НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

ФОМІЧЬОВ Володимир Володимирович

УДК 519.21

ДИСЕРТАЦІЯ

ЕВОЛЮЦІЯ ДИФЕОМОРФНИХ БРОУНІВСЬКИХ СТОХАСТИЧНИХ ПОТОКІВ

01.01.05 — теорія ймовірностей і математична статистика
11 — Математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук
(доктора філософії)

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело. В. В. Фомічьов

Науковий керівник:
ДОРОГОВЦЕВ Андрій Анатолійович
доктор фізико-математичних наук,
професор

Київ — 2017

Анотація

Фомічьов В. В. Еволюція дифеоморфних броунівських стохастичних потоків. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.05 — теорія ймовірностей і математична статистика (11 — Математика та статистика). — Інститут математики НАН України, Київ, 2017.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню потоків Харріса з сингулярною і близькою до сингулярної взаємодією між частинками. Основна частина дисертації складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаної літератури та додатку зі списками опублікованих праць здобувача за темою дисертації і наукових семінарів і конференцій, на яких доповідались отримані результати.

У вступі відзначаються: актуальність теми дисертації та її зв'язок з іншими науковими програмами, планами, темами в місці виконання дисертаційної роботи; мета і задачі, об'єкт і предмет та методи дослідження; наукова новизна і практичне значення отриманих результатів; особистий внесок здобувача, а також, де були апробовані і опубліковані основні результати дисертаційної роботи.

В першому розділі вивчається асимптотична поведінка частинок потоків Харріса при прямуванні часової змінної до нескінченності. Перший підрозділ містить означення досліджуваних в дисертаційній роботі об'єктів та відповідні приклади. Крім того, в ньому доводиться, що з ймовірністю одиниця відстань між будь-якими двома частинками потоку Харріса, коваріаційна функція якого на доповненні будь-якого околу нуля відокремлена від одиниці, збігається до нуля. Цей результат є узагальненням в одновимірному випадку аналогічного результату І. Лежана для ізотропних броунівських стохастичних потоків. В другому підрозділі показується, що при певних умовах на коваріаційну функцію потоку Харріса швидкість збіжності до нуля відстані між будь-якими двома частинками цього потоку є експоненційною, та встановлюється асимптотична поведінка всіх моментів цієї відстані. В третьому підрозділі встановлюється асимптотика всіх моментів n-точкових рухів по-

токів Харріса з неперервною коваріаційною функцією, яка відокремлена від одиниці на доповненні будь-якого околу нуля.

Другий розділ присвячений вивченню питань, пов'язаних зі слабкою збіжністю n-точкових рухів потоків Харріса. В першому підрозділі узагальнюються відомі результати А. А. Дороговцева та Т. В. Маловічко, а саме, доводиться, що n-точкові рухи потоків Харріса з коваріаційними функціями, які поточково збігаються до невід'ємно визначеної функції, носій якої є зліченною множиною, слабко збігаються до n-точкових рухів потоку Арратья. В другому підрозділі наводиться оцінка зверху на відстань Васерштейна між розподілами образів ймовірнісної міри з компактним носієм під дією двох потоків Харріса з малими радіусами взаємодії між частинками. Відповідний результат може, зокрема, розглядатися як оцінка швидкості збіжності n-точкових рухів потоків Харріса при прямуванні взаємодії між частинками до сингулярної до n-точкових рухів потоку Арратья.

В третьому розділі досліджується феномен концентрації міри в дифеоморфних потоках Харріса. В першому підрозділі ми доводимо стаціонарність випадкового процесу $\{p_t(u),\ u \in \mathbb{R}\}$, породженого щільністю образу міри Лебега під дією потоку Харріса з гладкою коваріаційною функцією в момент часу $t \geqslant 0$, а в другому підрозділі знаходимо спільний розподіл випадкових величин $p_t(u)$ і $p_t'(u)$ для будь-яких $t > 0$ і $u \in \mathbb{R}$. В третьому підрозділі обчислюється інтенсивність перетинів рівня вказаним випадковим процесом та встановлюється її асимптотична поведінка при прямуванні висоти рівня до нескінченності.

Четвертий розділ присвячений відповіді на питання про знаходження розподілу числа $\nu_t([0; u])$ елементів образу відрізка $[0; u]$ під дією потоку Арратья в момент часу $t > 0$, яке природно постало ще в 1984 році, коли Т. Е. Харріс довів, що образ всієї дійсної вісі майже напевно є зліченною множиною без граничних точок. В першому підрозділі ми знаходимо ймовірність події $\{\nu_t([0; u]) = 2\}$ за допомогою добревідомої формули Карліна–Макгрегора, яка дає детермінантне представлення для щільності спільного розподілу броунівських рухів, що не перетинаються. В другому підрозділі ми знаходимо розподіл випадкової величини $\nu_t([0; u])$ за допомогою формул, отриманих в роботах Р. Трайба і О. Заборонського, в яких було встановлено, що випадковий точковий процес, породжений кластерами потоку Арратья в заданий додатний момент часу, є пфаффовим, та було знайдено його ядро. В третьому підрозділі ми показуємо, що середнє значення випадкової величини $\nu_t([0;u])$ можна легко знайти за допомогою поняття загального часу вільного пробігу частинок потоку Арратья, введеного А. А. Дороговцевим при побудові стохастичного інтегралу за цим потоком.

Ключові слова: броунівські стохастичні потоки, потоки Харріса, потік Арратья, відстань між частинками, n-точкові рухи, асимптотика моментів, відстань Васерштейна, концентрація міри, інтенсивність перетинів рівня, число кластерів.

Список опублікованих праць здобувача за темою дисертації

Основні результати дисертаційної роботи опубліковані в п'яти статтях у фахових виданнях, три з яких у журналах, що індексуються наукометричною базою Scopus, та трьох збірках тез міжнародних конференцій:

1. *Fomichov V. V.* Evolution of moments of isotropic Brownian stochastic flows // Theory of Stochastic Processes **20**(**36**):1 (2015) 14–27.

2. *Dorogovtsev A. A., Fomichov V. V.* The rate of weak convergence of the n-point motions of Harris flows // Dynamic Systems and Applications **25**:3 (2016) 377–392.

3. *Fomichov V.* The distribution of the number of clusters in the Arratia flow // Communications on Stochastic Analysis **10**:3 (2016) 257–270.

4. *Fomichov V. V.* A note on weak convergence of the n-point motions of Harris flows // Theory of Stochastic Processes **21**(**37**):2 (2016) 4–13.

5. *Фомичёв В. В.* Интенсивность пересечений уровня для плотности образа меры Лебега под действием броуновского стохастического потока // Украинский математический журнал **69**:6 (2017) 803–822.

6. *Fomichov V. V.* Evolution of moments of isotropic Brownian stochastic flows // International Conference Dedicated to the 80th Anniversary of

Prof. A. Ya. Dorogovtsev «Stochastic Processes in Abstract Spaces», October 14–16, 2015, Kyiv, Ukraine: abstract. — P. 14.

7. *Fomichov V. V.* The rate of weak convergence of the n-point motions of Harris flows // International Workshop in Honour of Prof. V. V. Buldygin «Limit Theorems in Probability Theory, Number Theory and Mathematical Statistics», October 10–12, 2016, Kyiv, Ukraine: abstract. — P. 19–20.

8. *Fomichov V. V.* Weak convergence of the n-point motions of Harris flows // Міжнародна конференція молодих математиків присвячена 100-річчю з дня народження академіка Національної академії наук України, професора Ю. О. Митропольського, 7–10 червня, 2017, Київ, Україна: анотація. — С. 115.

Abstract

Fomichov V. V. Evolution of diffeomorphic Brownian stochastic flows. — Manuscript.

Candidate of Sciences (PhD) Thesis, Physical and Mathematical Sciences, 01.01.05 — Probability Theory and Mathematical Statistics (11 — Mathematics and Statistics). — Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv, 2017.

The thesis is devoted to the study of Harris flows with singular and near-singular interaction between particles. The main part of the thesis consists of the introduction, four sections, conclusions, the list of references and the appendix with the list of the author's publications and the scientific seminars and conferences, at which the obtained results were reported.

In the introduction we indicate: the relevance of the topic of the thesis and its connection with other scientific programs and topics at the place where the research was carried out; the aim and objectives, the object and subject, and the methods of research; the scientific novelty and the practical significance of the obtained results; the author's personal contribution, and also where the main results of the research were reported and published.

In the first section we study the asymptotic behaviour of the particles of Harris flows as the time variable tends to infinity. The first subsection contains

the definitions of the objects considered in the thesis and the corresponding examples. Furthermore, here we prove that with probability one the interparticle distance of a Harris flow, whose covariance function is separated from unity on the complement of any neighbourhood of zero, converges to zero. This result is a generalisation in the one-dimensional case of the corresponding result of Y. Le Jan for isotropic Brownian stochastic flows. In the second subsection we show that under certain conditions on the covariance function of a Harris flow the rate of convergence of its interparticle distance to zero is exponential and establish the asymptotic behaviour of all moments of this distance. In the third subsection we establish the asymptotics of all moments of the n-point motions of Harris flows with a continuous covariance function, which is separated from unity on the complement of any neighbourhood of zero.

The second section is devoted to the study of the problems connected with the weak convergence of the n-point motions of Harris flows. In the first subsection we generalise the known results of A. A. Dorogovtsev and T. V. Malovichko, namely, we prove that the n-point motions of Harris flows with covariance functions that converge pointwise to a non-negative definite function, whose support is a countable set, converge weakly to the n-point motions of the Arratia flow. In the second subsection we give an estimate from above for the Wasserstein distance between the distributions of the images of a probability measure with compact support under the action of two Harris flows with small radii of interaction between particles. The corresponding result can be considered, in particular, as an estimate for the rate of convergence of the n-point motions of Harris flows, as the interaction between particles tends to a singular one, to the n-point motions of the Arratia flow.

In the third section we investigate the phenomenon of the concentration of measure in diffeomorphic Harris flows. In the first subsection we prove the stationarity of the stochastic process $\{p_t(u),\ u \in \mathbb{R}\}$ generated by the density of the image of the Lebesgue measure under the action of a Harris flow with a smooth covariance function at time $t \geqslant 0$, whereas in the second subsection we find the joint distribution of the random variables $p_t(u)$ and $p_t'(u)$ for any $t > 0$ and $u \in \mathbb{R}$. In the third subsection we compute the level-crossing intensity of the aforementioned stochastic process and establish its asymptotic behaviour as the height of the level tends to infinity.

The fourth section is devoted to the solution of the problem of finding the distribution of the number $\nu_t([0;u])$ of elements of the image of the interval $[0;u]$ under the action of the Arratia flow at time $t > 0$, which naturally arose in 1984, when T. E. Harris proved that the image of the whole real line is almost surely a countable set without limit points. In the first subsection we find the probability of the event $\{\nu_t([0;u]) = 2\}$ with the help of the well-known Karlin–McGregor formula, which gives a determinantal representation for the density of the joint distribution of non-intersecting Brownian motions. In the second subsection we find the distribution of the random variable $\nu_t([0;u])$ with the help of the formulae, obtained in papers of R. Tribe and O. Zaboronski, in which it was established that the random point process generated by the clusters of the Arratia flow at a given positive time is Pfaffian and its kernel was found. In the third subsection we show that the mean value of the random variable $\nu_t([0;u])$ can be easily found with the help of the notion of the total free time of particles of the Arratia flow, which was introduced by A. A. Dorogovtsev in the construction of the stochastic integral with respect to this flow.

Key words: Brownian stochastic flows, Harris flows, Arratia flow, interparticle distance, n-point motions, asymptotics of moments, Wasserstein distance, concentration of measure, level-crossing intensity, number of clusters.

List of publications

The main results of the thesis were published in five papers, three of which were published in journals indexed by Scopus, and in the proceedings of three international conferences:

1. *Fomichov V. V.* Evolution of moments of isotropic Brownian stochastic flows // Theory of Stochastic Processes **20**(**36**):1 (2015) 14–27.

2. *Dorogovtsev A. A., Fomichov V. V.* The rate of weak convergence of the n-point motions of Harris flows // Dynamic Systems and Applications **25**:3 (2016) 377–392.

3. *Fomichov V.* The distribution of the number of clusters in the Arratia flow // Communications on Stochastic Analysis **10**:3 (2016) 257–270.

4. *Fomichov V. V.* A note on weak convergence of the n-point motions of Harris flows // Theory of Stochastic Processes **21**(**37**):2 (2016) 4–13.

5. *Fomichov V. V.* The level-crossing intensity for the density of the image of the Lebesgue measure under the action of a Brownian stochastic flow // Ukrainian Mathematical Journal **69**:6 (2017) 803–822. (in Russian)

6. *Fomichov V. V.* Evolution of moments of isotropic Brownian stochastic flows // International Conference Dedicated to the 80th Anniversary of Prof. A. Ya. Dorogovtsev «Stochastic Processes in Abstract Spaces», October 14–16, 2015, Kyiv, Ukraine: abstract. — P. 14.

7. *Fomichov V. V.* The rate of weak convergence of the n-point motions of Harris flows // International Workshop in Honour of Prof. V. V. Buldygin «Limit Theorems in Probability Theory, Number Theory and Mathematical Statistics», October 10–12, 2016, Kyiv, Ukraine: abstract. — P. 19–20.

8. *Fomichov V. V.* Weak convergence of the n-point motions of Harris flows // International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100th anniversary of the Academician of the National Academy of Sciences of Ukraine, Prof. Yu. O. Mitropolskiy, June 7–10, 2017, Kyiv, Ukraine: abstract. — P. 115.

Зміст

Вступ

Актуальність теми. Виникнення теорії стохастичних потоків пов'язане з вивченням явища турбулентності. Започаткування теорії стохастичних диференціальних рівнянь в роботах К. Іто [26] та І. І. Гіхмана і А. В. Скорохода [62] дозволило отримувати ізотропні випадкові поля, що були введені Х. П. Робертсоном в роботі [48] в якості математичної моделі турбулентних потоків та досліджувалися в роботах С. Іто [28], К. Іто [27] і А. М. Яглома [74], у вигляді випадкових аналогів фазових потоків, породжених звичайними диференціальними рівняннями. Стохастичні потоки, що породжуються розв'язками стохастичних диференціальних рівнянь, були детально досліджені в роботах Х. Куніти, основні результати яких були опубліковані в 1990 році у вигляді монографії [35].

Однак, вже в 1979 році в дисертації Р. А. Арратья [2] були розглянуті сімейства простих випадкових блукань на цілочисельній ґратці, кожні два з яких склеюються в момент зустрічі, і показано, що слабкою границею цих сімейств є сімейство броунівських рухів, що склеюються. Хоча відомо (див. [54]), що така система броунівських рухів не може бути побудована як система розв'язків стохастичного диференціального рівняння з регулярними коефіцієнтами, природно такі системи теж називати стохастичними потоками. У просторах розмірності два та три стохастичні потоки зі склеюванням були побудовані Р. В. Р. Дарлінгом в роботах [9] та [10] відповідно.

В 1984 році в роботі [25] Т. Е. Харріс розглянув броунівські стохастичні потоки, які є узагальненням потоку Арратья, та довів їхнє існування при деяких умовах на коваріаційну функцію.

Приблизно з цього часу починається інтенсивне дослідження броунівських стохастичних потоків. Асимптотична поведінка відстані між будь-якими двома частинками ізотропних броунівських стохастичних потоків в евклідових просторах довільної розмірності була встановлена в роботі І. Лежана [40]. Еволюція геометричних характеристик множин під дією ізотропних броунівських стохастичних потоків вивчалася в роботах П. Баксендаля і Т. Е. Харріса [5], В. В. Пітербарга [47], М. Кранстона і І. Лежана [7], [8], Г. Дімітрова і М. Шойцова [11], С. Вадламані і Р. Дж. Адлера [55] та інших авторів. Іншим питанням, пов'язаним з геометрією стохастичних потоків, присвячена монографія Ф. Бодуена [4]. Питання переносу маси броунівськими стохастичними потоками детально вивчалися в роботах К. Л. Зірбеля і Е. Чінлара [59], а також в дисертації К. Л. Зірбеля [58].

Різноманітним питанням, пов'язаним з теорією стохастичних потоків, присвячена монографія А. А. Дороговцева [63]. Так, в ній розглянуто стохастичні потоки, породжені стохастичними диференціальними рівняннями зі взаємодією, отримано представлення Кларка для функціоналів від потоку Арратья, побудовано стохастичний інтеграл за цим потоком і з його використанням встановлено аналог теореми Гірсанова для потоку Арратья зі зносом, а також доведено, що n-точкові рухи потоків Харріса зі скінченним радіусом взаємодії між частинками слабко збігаються до n-точкових рухів потоку Арратья, коли цей радіус прямує до нуля.

Подальший розвиток цей напрям отримав в роботах учнів А. А. Дороговцева. Так, в роботі М. П. Лагунової [37] був встановлений аналог закону повторного логарифму для стохастичних потоків, породжених розв'язками стохастичних диференціальних рівнянь зі взаємодією, а в роботі [70] для таких потоків була доведена теорема Гірсанова. Трохи раніше в роботі Т. В. Маловічко [69] результат про збіжність n-точкових рухів потоків Харріса до n-точкових рухів потоку Арратья був доведений для випадку, коли коваріаційні функції цих потоків Харріса поточково збігаються вже не до індикатора нуля, який є коваріаційною функцією потоку Арратья, а до довільної додатно визначеної функції, яка може приймати відмінне від нуля значення в щонайбільше трьох точках дійсної вісі.

В роботах В. В. Конаровського [60] та [32] вивчалися системи броунівських частинок, що склеюються, в яких взаємодія між частинками залежить також від їхньої маси. Крім того, в монографії А. Ю. Пилипенка [46] досліджувались стохастичні потоки з відбиттям.

Принцип великих відхилень для броунівських стохастичних потоків з гладкою коваріаційною функцією та для потоку Арратья був отриманий в роботі А. А. Дороговцева і О. В. Остапенко [16]. В роботі І. І. Ніщенко [44] була побудована дискретна схема наближень Ойлера–Маруями для потоків Харріса. При цьому в дискретному наближенні потоку Харріса, на відміну від самого потоку, може спостерігатися порушення впорядкованості частинок. Швидкість збіжності кількісних характеристик такого порушення вивчалися в роботі К. В. Глиняної [23]. Також нею в роботі [24] було отримано представлення для дії напівгрупи n-точкового руху потоку Харріса на функцію з ядра її генератора.

В роботі П. П. Чернеги [73] розглядався локальний час в нулі для потоку Арратья. Асимптотична поведінка спільного розподілу взаємних кутів обходу частинок в ізотропному броунівському стохастичному потоці встановлена в роботі В. О. Кузнецова [66]. В роботі А. А. Дороговцева, А. В. Гнедіна і М. Б. Вовчанського [14] був доведений аналог закону повторного логарифму для розміру максимального кластера потоку Арратья при малих значеннях часового параметра. В роботі Я. А. Кореновської [33] були отримані оцінки на поперечник образу компактної множини під дією сильного випадкового оператора, породженого потоком Арратья.

В роботах Р. Трайба та О. Заборонського [53] досліджувалися випадкові точкові процеси, породжені потоком Арратья (або континуальною системою броунівських частинок, що анігілюють у момент зустрічі). Зокрема, ними було доведено, що ці процеси є пфаффовими, та були отримані їхні ядра.

Попри інтенсивні дослідження броунівських стохастичних потоків все ще відсутнє повне розуміння пов'язаних з ними феноменів. Зокрема, залишаються відкритими багато питань, пов'язаних із наближенням броунівських стохастичних потоків із сингулярною взаємодією типу потоку Арратья дифеоморфними броунівськими стохастичними потоками. В даній дисертаційній роботі наводяться відповіді на деякі з цих питань, а саме вивчається феномен концентрації маси в дифеоморфних броунівських стохастичних потоках з малим радіусом взаємодії між частинками та досліджується збіжність їхніх n-точкових рухів до n-точкових рухів потоку Арратья. Крім того, встановлюється асимптотична поведінка моментів відстані між частинками та

n-точкових рухів для широких класів броунівських стохастичних потоків та знаходиться розподіл числа кластерів у потоці Арратья.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виповнена в Інституті математики НАН України у відділі теорії випадкових процесів в рамках держбюджетних тем «Стохастичний аналіз складних систем», державний реєстраційний номер 0111U001002, та «Стохастичні системи із сингулярною взаємодією», державний реєстраційний номер 0116U002066.

Мета і задачі дослідження. Метою даної дисертаційної роботи є дослідження апроксимації броунівських стохастичних потоків із сингулярною взаємодією дифеоморфними броунівськими стохастичними потоками. Ця мета включає в себе наступні задачі:

- встановлення асимптотичної поведінки моментів відстані між частинками броунівських стохастичних потоків та моментів їхніх n-точкових рухів;
- оцінка швидкості збіжності мір, перенесених дифеоморфними потоками Харріса, та дослідження їхніх областей концентрації;
- знаходження розподілу числа кластерів у потоці Арратья.

Об'єкт і предмет дослідження. *Об'єкт дослідження* — броунівські стохастичні потоки та породжені ними мірозначні випадкові процеси. *Предмет дослідження* — відстань між частинками броунівських стохастичних потоків, n-точкові рухи цих потоків та інтенсивність перетинів рівня щільностями перенесених ними мір, а також випадкові точкові процеси, породжені броунівськими стохастичними потоками із сингулярною взаємодією.

Методи дослідження. В роботі використовуються методи теорії ймовірностей, теорії випадкових процесів та функціонального аналізу.

Наукова новизна отриманих результатів. Основні результати дисертаційної роботи, які визначають її наукову новизну та виносяться на захист, наступні:

- знайдено асимптотику моментів відстані між частинками у потоках Харріса та асимптотику моментів їхніх n-точкових рухів;

- встановлено слабку збіжність n-точкових рухів потоків Харріса при наближенні взаємодії між частинками до сингулярної до n-точкових рухів потоку Арратья;

- отримано оцінку відстані Васерштейна між розподілами міри, перенесеної потоком Харріса з майже сингулярною взаємодією між частинками та потоком Арратья;

- обчислена інтенсивність перетинів рівня щільністю образу міри Лебега під дією дифеоморфного броунівського стохастичного потоку та встановлена її асимптотична поведінка при прямуванні висоти рівня до нескінченності;

- знайдено розподіл числа кластерів у потоці Арратья.

Практичне значення отриманих результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Отримані результати можуть мати подальші застосування в різноманітних розділах теорії випадкових процесів та теорії стохастичних потоків.

Особистий внесок здобувача. Постановка задач і вибір методів дослідження в дисертаційній роботі та у спільній статті [13], результати якої покладені в основу підрозділу 2.2 дисертації, належать науковому керівнику дисертанта доктору фізико-математичних наук, професору А. А. Дороговцеву. Всі представлені в дисертації результати отримані автором самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідались і обговорювались на наступних конференціях та наукових семінарах:

- International Conference Dedicated to the 80th Anniversary of Prof. A. Ya. Dorogovtsev «Stochastic Processes in Abstract Spaces», October 14–16, 2015, Kyiv, Ukraine;

- International Workshop in Honour of Prof. V. V. Buldygin «Limit Theorems in Probability Theory, Number Theory and Mathematical Statistics», October 10–12, 2016, Kyiv, Ukraine;

- міжнародна конференція молодих математиків, присвячена 100-річчю з дня народження академіка Національної академії наук України, професора Ю. О. Митропольського, 7–10 червня 2017 року, Київ, Україна;

- науковому семінарі «Числення Маллявена та його застосування» Інституту математики НАН України під керівництвом доктора фізико-математичних наук, професора А. А. Дороговцева.

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковані в п'яти статтях [13, 17, 19, 21, 71] у фахових виданнях, три з яких [17, 21, 71] у журналах, що індексуються наукометричною базою Scopus, та трьох збірках тез міжнародних конференцій [18, 20, 22].

Структура і обсяг роботи. Дисертація загальним обсягом 134 сторінки складається з анотацій українською та англійською мовами, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаної літератури, що містить 74 найменування, та додатку зі списками опублікованих праць здобувача за темою дисертації і наукових семінарів і конференцій, на яких доповідались отримані результати.

Перший розділ присвячений дослідженню асимптотичної поведінки скінченних сукупностей частинок потоків Харріса. В першому підрозділі наводяться основні означення та приклади, які формують основу дослідження дисертаційної роботи. В якості одного з основних прикладів розглянуто потік Арратья, який представляє собою потік Харріса з коваріаційною функцією $\Gamma = 1\!\!1_{\{0\}}$.

Хоча відомо, що потік Арратья не породжується розв'язками ніякого стохастичного диференціального рівняння з регулярними коефіцієнтами, ми показуємо, що коли коваріаційна функція достатньо гладка, то відповідний потік Харріса може бути отриманий як потік розв'язків стохастичного диференціального або інтегрального рівняння.

Наприкінці підрозділу ми доводимо, що при досить загальній умові на коваріаційну функцію потоку Харріса відстань між будь-якими двома частинками цього потоку прямує до нуля.

Теорема 1.1.9. *Нехай* $\{x(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ *— потік Харріса з коваріаційною функцією* Γ*, яка задовольняє умову*

$$\forall\, \delta > 0 : \quad \sup_{z\colon |z| \geqslant \delta} \Gamma(z) < 1.$$

Тоді

$$\forall\, u, v \in \mathbb{R} : \quad \lim_{t \to +\infty} (x(u,t) - x(v,t)) = 0 \quad \textit{м. н.}$$

В другому підрозділі ми розглядаємо потік Харріса $\{x(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ з коваріаційною функцією Γ, яка приймає значення одиниця лише в точці нуль та є двічі диференційовною в цій точці. Для такого потоку Харріса ми показуємо, що при прямуванні часу до нескінченності відстань між будь-якими двома частинками цього потоку прямує до нуля з експоненційною швидкістю.

Теорема 1.2.2. *З ймовірністю одиниця для будь-яких* $u, v \in \mathbb{R}$*,* $u > v$*,*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln \left(x(u,t) - x(v,t) \right) = \frac{1}{2} \Gamma''(0).$$

Крім того, накладаючи додаткову умову на поведінку коваріаційної функції потоку Харріса на нескінченності, а саме припускаючи, що

$$\forall\, n \geqslant 1 : \quad \lim_{|z| \to +\infty} z^n \Gamma(z) = 0,$$

ми встановлюємо асимптотичну поведінку всіх моментів відстані між двома частинками цього потоку.

Теорема 1.2.6. *Для будь-яких* $u, v \in \mathbb{R}$ *та* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t^n} \mathbf{E} \left(x(u,t) - x(v,t) \right)^{2n+1} = 2^n \cdot (2n+1)!! \cdot (u - v)$$

та

$$c_* \cdot 2^n \cdot (2n+2)!! \cdot |u - v| \leqslant \varliminf_{t \to +\infty} \frac{1}{t^{(2n+1)/2}} \mathbf{E} \left(x(u,t) - x(v,t) \right)^{2n+2} \leqslant$$

$$\leqslant \varlimsup_{t \to +\infty} \frac{1}{t^{(2n+1)/2}} \mathbf{E} \left(x(u,t) - x(v,t) \right)^{2n+2} \leqslant c^* \cdot 2^n \cdot (2n+2)!! \cdot |u - v|$$

зі сталими c_* та c^*, що задаються рівностями

$$c_* = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(1 - \|F - (1-\Gamma)\|) > 0,$$

де F — мінімальна увігнута мажоранта функції $1-\Gamma$ на $\mathbb{R}_+$, та

$$c^* = \frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

В третьому підрозділі ми розглядаємо потік Харріса $\{x(u,t),\ u \in \mathbb{R}, t \geqslant 0\}$ з неперервною коваріаційною функцією Γ, яка задовольняє умову

$$\forall\, \delta > 0 : \quad \sup_{z:\ |z| \geqslant \delta} \Gamma(z) < 1,$$

та досліджуємо асимптотичну поведінку моментів $\mathbf{E}[x(u_1,t)\ldots x(u_n,t)]$ при $t \to +\infty$ для всіх $n \geqslant 1$ та $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$.

Теорема 1.3.3. *Справедливі наступні твердження:*

$$\forall\, n \geqslant 1 \quad \forall\, u_1, \ldots, u_{2n-1} \in \mathbb{R} : \quad \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t^{n-\frac{1}{2}}} \mathbf{E}\left[x(u_1,t)\ldots x(u_{2n-1},t)\right] = 0,$$

$$\forall\, n \geqslant 1 \quad \forall\, u_1, \ldots, u_{2n} \in \mathbb{R} : \quad \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t^{n}} \mathbf{E}\left[x(u_1,t)\ldots x(u_{2n},t)\right] = (2n-1)!!.$$

Хоча теорема 1.3.3 встановлює точну асимптотичну поведінку всіх парних моментів, результат, що стосується непарних моментів, взагалі кажучи, не є найкращим. Ми показуємо це, довівши, що для трьох початкових точок, дві з яких збігаються, відповідне середнє значення має порядок одиниця відносно часової змінної.

В *другому розділі* ми досліджуємо наближення потоку Арратья потоками Харріса без склеювання.

В першому підрозділі ми розглядаємо питання збіжності n-точкових рухів потоків Харріса до n-точкових рухів потоку Арратья. Нехай ν — довільна скінченна сингулярна міра на дійсній прямій, яка має принаймні один атом. Крім того, нехай функція $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, [0; +\infty))$ (тобто нескінченно диференційовна і з компактним носієм) симетрична і має одиничну L_2-норму, а також не спадає на $(-\infty; 0]$ і не зростає на $[0; +\infty)$. Покладемо

$$\psi_\varepsilon(z) := c_\varepsilon \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \varphi\left(\frac{z-q}{\varepsilon}\right) \nu(dq), \quad z \in \mathbb{R},$$

де стала $c_\varepsilon > 0$ вибрана так, щоб функція ψ_ε мала одиничну L^2-норму.

Для кожного $\varepsilon > 0$ розглянемо стохастичне інтегральне рівняння

$$x_\varepsilon(u,t) = u + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \psi_\varepsilon(x_\varepsilon(u,s) - q)\, W(dq, ds), \quad t \geqslant 0,$$

де $u \in \mathbb{R}$ грає роль параметра, W — вінерів лист на $\mathbb{R} \times [0; +\infty)$. Сімейство сильних розв'язків цього стохастичного інтегрального рівняння для $u \in \mathbb{R}$ утворюють потік Харріса $\{x_\varepsilon(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ з коваріаційною функцією Γ_ε, яка задається як

$$\Gamma_\varepsilon(z) := \int_{\mathbb{R}} \psi_\varepsilon(z+q)\psi_\varepsilon(q)\, dq, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Нарешті, через $\{x_0(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ позначимо потік Арратья.

Основним результатом цього підрозділу є наступна теорема.

Теорема 2.1.3. *Для будь-яких $n \in \mathbb{N}$ і $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$ у просторі $C([0; +\infty), \mathbb{R}^n)$ має місце слабка збіжність*

$$(x_\varepsilon(u_1, \cdot), \ldots, x_\varepsilon(u_n, \cdot)) \xrightarrow{w} (x_0(u_1, \cdot), \ldots, x_0(u_n, \cdot)), \quad \varepsilon \to 0+.$$

В другому підрозділі ми отримуємо оцінку на відстань Васерштейна між розподілами випадкових мір, що є образами (детермінованої) міри, зосередженої на $[0;1]$, під дією потоку Харріса, коваріаційна функція якого має компактний носій, і потоку Арратья.

Нехай $\{x(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ — потік Харріса з коваріаційною функцією Γ, яка має компактний носій, а $\{x_0(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ — потік Арратья. Покладемо

$$\lambda := \mu \circ x^{-1}(\cdot, 1),$$
$$\lambda_0 := \mu \circ x_0^{-1}(\cdot, 1),$$

де μ — деяка ймовірнісна борелівська міра на дійсній вісі, яка має скінченний перший момент. Тоді розподіли Λ та Λ_0 випадкових мір λ та λ_0 відповідно як елементів простору всіх ймовірнісних борелівських мір на дійсній вісі, що мають скінченний перший момент, наділеного відстанню Васерштейна W_1, самі мають скінченний перший момент. Це означає, що ми можемо розглядати відстань Васерштейна $W_1(\Lambda, \Lambda_0)$ між Λ та Λ_0.

Основним результатом цього підрозділу є наступна оцінка $W_1(\Lambda, \Lambda_0)$ через діаметр $d(\Gamma)$ носія функції Γ.

Теорема 2.2.1. *Нехай* $\{x(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ *— потік Харріса з коваріаційною функцією* Γ*, яка має компактний носій, а* $\{x_0(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ *— потік Арратья. Припустимо, що*

$$\operatorname{supp} \mu \subset [0;1]$$

та

$$d(\Gamma) < \frac{1}{100}.$$

Тоді

$$W_1(\Lambda, \Lambda_0) \leqslant C \cdot d(\Gamma)^{1/22},$$

де стала $C > 0$ *не залежить від* μ *і* Γ*.*

В *третьому розділі* досліджуються області концентрації мір, перенесених потоками Харріса без склеювання.

Розглянемо стохастичне інтегральне рівняння

$$x(u,t) = u + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \varphi(x(u,s) - q)\, W(dq, ds), \quad t \geqslant 0,$$

де $u \in \mathbb{R}$ — фіксований параметр, W — вінерів лист на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, а функція $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, [0; +\infty))$ (тобто нескінченно диференційовна і з компактним носієм) симетрична і має одиничну L_2-норму. Нехай $\{x(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ — потік Харріса, породжений розв'язками цього рівняння для $u \in \mathbb{R}$.

Розглянемо випадкові міри

$$\lambda_t := \lambda \circ x^{-1}(\cdot, t), \quad t \geqslant 0,$$

де λ — одновимірна міра Лебега. Ці міри є абсолютно неперервними, і нехай p_t є відповідними щільностями. Для кожного $t > 0$ позначимо через $\mu_t(c)$ інтенсивність перетинів випадковим процесом $\{p_t(u),\ u \in \mathbb{R}\}$ рівня $c > 0$. На основі допоміжних тверджень, доведених в перших двох підрозділах, в третьому підрозділі ми обчислюємо $\mu_t(c)$ для майже всіх рівнів $c > 0$ (нижче L' та L'' — певні додатні сталі, які залежать лише від функції φ).

Теорема 3.3.1. *Для всіх $t > 0$ справедливе співвідношення*

$$\mu_t(c) = \frac{\sqrt{2L''} \cdot e^{\frac{\pi^2}{2L't} - \frac{L't}{8}}}{\pi L' \sqrt{\pi t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{v^2}{2L't}} \operatorname{sh} v \sin \frac{\pi v}{L't}}{\sqrt{1 + \frac{2 \operatorname{ch} v}{c} + \frac{1}{c^2}}} \, dv \qquad \text{для п. в. } c > 0.$$

Крім того, ми встановлюємо асимптотичну поведінку правої частини рівності з наведеної теореми, яку ми позначаємо через $\overline{\mu}_t(c)$.

Теорема 3.3.2. *Для будь-якого $t > 0$ справедливе співвідношення*

$$\overline{\mu}_t(c) = \frac{e^{-\frac{L't}{8}} \sqrt{L''}}{\pi \sqrt{2L'}} \cdot \sqrt{\frac{c}{\ln c}} \cdot \exp\left[-\frac{(\ln c)^2}{2L't} \right] \cdot (1 + \overline{o}(1)), \quad c \to +\infty.$$

В *четвертому розділі* ми досліджуємо розподіл числа кластерів потоку Арратья в будь-який додатний момент часу.

Нехай $\{x(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ — потік Арратья. Зафіксуємо довільні $u > 0$ та $t > 0$. Відомо, що множина $x([0;u],t)$ є скінченною майже напевно. Позначимо через $\nu_t([0;u])$ кількість елементів цієї множини. Основною метою даного розділу є знаходження ймовірності події $\{\nu_t([0;u]) = k\}$ для кожного $k \geqslant 2$.

В першому підрозділі ми намагаємося це зробити за допомогою добре відомої формули Карліна–Макгрегора. Нам вдається довести наступну теорему (тут і далі p_t — щільність нормального розподілу з нульовим середнім та дисперсією t).

Теорема 4.1.3. *Ми маємо*

$$\mathbf{P}\{\nu_t([0;u]) = 2\} = \frac{u}{\sqrt{\pi t}} - \int\limits_0^u \int\limits_{\Delta_3} \begin{vmatrix} p_t(v_1) & p_t'(v_1 - r) & p_t(v_1 - r) \\ p_t(v_2) & p_t'(v_2 - r) & p_t(v_2 - r) \\ p_t(v_3) & p_t'(v_3 - r) & p_t(v_3 - r) \end{vmatrix} \begin{matrix} dv_1 \\ dv_2 \\ dv_3 \end{matrix} dr -$$

$$- \int\limits_0^u \int\limits_{\Delta_3} \begin{vmatrix} p_t'(v_1 - r) & p_t(v_1 - r) & p_t(v_1 - u) \\ p_t'(v_2 - r) & p_t(v_2 - r) & p_t(v_2 - u) \\ p_t'(v_3 - r) & p_t(v_3 - r) & p_t(v_3 - u) \end{vmatrix} \begin{matrix} dv_1 \\ dv_2 \\ dv_3 \end{matrix} dr +$$

$$+ \int\limits_0^u \int\limits_{\Delta_4} \begin{vmatrix} p_t(v_1) & p_t'(v_1 - r) & p_t(v_1 - r) & p_t(v_1 - u) \\ p_t(v_2) & p_t'(v_2 - r) & p_t(v_2 - r) & p_t(v_2 - u) \\ p_t(v_3) & p_t'(v_3 - r) & p_t(v_3 - r) & p_t(v_3 - u) \\ p_t(v_4) & p_t'(v_4 - r) & p_t(v_4 - r) & p_t(v_4 - u) \end{vmatrix} \begin{matrix} dv_1 \\ dv_2 \\ dv_3 \\ dv_4 \end{matrix} dr.$$

На множині $\{\nu_t([0;u])=2\}$ ми можемо означити θ як єдину точку розриву відображення $x(\cdot,t)\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ на відрізку $[0;u]$ і ξ_1 і ξ_2 як нижній та верхній кластери в образі $x([0;u],t)$ відповідно.

Теорема 4.1.4. *Для всіх борелівських множин $A\subset[0;u]$ і $B_1,B_2\subset\mathbb{R}$, таких, що $B_1<B_2$, ми маємо*

$$
\begin{gathered}
\mathbf{P}\left\{\nu_t([0;u])=2,\ \theta\in A,\ \xi_1\in B_1,\ \xi_2\in B_2\right\}=\\
=\int\limits_A\int\limits_{\Delta_2}\begin{vmatrix} p_t'(v_1-r) & p_t(v_1-r)\\ p_t'(v_2-r) & p_t(v_2-r)\end{vmatrix}\,1\!\!\mathrm{I}\begin{Bmatrix} v_1\in B_1,\\ v_2\in B_2\end{Bmatrix}\begin{matrix}dv_1\\ dv_2\end{matrix}\,dr-\\
-\int\limits_A\int\limits_{\Delta_3}\begin{vmatrix} p_t(v_1) & p_t'(v_1-r) & p_t(v_1-r)\\ p_t(v_2) & p_t'(v_2-r) & p_t(v_2-r)\\ p_t(v_3) & p_t'(v_3-r) & p_t(v_3-r)\end{vmatrix}\,1\!\!\mathrm{I}\begin{Bmatrix} v_2\in B_1,\\ v_3\in B_2\end{Bmatrix}\begin{matrix}dv_1\\ dv_2\\ dv_3\end{matrix}\,dr-\\
-\int\limits_A\int\limits_{\Delta_3}\begin{vmatrix} p_t'(v_1-r) & p_t(v_1-r) & p_t(v_1-u)\\ p_t'(v_2-r) & p_t(v_2-r) & p_t(v_2-u)\\ p_t'(v_3-r) & p_t(v_3-r) & p_t(v_3-u)\end{vmatrix}\,1\!\!\mathrm{I}\begin{Bmatrix} v_1\in B_1,\\ v_2\in B_2\end{Bmatrix}\begin{matrix}dv_1\\ dv_2\\ dv_3\end{matrix}\,dr+\\
+\int\limits_A\int\limits_{\Delta_4}\begin{vmatrix} p_t(v_1) & p_t'(v_1-r) & p_t(v_1-r) & p_t(v_1-u)\\ p_t(v_2) & p_t'(v_2-r) & p_t(v_2-r) & p_t(v_2-u)\\ p_t(v_3) & p_t'(v_3-r) & p_t(v_3-r) & p_t(v_3-u)\\ p_t(v_4) & p_t'(v_4-r) & p_t(v_4-r) & p_t(v_4-u)\end{vmatrix}\,1\!\!\mathrm{I}\begin{Bmatrix} v_2\in B_1,\\ v_3\in B_2\end{Bmatrix}\begin{matrix}dv_1\\ dv_2\\ dv_3\\ dv_4\end{matrix}\,dr.
\end{gathered}
$$

В другому підрозділі для підрахунку відповідних ймовірностей ми використовуємо відомі пфаффівські формули для континуальних систем броунівських частинок, що склеюються або анігілюють в момент зіткнення.

Для $r_0\leqslant r_1\leqslant\ldots\leqslant r_k\leqslant r_{k+1}$ нехай $\widehat{\mathbf{F}}_t\equiv\widehat{\mathbf{F}}_t(r_0,r_1,\ldots,r_k,r_{k+1})$ є антисиметричною матрицею порядку $2k+2$ з елементами над діагоналлю

$$
(\widehat{\mathbf{F}}_t)_{ij}:=\begin{cases} F_t(r_{[j/2]}-r_{[i/2]}), & \text{якщо } i \text{ парне або } i=1, \text{ та } j \text{ парне},\\ F_t'(r_{[j/2]}-r_{[i/2]}), & \text{якщо } i \text{ парне або } i=1, \text{ та } j \text{ непарне},\\ -F_t'(r_{[j/2]}-r_{[i/2]}), & \text{якщо } i \text{ непарне}, i\neq 1 \text{ та } j \text{ парне},\\ -F_t''(r_{[j/2]}-r_{[i/2]}), & \text{якщо } i \text{ непарне}, i\neq 1 \text{ та } j \text{ непарне},\end{cases}
$$

де

$$
F_t(z):=2\int\limits_{z/\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{v^2}{2t}}\,dv,\quad z\in\mathbb{R}.
$$

Теорема 4.2.5. *Для всіх $k \geqslant 1$ ми маємо*

$$\mathbf{P}\left\{\nu_t([0;u]) = k+1\right\} = \int\limits_{\Delta_k(u)} \cdots \int \mathrm{Pf}\left(\widehat{\mathbf{F}}_t(0, r_1, \ldots, r_k, u)\right) dr_1 \ldots dr_k,$$

де

$$\Delta_k(u) := \{(r_1, \ldots, r_k) \in \mathbb{R}^k \mid 0 \leqslant r_1 \leqslant \ldots \leqslant r_k \leqslant u\}.$$

Тепер на множині $\{\nu_t([0;u]) = k+1\}$ означимо $\theta_1, \ldots, \theta_k \in [0;u]$, $\theta_1 < \ldots < \theta_k$, як точки розриву відображення $x(\cdot, t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ на відрізку $[0;u]$.

Теорема 4.2.6. *Для всіх $k \geqslant 1$ та непустих борелівських множин $A_1, \ldots, A_k \subset [0;u]$, таких, що $A_1 < \ldots < A_k$, ми маємо*

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\left\{\nu_t([0;u]) = k+1,\ \theta_1 \in A_1,\ \ldots,\ \theta_k \in A_k\right\} = \\ &= \int\limits_{A_1 \times \ldots \times A_k} \cdots \int \mathrm{Pf}\left(\widehat{\mathbf{F}}_t(0, r_1, \ldots, r_k, u)\right) dr_1 \ldots dr_k. \end{aligned}$$

В третьому підрозділі ми знаходимо середнє значення $\nu_t([0;u])$ за допомогою поняття загального часу вільного пробігу частинок у потоці Арратья.

Теорема 4.3.3. *Ми маємо*

$$\mathbf{E}\nu_t([0;u]) = 1 + \frac{u}{\sqrt{\pi t}}.$$

Автор висловлює глибоку вдячність своєму науковому керівнику, доктору фізико-математичних наук, професору А. А. Дороговцеву за неоціниму допомогу та постійну підтримку під час виконання даної роботи, а також всім співробітникам відділу теорії випадкових процесів Інституту математики НАН України за дружні та плідні дискусії.

Розділ 1

Асимптотичні властивості потоків Харріса

Цей розділ присвячений різного роду асимптотичним властивостям потоків Харріса при прямуванні часової змінної до нескінченності. У першому підрозділі приводяться короткі відомості про загальні броунівські стохастичні потоки та зокрема потоки Харріса. У другому підрозділі для потоків Харріса із гладкою коваріаційною функцією ми встановлюємо швидкість збіжності до нуля відстані між частинками й асимптотичну поведінку її моментів. У третьому підрозділі ми знаходимо асимптотику моментів n-точкових рухів потоків Харріса із неперервною коваріаційною функцією.

1.1 Броунівські стохастичні потоки

У даній дисертації ми використовуємо наступне означення броунівського стохастичного потоку.

Означення 1.1.1. Випадкове поле $\{x(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ називається *броунівським стохастичним потоком*, якщо воно задовольняє наступні умови:

1) для будь-якого $u \in \mathbb{R}$ випадковий процес $\{x(u,t),\ t \geqslant 0\}$ є броунівським рухом відносно загальної фільтрації

$$\mathcal{F}_t := \sigma\{x(v,s),\ v \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant s \leqslant t\}, \quad t \geqslant 0;$$

2) $x(u,0) = u$ для всіх $u \in \mathbb{R}$;

3) для будь-яких $u, v \in \mathbb{R}$, якщо $u \leqslant v$, то $x(u,t) \leqslant x(v,t)$ для всіх $t \geqslant 0$.

Зауваження 1.1.2. Наведене означення було вперше використане у роботі [64].

Частковим випадком броунівських стохастичних потоків є потоки Харріса.

Означення 1.1.3. Броунівський стохастичний потік $\{x(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ називається *потоком Харріса з коваріаційною функцією* Γ, якщо для будь-яких $u, v \in \mathbb{R}$ взаємна квадратична варіація вінерових процесів $\{x(u,t),\ t \geqslant 0\}$ та $\{x(v,t),\ t \geqslant 0\}$ представляється у вигляді

$$\langle x(u,\cdot), x(v,\cdot)\rangle_t = \int\limits_0^t \Gamma(x(u,s) - x(v,s))\, ds, \quad t \geqslant 0.$$

Зауважимо, що коваріаційна функція Γ завжди є невід'ємно визначеною і симетричною. Крім того, без порушення загальності ми будемо вважати, що

$$\Gamma(0) = 1.$$

Остання умова еквівалентна тому, що всі вінерові процеси в означенні 1.1.3 є стандартними.

Крім того, якщо функція Γ неперервна, то за теоремою Бохнера–Хінчіна існує така ймовірнісна борелівська міра μ_Γ на числовій прямій, що

$$\Gamma(z) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\lambda z}\, \mu_\Gamma(d\lambda), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Міра μ_Γ називається *спектральною мірою* функції Γ.

Наступна теорема дає достатні умови на функцію Γ, що забезпечують існування потоку Харріса, для якого ця функція є коваріаційною.

Теорема 1.1.4. [25] *Нехай функція* $\Gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *невід'ємно визначена, неперервна та задовольняє умову Ліпшиця на кожному інтервалі* $(-c; c)$, $c > 0$. *Крім того, нехай* $\Gamma(0) = 1$ *та спектральна міра* μ_Γ *не є дискретною. Тоді існує потік Харріса, для якого функція* Γ *є коваріаційною, причому такий потік єдиний за розподілом.*

У довільному броунівському стохастичному потоці $\{x(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ для будь-яких $u, v \in \mathbb{R}$, $u > v$, випадковий процес $\{x(u,t) - x(v,t),\ t \geqslant 0\}$ представляє собою невід'ємний мартингал. Отже (див. [29]), він стає тотожним нулем після першого потрапляння в нього. Таким чином, в одновимірних броунівських стохастичних потоках може спостерігатися *склеювання частинок*.

З критерію досяжності Феллера для дифузійних процесів (див. [29]) випливає наступний критерій склеювання частинок у потоці Харріса (пор. з [42]).

Теорема 1.1.5. *Склеювання частинок у потоці Харріса з коваріаційною функцією* Γ *має місце тоді й тільки тоді, коли*

$$\forall\, \delta > 0 : \quad \int\limits_0^\delta \frac{z\,dz}{1 - \Gamma(z)} < +\infty.$$

Наведемо тепер деякі приклади потоків Харріса.

Приклад 1.1.6. *Потоком Арратья* називається потік Харріса $\{x(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ з коваріаційною функцією

$$\Gamma = 1\!\!\mathrm{I}_{\{0\}},$$

тобто такий броунівський стохастичний потік, що

$$\langle x(u,\cdot), x(v,\cdot)\rangle_t = \int\limits_0^t 1\!\!\mathrm{I}\{x(u,s) = x(v,s)\}\,ds, \quad t \geqslant 0.$$

Такий потік був уперше побудований в дисертації Р. А. Арратья [2] як слабка границя сімейств простих симетричних випадкових блукань, що склеюються.

Неформально потік Арратья можна описати як потік броунівських частинок, кожні дві з яких рухаються незалежно до моменту зустрічі, у момент зустрічі склеюються й далі рухаються разом. □

Приклад 1.1.7. Широкий клас броунівських стохастичних потоків породжується розв'язками стохастичних диференціальних рівнянь. Дійсно, для кожного $u \in \mathbb{R}$ розглянемо стохастичне диференціальне рівняння

$$dx(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(x(t))\, dw_k(t), \tag{1.1}$$

де вимірні функції $\sigma_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k \geqslant 1$, задовольняють умови

$$\forall\, z \in \mathbb{R} : \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2(z) = 1, \tag{1.2}$$

$$\exists\, L > 0 \quad \forall\, z', z'' \in \mathbb{R} : \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left|\sigma_k(z') - \sigma_k(z'')\right|^2 \leqslant L \left|z' - z''\right|^2, \tag{1.3}$$

а $\{w_k,\ k \geqslant 1\}$ — послідовність незалежних вінерових процесів. Якщо ми тепер позначимо (єдиний) сильний розв'язок цього рівняння з початковою умовою $x(0) = u$ через $x(u, \cdot)$, то випадкове поле $\{x(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ утворює броунівський стохастичний потік.

При цьому

$$\langle x(u,\cdot), x(v,\cdot)\rangle_t = \int_0^t \left[\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(x(u,s))\sigma_k(x(v,s))\right] ds, \quad t \geqslant 0,$$

а отже якщо для деякої функції Γ має місце тотожність

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(z')\sigma_k(z'') = \Gamma(z' - z''), \quad z', z'' \in \mathbb{R}, \tag{1.4}$$

то отриманий броунівський стохастичний потік буде потоком Харріса з коваріаційною функцією Γ.

Зауважимо, що якщо коваріаційна функція Γ неперервна, то існують такі неперервні функції $\{\sigma_k,\ k \geqslant 1\}$, що має місце представлення (1.4). Дійсно, згідно з наслідком 1 на стор. 129 роботи [61] гільбертів простір H_Γ з відтворюючим ядром Γ є сепарабельним, а отже, ізометричним гільбертовому простору l_2. Значить, кожному елементу $\Gamma(\cdot - z) \in H_\Gamma$, $z \in \mathbb{R}$, можна поставити у відповідність єдиний елемент $\vec{\sigma}(z) = (\sigma_1(z), \sigma_2(z), \ldots) \in l_2$ так, що

$$(\Gamma(\cdot - z'), \Gamma(\cdot - z''))_{H_\Gamma} = (\vec{\sigma}(z'), \vec{\sigma}(z''))_{l_2}, \quad z', z'' \in \mathbb{R}.$$

Однак з останньої рівності випливають рівності (1.2) та (1.4).

Більше того, якщо функція Γ є двічі неперервно диференційовною з обмеженою другою похідною, то

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\sigma_k(z') - \sigma_k(z''))^2 = 2(1 - \Gamma(z' - z'')) \leqslant L\,|z' - z''|^2, \quad z', z'' \in \mathbb{R},$$

де

$$L := \sup_{z>0} \frac{1 - \Gamma(z)}{z^2} < +\infty,$$

тобто виконується й умова (1.3).

Таким чином, якщо $\Gamma \in C_b^2(\mathbb{R})$, то потік Харріса з коваріаційною функцією Γ може бути побудований зазначеним вище способом як потік розв'язків стохастичного диференціального рівняння (1.1). $\square$

Означення 1.1.8. *n-точковими рухами* броунівського стохастичного потоку називаються n-вимірні випадкові процеси $\{(x(u_1, t), \ldots, x(u_n, t)),\ t \geqslant 0\}$, де $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$ (тут $n \geqslant 1$ — довільне натуральне число).

Наприкінці цього підрозділу покажемо, що при досить загальній умові на коваріаційну функцію потоку Харріса відстань між будь-якими двома частинками цього потоку прямує до нуля.

Теорема 1.1.9. *Нехай* $\{x(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ *— потік Харріса з коваріаційною функцією* Γ*, яка задовольняє умову*

$$\forall\, \delta > 0: \quad \sup_{z:\, |z| \geqslant \delta} \Gamma(z) < 1. \tag{1.5}$$

Тоді

$$\forall\, u, v \in \mathbb{R}: \quad \lim_{t \to +\infty}(x(u,t) - x(v,t)) = 0 \quad \textit{м. н.}$$

Доведення. Доведення цієї теореми базується на ідеї, використаній у доведенні леми 1 у роботі [37].

Зафіксуємо довільні $u, v \in \mathbb{R}$, $u > v$. Тоді випадковий процес $\{x(u,t) - x(v,t),\ t \geqslant 0\}$ є мартингалом з квадратичною характеристикою

$$\tau_t := \langle x(u,\cdot) - x(v,\cdot)\rangle_t = 2t - 2\int_0^t \Gamma(x(u,s) - x(v,s))\,ds, \quad t \geqslant 0,$$

а отже, згідно з теоремою Найта [30] існує (можливо, на розширеному ймовірнісному просторі) такий вінерів процес $\{\beta(t),\ t \geqslant 0\}$, що з ймовірністю одиниця має місце представлення

$$x(u,t) - x(v,t) = (u-v) + \beta(\tau_t), \quad t \geqslant 0.$$

Покладемо

$$\tau := \inf\{t \geqslant 0 \mid \beta(t) = -(u-v)\}.$$

Тоді

$$\tau < +\infty \quad \text{м. н.} \tag{1.6}$$

Більше того, оскільки

$$x(u,t) - x(v,t) \geqslant 0, \quad t \geqslant 0,$$

то

$$\tau_t \leqslant \tau, \quad t \geqslant 0.$$

Отже існує границя

$$\lim_{t\to+\infty} \tau_t =: \tau_\infty \leqslant \tau.$$

Значить, у силу неперервності траєкторій вінерового процесу

$$\lim_{t\to+\infty} (x(u,t) - x(v,t)) = (u-v) + \beta(\tau_\infty). \tag{1.7}$$

Припустимо тепер, що права частина співвідношення (1.7) відмінна від нуля. Тоді з (1.5) та (1.7) випливає, що існують такі $\varepsilon > 0$ та $t_0 \geqslant 0$ (взагалі кажучи, що залежать від ω), що

$$\forall\, t \geqslant t_0: \quad \Gamma(x(u,t) - x(v,t)) < 1 - \varepsilon.$$

Але тоді для будь-якого $t \geqslant t_0$ ми маємо

$$\begin{aligned} \tau_t = 2\int_0^t [1 - \Gamma(x(u,s) - x(v,s))]\, ds \geqslant \\ \geqslant 2\int_{t_0}^t [1 - \Gamma(x(u,s) - x(v,s))]\, ds \geqslant \\ \geqslant 2\varepsilon \cdot (t - t_0) \end{aligned}$$

і, отже,

$$\tau \geqslant \tau_\infty = \lim_{t\to+\infty} \tau_t = +\infty.$$

Але це суперечить (1.6). $\square$

Оскільки порядок частинок у потоках Харріса зберігається, то з цієї теореми безпосередньо випливає наступний наслідок.

Наслідок 1.1.10. *Нехай* $\{x(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ *— потік Харріса з коваріаційною функцією* Γ*, яка задовольняє умову* (1.5)*. Тоді з ймовірністю одиниця*

$$\forall\, u, v \in \mathbb{R}: \quad \lim_{t\to+\infty} (x(u,t) - x(v,t)) = 0.$$

1.2 Асимптотика відстані між частинками та її моментів

У цьому підрозділі ми покажемо, що якщо коваріаційна функція потоку Харріса має другу похідну в нулі, то при прямуванні часу до нескінченності відстань між будь-якими двома частинками цього потоку прямує до нуля з експоненційною швидкістю. Крім того, ми покажемо, що при деяких додаткових умовах на поведінку коваріаційної функції на нескінченності n-ий момент цієї відстані зростає як $t^{\frac{n-1}{2}}$.

Перед тим як формулювати відповідні результати, ми наведемо наступне елементарне твердження, яке буде часто використовуватись у цьому та наступному підрозділі.

Твердження 1.2.1. *Нехай функція* $f\colon [0;+\infty) \to \mathbb{R}$ *локально інтегровна за Ріманом та*

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Тоді

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t f(s)\, ds = c.$$

Доведення. Доведення цього твердження є стандартним і тому опускається. $\square$

Розглянемо тепер потік Харріса $\{x(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ з коваріаційною функцією Γ, яка задовольняє наступні умови:

$$\Gamma(z) = 1 \iff z = 0, \tag{1.8}$$

$$\Gamma \text{ двічі диференційовна у нулі,} \tag{1.9}$$

$$\forall\, n \geqslant 1: \quad \lim_{|z| \to +\infty} z^n \Gamma(z) = 0. \tag{1.10}$$

Тоді з умови (1.9) та теореми 1.1.5 випливає, що з ймовірністю одиниця частинки потоку не склеюються. Крім того, оскільки функція Γ невід'ємно визначена, то умова (1.9) означає, що функція Γ неперервна. З неперервності функції та умов (1.8) і (1.10) випливає умова (1.5), а отже за теоремою 1.1.9 з ймовірністю одиниця для будь-яких $u, v \in \mathbb{R}$

$$\lim_{t \to +\infty} (x(u,t) - x(v,t)) = 0. \tag{1.11}$$

Тому з (1.10) та теореми Лебега про обмежену збіжність випливають співвідношення

$$\mathbf{E}\Gamma(x(u,t) - x(v,t)) \to 1, \quad t \to +\infty, \tag{1.12}$$

$$\mathbf{E}\left[(x(u,t) - x(v,t))^n\, \Gamma(x(u,t) - x(v,t))\right] \to 0, \quad t \to +\infty, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.13}$$

Покладемо

$$\sigma(z) := \sqrt{2(1 - \Gamma(z))}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Тоді із властивостей функції Γ випливає, що

$$\sigma \in C(\mathbb{R}),$$
$$\sigma(z) = \sigma(-z), \quad z \in \mathbb{R},$$
$$0 \leqslant \sigma(z) \leqslant \sqrt{2}, \quad z \in \mathbb{R},$$
$$\sigma(z) = 0 \iff z = 0.$$

Також для $u, v \in \mathbb{R}$ покладемо

$$\xi_t \equiv \xi_t(u,v) = x(u,t) - x(v,t), \quad t \geqslant 0.$$

Оскільки взаємна квадратична варіація вінерових процесів $\{x(u,t),\ t \geqslant 0\}$ та $\{x(v,t),\ t \geqslant 0\}$ має вигляд

$$\langle x(u,\cdot), x(v,\cdot)\rangle_t = \int_0^t \Gamma(x(u,s) - x(v,s))\, ds, \quad t \geqslant 0,$$

то

$$\langle \xi \rangle_t = \langle x(u,\cdot) - x(v,\cdot) \rangle_t = \langle x(u,\cdot) \rangle_t + \langle x(v,\cdot) \rangle_t - 2\,\langle x(u,\cdot), x(v,\cdot) \rangle_t =$$

$$= 2t - 2\int\limits_0^t \Gamma(x(u,s) - x(v,s))\,ds = \int\limits_0^t \sigma^2(x(u,s) - x(v,s))\,ds, \quad t \geqslant 0.$$

Теорема 1.2.2. *З ймовірністю одиниця для будь-яких $u, v \in \mathbb{R}$, $u > v$,*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln\left(x(u,t) - x(v,t)\right) = \frac{1}{2}\Gamma''(0).$$

Доведення. Випадковий процес $\{\xi_t = x(u,t) - x(v,t),\ t \geqslant 0\}$ є строго додатнім для всіх $t \geqslant 0$ з ймовірністю одиниця та задовольняє стохастичне інтегральне рівняння

$$\xi_t = (u - v) + \int\limits_0^t \sigma(\xi_s)\,d\beta_s, \quad t \geqslant 0,$$

де $\{\beta_t,\ t \geqslant 0\}$ — вінерів процес, визначений на тому самому ймовірнісному просторі (див. нижче доведення теореми 1.3.4). Отже, за формулою Іто

$$\frac{1}{t}\ln \xi_t = \frac{1}{t}\ln(u-v) + \frac{1}{t}\int\limits_0^t \frac{\sigma(\xi_s)}{\xi_s}\,d\beta_s - \frac{1}{2t}\int\limits_0^t \frac{\sigma^2(\xi_s)}{\xi_s^2}\,ds, \quad t > 0.$$

З одного боку, із співвідношення

$$\lim_{z\to0+} \frac{\sigma^2(z)}{z^2} = \lim_{z\to0+} \frac{2(1-\Gamma(z))}{z^2} = -\lim_{z\to0+} \Gamma''(z) = -\Gamma''(0) \tag{1.14}$$

та теореми 1.1.9 випливає, що

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\sigma^2(\xi_t)}{\xi_t^2} = -\Gamma''(0) \quad \text{м. н.}$$

і, значить,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t \frac{\sigma^2(\xi_s)}{\xi_s^2}\,ds = -\Gamma''(0) \quad \text{м. н.} \tag{1.15}$$

З іншого боку, мартингал

$$m_t := \int_0^t \frac{\sigma(\xi_s)}{\xi_s}\, d\beta_s, \quad t \geqslant 0,$$

має квадратичну варіацію

$$\langle m \rangle_t = \int_0^t \frac{\sigma^2(\xi_s)}{\xi_s^2}\, ds, \quad t \geqslant 0,$$

яка, завдяки обмеженості функції

$$(0;+\infty) \ni z \longmapsto \frac{\sigma^2(z)}{z^2} \in (0;+\infty),$$

може бути оцінена наступним чином:

$$\langle m \rangle_t \leqslant Kt, \quad t \geqslant 0, \quad \text{м. н.},$$

де

$$K := \sup_{z>0} \frac{\sigma^2(z)}{z^2}.$$

Отже,

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{K}} m \right\rangle_t \leqslant t, \quad t \geqslant 0, \quad \text{м. н.},$$

і з представлення

$$\frac{1}{\sqrt{K}} m_t = \widetilde{\beta}_{<\frac{1}{\sqrt{K}}m>_t}, \quad t \geqslant 0, \quad \text{м. н.},$$

де $\{\widetilde{\beta}_t,\ t \geqslant 0\}$ — стандартний вінерів процес (можливо, визначений на розширеному ймовірнісному просторі), ми отримуємо

$$\frac{1}{\sqrt{K}} m_t = \widetilde{\beta}_{<\frac{1}{\sqrt{K}}m>_t} \leqslant \sup_{0\leqslant s\leqslant t} \widetilde{\beta}_{<\frac{1}{\sqrt{K}}m>_s} \leqslant \max_{0\leqslant s\leqslant t} \widetilde{\beta}_s, \quad t \geqslant 0, \quad \text{м. н.},$$

та

$$\frac{1}{\sqrt{K}} m_t = \widetilde{\beta}_{<\frac{1}{\sqrt{K}}m>_t} \geqslant \inf_{0\leqslant s\leqslant t} \widetilde{\beta}_{<\frac{1}{\sqrt{K}}m>_s} \geqslant \min_{0\leqslant s\leqslant t} \widetilde{\beta}_s, \quad t \geqslant 0, \quad \text{м. н.}$$

Однак, із закону повторного логарифма випливає, що

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\min_{0\leqslant s\leqslant t}\widetilde{\beta}_s=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\max_{0\leqslant s\leqslant t}\widetilde{\beta}_s=0 \quad \text{м. н.},$$

і, отже,

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}m_t=0 \quad \text{м. н.} \tag{1.16}$$

Таким чином, з (1.15) та (1.16) ми отримуємо, що для будь-яких $u, v \in \mathbb{R}$, $u > v$,

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln\left(x(u,t)-x(v,t)\right)=\frac{1}{2}\Gamma''(0) \quad \text{м. н.},$$

і твердження теореми тепер випливає зі строгої монотонності $x(u,t)$ за просторовою змінною для всіх $t \geqslant 0$ з ймовірністю одиниця. □

Наслідок 1.2.3. *З ймовірністю одиниця для будь-яких $u, v \in \mathbb{R}$, $u \neq v$,*

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln\left(1-\Gamma(x(u,t)-x(v,t))\right)=\Gamma''(0).$$

Доведення. Це безпосередньо випливає з (1.14), теореми 1.2.2 та симетричності функції Γ. □

Для доведення наступної теореми нам знадобиться результат, що стосується еволюції розподілу маси в ізотропному броунівському стохастичному потоці.

Теорема 1.2.4. [58, глава 3, теорема 2.20] *Нехай $\{\varphi_{s,t},\ 0 \leqslant s \leqslant t < +\infty\}$ — ізотропний броунівський стохастичний потік, породжений броунівським рухом U в $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, тобто такий, що*

$$\varphi_{s,t}(u)=u+\int_s^t U(\varphi_{s,r}(u),dr), \quad 0\leqslant s\leqslant t<+\infty, \quad u\in\mathbb{R}.$$

Припустимо, що його коваріаційна функція Γ має наступні властивості:

$$\lim_{z\to 0}\frac{\Gamma_0-\Gamma(z)}{z^2}=\beta>0 \tag{1.17}$$

та

$$\left\|\Gamma^*-(\Gamma_0-\Gamma)\right\|^2<\Gamma_0\cdot\left\|\Gamma_0-\Gamma\right\|, \tag{1.18}$$

де $\Gamma_0 := \Gamma(0)$, Γ^* *— мінімальна увігнута мажоранта функції* $\Gamma_0 - \Gamma$ *на* $\mathbb{R}_+$ *та*

$$\|f\| := \sup_{z\in[0;+\infty)} |f(z)|\,.$$

Також припустимо, що ймовірнісна міра μ_0 *на* $\mathbb{R}$ *задовольняє умову*

$$\exists\, \varepsilon > 0: \quad \int\limits_{\mathbb{R}} e^{\varepsilon|u|}\,\mu_0(du) < +\infty. \tag{1.19}$$

Тоді для

$$D_t = \int\limits_{\mathbb{R}} (u - C_t)^2\,\mu_t(du), \quad t \geqslant 0,$$

де

$$\mu_t = \mu_0 \circ \varphi_{0,t}^{-1}, \quad t \geqslant 0,$$

та

$$C_t = \int\limits_{\mathbb{R}} u\,\mu_t(du), \quad t \geqslant 0,$$

існують функції l *та* m*, такі, що*

$$l(t) \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}}\mathbf{E}D_t \leqslant m(t), \quad t > 0,$$

та

$$\lim_{t\to+\infty} l(t) = c \cdot l_\infty,$$
$$\lim_{t\to+\infty} m(t) = c \cdot m_\infty,$$

де l_∞ *та* m_∞ *є строго додатними сталими, що залежать тільки від функції* Γ*, а стала* c *задається рівністю*

$$c = \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} |u - v|\;\mu_0(du)\,\mu_0(dv).$$

Зауваження 1.2.5. Сталі l_∞ та m_∞ визначаються рівностями

$$l_\infty = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \cdot \left(\sqrt{\frac{\|\Gamma_0 - \Gamma\|}{2}} - \frac{\|\Gamma^* - (\Gamma_0 - \Gamma)\|}{\gamma}\right),$$
$$m_\infty = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \cdot \frac{\|\Gamma_0 - \Gamma\|}{\gamma},$$

де $\gamma < \sqrt{2\Gamma_0}$ може бути взята як завгодно близькою до $\sqrt{2\Gamma_0}$ (звісно, зі зміною функцій l та m).

Теорема 1.2.6. *Для будь-яких $u, v \in \mathbb{R}$ та $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^n}\mathbf{E}\left(x(u,t)-x(v,t)\right)^{2n+1} = 2^n \cdot (2n+1)!! \cdot (u-v) \tag{1.20}$$

та

$$\begin{aligned} c_* \cdot 2^n \cdot (2n+2)!! \cdot |u-v| \leqslant \varliminf_{t\to+\infty} \frac{1}{t^{(2n+1)/2}}\mathbf{E}\left(x(u,t)-x(v,t)\right)^{2n+2} \leqslant \\ \leqslant \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t^{(2n+1)/2}}\mathbf{E}\left(x(u,t)-x(v,t)\right)^{2n+2} \leqslant c^* \cdot 2^n \cdot (2n+2)!! \cdot |u-v| \end{aligned} \tag{1.21}$$

зі сталими c_* та c^*, що задаються рівностями

$$c_* = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(1 - \|F - (1-\Gamma)\|) > 0,$$

де F — мінімальна увігнута мажоранта функції $1-\Gamma$ на $\mathbb{R}_+$, та

$$c^* = \frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

Доведення. Покладемо

$$h_m(t) := \mathbf{E}\left(x(u,t)-x(v,t)\right)^m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Тоді, використовуючи формулу Іто та теорему Фубіні, ми отримуємо

$$h_{m+2}(t) = \mathbf{E}\left(x(u,t)-x(v,t)\right)^{m+2} = (u-v)^{m+2}+$$

$$+(m+2)(m+1)\int_0^t \mathbf{E}\left[\left(x(u,s)-x(v,s)\right)^m \left(1-\Gamma(x(u,s)-x(v,s))\right)\right] ds =$$

$$= (u-v)^{m+2} + (m+2)(m+1)\int_0^t h_m(s)\,ds -$$

$$-(m+2)(m+1)\int_0^t \mathbf{E}\left[\left(x(u,s)-x(v,s)\right)^m \Gamma(x(u,s)-x(v,s))\right] ds,$$

а отже, з (1.13) випливає, що

$$h_{m+2}(t) = (m+2)(m+1) \int\limits_0^t h_m(s)\,ds + \overline{o}(t), \quad t \to +\infty. \tag{1.22}$$

Очевидно, ми маємо

$$h_1(t) \equiv u - v,$$

тобто для $n = 0$ співвідношення (1.20) є вірним. Припустимо, що воно вірне для $n = k \geqslant 0$. Тоді для $n = k+1$, використовуючи правило Лопіталя, ми отримуємо

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{h_{2k+3}(t)}{t^{k+1}} = (2k+3)(2k+2) \cdot \lim_{t\to+\infty} \frac{\int\limits_0^t h_{2k+1}(s)\,ds}{t^{k+1}} =$$
$$= 2 \cdot (2k+3) \cdot \lim_{t\to+\infty} \frac{h_{2k+1}(t)}{t^k} = 2^{k+1} \cdot (2k+3)!! \cdot (u-v),$$

і з принципу математичної індукції випливає перша частина.

Для того, щоб довести другу частину, ми застосуємо теорему 1.2.4. Щоб перевірити умови, помітимо, що з (1.14) випливає (1.17), а (1.18) набуває вигляду

$$\|F - (1-\Gamma)\| < 1.$$

Однак, легко бачити, що зараз ми можемо побудувати функцію $\hat{F}$ вигляду

$$\hat{F}(z) = \min\{1; \alpha z\}, \quad z \geqslant 0,$$

де коефіцієнт $\alpha > 0$ достатньо великий, таку, що

$$1 - \Gamma(z) \leqslant \hat{F}(z), \quad z \geqslant 0,$$

і, отже,

$$\|F - (1-\Gamma)\| \leqslant \left\|\hat{F} - (1-\Gamma)\right\| < 1$$

(остання нерівність випливає з (1.14) та неперервності Γ). Нарешті, якщо ми покладемо

$$\mu_0 = \frac{1}{2}(\delta_u + \delta_v),$$

де δ_a — міра Дірака в точці $a \in \mathbb{R}$, то умова (1.19) також буде виконуватися. Таким чином, за теоремою 1.2.4 ми маємо

$$\frac{1}{2}\left|u-v\right| \cdot \sqrt{\frac{8}{\pi}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\|F-(1-\Gamma)\|}{\gamma}\right) \leqslant \varliminf_{t\to+\infty} \frac{1}{4\sqrt{t}} \mathbf{E}(x(u,t)-x(v,t))^2 \leqslant$$
$$\leqslant \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{4\sqrt{t}} \mathbf{E}(x(u,t)-x(v,t))^2 \leqslant \frac{1}{2}\left|u-v\right| \cdot \sqrt{\frac{8}{\pi}} \cdot \frac{1}{\gamma}.$$

Згадуючи, що γ може бути вибрана як завгодно близькою до $\sqrt{2}$, ми отримуємо

$$c_* \cdot 2\left|u-v\right| \leqslant \varliminf_{t\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} h_2(t) \leqslant \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} h_2(t) \leqslant c^* \cdot 2\left|u-v\right|$$

зі сталими c_* та c^*, визначеними вище, тобто для $n=0$ співвідношення (1.21) вірне. Припускаючи, що воно вірне для $n=k \geqslant 0$, ми отримуємо, що для довільних сталих

$$c_1 < c_* \cdot 2^k \cdot (2k+2)!! \cdot |u-v|$$

та

$$c_2 > c^* \cdot 2^k \cdot (2k+2)!! \cdot |u-v|$$

існує $t_0 > 0$, таке, що для будь-якого $t > t_0$ виконуються нерівності

$$c_1 \leqslant \frac{h_{2k+2}(t)}{t^{(2k+1)/2}} \leqslant c_2.$$

Отже, для будь-якого $t > t_0$ ми маємо

$$\begin{aligned}\int\limits_0^t h_{2k+2}(s)\,ds = \overline{o}(t) + \int\limits_{t_0}^t h_{2k+2}(s)\,ds &\geqslant \\ \geqslant \overline{o}(t) + \frac{2c_1}{2k+3} \cdot \left(t^{(2k+3)/2} - t_0^{(2k+3)/2}\right) &= \\ = \overline{o}(t) + \frac{2c_1}{2k+3} \cdot t^{(2k+3)/2}, \quad t \to +\infty&,\end{aligned}$$

та

$$\int_0^t h_{2k+2}(s)\,ds = \overline{o}(t) + \int_{t_0}^t h_{2k+2}(s)\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \overline{o}(t) + \frac{2c_2}{2k+3} \cdot (t^{(2k+3)/2} - t_0^{(2k+3)/2}) =$$

$$= \overline{o}(t) + \frac{2c_2}{2k+3} \cdot t^{(2k+3)/2}, \quad t \to +\infty.$$

Отже, використовуючи (1.22), ми отримуємо

$$2c_1 \cdot (2k+4) \leqslant \varliminf_{t\to+\infty} \frac{1}{t^{(2k+3)/2}} \mathbf{E}\left(x(u,t) - x(v,t)\right)^{2k+4} \leqslant$$

$$\leqslant \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t^{(2k+3)/2}} \mathbf{E}\left(x(u,t) - x(v,t)\right)^{2k+4} \leqslant 2c_2 \cdot (2k+4).$$

Згадуючи, що сталі c_1 та c_2 можуть бути взяті як завгодно близькими до своїх границь, ми отримуємо, що (1.21) також вірне й для $n = k+1$. Застосування принципу математичної індукції завершує доведення. □

1.3 Асимптотика моментів n-точкових рухів

У цьому підрозділі для потоку Харріса $\{x(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ з неперервною коваріаційною функцією, яка задовольняє умову (1.5), ми доводимо, що для будь-яких $n \in \mathbb{N}$ та $u_1, \ldots, u_{2n} \in \mathbb{R}$ момент $\mathbf{E}\left[x(u_1,t)\ldots x(u_{2n},t)\right]$ має порядок t^n при $t \to +\infty$ та що для будь-яких $n \in \mathbb{N}$ та $u_1, \ldots, u_{2n-1} \in \mathbb{R}$ момент $\mathbf{E}\left[x(u_1,t)\ldots x(u_{2n-1},t)\right]$ має порядок $\overline{o}(t^{n-\frac{1}{2}})$ при $t \to +\infty$.

Нам знадобляться деякі додаткові позначення. Для $n \in \mathbb{N}$ позначимо через C^n простір $C([0;1], \mathbb{R}^n)$ та означимо норму

$$\left\|\vec{f}\right\|_n := \max_{1\leqslant k\leqslant n} \max_{0\leqslant t\leqslant 1} \left|f_k(t)\right|,$$

де $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_n) \in C^n$. Зауважимо, що C^n з метрикою, породженою цією нормою, є повним сепарабельним метричним простором.

Також для будь-якого $u \in \mathbb{R}$ покладемо

$$\overline{x}(u,t) := x(u,t) - u, \quad t \geqslant 0,$$

та для будь-яких $T > 0$ та $u \in \mathbb{R}$ покладемо

$$\overline{x}_T(u,t) := \frac{1}{\sqrt{T}}\overline{x}(u,Tt) \equiv \frac{1}{\sqrt{T}}(x(u,Tt) - u), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Нарешті, для довільних $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$ через $\vec{x}_T$ будемо позначати випадковий елемент $(\overline{x}_T(u_1,\cdot), \ldots, \overline{x}_T(u_n,\cdot))$ у просторі C^n.

Лема 1.3.1. *Справедливі наступні твердження:*

(i) $\forall\, u,v \in \mathbb{R} \quad \forall\, \varepsilon > 0: \quad \lim\limits_{T\to+\infty} \mathbf{P}\left\{\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} |\overline{x}_T(u,t) - \overline{x}_T(v,t)| > \varepsilon\right\} = 0;$

(ii) $\mathbf{P}\left\{\forall\, u,v \in \mathbb{R}: \quad \lim\limits_{T\to+\infty} \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} |\overline{x}_T(u,t) - \overline{x}_T(v,t)| = 0\right\} = 1;$

(iii) $\forall\, R > 0: \quad \lim\limits_{T\to+\infty} \sup\limits_{u,v\in[-R;R]} \mathbf{E}\left(\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} |\overline{x}_T(u,t) - \overline{x}_T(v,t)|\right)^2 = 0.$

Доведення. Ясно, що (i) випливає з (ii), а (ii) випливає із співвідношень

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |\overline{x}_T(u,t) - \overline{x}_T(v,t)| = \\ = \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|\frac{1}{\sqrt{T}}(x(u,Tt) - x(v,Tt)) - \frac{1}{\sqrt{T}}(u-v)\right| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{\sqrt{T}} \max_{0\leqslant t\leqslant T} |x(u,t) - x(v,t)| + \frac{1}{\sqrt{T}}\,|u-v| \end{aligned}$$

та теореми 1.1.9 разом із монотонністю $x(u,t)$ відносно просторової змінної для будь-якого $t \geqslant 0$ з ймовірністю одиниця.

Для того, щоб довести (iii), помітимо, що з нерівності Дуба ми отримуємо оцінку

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(\max_{0\leqslant t\leqslant 1} |\overline{x}_T(u,t) - \overline{x}_T(v,t)|\right)^2 \leqslant 4\mathbf{E}\left(\overline{x}_T(u,1) - \overline{x}_T(v,1)\right)^2 = \\ = 4\left(\mathbf{E}\overline{x}_T^2(u,1) + \mathbf{E}\overline{x}_T^2(v,1) - 2\mathbf{E}\overline{x}_T(u,1)\overline{x}_T(v,1)\right) = \\ = 8\left(1 - \frac{1}{T}\mathbf{E}\overline{x}(u,T)\overline{x}(v,T)\right) = \frac{4}{T}\int_0^T \mathbf{E}\sigma^2(x(u,s) - x(v,s))\,ds. \end{aligned}$$

Знов використовуючи монотонність, ми отримуємо, що з ймовірністю одиниця

$$\sigma(x(u,t)-x(v,t)) \leqslant \sigma^*(x(u,t)-x(v,t)) \leqslant \sigma^*(x(R,t)-x(-R,t)), \quad t \geqslant 0,$$

де

$$\sigma^*(z) := \sup_{z' \in [-z;z]} \sigma(z'), \quad z \in \mathbb{R}_+,$$

а отже, ми можемо записати

$$\mathbf{E}\left(\max_{0\leqslant t\leqslant 1} |\overline{x}_T(u,t)-\overline{x}_T(v,t)|\right)^2 \leqslant \frac{4}{T}\int_0^T \mathbf{E}\sigma^{*2}(x(R,s)-x(-R,s))\,ds. \quad (1.23)$$

З (1.23) та співвідношення

$$\mathbf{E}\sigma^{*2}(x(R,t)-x(-R,t)) \to \sigma^{*2}(0)=0, \quad t \to +\infty,$$

що випливає з теореми про обмежену збіжність, ми отримуємо необхідний результат. □

Лема 1.3.2. *Нехай $\varkappa_T$ — розподіл $\vec{x}_T$ в C^n, $\varkappa_w$ — розподіл випадкового елемента $\vec{w}=(w(\cdot),\ldots,w(\cdot))$ в C^n, де $\{w(t),\ t\in[0;1]\}$ — стандартний вінерів процес. Тоді $\varkappa_T$ слабко збігається до $\varkappa_w$ при $T\to+\infty$.*

Доведення. Завдяки інваріантності вінерового процесу при заміні часу маргінальні розподіли кожної міри $\varkappa_T$ збігаються з розподілом стандартного вінерового процесу. Отже, сімейство ймовірнісних мір $\{\varkappa_T\}_{T>0}$ слабко компактне. Значить, достатньо показати, що для будь-якої послідовності $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$ додатних дійсних чисел, для яких

$$\lim_{k\to\infty} T_k = +\infty$$

та існує слабка границя

$$\lim_{k\to\infty} \varkappa_{T_k} =: \varkappa,$$

справедлива рівність

$$\varkappa = \varkappa_w.$$

Щоб зробити це, помітимо, що за лемою 1.3.1 для будь-яких $\varepsilon > 0$ та $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ ми маємо

$$0 \leqslant \int\limits_{C^n} 1\!\mathrm{I}\left\{\max_{0\leqslant t\leqslant 1} |f_i(t) - f_j(t)| > \varepsilon\right\} \varkappa(d\vec{f}) \leqslant$$

$$\leqslant \varliminf_{k\to\infty} \int\limits_{C^n} 1\!\mathrm{I}\left\{\max_{0\leqslant t\leqslant 1} |f_i(t) - f_j(t)| > \varepsilon\right\} \varkappa_{T_k}(d\vec{f}) =$$

$$= \varliminf_{k\to\infty} \mathbf{P}\left\{\max_{0\leqslant t\leqslant 1} |\overline{x}_{T_k}(u_i, t) - \overline{x}_{T_k}(u_j, t)| > \varepsilon\right\} = 0.$$

Звідси випливає, що

$$\varkappa(\{\vec{f} \in C^n \mid f_1 = \ldots = f_n\}) = 1.$$

Щоб завершити доведення, помітимо, що маргінальні розподіли $\varkappa$ також збігаються з розподілом стандартного вінерового процесу. $\square$

Теорема 1.3.3. *Справедливі наступні твердження:*

$$\forall\, n \geqslant 1 \quad \forall\, u_1, \ldots, u_{2n-1} \in \mathbb{R}: \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^{n-\frac{1}{2}}} \mathbf{E}\left[x(u_1, t) \ldots x(u_{2n-1}, t)\right] = 0, \tag{1.24}$$

$$\forall\, n \geqslant 1 \quad \forall\, u_1, \ldots, u_{2n} \in \mathbb{R}: \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^{n}} \mathbf{E}\left[x(u_1, t) \ldots x(u_{2n}, t)\right] = (2n-1)!!. \tag{1.25}$$

Доведення. Помітимо, що для будь-якого $p > 0$ ми маємо

$$\sup_{T>0} \int\limits_{C^n} \left\|\vec{f}\right\|_n^p \varkappa_T(d\vec{f}) = \sup_{T>0} \mathbf{E}\left[\max_{1\leqslant i\leqslant n} \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |\overline{x}_T(u_i, t)|^p\right] \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{T>0} \sum_{i=1}^n \mathbf{E}\left[\max_{0\leqslant t\leqslant 1} |\overline{x}_T(u_i, t)|^p\right] = n \cdot \mathbf{E}\left[\max_{0\leqslant t\leqslant 1} |w(t)|^p\right] < +\infty,$$

де $\{w(t),\ t \in [0; 1]\}$ — стандартний вінерів процес. Отже, для будь-якого $s \geqslant 0$ ми маємо

$$\lim_{T\to+\infty} \mathbf{E}\left[\overline{x}_T(u_1, s) \ldots \overline{x}_T(u_{2n-1}, s)\right] =$$

$$= \lim_{T\to+\infty} \int\limits_{C^{2n-1}} f_1(s) \cdot \ldots \cdot f_{2n-1}(s)\, \varkappa_T(d\vec{f}) =$$

$$= \int\limits_{C^{2n-1}} f_1(s) \cdot \ldots \cdot f_{2n-1}(s)\, \varkappa_w(d\vec{f}) = \mathbf{E}(w(s))^{2n-1} = 0$$

та

$$\lim_{T\to+\infty} \mathbf{E}\left[\overline{x}_T(u_1, s) \ldots \overline{x}_T(u_{2n}, s)\right] =$$
$$= \lim_{T\to+\infty} \int\limits_{C^{2n}} f_1(s) \cdot \ldots \cdot f_{2n}(s)\, \varkappa_T(d\vec{f}) =$$
$$= \int\limits_{C^{2n}} f_1(s) \cdot \ldots \cdot f_{2n}(s)\, \varkappa_w(d\vec{f}) = \mathbf{E}(w(s))^{2n} = (2n-1)!! \cdot s^n.$$

З іншого боку, для будь-якого $s > 0$

$$\lim_{T\to+\infty} \mathbf{E}\left[\overline{x}_T(u_1, s) \ldots \overline{x}_T(u_{2n-1}, s)\right] =$$
$$= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T^{n-\frac{1}{2}}} \mathbf{E}\left[\overline{x}(u_1, Ts) \ldots \overline{x}(u_{2n-1}, Ts)\right] =$$
$$= s^{n-\frac{1}{2}} \cdot \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^{n-\frac{1}{2}}} \mathbf{E}\left[\overline{x}(u_1, t) \ldots \overline{x}(u_{2n-1}, t)\right]$$

та

$$\lim_{T\to+\infty} \mathbf{E}\left[\overline{x}_T(u_1, s) \ldots \overline{x}_T(u_{2n}, s)\right] =$$
$$= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T^n} \mathbf{E}\left[\overline{x}(u_1, Ts) \ldots \overline{x}(u_{2n}, Ts)\right] =$$
$$= s^n \cdot \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^n} \mathbf{E}\left[\overline{x}(u_1, t) \ldots \overline{x}(u_{2n}, t)\right].$$

Таким чином, ми отримуємо, що

$$\forall\, n \geqslant 1 \quad \forall\, u_1, \ldots, u_{2n-1} \in \mathbb{R}: \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^{n-\frac{1}{2}}} \mathbf{E}\left[\overline{x}(u_1, t) \ldots \overline{x}(u_{2n-1}, t)\right] = 0 \tag{1.26}$$

та

$$\forall\, n \geqslant 1 \quad \forall\, u_1, \ldots, u_{2n} \in \mathbb{R}: \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^n} \mathbf{E}\left[\overline{x}(u_1, t) \ldots \overline{x}(u_{2n}, t)\right] = (2n-1)!!. \tag{1.27}$$

Щоб довести (1.24) та (1.25), ми використаємо принцип математичної індукції. Помітимо, що для будь-яких $u, v \in \mathbb{R}$ ми маємо

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\mathbf{E}x(u,t) = \frac{u}{\sqrt{t}} \to 0, \quad t \to +\infty,$$

та

$$\frac{1}{t}\mathbf{E}\left[x(u,t)x(v,t)\right] = \frac{1}{t}\mathbf{E}\left[\overline{x}(u,t)\overline{x}(v,t)\right] + \frac{uv}{t} =$$
$$= \frac{1}{t}\int\limits_0^t \mathbf{E}\Gamma(x(u,s) - x(v,s))\,ds + \frac{uv}{t} \to 1, \quad t \to +\infty,$$

тобто для $n = 1$ обидві рівності (1.24) та (1.25) виконані. Припустимо, що вони виконуються для $n = k \geqslant 1$. Тоді для $n = k + 1$ ми маємо

$$\overline{o}(1) = \frac{1}{t^{k+\frac{1}{2}}}\mathbf{E}\left[\overline{x}(u_1,t)\ldots\overline{x}(u_{2k+1},t)\right] =$$
$$= \frac{1}{t^{k+\frac{1}{2}}}\mathbf{E}\left[(x(u_1,t) - u_1)\ldots(x(u_{2k+1},t) - u_{2k+1})\right] =$$
$$= \frac{1}{t^{k+\frac{1}{2}}}\left(\mathbf{E}\left[x(u_1,t)\ldots x(u_{2k+1},t)\right] + \overline{o}(t^{k+\frac{1}{2}})\right) =$$
$$= \frac{1}{t^{k+\frac{1}{2}}}\mathbf{E}\left[x(u_1,t)\ldots x(u_{2k+1},t)\right] + \overline{o}(1), \quad t \to +\infty,$$

а отже,

$$\frac{1}{t^{k+1}}\mathbf{E}\left[\overline{x}(u_1,t)\ldots\overline{x}(u_{2k+2},t)\right] =$$
$$= \frac{1}{t^{k+1}}\mathbf{E}\left[(x(u_1,t) - u_1)\ldots(x(u_{2k+2},t) - u_{2k+2})\right] =$$
$$= \frac{1}{t^{k+1}}\left(\mathbf{E}\left[x(u_1,t)\ldots x(u_{2k+2},t)\right] + \overline{o}(t^{k+\frac{1}{2}})\right) =$$
$$= \frac{1}{t^{k+1}}\mathbf{E}\left[x(u_1,t)\ldots x(u_{2k+2},t)\right] + \overline{o}(1), \quad t \to +\infty,$$

звідки випливає, що (1.24) та (1.25) також виконуються для $n = k + 1$. Застосування принципу математичної індукції дає потрібний результат. $\square$

Хоча теорема 1.3.3 встановлює точну асимптотичну поведінку всіх парних моментів, результат, що стосується непарних моментів, не є найкращим. Це показує твердження 1.3.10. Його доведення засноване на наступній теоремі, яка сама представляє інтерес. (Усюди далі ми вважаємо, що частинки потоку Харріса, що розглядається, не склеюються.)

Теорема 1.3.4. *Для будь-яких $u, v \in \mathbb{R}$ та $t \geqslant 0$ майже напевно виконуються рівності*

$$\mathbf{E}\left(\overline{x}(u,t) \mid \overline{x}(u,s) - \overline{x}(v,s), 0 \leqslant s \leqslant t\right) = +\frac{1}{2}\left(\overline{x}(u,t) - \overline{x}(v,t)\right), \tag{1.28}$$

$$\mathbf{E}\left(\overline{x}(v,t) \mid \overline{x}(u,s) - \overline{x}(v,s), 0 \leqslant s \leqslant t\right) = -\frac{1}{2}\left(\overline{x}(u,t) - \overline{x}(v,t)\right). \tag{1.29}$$

Для доведення цієї теореми нам знадобляться наступні два результати.

Теорема 1.3.5. [67, глава 5, теорема 5.12] *Припустимо, що мартингал $m = (m_t, \mathcal{F}_t)_{t\in[0;T]}$ має неперервні траєкторії та його квадратична характеристика може бути представлена у вигляді*

$$\langle m \rangle_t = \int_0^t a_s^2\, ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

де неантисипативна функція $a_t = a(\omega, t)$ така, що $a(\omega,t) > 0$ майже всюди на $\Omega \times [0;T]$ відносно міри $\mathbf{P} \otimes \lambda$, де λ — одновимірна міра Лебега. Тоді на початковому ймовірнісному просторі існує стандартний вінерів процес $\beta = (\beta_t, \mathcal{F}_t)_{t\in[0;T]}$, такий, що з ймовірністю одиниця

$$m_t = m_0 + \int_0^t a_s\, d\beta_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Зауваження 1.3.6. Вінерів процес $\{\beta_t,\ t \in [0;T]\}$ в теоремі 1.3.5 може бути означений як

$$\beta_t = \int_0^t \frac{dm_s}{a_s}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Лема 1.3.7. *Нехай випадковий процес $\eta = (\eta_t, \mathcal{F}_t)_{t\in[0;T]}$ є сильним розв'язком стохастичного інтегрального рівняння*

$$\eta_t = \eta_0 + \int_0^t b(\eta_s)\, d\beta_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

де $\beta = (\beta_t, \mathcal{F}_t)_{t\in[0;T]}$ *— стандартний вінерів процес, а функція* b *така, що*

$$|b(u)| \leqslant C \cdot (1 + |u|), \quad u \in \mathbb{R},$$
$$\mathbf{P}\left\{\int\limits_0^T b^2(\eta_t)\, dt < +\infty\right\} = 1,$$

та

$$b(\eta_t) > 0$$

майже всюди на $\Omega \times [0;T]$ *відносно міри* $\mathbf{P} \otimes \lambda$*, де* λ *— одновимірна міра Лебега. Тоді для будь-якого квадратично інтегровного мартингала* $m = (m_t, \mathcal{F}_t)_{t\in[0;T]}$ *випадковий процес* $\{m_t^\eta = \mathbf{E}(m_t \mid \mathcal{F}_t^\eta)\}_{t\in[0;T]}$*, де* $\mathcal{F}_t^\eta := \sigma(\eta_s, 0 \leqslant s \leqslant t)$*, має наступні властивості:*

1) $(m_t^\eta, \mathcal{F}_t^\eta)_{t\in[0;T]}$ *— квадратично інтегровний мартингал;*

2) $(m_t^\eta, \mathcal{F}_t^\eta)_{t\in[0;T]}$ *має неперервну модифікацію;*

3) *неперервна модифікація* $(m_t^\eta, \mathcal{F}_t^\eta)_{t\in[0;T]}$ *допускає* $\mathbf{P}$*-м. н. представлення*

$$m_t^\eta = m_0^\eta + \int\limits_0^t \mathbf{E}\left(\frac{d}{ds}\left\langle m, \beta\right\rangle_s \mid \mathcal{F}_s^\eta\right) d\beta_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Доведення. Доведення цієї леми схоже на доведення [67, глава 5, теорема 5.16] та [67, глава 8, теорема 8.1] і тому опускається. □

Зауваження 1.3.8. Теорема 1.3.5 та лема 1.3.7 можуть бути легко перенесені на випадок нескінченного часового проміжку $[0; +\infty)$ (в лемі 1.3.7 в обох місцях треба використовувати квадратичну інтегровність лише на скінченних інтервалах). Саме в цій формі ми будемо використовувати їх в доведенні теореми 1.3.4.

Доведення теореми 1.3.4. Якщо $u = v$, то рівності (1.28) та (1.29) очевидні. Тому припустимо, що $u \neq v$. Тоді з ймовірністю одиниця

$$\sigma(\xi_t) > 0, \quad t \geqslant 0.$$

Таким чином, за теоремою 1.3.5, ми можемо записати

$$\xi_t = (u - v) + \int\limits_0^t \sigma(\xi_s)\, d\beta_s, \quad t \geqslant 0, \quad \text{м. н.},$$

де

$$\beta_t = \int\limits_0^t \frac{d\xi_s}{\sigma(\xi_s)}, \quad t \geqslant 0.$$

Тоді

$$\langle \overline{x}(u,\cdot), \beta\rangle_t = \langle x(u,\cdot), \beta\rangle_t = \int\limits_0^t \frac{d\,\langle x(u,\cdot), \xi\rangle_s}{\sigma(\xi_s)}, \quad t \geqslant 0, \quad \text{м. н.}$$

З іншого боку,

$$\langle x(u,\cdot), \xi\rangle_t = \langle x(u,\cdot), x(u,\cdot) - x(v,\cdot)\rangle_t = \langle x(u,\cdot)\rangle_t - \langle x(u,\cdot), x(v,\cdot)\rangle_t =$$
$$= t - \int\limits_0^t \Gamma(x(u,s) - x(v,s))\, ds = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \sigma^2(\xi_s)\, ds, \quad t \geqslant 0, \quad \text{м. н.}$$

Отже,

$$\langle \overline{x}(u,\cdot), \beta\rangle_t = \int\limits_0^t \frac{\frac{1}{2}\sigma^2(\xi_s)}{\sigma(\xi_s)}\, ds = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \sigma(\xi_s)\, ds, \quad t \geqslant 0, \quad \text{м. н.}$$

Таким чином, використовуючи лему 1.3.7, ми отримуємо

$$\mathbf{E}\left(\overline{x}(u,t) \mid \overline{x}(u,s) - \overline{x}(v,s), 0 \leqslant s \leqslant t\right) =$$
$$= \mathbf{E}\left(\overline{x}(u,t) \mid x(u,s) - x(v,s), 0 \leqslant s \leqslant t\right) = \mathbf{E}\left(\overline{x}(u,t) \mid \xi_s, 0 \leqslant s \leqslant t\right) =$$
$$= \int\limits_0^t \mathbf{E}\left(\frac{d}{ds}\langle \overline{x}(u,\cdot), \beta\rangle_s \mid \xi_r, 0 \leqslant r \leqslant s\right) d\beta_s = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \sigma(\xi_s)\, d\beta_s =$$
$$= \frac{1}{2}(\xi_t - (u - v)) = \frac{1}{2}(\overline{x}(u,t) - \overline{x}(v,t)), \quad t \geqslant 0, \quad \text{м. н.},$$

що доводить (1.28). Рівність (1.29) є прямим наслідком рівності (1.28). □

Наслідок 1.3.9. *Для будь-яких $u, v \in \mathbb{R}$ ми маємо*

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbf{E}\left[x(u,t)\Gamma(x(u,t) - x(v,t))\right] = \frac{1}{2}(u + v). \tag{1.30}$$

Доведення. Використовуючи теорему 1.3.4, ми отримуємо рівності

$$\begin{gathered}
\mathbf{E}\left[\overline{x}(u,t)\Gamma(x(u,t)-x(v,t))\right] = \\
= \mathbf{E}\left[\Gamma(x(u,t)-x(v,t))\mathbf{E}\left(\overline{x}(u,t) \mid \overline{x}(u,s)-\overline{x}(v,s), 0 \leqslant s \leqslant t\right)\right] = \\
= \frac{1}{2}\mathbf{E}\left[\left(\overline{x}(u,t)-\overline{x}(v,t)\right)\Gamma(x(u,t)-x(v,t))\right] = \\
= \frac{1}{2}\mathbf{E}\left[\left(x(u,t)-x(v,t)\right)\Gamma(x(u,t)-x(v,t))\right] - \\
-\frac{1}{2}(u-v)\mathbf{E}\Gamma(x(u,t)-x(v,t)),
\end{gathered}$$

а отже,

$$\begin{gathered}
\mathbf{E}\left[x(u,t)\Gamma(x(u,t)-x(v,t))\right] = \\
= \frac{1}{2}\mathbf{E}\left[\left(x(u,t)-x(v,t)\right)\Gamma(x(u,t)-x(v,t))\right] + \\
+\frac{1}{2}(u+v)\mathbf{E}\Gamma(x(u,t)-x(v,t)).
\end{gathered}$$

Застосування (1.12) та (1.13) завершує доведення. □

Твердження 1.3.10. *Для будь-яких $u, v \in \mathbb{R}$ ми маємо*

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\mathbf{E}\left[x^2(u,t)x(v,t)\right] = u+2v.$$

Доведення. Використовуючи формулу Іто та теорему Фубіні, ми отримуємо

$$\mathbf{E}\left[x^2(u,t)x(v,t)\right] = u^2v + vt + 2\int\limits_0^t \mathbf{E}\left[x(u,s)\Gamma(x(u,s)-x(v,s))\right]ds,$$

що разом з (1.30) дає бажаний результат. □

На завершення цього підрозділу ми покажемо, що неможливо отримати кращі показники в теоремі 1.3.3, ніж зазначені в ній, використовуючи той самий метод слабкої збіжності. Дійсно, припустимо, що $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ — послідовність строго додатних дійсних чисел та $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ — послідовність строго зростаючих неперервних дійснозначних функцій, що визначені на відрізку $[0;1]$ та приймають нульове значення в точці нуль. Покладемо

$$\begin{gathered}
x_k(u,t) := u + \frac{1}{g_k}(x(u,h_k(t))-u), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad u \in \mathbb{R}, \quad k \geqslant 1, \\
\overline{x}_k(u,t) := x_k(u,t) - u, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad u \in \mathbb{R}, \quad k \geqslant 1.
\end{gathered}$$

Тепер зафіксуємо довільні $n \geqslant 1$ та $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$ та позначимо через $\varkappa_k$ розподіл $(\overline{x}_k(u_1, \cdot), \ldots, \overline{x}_k(u_n, \cdot))$ в C^n для будь-якого $k \geqslant 1$. Для того, щоб використати вищезазначений метод, нам треба припустити, що послідовність $\{\varkappa_k\}_{k=1}^{\infty}$ слабко збігається до деякого розподілу $\varkappa$ в C^n. Тоді для будь-яких $t \in (0; 1]$, $c > 0$ та $i \in \{1, \ldots, n\}$ ми маємо

$$\int\limits_{C^n} 1\!\!1\{f_i(t) \geqslant c\} \, \varkappa(d\vec{f}) \geqslant \varlimsup_{k\to\infty} \int\limits_{C^n} 1\!\!1\{f_i(t) \geqslant c\} \, \varkappa_k(d\vec{f}) =$$

$$= \varlimsup_{k\to\infty} \mathbf{P}\left\{\overline{x}_k(u_i, t) \geqslant c\right\} = \varlimsup_{k\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{1}{g_k}(x(u_i, h_k(t)) - u_i) \geqslant c\right\} =$$

$$= \varlimsup_{k\to\infty} \mathbf{P}\left\{\mathcal{N}(0, h_k(t)) \geqslant c \cdot g_k\right\} = \varlimsup_{k\to\infty} \mathbf{P}\left\{\mathcal{N}(0,1) \geqslant c \cdot \frac{g_k}{\sqrt{h_k(t)}}\right\} =$$

$$= \mathbf{P}\left\{\mathcal{N}(0,1) \geqslant c \cdot \varliminf_{k\to\infty} \frac{g_k}{\sqrt{h_k(t)}}\right\},$$

де $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$ позначає нормально розподілену випадкову величину із середнім a та дисперсією σ^2. Звідси, спрямовуючи c до нескінченності, ми отримуємо

$$\lim_{c\to+\infty} \mathbf{P}\left\{\mathcal{N}(0,1) \geqslant c \cdot \varliminf_{k\to\infty} \frac{g_k}{\sqrt{h_k(t)}}\right\} = 0.$$

Значить,

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{g_k}{\sqrt{h_k(t)}} \in (0; +\infty],$$

а отже,

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{\sqrt{h_k(t)}}{g_k} \in [0; +\infty). \tag{1.31}$$

Використовуючи нерівність Дуба та співвідношення (1.31), для будь-якого $p > 1$ ми отримуємо

$$\sup_{k\geqslant 1} \int\limits_{C^n} \left\|\vec{f}\right\|_n^p \varkappa_k(d\vec{f}) = \sup_{k\geqslant 1} \mathbf{E}\left[\max_{1\leqslant i\leqslant n} \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |\overline{x}_k(u_i, t)|^p\right] \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{k\geqslant 1} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}\left[\max_{0\leqslant t\leqslant 1} |\overline{x}_k(u_i, t)|^p\right] = \sup_{k\geqslant 1} \frac{1}{g_k^p} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}\left[\max_{0\leqslant t\leqslant h_k(1)} |\overline{x}(u_i, t)|^p\right] =$$

$$= n \cdot \sup_{k\geqslant 1} \frac{1}{g_k^p} \mathbf{E}\left[\max_{0\leqslant t\leqslant h_k(1)} |w(t)|^p\right] \leqslant n \cdot \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \cdot \sup_{k\geqslant 1} \frac{1}{g_k^p} \mathbf{E}\,|w(h_k(1))|^p =$$

$$= n \cdot \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \cdot \mathbf{E}\,|w(1)|^p \cdot \sup_{k\geqslant 1} \frac{h_k^{p/2}(1)}{g_k^p} < +\infty,$$

де $\{w(t),\ t \geqslant 0\}$ — стандартний вінерів процес. Тоді для будь-якого $t \in (0;1]$ ми маємо

$$\int\limits_{C^n} \delta_t(f_1 \cdot \ldots \cdot f_n)\, \varkappa(d\vec{f}) = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{C^n} \delta_t(f_1 \cdot \ldots \cdot f_n)\, \varkappa_k(d\vec{f}) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \mathbf{E}\left[\overline{x}_k(u_1,t)\ldots\overline{x}_k(u_n,t)\right] = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{g_k^n}\mathbf{E}\left[\overline{x}(u_1,h_k(t))\ldots\overline{x}_k(u_n,h_k(t))\right] =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left[\frac{h_k^{\alpha_n}(t)}{g_k^n}\cdot\frac{1}{h_k^{\alpha_n}(t)}\mathbf{E}\left[\overline{x}(u_1,h_k(t))\ldots\overline{x}_k(u_n,h_k(t))\right]\right].$$

Тому для того, щоб отримати нетривіальну границю, ми повинні припускати, що існують такі $t_n \in (0;1]$ та $\alpha_n > 0$, що виконуються наступні умови:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{h_k^{\alpha_n}(t_n)}{g_k^n} \in (0;+\infty), \tag{1.32}$$

$$\lim_{k\to\infty} h_k(t_n) = +\infty, \tag{1.33}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{h_k^{\alpha_n}(t)}\mathbf{E}\left[\overline{x}(u_1,h_k(t))\ldots\overline{x}_k(u_n,h_k(t))\right] \in (0;+\infty).$$

Комбінуючи (1.31), (1.32) та (1.33), ми отримуємо

$$\alpha_n \geqslant \frac{n}{2}.$$

Однак, показник $n/2$ як раз збігається із показником, отриманим в теоремі 1.3.3.

Висновки до розділу 1

1. Доведено, що відстань між будь-якими двома частинками потоку Харріса з коваріаційною функцією, яка приймає значення одиниця лише в точці нуль та є двічі диференційовною в цій точці, збігається до нуля з експоненційною швидкістю, та за додаткової умови на поведінку коваріаційної функції на нескінченності встановлена асимптотична поведінка всіх моментів цієї відстані.

2. Встановлено асимптотичну поведінку всіх моментів n-точкових рухів потоку Харріса з неперервною коваріаційною функцією, яка відокремлена від одиниці на доповненні будь-якого околу нуля.

Розділ 2

Дифеоморфні наближення потоку Арратья

2.1 Слабка збіжність n-точкових рухів потоків Харріса

У цьому підрозділі ми узагальнюємо основні результати робіт [12] та [69], які стосуються слабкої збіжності n-точкових рухів гладких потоків Харріса до n-точкових рухів потоку Арратья, на випадок, коли коваріаційні функції цих потоків Харріса поточково збігаються до коваріаційної функції, носій якої має нульову міру Лебега.

Нагадаємо, що потоки Харріса з гладкою коваріаційною функцією можна побудувати як розв'язки стохастичних диференціальних або інтегральних рівнянь. Більш точно, розглянемо наступне стохастичне інтегральне рівняння:

$$x(u,t) = u + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \varphi(x(u,s) - q)\, W(dq, ds), \quad t \geqslant 0, \tag{2.1}$$

де $u \in \mathbb{R}$ грає роль параметра, W — вінерів лист на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, а функція $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ (тобто невід'ємна, нескінченно диференційовна і з компактним носієм) симетрична і має одиничну L_2-норму.

Відомо [12], що за таких умов на функцію φ це рівняння має єдиний сильний розв'язок для кожного $u \in \mathbb{R}$ і випадкове поле $\{x(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ є потоком Харріса з коваріаційною функцією Γ, що задається як

$$\Gamma(z) := \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(z+q)\varphi(q)\,dq, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Усюди надалі $\{x_0(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ буде позначати потік Арратья.

Тепер ми можемо сформулювати основні результати робіт [12] і [69]. Хоча ці результати були доведені для випадку скінченного часового відрізку $[0;1]$, їхні доведення залишаються справедливими і для більш загального випадку нескінченного часового інтервалу $[0;+\infty)$, і нижче ми формулюємо їх саме в цьому вигляді.

Теорема 2.1.1. [12, теорема 3] *Для $\varepsilon > 0$ означимо*

$$\varphi_\varepsilon(q) := \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\varphi\left(\frac{q}{\varepsilon}\right), \quad q \in \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

і нехай $\{x_\varepsilon(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ є потоком Харріса, породженим розв'язками стохастичного інтегрального рівняння (2.1) *з φ_ε замість φ. Тоді для будь-яких $n \in \mathbb{N}$ і $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$ у просторі $C([0;+\infty), \mathbb{R}^n)$ має місце слабка збіжність*

$$(x_\varepsilon(u_1,\cdot), \ldots, x_\varepsilon(u_n,\cdot)) \xrightarrow{w} (x_0(u_1,\cdot), \ldots, x_0(u_n,\cdot)), \quad \varepsilon \to 0+.$$

Зауважимо, що в цьому випадку для коваріаційної функції Γ_ε потоку Харріса x_ε ми маємо

$$\forall\, z \in \mathbb{R}: \quad \Gamma_\varepsilon(z) \longrightarrow 1\!\!1_{\{0\}}(z), \quad \varepsilon \to 0+,$$

а також

$$\varphi_\varepsilon^2 \longrightarrow \delta_0, \quad \varepsilon \to 0+, \tag{2.3}$$

у сенсі узагальнених функцій (тут і нижче δ_a позначає дельта-функцію в точці $a \in \mathbb{R}$).

У [69] було показано, що твердження цієї теореми залишається справедливим, навіть якщо φ_ε^2 збігається до узагальненої функції, відмінної від δ_0.

Теорема 2.1.2. [69, стор. 1538] *Для $\varepsilon > 0$ означимо*

$$\varphi_\varepsilon(q) := \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\varepsilon}}\varphi\left(\frac{q-a_1}{\varepsilon}\right) + \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\varepsilon}}\varphi\left(\frac{q-a_2}{\varepsilon}\right), \quad q \in \mathbb{R},$$

де $0 < \alpha, \beta < 1$, $\alpha + \beta = 1$, *і* $a_1 < a_2$, *та нехай* $\{x_\varepsilon(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ *є потоком Харріса, породженим розв'язками стохастичного інтегрального рівняння* (2.1) *з* φ_ε *замість* φ. *Тоді для будь-яких* $n \in \mathbb{N}$ *і* $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$ *у просторі* $C([0;+\infty), \mathbb{R}^n)$ *має місце слабка збіжність*

$$(x_\varepsilon(u_1,\cdot), \ldots, x_\varepsilon(u_n,\cdot)) \xrightarrow{w} (x_0(u_1,\cdot), \ldots, x_0(u_n,\cdot)), \quad \varepsilon \to 0+ .$$

Зауважимо, що в цьому випадку для коваріаційної функції Γ_ε потоку Харріса x_ε ми маємо

$$\forall\, z \in \mathbb{R}: \quad \Gamma_\varepsilon(z) \longrightarrow \sqrt{\alpha\beta} \cdot 1\!\!1_{\{-b\}}(z) + 1\!\!1_{\{0\}}(z) + \sqrt{\alpha\beta} \cdot 1\!\!1_{\{+b\}}(z), \quad \varepsilon \to 0+,$$

де $b := a_2 - a_1$, а також

$$\varphi_\varepsilon^2 \longrightarrow \alpha\delta_{a_1} + \beta\delta_{a_2}, \quad \varepsilon \to 0+, \tag{2.4}$$

у сенсі узагальнених функцій.

Тут ми покажемо, що доведення, представлене у роботі [69], може бути перенесене на випадок, коли права частина (2.4) замінена дискретною ймовірнісною мірою на дійсній прямій, яка задовольняє деякі умови. Більш точно, нехай ν — довільна скінченна сингулярна міра на дійсній прямій, яка має принаймні один атом, тобто така, що

$$\nu^2(\Delta) > 0,$$

де

$$\nu^2 := \nu \otimes \nu$$

та

$$\Delta := \{\vec{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2 \mid q_1 = q_2\}.$$

Припустимо, що функція φ, розглянута вище, до того ж не спадає на $(-\infty; 0]$ і не зростає на $[0; +\infty)$, а φ_ε означена рівністю (2.2). Покладемо

$$\psi_\varepsilon(z) := c_\varepsilon \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(z-q)\, \nu(dq), \quad z \in \mathbb{R},$$

де стала $c_\varepsilon > 0$ вибрана так, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \psi_\varepsilon^2(z)\, dz = 1.$$

Ясно, що

$$c_\varepsilon = \left[\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \Phi_\varepsilon(q_1 - q_2)\, \nu^2(dq_1 dq_2) \right]^{-1/2},$$

де

$$\Phi_\varepsilon(z) := \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(z+q)\varphi_\varepsilon(q)\, dq, \quad z \in \mathbb{R},$$

а також

$$\psi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

Для $\varepsilon > 0$ нехай $\{x_\varepsilon(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ є потоком Харріса, породженим розв'язками стохастичного інтегрального рівняння (2.1) з ψ_ε замість φ. Коваріаційні функції цих потоків Харріса задаються як

$$\Gamma_\varepsilon(z) := \int\limits_{\mathbb{R}} \psi_\varepsilon(z+q)\psi_\varepsilon(q)\, dq, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Основним результатом цього підрозділу є наступна теорема.

Теорема 2.1.3. *Для будь-яких $n \in \mathbb{N}$ і $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$ у просторі $C([0;+\infty), \mathbb{R}^n)$ має місце слабка збіжність*

$$(x_\varepsilon(u_1,\cdot), \ldots, x_\varepsilon(u_n,\cdot)) \xrightarrow{w} (x_0(u_1,\cdot), \ldots, x_0(u_n,\cdot)), \quad \varepsilon \to 0+.$$

Слідуючи за [69], ми поділимо доведення на декілька лем. Ми повторюємо міркування із роботи [69], де необхідно, якомога стисліше та опускаємо доведення, що є аналогічними доведенням із цієї роботи. Основна відмінність полягає у доведенні леми 2.1.9, оскільки ідея, використана в доведенні її аналогу [69, лема 6], не може бути застосована до нашого випадку. Наше доведення леми 2.1.9 засноване на додаткових лемах 2.1.5 і 2.1.8.

Однак, перед тим, як переходити до доведення основного результату, ми доведемо аналог співвідношень (2.3) і (2.4). Для того, щоб його сформулювати, позначимо через ν_0 дискретну ймовірнісну міру на дійсній прямій, яка визначається рівністю

$$\nu_0(A) := \frac{\sum\limits_{k:\, a_k \in A} (\nu(\{a_k\}))^2}{\sum\limits_{k} (\nu(\{a_k\}))^2}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

де $\{a_k,\ k \geqslant 1\}$ — атоми міри ν, а $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ — борелівська σ-алгебра дійсної прямої.

Твердження 2.1.4. *Для будь-якої функції $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ми маємо*

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{\mathbb{R}} f(z)\psi_\varepsilon^2(z)\, dz = \int\limits_{\mathbb{R}} f(z)\nu_0(dz).$$

Доведення. За теоремою Фубіні ми маємо

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{\mathbb{R}} f(z)\psi_\varepsilon^2(z)\, dz =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+} \left[c_\varepsilon^2 \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} f(z)\varphi_\varepsilon(z-q_1)\varphi_\varepsilon(z-q_2)\, dz \right) \nu^2(dq_1 dq_2) \right].$$

Однак, за теоремою Лебега про обмежену збіжність

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} c_\varepsilon^2 = \left[\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \left(\lim_{\varepsilon \to 0+} \Phi_\varepsilon(q_1 - q_2) \right) \nu^2(dq_1 dq_2) \right]^{-1} = \frac{1}{\nu^2(\Delta)}.$$

Більше того, оскільки для будь-яких $q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ ми маємо

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}} f(z)\varphi_\varepsilon(z-q_1)\varphi_\varepsilon(z-q_2)\, dz \right| \leqslant \|f\|_\infty \cdot \Phi_\varepsilon(q_1 - q_2) \leqslant \|f\|_\infty < +\infty,$$

де

$$\|f\|_\infty := \max_{z \in \mathbb{R}} |f(z)|,$$

то за тією ж теоремою

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{\mathbb{R}} f(z)\varphi_\varepsilon(z-q_1)\varphi_\varepsilon(z-q_2)\,dz = f(q_1)1\!\!1\{q_1=q_2\}.$$

Залишається помітити, що

$$\frac{1}{\nu^2(\Delta)}\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(q_1)1\!\!1\{q_1=q_2\}\,\nu^2(dq_1dq_2)=\int\limits_{\mathbb{R}} f(z)\,\nu_0(dz). \qquad \square$$

Тепер покладемо

$$\Delta_z := \{\vec{q}=(q_1,q_2)\in\mathbb{R}^2 \mid q_1-q_2=z\},\quad z\in\mathbb{R}.$$

Тоді легко бачити, що для будь-якого $z\in\mathbb{R}$ ми маємо

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\Gamma_\varepsilon(z)=\Gamma_0(z),$$

де функція Γ_0 задається рівністю

$$\Gamma_0(z) := \frac{\nu^2(\Delta_z)}{\nu^2(\Delta_0)}.$$

Більше того, множина

$$D := \{z\in\mathbb{R}\mid \Gamma_0(z)>0\} \tag{2.5}$$

є зліченною, оскільки сімейство $\{\Delta_z,\ z\in\mathbb{R}\}$ є розбиттям $\mathbb{R}^2$ і $\nu^2(\mathbb{R}^2)<+\infty$.

Лема 2.1.5. *Справедливі наступні твердження:*

$$\lim_{|z|\to+\infty}\Gamma_0(z)=0, \tag{2.6}$$

$$\forall\,\delta>0:\quad \sup_{|z|\geqslant\delta}\Gamma_0(z)<1. \tag{2.7}$$

Доведення. Для того, щоб довести (2.6), помітимо, що для будь-якого $\varepsilon>0$

$$0\leqslant\Gamma_0(z)\leqslant\frac{1}{\nu^2(\Delta_0)}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\Phi_\varepsilon(z+q_1-q_2)\,\nu^2(dq_1dq_2)$$

і що за теоремою Лебега про обмежену збіжність останній вираз збігається до нуля при $|z|\to+\infty$.

Тепер припустимо, що (2.7) невірне, тобто що існує деяке $\delta_0 > 0$, таке, що

$$\sup_{|z|\geqslant\delta_0} \Gamma_0(z) = 1. \tag{2.8}$$

Це означає, зокрема, що ми можемо знайти деяке $z_1 \geqslant \delta_0$, таке, що

$$\Gamma_0(z_1) > \frac{1}{2}.$$

Оскільки функція Γ_0 невід'ємно визначена і $\Gamma_0(0) = 1$, то ми маємо (наприклад, див. [36, стор. 22])

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}: \quad |\Gamma_0(x) - \Gamma_0(y)| \leqslant 2\sqrt{1 - \Gamma_0(x-y)},$$

і, зокрема, для будь-якого $z \in \mathbb{R}$

$$|\Gamma_0(z_1 + z) - \Gamma_0(z_1)| \leqslant 2\sqrt{1 - \Gamma_0(z)}. \tag{2.9}$$

Використовуючи (2.8) і (2.9) та симетричність Γ_0, ми можемо вибрати таке $z_2 \geqslant \delta_0$, що

$$|\Gamma_0(z_1 + z_2) - \Gamma_0(z_1)| < \Gamma_0(z_1) - \frac{1}{2}$$

і, отже,

$$\Gamma_0(z_1 + z_2) > \frac{1}{2}.$$

Продовжуючи далі таким чином, ми отримуємо послідовність таку $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, що

$$z_n \geqslant \delta_0, \quad n \geqslant 1,$$
$$\Gamma_0(z_1 + \ldots + z_n) > \frac{1}{2},$$

але це суперечить (2.6). $\square$

Тепер зафіксуємо довільні $n \in \mathbb{N}$ і $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$, $u_1 < \ldots < u_n$, та розглянемо сімейство

$$\{\vec{x}_\varepsilon = (x_\varepsilon(u_1, \cdot), \ldots, x_\varepsilon(u_n, \cdot)),\ \varepsilon > 0\}$$

випадкових елементів у просторі $C([0;+\infty),\mathbb{R}^n)$, оснащеному відстанню

$$\rho(\vec{f},\vec{g}) := \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{\max\limits_{0\leqslant t\leqslant k}|f_i(t)-g_i(t)|}{1+\max\limits_{0\leqslant t\leqslant k}|f_i(t)-g_i(t)|},$$

$$\vec{f}=(f_1,\ldots,f_n)\in C([0;+\infty),\mathbb{R}^n),$$

$$\vec{g}=(g_1,\ldots,g_n)\in C([0;+\infty),\mathbb{R}^n).$$

Оскільки всі випадкові процеси $\{x_\varepsilon(u_i,t),\ t\geqslant 0\}$, $1\leqslant i\leqslant n$, є вінеровими, маючи, таким чином, однаковий розподіл у повному сепарабельному метричному просторі $C([0;+\infty),\mathbb{R})$, то, використовуючи теорему Прохорова, можна легко показати, що сімейство $\{\vec{x}_\varepsilon,\ \varepsilon>0\}$ є слабко відносно компактним. Нехай $\vec{x}=(x(u_1,\cdot),\ldots,x(u_n,\cdot))$ є однією з його граничних точок (при $\varepsilon\to 0+$).

Лема 2.1.6. *n-вимірний випадковий процес $\{\vec{x}(t),\ t\geqslant 0\}$ є мартингалом (відносно своєї власної фільтрації).*

Доведення. Доведення цієї леми збігається з доведенням леми 2 в роботі [69] і тому опускається. □

Лема 2.1.7. *З ймовірністю одиниця для будь-яких $i,j\in\{1,\ldots,n\}$ ми маємо*

$$0\leqslant \langle x(u_i,\cdot),x(u_j,\cdot)\rangle_t-\langle x(u_i,\cdot),x(u_j,\cdot)\rangle_s\leqslant\int\limits_s^t\Gamma_0(x(u_i,r)-x(u_j,r))\,dr,$$

$$0\leqslant s\leqslant t<+\infty.$$

Доведення. Зафіксуємо довільні $i,j\in\{1,\ldots,n\}$, $i\neq j$, та в повному сепарабельному метричному просторі $C([0;+\infty),\mathbb{R}^{n+1})$ розглянемо випадкові елементи

$$\vec{x}_\varepsilon^{(ij)}=(x_\varepsilon(u_1,\cdot),\ldots,x_\varepsilon(u_n,\cdot),\theta_\varepsilon^{(ij)}),\quad \varepsilon>0,$$

де

$$\theta_\varepsilon^{(ij)}(t):=\langle x_\varepsilon(u_i,\cdot),x_\varepsilon(u_j,\cdot)\rangle_t,\quad t\geqslant 0.$$

Як і в доведенні леми 3 в роботі [69], можна показати, що сімейство $\{\vec{x}_\varepsilon^{(ij)},\ \varepsilon>0\}$ слабко відносно компактне і що, якщо

$$\vec{x}_{\varepsilon_n}^{(ij)}\xrightarrow{w}\vec{x}^{(ij)},\quad n\to\infty,$$

у просторі $C([0;+\infty),\mathbb{R}^{n+1})$ для деякої послідовності $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, яка строго спадає до нуля, з $\vec{x}^{(ij)} := (x(u_1,\cdot),\ldots,x(u_n,\cdot),\theta^{(ij)})$, то

$$\theta^{(ij)}(t) = \langle x(u_i,\cdot), x(u_j,\cdot)\rangle_t\,, \quad t \geqslant 0.$$

Тепер, оскільки множина

$$\{(f_1,\ldots,f_{n+1}) \in C([0;+\infty),\mathbb{R}^{n+1}) \mid 0 \leqslant f_{n+1}(t) - f_{n+1}(s) \leqslant \\ \leqslant \int\limits_s^t h_\delta(f_i(r) - f_j(r))\,dr\},$$

де $0 \leqslant s \leqslant t < +\infty$ і

$$h_\delta(z) := \frac{1}{\nu^2(\Delta_0)} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \Phi_\delta(z + q_1 - q_2)\,\nu^2(dq_1dq_2), \quad z \in \mathbb{R},$$

з $\delta > 0$, є замкненою і

$$\Gamma_\varepsilon(z) = c_\varepsilon^2 \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \Phi_\varepsilon(z + q_1 - q_2)\,\nu^2(dq_1dq_2) \leqslant h_\delta(z), \quad z \in \mathbb{R},$$

для $\varepsilon < \delta$, то ми отримуємо, що

$$\mathbf{P}\left\{0 \leqslant \theta^{(ij)}(t) - \theta^{(ij)}(s) \leqslant \int\limits_s^t h_\delta(x(u_i,r) - x(u_j,r))\,dr\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \varlimsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{0 \leqslant \theta_{\varepsilon_n}^{(ij)}(t) - \theta_{\varepsilon_n}^{(ij)}(s) \leqslant \int\limits_s^t h_\delta(x_{\varepsilon_n}(u_i,r) - x_{\varepsilon_n}(u_j,r))\,dr\right\} = 1.$$

Таким чином, для кожного $\delta > 0$ з ймовірністю одиниця

$$0 \leqslant \theta^{(ij)}(t) - \theta^{(ij)}(s) \leqslant \int\limits_s^t h_\delta(x(u_i,r) - x(u_j,r))\,dr, \quad 0 \leqslant s \leqslant t < +\infty, \quad s,t \in \mathbb{Q},$$

і, отже, з ймовірністю одиниця

$$0 \leqslant \theta^{(ij)}(t) - \theta^{(ij)}(s) \leqslant \int\limits_s^t \Gamma_0(x(u_i,r) - x(u_j,r))\,dr, \quad 0 \leqslant s \leqslant t < +\infty.$$

Лема доведена. $\square$

Лема 2.1.8. *З ймовірністю одиниця для будь-яких $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ ми маємо*

$$\lim_{t \to +\infty} (x(u_i, t) - x(u_j, t)) = 0.$$

Доведення. Зафіксуємо довільні $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i > j$. Доведення існування границі

$$\lim_{t \to +\infty} (x(u_i, t) - x(u_j, t))$$

аналогічне доведенню леми 1 в роботі [37]. А саме, помітимо (наприклад, див. [29, теорема 18.4]), що з ймовірністю одиниця має місце наступне представлення:

$$x(u_i, t) - x(u_j, t) = (u_i - u_j) + \beta(\tau(t)), \quad t \geqslant 0, \tag{2.10}$$

де $\{\beta(t),\ t \geqslant 0\}$ — стандартний вінерів процес (можливо, означений на розширеному ймовірнісному просторі) і

$$\tau(t) := \langle x(u_i, \cdot) - x(u_j, \cdot) \rangle_t = 2t - 2 \langle x(u_i, \cdot), x(u_j, \cdot) \rangle_t, \quad t \geqslant 0. \tag{2.11}$$

Тоді із співвідношення

$$x(u_i, t) - x(u_j, t) \geqslant 0, \quad t \geqslant 0,$$

випливає, що

$$\tau(t) \leqslant \overline{\tau}, \quad t \geqslant 0,$$

де

$$\overline{\tau} := \inf\{t \geqslant 0 \mid \beta(t) = -(u_i - u_j)\} < +\infty \quad \text{м. н.}$$

Тому існує границя

$$\lim_{t \to +\infty} \tau(t) =: \tau(+\infty) \leqslant \overline{\tau}$$

а отже, завдяки неперервності β,

$$\lim_{t \to +\infty} (x(u_i, t) - x(u_j, t)) = (u_i - u_j) + \beta(\tau(+\infty)).$$

Припустимо тепер, що

$$\tau(+\infty) < \overline{\tau},$$

тобто

$$\lim_{t\to+\infty}(x(u_i,t)-x(u_j,t))>0.$$

Тоді існує таке $\delta_0>0$ (що залежить від ω), що

$$x(u_i,t)-x(u_j,t)>\delta_0,\quad t\geqslant 0.$$

Тому, використовуючи лему 2.1.7 (з $s=0$) і лему 2.1.5, ми отримуємо, що

$$\begin{aligned}\tau(t)&=2t-2\left\langle x(u_i,\cdot),x(u_j,\cdot)\right\rangle_t\geqslant\\&\geqslant 2t-2\int\limits_0^t\Gamma_0(x(u_i,s)-x(u_j,s))\,ds=\\&=2\int\limits_0^t\left[1-\Gamma_0(x(u_i,s)-x(u_j,s))\right]ds\geqslant\\&\geqslant 2(1-\sup_{|z|\geqslant\delta_0}\Gamma_0(z))\cdot t\to+\infty,\quad t\to+\infty,\end{aligned}$$

що суперечить скінченності $\overline{\tau}$ майже напевно. □

Лема 2.1.9. *З ймовірністю одиниця для будь-яких $i,j\in\{1,\ldots,n\}$ ми маємо*

$$\lambda(\{t\geqslant 0\mid x(u_i,t)-x(u_j,t)\in D\setminus\{0\}\})=0,$$

де λ — одновимірна міра Лебега, а D означена в (2.5).

Доведення. Зафіксуємо $i,j\in\{1,\ldots,n\}$, $i>j$, і $z\in(0;u_i-u_j)$ та покладемо

$$\sigma_z:=\sup\{t\geqslant 0\mid x(u_i,t)-x(u_j,t)\geqslant z\}.$$

З леми 2.1.8 випливає, що σ_z є скінченним майже напевно. Також нехай τ_z — звуження (випадкового) відображення $\tau\colon[0;+\infty)\to[0;+\infty)$, означеного в (2.11), на множину $[0;\sigma_z]$, а τ_z^{-1} — обернене до нього відображення. Тоді, використовуючи (2.10), ми отримуємо

$$\begin{gathered}\lambda(\{t\geqslant 0\mid x(u_i,t)-x(u_j,t)\in D\cap[z;+\infty)\})=\\=\lambda(\{0\leqslant t\leqslant\sigma_z\mid\beta(\tau(t))\in D_{ij}(z)\})=\lambda(\tau_z^{-1}(C_{ij}(z))),\end{gathered}$$

де

$$D_{ij}(z) := D \cap [z - (u_i - u_j); +\infty)$$

і

$$C_{ij}(z) := \{t \geqslant 0 \mid \beta(t) \in D_{ij}(z)\}.$$

Більше того, оскільки випадковий процес $\{x(u_i, t) - x(u_j, t),\ \ t \geqslant 0\}$ є невід'ємним (неперервним) мартингалом, то

$$r_z := \inf\{x(u_i, t) - x(u_j, t) \mid 0 \leqslant t \leqslant \sigma_z\} > 0,$$

а отже, за лемою 2.1.5

$$\rho_z := 1 - \sup_{|z'| \geqslant r_z} \Gamma_0(z') > 0.$$

Таким чином, ми отримуємо, що для будь-яких $s, t \in [0; \sigma_z]$, $s < t$, ми маємо

$$2 \geqslant \frac{\tau(t) - \tau(s)}{t - s} \geqslant \frac{1}{t - s} \int\limits_s^t [1 - \Gamma_0(x(u_i, r) - x(u_j, r))]\ dr \geqslant 2\rho_z.$$

Тому для будь-яких $s, t \in [0; \tau(\sigma_z)]$, $s < t$,

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{\tau_z^{-1}(t) - \tau_z^{-1}(s)}{t - s} \leqslant \frac{1}{2\rho_z}.$$

З цього випливає, що функція τ_z є абсолютно неперервною і, отже, відображає множини нульової міри Лебега у множини з цією ж самою властивістю. Таким чином, з

$$\lambda(C_{ij}(z)) = 0$$

випливає, що

$$\lambda(\{t \geqslant 0 \mid x(u_i, t) - x(u_j, t) \in D \cap [z; +\infty)\}) = 0.$$

Нарешті, оскільки $z \in (0; u_i - u_j)$ було довільним і $x(u_i, \cdot) - x(u_j, \cdot) \geqslant 0$, то ми приходимо до висновку, що

$$\lambda(\{t \geqslant 0 \mid x(u_i, t) - x(u_j, t) \in D \setminus \{0\}\}) =$$
$$= \lambda\left(\bigcup_{k \geqslant 1} \{t \geqslant 0 \mid x(u_i, t) - x(u_j, t) \in D \cap [1/k; +\infty)\}\right) = 0.$$

Твердження леми тепер отримується тривіальним чином. $\square$

Для того, щоб завершити доведення теореми 2.1.3 (очевидно, достатньо розглядати випадок, коли $u_1 < \ldots < u_n$), припустимо, що $(x(u_1,\cdot),\ldots,x(u_n,\cdot))$ є однією зі слабких границь (при $\varepsilon \to 0+$) сімейства n-вимірних випадкових процесів $\{\vec{x}_\varepsilon = (x_\varepsilon(u_1,\cdot),\ldots,x_\varepsilon(u_n,\cdot)),\ \varepsilon > 0\}$. Тоді для будь-яких $i,j \in \{1,\ldots,n\}$, $i > j$, випадковий процес $\{x(u_i,t) - x(u_j,t),\ t \geqslant 0\}$ є невід'ємним мартингалом і, отже, залишається у нулі після першого потрапляння в нього. Оскільки обидва процеси $x(u_i,\cdot)$ і $x(u_j,\cdot)$ є стандартними броунівськими рухами, то з цього випливає, що

$$\langle x(u_i,\cdot), x(u_j,\cdot)\rangle_t \geqslant \int\limits_0^t 1\!\!\mathrm{I}\{x(u_i,s) = x(u_j,s)\}\,ds, \quad t \geqslant 0.$$

Однак, з леми 2.1.7 (з $s = 0$) і леми 2.1.9 випливає, що

$$\langle x(u_i,\cdot), x(u_j,\cdot)\rangle_t \leqslant \int\limits_0^t 1\!\!\mathrm{I}\{x(u_i,s) = x(u_j,s)\}\,ds, \quad t \geqslant 0.$$

Отже,

$$\langle x(u_i,\cdot), x(u_j,\cdot)\rangle_t = \int\limits_0^t 1\!\!\mathrm{I}\{x(u_i,s) = x(u_j,s)\}\,ds, \quad t \geqslant 0.$$

Таким чином, ми приходимо до висновку, що будь-яка слабка границя (при $\varepsilon \to 0+$) сімейства $\{\vec{x}_\varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$ має такий самий розподіл, що і n-точковий рух потоку Арратья, що означає, що це сімейство слабко збігається до нього.

2.2 Швидкість збіжності потоків Харріса

Нехай $\{x(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ — потік Харріса з коваріаційною функцією Γ, яка має компактний носій. Тоді

$$\Gamma(z) = 0, \quad |z| > \frac{1}{2}d(\Gamma),$$

де

$$d(\Gamma) := \mathrm{diam}\,(\mathrm{supp}\,\Gamma),$$

а отже,

$$\langle x(u,\cdot), x(v,\cdot)\rangle_{t\wedge\tau} = \int\limits_0^{t\wedge\tau} \Gamma(x(u,s)-x(v,s))\,ds = 0, \quad t \geqslant 0,$$

де

$$\tau := \inf\{t \geqslant 0 \mid |x(u,t)-x(v,t)| \leqslant \frac{1}{2}d(\Gamma)\}.$$

Тому неформально можна сказати, що будь-які дві частинки цього потоку Харріса рухаються незалежно, доки відстань між ними не досягає $\frac{1}{2}d(\Gamma)$. Таким чином, коли діаметр $d(\Gamma)$ є близьким до нуля, n-точкові рухи цього потоку схожі на n-точкові рухи потоку Арратья. Більше того, в [12] було доведено, що коли $d(\varphi) := \operatorname{diam}(\operatorname{supp} \varphi)$ (або, що еквівалентно, $d(\Gamma)$) прямує до нуля, вони слабко збігаються до n-точкових рухів потоку Арратья. В цьому підрозділі ми оцінюємо швидкість цієї збіжності в термінах відстані Васерштейна між розподілами перенесених цими потоками мір і показуємо, що вона може бути обмежена зверху діаметром носія коваріаційної функції, якщо тільки він достатньо малий.

Для того, щоб сформулювати основний результат цього підрозділу, введемо деякі позначення, які ми будемо використовувати надалі.

Для повного сепарабельного метричного простору (X,d) позначимо через $\mathcal{P}(X)$ множину всіх борелівських ймовірнісних мір на X і означимо

$$\mathcal{M}_1(X) := \{\mu \in \mathcal{P}(X) \mid \int\limits_X d(u,u_0)\,\mu(du) < +\infty\},$$

де u_0 — фіксована точка із X. Можна легко перевірити, що множина $\mathcal{M}_1(X)$ не залежить від вибору цієї точки. На $\mathcal{M}_1(X)$ ми будемо розглядати стандартну відстань Васерштейна W_1, що означається рівністю

$$W_1(\mu',\mu'') := \inf_{\varkappa\in C(\mu',\mu'')} \iint\limits_{X^2} d(u,v)\,\varkappa(du,dv), \quad \mu',\mu'' \in \mathcal{M}_1(X),$$

де $C(\mu',\mu'')$ — множина всіх борелівських ймовірнісних мір на $X^2 \equiv X \times X$ з маргінальними розподілами μ' і μ''. Добре відомо, що $(\mathcal{M}_1(X), W_1)$ також є повним сепарабельним метричним простором (див., наприклад, [56, теорема 6.18]).

Для броунівського стохастичного потоку $\{x(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ і міри $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ покладемо

$$\lambda := \mu \circ x^{-1}(\cdot, 1),$$

де $x^{-1}(\cdot,1)$ позначає обернене (для кожного фіксованого $\omega \in \Omega$) відображення для відображення $x(\cdot,1)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Можна легко показати, що якщо $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, то λ є випадковим елементом в $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. Тому ми можемо розглядати її розподіл Λ в цьому просторі. Зауважимо, що Λ є елементом $\mathcal{M}_1(\mathcal{M}_1(\mathbb{R}))$. Допускаючи деяку вольність у позначеннях, ми будемо використовувати W_1 для позначення відстані Васерштейна в обох просторах $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ і $\mathcal{M}_1(\mathcal{M}_1(\mathbb{R}))$.

Для того, щоб уникнути необхідності означати відповідні міри кожен раз, коли вони нам потрібні, ми будемо використовувати наступне правило: якщо не вказано інше, міри λ з верхнім та/або нижнім індексом будуть завжди означатись так, як і вище, з мірою μ, що має той самий верхній індекс, та/або з x, що має той самий нижній індекс, а міри Λ з цими індексами будуть завжди позначати їхні розподіли в просторі $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

Основним результатом цього підрозділу є наступна теорема.

Теорема 2.2.1. *Нехай $\{x(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ — потік Харріса з коваріаційною функцією Γ, яка має компактний носій, а $\{x_0(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ — потік Арратья. Припустимо, що*

$$\operatorname{supp} \mu \subset [0;1]$$

та

$$d(\Gamma) < \frac{1}{100}.$$

Тоді

$$W_1(\Lambda, \Lambda_0) \leqslant C \cdot d(\Gamma)^{1/22},$$

де стала $C > 0$ не залежить від μ і Γ.

Використовуючи нерівність трикутника, ми отримуємо наступний наслідок.

Наслідок 2.2.2. *Нехай $\{x_1(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ і $\{x_2(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ — потоки Харріса з коваріаційними функціями Γ_1 і Γ_2 відповідно, що мають компактний носій. Припустимо, що*

$$\operatorname{supp} \mu \subset [0;1]$$

та

$$\max\{d(\Gamma_1), d(\Gamma_2)\} < \frac{1}{100}.$$

Тоді

$$W_1(\Lambda_1, \Lambda_2) \leqslant 2C \cdot \max\{d(\Gamma_1), d(\Gamma_2)\}^{1/22},$$

де $C > 0$ *— стала з теореми 2.2.1.*

Для того, щоб довести теорему 2.2.1, ми наблизимо початкову міру μ дискретними мірами μ^n та розіб'ємо доведення на три кроки. На першому кроці ми оцінюємо відстань Васерштейна між Λ і Λ^n для довільного броунівського стохастичного потоку. На другому кроці ми використовуємо певну рекурсивну процедуру для побудови каплінгу між λ^n і λ_0^n, який дозволяє оцінити відстань Васерштейна між їхніми розподілами Λ^n і Λ_0^n. На третьому кроці ми об'єднуємо ці оцінки і, використовуючи оптимізацію відносно n, приходимо до потрібного твердження.

Перший крок. Нехай міра $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ така, що $\operatorname{supp} \mu \subset [0; 1]$. Тоді, очевидно, μ належить до $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ та може бути наближена послідовністю $\{\mu^n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ дискретних мір, означених як

$$\mu^n := \sum_{k=1}^{n} p_k^n \delta_{\frac{2k-1}{2n}}, \quad n \geqslant 1,$$

де

$$p_k^n := \mu(I_k^n), \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad n \geqslant 1,$$

з

$$I_k^n := \left[\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n}\right), \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1, \quad n \geqslant 2,$$

$$I_n^n := \left[\frac{n-1}{n}; 1\right], \quad n \geqslant 1.$$

Теорема 2.2.3. *Нехай* $\{x(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ *— довільний броунівський стохастичний потік. Тоді*

$$W_1(\Lambda, \Lambda^n) \leqslant \frac{K}{\sqrt{n}},$$

де $K = \sqrt{\frac{64}{3\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{4}}$.

Для доведення цієї теореми ми використаємо наступну лему, доведену в [64] (у цій роботі вона була сформульована для випадку, коли $t = 1$, але відповідне доведення з необхідними змінами залишається вірним для всіх $t > 0$).

Лема 2.2.4. [64, лема 5] *Нехай* $\{x(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ *— довільний броунівський стохастичний потік. Тоді*

$$\mathbf{E}(x(u,t) - x(v,t))^2 \leqslant C_t \cdot |u-v| + |u-v|^2, \quad u,v \in \mathbb{R}, \quad t \geqslant 0,$$

де $C_t = \frac{128t^{3/2}}{3\sqrt{2\pi}}$.

Доведення теореми 2.2.3. За означенням відстані Васерштейна W_1 ми маємо

$$W_1(\Lambda, \Lambda^n) = \inf_{\varkappa \in C(\Lambda,\Lambda^n)} \iint\limits_{\mathcal{M}_1^2(\mathbb{R})} W_1(\mu', \mu'')\, \varkappa(d\mu', d\mu'') \leqslant \mathbf{E} W_1(\lambda, \lambda^n),$$

де для зручності ми поклали

$$\mathcal{M}_1^2(\mathbb{R}) := \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_1(\mathbb{R}).$$

Однак,

$$\mathbf{E} W_1(\lambda, \lambda^n) = \mathbf{E} \inf_{\varkappa \in C(\lambda,\lambda^n)} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} |u-v|\ \varkappa(du, dv) \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{E} \sum_{k=1}^n \int\limits_{I_k^n} \left| x(u,1) - x\left(\frac{2k-1}{2n}, 1\right) \right| \mu(du) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^n \int\limits_{I_k^n} \sqrt{\mathbf{E} \left| x(u,1) - x\left(\frac{2k-1}{2n}, 1\right) \right|^2}\, \mu(du).$$

Таким чином, використовуючи лему 2.2.4, ми отримуємо, що

$$\mathbf{E} W_1(\lambda, \lambda^n) \leqslant \sum_{k=1}^n \int\limits_{I_k^n} \sqrt{C_1 \cdot \left| u - \frac{2k-1}{2n} \right| + \left| u - \frac{2k-1}{2n} \right|^2}\, \mu(du) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^n p_k^n \cdot \sqrt{C_1 \cdot \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}} \leqslant \frac{K}{\sqrt{n}},$$

де $K := \sqrt{\frac{C_1}{2} + \frac{1}{4}}$. Теорема доведена. □

Другий крок. Нехай $\{x(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ — потік Харріса з коваріаційною функцією Γ, що має компактний носій. Зафіксуємо деяке $\varepsilon > 0$, таке, що $\varepsilon \geqslant \frac{1}{2}d(\Gamma)$, і довільні початкові точки $u_1 < u_2 < \ldots < u_n$, $n \geqslant 2$, такі, що відстань між будь-якими двома з них строго більша за ε.

Покладемо

$$(z_1(u_1,t),\ldots,z_1(u_n,t)) := (x(u_1,t),\ldots,x(u_n,t)), \quad t \geqslant 0,$$

та асоціюємо з цим випадковим процесом сімейство $\{\Pi_1(t),\ t \geqslant 0\}$ випадкових розбиттів множини $\{1,2,\ldots,n\}$, яке означається наступною умовою: індекси i та $i+1$ належать до одного й того ж елемента розбиття $\Pi_1(t)$ тоді й тільки тоді, коли $|z_1(u_i,t) - z_1(u_{i+1},t)| \leqslant \varepsilon$. Очевидно, $\Pi_1(0) = \{\{1\},\{2\},\ldots,\{n\}\}$. Також нехай σ_1 — перший момент часу $t > 0$, коли розбиття $\Pi_1(t)$ змінюється.

Тепер для всіх $k \in \{1,\ldots,n\}$ покладемо

$$z_2(u_k,t) := \begin{cases} z_1(u_k,t), & 0 \leqslant t < \sigma_1, \\ z_1(u_j,t) + (k-j)\cdot\varepsilon, & t \geqslant \sigma_1, \end{cases}$$

де j — найменший індекс в елементі розбиття $\Pi_1(\sigma_1)$, до якого належить k (якщо σ_1 нескінченне, нижній вираз просто опускається). Аналогічно, з випадковим процесом $\{(z_2(u_1,t),\ldots,z_2(u_n,t)),\ t \geqslant 0\}$ ми асоціюємо відповідне сімейство $\{\Pi_2(t),\ t \geqslant 0\}$ випадкових розбиттів множини $\{1,2,\ldots,n\}$ і випадковий момент часу σ_2, який дорівнює першому моменту часу $t > \sigma_1$, коли розбиття $\Pi_2(t)$ змінюється (якщо σ_1 нескінченне, то σ_2 ми також покладаємо рівним нескінченності).

Продовжуючи таким чином, ми можемо побудувати щонайбільше n різних n-вимірних випадкових процесів.

Для вивчення випадкових процесів $\{(z_i(u_1,t),\ldots,z_i(u_n,t)),\ t \geqslant 0\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, нам потрібно описати їхню конструкцію більш формально.

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$, таке, що $\varepsilon \geqslant \frac{1}{2}d(\Gamma)$, і нехай $u_1, u_2, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$, $n \geqslant 2$, такі, що

$$u_1 < u_2 < \ldots < u_n,$$
$$u_{k+1} - u_k > \varepsilon, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Означимо рекурсивно

$$z_1(u_k,t) := x(u_k,t), \quad t \geqslant 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

$$z_{i+1}(u_k,t) := z_i(u_k, t\wedge\sigma_i) + \sum_{j=1}^{k}(z_i(u_j,t) - z_i(u_j,t\wedge\sigma_i)) \cdot 1\!\!1_{A^i_{kj}}, \quad t \geqslant 0,$$

$$1 \leqslant k \leqslant n, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1.$$

Тут

$$A^i_{k1} := \{\sigma_i < +\infty\} \cap \{z_i(u_k,\sigma_i) - z_i(u_{k-1},\sigma_i) = \varepsilon, \ldots, z_i(u_3,\sigma_i) - z_i(u_2,\sigma_i) = \varepsilon,$$
$$z_i(u_2,\sigma_i) - z_i(u_1,\sigma_i) = \varepsilon\}, \quad 2 \leqslant k \leqslant n, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1,$$

$$A^i_{kj} := \{\sigma_i < +\infty\} \cap \{z_i(u_k,\sigma_i) - z_i(u_{k-1},\sigma_i) = \varepsilon, \ldots, z_i(u_{j+1},\sigma_i) - z_i(u_j,\sigma_i) = \varepsilon,$$
$$z_i(u_j,\sigma_i) - z_i(u_{j-1},\sigma_i) > \varepsilon\}, \quad 2 \leqslant j \leqslant k-1, \quad 3 \leqslant k \leqslant n, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1,$$

$$A^i_{11} := \Omega, \quad A^i_{kk} := \overline{\bigcup_{j=1}^{k-1} A^i_{kj}}, \quad 2 \leqslant k \leqslant n, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1,$$

та для $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ випадковий момент часу σ_i покладається рівним

$$\inf\{t > \sigma_{i-1} \mid \sharp\{l \in \{1,\ldots,n-1\} \mid z_i(u_{l+1},t) - z_i(u_l,t) \leqslant \varepsilon\} \geqslant$$
$$\geqslant \sharp\{l \in \{1,\ldots,n-1\} \mid z_i(u_{l+1},\sigma_{i-1}) - z_i(u_l,\sigma_{i-1}) \leqslant \varepsilon\} + 1\},$$

де знак $\sharp$ позначає число елементів відповідної множини, якщо σ_{i-1} скінченне, і $+\infty$ в іншому випадку, з $\sigma_0 := 0$.

Зауважимо, що

$$x(u_1,t) = z_1(u_1,t) = z_2(u_1,t) = \ldots = z_n(u_1,t), \quad t \geqslant 0.$$

Ми також будемо використовувати наступне просте узагальнення леми 6.2 з [29]. (Нагадаємо, що випадкові величини ξ і η називаються *рівними майже напевно на (вимірній) множині* $A \subset \Omega$, якщо $\mathbf{P}(\{\xi \neq \eta\} \cap A) = 0$.)

Лема 2.2.5. *Нехай* $\xi \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, *і нехай* σ-*алгебри* $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$ *такі, що*

$$A \cap \mathcal{G}_1 \subset A \cap \mathcal{G}_2$$

для деякої множини $A \in \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2$. *Тоді*

$$\mathbf{E}[\xi \mid \mathcal{G}_1] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[\xi \mid \mathcal{G}_2] \mid \mathcal{G}_1] \quad \text{м. н. на } A.$$

Доведення аналогічне доведенню леми 6.2 з [29] і тому опускається.

Лема 2.2.6. *Для будь-якого $i \in \{1,\ldots,n\}$ випадкові процеси $\{z_i(u_k,t),\ t \geqslant 0\}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, є вінеровими процесами відносно початкової фільтрації $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$.*

Доведення. Використаємо принцип математичної індукції відносно i.

Для $i = 1$ твердження леми очевидне, оскільки

$$z_1(u_k,t) = x(u_k,t), \quad t \geqslant 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Тепер припустимо, що твердження леми справедливе для будь-якого $i' \in \{1,\ldots,i\}$. Нам потрібно показати, що тоді воно справедливе і для $i' = i+1$. Для того, щоб зробити це, зафіксуємо $k \in \{2,\ldots,n\}$ і покажемо, що випадковий процес $\{z_{i+1}(u_k,t),\ t \geqslant 0\}$ задовольняє умови теореми Леві про характеризацію броунівського руху.

По-перше, з означення можна легко побачити, що він має м. н. неперервні траєкторії та що

$$\mathbf{E}\,|z_{i+1}(u_k,t)|^2 < +\infty, \quad t \geqslant 0.$$

По-друге, з прогресивної вимірності вінерових процесів $\{z_i(u_j,t),\ t \geqslant 0\}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, випливає, що множини A^i_{kj}, $1 \leqslant j \leqslant n$, належать до σ-алгебри $\mathcal{F}_{\sigma_i}$ (див. лему 7.5 з [29]). Тому з представлення

$$z_{i+1}(u_k,t) = z_i(u_k,t\wedge\sigma_i) + \sum_{j=1}^{k}(z_i(u_j,t) - z_i(u_j,t\wedge\sigma_i))\cdot 1\!\!1_{A^i_{kj}} =$$

$$= z_i(u_k,t\wedge\sigma_i) + \sum_{j=1}^{k}(z_i(u_j,t) - z_i(u_j,t\wedge\sigma_i))\cdot 1\!\!1_{A^i_{kj}}\cdot 1\!\!1\{\sigma_i \leqslant t\}, \quad t \geqslant 0,$$

випливає, що випадковий процес $\{z_{i+1}(u_k,t),\ t \geqslant 0\}$ є $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$-узгодженим.

По-третє, для того, щоб довести, що він є мартингалом відносно фільтрації $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$, ми помічаємо, що для будь-якого $t \geqslant s \geqslant 0$

$$\mathbf{E}\left[z_{i+1}(u_k,t)\mid\mathcal{F}_s\right] = \mathbf{E}\left[z_{i+1}(u_k,t)\cdot 1\!\!1\{\sigma_i \leqslant s\}\mid\mathcal{F}_s\right] +$$
$$+\mathbf{E}\left[z_{i+1}(u_k,t)\cdot 1\!\!1\{\sigma_i > s\}\mid\mathcal{F}_s\right].$$

З одного боку,

$$\mathbf{E}\left[z_{i+1}(u_k,t)\cdot 1\!\!\mathrm{I}\{\sigma_i\leqslant s\}\mid \mathcal{F}_s\right]=\mathbf{E}\left[z_i(u_k,t\wedge\sigma_i)\cdot 1\!\!\mathrm{I}\{\sigma_i\leqslant s\}\mid \mathcal{F}_s\right]+$$
$$+\sum_{j=1}^{k}\mathbf{E}\left[(z_i(u_j,t)-z_i(u_j,t\wedge\sigma_i))\cdot 1\!\!\mathrm{I}_{A^i_{kj}}\cdot 1\!\!\mathrm{I}\{\sigma_i\leqslant s\}\mid \mathcal{F}_s\right]=$$
$$=\mathbf{E}\left[z_i(u_k,t\wedge\sigma_i)\mid \mathcal{F}_s\right]\cdot 1\!\!\mathrm{I}\{\sigma_i\leqslant s\}+$$
$$+\sum_{j=1}^{k}\mathbf{E}\left[(z_i(u_j,t)-z_i(u_j,t\wedge\sigma_i))\mid \mathcal{F}_s\right]\cdot 1\!\!\mathrm{I}_{A^i_{kj}}\cdot 1\!\!\mathrm{I}\{\sigma_i\leqslant s\}=$$
$$=z_i(u_k,s\wedge\sigma_i)\cdot 1\!\!\mathrm{I}\{\sigma_i\leqslant s\}+\sum_{j=1}^{k}(z_i(u_j,s)-z_i(u_j,s\wedge\sigma_i))\cdot 1\!\!\mathrm{I}_{A^i_{kj}}\cdot 1\!\!\mathrm{I}\{\sigma_i\leqslant s\}=$$
$$=z_{i+1}(u_k,s)\cdot 1\!\!\mathrm{I}\{\sigma_i\leqslant s\}.$$

З іншого боку,

$$\mathbf{E}\left[z_{i+1}(u_k,t)\mid \mathcal{F}_{\sigma_i}\right]=$$
$$=\mathbf{E}\left[z_i(u_k,t\wedge\sigma_i)\mid \mathcal{F}_{\sigma_i}\right]+\sum_{j=1}^{k}\mathbf{E}\left[(z_i(u_j,t)-z_i(u_j,t\wedge\sigma_i))\cdot 1\!\!\mathrm{I}_{A^i_{kj}}\mid \mathcal{F}_{\sigma_i}\right]=$$
$$=\mathbf{E}\left[z_i(u_k,t\wedge\sigma_i)\mid \mathcal{F}_{\sigma_i}\right]+\sum_{j=1}^{k}\mathbf{E}\left[(z_i(u_j,t)-z_i(u_j,t\wedge\sigma_i))\mid \mathcal{F}_{\sigma_i}\right]\cdot 1\!\!\mathrm{I}_{A^i_{kj}}=$$
$$=z_i(u_k,t\wedge\sigma_i),$$

і тому, використовуючи лему 2.2.5 у другій рівності нижче, ми отримуємо

$$\mathbf{E}\left[z_{i+1}(u_k,t)\cdot 1\!\!\mathrm{I}\{\sigma_i> s\}\mid \mathcal{F}_s\right]=\mathbf{E}\left[z_{i+1}(u_k,t)\mid \mathcal{F}_s\right]\cdot 1\!\!\mathrm{I}\{\sigma_i> s\}=$$
$$=\mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[z_{i+1}(u_k,t)\mid \mathcal{F}_{\sigma_i}\right]\mid \mathcal{F}_s\right]\cdot 1\!\!\mathrm{I}\{\sigma_i> s\}=\mathbf{E}\left[z_i(u_k,t\wedge\sigma_i)\mid \mathcal{F}_s\right]\cdot 1\!\!\mathrm{I}\{\sigma_i> s\}=$$
$$=z_i(u_k,s\wedge\sigma_i)\cdot 1\!\!\mathrm{I}\{\sigma_i> s\}=z_i(u_k,s)\cdot 1\!\!\mathrm{I}\{\sigma_i> s\}=z_{i+1}(u_k,s)\cdot 1\!\!\mathrm{I}\{\sigma_i> s\}.$$

Таким чином,

$$\mathbf{E}\left[z_{i+1}(u_k,t)\mid \mathcal{F}_s\right]=z_{i+1}(u_k,s).$$

Нарешті, залишається показати, що

$$\langle z_{i+1}(u_k,\cdot)\rangle_t=t,\quad t\geqslant 0.$$

Однак, з рівностей

$$z_{i+1}(u_k,t)=z_i(u_k,t\wedge\sigma_i)+\sum_{j=1}^{k}(z_i(u_j,t)-z_i(u_j,t\wedge\sigma_i))\cdot 1\!\!1_{A^i_{kj}}=$$

$$=z_i(u_k,t\wedge\sigma_i)+\sum_{j=1}^{k}z_i(u_j,t)\cdot 1\!\!1_{A^i_{kj}}-\sum_{j=1}^{k}z_i(u_j,t\wedge\sigma_i)\cdot 1\!\!1_{A^i_{kj}}$$

випливає, що

$$\langle z_{i+1}(u_k,\cdot)\rangle_t=\langle z_i(u_k,\cdot)\rangle_{t\wedge\sigma_i}+\sum_{j_1,j_2=1}^{k}\langle z_i(u_{j_1},\cdot),z_i(u_{j_2},\cdot)\rangle_t\cdot 1\!\!1_{A^i_{kj_1}}\cdot 1\!\!1_{A^i_{kj_2}}+$$

$$+\sum_{j_1,j_2=1}^{k}\langle z_i(u_{j_1},\cdot),z_i(u_{j_2},\cdot)\rangle_{t\wedge\sigma_i}\cdot 1\!\!1_{A^i_{kj_1}}\cdot 1\!\!1_{A^i_{kj_2}}+2\sum_{j=1}^{k}\langle z_i(u_k,\cdot),z_i(u_j,\cdot)\rangle_{t\wedge\sigma_i}\cdot 1\!\!1_{A^i_{kj}}-$$

$$-2\sum_{j=1}^{k}\langle z_i(u_k,\cdot),z_i(u_j,\cdot)\rangle_{t\wedge\sigma_i}\cdot 1\!\!1_{A^i_{kj}}-2\sum_{j_1,j_2=1}^{k}\langle z_i(u_{j_1},\cdot),z_i(u_{j_2},\cdot)\rangle_{t\wedge\sigma_i}\cdot 1\!\!1_{A^i_{kj_1}}\cdot 1\!\!1_{A^i_{kj_2}}=$$

$$=t\wedge\sigma_i+\sum_{j=1}^{k}(t-t\wedge\sigma_i)\cdot 1\!\!1_{A^i_{kj}}=t.$$

Таким чином, всі умови теореми Леві виконані. Лема доведена. □

Лема 2.2.7. *Для будь-якого $n\geqslant 2$ ми маємо*

$$\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|z_1(u_k,t)-z_2(u_k,t)|\leqslant\frac{2n^3}{3}\cdot\sqrt{\varepsilon},$$

$$\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|z_i(u_k,t)-z_{i+1}(u_k,t)|\leqslant\frac{2n^4}{3}\cdot\sqrt{\varepsilon},\quad 2\leqslant i\leqslant n-1.$$

Доведення. Покладемо

$$\widetilde{\sigma}_i:=\sigma_i\wedge 1,\quad 1\leqslant i\leqslant n-1.$$

Для того, щоб довести першу оцінку, зафіксуємо $k\in\{2,3,\ldots,n\}$ і помітимо, що

$$\mathbf{E}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|z_1(u_k,t)-z_2(u_k,t)|=\mathbf{E}\sup_{\widetilde{\sigma}_1\leqslant t\leqslant 1}|z_1(u_k,t)-z_2(u_k,t)|=$$

$$=\mathbf{E}\sup_{\widetilde{\sigma}_1\leqslant t\leqslant 1}\sum_{j=1}^{k}\Big(|x(u_k,t)-[x(u_j,t)+[x(u_k,\widetilde{\sigma}_1)-x(u_j,\widetilde{\sigma}_1)]]|\cdot 1\!\!1_{A^1_{kj}}\Big)=$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \mathbf{E} \left(\sup_{\widetilde{\sigma}_1 \leqslant t \leqslant 1} |x(u_k, t) - [x(u_j, t) + [x(u_k, \widetilde{\sigma}_1) - x(u_j, \widetilde{\sigma}_1)]]| \cdot 1\!\!\mathrm{I}_{A^1_{kj}} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{k} \mathbf{E} \left(\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |[x(u_k, t + \widetilde{\sigma}_1) - x(u_k, \widetilde{\sigma}_1)] - [x(u_j, t + \widetilde{\sigma}_1) - x(u_j, \widetilde{\sigma}_1)]| \cdot 1\!\!\mathrm{I}_{A^1_{kj}} \right).$$

Оцінимо окремий доданок. Для цього зафіксуємо довільне $j \in \{1, \ldots, k-1\}$ (k-ий доданок, очевидно, дорівнює нулю) і покладемо

$$\beta_1(t) := x(u_k, t + \widetilde{\sigma}_1) - x(u_k, \widetilde{\sigma}_1), \quad t \geqslant 0,$$
$$\beta_2(t) := x(u_j, t + \widetilde{\sigma}_1) - x(u_j, \widetilde{\sigma}_1), \quad t \geqslant 0.$$

Завдяки строго марковській властивості броунівського руху випадкові процеси $\{\beta_1(t),\ t \geqslant 0\}$ і $\{\beta_2(t),\ t \geqslant 0\}$ є вінеровими. За теоремою 18.4 з [29] існує (можливо, на розширеному ймовірнісному просторі) такий вінерів процес $\{\beta(t),\ t \geqslant 0\}$, що має місце представлення

$$\beta_1(t) - \beta_2(t) = \beta(\langle \beta_1 - \beta_2 \rangle_t), \quad t \geqslant 0, \quad \text{м. н.}.$$

Більше того,

$$\langle \beta_1 - \beta_2 \rangle_0 = 0,$$
$$\langle \beta_1 - \beta_2 \rangle_{\cdot} \in C([0; +\infty)),$$

а на множині A^1_{kj} для всіх $t \geqslant 0$ ми маємо

$$\beta_1(t) - \beta_2(t) =$$
$$= [x(u_k, t + \widetilde{\sigma}_1) - x(u_k, \widetilde{\sigma}_1)] - [x(u_j, t + \widetilde{\sigma}_1) - x(u_j, \widetilde{\sigma}_1)] =$$
$$= [x(u_k, t + \widetilde{\sigma}_1) - x(u_j, t + \widetilde{\sigma}_1)] - (k - j) \cdot \varepsilon \geqslant -(k - j) \cdot \varepsilon.$$

Легко перевірити, що з цього випливає

$$\langle \beta_1 - \beta_2 \rangle_t \leqslant \tau_\beta(c_{kj}), \quad t \geqslant 0, \quad \text{м. н. на } A^1_{kj},$$

де

$$\tau_\beta(c) := \inf\{s \geqslant 0 \mid \beta(s) = c\}, \quad c \in \mathbb{R},$$

та

$$c_{kj} := -(k - j) \cdot \varepsilon < 0.$$

Отже,

$$\beta_1(t) - \beta_2(t) = \beta(\langle \beta_1 - \beta_2 \rangle_t \wedge \tau_\beta(c_{kj})), \quad t \geqslant 0, \quad \text{м. н. на } A^1_{kj}.$$

До того ж,

$$0 \leqslant \langle \beta_1 - \beta_2 \rangle_t = 2t - 2\,\langle \beta_1, \beta_2 \rangle_t \leqslant 4t, \quad t \geqslant 0.$$

Тому

$$\mathbf{E}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |[x(u_k, t+\widetilde{\sigma}_1) - x(u_k, \widetilde{\sigma}_1)] - [x(u_j, t+\widetilde{\sigma}_1) - x(u_j, \widetilde{\sigma}_1)]| \cdot 1\!\!1_{A^1_{kj}} \right) =$$
$$= \mathbf{E}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |\beta_1(t) - \beta_2(t)| \cdot 1\!\!1_{A^1_{kj}} \right) = \mathbf{E}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |\beta(\langle \beta_1 - \beta_2 \rangle_t \wedge \tau_\beta(c_{kj}))| \cdot 1\!\!1_{A^1_{kj}} \right) \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{E}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant 4} |\beta(t \wedge \tau_\beta(c_{kj}))| \cdot 1\!\!1_{A^1_{kj}} \right) \leqslant \mathbf{E} \sup_{0\leqslant t\leqslant 4} |\beta(t \wedge \tau_\beta(c_{kj}))|\,.$$

Застосовуючи нерівність Дуба до мартингалу $\{\beta(t \wedge \tau_\beta(c_{kj})),\ 0 \leqslant t \leqslant 4\}$ і другу рівність Вольда, ми отримуємо

$$\mathbf{E} \sup_{0\leqslant t\leqslant 4} |\beta(t \wedge \tau_\beta(c_{kj}))| \leqslant \sqrt{\mathbf{E} \sup_{0\leqslant t\leqslant 4} |\beta(t \wedge \tau_\beta(c_{kj}))|^2} \leqslant 2\sqrt{\mathbf{E}\,|\beta(4 \wedge \tau_\beta(c_{kj}))|^2} =$$
$$= 2\sqrt{\mathbf{E}\,(4 \wedge \tau_\beta(c_{kj}))} \leqslant 2\sqrt{\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot |c_{kj}|} \leqslant 4(k-j) \cdot \sqrt{\varepsilon}$$

(передостання нерівність випливає з простої оцінки щільності розподілу $\tau_\beta(c_{kj})$; детальніше про це див. в доведенні леми 5 з [64], де розглядався аналогічний випадок).

Таким чином, ми робимо висновок, що

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{E} \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |z_1(u_k, t) - z_2(u_k, t)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} 4(k-j) \cdot \sqrt{\varepsilon} =$$
$$= \frac{2n(n^2-1)}{3} \cdot \sqrt{\varepsilon} \leqslant \frac{2n^3}{3} \cdot \sqrt{\varepsilon}.$$

Для того, щоб довести другу оцінку, зафіксуємо $i \in \{2, \ldots, n-1\}$ і $k \in \{2, \ldots, n\}$ і покладемо

$$B^i_{jl} := A^i_{kj} \cap A^{i-1}_{kl}, \quad 1 \leqslant j \leqslant l \leqslant k.$$

Тоді ми помічаємо, що

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|z_i(u_k,t)-z_{i+1}(u_k,t)| = \mathbf{E}\sup_{\widetilde{\sigma}_i\leqslant t\leqslant 1}|z_i(u_k,t)-z_{i+1}(u_k,t)| = \\
&= \mathbf{E}\sup_{\widetilde{\sigma}_i\leqslant t\leqslant 1}\sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\Big(|[z_i(u_l,t)-z_i(u_j,t)]-[z_i(u_l,\widetilde{\sigma}_i)-z_i(u_j,\widetilde{\sigma}_i)]|\cdot 1\!\!1_{B^i_{jl}}\Big) = \\
&= \sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\mathbf{E}\left(\sup_{\widetilde{\sigma}_i\leqslant t\leqslant 1}|[z_i(u_l,t)-z_i(u_l,\widetilde{\sigma}_i)]-[z_i(u_j,t)-z_i(u_j,\widetilde{\sigma}_i)]|\cdot 1\!\!1_{B^i_{jl}}\right) \leqslant \\
&\leqslant \sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\mathbf{E}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|[z_i(u_l,t+\widetilde{\sigma}_i)-z_i(u_l,\widetilde{\sigma}_i)]-[z_i(u_j,t+\widetilde{\sigma}_i)-z_i(u_j,\widetilde{\sigma}_i)]|\cdot 1\!\!1_{B^i_{jl}}\right).
\end{aligned}
$$

Далі ми продовжуємо точно так же, як у попередньому випадку, помічаючи, що для $1\leqslant l\leqslant k$ і $1\leqslant j\leqslant l$ на множині B^i_{jl} ми маємо

$$
z_i(u_l,t)-z_i(u_j,t) = x(u_l,t)-x(u_j,t)\geqslant 0,\quad t\geqslant 0.
$$

Таким чином, ми приходимо до висновку, що

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|z_i(u_k,t)-z_{i+1}(u_k,t)| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}4(l-j)\cdot\sqrt{\varepsilon} = \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{2k(k^2-1)}{3}\cdot\sqrt{\varepsilon} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{2k^3}{3}\cdot\sqrt{\varepsilon} \leqslant \frac{2n^4}{3}\cdot\sqrt{\varepsilon}.
\end{aligned}
$$

Лема доведена. □

Теорема 2.2.8. *Якщо $n\geqslant 2$ таке, що*

$$
\frac{1}{2}d(\Gamma) < \frac{1}{n},
$$

то

$$
W_1(\Lambda^n,\Lambda^n_0) \leqslant \frac{\sqrt{2}n^5}{3}\cdot\sqrt{d(\Gamma)}.
$$

Доведення. Ясно, що ми можемо припускати, що $d(\Gamma)>0$. Якщо ми покладемо

$$
u_k := \frac{2k-1}{2n},\quad 1\leqslant k\leqslant n,
$$

то

$$u_{k+1} - u_k = \frac{1}{n} > \varepsilon, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1,$$

де

$$\varepsilon := \frac{1}{2} d(\Gamma) > 0 = d(1\!\!1_{\{0\}}).$$

Помітимо, що n-вимірні випадкові процеси $\{(z_n(u_1,t),\ldots,z_n(u_n,t)),\ t \geqslant 0\}$ і $\{(z_{0,n}(u_1,t),\ldots,z_{0,n}(u_n,t)),\ t \geqslant 0\}$, побудовані згідно з описаною вище процедурою (зі щойно означеним ε) для потоку Харріса $\{x(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ і потоку Арратья $\{x_0(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ відповідно, мають однаковий розподіл. Тому розподіли $\widetilde{\Lambda}^n$ і $\widetilde{\Lambda}_0^n$ випадкових мір

$$\widetilde{\lambda}^n := \sum_{k=1}^{n} p_k^n \delta_{z_n(u_k,1)}$$

і

$$\widetilde{\lambda}_0^n := \sum_{k=1}^{n} p_k^n \delta_{z_{0,n}(u_k,1)}$$

збігаються. Отже, за нерівністю трикутника

$$W_1(\Lambda^n,\Lambda_0^n) \leqslant W_1(\Lambda^n,\widetilde{\Lambda}^n) + W_1(\widetilde{\Lambda}^n,\widetilde{\Lambda}_0^n) + W_1(\widetilde{\Lambda}_0^n,\Lambda_0^n) = W_1(\Lambda^n,\widetilde{\Lambda}^n) + W_1(\widetilde{\Lambda}_0^n,\Lambda_0^n).$$

Однак, використовуючи лему 2.2.7, ми отримуємо

$$W_1(\Lambda^n,\widetilde{\Lambda}^n) = \inf_{\varkappa \in C(\Lambda^n,\widetilde{\Lambda}^n)} \iint\limits_{\mathcal{M}_1^2(\mathbb{R})} W_1(\mu',\mu'')\,\varkappa(d\mu',d\mu'') \leqslant \mathbf{E} W_1(\lambda^n,\widetilde{\lambda}^n) =$$

$$= \mathbf{E} \inf_{\varkappa \in C(\lambda^n,\widetilde{\lambda}^n)} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} |u-v|\ \varkappa(du,dv) \leqslant \mathbf{E} \sum_{k=1}^{n} p_k^n\, |x(u_k,1) - z_n(u_k,1)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E} \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |z_1(u_k,t) - z_n(u_k,t)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{E} \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |z_i(u_k,t) - z_{i+1}(u_k,t)| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E} \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |z_i(u_k,t) - z_{i+1}(u_k,t)| \leqslant \frac{2n^5}{3} \cdot \sqrt{\varepsilon}$$

і аналогічно

$$W_1(\widetilde{\Lambda}_0^n,\Lambda_0^n) \leqslant \frac{2n^5}{3} \cdot \sqrt{\varepsilon}.$$

Звідси випливає потрібний результат. □

Третій крок.

Доведення теореми 2.2.1. Нехай $n \geqslant 2$ таке, що

$$\frac{1}{2}d(\Gamma) < \frac{1}{n}.$$

За нерівністю трикутника ми маємо

$$W_1(\Lambda, \Lambda_0) \leqslant W_1(\Lambda, \Lambda^n) + W_1(\Lambda^n, \Lambda_0^n) + W_1(\Lambda_0^n, \Lambda_0).$$

З одного боку, за теоремою 2.2.3

$$W_1(\Lambda, \Lambda^n) \leqslant \frac{K}{\sqrt{n}},$$
$$W_1(\Lambda_0^n, \Lambda_0) = W_1(\Lambda_0, \Lambda_0^n) \leqslant \frac{K}{\sqrt{n}}.$$

З іншого боку, за теоремою 2.2.8

$$W_1(\Lambda^n, \Lambda_0^n) \leqslant \frac{\sqrt{2}n^5}{3} \cdot \sqrt{d(\Gamma)}.$$

Таким чином, ми отримуємо

$$W_1(\Lambda, \Lambda_0) \leqslant 2K \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + n^5 \cdot \sqrt{d(\Gamma)} \right),$$

оскільки

$$2K > \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Функція

$$h(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} + y^5 \cdot \sqrt{d(\Gamma)}, \quad y \geqslant 1,$$

досягає свого мінімуму в точці

$$y_0 = \frac{1}{(10\sqrt{d(\Gamma)})^{2/11}}.$$

Тому ми покладаємо

$$n_0 := \left(\left[\frac{1}{(10\sqrt{d(\Gamma)})^{2/11}} \right] + 1 \right) \in \mathbb{N}$$

і помічаємо, що з умови $d(\Gamma) < \frac{1}{100}$ випливає, що $n_0 \geqslant 2$ і $\frac{1}{2}d(\Gamma) < \frac{1}{n_0}$. Отже,

$$W_1(\Lambda, \Lambda_0) \leqslant 2K \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{n_0}} + n_0^5 \cdot \sqrt{d(\Gamma)} \right) \leqslant$$

$$\leqslant 2K \cdot \left(\sqrt{(10\sqrt{d(\Gamma)})^{2/11}} + \left(2 \cdot \frac{1}{(10\sqrt{d(\Gamma)})^{2/11}} \right)^5 \cdot \sqrt{d(\Gamma)} \right) =$$

$$= 2K \cdot \left(10^{1/11} \cdot d(\Gamma)^{1/22} + \left(\frac{512}{25} \right)^{5/11} \cdot d(\Gamma)^{1/22} \right) = C \cdot d(\Gamma)^{1/22},$$

де $C := 2K \cdot \left(10^{1/11} + (512/25)^{5/11}\right) > 0$. Теорема доведена. $\square$

Висновки до розділу 2

1. Доведено слабку збіжність n-точкових рухів потоків Харріса, коваріаційні функції яких поточково збігаються до невід'ємно визначеної функції, носій якої є зліченною множиною, до n-точкових рухів потоку Арратья.

2. Отримано оцінку на відстань Васерштейна між розподілами образів ймовірнісної міри на дійсній вісі з компактним носієм під дією двох потоків Харріса з малими радіусами взаємодії між частинками.

Розділ 3

Концентрація маси в броунівських стохастичних потоках

Розглянемо стохастичне інтегральне рівняння

$$x(u,t) = u + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x(u,s) - q)\, W(dq, ds), \quad t \geqslant 0, \tag{3.1}$$

де $u \in \mathbb{R}$ — фіксований параметр, W — вінерів лист на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, а функція $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ задовольняє умови:

(i) $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$, тобто φ — невід'ємна, нескінченно диференційовна та має компактний носій;

(ii) $\varphi(q) = \varphi(-q)$, $q \in \mathbb{R}$;

(iii) $\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi^2(q)\, dq = 1$.

Як вже відмічалося, при таких умовах на функцію φ рівняння (3.1) має єдиний сильний розв'язок для кожного $u \in \mathbb{R}$. При цьому для деякої множини Ω повної ймовірності (не обмежуючи загальності, ми будемо вважати, що це є вся множина елементарних подій) відображення

$$x(\omega, \cdot, t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \geqslant 0, \quad \omega \in \Omega, \tag{3.2}$$

є C^∞-дифеоморфізмами та стохастичний потік $\{\varphi_{s,t}(u),\ u \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant s \leqslant t < +\infty\}$, що задається рівністю

$$\varphi_{s,t}(\omega, u) := x(\omega, x^{-1}(\omega, u, s), t), \quad u \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant s \leqslant t < +\infty, \quad \omega \in \Omega, \quad (3.3)$$

де $x^{-1}(\omega, \cdot, s)$ — відображення, обернене до відображення $x(\omega, \cdot, s)$ (надалі змінну ω ми будемо, як правило, опускати), є броунівським стохастичним потоком C^∞-дифеоморфізмів (див. [12], [63], а також [35]).

Коваріаційною функцією даного броунівського стохастичного потоку є функція

$$\Phi(z) := \int_{\mathbb{R}} \varphi(z+q)\varphi(q)\, dq, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Іншими словами, для будь-яких $u, v \in \mathbb{R}$ взаємна квадратична варіація вінерових процесів $\{x(u,t),\ t \geqslant 0\}$ та $\{x(v,t),\ t \geqslant 0\}$ має вигляд

$$\langle x(u,\cdot), x(v,\cdot)\rangle_t = \int_0^t \Phi(x(u,s) - x(v,s))\, ds, \quad t \geqslant 0.$$

Зауважимо, що функція Φ приймає значення 1 в точці 0 та має компактний носій, діаметр якого не перевищує $2d(\varphi)$, де $d(\varphi)$ — діаметр носія функції φ. Тому при прямуванні $d(\varphi)$ до нуля функція Φ поточково збігається до функції

$$1\!\!\mathrm{I}_{\{0\}}(z) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } z = 0, \\ 0, & \text{якщо } z \neq 0. \end{cases}$$

У роботі [12] було показано, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ та для будь-яких $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$ у просторі $C([0;1], \mathbb{R}^n)$ має місце слабка збіжність

$$(x(u_1,\cdot), \ldots, x(u_n,\cdot)) \xrightarrow{w} (x_0(u_1,\cdot), \ldots, x_0(u_n,\cdot)), \quad d(\varphi) \to 0+,$$

де $\{x_0(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ — потік Арратья, тобто броунівський стохастичний потік із коваріаційною функцією $1\!\!\mathrm{I}_{\{0\}}$.

Нагадаємо (див. [2], [25]), що для будь-якого $t > 0$ та для будь-якого відрізка $I \subset \mathbb{R}$ множина $x_0(\mathbb{R}, t) \cap I$ скінченна майже напевно.

Розглянемо випадкові міри

$$\lambda_t := \lambda \circ x^{-1}(\cdot, t), \quad t \geqslant 0,$$

де λ — одновимірна міра Лебега. В силу дифеоморфності відображень (3.2), ці міри є абсолютно неперервними. При цьому легко перевірити, що для відповідних щільностей має місце представлення (строга додатність похідної $\frac{\partial x}{\partial u}(u,t)$ випливає з леми 3.2.1, що приводиться нижче)

$$\frac{d\lambda_t}{d\lambda}(u) \equiv p_t(u) = \frac{1}{\dfrac{\partial x}{\partial u}(x^{-1}(u,t),t)}, \quad u \in \mathbb{R}, \quad t \geqslant 0.$$

Якщо ми покладемо тепер

$$\lambda_t^0 := \lambda \circ x_0^{-1}(\cdot, t), \quad t \geqslant 0,$$

то природно очікувати, що при $d(\varphi) \to 0+$ випадкові міри λ_t у деякому сенсі збігаються до випадкових мір λ_t^0. Тому області концентрації мір λ_t або, іншими словами, області, в яких щільності p_t приймають великі значення, відповідають атомам мір λ_t^0, якими, очевидно, є кластери в потоці Арратья.

Вивчення таких викидів щільностей p_t за високі рівні розумно починати з дослідження їхніх інтенсивностей перетинів цих рівнів. Нагадаємо відповідне означення.

Нехай $\{\xi(u),\ u \in \mathbb{R}\}$ — випадковий процес, траєкторії якого з ймовірністю одиниця неперервні та не рівні тотожно даному фіксованому числу $c \in \mathbb{R}$ ні на якому інтервалі. Тоді число $N([0;1];c)$ перетинів випадковим процесом ξ рівня c на відрізку $[0;1]$ коректно визначене та величина

$$\mu(c) := \mathbf{E}N([0;1];c)$$

називається інтенсивністю перетинів випадковим процесом ξ рівня c.

Для деяких класів випадкових процесів $\{\xi(u),\ u \in \mathbb{R}\}$ значення $\mu(c)$ може бути обчислене за відомою формулою Райса (див. оглядову роботу [39], де розглядаються перетини рівня знизу догори, та посилання в ній). У якості прикладу наведемо наступну теорему, попутно відмітивши, що в ній та скрізь надалі $\pi[\eta](\cdot)$ та $\pi[\eta,\zeta](\cdot,\cdot)$ позначають відповідно щільність розподілу випадкової величини η та щільність спільного розподілу випадкових величин η та ζ.

Теорема 3.0.1. [3, стор. 79] *Нехай випадковий процес* $\{\xi(u),\ u \in \mathbb{R}\}$ *має неперервно диференційовні траєкторії та задовольняє наступні три умови:*

(i) *відображення* $(u, z) \mapsto \pi[\xi(u)](z)$ *неперервно при* $u \in [0; 1]$ *та* $z \in U_c$, *де* U_c — *деякий окіл точки* $c \in \mathbb{R}$*;*

(ii) *відображення* $(u, z_1, z_2) \mapsto \pi[\xi(u), \xi'(u)](z_1, z_2)$ *неперервне при* $u \in [0; 1]$, $z_1 \in U_c$ *та* $z_2 \in \mathbb{R}$*;*

(iii) $\mathbf{E}w(\xi'; \delta) \to 0$ *при* $\delta \to 0+$, *де* $w(\xi'; \delta)$ — *модуль неперервності похідної* ξ' *на відрізку* $[0; 1]$.

Тоді для будь-якого $c \in \mathbb{R}$ *справедлива рівність*

$$\mu(c) = \int_0^1 \int_0^{+\infty} |z| \cdot \pi[\xi(u), \xi'(u)](c, z)\, dz\, du. \tag{3.4}$$

Однак часто умови на випадковий процес, які забезпечують справедливість формули (3.4) для *всіх* рівнів $c \in \mathbb{R}$, є важкими для перевірки (наприклад, у наведеній теоремі такою є умова (iii)), та їхнє виконання доведене лише для випадкових процесів, близьких до гаусових. Легше перевіряються умови, що забезпечують справедливість подібних формул для *майже всіх* рівнів $c \in \mathbb{R}$.

В даному розділі ми використовуємо наступний варіант формули Райса (пор. [39, формула (3)]), який називається також формулою Банаха.

Теорема 3.0.2. [3, вправа 3.8(d)] *Нехай випадковий процес* $\{\xi(u),\ 0 \leqslant u \leqslant 1\}$ *є таким, що майже всі його траєкторії абсолютно неперервні, а також для будь-якого* $u \in [0; 1]$ *розподіл випадкової величини* $\xi(u)$ *має щільність* $\pi[\xi(u)](\cdot)$ *та умовне математичне сподівання* $\mathbf{E}(|\xi'(u)| \mid \xi(u) = c)$ *коректно визначене. Тоді для майже всіх* $c \in \mathbb{R}$ *справедлива рівність*

$$\mu(c) = \int_0^1 \mathbf{E}(|\xi'(u)| \mid \xi(u) = c) \cdot \pi[\xi(u)](c)\, du.$$

Головною метою даного розділу є перевірка коректної визначеності інтенсивності $\mu_t(c)$ перетинів рівня $c > 0$ випадковим процесом $\{p_t(u),\ u \in \mathbb{R}\}$ для будь-якого $t > 0$ та доведення співвідношення

$$\mu_t(c) = \overline{\mu}_t(c) \qquad \text{для м. в. } c > 0, \tag{3.5}$$

де
$$\overline{\mu}_t(c) = \frac{\sqrt{2L''}\cdot e^{\frac{\pi^2}{2L't}-\frac{L't}{8}}}{\pi L'\sqrt{\pi t}}\cdot\frac{1}{\sqrt{c}}\cdot\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\frac{v^2}{2L't}}\operatorname{sh}v\sin\frac{\pi v}{L't}}{\sqrt{1+\frac{2\operatorname{ch}v}{c}+\frac{1}{c^2}}}\,dv$$
зі сталими
$$L' := \int\limits_{\mathbb{R}}\varphi'^2(q)\,dq > 0$$
та
$$L'' := \int\limits_{\mathbb{R}}\varphi''^2(q)\,dq > 0,$$
а також встановлення асимптотичної рівності
$$\overline{\mu}_t(c) = \frac{e^{-\frac{L't}{8}}\sqrt{L''}}{\pi\sqrt{2L'}}\cdot\sqrt{\frac{c}{\ln c}}\cdot\exp\left[-\frac{(\ln c)^2}{2L't}\right]\cdot(1+\overline{o}(1)),\quad c\to+\infty. \tag{3.6}$$
У підрозділі 3.1 ми доводимо стаціонарність випадкового процесу $\{x(u,t)-u,\ u\in\mathbb{R}\}$ та θ-однорідність (див. нижче означення 3.1.5) випадкового процесу $\{(p_t(u),p_t'(u)),\ u\in\mathbb{R}\}$ (похідна тут розуміється у звичайному сенсі), у підрозділі 3.2 знаходимо щільність спільного розподілу випадкових величин $p_t(u)$ та $p_t'(u)$, а в підрозділі 3.3 встановлюємо співвідношення (3.5) та (3.6).

3.1 Стаціонарність потоків Харріса за просторовою змінною

Для доведення стаціонарності при фіксованому t випадкового процесу $\{x(u,t)-u,\ u\in\mathbb{R}\}$ ми скористаємося варіантом дискретної схеми наближень Ойлера–Маруями, що використовується в роботі [44]. Для $t>0$ та $n\geqslant 1$ покладемо
$$x_0^n(u,t)\equiv u,\quad u\in\mathbb{R},$$
$$x_{k+1}^n(u,t) := x_k^n(u,t)+\xi_{k+1}^n(x_k^n(u,t),t),\quad u\in\mathbb{R},\quad 0\leqslant k\leqslant n-1,$$
де
$$\xi_{k+1}^n(u,t) := \int\limits_{\frac{kt}{n}}^{\frac{(k+1)t}{n}}\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi(u-q)\,W(dq,ds),\quad u\in\mathbb{R},\quad 0\leqslant k\leqslant n-1.$$

Згідно з теоремою 4 з роботи [44], означений таким рекурентним способом випадковий процес $x_n^n(\cdot, 1)$ наближає випадковий процес $x(\cdot, 1)$ в рівномірній метриці на відрізку $[0; 1]$. Однак, наведене доведення цієї теореми легко переноситься *mutatis mutandis* на випадок довільних моменту часу $t > 0$ та відрізка $[a; b]$, і тому її відповідне узагальнення можна сформулювати в наступному (дещо спрощеному, але достатньому для наших цілей) вигляді.

Теорема 3.1.1. *Для будь-якого $t > 0$ та відрізка $[a; b] \subset \mathbb{R}$ існує така стала $C > 0$, що залежить від моменту часу t, довжини відрізка $[a; b]$ та функції φ, що для всіх $n \geqslant 1$*

$$\mathbf{E} \left\| x_n^n(\cdot, t) - x(\cdot, t) \right\|_{[a;b]} \leqslant \frac{C}{\sqrt{n}},$$

де $\|\cdot\|_{[a;b]}$ — супремум-норма на відрізку $[a; b]$.

Теорема 3.1.2. *При кожному $t \geqslant 0$ випадковий процес $\{x(u, t) - u,\ u \in \mathbb{R}\}$ є стаціонарним (у вузькому сенсі).*

Доведення. Зафіксуємо довільний момент часу $t > 0$ (у випадку $t = 0$ доводити нічого).

Методом математичної індукції, використовуючи характеристичні функції та враховуючи незалежність ξ_{k+1}^n від $\mathcal{F}_{\frac{kt}{n}}$ при будь-якому $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, де $(\mathcal{F}_s,\ s \geqslant 0)$ — фільтрація, породжена вінеровим листом W (та поповнена множинами нульової ймовірності), можна показати, що всі випадкові процеси $\{x_k^n(u, t) - u,\ u \in \mathbb{R}\}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, стаціонарні.

Для доведення стаціонарності випадкового процесу $\{x(u, t) - u,\ u \in \mathbb{R}\}$ помітимо, що з теореми 3.1.1 випливає, що для будь-яких $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}$ справедливе співвідношення

$$\mathbf{E} \max_{1 \leqslant k \leqslant m} \left| x_n^n(u_k, t) - x(u_k, t) \right| \to 0, \quad n \to \infty,$$

і, отже,

$$\begin{gathered}(x_n^n(u_1, t) - u_1, \ldots, x_n^n(u_m, t) - u_m) \xrightarrow{w} \\ \xrightarrow{w} (x(u_1, t) - u_1, \ldots, x(u_m, t) - u_m), \quad n \to \infty.\end{gathered}$$

Оскільки же для довільного $h > 0$ ми маємо

$$(x_n^n(u_1 + h, t) - (u_1 + h), \ldots, x_n^n(u_m + h, t) - (u_m + h)) \stackrel{d}{=} \\ \stackrel{d}{=} (x_n^n(u_1, t) - u_1, \ldots, x_n^n(u_m, t) - u_m),$$

то розподіли випадкових векторів

$$(x(u_1 + h, t) - (u_1 + h), \ldots, x(u_m + h, t) - (u_m + h))$$

та

$$(x(u_1, t) - u_1, \ldots, x(u_m, t) - u_m)$$

збігаються. Теорема доведена. □

Наслідок 3.1.3. *Для будь-якого $t \geqslant 0$ тривимірний випадковий процес*

$$\left\{ \left(x(u,t) - u, \frac{\partial x}{\partial u}(u,t), \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}(u,t) \right),\ u \in \mathbb{R} \right\}$$

є стаціонарним.

Тепер нам знадобляться декілька означень (див. [58, глава 5]).

Означення 3.1.4. Сімейство відображень $\{\theta_z \colon \Omega \to \Omega,\ z \in \mathbb{R}\}$ називається *сімейством (просторових) зсувів*, якщо

(i) відображення $\mathbb{R} \times \Omega \ni (z, \omega) \mapsto \theta_z(\omega) \in \Omega$ вимірне;

(ii) $\theta_y \circ \theta_z = \theta_{y+z}$ для будь-яких $y, z \in \mathbb{R}$;

(iii) θ_0 — тотожне відображення;

(iv) $\mathbf{P} \circ \theta_z^{-1} = \mathbf{P}$ для будь-якого $z \in \mathbb{R}$.

Означення 3.1.5. Випадковий процес $\{\xi(u),\ u \in \mathbb{R}\}$ називається *θ-однорідним випадковим процесом*, якщо

$$\forall\, \omega \in \Omega \quad \forall\, u, z \in \mathbb{R} : \quad \xi(\theta_z \omega, u) = \xi(\omega, u + z).$$

Означення 3.1.6. Відображення $G\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називається *θ-однорідним випадковим перетворенням*, якщо

$$\forall\, \omega \in \Omega \quad \forall\, u, z \in \mathbb{R}: \quad G(\theta_z \omega, u) = G(\omega, u + z) - z.$$

Означення 3.1.7. Відображення $A\colon \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to E$, яке приймає значення у деякому вимірному просторі $(E, \mathcal{E})$, називається *θ-однорідним випадковим полем*, якщо воно вимірне за сукупністю змінних та

$$\forall\, \omega \in \Omega \quad \forall\, u, z \in \mathbb{R} \quad \forall\, t \geqslant 0: \quad A(\theta_z \omega, u, t) = A(\omega, u + z, t).$$

Означення 3.1.8. Стохастичний потік $\{\varphi_{s,t}(u),\ u \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant s \leqslant t < \infty\}$ називається *θ-однорідним стохастичним потоком*, якщо

$$\forall\, \omega \in \Omega \quad \forall\, u \in \mathbb{R} \quad \forall\, s, t \geqslant 0,\ s \leqslant t: \quad \varphi_{s,t}(\theta_z \omega, u) = \varphi_{s,t}(\omega, u + z) - z.$$

Лема 3.1.9. *Для будь-якого $t \geqslant 0$ випадкові процеси*

$$\left\{ \left(x(u,t) - u, \frac{\partial x}{\partial u}(u,t), \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}(u,t) \right),\ u \in \mathbb{R} \right\}$$

та

$$\{(p_t(u), p_t'(u)),\ u \in \mathbb{R}\}$$

є θ-однорідними.

Доведення. Для доведення достатньо помітити, що канонічне представлення випадкового процесу

$$\left\{ \left(x(u,t) - u, \frac{\partial x}{\partial u}(u,t), \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}(u,t) \right),\ u \in \mathbb{R} \right\}$$

на просторі

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \mid \omega_1 \in C^2(\mathbb{R}),\ \omega_1' > -1,\ \omega_2 = \omega_1' + 1,\ \omega_3 = \omega_1''\}$$

з борелівською σ-алгеброю, що породжується стандартною рівномірною метрикою, є θ-однорідним відносно стандартних просторових зсувів (для цих зсувів виконання умов (ii) та (iii) означення 3.1.4 очевидне, виконання умови (i) випливає з їхньої неперервності за сукупністю змінних, а виконання умови (iv) — з наслідку 3.1.3). Після цього безпосередньо перевіряється θ-однорідність спочатку випадкового процесу $\{x^{-1}(u,t) - u,\ u \in \mathbb{R}\}$, а потім і випадкового процесу $\{(p_t(u), p_t'(u)),\ u \in \mathbb{R}\}$. $\square$

Результати третього підрозділу даної дисертації суттєво спираються на наступну теорему.

Теорема 3.1.10. [58, глава 5, теорема 4.11] *Нехай* $\{\varphi_{s,t}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ 0\leqslant s\leqslant t<+\infty\}$ *—* θ*-однорідний стохастичний потік* C^1*-дифеоморфізмів,* $A\colon \Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\to E$ *—* θ*-однорідне випадкове поле, що приймає значення в деякому вимірному просторі* $(E,\mathcal{E})$*. Тоді для будь-яких* $s,t\geqslant 0$*,* $s\leqslant t$*, справедливі наступні твердження:*

(i) *випадкове перетворення* $\varphi_{s,t}^{-1}(\cdot)$ *є* θ*-однорідним дифеоморфізмом;*

(ii) *випадковий процес* $\frac{\partial\varphi_{s,t}}{\partial u}(\cdot)$ *є* θ*-однорідним;*

(iii) *випадковий процес* $\frac{\partial\varphi_{s,t}}{\partial u}(\varphi_{s,t}^{-1}(\cdot))$ *є* θ*-однорідним;*

(iv) *для будь-якої* $\mathcal{E}$*-вимірної функції* $f\colon E\to\mathbb{R}_+$ *та будь-якого* $u\in\mathbb{R}$ *справедлива рівність*

$$\mathbf{E}f(A(\varphi_{s,t}(u),t))=\mathbf{E}\left[f(A(0,t))\cdot\frac{1}{\dfrac{\partial\varphi_{s,t}}{\partial u}(\varphi_{s,t}^{-1}(0))}\right],$$

якщо тільки математичне сподівання, що стоїть у правій частині, визначене і скінченне.

3.2 Щільність спільного розподілу випадкових величин $p_t(u)$ та $p_t'(u)$

У цьому підрозділі ми покажемо, що спільний розподіл випадкових величин $p_t(u)$ та $p_t'(u)$ має щільність та знайдемо її вигляд.

Для початку доведемо наступну лему.

Лема 3.2.1. *Має місце представлення*

$$\frac{\partial x}{\partial u}(u,t)=\exp\left[-\frac{1}{2}L't+\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\varphi'(x(u,s)-q)\,W(dq,ds)\right],\quad t\geqslant 0,\quad u\in\mathbb{R},\tag{3.7}$$

причому для будь-якого $u \in \mathbb{R}$ випадковий процес

$$w_u(t) := \frac{1}{\sqrt{L'}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x(u,s) - q)\, W(dq, ds), \quad t \geqslant 0, \tag{3.8}$$

є стандартним вінеровим процесом.

Доведення. Із властивостей інтеграла за вінеровим листом випливає, що випадковий процес $\{w_u(t),\ t \geqslant 0\}$, який визначається рівністю (3.8), є неперервним $(\mathcal{F}_t)$-узгодженим мартингалом з квадратичною характеристикою

$$\langle w_u \rangle_t = \frac{1}{L'} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \varphi'^2(x(u,s) - q)\, dq\, ds = t, \quad t \geqslant 0,$$

а отже, за теоремою Леві про характеризацію броунівського руху, — стандартним вінеровим процесом.

Далі, диференціювання обох частин рівняння для $x(u,t)$ (див. [35, теорема 3.3.3]) приводить до рівності

$$\frac{\partial x}{\partial u}(u,t) = 1 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x(u,s) - q) \frac{\partial x}{\partial u}(u,s)\, W(dq, ds), \quad t \geqslant 0. \tag{3.9}$$

За допомогою формули Іто легко показати, що випадковий процес, визначений правою частиною рівності (3.7), задовольняє стохастичне диференціальне рівняння (3.9) (відносно невідомого випадкового процесу $\{\frac{\partial x}{\partial u}(u,t),\ t \geqslant 0\}$). Тому рівність (3.7) зараз випливає з єдиності сильного розв'язку цього рівняння. $\square$

Наслідок 3.2.2. *Для будь-яких $t > 0$ та $u \in \mathbb{R}$ розподіл випадкової величини $\frac{\partial x}{\partial u}(u,t)$ має щільність вигляду*

$$\pi\left[\frac{\partial x}{\partial u}(u,t)\right](z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi L't}} \cdot \exp\left[-\frac{\left(\ln z + \frac{3}{2}L't\right)^2}{2L't} + L't\right], \quad z > 0.$$

Теорема 3.2.3. *Для будь-яких $t > 0$ та $u \in \mathbb{R}$ розподіл випадкової величини $p_t(u)$ має щільність вигляду*

$$\pi[p_t(u)](z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi L't}} \cdot \exp\left[-\frac{\left(\ln z + \frac{3}{2}L't\right)^2}{2L't} + L't\right], \quad z > 0. \tag{3.10}$$

Доведення. Покладемо

$$E := (0; +\infty),$$
$$\mathcal{E} := \mathcal{B}((0; +\infty))$$

та для фіксованого $t_0 > 0$

$$A(u,t) := p_{t_0}(u), \quad u \in \mathbb{R}, \quad t \geqslant 0.$$

Помітимо, що відображення $(\omega, u, t) \mapsto A(\omega, u, t)$ зараз вимірне за сукупністю змінних, оскільки таким є відображення $(\omega, u, t) \mapsto x(\omega, u, t)$.

Тому для стохастичного потоку (3.3) та функції

$$f(z) := \frac{1}{z} \cdot 1\!\!\mathrm{I}\{z \in \Delta\}, \quad z \in E,$$

де множина $\Delta \in \mathcal{E}$ — довільна, при $s = 0$ та $t = t_0$ згідно з теоремою 3.1.10 ми маємо (щоб не загромаджувати запис, до кінця доведення ми будемо писати t замість t_0)

$$\mathbf{E}\left[\frac{1}{p_t(x(u,t))} \cdot 1\!\!\mathrm{I}\left\{p_t(x(u,t)) \in \Delta\right\}\right] = \mathbf{E}\left[\frac{1}{p_t(0)} \cdot 1\!\!\mathrm{I}\left\{p_t(0) \in \Delta\right\} \cdot p_t(0)\right],$$

тобто

$$\mathbf{P}\left\{p_t(0) \in \Delta\right\} = \mathbf{E}\left[\frac{\partial x}{\partial u}(u,t) \cdot 1\!\!\mathrm{I}\left\{\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial u}(u,t)} \in \Delta\right\}\right]. \tag{3.11}$$

Однак, з наслідку 3.2.2 випливає, що

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\frac{\partial x}{\partial u}(u,t) \cdot 1\!\!\mathrm{I}\left\{\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial u}(u,t)} \in \Delta\right\}\right] = \\ = \int\limits_{\Delta} \frac{1}{\sqrt{2\pi L't}} \cdot \exp\left[-\frac{\left(\ln z + \frac{3}{2}L't\right)^2}{2L't} + L't\right] dz.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Рівності (3.11) та (3.12), завдяки довільності множини Δ, приводять до потрібного твердження. □

Зауваження 3.2.4. Таким чином, для будь-яких $t \geqslant 0$ та $u \in \mathbb{R}$ справедлива рівність за розподілом

$$p_t(u) \stackrel{d}{=} \frac{\partial x}{\partial u}(u,t). \tag{3.13}$$

Відмітимо, що (3.13) також безпосередньо випливає з того, що для будь-якого $t \geqslant 0$ випадкові процеси $\{x(u,t),\ u \in \mathbb{R}\}$ і $\{x^{-1}(u,t),\ u \in \mathbb{R}\}$ мають однаковий розподіл (див. [25]).

Наслідок 3.2.5. *Для будь-яких $t > 0$ та $u \in \mathbb{R}$ справедливе співвідношення*

$$\mathbf{P}\left\{p_t(u) > c\right\} = \frac{e^{-\frac{L't}{8}}\sqrt{L't}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{c}\cdot \ln c} \cdot \exp\left[-\frac{(\ln c)^2}{2L't}\right] \cdot (1 + \overline{o}(1)), \quad c \to +\infty.$$

Доведення. Для доведення цього співвідношення достатньо записати ліву частину у вигляді інтеграла від щільності розподілу випадкової величини $p_t(u)$ з формули (3.10), потім за допомогою заміни змінної звести його до інтеграла від щільності $\mathfrak{p}$ стандартного гаусового розподілу та, нарешті, скористатися відомим (див., наприклад, [68, глава 1]) співвідношенням

$$\int\limits_c^{+\infty} \mathfrak{p}(u)\, du = \frac{1}{c} \cdot \mathfrak{p}(c) \cdot (1 + \overline{o}(1)), \quad c \to +\infty. \qquad \square$$

Для доведення наступного результату нам знадобиться допоміжна лема про обчислення умовного математичного сподівання від стохастичного інтеграла Іто за вінеровим процесом.

Лема 3.2.6. *Нехай неперервний випадковий процес $\{\xi_t,\ t \geqslant 0\}$ не залежить від вінерового процесу $\{\beta_t,\ t \geqslant 0\}$ і стохастичний інтеграл Іто*

$$\int\limits_0^t \xi_s\, d\beta_s, \quad t \geqslant 0,$$

коректно визначений. Тоді для будь-якої борелівської множини $\Delta \subset \mathbb{R}$ справедлива рівність

$$\mathbf{E}\left(1\!\!1\left\{ \int\limits_0^t \xi_s\, d\beta_s \in \Delta \right\} \middle|\, \xi \right) =$$

$$= \int\limits_\Delta \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} e^{-\frac{v^2}{2\sigma_t^2}}\, dv \cdot 1\!\!1\left\{\sigma_t > 0\right\} + 1\!\!1\left\{0 \in \Delta\right\} \cdot 1\!\!1\left\{\sigma_t = 0\right\},$$

де

$$\sigma_t := \left(\int\limits_0^t \xi_s^2 \, ds \right)^{1/2}.$$

Доведення. Очевидно, достатньо довести твердження леми для випадку, коли $\Delta = [a; b]$, де $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Розглянемо функції $f_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$, такі, що

$$f_\varepsilon(z) = 1, \quad a \leqslant z \leqslant b,$$

$$0 \leqslant f_\varepsilon(z) \leqslant 1, \quad a - \varepsilon \leqslant z \leqslant a, \; b \leqslant z \leqslant b + \varepsilon,$$

$$f_\varepsilon(z) = 0, \quad z \leqslant a - \varepsilon, \; z \geqslant b + \varepsilon.$$

Тоді

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} f_\varepsilon \left(\int\limits_0^t \xi_s \, d\beta_s \right) = 1\!\!\mathrm{I} \left\{ \int\limits_0^t \xi_s \, d\beta_s \in \Delta \right\},$$

та, використовуючи рівномірну обмеженість функцій $\{f_\varepsilon, \; \varepsilon > 0\}$ і теорему Лебега про обмежену збіжність, ми отримуємо, що

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \mathbf{E} \left| f_\varepsilon \left(\int\limits_0^t \xi_s \, d\beta_s \right) - 1\!\!\mathrm{I} \left\{ \int\limits_0^t \xi_s \, d\beta_s \in \Delta \right\} \right| =$$

$$= \mathbf{E} \lim_{\varepsilon \to 0+} \left| f_\varepsilon \left(\int\limits_0^t \xi_s \, d\beta_s \right) - 1\!\!\mathrm{I} \left\{ \int\limits_0^t \xi_s \, d\beta_s \in \Delta \right\} \right| = 0,$$

тобто

$$L^1 - \lim_{\varepsilon \to 0+} f_\varepsilon \left(\int\limits_0^t \xi_s \, d\beta_s \right) = 1\!\!\mathrm{I} \left\{ \int\limits_0^t \xi_s \, d\beta_s \in \Delta \right\}.$$

Тому

$$\mathbf{E} \left(1\!\!\mathrm{I} \left\{ \int\limits_0^t \xi_s \, d\beta_s \in \Delta \right\} \middle| \, \xi \right) = \mathbf{E} \left(L^1 - \lim_{\varepsilon \to 0+} f_\varepsilon \left(\int\limits_0^t \xi_s \, d\beta_s \right) \middle| \, \xi \right) =$$

$$= L^1 - \lim_{\varepsilon \to 0+} \mathbf{E} \left(f_\varepsilon \left(\int\limits_0^t \xi_s \, d\beta_s \right) \middle| \, \xi \right).$$

Покладемо
$$s_{nk} := \frac{k}{2^n}, \quad 0 \leqslant k \leqslant 2^n.$$
Тоді, завдяки липшицевості кожної з функцій $\{f_\varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$, ми маємо ($L_\varepsilon$ — константа Липшиця функції f_ε, $\varepsilon > 0$)
$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left| f_\varepsilon\left(\sum_{k=0}^{2^n-1} \xi_{s_{nk}} \Delta\beta_{s_{nk}}\right) - f_\varepsilon\left(\int\limits_0^t \xi_s\, d\beta_s\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant L_\varepsilon \cdot \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left|\sum_{k=0}^{2^n-1} \xi_{s_{nk}} \Delta\beta_{s_{nk}} - \int\limits_0^t \xi_s\, d\beta_s\right| \leqslant$$
$$\leqslant L_\varepsilon \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt{\mathbf{E}\left(\sum_{k=0}^{2^n-1} \xi_{s_{nk}} \Delta\beta_{s_{nk}} - \int\limits_0^t \xi_s\, d\beta_s\right)^2} = 0,$$
тобто
$$L^1 - \lim_{n\to\infty} f_\varepsilon\left(\sum_{k=0}^{2^n-1} \xi_{s_{nk}} \Delta\beta_{s_{nk}}\right) = f_\varepsilon\left(\int\limits_0^t \xi_s\, d\beta_s\right).$$
Отже,
$$\mathbf{E}\left(f_\varepsilon\left(\int\limits_0^t \xi_s\, d\beta_s\right)\middle|\, \xi\right) = \mathbf{E}\left(L^1 - \lim_{n\to\infty} f_\varepsilon\left(\sum_{k=0}^{2^n-1} \xi_{s_{nk}} \Delta\beta_{s_{nk}}\right)\middle|\, \xi\right) =$$
$$= L^1 - \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(f_\varepsilon\left(\sum_{k=0}^{2^n-1} \xi_{s_{nk}} \Delta\beta_{s_{nk}}\right)\middle|\, \xi\right).$$
Оскільки же $\{\xi_t,\ t \geqslant 0\}$ та $\{\beta_t,\ t \geqslant 0\}$ незалежні, то
$$\mathbf{E}\left(f_\varepsilon\left(\sum_{k=0}^{2^n-1} \xi_{s_{nk}} \Delta\beta_{s_{nk}}\right)\middle|\, \xi\right) = \left[\mathbf{E}\left(f_\varepsilon\left(\sum_{k=0}^{2^n-1} r_{nk} \Delta\beta_{s_{nk}}\right)\middle|\, \xi\right)\right]\Bigg|_{\substack{r_{nk}=\xi_{s_{nk}},\\ 0\leqslant k\leqslant 2^n-1}}.$$
При фіксованих $r_{nk} \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant k \leqslant 2^n - 1$, випадкова величина
$$\sum_{k=0}^{2^n-1} r_{nk} \Delta\beta_{s_{nk}}$$

має нормальний розподіл з нульовим середнім та дисперсією

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} r_{nk}^2 \Delta s_{nk} \geqslant 0,$$

а отже,

$$\left[\mathbf{E} \left(f_\varepsilon \left(\sum_{k=0}^{2^n-1} r_{nk} \Delta\beta_{s_{nk}} \right) \middle| \xi \right) \right] \Bigg|_{\substack{r_{nk}=\xi_{s_{nk}},\\ 0\leqslant k\leqslant 2^n-1}} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(z) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{t,n}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma_{t,n}^2}} \, dz \cdot 1\!\!\mathrm{I}\{\sigma_{t,n} > 0\} + f_\varepsilon(0) \cdot 1\!\!\mathrm{I}\{\sigma_{t,n} = 0\} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(\sigma_{t,n} z) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \, dz \cdot 1\!\!\mathrm{I}\{\sigma_{t,n} > 0\} + f_\varepsilon(0) \cdot 1\!\!\mathrm{I}\{\sigma_{t,n} = 0\},$$

де

$$\sigma_{t,n}^2 := \sum_{k=0}^{2^n-1} \xi_{s_{nk}}^2 \Delta s_{nk} \geqslant 0.$$

Завдяки неперервності випадкового процесу $\{\xi_t,\ t \geqslant 0\}$,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{t,n} \equiv \lim_{n\to\infty} \sqrt{\sum_{k=0}^{2^n-1} \xi_{s_{nk}}^2 \Delta s_{nk}} = \sqrt{\int_0^t \xi_s^2 \, ds} \equiv \sigma_t,$$

а завдяки монотонності $\sigma_{t,n}$ за $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} 1\!\!\mathrm{I}\{\sigma_{t,n} = 0\} = \lim_{n\to\infty} 1\!\!\mathrm{I} \left\{ \sum_{k=0}^{2^n-1} \xi_{s_{nk}}^2 \Delta s_{nk} = 0 \right\} =$$

$$= 1\!\!\mathrm{I} \left\{ \int_0^t \xi_s^2 \, ds = 0 \right\} = 1\!\!\mathrm{I}\{\sigma_t = 0\}$$

і, отже,

$$\lim_{n\to\infty} 1\!\!\mathrm{I}\{\sigma_{t,n} > 0\} = 1\!\!\mathrm{I}\{\sigma_t > 0\}.$$

Тому, за теоремою Лебега про обмежену збіжність,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E} \left| \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(\sigma_{t,n} z) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \, dz \cdot 1\!\!1\{\sigma_{t,n} > 0\} - \right.$$

$$\left. - \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(\sigma_t z) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \, dz \cdot 1\!\!1\{\sigma_t > 0\} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{E} \left| f_\varepsilon(\sigma_{t,n} z) \cdot 1\!\!1\{\sigma_{t,n} > 0\} - f_\varepsilon(\sigma_t z) \cdot 1\!\!1\{\sigma_t > 0\} \right| \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \, dz =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{E} \left(\lim_{n\to\infty} \left| f_\varepsilon(\sigma_{t,n} z) \cdot 1\!\!1\{\sigma_{t,n} > 0\} - f_\varepsilon(\sigma_t z) \cdot 1\!\!1\{\sigma_t > 0\} \right| \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \, dz = 0,$$

тобто

$$L^1 - \lim_{n\to\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(\sigma_{t,n} z) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \, dz \cdot 1\!\!1\{\sigma_{t,n} > 0\} \right) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(\sigma_t z) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \, dz \cdot 1\!\!1\{\sigma_t > 0\}.$$

Крім того,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E} \left| f_\varepsilon(0) \cdot 1\!\!1\{\sigma_{t,n} = 0\} - f_\varepsilon(0) \cdot 1\!\!1\{\sigma_t = 0\} \right| =$$

$$= f_\varepsilon(0) \cdot \mathbf{E} \lim_{n\to\infty} \left| 1\!\!1\{\sigma_{t,n} = 0\} - 1\!\!1\{\sigma_t = 0\} \right| = 0$$

і, отже,

$$L^1 - \lim_{n\to\infty} \left(f_\varepsilon(0) \cdot 1\!\!1\{\sigma_{t,n} = 0\} \right) = f_\varepsilon(0) \cdot 1\!\!1\{\sigma_t = 0\}.$$

Тому

$$L^1 - \lim_{n\to\infty} \mathbf{E} \left(f_\varepsilon \left(\sum_{k=0}^{2^n - 1} \xi_{s_{nk}} \Delta \beta_{s_{nk}} \right) \middle| \, \xi \right) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(\sigma_t z) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \, dz \cdot 1\!\!1\{\sigma_t > 0\} + f_\varepsilon(0) \cdot 1\!\!1\{\sigma_t = 0\}.$$

Таким чином,

$$\mathbf{E}\left(1\!\!1\left\{\int\limits_0^t \xi_s\,d\beta_s \in \Delta\right\}\Bigg|\,\xi\right) =$$

$$= L^1 - \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(\sigma_t z)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz\cdot 1\!\!1\{\sigma_t>0\} + f_\varepsilon(0)\cdot 1\!\!1\{\sigma_t=0\}\right].$$

Але, використовуючи теорему Лебега про обмежену збіжність, ми отримуємо, що, по-перше,

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\mathbf{E}\left|\int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(\sigma_t z)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz\cdot 1\!\!1\{\sigma_t>0\}-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{\mathbb{R}} 1\!\!1\{\sigma_t z\in\Delta\}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz\cdot 1\!\!1\{\sigma_t>0\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}}\mathbf{E}\left[\lim_{\varepsilon\to 0+}|f_\varepsilon(\sigma_t z) - 1\!\!1\{\sigma_t z\in\Delta\}|\cdot 1\!\!1\{\sigma_t>0\}\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz = 0,$$

тобто

$$L^1 - \lim_{\varepsilon\to 0+}\mathbf{E}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(\sigma_t z)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz\cdot 1\!\!1\{\sigma_t>0\}\right) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} 1\!\!1\{\sigma_t z\in\Delta\}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz\cdot 1\!\!1\{\sigma_t>0\} \equiv \int\limits_{\Delta}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t}e^{-\frac{z^2}{2\sigma_t^2}}\,dz\cdot 1\!\!1\{\sigma_t>0\},$$

та, по-друге,

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\mathbf{E}\,|f_\varepsilon(0)\cdot 1\!\!1\{\sigma_{t,n}=0\} - 1\!\!1\{0\in\Delta\}\cdot 1\!\!1\{\sigma_t=0\}| =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}|f_\varepsilon(0) - 1\!\!1\{0\in\Delta\}|\cdot\mathbf{E}1\!\!1\{\sigma_t=0\} = 0,$$

тобто

$$L^1 - \lim_{\varepsilon\to 0+}(f_\varepsilon(0)\cdot 1\!\!1\{\sigma_t=0\}) = 1\!\!1\{0\in\Delta\}\cdot 1\!\!1\{\sigma_t=0\}.$$

Тому

$$\mathbf{E}\left(1\!\!\mathrm{I}\left\{\int_0^t \xi_s\,d\beta_s \in \Delta\right\}\Bigg|\,\xi\right) =$$

$$= \left(\int_\Delta \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} e^{-\frac{u^2}{2\sigma_t^2}}\,du\right) \cdot 1\!\!\mathrm{I}\left\{\sigma_t > 0\right\} + 1\!\!\mathrm{I}\left\{0 \in \Delta\right\} \cdot 1\!\!\mathrm{I}\left\{\sigma_t = 0\right\},$$

що завершує доведення леми. □

Зафіксуємо тепер довільне $u \in \mathbb{R}$ та визначимо випадкові процеси

$$X_1(t) := \frac{\partial x}{\partial u}(u,t), \quad t \geqslant 0,$$

$$X_2(t) := \frac{\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}(u,t)}{\frac{\partial x}{\partial u}(u,t)}, \quad t \geqslant 0.$$

Лема 3.2.7. *Для будь-якого $t > 0$ спільний розподіл випадкових величин $X_1(t)$ та $X_2(t)$ має щільність вигляду*

$$\pi[X_1(t), X_2(t)](z_1, z_2) =$$

$$= \frac{e^{\frac{\pi^2}{2L't} - \frac{L't}{8}}}{\pi\sqrt{2\pi L''t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{z_1}} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{v^2}{2L't}} \operatorname{sh} v \sin \frac{\pi v}{L't}}{\left((1 + 2z_1 \operatorname{ch} v + z_1^2) + \frac{L'}{L''} z_2^2\right)^{3/2}}\,dv, \quad z_1 > 0, \quad z_2 \in \mathbb{R}.$$

Доведення. Помітимо, що з представлення (3.7) випливає рівність

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}(u,t) = \frac{\partial x}{\partial u}(u,t) \cdot \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \varphi''(x(u,s) - q) \frac{\partial x}{\partial u}(u,s)\, W(dq, ds), \quad t \geqslant 0. \quad (3.14)$$

З (3.9) та (3.14) ми отримуємо, що

$$X_1(t) = 1 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x(u,s) - q) X_1(s)\, W(dq, ds), \quad t \geqslant 0,$$

$$X_2(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \varphi''(x(u,s) - q) X_1(s)\, W(dq, ds), \quad t \geqslant 0.$$

З властивостей інтегралу за вінеровим листом, ми маємо

$$\langle X_1\rangle_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \varphi'^2(x(u,s)-q)X_1^2(s)\,dq\,ds = L'\cdot\int_0^t X_1^2(s)\,ds, \quad t\geqslant 0,$$
$$\langle X_2\rangle_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \varphi''^2(x(u,s)-q)X_1^2(s)\,dq\,ds = L''\cdot\int_0^t X_1^2(s)\,ds, \quad t\geqslant 0,$$
$$\langle X_1, X_2\rangle_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x(u,s)-q)\varphi''(x(u,s)-q)X_1^2(s)\,dq\,ds = 0, \quad t\geqslant 0.$$

Оскільки з ймовірністю одиниця $X_1(t) > 0$ для всіх $t \geqslant 0$, то, використовуючи теорему Дуба (див. [67, глава 5, теорема 5.12]), ми отримуємо, що пара випадкових процесів X_1 та X_2 є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} X_1(t) = 1 + \sqrt{L'}\cdot\int_0^t X_1(s)\,dW_1(s), \quad t\geqslant 0, \\ X_2(t) = \sqrt{L''}\cdot\int_0^t X_1(s)\,dW_2(s), \quad t\geqslant 0, \end{cases} \tag{3.15}$$

де вінерові процеси $\{W_1(t),\ t\geqslant 0\}$ та $\{W_2(t),\ t\geqslant 0\}$ можуть бути визначені рівностями

$$W_1(t) = \frac{1}{\sqrt{L'}}\int_0^t \frac{dX_1(s)}{X_1(s)}, \quad t\geqslant 0,$$
$$W_2(t) = \frac{1}{\sqrt{L''}}\int_0^t \frac{dX_2(s)}{X_1(s)}, \quad t\geqslant 0.$$

Зауважимо, що зараз вінерові процеси W_1 та W_2 незалежні, оскільки

$$\langle W_1, W_2\rangle_t = \frac{1}{\sqrt{L'L''}}\int_0^t \frac{d\,\langle X_1, X_2\rangle_s}{X_1^2(s)} = 0, \quad t\geqslant 0.$$

Розв'язавши систему (3.15), ми отримуємо представлення

$$X_1(t) = \exp\left[-\frac{1}{2}L't + \sqrt{L'}W_1(t)\right], \quad t \geqslant 0,$$

$$X_2(t) = \sqrt{L''}\int_0^t \exp\left[-\frac{1}{2}L's + \sqrt{L'}W_1(s)\right] dW_2(s), \quad t \geqslant 0.$$

Тепер для знаходження щільності спільного розподілу випадкових величин $X_1(t)$ та $X_2(t)$ при $t > 0$ помітимо, що для будь-яких борелівських множин $\Delta_1 \subset (0;+\infty)$ та $\Delta_2 \subset \mathbb{R}$ ми маємо

$$\mathbf{P}\left\{X_1(t) \in \Delta_1,\ X_2(t) \in \Delta_2\right\} = \mathbf{E}\left[1\!\!1\{X_1(t) \in \Delta_1\} \cdot \mathbf{E}\left(1\!\!1\{X_2(t) \in \Delta_2\} \mid X_1\right)\right].$$

Але оскільки, як легко бачити, фільтрації, породжені випадковими процесами X_1 та W_1 (і поповнені множинами нульової ймовірності), збігаються та W_1 і W_2 незалежні, то X_1 і W_2 також незалежні і, отже, згідно з лемою 3.2.6,

$$\mathbf{E}\left(1\!\!1\{X_2(t) \in \Delta_2\} \mid X_1\right) =$$
$$= \mathbf{E}\left(1\!\!1\left\{\sqrt{L''}\int_0^t X_1(s)\,dW_2(s) \in \Delta_2\right\} \middle| X_1\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{L''}}\int_{\Delta_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} e^{-\frac{v^2}{2L''\sigma_t^2}}\,dv,$$

де

$$\sigma_t := \left(\int_0^t X_1^2(s)\,ds\right)^{1/2} > 0.$$

Тому

$$\mathbf{P}\left\{X_1(t) \in \Delta_1,\ X_2(t) \in \Delta_2\right\} =$$
$$= \mathbf{E}\left(1\!\!1\{X_1(t) \in \Delta_1\} \cdot \frac{1}{\sqrt{L''}}\int_{\Delta_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} e^{-\frac{v^2}{2L''\sigma_t^2}}\,dv\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{L''}}\int_{\Delta_2} \mathbf{E}\left(1\!\!1\{X_1(t) \in \Delta_1\} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} e^{-\frac{v^2}{2L''\sigma_t^2}}\right) dv.$$

Щільність спільного розподілу випадкових величин $X_1(t)$ і $\sigma_t^2 \equiv \int\limits_0^t X_1^2(s)\,ds$ має вигляд (див. [6, стор. 265, формула 1.10.8])

$$\pi\left[X_1(t),\sigma_t^2\right](z_1,z_2)=\frac{\exp\left[-\frac{L't}{8}-\frac{1+z_1^2}{2L'z_2}\right]}{2z_1^{3/2}z_2}\cdot i_{\frac{L't}{2}}\left(\frac{z_1}{L'z_2}\right),\quad z_1,z_2>0,$$

де (див. [6, стор. 644])

$$i_y(z):=\frac{ze^{\frac{\pi^2}{4y}}}{\pi\sqrt{\pi y}}\int\limits_0^{+\infty}\exp\left[-z\operatorname{ch}v-\frac{v^2}{4y}\right]\operatorname{sh}v\sin\frac{\pi v}{2y}\,dv,\quad y,z>0.$$

Тому (у другій рівності ми просто перепозначаємо v через z_2 та z_2 через v)

$$\mathbf{P}\left\{X_1(t)\in\Delta_1,\ X_2(t)\in\Delta_2\right\}=$$
$$=\int\limits_{\Delta_2}dv\int\limits_{\Delta_1}dz_1\int\limits_0^{+\infty}dz_2\left[\frac{\exp\left[-\frac{v^2}{2L''z_2}-\frac{L't}{8}-\frac{1+z_1^2}{2L'z_2}\right]}{2\sqrt{2\pi L''}\cdot z_1^{3/2}z_2^{3/2}}\cdot i_{\frac{L't}{2}}\left(\frac{z_1}{L'z_2}\right)\right]=$$
$$=\int\limits_{\Delta_2}dz_2\int\limits_{\Delta_1}dz_1\int\limits_0^{+\infty}dv\left[\frac{\exp\left[-\frac{z_2^2}{2L''v}-\frac{L't}{8}-\frac{1+z_1^2}{2L'v}\right]}{2\sqrt{2\pi L''}\cdot z_1^{3/2}v^{3/2}}\cdot i_{\frac{L't}{2}}\left(\frac{z_1}{L'v}\right)\right]=$$
$$=\int\limits_{\Delta_1}\int\limits_{\Delta_2}\left[\int\limits_0^{+\infty}\frac{\exp\left[-\frac{z_2^2}{2L''v}-\frac{L't}{8}-\frac{1+z_1^2}{2L'v}\right]}{2\sqrt{2\pi L''}\cdot z_1^{3/2}v^{3/2}}\cdot i_{\frac{L't}{2}}\left(\frac{z_1}{L'v}\right)\,dv\right]dz_1\,dz_2.$$

Отже, при $z_1>0$ і $z_2\in\mathbb{R}$

$$\pi[X_1(t),X_2(t)](z_1,z_2)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\exp\left[-\frac{z_2^2}{2L''v}-\frac{L't}{8}-\frac{1+z_1^2}{2L'v}\right]}{2\sqrt{2\pi L''}\cdot z_1^{3/2}v^{3/2}}\cdot i_{\frac{L't}{2}}\left(\frac{z_1}{L'v}\right)\,dv=$$
$$=\frac{e^{\frac{\pi^2}{2L't}-\frac{L't}{8}}}{2\pi^2L'\sqrt{L'L''t}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\frac{z_2^2}{2L''v}-\frac{1+z_1^2}{2L'v}}}{\sqrt{z_1}\cdot v^{5/2}}\cdot\left(\int\limits_0^{+\infty}e^{-\frac{z_1}{L'v}\operatorname{ch}r-\frac{r^2}{2L't}}\operatorname{sh}r\sin\frac{\pi r}{L't}\,dr\right)dv=$$
$$=\frac{e^{\frac{\pi^2}{2L't}-\frac{L't}{8}}}{2\pi^2L'\sqrt{L'L''t}}\cdot\frac{1}{\sqrt{z_1}}\cdot\int\limits_0^{+\infty}\left[\int\limits_0^{+\infty}\frac{\exp\left[-\frac{1}{2v}\left(\frac{z_2^2}{L''}+\frac{1+2z_1\operatorname{ch}r+z_1^2}{L'}\right)\right]}{v^{5/2}}\,dv\right]\times$$
$$\times e^{-\frac{r^2}{2L't}}\operatorname{sh}r\sin\frac{\pi r}{L't}\,dr.$$

Нарешті, оскільки при $K > 0$ має місце рівність

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{v^{5/2}} e^{-\frac{K}{2v}}\, dv = \frac{\sqrt{2\pi}}{K^{3/2}},$$

то

$$\pi[X_1(t), X_2(t)](z_1, z_2) =$$

$$= \frac{e^{\frac{\pi^2}{2L't} - \frac{L't}{8}}}{2\pi^2 L'\sqrt{L'L''t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{z_1}} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{v^2}{2L't}} \operatorname{sh} v \sin \dfrac{\pi v}{L't}}{\left(\frac{z_2^2}{L''} + \frac{1+2z_1 \operatorname{ch} v + z_1^2}{L'}\right)^{3/2}} \cdot \sqrt{2\pi}\, dv =$$

$$= \frac{e^{\frac{\pi^2}{2L't} - \frac{L't}{8}}}{\pi\sqrt{2\pi L''t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{z_1}} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{v^2}{2L't}} \operatorname{sh} v \sin \frac{\pi v}{L't}}{\left((1 + 2z_1 \operatorname{ch} v + z_1^2) + \frac{L'}{L''} z_2^2\right)^{3/2}}\, dv,$$

що і треба було довести. □

Зауваження 3.2.8. Щільність спільного розподілу випадкових величин $X_1(t)$ і $X_2(t)$ симетрична за другою змінною:

$$\pi[X_1(t), X_2(t)](z_1, -z_2) = \pi[X_1(t), X_2(t)](z_1, z_2), \quad z_1 > 0, \quad z_2 \in \mathbb{R}.$$

Теорема 3.2.9. *При будь-яких $t > 0$ і $u \in \mathbb{R}$ спільний розподіл випадкових величин $p_t(u)$ і $p_t'(u)$ має щільність вигляду*

$$\pi\left[p_t(u), p_t'(u)\right](z_1, z_2) = \frac{e^{\frac{\pi^2}{2L't} - \frac{L't}{8}}}{\pi\sqrt{2\pi L''t}} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{z_1^{3/2} e^{-\frac{v^2}{2L't}} \operatorname{sh} v \sin \frac{\pi v}{L't}}{\left((z_1^2 + 2z_1^3 \operatorname{ch} v + z_1^4) + \frac{L'}{L''} z_2^2\right)^{3/2}}\, dv,$$

$$z_1 \geqslant 0, \quad z_2 \in \mathbb{R}, \quad z_1^2 + z_2^2 \neq 0.$$

Доведення. Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми 3.2.3. Покладемо

$$E = (0; +\infty) \times \mathbb{R},$$
$$\mathcal{E} = \mathcal{B}((0; +\infty) \times \mathbb{R})$$

і для фіксованого $t_0 > 0$

$$A(u, t) := (p_{t_0}(u), p_{t_0}'(u)), \quad u \in \mathbb{R}, \quad t \geqslant 0.$$

Зауважимо, що відображення $(\omega, u, t) \mapsto A(\omega, u, t)$ зараз вимірне за сукупністю змінних, оскільки таким є відображення $(\omega, u, t) \mapsto x(\omega, u, t)$.

Тому для стохастичного потоку (3.3) і функції

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{z_1} \cdot 1\!\!\mathrm{I}\{z_1 \in \Delta_1,\ z_2 \in \Delta_2\}, \quad (z_1, z_2) \in E,$$

де $\Delta_1 \in \mathcal{B}((0; +\infty))$ і $\Delta_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ — довільні, при $s = 0$ і $t = t_0$ згідно з теоремою 3.1.10 ми маємо (щоб не загромаджувати запис, до кінця доведення ми будемо писати t замість t_0)

$$\mathbf{E}\left[\frac{\partial x}{\partial u}(u,t) \cdot 1\!\!\mathrm{I}\left\{\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial u}(u,t)} \in \Delta_1,\ -\frac{\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}(u,t)}{\left(\frac{\partial x}{\partial u}(u,t)\right)^3} \in \Delta_2\right\}\right] =$$
$$= \mathbf{E}\left[\frac{1}{p_t(0)} \cdot 1\!\!\mathrm{I}\left\{p_t(0) \in \Delta_1,\ p_t'(0) \in \Delta_2\right\} \cdot p_t(0)\right].$$

Отже,

$$\mathbf{P}\left\{p_t(0) \in \Delta_1,\ p_t'(0) \in \Delta_2\right\} = \mathbf{E}\left[X_1(t) \cdot 1\!\!\mathrm{I}\left\{\frac{1}{X_1(t)} \in \Delta_1,\ -\frac{X_2(t)}{X_1^2(t)} \in \Delta_2\right\}\right] =$$
$$= \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} v_1 \cdot 1\!\!\mathrm{I}\left\{\frac{1}{v_1} \in \Delta_1,\ -\frac{v_2}{v_1^2} \in \Delta_2\right\} \cdot \pi[X_1(t), X_2(t)](v_1, v_2)\, dv_1\, dv_2 =$$
$$= \begin{bmatrix} z_1 = \frac{1}{v_1} \\ z_2 = -\frac{v_2}{v_1^2} \end{bmatrix} = \int_{\Delta_1}\int_{\Delta_2} \frac{1}{z_1^5} \cdot \pi[X_1(t), X_2(t)]\left(\frac{1}{z_1}, -\frac{z_2}{z_1^2}\right)\, dz_1\, dz_2.$$

Звідси та із зауваження 3.2.8 випливає, що спільний розподіл випадкових величин $p_t(0)$ і $p_t'(0)$ має щільність і для неї має місце представлення

$$\pi[p_t(0), p_t'(0)](z_1, z_2) = \frac{1}{z_1^5} \cdot \pi[X_1(t), X_2(t)]\left(\frac{1}{z_1}, \frac{z_2}{z_1^2}\right), \quad z_1 > 0, \quad z_2 \in \mathbb{R}. \tag{3.16}$$

Тому з леми 3.2.7 ми отримуємо, що при $z_1 > 0$ і $z_2 \in \mathbb{R}$

$$\pi[p_t(0), p_t'(0)](z_1, z_2) = \frac{1}{z_1^5} \cdot \frac{e^{\frac{\pi^2}{2L't} - \frac{L't}{8}}}{\pi\sqrt{2\pi L''t}} \cdot \sqrt{z_1} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{v^2}{2L't}} \operatorname{sh} v \sin \frac{\pi v}{L't}}{\left(\frac{1 + 2z_1 \operatorname{ch} v + z_1^2}{z_1^2} + \frac{L'}{L''} \cdot \frac{z_2^2}{z_1^4}\right)^{3/2}}\, dv =$$
$$= \frac{e^{\frac{\pi^2}{2L't} - \frac{L't}{8}}}{\pi\sqrt{2\pi L''t}} \cdot z_1^{3/2} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{v^2}{2L't}} \operatorname{sh} v \sin \frac{\pi v}{L't}}{\left((z_1^2 + 2z_1^3 \operatorname{ch} v + z_1^4) + \frac{L'}{L''} z_2^2\right)^{3/2}}\, dv.$$

Залишається помітити, що, згідно з лемою 3.1.9, щільність спільного розподілу $p_t(u)$ і $p_t'(u)$ не залежить від $u \in \mathbb{R}$. $\square$

Зауваження 3.2.10. Щільність спільного розподілу випадкових величин $p_t(u)$ і $p_t'(u)$ симетрична за другою змінною:

$$\pi[p_t(u), p_t'(u)](z_1, -z_2) = \pi[p_t(u), p_t'(u)](z_1, z_2), \quad z_1 > 0, \quad z_2 \in \mathbb{R}.$$

3.3 Інтенсивність перетинів рівня випадковим процесом p_t

Згідно з лемою 3.1.9, випадковий процес $\{p_t(u),\ u \in \mathbb{R}\}$ є стаціонарним (у вузькому сенсі), а згідно з теоремою 3.2.3, всі його одновимірні розподіли неперервні. Звідси випливає (див. [38, стор. 146 – 147]), що для будь-якого $c \in \mathbb{R}$ він майже напевно не дорівнює тотожно c ні на якому відрізку і, отже, для нього коректно визначені число $N_t([0;1];c)$ перетинів рівня c на відрізку $[0;1]$ і інтенсивність $\mu_t(c)$ перетинів цього рівня.

Теорема 3.3.1. *Для всіх $t > 0$ справедливе співвідношення*

$$\mu_t(c) = \frac{\sqrt{2L''} \cdot e^{\frac{\pi^2}{2L't} - \frac{L't}{8}}}{\pi L' \sqrt{\pi t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{v^2}{2L't}} \operatorname{sh} v \sin \frac{\pi v}{L't}}{\sqrt{1 + \frac{2 \operatorname{ch} v}{c} + \frac{1}{c^2}}}\, dv \qquad \text{\textit{для п. в.} } c > 0.$$

Доведення. Легко бачити, що випадковий процес $\{p_t(u),\ u \in [0;1]\}$ задовольняє умови теореми 3.0.2, а отже,

$$\mu_t(c) = \overline{\mu}_t(c) \qquad \text{для м. в. } c > 0,$$

де

$$\overline{\mu}_t(c) := \int\limits_0^1 \mathbf{E}(|p_t'(u)| \mid p_t(u) = c) \cdot \pi[p_t(u)](c)\, du.$$

Однак, згідно з теоремою 3.2.9 та завдяки строгій додатності щільності $\pi[p_t(u)](z)$ при $z > 0$, яка випливає з теореми 3.2.3, і зауваженню 3.2.10, ми маємо

$$\int_0^1 \mathbf{E}(|p_t'(u)| \mid p_t(u)=c)\cdot\pi[p_t(u)](c)\,du =$$

$$= \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} |z|\cdot\pi[p_t(u),p_t'(u)](c,z)\,dz\,du = 2\int_0^{+\infty} z\cdot\pi[p_t(0),p_t'(0)](c,z)\,dz$$

і, отже,

$$\overline{\mu}_t(c) = 2\int_0^{+\infty} z\cdot\pi[p_t(0),p_t'(0)](c,z)\,dz. \tag{3.17}$$

Тому, згідно з тією ж теоремою 3.2.9,

$$\overline{\mu}_t(c) = 2\int_0^{+\infty}\left[\frac{e^{\frac{\pi^2}{2L't}-\frac{L't}{8}}}{\pi\sqrt{2\pi L''t}}\cdot z\cdot\int_0^{+\infty}\frac{c^{3/2}e^{-\frac{v^2}{2L't}}\operatorname{sh}v\sin\frac{\pi v}{L't}}{\left((c^2+2c^3\operatorname{ch}v+c^4)+\frac{L'}{L''}z^2\right)^{3/2}}\,dv\right]dz =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\cdot e^{\frac{\pi^2}{2L't}-\frac{L't}{8}}}{\pi\sqrt{\pi L''t}}\cdot c^{3/2}\cdot\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}\frac{z\,dz}{\left((c^2+2c^3\operatorname{ch}v+c^4)+\frac{L'}{L''}z^2\right)^{3/2}}\right]\times$$

$$\times e^{-\frac{v^2}{2L't}}\operatorname{sh}v\sin\frac{\pi v}{L't}\,dv.$$

А оскільки для будь-яких $A, B > 0$

$$\int_0^{+\infty}\frac{z\,dz}{(A+Bz^2)^{3/2}} = \frac{1}{B\sqrt{A}},$$

то остаточно ми отримуємо

$$\overline{\mu}_t(c) = \frac{\sqrt{2}\cdot e^{\frac{\pi^2}{2L't}-\frac{L't}{8}}}{\pi\sqrt{\pi L''t}}\cdot c^{3/2}\cdot\int_0^{+\infty}\frac{L''e^{-\frac{v^2}{2L't}}\operatorname{sh}v\sin\frac{\pi v}{L't}}{L'\sqrt{c^2+2c^3\operatorname{ch}v+c^4}}\,dv =$$

$$= \frac{\sqrt{2L''}\cdot e^{\frac{\pi^2}{2L't}-\frac{L't}{8}}}{\pi L'\sqrt{\pi t}}\cdot\frac{1}{\sqrt{c}}\cdot\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\frac{v^2}{2L't}}\operatorname{sh}v\sin\frac{\pi v}{L't}}{\sqrt{1+\frac{2\operatorname{ch}v}{c}+\frac{1}{c^2}}}\,dv. \qquad \square$$

Знаходження асимптотики $\overline{\mu}_t(c)$ при $c\to+\infty$ прямими аналітичними методами представляється важким. Тим не менш, цю асимптотику вдається встановити за допомогою ймовірнісного підходу.

Теорема 3.3.2. *Для будь-якого $t > 0$ справедливе співвідношення*

$$\overline{\mu}_t(c) = \frac{e^{-\frac{L't}{8}}\sqrt{L''}}{\pi\sqrt{2L'}} \cdot \sqrt{\frac{c}{\ln c}} \cdot \exp\left[-\frac{(\ln c)^2}{2L't}\right] \cdot (1 + \overline{o}(1)), \quad c \to +\infty.$$

Доведення. З рівностей (3.17) і (3.16) ми отримуємо

$$\overline{\mu}_t(c) = 2\int\limits_0^{+\infty} z \cdot \pi[p_t(0), p_t'(0)](c, z)\,dz =$$

$$= \frac{2}{c^5} \cdot \int\limits_0^{+\infty} z \cdot \pi[X_1(t), X_2(t)]\left(\frac{1}{c}, \frac{z}{c^2}\right)\,dz =$$

$$= \frac{2}{c} \cdot \int\limits_0^{+\infty} z \cdot \pi[X_1(t), X_2(t)]\left(\frac{1}{c}, z\right)\,dz.$$

Помітимо, що оскільки

$$\int\limits_0^{+\infty} z \cdot \pi[X_1(t), X_2(t)]\left(\frac{1}{c}, z\right)\,dz = \pi[X_1(t)]\left(\frac{1}{c}\right) \cdot \mathbf{E}\left((X_2(t))_+ \,\middle|\, X_1(t) = \frac{1}{c}\right),$$

де

$$(z)_+ := \begin{cases} z, & z \geqslant 0, \\ 0, & z < 0, \end{cases}$$

то

$$\overline{\mu}_t(c) = \frac{2}{c} \cdot \pi[X_1(t)]\left(\frac{1}{c}\right) \cdot \mathbf{E}\left((X_2(t))_+ \,\middle|\, X_1(t) = \frac{1}{c}\right) =$$

$$= \frac{2}{c} \cdot \pi[X_1(t)]\left(\frac{1}{c}\right) \cdot \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left[\left(\sqrt{L''}\int\limits_0^t X_1(s)\,dW_2(s)\right)_+ \,\middle|\, X_1\right] \,\middle|\, X_1(t) = \frac{1}{c}\right).$$

При цьому стандартними міркуваннями, що використовують наближення стохастичного інтеграла частковими сумами, незалежність випадкового процесу X_1 від вінерового процесу W_2 і той факт, що якщо $\xi \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2)$, то

$$\mathbf{E}(\xi)_+ = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}},$$

можна показати, що

$$\mathbf{E}\left(\left(\sqrt{L''}\int_0^t X_1(s)\,dW_2(s)\right)_+\Bigg|\,X_1\right)=\frac{\sqrt{L''}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left(\int_0^t X_1^2(s)\,ds\right)^{1/2}.$$

Отже,

$$\overline{\mu}_t(c)=\frac{2}{c}\cdot\pi[X_1(t)]\left(\frac{1}{c}\right)\cdot\frac{\sqrt{L''}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\mathbf{E}\left(\left(\int_0^t X_1^2(s)\,ds\right)^{1/2}\Bigg|\,X_1(t)=\frac{1}{c}\right).$$

Однак

$$\mathbf{E}\left(\left(\int_0^t X_1^2(s)\,ds\right)^{1/2}\Bigg|\,X_1(t)=\frac{1}{c}\right)=$$

$$=\mathbf{E}\left(\left(\int_0^t \exp\left[-L's+2\sqrt{L'}\left(\frac{s}{t}W_1(t)+\widetilde{B}(s)\right)\right]\,ds\right)^{1/2}\Bigg|\,W_1(t)=\frac{L't-2\ln c}{2\sqrt{L'}}\right),$$

де

$$\widetilde{B}(s):=W_1(s)-\frac{s}{t}W_1(t),\quad 0\leqslant s\leqslant t.$$

Оскільки випадковий процес $\{\widetilde{B}(s),\ 0\leqslant s\leqslant t\}$ не залежить від випадкової величини $W_1(t)$, то

$$\mathbf{E}\left(\left(\int_0^t X_1^2(s)\,ds\right)^{1/2}\Bigg|\,X_1(t)=\frac{1}{c}\right)=$$

$$=\mathbf{E}\left(\int_0^t \exp\left[-L's+2\sqrt{L'}\cdot\frac{s}{t}\cdot\frac{L't-2\ln c}{2\sqrt{L'}}+2\sqrt{L'}\widetilde{B}(s)\right]\,ds\right)^{1/2}=$$

$$=\mathbf{E}\left(\int_0^t \exp\left[-2\ln c\cdot\frac{s}{t}+2\sqrt{L'}\widetilde{B}(s)\right]\,ds\right)^{1/2}.$$

Покладемо

$$B(s):=\frac{1}{\sqrt{t}}\widetilde{B}(st),\quad 0\leqslant s\leqslant 1.$$

Тоді $\{B(s),\ 0 \leqslant s \leqslant 1\}$ — стандартний броунівський міст і

$$\mathbf{E}\left(\int\limits_0^t \exp\left[-2\ln c\cdot\frac{s}{t}+2\sqrt{L'}\widetilde{B}(s)\right]\,ds\right)^{1/2} =$$

$$= \mathbf{E}\left(\int\limits_0^t \exp\left[-2\ln c\cdot\frac{s}{t}+2\sqrt{L'}\cdot\sqrt{t}B\left(\frac{s}{t}\right)\right]\,ds\right)^{1/2} =$$

$$= \sqrt{t}\cdot\mathbf{E}\left(\int\limits_0^1 \exp\left[-2\ln c\cdot s+2\sqrt{L't}\cdot B(s)\right]\,ds\right)^{1/2}.$$

Означимо тепер функції $h_c\colon [0;1]\to\mathbb{R}$, $c>1$, рівністю

$$h_c(s) := \frac{2c^2\ln c}{c^2-1}\cdot e^{-2\ln c\cdot s},\quad 0\leqslant s\leqslant 1,\quad c>1,$$

і помітимо, що вони задовольняють наступні умови:

1) $h_c(s)\geqslant 0$, $s\in[0;1]$, $c>1$;

2) $\int\limits_0^1 h_c(s)\,ds = 1$, $c>1$;

3) $\forall\,\varepsilon\in(0;1):\quad \lim\limits_{c\to+\infty}\int\limits_\varepsilon^1 h_c(s)\,ds = 0.$

Тому

$$\lim_{c\to+\infty}\int\limits_0^1 h_c(s)e^{2\sqrt{L't}\cdot B(s)}\,ds = e^{2\sqrt{L't}\cdot B(0)} = 1.$$

Оскільки же для будь-якого $n\geqslant 1$ ми маємо

$$\mathbf{E}\sup_{c>1}\left(\int\limits_0^1 h_c(s)e^{2\sqrt{L't}\cdot B(s)}\,ds\right)^n \leqslant \mathbf{E}\sup_{c>1}\left(\int\limits_0^1 h_c(s)\,ds\cdot e^{2\sqrt{L't}\cdot\max\limits_{0\leqslant s\leqslant 1}B(s)}\right)^n =$$

$$= \mathbf{E}\sup_{c>1} e^{2n\sqrt{L't}\cdot\max\limits_{0\leqslant s\leqslant 1}B(s)} = \mathbf{E}e^{2n\sqrt{L't}\cdot\max\limits_{0\leqslant s\leqslant 1}B(s)} < +\infty,$$

то сімейство випадкових величин

$$\left(\int_0^1 h_c(s) e^{2\sqrt{L't}\cdot B(s)}\, ds \right)^{1/2}, \quad c > 1,$$

є рівномірно інтегровним і, отже,

$$\lim_{c\to+\infty} \mathbf{E} \left(\int_0^1 h_c(s) e^{2\sqrt{L't}\cdot B(s)}\, ds \right)^{1/2} = \mathbf{E} \lim_{c\to+\infty} \left(\int_0^1 h_c(s) e^{2\sqrt{L't}\cdot B(s)}\, ds \right)^{1/2} = 1.$$

Тому

$$\mathbf{E} \left(\int_0^1 \exp\left[-2\ln c\cdot s + 2\sqrt{L't} B(s) \right] ds \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2\ln c}} \cdot (1 + \overline{o}(1)), \quad c\to+\infty.$$

Таким чином, враховуючи наслідок 3.2.2, ми остаточно отримуємо

$$\overline{\mu}_t(c) = \frac{2}{c}\cdot \frac{e^{-\frac{L't}{8}}}{\sqrt{2\pi L't}} \cdot c^{3/2}\cdot \exp\left[-\frac{(\ln c)^2}{2L't} \right] \cdot \frac{\sqrt{L''}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{t}\cdot \frac{1}{\sqrt{2\ln c}} \cdot (1+\overline{o}(1)) =$$
$$= \frac{e^{-\frac{L't}{8}} \sqrt{L''}}{\pi\sqrt{2L'}} \cdot \sqrt{\frac{c}{\ln c}} \cdot \exp\left[-\frac{(\ln c)^2}{2L't} \right] \cdot (1+\overline{o}(1)), \quad c\to+\infty,$$

що і треба було довести. □

Висновки до розділу 3

1. Доведено стаціонарність випадкового процесу, породженого щільністю образу міри Лебега під дією дифеоморфного потоку Харріса, та знайдено спільний розподіл цієї щільності і її похідної.

2. Обчислено інтенсивність перетинів рівня вказаним випадковим процесом та встановлено її асимптотичну поведінку при прямуванні висоти рівня до нескінченності.

Розділ 4

Розподіл числа кластерів у потоці Арратья

В цьому розділі ми розглядаємо потік Арратья $\{x(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$, який представляє собою одновимірний стохастичний потік броунівських частинок, в котрому будь-які дві частинки рухаються незалежно до моменту зустрічі, у момент зустрічі склеюються і після цього рухаються разом. Нагадаємо, що з формальної точки зору потік Арратья є потоком Харріса з коваріаційною функцією $\Gamma = 1\!\!\mathrm{I}_{\{0\}}$.

Потік Арратья був введений в дисертації [2] та вивчався багатьма авторами (див., наприклад, [14], [15], [25], [63], [69], [73] тощо). Зокрема, у 1984 році Т. Е. Харріс [25] довів, що образ кожної компактної множини $K \subset \mathbb{R}$ під дією потоку Арратья складається зі скінченного числа елементів майже напевно для кожного додатного моменту часу. З цього випливає, що

$$\forall\, t > 0 \quad \forall\, u > 0: \quad \mathbf{P}\left\{\nu_t([0;u]) < +\infty\right\} = 1,$$

де $\nu_t([0;u])$ — число елементів множини $x([0;u],t)$, тобто

$$\nu_t([0;u]) := \left|x([0;u],t)\right|.$$

Таким чином, виникає природне питання знаходження розподілу $\nu_t([0;u])$. Однак, наскільки нам відомо, це питання ще не було вирішене остаточно. Серед результатів, що відносяться до нього, приведемо наступні.

У статті [49] вивчалася асимптотична поведінка рівномірної відстані на одиничному відрізку між відображеннями, породженими потоком Арратья (більш загально, довільним потоком Харріса, що задовольняє деякі умови) та тотожним відображенням. Зокрема, було доведено, що

$$\lim_{t\to 0+}\left(\frac{1}{\sqrt{t\ln\frac{1}{t}}}\sup_{0\leqslant u\leqslant 1}|x(u,t)-u|\right)=1 \quad \text{м. н.} \tag{4.1}$$

Із цього співвідношення ми можемо легко отримати, що

$$\varliminf_{t\to 0+}\left(2\sqrt{t\ln\frac{1}{t}}\cdot\nu_t([0;1])\right)\geqslant 1 \quad \text{м. н.} \tag{4.2}$$

Дійсно, якщо $\nu_t([0;1])=k$, то принаймні два з $k+1$ броунівських рухів

$$x\left(0,\cdot\right),\ x\left(\frac{1}{k},\cdot\right),\ x\left(\frac{2}{k},\cdot\right),\ \ldots,\ x\left(\frac{k-1}{k},\cdot\right),\ x\left(1,\cdot\right)$$

склеюються до моменту часу t (інакше ми би мали $\nu_t([0;1])\geqslant k+1$). Тому для деякого $i_0\in\{0,1,2,\ldots,k-1\}$

$$x\left(\frac{i_0}{k},t\right)=x\left(\frac{i_0+1}{k},t\right),$$

і, отже,

$$\max\left\{\left|x\left(\frac{i_0}{k},t\right)-\frac{i_0}{k}\right|,\left|x\left(\frac{i_0+1}{k},t\right)-\frac{i_0+1}{k}\right|\right\}\geqslant\frac{1}{2k}.$$

Таким чином, ми маємо

$$\sup_{0\leqslant u\leqslant 1}|x(u,t)-u|\geqslant\frac{1}{2\nu_t([0;1])}, \tag{4.3}$$

і (4.2) випливає з (4.1) і (4.3).

У статті [24] було знайдено представлення (у вигляді суми за бінарними лісами) для дії напівгрупи n-точкових рухів потоку Арратья на функції з ядра його генератора. Хоча це дозоляє отримати формулу для ймовірностей $\mathbf{P}\left(A^{(n)}_{i_1 i_2\ldots i_{k-1}}\right)$ з формули (4.4) нижче, її складність не дозволяє знайти їхню асимптотичну поведінку при $n\to\infty$, що є необхідним для знаходження границі в (4.4).

У статті [53] був відкритий зв'язок між лінійно впорядкованими системами частинок, що склеюються (або анігілюють), та пфаффіанами. Зокрема, автори доводять, що кластери потоку Арратья (який вони називають системою броунівських рухів, що склеюються, при максимальному вхідному законі) утворюють пфаффовий точковий процес, та знаходять його ядро (детальніше про це див. [53]; пор. [52]). Однак явно розподіл числа кластерів в цій роботі не був знайдений. При цьому в роботі А. Сошнікова [50] наводиться формула (див. [50, формула (6)]) з неопублікованої замітки Г. Ольшанського [45] для підрахунку ймовірності у правій частині рівності (4.4), наведеної нижче. Але в ній фігурує так званий пфаффіан Фредгольма, який у випадку, що розглядається, не піддається обчисленню. В протилежність цьому ми наводимо явний вираз для цієї ймовірності.

У цьому розділі ми представляємо два можливих підходи до знаходження розподілу $\nu_t([0;u])$. Обидва з них засновані на рівності

$$\mathbf{P}\left\{\nu_t([0;u]) = k\right\} = \lim_{n\to\infty} \sum \mathbf{P}\left(A^{(n)}_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}\right), \tag{4.4}$$

де

$$A^{(n)}_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}} := \left\{ x(0,t) = x\left(\frac{i_1 u}{2^n}, t\right) \neq x\left(\frac{(i_1+1)u}{2^n}, t\right) = x\left(\frac{i_2 u}{2^n}, t\right) \neq \right.$$
$$\left. \neq x\left(\frac{(i_2+1)u}{2^n}, t\right) = \ldots = x\left(\frac{i_{k-1} u}{2^n}, t\right) \neq x\left(\frac{(i_{k-1}+1)u}{2^n}, t\right) = x(u,t) \right\},$$

і сума береться за всіма індексами $i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}$, такими, що

$$1 \leqslant i_1 < i_1 + 1 < i_2 < i_2 + 1 < \ldots < i_{k-1} < i_{k-1} + 1 \leqslant 2^n - 1. \tag{4.5}$$

Для того, щоб довести її, треба помітити, що рівність (4.4) з сумою, що береться за всіма індексами $i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}$, які задовольняють умову

$$0 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{k-1} \leqslant 2^n - 1$$

замість (4.5), безпосередньо випливає з відповідної рівності для індикаторів подій замість їхніх ймовірностей та що різниця між двома сумами може бути оцінена зверху виразом

$$\sum_{i=0}^{2^n-2} \mathbf{P}\left\{ x\left(\frac{iu}{2^n}, t\right) \neq x\left(\frac{(i+1)u}{2^n}, t\right) \neq x\left(\frac{(i+2)u}{2^n}, t\right) \right\}. \tag{4.6}$$

Використовуючи формулу Карліна–Макгрегора (див. нижче теорему 4.1.1), можна легко показати, що (4.6) прямує до нуля при $n \to \infty$.

Перший підхід, який описується у підрозділі 4.1, складається з представлення кожної ймовірності $\mathbf{P}\left(A^{(n)}_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}\right)$ у правій частині (4.4) як алгебраїчної суми ймовірностей подій

$$\left\{x\left(\frac{j_1 u}{2^n}, t\right) \neq x\left(\frac{j_2 u}{2^n}, t\right) \neq \ldots \neq x\left(\frac{j_l u}{2^n}, t\right)\right\}, \quad j_1 < j_2 < \ldots < j_l,$$

та подальшого обчислення цих ймовірностей за допомогою формули Карліна–Макгрегора. Хоча можна показати, що так можна зробити для всіх $k \geqslant 2$, це представлення, взагалі кажучи, не є єдиним, і оскільки складність цих представлень швидко зростає (наприклад, у випадку, коли $k = 4$ одне з можливих представлень для ймовірності $\mathbf{P}\left(A^{(n)}_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}\right)$ складається з шістнадцяти доданків, що мають вигляд інтегралів від детермінантів різного порядку від 4×4 до 8×8), то здається важким знайти спосіб його запису, що дозволив би знайти границю в (4.4) у загальному випадку. Тому ми розглянемо лише випадок, коли $k = 2$.

Другий підхід, описаний у підрозділі 4.2, заснований на представленні кожної ймовірності $\mathbf{P}\left(A^{(n)}_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}\right)$ у вигляді пфаффіана деякої антисиметричної матриці. Відповідне представлення було отримане у згаданій вище статті [53].

В підрозділі 4.3 ми обчислюємо середнє значення $\nu_t([0; u])$. Це можна легко зробити інтегруванням одноточкової щільності пфаффового точкового процесу, утвореного кластерами потоку Арратья (див. зауваження 4.3.4). Однак, це середнє значення також може бути обчислене за допомогою загального часу вільного пробігу частинок у потоці Арратья. Це поняття було вперше введене у [63] як частина побудови стохастичного інтегралу за потоком Арратья, а його елементарні властивості у більш загальній постановці вивчалися у [65].

Зауваження 4.0.1. Якщо явно не сказане інше, всюди нижче ми завжди вважаємо u і t деякими фіксованими строго додатними дійсними числами.

4.1 Розподіл числа кластерів та формула Карліна–Макгрегора

Для початку нагадаємо формулу Карліна–Макгрегора, яка дає детермінантне представлення для щільності розподілу броунівських рухів, що не перетинаються. (Для двох непустих множин $A, B \subset \mathbb{R}$ нерівність $A < B$ значить, що $z_1 < z_2$ для всіх $z_1 \in A$, $z_2 \in B$.)

Теорема 4.1.1. [31] *Нехай $w_1, \ldots, w_n$ — незалежні броунівські рухи, які стартують з деяких точок $u_1 < \ldots < u_n$. Тоді ймовірність $P_t(u_1, \ldots, u_n; A_1, \ldots, A_n)$, що в момент часу $t > 0$ ці броунівські рухи знаходяться у деяких непустих борелівських множинах $A_1 < \ldots < A_n$ і ніякі два з них не перетиналися до цього моменту часу включно, представляється формулою*

$$P_t(u_1, \ldots, u_n; A_1, \ldots, A_n) =$$
$$= \int\limits_{\Delta_n} \begin{vmatrix} p_t(v_1 - u_1) & \cdots & p_t(v_1 - u_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_t(v_n - u_1) & \cdots & p_t(v_n - u_n) \end{vmatrix} 1\!\!\mathrm{I} v_1 \in A_1, \ldots, v_n \in A_n \, dv_1 \ldots dv_n,$$

де

$$\Delta_n := \{(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R} \mid v_1 \leqslant \ldots \leqslant v_n\}$$

та

$$p_t(v) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{v^2}{2t}}, \quad v \in \mathbb{R}.$$

Ми також будемо використовувати наступний добре відомий результат.

Лема 4.1.2. *Для будь-яких $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$, $u_1 < u_2$,*

$$\mathbf{P}\left\{x(u_1, t) \neq x(u_2, t)\right\} = \int\limits_{-(u_2-u_1)/\sqrt{2}}^{(u_2-u_1)/\sqrt{2}} p_t(v)\, dv.$$

Доведення. Ця рівність може бути отримана безпосередньо з формули Карліна–Макгрегора чи помічаючи, що

$$\mathbf{P}\left\{x(u_1, t) \neq x(u_2, t)\right\} = \mathbf{P}\left\{\tau_w\left(-\frac{u_2 - u_1}{\sqrt{2}}\right) > t\right\},$$

де $\tau_w(c)$ — момент першого виходу стандартного броунівського руху w, що стартує з нуля, на деякий рівень $c \in \mathbb{R}$. $\square$

Теорема 4.1.3. *Ми маємо*

$$\mathbf{P}\{\nu_t([0;u]) = 2\} = \frac{u}{\sqrt{\pi t}} - \int\limits_0^u \int\limits_{\Delta_3} \begin{vmatrix} p_t(v_1) & p_t'(v_1 - r) & p_t(v_1 - r) \\ p_t(v_2) & p_t'(v_2 - r) & p_t(v_2 - r) \\ p_t(v_3) & p_t'(v_3 - r) & p_t(v_3 - r) \end{vmatrix} \begin{matrix} dv_1 \\ dv_2 \\ dv_3 \end{matrix} dr -$$

$$- \int\limits_0^u \int\limits_{\Delta_3} \begin{vmatrix} p_t'(v_1 - r) & p_t(v_1 - r) & p_t(v_1 - u) \\ p_t'(v_2 - r) & p_t(v_2 - r) & p_t(v_2 - u) \\ p_t'(v_3 - r) & p_t(v_3 - r) & p_t(v_3 - u) \end{vmatrix} \begin{matrix} dv_1 \\ dv_2 \\ dv_3 \end{matrix} dr +$$

$$+ \int\limits_0^u \int\limits_{\Delta_4} \begin{vmatrix} p_t(v_1) & p_t'(v_1 - r) & p_t(v_1 - r) & p_t(v_1 - u) \\ p_t(v_2) & p_t'(v_2 - r) & p_t(v_2 - r) & p_t(v_2 - u) \\ p_t(v_3) & p_t'(v_3 - r) & p_t(v_3 - r) & p_t(v_3 - u) \\ p_t(v_4) & p_t'(v_4 - r) & p_t(v_4 - r) & p_t(v_4 - u) \end{vmatrix} \begin{matrix} dv_1 \\ dv_2 \\ dv_3 \\ dv_4 \end{matrix} dr.$$

Доведення. Рівність (4.4) зараз має вигляд

$$\mathbf{P}\{\nu_t([0;u]) = 2\} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2^n - 2} \mathbf{P}\left\{x(0,t) = x\left(\frac{iu}{2^n}, t\right) \neq x\left(\frac{(i+1)u}{2^n}, t\right) = x(u,t)\right\}.$$

Помітимо, що

$$\mathbf{P}\left\{x(0,t) = x\left(\frac{iu}{2^n}, t\right) \neq x\left(\frac{(i+1)u}{2^n}, t\right) = x(u,t)\right\} =$$
$$= \mathbf{P}\left\{x\left(\frac{iu}{2^n}, t\right) \neq x\left(\frac{(i+1)u}{2^n}, t\right)\right\} -$$
$$- \mathbf{P}\left\{x(0,t) \neq x\left(\frac{iu}{2^n}, t\right) \neq x\left(\frac{(i+1)u}{2^n}, t\right)\right\} -$$
$$- \mathbf{P}\left\{x\left(\frac{iu}{2^n}, t\right) \neq x\left(\frac{(i+1)u}{2^n}, t\right) \neq x(u,t)\right\} +$$
$$+ \mathbf{P}\left\{x(0,t) \neq x\left(\frac{iu}{2^n}, t\right) \neq x\left(\frac{(i+1)u}{2^n}, t\right) \neq x(u,t)\right\}.$$

Тому

$$\mathbf{P}\{\nu_t([0;u]) = 2\} = I_1 - I_2 - I_3 + I_4,$$

де

$$I_1 := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2^n-2} \mathbf{P}\left\{ x\left(\frac{iu}{2^n}, t\right) \neq x\left(\frac{(i+1)u}{2^n}, t\right) \right\},$$

$$I_2 := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2^n-2} \mathbf{P}\left\{ x(0,t) \neq x\left(\frac{iu}{2^n}, t\right) \neq x\left(\frac{(i+1)u}{2^n}, t\right) \right\},$$

$$I_3 := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2^n-2} \mathbf{P}\left\{ x\left(\frac{iu}{2^n}, t\right) \neq x\left(\frac{(i+1)u}{2^n}, t\right) \neq x(u,t) \right\},$$

$$I_4 := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2^n-2} \mathbf{P}\left\{ x(0,t) \neq x\left(\frac{iu}{2^n}, t\right) \neq x\left(\frac{(i+1)u}{2^n}, t\right) \neq x(u,t) \right\}.$$

Для першого доданку за лемою 4.1.2 ми отримуємо

$$I_1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2^n-2} \int\limits_{-u/(2^n\sqrt{2})}^{u/(2^n\sqrt{2})} p_t(v)\, dv = u\sqrt{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^n}{u\sqrt{2}} \int\limits_{-u/(2^n\sqrt{2})}^{u/(2^n\sqrt{2})} p_t(v)\, dv \right) = \frac{u}{\sqrt{\pi t}}.$$

Для того, щоб обчислити другий доданок, ми помічаємо, що за формулою Карліна–Макгрегора

$$\mathbf{P}\left\{ x(0,t) \neq x\left(\frac{iu}{2^n}, t\right) \neq x\left(\frac{(i+1)u}{2^n}, t\right) \right\} =$$

$$= \int\limits_{\Delta_3} \begin{vmatrix} p_t(v_1) & p_t\left(v_1 - \frac{iu}{2^n}\right) & p_t\left(v_1 - \frac{(i+1)u}{2^n}\right) \\ p_t(v_2) & p_t\left(v_2 - \frac{iu}{2^n}\right) & p_t\left(v_2 - \frac{(i+1)u}{2^n}\right) \\ p_t(v_3) & p_t\left(v_3 - \frac{iu}{2^n}\right) & p_t\left(v_3 - \frac{(i+1)u}{2^n}\right) \end{vmatrix} \begin{matrix} dv_1 \\ dv_2 \\ dv_3 \end{matrix} =$$

$$= \frac{u}{2^n} \int\limits_{\Delta_3} \begin{vmatrix} p_t(v_1) & \frac{2^n}{u} \cdot \Delta p_t\left(v_1 - \frac{iu}{2^n}\right) & p_t\left(v_1 - \frac{iu}{2^n}\right) \\ p_t(v_2) & \frac{2^n}{u} \cdot \Delta p_t\left(v_2 - \frac{iu}{2^n}\right) & p_t\left(v_2 - \frac{iu}{2^n}\right) \\ p_t(v_3) & \frac{2^n}{u} \cdot \Delta p_t\left(v_3 - \frac{iu}{2^n}\right) & p_t\left(v_3 - \frac{iu}{2^n}\right) \end{vmatrix} \begin{matrix} dv_1 \\ dv_2 \\ dv_3 \end{matrix} =$$

$$= \frac{u}{2^n} \int\limits_{\Delta_3} \begin{vmatrix} p_t(v_1) & \frac{2^n}{u} \cdot \Delta p_t\left(v_1 - \frac{iu}{2^n}\right) - p_t'\left(v_1 - \frac{iu}{2^n}\right) & p_t\left(v_1 - \frac{iu}{2^n}\right) \\ p_t(v_2) & \frac{2^n}{u} \cdot \Delta p_t\left(v_2 - \frac{iu}{2^n}\right) - p_t'\left(v_2 - \frac{iu}{2^n}\right) & p_t\left(v_2 - \frac{iu}{2^n}\right) \\ p_t(v_3) & \frac{2^n}{u} \cdot \Delta p_t\left(v_3 - \frac{iu}{2^n}\right) - p_t'\left(v_3 - \frac{iu}{2^n}\right) & p_t\left(v_3 - \frac{iu}{2^n}\right) \end{vmatrix} \begin{matrix} dv_1 \\ dv_2 \\ dv_3 \end{matrix} +$$

$$+ \frac{u}{2^n} \int\limits_{\Delta_3} \begin{vmatrix} p_t(v_1) & p_t'\left(v_1 - \frac{iu}{2^n}\right) & p_t\left(v_1 - \frac{iu}{2^n}\right) \\ p_t(v_2) & p_t'\left(v_2 - \frac{iu}{2^n}\right) & p_t\left(v_2 - \frac{iu}{2^n}\right) \\ p_t(v_3) & p_t'\left(v_3 - \frac{iu}{2^n}\right) & p_t\left(v_3 - \frac{iu}{2^n}\right) \end{vmatrix} \begin{matrix} dv_1 \\ dv_2, \\ dv_3 \end{matrix}$$

де ми поклали

$$\Delta p_t\left(v_j-\frac{iu}{2^n}\right):=p_t\left(v_j-\frac{iu}{2^n}\right)-p_t\left(v_j-\frac{(i+1)u}{2^n}\right),\quad j=1,2,3.$$

Однак, використовуючи розклад Тейлора, можна легко показати, що

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{2^n-2}\frac{u}{2^n}\int\limits_{\Delta_3}\begin{vmatrix}p_t(v_1) & \frac{2^n}{u}\cdot\Delta p_t\left(v_1-\frac{iu}{2^n}\right)-p_t'\left(v_1-\frac{iu}{2^n}\right) & p_t\left(v_1-\frac{iu}{2^n}\right)\\ p_t(v_2) & \frac{2^n}{u}\cdot\Delta p_t\left(v_2-\frac{iu}{2^n}\right)-p_t'\left(v_2-\frac{iu}{2^n}\right) & p_t\left(v_2-\frac{iu}{2^n}\right)\\ p_t(v_3) & \frac{2^n}{u}\cdot\Delta p_t\left(v_3-\frac{iu}{2^n}\right)-p_t'\left(v_3-\frac{iu}{2^n}\right) & p_t\left(v_3-\frac{iu}{2^n}\right)\end{vmatrix}\begin{matrix}dv_1\\ dv_2\\ dv_3\end{matrix}=0.$$

Таким чином, ми отримуємо, що

$$I_2=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{2^n-2}\frac{u}{2^n}\int\limits_{\Delta_3}\begin{vmatrix}p_t(v_1) & p_t'\left(v_1-\frac{iu}{2^n}\right) & p_t\left(v_1-\frac{iu}{2^n}\right)\\ p_t(v_2) & p_t'\left(v_2-\frac{iu}{2^n}\right) & p_t\left(v_2-\frac{iu}{2^n}\right)\\ p_t(v_3) & p_t'\left(v_3-\frac{iu}{2^n}\right) & p_t\left(v_3-\frac{iu}{2^n}\right)\end{vmatrix}\begin{matrix}dv_1\\ dv_2\\ dv_3\end{matrix}=$$

$$=\int\limits_0^u\int\limits_{\Delta_3}\begin{vmatrix}p_t(v_1) & p_t'(v_1-r) & p_t(v_1-r)\\ p_t(v_2) & p_t'(v_2-r) & p_t(v_2-r)\\ p_t(v_3) & p_t'(v_3-r) & p_t(v_3-r)\end{vmatrix}\begin{matrix}dv_1\\ dv_2\\ dv_3\end{matrix}dr.$$

Доданки I_3 і I_4 можуть бути обчислені аналогічно.

Теорема доведена. □

На множині $\{\nu_t([0;u])=2\}$ ми можемо означити θ як єдину точку розриву відображення $x(\cdot,t)\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ на відрізку $[0;u]$ і ξ_1 і ξ_2 як нижній та верхній кластери в образі $x([0;u],t)$ відповідно.

Теорема 4.1.4. *Для всіх борелівських множин $A\subset[0;u]$ і $B_1,B_2\subset\mathbb{R}$, таких, що $B_1<B_2$, ми маємо*

$$\mathbf{P}\left\{\nu_t([0;u])=2,\ \theta\in A,\ \xi_1\in B_1,\ \xi_2\in B_2\right\}=$$

$$=\int\limits_A\int\limits_{\Delta_2}\begin{vmatrix}p_t'(v_1-r) & p_t(v_1-r)\\ p_t'(v_2-r) & p_t(v_2-r)\end{vmatrix}\,1\!\!\mathrm{I}\begin{Bmatrix}v_1\in B_1,\\ v_2\in B_2\end{Bmatrix}\begin{matrix}dv_1\\ dv_2\end{matrix}dr-$$

$$-\int\limits_A\int\limits_{\Delta_3}\begin{vmatrix}p_t(v_1) & p_t'(v_1-r) & p_t(v_1-r)\\ p_t(v_2) & p_t'(v_2-r) & p_t(v_2-r)\\ p_t(v_3) & p_t'(v_3-r) & p_t(v_3-r)\end{vmatrix}\,1\!\!\mathrm{I}\begin{Bmatrix}v_2\in B_1,\\ v_3\in B_2\end{Bmatrix}\begin{matrix}dv_1\\ dv_2\\ dv_3\end{matrix}dr-$$

$$
-\int\limits_A \int\limits_{\Delta_3} \begin{vmatrix} p'_t(v_1-r) & p_t(v_1-r) & p_t(v_1-u) \\ p'_t(v_2-r) & p_t(v_2-r) & p_t(v_2-u) \\ p'_t(v_3-r) & p_t(v_3-r) & p_t(v_3-u) \end{vmatrix} 1\!\!1 \begin{Bmatrix} v_1 \in B_1, \\ v_2 \in B_2 \end{Bmatrix} \begin{matrix} dv_1 \\ dv_2 \\ dv_3 \end{matrix} dr +
$$

$$
+\int\limits_A \int\limits_{\Delta_4} \begin{vmatrix} p_t(v_1) & p'_t(v_1-r) & p_t(v_1-r) & p_t(v_1-u) \\ p_t(v_2) & p'_t(v_2-r) & p_t(v_2-r) & p_t(v_2-u) \\ p_t(v_3) & p'_t(v_3-r) & p_t(v_3-r) & p_t(v_3-u) \\ p_t(v_4) & p'_t(v_4-r) & p_t(v_4-r) & p_t(v_4-u) \end{vmatrix} 1\!\!1 \begin{Bmatrix} v_2 \in B_1, \\ v_3 \in B_2 \end{Bmatrix} \begin{matrix} dv_1 \\ dv_2 \\ dv_3 \\ dv_4 \end{matrix} dr.
$$

Доведення. Очевидно, достатньо розглянути випадок, коли A є відрізком. В цьому випадку ми маємо

$$
\mathbf{P}\left\{\nu_t([0;u]) = 2,\ \theta \in A,\ \xi_1 \in B_1,\ \xi_2 \in B_2\right\} =
$$

$$
= \lim_{n\to\infty} \sum \mathbf{P} \begin{Bmatrix} x(0,t) = x\left(\frac{iu}{2^n}, t\right) \neq x\left(\frac{(i+1)u}{2^n}, t\right) = x(u,t), \\ x\left(\frac{iu}{2^n}, t\right) \in B_1,\ x\left(\frac{(i+1)u}{2^n}, t\right) \in B_2 \end{Bmatrix},
$$

де сума береться по всім індексам $i \in \{1, \ldots, 2^n - 2\}$, таким, що

$$
\left[\frac{iu}{2^n}; \frac{(i+1)u}{2^n}\right] \subset A.
$$

Залишається помітити, що

$$
\mathbf{P} \begin{Bmatrix} x(0,t) = x\left(\frac{iu}{2^n}, t\right) \neq x\left(\frac{(i+1)u}{2^n}, t\right) = x(u,t), \\ x\left(\frac{iu}{2^n}, t\right) \in B_1,\ x\left(\frac{(i+1)u}{2^n}, t\right) \in B_2 \end{Bmatrix} =
$$

$$
= \mathbf{P} \begin{Bmatrix} x\left(\frac{iu}{2^n}, t\right) \neq x\left(\frac{(i+1)u}{2^n}, t\right), \\ x\left(\frac{iu}{2^n}, t\right) \in B_1,\ x\left(\frac{(i+1)u}{2^n}, t\right) \in B_2 \end{Bmatrix} -
$$

$$
- \mathbf{P} \begin{Bmatrix} x(0,t) \neq x\left(\frac{iu}{2^n}, t\right) \neq x\left(\frac{(i+1)u}{2^n}, t\right), \\ x\left(\frac{iu}{2^n}, t\right) \in B_1,\ x\left(\frac{(i+1)u}{2^n}, t\right) \in B_2 \end{Bmatrix} -
$$

$$
- \mathbf{P} \begin{Bmatrix} x\left(\frac{iu}{2^n}, t\right) \neq x\left(\frac{(i+1)u}{2^n}, t\right) \neq x(u,t), \\ x\left(\frac{iu}{2^n}, t\right) \in B_1,\ x\left(\frac{(i+1)u}{2^n}, t\right) \in B_2 \end{Bmatrix} +
$$

$$
+ \mathbf{P} \begin{Bmatrix} x(0,t) \neq x\left(\frac{iu}{2^n}, t\right) \neq x\left(\frac{(i+1)u}{2^n}, t\right) \neq x(u,t), \\ x\left(\frac{iu}{2^n}, t\right) \in B_1,\ x\left(\frac{(i+1)u}{2^n}, t\right) \in B_2 \end{Bmatrix},
$$

і продовжити далі так само, як в доведенні теореми 4.1.3 (використовуючи формулу Карліна–Макгрегора також і для першого доданка, замість леми 4.1.2). □

Зауваження 4.1.5. У випадку, коли $k \geqslant 3$, цей підхід дозволяє знайти лише розподіл $k-1$ точок розриву (без k точок множини $x([0;u],t)$).

4.2 Розподіл числа кластерів та пфаффіани

Для початку нагадаємо означення пфаффіана та його елементарні властивості, які ми будемо використовувати (детальніше про пфаффіани див. [51], [41]).

Означення 4.2.1. *Пфаффіан* $\mathrm{Pf}\,(A)$ антисиметричної матриці $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{2n}$ порядку $2n$ означається як

$$\mathrm{Pf}\,(A) = \sum_{\sigma} \operatorname{sign} \sigma \cdot a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \ldots a_{i_n j_n}, \tag{4.7}$$

де сума береться по всім перестановкам

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 2n-1 & 2n \\ i_1 & j_1 & i_2 & j_2 & \cdots & i_n & j_n \end{pmatrix}$$

таким, що $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$ і $i_k < j_k$ для всіх $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Згідно з цим означенням ми маємо

$$\mathrm{Pf} \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = a,$$

$$\mathrm{Pf} \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix} = af - be + cd.$$

Зауваження 4.2.2. Надалі ми будемо опускати елементи антисиметричних матриць під діагоналлю.

Те, що пфаффіан означений лише для антисиметричних матриць парного порядку, обґрунтовується першим твердженням теореми 4.2.3 та тим, що детермінант антисиметричної матриці непарного порядку дорівнює нулю. Друге твердження теореми 4.2.3 буде використане в доведенні теореми 4.2.5 (та теореми 4.2.6) нижче. Доведення теореми 4.2.3 можна знайти, наприклад, в [51].

Теорема 4.2.3. *(i) Якщо A — антисиметрична матриця парного порядку, то*

$$\det A = (\operatorname{Pf}(A))^2.$$

(ii) Якщо A — антисиметрична матриця парного порядку і B — квадратна матриця того самого порядку, то матриця $B^T AB$ є антисиметричною і

$$\operatorname{Pf}\left(B^T AB\right) = \det B \cdot \operatorname{Pf}(A). \tag{4.8}$$

Означимо тепер декілька допоміжних матриць. Перш за все, нехай $\mathbf{O}_{2n}$, $\widehat{\mathbf{I}}_{2n}$ і $\mathbf{I}_{2n}(\lambda)$ з $\lambda \in \mathbb{R}$ є матрицями порядку $2n$ наступного вигляду:

$$(\mathbf{O}_{2n})_{ij} := \begin{cases} +1, & \text{якщо } i = 2, 4, \ldots, 2n-2 \text{ та } j = i+1, \\ -1, & \text{якщо } i = 3, 5, \ldots, 2n-1 \text{ та } j = i-1, \\ 0, & \text{інакше;} \end{cases}$$

$$(\widehat{\mathbf{I}}_{2n})_{ij} := \begin{cases} +1, & \text{якщо } i = j, \\ -1, & \text{якщо } i = 2, 4, \ldots, 2n-2 \text{ та } j = i+1, \\ 0, & \text{інакше;} \end{cases}$$

$$(\mathbf{I}_{2n}(\lambda))_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j \text{ та } i \neq 3, 5, \ldots, 2n-1, \\ \lambda, & \text{якщо } i = j \text{ та } i = 3, 5, \ldots, 2n-1, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Зауважимо, що

$$\det(\widehat{\mathbf{I}}_{2n}) = 1, \tag{4.9}$$

$$\det(\mathbf{I}_{2n}(\lambda)) = \lambda^{n-1}. \tag{4.10}$$

Також для $u_1 \leqslant \ldots \leqslant u_{2n}$ нехай $\mathbf{F}_t \equiv \mathbf{F}_t(u_1, \ldots, u_{2n})$ є антисиметричною матрицею порядку $2n$ з елементами над діагоналлю

$$(\mathbf{F}_t)_{ij} := F_t(u_j - u_i), \quad 1 \leqslant i < j \leqslant 2n,$$

де

$$F_t(z) := 2 \int\limits_{z/\sqrt{2}}^{+\infty} p_t(v)\, dv, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Нарешті, для $r_0 \leqslant r_1 \leqslant \ldots \leqslant r_k \leqslant r_{k+1}$ нехай $\widehat{\mathbf{F}}_t \equiv \widehat{\mathbf{F}}_t(r_0, r_1, \ldots, r_k, r_{k+1})$ є антисиметричною матрицею порядку $2k+2$ з елементами над діагоналлю

$$(\widehat{\mathbf{F}}_t)_{ij} := \begin{cases} F_t(r_{[j/2]} - r_{[i/2]}), & \text{якщо } i \text{ парне або } i = 1, \text{ та } j \text{ парне}, \\ F_t'(r_{[j/2]} - r_{[i/2]}), & \text{якщо } i \text{ парне або } i = 1, \text{ та } j \text{ непарне}, \\ -F_t'(r_{[j/2]} - r_{[i/2]}), & \text{якщо } i \text{ непарне}, i \neq 1 \text{ та } j \text{ парне}, \\ -F_t''(r_{[j/2]} - r_{[i/2]}), & \text{якщо } i \text{ непарне}, i \neq 1 \text{ та } j \text{ непарне}. \end{cases}$$

Лема 4.2.4. [53] *Нехай $N_t([a;b])$ позначає число частинок потоку Арратьа, які знаходяться у відрізку $[a;b]$ у момент часу t. Тоді для всіх $n \geqslant 1$ і $u_1 < \ldots < u_{2n}$ ми маємо*

$$\mathbf{P}\left\{ \begin{matrix} N_t([u_i; u_{i+1}]) = 0 & \text{для всіх } i = 1, 3, \ldots, 2n-1, \\ N_t([u_i; u_{i+1}]) > 0 & \text{для всіх } i = 2, 4, \ldots, 2n-2 \end{matrix} \right\} =$$
$$= \operatorname{Pf}\left(\mathbf{F}_t(u_1, \ldots, u_{2n}) - \mathbf{O}_{2n}\right).$$

Тепер ми можемо довести основні результати цього підрозділу.

Теорема 4.2.5. *Для всіх $k \geqslant 1$ ми маємо*

$$\mathbf{P}\left\{\nu_t([0;u]) = k+1\right\} = \int\limits_{\Delta_k(u)} \cdots \int \operatorname{Pf}\left(\widehat{\mathbf{F}}_t(0, r_1, \ldots, r_k, u)\right) dr_1 \ldots dr_k,$$

де

$$\Delta_k(u) := \{(r_1, \ldots, r_k) \in \mathbb{R}^k \mid 0 \leqslant r_1 \leqslant \ldots \leqslant r_k \leqslant u\}.$$

Доведення. Переходячи до двоїстого потоку (наприклад, див. розділ 2.2 в роботі [53] та посилання в ній), легко побачити, що ймовірність події $A^{(n)}_{i_1 i_2 \dots i_k}$ збігається з ймовірністю події

$$\left\{\begin{array}{ll} N_t\left(\left[\dfrac{(i_l+1)u}{2^n}; \dfrac{i_{l+1}u}{2^n}\right]\right) = 0 & \text{для всіх } l = 0, 1, 2, \dots, k, \\ N_t\left(\left[\dfrac{i_l u}{2^n}; \dfrac{(i_l+1)u}{2^n}\right]\right) > 0 & \text{для всіх } l = 1, 2, \dots, k \end{array}\right\},$$

де ми поклали $i_0 := -1$ і $i_{k+1} := 2^n$. Обчислюючи останню за допомогою леми 4.2.4, ми отримуємо, що

$$\mathbf{P}(A^{(n)}_{i_1 i_2 \dots i_k}) = \operatorname{Pf}\left(\mathbf{F}_t - \mathbf{O}_{2k+2}\right),$$

де

$$\mathbf{F}_t = \mathbf{F}_t\left(0, \frac{i_1 u}{2^n}, \frac{(i_1+1)u}{2^n}, \frac{i_2 u}{2^n}, \frac{(i_2+1)u}{2^n}, \dots, \frac{i_k u}{2^n}, \frac{(i_k+1)u}{2^n}, u\right).$$

Тому з рівностей (4.8), (4.9) і (4.10) випливає, що

$$\mathbf{P}\left\{\nu_t([0;u]) = k+1\right\} = \lim_{n\to\infty} \sum \operatorname{Pf}\left(\mathbf{F}_t - \mathbf{O}_{2k+2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum \left(\frac{u}{2^n}\right)^k \operatorname{Pf}\left(\mathbf{I}^T_{2k+2}(2^n/u) \cdot \widehat{\mathbf{I}}^T_{2k+2} \cdot [\mathbf{F}_t - \mathbf{O}_{2k+2}] \cdot \widehat{\mathbf{I}}_{2k+2} \cdot \mathbf{I}_{2k+2}(2^n/u)\right).$$

Нарешті, ми помічаємо, що матриця

$$\mathbf{I}^T_{2k+2}(2^n/u) \cdot \widehat{\mathbf{I}}^T_{2k+2} \cdot [\mathbf{F}_t - \mathbf{O}_{2k+2}] \cdot \widehat{\mathbf{I}}_{2k+2} \cdot \mathbf{I}_{2k+2}(2^n/u)$$

має першу і другу різниці функції F_t на тих самих місцях, на яких матриця $\widehat{\mathbf{F}}_t$ має першу та другу похідну (і з тими самими знаками). Таким чином, розкриваючи пфаффіани за допомогою (4.7), помічаючи, що границя кожної суми є інтегралом та переписуючи результат як інтеграл від пфаффіана, ми приходимо до потрібної формули. □

Таким чином, ми, наприклад, маємо

$$\mathbf{P}\left\{\nu_t([0;u]) = 2\right\} = \int\limits_0^u \operatorname{Pf}\begin{pmatrix} 0 & F_t(r) & F_t'(r) & F_t(u) \\ & 0 & F_t'(0) & F_t(u-r) \\ & & 0 & -F_t'(u-r) \\ & & & 0 \end{pmatrix} dr$$

та

$$\mathbf{P}\left\{\nu_t([0;u])=3\right\}=$$

$$=\iint\limits_{\Delta_2(u)} \mathrm{Pf}\begin{pmatrix} 0 & F_t(r_1) & F_t'(r_1) & F_t(r_2) & F_t'(r_2) & F_t(u) \\ & 0 & F_t'(0) & F_t(r_2-r_1) & F_t'(r_2-r_1) & F_t(u-r_1) \\ & & 0 & -F_t'(r_2-r_1) & -F_t''(r_2-r_1) & -F_t'(u-r_1) \\ & & & 0 & F_t'(0) & F_t(u-r_2) \\ & & & & 0 & -F_t'(u-r_2) \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} dr_1 \\ dr_2 \end{matrix}.$$

Тепер на множині $\{\nu_t([0;u])=k+1\}$ означимо $\theta_1,\ldots,\theta_k\in[0;u]$, $\theta_1<\ldots<\theta_k$, як точки розриву відображення $x(\cdot,t)\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ на відрізку $[0;u]$.

Теорема 4.2.6. *Для всіх* $k\geqslant 1$ *та непустих борелівських множин* $A_1,\ldots,A_k\subset[0;u]$, *таких, що* $A_1<\ldots<A_k$, *ми маємо*

$$\mathbf{P}\left\{\nu_t([0;u])=k+1,\ \theta_1\in A_1,\ \ldots,\ \theta_k\in A_k\right\}=$$
$$=\int\limits_{A_1\times\ldots\times A_k}\!\!\cdots\!\int \mathrm{Pf}\left(\widehat{\mathbf{F}}_t(0,r_1,\ldots,r_k,u)\right)dr_1\ldots dr_k.$$

Доведення. Очевидно, достатньо розглянути випадок, коли множини $A_1,\ldots,A_k$ є відрізками (які не перетинаються). В цьому випадку ми помічаємо, що ймовірність події

$$\{\nu_t([0;u])=k+1,\ \theta_1\in A_1,\ \ldots,\ \theta_k\in A_k\}$$

дорівнює границі в правій частині (4.4) (з $k+1$ замість k), в якій сума береться по всім індексам $i_1,i_2,\ldots,i_k$, які задовольняють (4.5) та таким, що

$$\left[\frac{i_l u}{2^n};\frac{(i_l+1)u}{2^n}\right]\subset A_l\quad\text{для всіх } l=1,2,\ldots,k.$$

Продовжуючи далі так само, як і в доведенні теореми 4.2.5, ми отримуємо бажаний результат. □

4.3 Середнє значення числа кластерів

Для $n \geqslant 2$ різних, але не обов'язково впорядкованих, точок $u_1, u_2, \dots, u_n \in [0; u]$ покладемо

$$\begin{aligned} &\tau_1 := t, \\ &\tau_k := t \wedge \inf \left\{ s \geqslant 0 \;\middle|\; \prod_{j=1}^{k-1} (x(u_k, s) - x(u_j, s)) = 0 \right\}, \quad 2 \leqslant k \leqslant n, \end{aligned} \tag{4.11}$$

де інфімум пустої множини вважається рівним $+\infty$. Кожне τ_k дорівнює часу, який частинка з індексом k проводить до моменту t перед тим, як склеюється з однією з частинок з меншим індексом, або t, якщо такого склеювання не було. Тому природно називати суму

$$S_t(\{u_1, u_2, \dots, u_n\}) := \sum_{k=1}^{n} \tau_k$$

загальним часом вільного пробігу частинок, що стартують з $u_1, u_2, \dots, u_n$ (до моменту часу t).

Можна перевірити (див. [63]), що $S_t(\{u_1, u_2, \dots, u_n\})$ не залежить від порядку початкових точок (що обґрунтовує використання звичайної множини замість впорядкованої у позначенні), а тому

$$S_t(\{u_1, u_2, \dots, u_n\}) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k,$$

де σ_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, означені як в (4.11), але для впорядкування $u_{(1)} < u_{(2)} < \dots < u_{(n)}$ точок $u_1, u_2, \dots, u_n$.

Крім того,

$$S_t(\{u_1, u_2, \dots, u_n\}) = \int_0^t \nu_s(\{u_1, u_2, \dots, u_n\})\, ds, \tag{4.12}$$

де

$$\nu_s(\{u_1, u_2, \dots, u_n\}) := |x(\{u_1, u_2, \dots, u_n\}, s)|, \quad 0 < s \leqslant t.$$

Теорема 4.3.1. [63] *Для будь-якої всюди щільної зліченної підмножини* $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\} \subset [0; u]$ *майже напевно існує границя*

$$\lim_{n \to \infty} S_t(\{u_1, u_2, \dots, u_n\}). \tag{4.13}$$

Більше того, ця границя не залежить від вибору підмножини U.

Випадкова величина $S_t([0;u])$, означена границею (4.13), називається *загальним часом вільного пробігу* частинок відрізку $[0;u]$ до моменту часу t.

Використовуючи теорему Лебега про монотонну збіжність, з рівності (4.12) ми отримуємо, що

$$S_t([0;u]) = \int_0^t \nu_s([0;u])\,ds. \tag{4.14}$$

Теорема 4.3.2. [63] *Середнє значення $S_t([0;u])$ задається формулою*

$$\mathbf{E}S_t([0;u]) = t + \frac{2u\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}.$$

Доведення. Нехай $\{u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots\}$ — довільна всюди щільна зліченна підмножина відрізку $[0;u]$. Тоді

$$\mathbf{E}S_t([0;u]) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}S_t(\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}) = t + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \mathbf{E}\sigma_k.$$

Тепер для $v_1 < v_2$ покладемо

$$\tau := \inf\{s \geqslant 0 \mid x(v_1, s) = x(v_2, s)\}.$$

Тоді за лемою 4.1.2

$$\mathbf{P}\left\{\tau \geqslant s\right\} = \mathbf{P}\left\{\tau > s\right\} = \mathbf{P}\left\{x(v_1, s) \neq x(v_2, s)\right\} = \int_{-(v_2-v_1)/\sqrt{2}}^{(v_2-v_1)/\sqrt{2}} p_s(v)\,dv,$$

і тому

$$\mathbf{E}(\tau \wedge t) = \int_0^{+\infty} \mathbf{P}\left\{\tau \wedge t \geqslant s\right\}\,ds = \int_0^t \mathbf{P}\left\{\tau \geqslant s\right\}\,ds = \int_0^t \int_{-(v_2-v_1)/\sqrt{2}}^{(v_2-v_1)/\sqrt{2}} p_s(v)\,dv\,ds.$$

Таким чином, поклавши

$$\widetilde{\Delta} u_{(k)} := \frac{u_{(k)} - u_{(k-1)}}{\sqrt{2}},$$

ми отримуємо

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\mathbf{E}\sigma_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\int\limits_0^t\int\limits_{-\widetilde{\Delta}u_{(k)}}^{\widetilde{\Delta}u_{(k)}} p_s(v)\,dv\,ds =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\int\limits_0^t 2\widetilde{\Delta}u_{(k)}\left(\frac{1}{2\widetilde{\Delta}u_{(k)}}\int\limits_{-\widetilde{\Delta}u_{(k)}}^{\widetilde{\Delta}u_{(k)}} p_s(v)\,dv\right)ds = \int\limits_0^t \frac{\sqrt{2}u}{\sqrt{2\pi s}}\,ds = \frac{2u\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}.$$

Теорема доведена. □

Теорема 4.3.3. *Ми маємо*

$$\mathbf{E}\nu_t([0;u]) = 1 + \frac{u}{\sqrt{\pi t}}.$$

Доведення. Оскільки $\nu_t([0;u])$ (а отже і $\mathbf{E}\nu_t([0;u])$) не зростає за t, потрібна рівність безпосередньо випливає з (4.14) і теореми 4.3.2. □

Зауваження 4.3.4. Відзначимо, що середнє значення $\nu_t([0;u])$ можна легко обчислити за допомогою одноточкових щільностей пфаффового точкового процесу, породженого кластерами потоку Арратья. Дійсно, в [53] було доведено, що ядро цього пфаффового точкового процесу має вигляд

$$K_t(v_1,v_2) := \frac{1}{\sqrt{t}}K\left(\frac{v_1}{\sqrt{t}},\frac{v_2}{\sqrt{t}}\right),$$

де

$$K(v_1,v_2) := \begin{pmatrix} -F''(v_2-v_1) & -F'(v_2-v_1) \\ F'(v_2-v_1) & \operatorname{sign} v_2-v_1\cdot F(|v_2-v_1|) \end{pmatrix}$$

з функцією F, яка задається формулою

$$F(z) := \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_z^{+\infty} e^{-r^2/4}\,dr\,(\equiv F_1(z)), \quad z\in\mathbb{R}$$

(відповідні означення див. в роботі [53] та в посиланнях у ній; доведення існування n-точкової щільності див. в [43]). Зокрема, з цього випливає, що

$$\mathbf{E}\nu_t([0;u]) = 1 + \mathbf{E}N_t([0;u]) = 1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\int\limits_0^u \operatorname{Pf}\left(K\left(\frac{v}{\sqrt{t}},\frac{v}{\sqrt{t}}\right)\right)dv = 1 + \frac{u}{\sqrt{\pi t}}.$$

Висновки до розділу 4

1. За допомогою формули Карліна–Макгрегора обчислена ймовірність того, що образ відрізка під дією потоку Арратья в заданий додатній момент часу складається з двох елементів.

2. За допомогою відомих пфаффових формул для випадкових точкових процесів, породжених потоком Арратья, знайдено розподіл числа елементів образу відрізка під дією цього потоку в будь-який додатній момент часу.

3. На основі зв'язку із загальним часом вільного пробігу частинок потоку Арратья обчислено середнє значення числа елементів образу відрізка під дією цього потоку в будь-який додатній момент часу.

Висновки

У дисертації вивчаються властивості броунівських стохастичних потоків, які слугують математичною моделлю при описанні руху лінійно впорядкованих систем частинок, що взаємодіють між собою.

Основні результати даної дисертаційної роботи наступні:

- знайдено асимптотику моментів відстані між частинками у потоках Харріса та асимптотику моментів їхніх n-точкових рухів;
- встановлено слабку збіжність n-точкових рухів потоків Харріса при наближенні взаємодії між частинками до сингулярної до n-точкових рухів потоку Арратья;
- отримано оцінку відстані Васерштейна між розподілами міри, перенесеної потоком Харріса з майже сингулярною взаємодією між частинками та потоком Арратья;
- обчислена інтенсивність перетинів рівня щільністю образу міри Лебега під дією дифеоморфного броунівського стохастичного потоку та встановлена її асимптотична поведінка при прямуванні висоти рівня до нескінченності;
- знайдено розподіл числа кластерів у потоці Арратья.

Бібліоґрафія

[1] *Adler R. J.* On excursion sets, tube formulas and maxima of random fields // The Annals of Applied Probability **10**:1 (2000) 1–74.

[2] *Arratia R. A.* Coalescing Brownian motions on the line (PhD thesis). — University of Wisconsin, Madison, 1979. — iv+128 p.

[3] *Azaïs J.-M., Wschebor M.* Level sets and extrema of random processes and fields. — John Wiley & Sons, Inc., 2009. — xi+393 p.

[4] *Baudoin F.* An introduction to the geometry of stochastic flows. — Imperial College Press, 2004. — x+140 p.

[5] *Baxendale P., Harris T. E.* Isotropic stochastic flows // The Annals of Probability **14**:4 (1986) 1155–1179.

[6] *Borodin A. N., Salminen P.* Handbook of Brownian motion – facts and formulae. — 2nd ed. — Birkhäuser, 2002. — xvi+658 p.

[7] *Cranston M., Le Jan Y.* Geometric evolution under isotropic stochastic flow // Electronic Journal of Probability **3**:4 (1998) 1–36.

[8] *Cranston M., Le Jan Y.* A central limit theorem for isotropic flows // Stochastic Processes and their Applications **119** (2009) 3767–3784.

[9] *Darling R. W. R.* Constructing nonhomeomorphic stochastic flows // IMA Preprint Series **205**, Institute for Mathematics and its Applications, December 1985. — vi+136 p.

[10] *Darling R. W. R.* Rate of growth of the coalescent set in a coalescing stochastic flow // IMA Preprint Series **249**, Institute for Mathematics and its Applications, July 1986. — iii+51(52) p.

[11] *Dimitroff G., Scheutzow M.* Dispersion of volume under the action of isotropic Brownian flows // Stochastic Processes and their Applications **119** (2009) 588–601.

[12] *Dorogovtsev A. A.* One Brownian stochastic flow // Theory of Stochastic Processes **10**(**26**):3-4 (2004) 21–25.

[13] *Dorogovtsev A. A., Fomichov V. V.* The rate of weak convergence of the n-point motions of Harris flows // Dynamic Systems and Applications **25**:3 (2016) 377–392.

[14] *Dorogovtsev A. A., Gnedin A. V., Vovchanskii M. B.* Iterated logarithm law for sizes of clusters in Arratia flow // Theory of Stochastic Processes **18**(**34**):2 (2012) 1–7.

[15] *Dorogovtsev A. A., Nishchenko I. I.* An analysis of stochastic flows // Communications on Stochastic Analysis **8**:3 (2014) 331–342.

[16] *Dorogovtsev A. A., Ostapenko O. V.* Large deviations for flows of interacting Brownian motions // Stochastics and Dynamics **10**:3 (2010) 315–339.

[17] *Fomichov V. V.* Evolution of moments of isotropic Brownian stochastic flows // Theory of Stochastic Processes **20**(**36**):1 (2015) 14–27.

[18] *Fomichov V. V.* Evolution of moments of isotropic Brownian stochastic flows // International Conference Dedicated to the 80th Anniversary of Prof. A. Ya. Dorogovtsev «Stochastic Processes in Abstract Spaces», October 14–16, 2015, Kyiv, Ukraine: abstract. — P. 14.

[19] *Fomichov V. V.* The distribution of the number of clusters in the Arratia flow // Communications on Stochastic Analysis **10**:3 (2016) 257–270.

[20] *Fomichov V. V.* The rate of weak convergence of the n-point motions of Harris flows // International Workshop in Honour of Prof. V. V. Buldygin

«Limit Theorems in Probability Theory, Number Theory and Mathematical Statistics», October 10–12, 2016, Kyiv, Ukraine: abstract. — P. 19–20.

[21] *Fomichov V. V.* A note on weak convergence of the n-point motions of Harris flows // Theory of Stochastic Processes **21**(**37**):2 (2016) 4–13.

[22] *Fomichov V. V.* Weak convergence of the n-point motions of Harris flows // Міжнародна конференція молодих математиків, присвячена 100-річчю з дня народження академіка Національної академії наук України, професора Ю. О. Митропольського, 7–10 червня, 2017, Київ, Україна: анотація. — С. 115.

[23] *Glinyanaya E. V.* Asymptotics of disordering in the discrete approximation of an Arratia flow // Theory of Stochastic Processes **18**(**34**):2 (2012) 8–14.

[24] *Glinyanaya E. V.* Semigroups of m-point motions of the Arratia flow, and binary forests // Theory of Stochastic Processes **19**(**35**):2 (2014) 31–41.

[25] *Harris T. E.* Coalescing and noncoalescing stochastic flows in R_1 // Stochastic Processes and their Applications **17** (1984) 187–210.

[26] *Ito K.* On stochastic differential equations // Memoirs of the American Mathematical Society **4** (1951) ii+51 p.

[27] *Ito K.* Isotropic random current // Proceedings of the Third Berkeley Symposium, Mathematical Statistics and Probability **2** (1956) 125–132.

[28] *Ito S.* On the canonical form of turbulence // Nagoya Mathematical Journal **2** (1951) 83–92.

[29] *Kallenberg O.* Foundations of modern probability. — 2nd ed. — Springer, 2002. — xx+638 p.

[30] *Karatzas I., Shreve S. E.* Brownian motion and stochastic calculus. — 2nd ed. — Springer-Verlag, 1991. — xxiv+470.

[31] *Karlin S., McGregor J.* Coincidence probabilities // Pacific Journal of Mathematics **9**:4 (1959) 1141–1164.

[32] *Konarovskyi V.* On asymptotic behavior of the modified Arratia flow // Electronic Journal of Probability **22**:19 (2017) 1–31.

[33] *Korenovska I. A.* Random maps and Kolmogorov widths // Theory of Stochastic Processes **20**(**36**):1 (2015) 78–83.

[34] *Kotelenez P.* A class of quasilinear stochastic partial differential equations of McKean–Vlasov type with mass conservation // Probability Theory and Related Fields **102**:2 (1995) 159–188.

[35] *Kunita H.* Stochastic flows and stochastic differential equations. — Cambridge University Press, 1990. — xiv+346 p.

[36] *Kuo H.-H.* Gaussian measures in Banach spaces. — Lecture Notes in Mathematics **463**, Springer-Verlag, 1975. — vi+224 p.

[37] *Lagunova M. P.* Stochastic differential equations with interaction and the law of iterated logarithm // Theory of Stochastic Processes **18**(**34**):2 (2012) 54–58.

[38] *Leadbetter M. R., Lindgren G., Rootzén H.* Extremes and related properties of random sequences and processes. — Springer-Verlag, 1983. — xii+336 p.

[39] *Leadbetter M. R., Spaniolo G. V.* Reflections on Rice's formulae for level crossings – history, extensions and use // Australian and New Zealand Journal of Statistics **46**:1 (2004) 173–180.

[40] *Le Jan Y.* On isotropic Brownian motions // Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete **70** (1985) 609–620.

[41] *Lomont J. S., Cheema M. S.* Properties of Pfaffians // Rocky Mountain Journal of Mathematics **15**:2 (1985) 493–512.

[42] *Matsumoto H.* Coalescing stochastic flows on the real line // Osaka Journal of Mathematics **26**:1 (1989) 139–158.

[43] *Munasinghe R., Rajesh R., Tribe R., Zaboronski O.* Multi-scaling of the n-point density function for coalescing Brownian motions // Communications in Mathematical Physics **268** (2006) 717–725.

[44] *Nishchenko I. I.* Discrete time approximation of coalescing stochastic flows on the real line // Theory of Stochastic Processes **17**(**33**):1 (2011) 70–78.

[45] *Olshanski G.* Pfaffian processes (2002). (неопублікована замітка)

[46] *Pilipenko A.* An introduction to stochastic differential equations with reflection. — Lectures in Pure and Applied Mathematics 1, Potsdam University Press, 2014. — x+76 pp.

[47] *Piterbarg V. V.* Expansions and contractions of isotropic stochastic flows of homeomorphisms // The Annals of Probability **26**:2 (1998) 479–499.

[48] *Robertson H. P.* The invariant theory of isotropic turbulence // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **36**:2 (1940) 209–223.

[49] *Shamov A.* Short-time asymptotics of one-dimensional Harris flows // Communications on Stochastic Analysis **5**:3 (2011) 527–539.

[50] *Soshnikov A.* Janossy densities. II. Pfaffian ensembles // Journal of Statistical Physics **113**:3-4 (2003) 611–622.

[51] *Stembridge J. R.* Nonintersecting paths, Pfaffians, and plane partitions // Advances in Mathematics **83** (1990) 96–131.

[52] *Tribe R., Yip S. K., Zaboronski O.* One dimensional annihilating and coalescing particle systems as extended Pfaffian point processes // Electronic Communications in Probability **17**:40 (2012) 1–7.

[53] *Tribe R., Zaboronski O.* Pfaffian formulae for one dimensional coalescing and annihilating systems // Electronic Journal of Probability **16** (2011) 2080–2103.

[54] *Tsirelson B.* Scaling limit, noise, stability. — In: Lectures on Probability Theory and Statistics. École d'été de probabilités de Saint-Flour XXXII–2002. — Lecture Notes in Mathematics **1840**, Springer, 2004. — pp. 1–106.

[55] *Vadlamani S., Adler R. J.* Global geometry under isotropic Brownian flows // Electronic Communications in Probability **11** (2006) 182–192.

[56] *Villani C.* Optimal transport. — Springer, 2009. — xxii+973 p.

[57] *Walsh J. B.* An introduction to stochastic partial differential equations. — In: École d'été de probabilités de Saint-Flour XIV–1984. — Lecture Notes in Mathematics **1180**, Springer, 1986. — pp. 265–439.

[58] *Zirbel C. L.* Stochastic flows: dispersion of a mass distribution and Lagrangian observations of a random field (PhD thesis). — Princeton University, 1993. — 162 p.

[59] *Zirbel C. L., Çinlar E.* Mass transport by Brownian flows. — In: Stochastic models in geosystems. — Springer, 1997. — pp. 459–492.

[60] *Конаровський В. В.* Система дифузійних частинок із склеюванням змінної маси // Український математичний журнал **62**:1 (2010) 90–103.

[61] *Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А.* Вероятностные распределения в банаховых пространствах. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. — 368 с.

[62] *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. — Киев: Издательство «Наукова думка», 1968. — 354 с.

[63] *Дороговцев А. А.* Мерозначные процессы и стохастические потоки. — Киев: Институт математики НАН Украины, 2007. — 289 с.

[64] *Дороговцев А. А.* Энтропия стохастических потоков // Математический сборник **201**:5 (2010) 17–26.

[65] *Ключников В. В., Вовчанский Н. Б.* О континуальных деревьях, возникающих как траектории систем склеивающихся диффузионных частиц // Математика сегодня **14** (2008) 99–125.

[66] *Кузнецов В. А.* Взаимные углы обхода частиц в броуновских стохастических потоках со старшим показателем Ляпунова, равным нулю // Украинский математический журнал **68**:9 (2016) 1197–1228.

[67] *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы). — М.: Главная редакция

физико-математической литературы издательства «Наука», 1974. — 696 с.

[68] *Лифшиц М. А.* Гауссовские случайные функции. — Киев: ТВiМС, 1995. — 246 с.

[69] *Маловичко Т. В.* О сходимости решений стохастических дифференциальных уравнений к потоку Арратья // Украинский математический журнал **60**:11 (2008) 1529–1538.

[70] *Маловичко Т. В.* Теорема Гирсанова для стохастических потоков со взаимодействием // Украинский математический журнал **61**:3 (2009) 365–383.

[71] *Фомичёв В. В.* Интенсивность пересечений уровня для плотности образа меры Лебега под действием броуновского стохастического потока // Украинский математический журнал **69**:6 (2017) 803–822.

[72] *Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г.* Неравенства. — М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1948. — 456 с.

[73] *Чернега П. П.* Локальное время в нуле для потока Арратья // Украинский математический журнал **64**:4 (2012) 542–556.

[74] *Яглом А. М.* Некоторые классы случайных полей в n-мерном пространстве, родственные стационарным случайным процессам // Теория вероятностей и её применения **2**:3 (1957) 292–338.

Додаток

Основні результати дисертаційної роботи опубліковані в п'яти статтях у фахових виданнях, три з яких у журналах, що індексуються наукометричною базою Scopus, та трьох збірках тез міжнародних конференцій:

1. *Fomichov V. V.* Evolution of moments of isotropic Brownian stochastic flows // Theory of Stochastic Processes **20**(**36**):1 (2015) 14–27.

2. *Dorogovtsev A. A., Fomichov V. V.* The rate of weak convergence of the n-point motions of Harris flows // Dynamic Systems and Applications **25**:3 (2016) 377–392.

3. *Fomichov V.* The distribution of the number of clusters in the Arratia flow // Communications on Stochastic Analysis **10**:3 (2016) 257–270.

4. *Fomichov V. V.* A note on weak convergence of the n-point motions of Harris flows // Theory of Stochastic Processes **21**(**37**):2 (2016) 4–13.

5. *Фомичёв В. В.* Интенсивность пересечений уровня для плотности образа меры Лебега под действием броуновского стохастического потока // Украинский математический журнал **69**:6 (2017) 803–822.

6. *Fomichov V. V.* Evolution of moments of isotropic Brownian stochastic flows // International Conference Dedicated to the 80th Anniversary of Prof. A. Ya. Dorogovtsev «Stochastic Processes in Abstract Spaces», October 14–16, 2015, Kyiv, Ukraine: abstract. — P. 14.

7. *Fomichov V. V.* The rate of weak convergence of the n-point motions of Harris flows // International Workshop in Honour of Prof. V. V. Buldygin «Limit Theorems in Probability Theory, Number Theory and Mathematical Statistics», October 10–12, 2016, Kyiv, Ukraine: abstract. — P. 19–20.

8. *Fomichov V. V.* Weak convergence of the n-point motions of Harris flows // Міжнародна конференція молодих математиків присвячена 100-річчю з дня народження академіка Національної академії наук України, професора Ю. О. Митропольського, 7–10 червня, 2017, Київ, Україна: анотація. — С. 115.

Результати дисертаційної роботи доповідались і обговорювались на наступних конференціях і наукових семінарах:

1. International Conference Dedicated to the 80th Anniversary of Prof. A. Ya. Dorogovtsev «Stochastic Processes in Abstract Spaces», October 14–16, 2015, Kyiv, Ukraine (доповідь);

2. International Workshop in Honour of Prof. V. V. Buldygin «Limit Theorems in Probability Theory, Number Theory and Mathematical Statistics», October 10–12, 2016, Kyiv, Ukraine (доповідь);

3. міжнародна конференція молодих математиків, присвячена 100-річчю з дня народження академіка Національної академії наук України, професора Ю. О. Митропольського, 7–10 червня 2017 року, Київ, Україна (доповідь);

4. науковому семінарі «Числення Маллявена та його застосування» Інституту математики НАН України під керівництвом доктора фізико-математичних наук, професора А. А. Дороговцева (5 доповідей).