ВІДГУК

офіційного опонента
на дисертацію Гарко Ірини Ігорівни
«Фрактальні властивості ймовірнісних мір, породжених поліосновними розкладами дійсних чисел, та їх застосування»
подану на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика

Актуальність теми дисертації.

У дисертації запропоновано нові підходи до дослідження сингулярно неперервних ймовірнісних мір, породжених поліосновними зображеннями дійсних чисел, зокрема, $I - Q_\infty$–зображеннями, вивчення фрактальних властивостей розподілів випадкових величин з незалежними символами таких зображень і застосування отриманих результатів у ймовірнісній, метричній та розмірнісній (в сенсі розмірності Хаусдорфа–Безиковича й інших фрактальних розмірностей) теорії чисел.

На сьогодні існує вражаюча кількість систем зображення дійсних чисел, які суттєво відрізняються одна від одної. Для кожної системи існують класи фракталів та інших математичних об'єктів, які зараз інтенсивно досліджуються, завдяки, не в останню чергу, вибуховому зростанню інтересу до фрактальної тематики в останній чверті XX-го століття. Але й раніше, протягом XX-го століття, метрична, ймовірнісна та фрактальна теорії розкладів дійсних чисел розвивались, починаючи з робіт В. Ярника, Б. Біссінджера, С. Еверетта, А. Рен'ї, П. Ердеша, П. Біллінгслі, Дж. Кінні, Т. Пітчера, Ф. Швайгера та ін.

Величезну роль у розвитку цієї сучасної галузі математики відіграють численні праці М.В. Працьовитого та Г.М. Торбіна, у тому числі, зі співавторами, серед яких їхні учні, та одноосібні роботи цих учнів.

Зауважимо, що незважаючи на безсумнівні успіхи в розвитку вказаних теорій, для багатьох, навіть класичних, розкладів дійсних чисел відповідні ймовірнісні та розмірнісні теорії ще знаходяться в процесі створення. Особливо важливим для розвитку фрактального аналізу, теорії сингулярних імовірнісних мір є вдосконалення методів обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича та інших фрактальних розмірностей множин та мір, пов'язаних з класичними та й новими системами числення; вивчення аналогій між метричними, ймовірнісними та розмірнісними теоріями різних розкладів із метою узагальнення на основі цього методів побудови цих теорій.

Основне коло питань, розглянутих в дисертації, пов'язане з вивченням тонких фрактальних властивостей імовірнісних мір з незалежними $I-Q_\infty$-символами, використанням отриманих результатів для ймовірнісного підходу до вивчення перетворень, що зберігають фрактальну розмірність, та фрактальним аналізом підмножин множини, так званих, анормальних чисел.

Враховуючи теоретичну важливість такого роду досліджень, слід відзначити тему дисертації як, безсумнівно, актуальну.

Зміст роботи.

Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку з 236 використаних джерел.

У вступі з достатньою повнотою представлено отримані результати.

1-й розділ складено з означень та формулювань результатів, пов'язаних з розмірністю Хаусдорфа-Безиковича та теорії міри, використаних у тексті дисертації.

У 2-му розділі в підрозділі 2.1 дано означення $I-Q_\infty$–зображення дійсних чисел та описано властивості циліндричних відрізків $I-Q_\infty$–зображення. У підрозділі 2.2 розглянуто ергодичні властивості $I-Q_\infty$–зображення дійсних чисел (теореми 2.2.1–2.2.4). У підрозділі 2.3 введено поняття випадкової величини (в.в.) ξ з незалежними $I-Q_\infty$–символами та доведено теорему 2.3.2, яка є критерієм чистоти лебегівського типу розподілу в.в. ξ. У підрозділі 2.4 вивчено тополого-метричну структуру сингулярно неперервних розподілів з незалежними $I-Q_\infty$–символами. Доведено теорему 2.4.2, яка встановлює необхідні та достатні умови належності розподілу в.в. ξ до чистих *GC, GS, GP*–типів. Теоремі 2.4.2 передує теорема 2.4.1 про вигляд спектру в.в. ξ з незалежними однаково розподіленими $I-Q_\infty$–символами. У підрозділі 2.5 знайдено явну формулу для розмірності Хаусдорфа ймовірнісної міри μ_ξ, що відповідає в.в. ξ з незалежними $I-Q_\infty$–символами (теорема 2.5.1). Доведення теореми спирається на леми 2.5.1 та 2.5.2, які випливають з теорем Біллінглі, процитованих у 1-му розділі.

Підрозділ 2.6 є внеском у розвиток нового методу побудови метричної, ймовірнісної та розмірнісної теорій, зокрема, для $I-Q_\infty$–зображень дійсних чисел, на основі дослідження відображень, які переводять символи певного зображення у ті ж самі символи іншого зображення, і при цьому зберігають міру Лебега та розмірність Хаусдорфа–Безиковича. Такі відображення називаються в дисертації G-ізоморфізмами систем числення. У якості моделі розглянуто пару Q_∞ та $I-Q_\infty$–зображень. У лемах 2.6.1, 2.6.2 дано достатні умови, коли сім'ї множин, які є об'єднанням суміжних циліндрів одного рангу, що належать одному і тому ж циліндру попереднього рангу, Q_∞ та $I-Q_\infty$–зображень є порівнянними. Теорема 2.6.4 встановлює, що за умови попередніх лем вказане відображення φ зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича на відрізку $[0,\ \ 1]$. Теорема 2.6.5 узагальнює теорему 2.6.4 і стверджує, що якщо дві системи покриттів – вихідна та перетворена – є довірчими, то відображення φ зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича на $[0,\ \ 1]$. У теоремах 2.6.6 і 2.6.7 доведено, що сім'ї, що складаються з циліндрів Q_∞–зображення і $I-Q_\infty$–зображення та множин, які є об'єднаннями сумісних циліндрів одного рангу і належать до одного циліндра попереднього рангу, є довірчими для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на $[0,\ \ 1]$. Наслідком попередніх 3-х теорем є теорема 2.6.8, яка стверджує, що відображення φ зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича на $[0,\ \ 1]$. У теоремі 2.6.9 результат теореми 2.6.6 застосовано для отримання достатніх умов довірчості для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича для системи покриттів, яка містить тільки циліндри Q_∞–зображення. Наприкінці підрозділу 2.6 доведено лему 2.6.3, яка стверджує, що відображення φ зберігає міру Лебега на $(0,\ \ 1)$. З теореми 2.6.8 та леми 2.6.3 випливає, що відображення φ є G-ізоморфізмом.

У підрозділі 2.7 результати підрозділу 2.6 застосовано до дослідження фрактальних властивостей імовірнісних мір з незалежними $I-Q_\infty$–символами. Доведено теорему 2.7.1 про розмірність Хаусдорфа–Безиковича спектру в.в. ξ з незалежними однаково розподіленим $I-Q_\infty$–символами. В теоремі 2.7.2 знайдено достатні умови , за яких для розмірності Хаусдорфа–Безиковича міри μ_ξ, де ξ – в.в. з незалежними $I-Q_\infty$–символами можна записати явну формулу (пор. з теоремою 2.5.1). Теорема 2.7.3 стверджує, що множина $I-Q_\infty$ – суттєво анормальних чисел є множиною 2-ої категорії Бера. Теорема 2.7.4 підсумовує метричні, фрактальні та топологічні властивості $I-Q_\infty$–нормальних, квазінормальних, частково анормальних та суттєво анормальних чисел.

У підрозділі 2.8 введено поняття F та $I-F$–розкладів дійсних чисел. Зауважимо, що ланцюгові розклади, Q^*–розклади, Q_∞–розклади, розклади Люрота, Сільвестера, Остроградського–Серпінського–Пірса, Енгеля є частковими випадками F–розкладів. Теореми 2.8.1 та 2.8.2 містять умови, за яких системи надциліндрів у $I-F$ та F–розкладах є порівнянними і отже, довірчими. Наслідки 2.8.1–2.8.6 теореми 2.8.1 встановлюють довірчість надциліндрів розкладів Люрота, Остроградського–Серпінського–Пірса, Остроградського 2-го роду, Енгеля, Сільвестера та ланцюгових розкладів.

3-й розділ дисертації присвячено застосуванню ймовірнісного підходу до вивчення фрактальних властивостей підмножин анормальних чисел. У підрозділі 3.2 в теоремі 3.2.1 доведено, що множина $N(Q)$ нормальних чисел Q–розкладу чисел відрізку $[0,\ 1]$ має повну міру Лебега. Теорема 3.2.2 стверджує, що множина $L(Q)$ суттєво анормальних чисел Q–розкладу є суперфракталом, тобто міра Лебега $L(Q)$ дорівнює нулю, а розмірність Хаусдорфа–Безиковича дорівнює 1. У підрозділах 3.3 та 3.4 наведено відомі факти про Q^*–зображення дійсних чисел та про в.в. з незалежними Q^*–символами та їх властивості. Підрозділ 3.5 присвячений спростуванню гіпотези про те, що множина суттєво анормальних чисел є суперфрактальною незалежно від обраної системи числення. В теоремі 3.5.1 доведено існування такого Q^*–розкладу, що розмірність Хаусдорфа–Безиковича $L(Q^*)$ дорівнює нулю. В теоремі 3.5.2 наведено загальну умову на матрицю Q^*, за якої множина $L(Q^*)$ має властивість аномальної фрактальності. У підрозділі 3.6 в теоремі 3.6.1 наведено приклад Q^*–розкладу, для якого множина анормальних чисел $D(Q^*)$ має нульову розмірність Хаусдорфа–Безиковича. У підрозділі 3.7 введено узагальнене циліндричне зображення чисел відрізку $[0,\ 1]$, або G^*–зображення. Наведено приклад G^*–зображення, в якому не існує жодного суттєво анормального числа. З іншого боку, доведено теорему 3.7.1, в якій стверджується, що для будь-якого G^*–розкладу множина $D(G^*)$ всіх анормальних чисел є множиною 2-ої категорії Бера.

Отримані нові наукові результати.

У дисертації отримано такі основні результати.

1) Новий метод доведення довірчості локально тонких систем покриттів для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича підмножин відрізку $[0, \quad 1]$ застосовано для доведення довірчості систем надциліндрів Q_∞ та $I - Q_\infty -$ зображень дійсних чисел.

2) Знайдено достатні умови порівнянності мір Хаусдорфа, породжених системою надциліндрів узагальненого F –зображення дійсних чисел.

3) Досліджено лебегівську структуру, тополого-метричні властивості спектрів, спектральну структуру розподілів в.в. з незалежними $I - Q_\infty -$ символами.

4) Знайдено явну формулу для обчислення розмірності Хаусдорфа розподілу в.в. з незалежними $I - Q_\infty$ –символами.

5) Доведено, що відображення φ, яке переводить символи Q_∞ –зображення в символи $I - Q_\infty$ –зображення, зберігає міру Лебега та розмірність Хаусдорфа–Безиковича на відрізку $[0, \quad 1]$. На основі даних результатів показано ізоморфізм імовірнісних та розмірнісних теорій Q_∞ та $I - Q_\infty$ –зображень дійсних чисел.

6) Досліджено фрактальні властивості спектрів розподілів випадкових величин з незалежними $I - Q_\infty$ –символами.

7) На основі ймовірнісного підходу доведено суперфрактальність множин Q та $I - Q_\infty$ –суттєво анормальних чисел.

8) Спростовано гіпотезу про суперфрактальність множини суттєво анормальних чисел для будь-якої системи числення. Знайдено достатні умови аномальної фрактальності множини Q^* – суттєво анормальних чисел.

Обґрунтування отриманих результатів.

Теоретичні результати роботи містяться у перелічених вище теоремах та лемах, строго доведених із кропітким та винахідливим використанням сучасної математичної техніки, яка включає в себе методи теорії ймовірностей, метричної теорії чисел та фрактального аналізу.

Зауваження.

За текстом дисертації потрібно зробити деякі зауваження.

1. С. 71–75. Теорему 2.4.1 доведено для в.в. з незалежними однаково розподіленими $I - Q_\infty$ –символами, а доведення теореми 2.4.2 про чистоту тополого-метричних типів розподілів в.в. з незалежними $I - Q_\infty$ –символами

використовує міркування попередньої теореми. Теорема 2.4.1 є правильною і в більшій загальності. Саме таке доведення теореми 2.4.1 і треба було надати в тексті дисертації.

2. С. 77. Виникає плутанина з використанням позначення «x» на цій сторінці.

3. У підрозділі 2.8 використано $\widetilde{Q}$–зображення чисел, а в підрозділі 3.2 - Q–зображення чисел. Обидва зображення не означено в тексті.

4. Підрозділи 2.6–2.8 тематично пов'язані та складаються з дуже цікавих результатів, які було б варто помістити в окремий розділ дисертації.

5. Текст роботи містить ряд описок, на які автору було вказано усно.

Наведені зауваження мають редакторський характер і не можуть вплинути на загальну позитивну оцінку дисертації.

Викладення результатів у опублікованих працях та авторефераті.

Основні результати роботи з достатньою повнотою викладено у 22 наукових публікаціях, серед яких 5 статей у фахових виданнях, 3 статті в інших виданнях та 14 тез доповідей на конференціях, з яких 8 – міжнародні. Три статті опубліковано в наукових виданнях, включених до переліку фахових видань МОН України. Одна стаття опублікована в журналі, включеному до наукометричної бази SCOPUS. Одна стаття опублікована у фаховому виданні, переклад якої індексований в SCOPUS.

Результати дослідження належним чином представлено в авторефераті, зміст якого ідентичний з основними положеннями дисертації.

Висновки.

Дисертація є самостійним, логічно завершеним, методологічно й теоретично обґрунтованим, виконаним на високому фаховому рівні науковим дослідженням, яке містить суттєві нові результати в галузі фрактального аналізу ймовірнісних мір, породжених поліосновними розкладами дійсних чисел.

Робота має теоретичний характер. Деякі результати автора можна використовувати для читання спеціальних курсів з теорії сингулярно неперервних імовірнісних розподілів фрактального аналізу на математичних факультетах провідних університетів України та за кордоном.

Вважаю, що дисертація Гарко Ірини Ігорівни «Фрактальні властивості ймовірнісних мір, породжених поліосновними розкладами дійсних чисел, та їх застосування», подана на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика, відповідає вимогам п.п. 9, 10, 12, 13 «Порядку присудження наукових ступенів», затвердженого Постановою КМУ № 567 від 24.07.2013 р. (зі змінами, внесеними згідно з постановами КМУ № 656 від 19.08.2015 р. та № 1159 від 30.12.2015 р.), а її автор, безсумнівно, заслуговує на присудження наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика.

Офіційний опонент
доктор фіз.-мат. наук, професор,
професор кафедри математичного
аналізу та теорії ймовірностей
Національного технічного університету
України «Київський політехнічний
інститут імені Ігоря Сікорського» О.В. Іванов

16 листопада 2017 р.

Вчений секретар
КПІ ім. Ігоря Сікорського А.А. Мельниченко

Надійшов до спеціалізованої
вченої ради Д26.206.02 24.11.2017р.
секретар ради /Артемиченко Ж.Я./