Dvoretzky A.* A note on Hausdorff dimension functions / A. Dvoretzky // *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.* — 1948. — Vol. 44, № 1. — P. 13–16.

[121] *Hatano K.* Evaluation of Hausdorff measures of generalized Cantor sets / K. Hatano // *J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I Math.* — 1968. — Vol. 32. — P. 371–379.

[122] *Hausdorff F.* Dimension und äußeres maß / F. Hausdorff // *Mathematische Annalen.* — 1918. — Bd. 79, № 1-2. — S. 157–179.

[123] *Jung S.-M.* On the Hausdorff measure of a class of self-similar sets / S.-M. Jung // *Real Anal. Exchange.* — 1998. — Vol. 24, № 1. — P. 121–138.

[124] *Mattila P.* Geometry of sets and measures in Euclidean spaces: Fractals and rectifiability / P. Mattila. — 1st pbk. ed edition. — Cambridge [England] and New York : Cambridge University Press, 1999. — Vol. 44 of *Cambridge studies in advanced mathematics.* — xii, 343 p.

[125] *Moran P. A. P.* Additive functions of intervals and Hausdorff measure / P. A. P. Moran // *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.* — 1946. — Vol. 42, № 1. — P. 15–23.

[126] *Rogers C. A.* The analysis of additive set functions in Euclidean space / C. A. Rogers, S. J. Taylor // *Acta Mathematica.* — 1959. — Vol. 101, № 3-4. — P. 273–302.

[127] *Rogers C. A.* Additive set functions in Euclidean space. II / C. A. Rogers, S. J. Taylor // *Acta Mathematica.* — 1963. — Vol. 109, № 1. — P. 207–240.

[128] *Rogers C. A.* Hausdorff measures / C. A. Rogers. Cambridge mathematical library. — 2 edition edition. — Cambridge [England] and New York, NY, USA : Cambridge University Press, 1998. — xxx, 195 p.

[129] *Zhou Z.* Twelve open problems on the exact value of the Hausdorff measure and on topological entropy: a brief survey of recent results / Z. Zhou, L. Feng // *Nonlinearity.* — 2004. — Vol. 17. — P. 493–502.

[130] *Hausdorff F.* Dimension und äußeres maß / F. Hausdorff // *Math. Ann.* — 1918. — Bd. 79. — S. 157–179.

[131] *Falconer K. J.* Fractal geometry: Mathematical foundations and applications / K. J. Falconer. — Chichester and New York : Wiley, 1997. — xxii, 288 p.

[132] *Урысон П. С.* Труды по топологии и другим областям математики / П. С. Урысон. — М : Гостехтеоретиздат, 1951. — Т. 1. — 512 с.

[133] *Pontrjagin L.* Sur une propriété métrique de la dimension / L. Pontrjagin, L. Schnirelmann // *Annals of Mathematics (Second Series).* — 1932. — T. 33, № 1. — P. 156–162.

[134] *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы / Б. Мандельброт. Компьютинг в математике, физике, биологии. — Москва : Институт компьютерных исследований, 2002. — 656 с.

[135] *Gillis J.* Note on a theorem of myrberg / J. Gillis // *Proc. Cambridge Philos. Soc.* — 1937. — Vol. 33. — P. 419–424.

[136] *Billingsley P.* Ergodic theory and information / P. Billingsley. — reprint edition. — Huntington, N.Y. : R.E. Krieger Pub. Co., 1978. — xiii, 193 p.

[137] *Биллингслей П.* Эргодическая теория и информация / П. Биллингслей. — Москва : Мир, 1969. — 238 с.

[138] *Витушкин А. Г.* Несоизмеримость минимальной линейной меры с длиной множества по Хаусдорфу / А. Г. Витушкин, Л. Д. Иванов, М. С. Мельников // *Докл. АН УССР.* — 1963. — Т. 151, № 6. — С. 1256–1259.

[139] *Колмогоров А. Н.* ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах / А. Н. Колмогоров, В. М. Тихомиров // *Успехи мат. наук.* — 1959. — Т. 14, № 2(86). — С. 3–86.

[140] *Кюрчев Д. В.* Про розмірність Хаусдорфа-Безиковича деяких множин ланцюгових дробів / Д. В. Кюрчев // *Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* — 2004. — Т. 5. — С. 285–291.

[141] *Явид К.* Оценка размерности Хаусдорфа множества сингулярных реакторов / К. Явид // *Докл. АН БССР.* — 1987. — Т. 31, № 9. — С. 777–780.

[142] *Balatoni J.* Az entropia fogalmarol / J. Balatoni, A. Rényi // *Magyar tudomanyos akademia matematikai kutato intezetenek.* — 1956. — № 1. — P. 9–40.

[143] *Bandt C.* On the open set condition for self-similar fractals / C. Bandt, N. V. Hung, H. Rao // *Proceedings of the American Mathematical Society.* — 2006. — Vol. 134, № 5. — P. 1369–1374.

[144] *Barański K.* Hausdorff dimension of the limit sets of some planar geometric constructions / K. Barański // *Advances in Mathematics.* — 2007. — Vol. 210, № 1. — P. 215–245.

[145] *Barreira L.* Sets of "non-typical" points have full topological entropy and full Hausdorff dimension / L. Barreira, J. Schmeling // *Israel Journal of Mathematics.* — 2000. — Vol. 116, № 1. — P. 29–70.

[146] *Beardon A. F.* On the Hausdorff dimension of general Cantor sets / A. F. Beardon // *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.* — 1965. — Vol. 61, № 3. — P. 679–694.

[147] *Besicovitch A. S.* On linear sets of points of fractional dimension / A. S. Besicovitch // *Mathematische Annalen.* — 1929. — Vol. 101, № 1. — P. 161–193.

[148] *Besicovitch A. S.* On the sum of digits of real numbers represented in the dyadic system / A. S. Besicovitch // *Mathematische Annalen.* — 1935. — Vol. 110, № 1. — P. 321–330.

[149] *Besicovitch A. S.* Sets of points of non-differentiability of absolutely continuous functions and of divergence of Fejér sums / A. S. Besicovitch // *Mathematische Annalen.* — 1935. — Vol. 110, № 1. — P. 331–335.

[150] *Besicovitch A. S.* On linear sets of points of fractional dimension. (II) / A. S. Besicovitch // *Journal of the London Mathematical Society.* — 1968. — Vol. s1-43, № 1. — P. 548–550.

[151] *Besicovitch A. S.* Sets of fractional dimensions. V: On dimensional numbers of some continuous curves / A. S. Besicovitch, H. D. Ursell // *Journal of the London Mathematical Society.* — 1937. — Vol. s1-12, № 1. — P. 18–25.

[152] *Billingsley P.* Hausdorff dimension in probability theory / P. Billingsley // *Illinois Journal of Mathematics.* — 1960. — Vol. 4, № 2. — P. 187–209.

[153] *Bumby R. T.* Hausdorff dimension of sets arising in number theory / R. T. Bumby // Number Theory / Ed. by D. V. Chudnovsky, G. V. Chudnovsky, H. Cohn, M. B. Nathanson. — Springer Berlin Heidelberg, 1985. — Vol. 1135 of *Lecture Notes in Mathematics.* — P. 1–8. — ISBN 978-3-540-15649-9.

[154] *Carleson L.* Selected problems on exceptional sets / L. Carleson. — Princeton : Van Nostrand, 1967. — Vol. 13 of *Van Nostrand mathematical studies.* — 151 p.

[155] *Falconer K. J.* Techniques in fractal geometry / K. J. Falconer. — Chichester and New York : Wiley, 1997. — xvii, 256 p.

[156] *Falconer K. J.* The geometry of fractal sets / K. J. Falconer. — Cambridge : Cambridge University Press, 1985. — Vol. 85 of *Cambridge tracts in mathematics.* — xiv, 162 p.

[157] *Falconer K. J.* The Hausdorff dimension of self-affine fractals / K. J. Falconer // *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.* — 1988. — Vol. 103, № 2. — P. 339–350.

[158] *Fan A.-H.* Recurrence, dimension and entropy / A.-H. Fan, D.-J. Feng, J. Wu // *Journal of the London Mathematical Society.* — 2001. — Vol. 64, № 1. — P. 229–244.

[159] *Feng D.-J.* Some dimensional results for homogeneous Moran sets / D.-J. Feng, Z.-Y. Wen, J. Wu // *Science in China Series A: Mathematics.* — 1997. — Vol. 40, № 5. — P. 475–482.

[160] *Gács P.* Hausdorff-dimension and probability distributions / P. Gács // *Periodica Mathematica Hungarica.* — 1973. — Vol. 3, № 1-2. — P. 59–71. — ISSN 0031-5303.

[161] *Good I. J.* The fractional dimensional theory of continued fractions / I. J. Good // *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Soci-*

ety. — 1941. — Vol. 37, № 3. — P. 199–228.

[162] *Hatano K.* Notes on Hausdorff dimensions of Cartesian product sets / K. Hatano // *Hiroshima Math. J.* — 1971. — Vol. 1, № 1. — P. 17–25.

[163] *Hensley D.* The Hausdorff dimensions of some continued fraction Cantor sets / D. Hensley // *Journal of Number Theory.* — 1989. — Vol. 33, № 2. — P. 182–198.

[164] *Hensley D.* Continued fraction Cantor sets, Hausdorff dimension, and functional analysis / D. Hensley // *Journal of Number Theory.* — 1992. — Vol. 40, № 3. — P. 336–358.

[165] *Hirst K. E.* A problem in the fractional dimension theory of continued fractions / K. E. Hirst // *The Quarterly Journal of Mathematics.* — 1970. — Vol. 21, № 1. — P. 29–35.

[166] *Ibragim M. H.* On fractal faithfulness and fine fractal properties of random variables with independent Q^*-digits / M. H. Ibragim, G. Torbin // *Modern Stochastics: Theory and Applications.* — 2016. — Vol. 3, № 2. — P. 119–131.

[167] *Jenkinson O.* Computing the dimension of dynamically defined sets: e_2 and bounded continued fractions / O. Jenkinson, M. Pollicott // *Ergodic Theory and Dynamical Systems.* — 2001. — Vol. 21, № 5. — P. 1429–1445.

[168] *Kaufman R.* On Hausdorff dimension of projections / R. Kaufman // *Mathematika.* — 1968. — Vol. 15, № 2. — P. 153–155.

[169] *Kinney J. R.* The dimension of some sets defined in terms of f-expansions / J. R. Kinney, T. S. Pitcher // *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw Gebiete.* — 1966. — Vol. 4, № 4. — P. 293–315.

[170] *Kifer Y.* A dimension gap for continued fractions with independent digits / Y. Kifer, Y. Peres, B. Weiss // *Israel Journal of Mathematics.* — 2001. — Vol. 124, № 1. — P. 61–76.

[171] *Ledrappier F.* A dimension formula for Bernoulli convolutions / F. Ledrappier, A. Porzio // *J. Stat. Phys. (Journal of Statistical Physics).* — 1994. — Vol. 76, № 5-6. — P. 1307–1327.

[172] *Dekking F. M.* Hausdorff dimension of subsets of Moran fractals with prescribed group frequency of their codings / F. M. Dekking, W. Li // *Nonlinearity.* — 2003. — Vol. 16, № 1. — P. 187–199.

[173] *McMullen C.* The Hausdorff dimension of general Sierpiński carpets / C. McMullen // *Nagoya Math. J.* — 1984. — Vol. 96. — P. 1–9.

[174] *Li W.* An equivalent definition of packing dimension and its application / W. Li // *Nonlinear Analysis: Real World Applications.* — 2009. — Vol. 10, № 3. — P. 1618–1626.

[175] *Li H.* Classification of Moran fractals / H. Li, Q. Wang, L. Xi // *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* — 2011. — Vol. 378, № 1. — P. 230–237.

[176] *Olsen L.* A multifractal formalism / L. Olsen // *Advances in Mathematics.* — 1995. — Vol. 116, № 1. — P. 82–196.

[177] *Pesin Y.* Dimension theory in dynamical systems: Contemporary views and applications / Y. Pesin. Chicago lectures in mathematics series. — Chicago : University of Chicago Press, 1997. — xi, 304 p.

[178] *Rényi A.* On the dimension and entropy of probability distributions / A. Rényi // *Acta Mathematica Sinica, English Series.* — 1959. — Vol. 10, № 1-2. — P. 193–215.

[179] *Rey J.-M.* The role of Billingsley dimensions in computing fractal dimensions on Cantor-like spaces / J.-M. Rey // *Proceedings of the American Mathematical Society.* — 2000. — Vol. 128, № 2. — P. 561–572.

[180] *Tricot C.* Two definitions of fractional dimension / C. Tricot // *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.* — 1982. — Vol. 91, № 1. — P. 57–74.

[181] *Young L.-S.* Dimension, entropy and Lyapunov exponents / L.-S. Young // *Ergodic Theory and Dynamical Systems.* — 1982. — Vol. 2, № 1. — P. 109–124.

[182] *Лебідь М.* Про порівнянні та непорівнянні міри Хаусдорфа / М. Лебідь, Г. Торбін // *Доп. НАН України.* — 2014. — № 8. — С. 35–40.

[183] *Erdos P.* Some further statistical properties of the digits in Cantor's series / P. Erdos, A. Rényi // *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae.* — 1959. — Vol. 10, № 1-2. — P. 21–29.

[184] *Торбін Г.* Фрактальні властивості розподілів випадкових величин з незалежними Q^*-знаками / Г. Торбін // *Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* — 2002. — Т. 3. — С. 363–375.

[185] *Ибрагим М. Х.* О доверительности семейства цилиндров Q^*-разложения действительных чисел / М. Х. Ибрагим, Г. М. Торбин // *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* — 2012. — Т. 13, № 1. — С. 109–117.

[186] *Ибрагим М. Х.* Доверительность и фрактальные свойства вероятностных мер с независимыми Q^*-символами / М. Х. Ибрагим, Г. М. Торбин // *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* — 2012. — Т. 13, № 2. — С. 35–46.

[187] *Ібрагім М. Х.* Про новий тип достатніх умов хаусдорфової довірчості циліндрів Q^*-розкладів / М. Х. Ібрагім // *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* — 2014. — Т. 16, № 2. — С. 16–24.

[188] *Нікіфоров Р. О.* Ергодичні властивості Q_∞-зображень та фрактальні властивості ймовірнісних мір з незалежними Q_∞-символами / Р. О. Нікіфоров, Г. М. Торбін // *Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* — 2008. — Т. 9. — С. 81–103.

[189] *Bernardi M. P.* On some dimension problems for self-affine fractals / M. P. Bernardi, C. Bondioli // *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen.* — 1999. — Vol. 18, № 3. — P. 733–751.

[190] *Дороговцев А. Я.* Элементы общей теории меры и интеграла / А. Я. Дороговцев. — Киев : Вища школа, 1989. — 152 с.

[191] *Лузин Н. Н.* О несчетном множестве, являющемся множеством первой категории на всяком совершенном множестве (1928) / Н. Н. Лузин, В. Серпинский // Собрание сочинений. — Москва : Изд-во АН СССР, 1958. — Т. 2. — С. 697–698.

[192] *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной / И. П. Натансон. — Москва : Наука, 1974. — 480 с.

[193] *Окстоби Д.* Мера и категория / Д. Окстоби. — Москва : Мир, 1974. — 158 с.

[194] *Титчмарш Э. Ч.* Теория функций / Э. Ч. Титчмарш. — 2-е изд., перераб изд. — Москва : Наука, 1980. — 464 с.

[195] *Халмош П. Р.* Теория меры / П. Р. Халмош. — Москва : Факториал Пресс, 2003. — Т. 3 из *XX век. Математика и механика.* — 253 с.

[196] *Боровков А. А.* Теория вероятностей / А. А. Боровков. — Москва : Наука, 1986. — 432 с.

[197] *Гелбаум Б. Р.* Контрпримеры в анализе / Б. Р. Гелбаум, Д. М. Олмстед. — Москва : Мир, 1967. — 252 с.

[198] *Гихман И. И.* Теория вероятностей и математическая статистика / И. И. Гихман, А. В. Скороход, М. И. Ядренко. — Киев : Вища школа, 1979. — 409 с.

[199] *Колмогоров А. Н.* Теория вероятностей и математическая статистика / А. Н. Колмогоров. — Москва : Наука, 1986. — 535 с.

[200] *Королюк В. С.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В. С. Королюк, Н. И. Портенко, А. В. Скороход, А. Ф. Турбин. — Москва : Наука, 1985. — 640 с.

[201] *Лукач Е.* Характеристические функции / Е. Лукач. — Москва : Наука, 1979. — 424 с.

[202] *Прохоров Ю. В.* Теория вероятностей: Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы / Ю. В. Прохоров, Ю. А. Розанов. — Москва : Наука, 1967. — Т. 15 из *Справочная математическая библиотека.* — 496 с.

[203] *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения / В. Феллер. — Москва : Мир, 1984. — 738 с.

[204] *Ширяев А. Н.* Вероятность / А. Н. Ширяев. — М : Наука, 1980. — 576 с.

[205] *Виннишин Я. Ф.* О свертках сингулярных функций распределения / Я. Ф. Виннишин // *Стохастический анализ и его приложения.* — 1989. — С. 14–17.

[206] *Виннишин Я. Ф.* Згортки сингулярних функцій розподілу / Я. Ф. Виннишин // *Укр. мат. журн.* — 2004. — Т. 56, № 1. — С. 119–122.

[207] *Виннишин Я. Ф.* Про тип функції розподілу випадкового степеневого ряду / Я. Ф. Виннишин, В. А. Морока // *Асимптотичний аналіз випадкових еволюцій.* — 1994. — С. 65–73.

[208] *Серпинскій В.* Элементарный примеръ возрастающей функціи, имеющей почти всюду производную равную нулю / В. Серпинскій // *Математический сборник.* — 1916. — Т. 30, № 3. — С. 449–473.

[209] *Cater F. S.* Most monotone functions are not singular / F. S. Cater // *The American Mathematical Monthly.* — 1982. — Vol. 89, № 7. — P. 466–469.

[210] *Cooper M. J. P.* Dimension, measure and infinite Bernoulli convolutions / M. J. P. Cooper // *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.* — 1998. — Vol. 124, № 1. — P. 135–149.

[211] *Jessen B.* Distribution functions and the Riemann zeta function / B. Jessen, A. Wintner // *Transactions of the American Mathematical Society.* — 1935. — Vol. 38, № 1. — P. 48–88.

[212] *Zamfirescu T.* Most monotone functions are singular / T. Zamfirescu // *The American Mathematical Monthly.* — 1981. — Vol. 88, № 1. — P. 47–49.

[213] *Kakutani S.* Equivalence of infinite product measures / S. Kakutani // *Ann. of Math.* — 1948. — Vol. 49. — P. 214–224.

[214] *Albeverio S.* Image measures of infinite product measures and generalized Bernoulli convolutions / S. Albeverio, G. Torbin // *Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* — 2004. — Vol. 5. — P. 248–264.

[215] *Kullback S.* On information and sufficiency / S. Kullback, R. A. Leibler // *Annals of Math. Statistics.* — 1951. — Vol. 22. — P. 79–86.

[216] *Albeverio S.* On fine structure of singularly continuous probability measures and random variables with independent $\widetilde{Q}$-symbols / S. Albeverio, V. Koshmanenko, M. Pratsiovytyi, G. Torbin // *Methods Funct. Anal. Topology.* — 2011. — Vol. 17, № 2. — P. 97–111.

[217] *Жихарева Ю.* Зображення чисел знакододатними рядами Люрота: основи метричної теорії / Ю. Жихарєва, М. Працьовитий // *Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* — 2008. — Т. 9. — С. 200–211.

[218] *Працьовита І.* Розклади дійсних чисел в ряди Остроградського 2-го виду (O_2- та $\bar{O}_2$-зображення), їх геометрія та застосування / І. Працьовита // *Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* — 2008. — Т. 9. — С. 128–147.

[219] *Лузин Н. Н.* О существовании несчетного множества первой категории на всяком совершенном множестве (1912) / Н. Н. Лузин // Собрание сочинений. — Москва : Изд-во АН СССР, 1958. — Т. 2. — С. 692–694.

[220] *Постников А. Г.* Вероятностная теория чисел / А. Г. Постников. Математика, Кибернетика. — Москва : Знание, 1974.

[221] *Торбін Г. М.* Частотні характеристики нормальних чисел в різних системах числення / Г. М. Торбін // *Фрактальний аналіз та суміжні питання.* — 1998. — Т. 1. — С. 53–55.

[222] *Хинчин А. Я.* Цепные дроби / А. Я. Хинчин. — М.: Наука, 1978. — 112 с.

[223] *Bissinger B. H.* A generalization of continued fractions / B. H. Bissinger // *Bulletin of the American Mathematical Society.* — 1944. — Vol. 50, № 12. — P. 868–877.

[224] *Das M.* Binary expansions and multifractals / M. Das // Fractal frontiers / Ed. by M. M. Novak, T. G. Dewey. — Singapore and River Edge, NJ : World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 1997. — P. 131–139.

[225] *Everett C. J.* Representations for real numbers / C. J. Everett // *Bulletin of the American Mathematical Society.* — 1946. — Vol. 52, № 10. — P. 861–869.

[226] *Galambos J.* Representations of real numbers by infinite series / J. Galambos. Lecture Notes in Math. — Berlin : Springer-Verlag, 1976. — 146 p.

[227] *Harman G.* Metric number theory / G. Harman. — Oxford and New York : Clarendon Press and Oxford University Press, 1998. — Vol. new ser., 18 of *London Mathematical Society monographs.* — xviii, 297 p.

[228] *Iosifescu M.* Metrical theory of continued fractions / M. Iosifescu, C. Kraaikamp. — Dordrecht and Boston : Kluwer Academic Publishers, 2002. — Vol. 547 of *Mathematics and its applications.* — xix, 383 p.

[229] *Iosifescu M.* On Denjoy's canonical continued fraction expansion / M. Iosifescu, C. Kraaikamp // *Osaka Journal of Mathematics.* — 2003. — Vol. 40, № 1. — P. 235–244.

[230] *Kuratowski K.* Topology: Vol. 1 / K. Kuratowski. — New ed., rev. and augm edition. — New York : Acad. Pr, 1966. — XX, 560 p.

[231] *Rényi A.* Representations for real numbers and their ergodic properties / A. Rényi // *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae.* —

1957. — Vol. 8, № 3-4. — P. 477–493.

[232] *Šalát T.* A remark on normal numbers / T. Šalát // *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* — 1966. — Vol. 11, № 1. — P. 53–56.

[233] *Torbin G.* On *Gamma*-normality and non-normality of real numbers in different systems of numeration / G. Torbin // *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* — 2005. — Т. 6. — С. 197–209.

[234] *Li J.* Hausdorff dimensions of the divergence points of self-similar measures with the open set condition / J. Li, M. Wu, Y. Xiong // *Nonlinearity.* — 2012. — Vol. 25, № 1. — Pp. 93–105.

[235] *Kuipers L.* Uniform distribution of sequences / L. Kuipers, H. Niederreiter. Pure and applied mathematics. — New York : Wiley, 1974. — xiv, 390 p.

[236] *Торбин Г. М.* Случайные величины с независимыми Q^*-знаками / Г. М. Торбин, Н. В. Працевитый // Случайные эволюции: теоретические и прикладные задачи. — Киев : Ин-т математики АН Украины, 1992. — С. 95–104.