НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ФОМІЧЬОВ Володимир Володимирович

УДК 519.21

Еволюція дифеоморфних броунівських стохастичних потоків

01.01.05 — теорія ймовірностей і математична статистика

А в т о р е ф е р а т

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2017

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий керівник:
доктор фізико-математичних наук, професор
ДОРОГОВЦЕВ Андрій Анатолійович,
Інститут математики НАН України,
завідувач відділу теорії випадкових процесів.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
ІВАНОВ Олександр Володимирович,
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»,
професор кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей
фізико-математичного факультету;

доктор фізико-математичних наук, професор
КОПИТКО Богдан Іванович,
Ченстоховський політехнічний університет,
професор звичайний кафедри прикладної математики
Інституту математики факультету інженерної механіки
та інформатики.

Захист відбудеться 5 грудня 2017 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.02 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий 1 листопада 2017 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Пелюх Г. П.

Загальна характеристика роботи

Актуальність теми. Виникнення теорії стохастичних потоків пов'язане з вивченням явища турбулентності. Започаткування теорії стохастичних диференціальних рівнянь в роботах К. Іто та І. І. Гіхмана і А. В. Скорохода дозволило отримувати ізотропні випадкові поля, що були введені Х. П. Робертсоном в якості математичної моделі турбулентних потоків та досліджувалися в роботах С. Іто, К. Іто і А. М. Яглома, у вигляді випадкових аналогів фазових потоків, породжених звичайними диференціальними рівняннями. Стохастичні потоки, що породжуються розв'язками стохастичних диференціальних рівнянь, були детально досліджені в роботах Х. Куніти, основні результати яких були опубліковані в 1990 році у вигляді монографії.

Однак, вже в 1979 році в дисертації Р. А. Арратья були розглянуті сімейства простих випадкових блукань на цілочисельній ґратці, кожні два з яких склеюються в момент зустрічі, і показано, що слабкою границею цих сімейств є сімейство броунівських рухів, що склеюються. Хоча відомо, що така система броунівських рухів не може бути побудована як система розв'язків стохастичного диференціального рівняння з регулярними коефіцієнтами, природно такі системи теж називати стохастичними потоками. У просторах розмірності два та три стохастичні потоки зі склеюванням були побудовані Р. В. Р. Дарлінгом.

В 1984 році Т. Е. Харріс розглянув броунівські стохастичні потоки, які є узагальненнями потоку Арратья, та довів їхнє існування при деяких умовах на коваріаційну функцію.

Приблизно з цього часу починається інтенсивне дослідження броунівських стохастичних потоків. Асимптотична поведінка відстані між будь-якими двома частинками ізотропних броунівських стохастичних потоків в евклідових просторах довільної розмірності була встановлена І. Лежаном. Еволюція геометричних характеристик множин під дією ізотропних броунівських стохастичних потоків вивчалася в роботах П. Баксендаля і Т. Е. Харріса, В. В. Пітербарга, М. Кранстона і І. Лежана, Г. Дімітрова і М. Шойцова, С. Вадламані і Р. Дж. Адлера та інших авторів. Іншим питанням, пов'язаним з геометрією стохастичних потоків, присвячена монографія Ф. Бодуена. Питання переносу маси броунівськими стохастичними потоками детально вивчалися в роботах К. Л. Зірбеля і Е. Чінлара, а також в дисертації К. Л. Зірбеля.

Різноманітним питанням, пов'язаним з теорією стохастичних потоків, присвячена монографія А. А. Дороговцева. Так, в ній розглянуто стохастичні потоки, породжені стохастичними диференціальними рівняннями зі взаємодією, отримано представлення Кларка для функціоналів від потоку Арратья, побудовано стохастичний інтеграл за цим потоком і з його використанням встановлено аналог теореми Гірсанова для потоку Арратья зі зносом, а також доведено, що n-точкові рухи потоків Харріса зі скінченним радіусом взаємодії між частинками слабко збігаються до n-точкових рухів потоку Арратья, коли цей радіус прямує до нуля.

Подальший розвиток цей напрям отримав в роботах учнів А. А. Дороговцева. Так, М. П. Лагуновою був встановлений аналог закону повторного логарифму для стохастичних потоків, породжених розв'язками стохастичних диференціальних рівнянь зі взаємодією, а Т. В. Маловічко для таких потоків була доведена теорема Гірсанова. Трохи раніше Т. В. Маловічко був доведений результат про збіжність n-точкових рухів потоків Харріса до n-точкових рухів потоку Арратья для випадку, коли коваріаційні функції цих потоків Харріса поточково збігаються вже не до індикатора нуля, який є коваріаційною функцією потоку Арратья, а до довільної додатно визначеної функції, яка може приймати відмінне від нуля значення в щонайбільше трьох точках дійсної вісі.

В роботах В. В. Конаровського вивчалися системи броунівських частинок, що склеюються, в яких взаємодія між частинками залежить також від їхньої маси. Крім того, в роботах А. Ю. Пилипенка досліджувались стохастичні потоки з відбиттям.

Принцип великих відхилень для броунівських стохастичних потоків з гладкою коваріаційною функцією та для потоку Арратья був отриманий в роботі А. А. Дороговцева і О. В. Остапенко. В роботі І. І. Ніщенко була побудована дискретна схема наближень Ойлера–Маруями для потоків Харріса. При цьому в дискретному наближенні потоку Харріса, на відміну від самого потоку, може спостерігатися порушення впорядкованості частинок. Швидкість збіжності кількісних характеристик такого порушення вивчалися К. В. Глиняною, якою також було отримано представлення для дії напівгрупи n-точкового руху потоку Харріса на функцію з ядра її генератора.

В роботі П. П. Чернеги розглядався локальний час в нулі для потоку Арратья. Асимптотична поведінка спільного розподілу взаємних кутів обходу частинок в ізотропному броунівському стохастичному потоці встановлена в роботі В. О. Кузнецова. В роботі А. А. Дороговцева, А. В. Гнедіна і М. Б. Вовчанського був доведений аналог закону повторного логарифму для розміру максимального кластера потоку Арратья при малих значеннях часового параметра. В роботі Я. А. Кореновської були отримані оцінки на поперечник образу компактної множини під дією сильного випадкового оператора, породженого потоком Арратья.

В роботах Р. Трайба і О. Заборонського досліджувалися випадкові точкові процеси, породжені потоком Арратья та континуальною системою броунівських частинок, що анігілюють у момент зустрічі. Зокрема, ними було доведено, що ці процеси є пфаффовими, та були отримані їхні ядра.

Попри інтенсивні дослідження броунівських стохастичних потоків все ще відсутнє повне розуміння пов'язаних з ними феноменів. Зокрема, залишаються відкритими багато питань, пов'язаних із наближенням броунівських стохастичних потоків із сингулярною взаємодією типу потоку Арратья дифеоморфними броунівськими стохастичними потоками. В даній дисертаційній роботі наводяться відповіді на деякі з цих питань, а саме, вивчається феномен концентрації маси в дифеоморфних броунівських стохастичних потоках з малим радіусом взаємодії між частинками та досліджується збіжність їхніх n-точкових рухів до n-точкових рухів потоку Арратья. Крім того, встановлюється асимптотична поведінка моментів відстані між частинками та n-точкових рухів для широких класів броунівських стохастичних потоків та знаходиться розподіл числа кластерів у потоці Арратья.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана в Інституті математики НАН України у відділі теорії випадкових процесів в рамках держбюджетних тем «Стохастичний аналіз складних систем», державний реєстраційний номер 0111U001002, та «Стохастичні системи із сингулярною взаємодією», державний реєстраційний номер 0116U002066.

Мета і задачі дослідження. Метою даної дисертаційної роботи є дослідження апроксимації броунівських стохастичних потоків із сингулярною взаємодією дифеоморфними броунівськими стохастичними потоками. Ця мета включає в себе наступні задачі:

- встановлення асимптотичної поведінки моментів відстані між частинками броунівських стохастичних потоків та моментів їхніх n-точкових рухів;
- оцінка швидкості збіжності мір, перенесених дифеоморфними потоками Харріса, та дослідження їхніх областей концентрації;
- знаходження розподілу числа кластерів у потоці Арратья.

Об'єкт і предмет дослідження. *Об'єкт дослідження* — броунівські стохастичні потоки та породжені ними мірозначні випадкові процеси. *Предмет дослідження* — відстань між частинками броунівських стохастичних потоків, n-точкові рухи цих потоків та інтенсивність перетинів рівня щільностями перенесених ними мір, а також випадкові точкові процеси, породжені броунівськими стохастичними потоками із сингулярною взаємодією.

Методи дослідження. В дисертаційній роботі використовуються методи теорії ймовірностей, теорії випадкових процесів та функціонального аналізу.

Наукова новизна отриманих результатів. Основні результати дисертаційної роботи, які визначають її наукову новизну та виносяться на захист, наступні:

- знайдено асимптотику моментів відстані між частинками у потоках Харріса та асимптотику моментів їхніх n-точкових рухів;

- встановлено слабку збіжність n-точкових рухів потоків Харріса при наближенні взаємодії між частинками до сингулярної до n-точкових рухів потоку Арратья;

- отримано оцінку відстані Васерштейна між розподілами міри, перенесеної потоком Харріса з майже сингулярною взаємодією між частинками та потоком Арратья;

- обчислена інтенсивність перетинів рівня щільністю образу міри Лебега під дією дифеоморфного броунівського стохастичного потоку та встановлена її асимптотична поведінка при прямуванні висоти рівня до нескінченності;

- знайдено розподіл числа кластерів у потоці Арратья.

Практичне значення отриманих результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Отримані результати можуть мати подальші застосування в різноманітних розділах теорії випадкових процесів та теорії стохастичних потоків.

Особистий внесок здобувача. Постановка задач і вибір методів дослідження в дисертаційній роботі та у спільній статті[1], результати якої покладені в основу підрозділу 2.2 дисертації, належать науковому керівнику дисертанта, доктору фізико-математичних наук, професору А. А. Дороговцеву. Усі представлені в дисертації результати отримані автором самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідались і обговорювались на наступних конференціях та наукових семінарах:

- International Conference Dedicated to the 80th Anniversary of Prof. A. Ya. Dorogovtsev «Stochastic Processes in Abstract Spaces», October 14–16, 2015, Kyiv, Ukraine;

- International Workshop in Honour of Prof. V. V. Buldygin «Limit Theorems in Probability Theory, Number Theory and Mathematical Statistics», October 10–12, 2016, Kyiv, Ukraine;

- міжнародна конференція молодих математиків, присвячена 100-річчю з дня народження академіка Національної академії наук України, професора Ю. О. Митропольського, 7–10 червня 2017 року, Київ, Україна;

- науковому семінарі «Числення Маллявена та його застосування» Інституту математики НАН України під керівництвом доктора фізико-математичних наук, професора А. А. Дороговцева.

[1] *Dorogovtsev A. A., Fomichov V. V.* The rate of weak convergence of the n-point motions of Harris flows // Dynamic Systems and Applications **25**:3 (2016) 377–392.

Публікації. Результати дисертації опубліковані в п'яти статтях у фахових виданнях, три з яких у журналах, що індексуються в наукометричній базі Scopus, і в трьох збірках тез міжнародних конференцій.

Структура і обсяг роботи. Дисертація загальним обсягом 134 сторінки складається з анотацій українською та англійською мовами, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаної літератури, що містить 74 найменування, та додатку зі списками опублікованих праць здобувача за темою дисертації і наукових семінарів і конференцій, на яких доповідались отримані результати.

Огляд основних результатів роботи. Основна частина дисертаційної роботи складається з чотирьох розділів.

Перший розділ присвячений дослідженню асимптотичної поведінки скінченних сукупностей частинок потоків Харріса. В першому підрозділі наводяться основні означення та приклади, які формують основу дослідження дисертаційної роботи.

Означення 1.1.1. Випадкове поле $\{x(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ називається *броунівським стохастичним потоком*, якщо воно задовольняє наступні умови:

1) для будь-якого $u \in \mathbb{R}$ випадковий процес $\{x(u,t),\ t \geqslant 0\}$ є броунівським рухом відносно загальної фільтрації
$$\mathcal{F}_t := \sigma\{x(v,s),\ v \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant s \leqslant t\}, \quad t \geqslant 0;$$

2) $x(u,0) = u$ для всіх $u \in \mathbb{R}$;

3) для будь-яких $u, v \in \mathbb{R}$, якщо $u \leqslant v$, то $x(u,t) \leqslant x(v,t)$ для всіх $t \geqslant 0$.

Означення 1.1.3. Броунівський стохастичний потік $\{x(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ називається *потоком Харріса з коваріаційною функцією* Γ, якщо для будь-яких $u, v \in \mathbb{R}$ взаємна квадратична варіація вінерових процесів $\{x(u,t),\ t \geqslant 0\}$ та $\{x(v,t),\ t \geqslant 0\}$ представляється у вигляді

$$\langle x(u,\cdot), x(v,\cdot)\rangle_t = \int\limits_0^t \Gamma(x(u,s) - x(v,s))\, ds, \quad t \geqslant 0.$$

В якості одного з основних прикладів розглянуто потік Арратья, який представляє собою потік Харріса з коваріаційною функцією $\Gamma = 1\!\!1_{\{0\}}$.

Хоча відомо, що потік Арратья не породжується розв'язками ніякого стохастичного диференціального рівняння з регулярними коефіцієнтами, ми показуємо, що коли коваріаційна функція достатньо гладка, то відповідний потік Харріса може бути отриманий як потік розв'язків стохастичного диференціального або інтегрального рівняння.

Наприкінці підрозділу ми доводимо, що при досить загальній умові на коваріаційну функцію потоку Харріса відстань між будь-якими двома частинками цього потоку прямує до нуля.

Теорема 1.1.9. *Нехай* $\{x(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ *— потік Харріса з коваріаційною функцією* Γ*, яка задовольняє умову*

$$\forall\, \delta > 0: \quad \sup_{z:\ |z| \geqslant \delta} \Gamma(z) < 1.$$

Тоді

$$\forall\, u, v \in \mathbb{R}: \quad \lim_{t \to +\infty} (x(u,t) - x(v,t)) = 0 \quad \text{м. н.}$$

В другому підрозділі ми розглядаємо потік Харріса $\{x(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ з коваріаційною функцією Γ, яка приймає значення одиниця лише в точці нуль та є двічі диференційовною в цій точці. Для такого потоку Харріса ми показуємо, що при прямуванні часу до нескінченності відстань між будь-якими двома частинками цього потоку прямує до нуля з експоненційною швидкістю.

Теорема 1.2.2. *З ймовірністю одиниця для будь-яких* $u, v \in \mathbb{R}$*,* $u > v$*,*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln (x(u,t) - x(v,t)) = \frac{1}{2} \Gamma''(0).$$

Крім того, накладаючи додаткову умову на поведінку коваріаційної функції потоку Харріса на нескінченності, а саме, припускаючи, що

$$\forall\, n \geqslant 1: \quad \lim_{|z| \to +\infty} z^n \Gamma(z) = 0,$$

ми встановлюємо асимптотичну поведінку всіх моментів відстані між двома частинками цього потоку.

Теорема 1.2.6. *Для будь-яких* $u, v \in \mathbb{R}$ *та* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t^n} \mathbf{E} \left(x(u,t) - x(v,t)\right)^{2n+1} = 2^n \cdot (2n+1)!! \cdot (u - v)$$

та

$$c_* \cdot 2^n \cdot (2n+2)!! \cdot |u - v| \leqslant \varliminf_{t \to +\infty} \frac{1}{t^{(2n+1)/2}} \mathbf{E} \left(x(u,t) - x(v,t)\right)^{2n+2} \leqslant$$
$$\leqslant \varlimsup_{t \to +\infty} \frac{1}{t^{(2n+1)/2}} \mathbf{E} \left(x(u,t) - x(v,t)\right)^{2n+2} \leqslant c^* \cdot 2^n \cdot (2n+2)!! \cdot |u - v|$$

зі сталими c_* *та* c^**, що задаються рівностями*

$$c_* = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (1 - \|F - (1 - \Gamma)\|) > 0,$$

де F *— мінімальна увігнута мажоранта функції* $1 - \Gamma$ *на* $\mathbb{R}_+$*, та*

$$c^* = \frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

В третьому підрозділі ми розглядаємо потік Харріса $\{x(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ з неперервною коваріаційною функцією Γ, яка задовольняє умову

$$\forall\, \delta > 0: \quad \sup_{z:\, |z| \geqslant \delta} \Gamma(z) < 1,$$

та досліджуємо асимптотичну поведінку моментів $\mathbf{E}[x(u_1,t)\dots x(u_n,t)]$ при $t \to +\infty$ для всіх $n \geqslant 1$ та $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}$.

Теорема 1.3.3. *Справедливі наступні твердження:*

$$\forall\, n \geqslant 1 \quad \forall\, u_1, \dots, u_{2n-1} \in \mathbb{R}: \quad \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t^{n-\frac{1}{2}}} \mathbf{E}\left[x(u_1,t)\dots x(u_{2n-1},t)\right] = 0,$$
$$\forall\, n \geqslant 1 \quad \forall\, u_1, \dots, u_{2n} \in \mathbb{R}: \quad \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t^{n}} \mathbf{E}\left[x(u_1,t)\dots x(u_{2n},t)\right] = (2n-1)!!.$$

Хоча теорема 1.3.3 встановлює точну асимптотичну поведінку всіх парних моментів, результат, що стосується непарних моментів, взагалі кажучи, не є найкращим. Це показує твердження 1.3.10, доведення якого засноване на наступній теоремі. (В цій теоремі і твердженні 1.3.10 ми вважаємо, що частинки потоку Харріса, що розглядається, не склеюються.)

Теорема 1.3.4. *Для будь-яких $u, v \in \mathbb{R}$ та $t \geqslant 0$ майже напевно виконуються рівності*

$$\mathbf{E}\left(\overline{x}(u,t) \mid \overline{x}(u,s) - \overline{x}(v,s), 0 \leqslant s \leqslant t\right) = +\frac{1}{2}\left(\overline{x}(u,t) - \overline{x}(v,t)\right),$$
$$\mathbf{E}\left(\overline{x}(v,t) \mid \overline{x}(u,s) - \overline{x}(v,s), 0 \leqslant s \leqslant t\right) = -\frac{1}{2}\left(\overline{x}(u,t) - \overline{x}(v,t)\right).$$

Твердження 1.3.10. *Для будь-яких $u, v \in \mathbb{R}$ ми маємо*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \mathbf{E}\left[x^2(u,t)x(v,t)\right] = u + 2v.$$

В *другому розділі* ми досліджуємо наближення потоку Арратья потоками Харріса без склеювання.

В першому підрозділі ми розглядаємо питання збіжності n-точкових рухів потоків Харріса до n-точкових рухів потоку Арратья. Нехай ν — довільна скінченна сингулярна міра на дійсній прямій, яка має принаймні один атом, тобто така, що

$$\nu^2(\Delta) > 0,$$

де

$$\nu^2 := \nu \otimes \nu$$

та

$$\Delta := \{\vec{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2 \mid q_1 = q_2\}.$$

Крім того, нехай функція $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, [0; +\infty))$ (тобто нескінченно диференційовна і з компактним носієм) симетрична і має одиничну L_2-норму, а також не спадає на $(-\infty; 0]$ і не зростає на $[0; +\infty)$. Покладемо

$$\psi_\varepsilon(z) := c_\varepsilon \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \varphi\left(\frac{z-q}{\varepsilon}\right) \nu(dq), \quad z \in \mathbb{R},$$

де стала $c_\varepsilon > 0$ вибрана так, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \psi_\varepsilon^2(z)\, dz = 1.$$

Для кожного $\varepsilon > 0$ розглянемо стохастичне інтегральне рівняння

$$x_\varepsilon(u,t) = u + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} \psi_\varepsilon(x_\varepsilon(u,s) - q)\, W(dq, ds), \quad t \geqslant 0,$$

де $u \in \mathbb{R}$ грає роль параметра, W — вінерів лист на $\mathbb{R} \times [0; +\infty)$. Сімейство сильних розв'язків цього стохастичного інтегрального рівняння для $u \in \mathbb{R}$ утворюють потік Харріса $\{x_\varepsilon(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ з коваріаційною функцією Γ_ε, яка задається як

$$\Gamma_\varepsilon(z) := \int\limits_{\mathbb{R}} \psi_\varepsilon(z+q)\psi_\varepsilon(q)\, dq, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Нарешті, через $\{x_0(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ позначимо потік Арратья.

Основним результатом цього підрозділу є наступна теорема.

Теорема 2.1.3. *Для будь-яких $n \in \mathbb{N}$ і $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$ у просторі $C([0; +\infty), \mathbb{R}^n)$ має місце слабка збіжність*

$$(x_\varepsilon(u_1, \cdot), \ldots, x_\varepsilon(u_n, \cdot)) \xrightarrow{w} (x_0(u_1, \cdot), \ldots, x_0(u_n, \cdot)), \quad \varepsilon \to 0+.$$

В другому підрозділі ми отримуємо оцінку на відстань Васерштейна між розподілами випадкових мір, що є образами (детермінованої) міри, зосередженої на $[0; 1]$, під дією потоку Харріса, коваріаційна функція якого має компактний носій, і потоку Арратья.

Нехай $\{x(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ — потік Харріса з коваріаційною функцією Γ, яка має компактний носій, а $\{x_0(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ — потік Арратья. Покладемо

$$\lambda := \mu \circ x^{-1}(\cdot, 1),$$
$$\lambda_0 := \mu \circ x_0^{-1}(\cdot, 1),$$

де μ — деяка ймовірнісна борелівська міра на дійсній осі, яка має скінченний перший момент. Тоді розподіли Λ та Λ_0 випадкових мір λ та λ_0 відповідно як елементів простору всіх ймовірнісних борелівських мір на дійсній осі, що мають скінченний перший момент, наділеного відстанню Васерштейна W_1, самі мають скінченний перший момент. Це означає, що ми можемо розглядати відстань Васерштейна $W_1(\Lambda, \Lambda_0)$ між Λ та Λ_0.

Основним результатом цього підрозділу є наступна оцінка $W_1(\Lambda, \Lambda_0)$ через діаметр $d(\Gamma)$ носія функції Γ.

Теорема 2.2.1. *Нехай* $\{x(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ *— потік Харріса з коваріаційною функцією* Γ*, яка має компактний носій, а* $\{x_0(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ *— потік Арратья. Припустимо, що*

$$\operatorname{supp} \mu \subset [0;1]$$

та

$$d(\Gamma) < \frac{1}{100}.$$

Тоді

$$W_1(\Lambda, \Lambda_0) \leqslant C \cdot d(\Gamma)^{1/22},$$

де стала $C > 0$ *не залежить від* μ *і* Γ.

В *третьому розділі* досліджуються області концентрації мір, перенесених потоками Харріса без склеювання.

Розглянемо стохастичне інтегральне рівняння

$$x(u,t) = u + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \varphi(x(u,s) - q)\, W(dq, ds), \quad t \geqslant 0,$$

де $u \in \mathbb{R}$ — фіксований параметр, W — вінерів лист на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, а функція $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, [0; +\infty))$ (тобто невід'ємна, нескінченно диференційовна і з компактним носієм) симетрична і має одиничну L_2-норму. Нехай $\{x(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ — потік Харріса, породжений розв'язками цього рівняння для $u \in \mathbb{R}$.

Розглянемо випадкові міри

$$\lambda_t := \lambda \circ x^{-1}(\cdot, t), \quad t \geqslant 0,$$

де λ — одновимірна міра Лебега. Ці міри є абсолютно неперервними, і при цьому для відповідних щільностей має місце представлення

$$\frac{d\lambda_t}{d\lambda}(u) \equiv p_t(u) = \frac{1}{\dfrac{\partial x}{\partial u}(x^{-1}(u,t),t)}, \quad u \in \mathbb{R}, \quad t \geqslant 0.$$

Для кожного $t > 0$ позначимо через $\mu_t(c)$ інтенсивність перетинів випадковим процесом $\{p_t(u),\ u \in \mathbb{R}\}$ рівня $c > 0$. На основі допоміжних тверджень, доведених в перших двох підрозділах, в третьому підрозділі ми обчислюємо $\mu_t(c)$ для майже всіх рівнів $c > 0$ (нижче L' та L'' — квадрати L^2-норм похідних φ' і φ'' відповідно).

Теорема 3.3.1. *Для всіх* $t > 0$ *справедливе співвідношення*

$$\mu_t(c) = \frac{\sqrt{2L''} \cdot e^{\frac{\pi^2}{2L't} - \frac{L't}{8}}}{\pi L' \sqrt{\pi t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{v^2}{2L't}} \operatorname{sh} v \sin \frac{\pi v}{L't}}{\sqrt{1 + \frac{2 \operatorname{ch} v}{c} + \frac{1}{c^2}}}\, dv \qquad \text{для п. в. } c > 0.$$

Крім того, ми встановлюємо асимптотичну поведінку правої частини рівності з наведеної теореми, яку ми позначаємо через $\overline{\mu}_t(c)$.

Теорема 3.3.2. *Для будь-якого $t > 0$ справедливе співвідношення*

$$\overline{\mu}_t(c) = \frac{e^{-\frac{L't}{8}}\sqrt{L''}}{\pi\sqrt{2L'}} \cdot \sqrt{\frac{c}{\ln c}} \cdot \exp\left[-\frac{(\ln c)^2}{2L't}\right] \cdot (1 + \overline{o}(1)), \quad c \to +\infty.$$

В *четвертому розділі* ми досліджуємо розподіл числа кластерів потоку Арратья в будь-який додатний момент часу.

Нехай $\{x(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ — потік Арратья. Зафіксуємо довільні $u > 0$ та $t > 0$. Відомо, що множина $x([0;u],t)$ є скінченною майже напевно. Позначимо через $\nu_t([0;u])$ кількість елементів цієї множини. Основною метою даного розділу є знаходження ймовірності події $\{\nu_t([0;u]) = k\}$ для кожного $k \geqslant 2$.

В першому підрозділі за допомогою добре відомої формули Карліна–Макгрегора нам вдається довести наступну теорему (тут і далі p_t — щільність нормального розподілу з нульовим середнім та дисперсією t).

Теорема 4.1.3. *Ми маємо*

$$\mathbf{P}\{\nu_t([0;u]) = 2\} = \frac{u}{\sqrt{\pi t}} - \int_0^u \int_{\Delta_3} \begin{vmatrix} p_t(v_1) & p_t'(v_1 - r) & p_t(v_1 - r) \\ p_t(v_2) & p_t'(v_2 - r) & p_t(v_2 - r) \\ p_t(v_3) & p_t'(v_3 - r) & p_t(v_3 - r) \end{vmatrix} \begin{matrix} dv_1 \\ dv_2 \\ dv_3 \end{matrix} dr -$$

$$- \int_0^u \int_{\Delta_3} \begin{vmatrix} p_t'(v_1 - r) & p_t(v_1 - r) & p_t(v_1 - u) \\ p_t'(v_2 - r) & p_t(v_2 - r) & p_t(v_2 - u) \\ p_t'(v_3 - r) & p_t(v_3 - r) & p_t(v_3 - u) \end{vmatrix} \begin{matrix} dv_1 \\ dv_2 \\ dv_3 \end{matrix} dr +$$

$$+ \int_0^u \int_{\Delta_4} \begin{vmatrix} p_t(v_1) & p_t'(v_1 - r) & p_t(v_1 - r) & p_t(v_1 - u) \\ p_t(v_2) & p_t'(v_2 - r) & p_t(v_2 - r) & p_t(v_2 - u) \\ p_t(v_3) & p_t'(v_3 - r) & p_t(v_3 - r) & p_t(v_3 - u) \\ p_t(v_4) & p_t'(v_4 - r) & p_t(v_4 - r) & p_t(v_4 - u) \end{vmatrix} \begin{matrix} dv_1 \\ dv_2 \\ dv_3 \\ dv_4 \end{matrix} dr.$$

На множині $\{\nu_t([0;u]) = 2\}$ ми можемо означити θ як єдину точку розриву відображення $x(\cdot,t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ на відрізку $[0;u]$ і ξ_1 і ξ_2 як нижній та верхній кластери в образі $x([0;u],t)$ відповідно.

Теорема 4.1.4. *Для всіх борелівських множин $A \subset [0;u]$ і $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}$, таких, що $B_1 < B_2$, ми маємо*

$$\mathbf{P}\{\nu_t([0;u]) = 2,\ \theta \in A,\ \xi_1 \in B_1,\ \xi_2 \in B_2\} =$$

$$= \int_A \int_{\Delta_2} \begin{vmatrix} p_t'(v_1 - r) & p_t(v_1 - r) \\ p_t'(v_2 - r) & p_t(v_2 - r) \end{vmatrix} 1\!\!\mathrm{I}\begin{Bmatrix} v_1 \in B_1, \\ v_2 \in B_2 \end{Bmatrix} \begin{matrix} dv_1 \\ dv_2 \end{matrix} dr -$$

$$- \int_A \int_{\Delta_3} \begin{vmatrix} p_t(v_1) & p_t'(v_1 - r) & p_t(v_1 - r) \\ p_t(v_2) & p_t'(v_2 - r) & p_t(v_2 - r) \\ p_t(v_3) & p_t'(v_3 - r) & p_t(v_3 - r) \end{vmatrix} 1\!\!\mathrm{I}\begin{Bmatrix} v_2 \in B_1, \\ v_3 \in B_2 \end{Bmatrix} \begin{matrix} dv_1 \\ dv_2 \\ dv_3 \end{matrix} dr -$$

$$
-\int\limits_A \int\limits_{\Delta_3} \begin{vmatrix} p_t'(v_1-r) & p_t(v_1-r) & p_t(v_1-u) \\ p_t'(v_2-r) & p_t(v_2-r) & p_t(v_2-u) \\ p_t'(v_3-r) & p_t(v_3-r) & p_t(v_3-u) \end{vmatrix} \mathbb{1}\left\{ \begin{matrix} v_1 \in B_1, \\ v_2 \in B_2 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} dv_1 \\ dv_2 \\ dv_3 \end{matrix} dr +
$$

$$
+\int\limits_A \int\limits_{\Delta_4} \begin{vmatrix} p_t(v_1) & p_t'(v_1-r) & p_t(v_1-r) & p_t(v_1-u) \\ p_t(v_2) & p_t'(v_2-r) & p_t(v_2-r) & p_t(v_2-u) \\ p_t(v_3) & p_t'(v_3-r) & p_t(v_3-r) & p_t(v_3-u) \\ p_t(v_4) & p_t'(v_4-r) & p_t(v_4-r) & p_t(v_4-u) \end{vmatrix} \mathbb{1}\left\{ \begin{matrix} v_2 \in B_1, \\ v_3 \in B_2 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} dv_1 \\ dv_2 \\ dv_3 \\ dv_4 \end{matrix} dr.
$$

В другому підрозділі для підрахунку відповідних ймовірностей ми використовуємо відомі пфаффівські формули для континуальних систем броунівських частинок, що склеюються або анігілюють в момент зустрічі.

Для $r_0 \leqslant r_1 \leqslant \ldots \leqslant r_k \leqslant r_{k+1}$ нехай $\widehat{\mathbf{F}}_t \equiv \widehat{\mathbf{F}}_t(r_0, r_1, \ldots, r_k, r_{k+1})$ є антисиметричною матрицею порядку $2k+2$ з елементами над діагоналлю

$$
(\widehat{\mathbf{F}}_t)_{ij} := \begin{cases} F_t(r_{[j/2]} - r_{[i/2]}), & \text{якщо } i \text{ парне або } i=1, \text{ та } j \text{ парне}, \\ F_t'(r_{[j/2]} - r_{[i/2]}), & \text{якщо } i \text{ парне або } i=1, \text{ та } j \text{ непарне}, \\ -F_t'(r_{[j/2]} - r_{[i/2]}), & \text{якщо } i \text{ непарне}, i \neq 1 \text{ та } j \text{ парне}, \\ -F_t''(r_{[j/2]} - r_{[i/2]}), & \text{якщо } i \text{ непарне}, i \neq 1 \text{ та } j \text{ непарне}. \end{cases}
$$

де

$$
F_t(z) := 2 \int\limits_{z/\sqrt{2}}^{+\infty} p_t(v)\, dv, \quad z \in \mathbb{R}.
$$

Теорема 4.2.5. *Для всіх $k \geqslant 1$ ми маємо*

$$
\mathbf{P}\{\nu_t([0;u]) = k+1\} = \int\limits_{\Delta_k(u)} \cdots \int \mathrm{Pf}\left(\widehat{\mathbf{F}}_t(0, r_1, \ldots, r_k, u)\right) dr_1 \ldots dr_k,
$$

де

$$
\Delta_k(u) := \{(r_1, \ldots, r_k) \in \mathbb{R}^k \mid 0 \leqslant r_1 \leqslant \ldots \leqslant r_k \leqslant u\}.
$$

Тепер на множині $\{\nu_t([0;u]) = k+1\}$ означимо $\theta_1, \ldots, \theta_k \in [0;u]$, $\theta_1 < \ldots < \theta_k$, як точки розриву відображення $x(\cdot, t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ на відрізку $[0;u]$.

Теорема 4.2.6. *Для всіх $k \geqslant 1$ та непустих борелівських множин $A_1, \ldots, A_k \subset [0;u]$, таких, що $A_1 < \ldots < A_k$, ми маємо*

$$
\mathbf{P}\{\nu_t([0;u]) = k+1,\ \theta_1 \in A_1,\ \ldots,\ \theta_k \in A_k\} =
$$
$$
= \int\limits_{A_1 \times \ldots \times A_k} \cdots \int \mathrm{Pf}\left(\widehat{\mathbf{F}}_t(0, r_1, \ldots, r_k, u)\right) dr_1 \ldots dr_k.
$$

В третьому підрозділі ми знаходимо середнє значення $\nu_t([0;u])$ за допомогою поняття загального часу вільного пробігу частинок у потоці Арратья.

Теорема 4.3.3. *Ми маємо*

$$\mathbf{E}\nu_t([0;u]) = 1 + \frac{u}{\sqrt{\pi t}}.$$

Висновки

У дисертації вивчаються властивості броунівських стохастичних потоків, які слугують математичною моделлю при описанні руху лінійно впорядкованих систем частинок, що взаємодіють між собою.

Основні результати даної дисертаційної роботи наступні:

- знайдено асимптотику моментів відстані між частинками у потоках Харріса та асимптотику моментів їхніх n-точкових рухів;
- встановлено слабку збіжність n-точкових рухів потоків Харріса при наближенні взаємодії між частинками до сингулярної до n-точкових рухів потоку Арратья;
- отримано оцінку відстані Васерштейна між розподілами міри, перенесеної потоком Харріса з майже сингулярною взаємодією між частинками та потоком Арратья;
- обчислена інтенсивність перетинів рівня щільністю образу міри Лебега під дією дифеоморфного броунівського стохастичного потоку та встановлена її асимптотична поведінка при прямуванні висоти рівня до нескінченності;
- знайдено розподіл числа кластерів у потоці Арратья.

Список опублікованих праць здобувача за темою дисертації

1. *Fomichov V. V.* Evolution of moments of isotropic Brownian stochastic flows // Theory of Stochastic Processes **20**(**36**):1 (2015) 14–27.

2. *Dorogovtsev A. A., Fomichov V. V.* The rate of weak convergence of the n-point motions of Harris flows // Dynamic Systems and Applications **25**:3 (2016) 377–392.

3. *Fomichov V.* The distribution of the number of clusters in the Arratia flow // Communications on Stochastic Analysis **10**:3 (2016) 257–270.

4. *Fomichov V. V.* A note on weak convergence of the n-point motions of Harris flows // Theory of Stochastic Processes **21**(**37**):2 (2016) 4–13.

5. *Фомичёв В. В.* Интенсивность пересечений уровня для плотности образа меры Лебега под действием броуновского стохастического потока // Украинский математический журнал **69**:6 (2017) 803–822.

6. *Fomichov V. V.* Evolution of moments of isotropic Brownian stochastic flows // International Conference Dedicated to the 80th Anniversary of Prof. A. Ya. Dorogovtsev «Stochastic Processes in Abstract Spaces», October 14–16, 2015, Kyiv, Ukraine: abstract. — P. 14.

7. *Fomichov V. V.* The rate of weak convergence of the n-point motions of Harris flows // International Workshop in Honour of Prof. V. V. Buldygin «Limit Theorems in Probability Theory, Number Theory and Mathematical Statistics», October 10–12, 2016, Kyiv, Ukraine: abstract. — P. 19–20.

8. *Fomichov V. V.* Weak convergence of the n-point motions of Harris flows // Міжнародна конференція молодих математиків присвячена 100-річчю з дня народження академіка Національної академії наук України, професора Ю. О. Митропольського, 7–10 червня, 2017, Київ, Україна: анотація. — С. 115.

Анотація

Фомічьов В. В. Еволюція дифеоморфних броунівських стохастичних потоків. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 — теорія ймовірностей і математична статистика. — Інститут математики НАН України, Київ, 2017.

Дисертаційна робота присвячена вивченню потоків Харріса із сингулярною та близькою до сингулярної взаємодією між частинками.

В роботах І. Лежана було доведено, що відстань між частинками в одновимірних ізотропних броунівських стохастичних потоках, найпростішими прикладами яких є дифеоморфні потоки Харріса, збігається до нуля. В даній дисертації було показано, що при певних умовах на коваріаційну функцію відстань між частинками потоку Харріса збігається до нуля з експоненційною швидкістю, та було встановлено асимптотичну поведінку всіх моментів цієї відстані, а також всіх моментів n-точкових рухів потоку.

В роботах А. А. Дороговцева та Т. В. Маловічко було встановлено слабку збіжність n-точкових рухів потоків Харріса при наближенні радіуса взаємодії між частинками до нуля до n-точкових рухів потоку Арратья. В даній роботі ці результати було узагальнено на випадок, коли коваріаційні функції потоків Харріса поточково збігаються до невід'ємно визначеної функції, носій якої є зліченною множиною. Також було отримано оцінку зверху на відстань Васерштейна між розподілами міри, перенесеної потоком Харріса з малим радіусом взаємодії між частинками та потоком Арратья, що може розглядатися як оцінка швидкості збіжності відповідних n-точкових рухів.

Крім того, в даній роботі вивчався феномен концентрації міри, перенесеної потоком Харріса зі скінченним радіусом взаємодії між частинками, а саме, для щільності

образа міри Лебега під дією такого потоку обчислено інтенсивність перетинів рівня та встановлено її асимптотичну поведінку при прямуванні висоти рівня до нескінченності.

В роботах Р. Трайба і О. Заборонського було встановлено, що випадкові точкові процеси, породжені частинками потоку Арратья в будь-який додатний момент часу, є пфаффовими, та були знайдені їхні ядра. В даній дисертації на основі відповідних формул було знайдено розподіл числа кластерів потоку Арратья та за допомогою поняття загального часу вільного пробігу частинок потоку, введеного у роботах А. А. Дороговцева, обчислено його середнє значення.

Ключові слова: броунівські стохастичні потоки, потоки Харріса, потік Арратья, відстань між частинками, n-точкові рухи, асимптотика моментів, відстань Васерштейна, концентрація міри, інтенсивність перетинів рівня, число кластерів.

Аннотация

Фомичёв В. В. Эволюция диффеоморфных броуновских стохастических потоков. — Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика. — Институт математики НАН Украины, Киев, 2017.

Диссертационная работа посвящена изучению потоков Харриса с сингулярным и близким к сингулярному взаимодействием между частицами.

В работах И. Лежана было доказано, что расстояние между частицами в одномерных изотропных броуновских стохастических потоках, простейшими примерами которых являются диффеоморфные потоки Харриса, сходится к нулю. В данной диссертации было показано, что при определённых условиях на ковариационную функцию расстояние между частицами потока Харриса сходится к нулю с экспоненциальной скоростью, и было установлено асимптотическое поведение всех моментов этого расстояния, а также всех моментов n-точечных движений потока.

В работах А. А. Дороговцева и Т. В. Маловичко была установлена слабая сходимость n-точечных движений потоков Харриса при приближении радиуса взаимодействия между частицами к нулю к n-точечным движениям потока Арратья. В данной работе эти результаты были обобщены на случай, когда ковариационные функции потоков Харриса поточечно сходятся к неотрицательно определённой функции, носитель которой является счётным множеством. Также была получена оценка сверху на расстояние Васерштейна между распределениями меры, перенесённой потоком Харриса с малым радиусом взаимодействия между частицами и потоком Арратья, которая может рассматриваться как оценка скорости сходимости соответствующих n-точечных движений.

Кроме того, в данной работе изучался феномен концентрации меры, перенесённой потоком Харриса с конечным радиусом взаимодействия между частицами, а именно, для плотности образа меры Лебега под действием такого потока вычислена интенсивность пересечений уровня и установлено её асимптотическое поведение при стремлении высоты уровня к бесконечности.

В работах Р. Трайба и О. Заборонского было установлено, что случайные точечные процессы, порождённые частицами потока Арратья в любой положительный момент времени, являются пфаффовскими, и были найдены их ядра. В данной диссертации на основе соответствующих формул было найдено распределение числа кластеров потока Арратья и с помощью понятия суммарного времени свободного пробега частиц потока, введённого в работах А. А. Дороговцева, вычислено его среднее значение.

Ключевые слова: броуновские стохастические потоки, потоки Харриса, поток Арратья, расстояние между частицами, n-точечные движения, асимптотика моментов, расстояние Васерштейна, концентрация меры, интенсивность пересечений уровня, число кластеров.

Abstract

Fomichov V. V. Evolution of diffeomorphic Brownian stochastic flows. — Manuscript.

Candidate of Science (PhD) Thesis, 01.01.05 — Probability Theory and Mathematical Statistics. — Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv, 2017.

The thesis is devoted to the study of Harris flows with singular and near-singular interaction between particles.

In papers of Y. Le Jan it was proved that the interparticle distance in one-dimensional isotropic Brownian stochastic flows, of which diffeomorphic Harris flows are the simplest examples, converges to zero. In this thesis we showed that under certain conditions on the covariance function the interparticle distance of a Harris flow converges to zero at an exponential rate and established the asymptotic behaviour of all moments of this distance and also of all moments of the n-point motions of the flow.

In papers of A. A. Dorogovtsev and T. V. Malovichko it was established that the n-point motions of Harris flows converge weakly as the radius of interaction between particles tends to zero to the n-point motions of the Arratia flow. In this thesis we generalised these results to the case when the covariance functions of Harris flows converge pointwise to a non-negative definite function whose support is a countable set. Also, we obtained an estimate from above for the Wasserstein distance between the distributions of a measure transported by a Harris flow with a small radius of interaction between particles and the Arratia flow, which can be considered as an estimate for the rate of convergence of the corresponding n-point motions.

Furthermore, in this thesis we studied the phenomenon of concentration of the measure transported by a Harris flow with a finite radius of interaction between particles, namely, we computed the level-crossing intensity for the density of the image of the Lebesgue measure under the action of such a flow and established its asymptotic behaviour as the height of the level tends to infinity.

In papers of R. Tribe and O. Zaboronski it was established that the random point processes formed by the particles of the Arratia flow at any positive moment are Pfaffian and their kernels were found. In this thesis basing on the corresponding formulae we found the distribution of the number of clusters of the Arratia flow and, with the help of the notion of the total free time of particles of the flow introduced in the works of A. A. Dorogovtsev, computed its mean value.

Key words: Brownian stochastic flows, Harris flows, Arratia flow, interparticle distance, n-point motions, asymptotics of moments, Wasserstein distance, concentration of measure, level-crossing intensity, number of clusters.