ВІДГУК

офіційного опонента
на дисертацію Фомічьова Володимира Володимировича
"Еволюція дифеоморфних броунівських стохастичних потоків"
подану на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика

Актуальність теми дисертації.

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню дифеоморфних броунівських стохастичних потоків зі скінченним радіусом взаємодії між частинками – потоків Харріса (Т.Е. Харріс (1984)), а також вивченню кластерізації потоку Арратья (Р.А. Арратья (1979)), який, в деякому розумінні, є граничним для потоків Харріса.

На сьогоднішній день існує велика кількість робіт із тематики броунівських стохастичних потоків , і величезну роль в розвитку цієї теорії відіграють наукові праці проф. А.А. Дороговцева та його учнів.

Не зважаючи на інтенсивні дослідження броунівських стохастичних потоків, все ще відсутнє повне розуміння пов'язаних з ними ефектів, тобто ця теорія знаходиться зараз у стані створення. Зокрема, залишається відкритим ряд питань, пов'язаних з наближенням потоків із сингулярною взаємодією, якими є потоки Арратья, дифеоморфними броунівськими стохастичними потоками Харріса.

У дисертації наведено відповіді на деякі з цих питань, а саме: досліджено ефект концентрації маси в потоках Харріса з малим радіусом взаємодії між частинками та встановлено слабку збіжність їхніх n-точкових рухів до n-точкових рухів потоку Арратья. Крім цього, вивчено асимптотичну поведінку моментів відстані між частинками та n-точкових рухів для широкого класу броунівських стохастичних потоків і знайдено розподіл числа кластерів у потоці Арратья.

Враховуючи теоретичну важливість досліджень такого роду, слід відзначити тему дисертації як, безсумнівно, актуальну.

Зміст роботи.

Робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку з 74 використаних джерел.

У вступі з достатньою повнотою представлено отримані результати.

У 1-му розділі отримано асимптотичні властивості потоків Харріса при прямуванні часу до нескінченності. Підрозділ 1.1 містить необхідні відомості про загальні броунівські стохастичні потоки та, зокрема, потоки Харріса. Доведено теорему 1.1.9, яка встановлює, що за природної умови до коваріаційної функції (к.ф.) потоку Харріса відстань між будь-якими двома частинками цього потоку прямує до нуля майже напевно (м.н.). У підрозділі 1.2 в теоремі 1.2.2 доведено, що якщо к.ф. потоку Харріса має другу похідну в нулі, то при прямуванні часу до нескінченності відстань між будь-якими двома частинками цього потоку прямує до нуля з експоненціальною швидкістю. За додаткової умови на поведінку к.ф. в теоремі 1.2.6 отримано асимптотику натуральних моментів відстані між будь-якими двома частинками потоку Харріса. У підрозділі 1.3 в теоремі 1.3.3 отримано результат про асимптотику змішаних моментів n-точкових рухів потоку Харріса з неперервною к.ф., яка строго менша за одиницю за межами будь-якого околу нуля.

У 2-му розділі в підрозділі 2.1 узагальнено результати робіт А.А. Дороговцева (2004) та Т.В. Маловічко (2008) про слабку збіжність у просторі $C([0,+\infty))$ n-точкових рухів гладких потоків Харріса до n-точкових рухів потоку Арратья на випадок, коли к.ф. цих потоків Харріса поточково збігаються до к.ф. з носієм нульової міри Лебега (теорема 2.1.3). У доведенні цієї теореми важливу роль грають твердження 2.1.5 та леми 2.1.5, 2.1.7 – 2.1.9.

Основним результатом підрозділу 2.2 є теорема 2.2.1 про швидкість слабкої збіжності n-точкового руху потоків Харріса до n-точкових рухів потоку Арратья, коли діаметри носіїв к.ф. потоків Харріса прямують до нуля, у термінах відстані Васерштейна між розподілами перенесених цими потоками мір. Показано, що відстань Васерштейна може бути обмежена зверху деяким степенем малого діаметра носія к.ф. потоку Харріса. Доведення теореми складається з 3-х кроків. На 1-му кроці початкова ймовірнісна міра μ на дійсній вісі з компактним носієм наближається послідовністю дискретних мір μ^n та оцінюється відповідна відстань Васерштейна між розподілами для довільного броунівського стохастичного потоку (теорема 2.2.3). На 2-му кроці використано деяку рекурсивну процедуру для побудови потрібного каплінгу між дискретними апроксимаціями мір, перенесених потоками Харріса і Арратья, що надає можливість оцінити відстань Васерштейна між розподілами цих мір (леми 2.2.6, 2.2.7, теорема 2.2.8). На 3-му кроці об'єднуються оцінки перших двох кроків і здійснюється оптимізація за n для отримання нерівності теореми 2.2.1.

У 3-му розділі обчислено інтенсивність перетинів рівня щільністю $p_t(u)$ образа міри Лебега під дією дифеоморфного потоку Харріса з гладкою к.ф., що має компактний носій, та встановлено її асимптотичну поведінку при необмеженому зростанні висоти рівня. Підрозділ 3.1 містить доведенення стаціонарності центрованого потоку Харріса та перших двох його похідних за просторовою змінною (теорема 3.1.2, наслідок 3.1.3) та доведення, так званої, θ-однорідності процесу $(p_t(u), p'_t(u))$ (лема 3.1.9).

У підрозділі 3.2 знайдено зручне представлення просторової похідної потоку Харріса (лема 3.2.1) та формулу для щільності цієї похідної (наслідок

3.2.2). З використанням останнього результату та однієї теореми К.Л. Зірбела (1993) в теоремі 3.2.3 виведено формулу для щільності $p_t(u)$, а в наслідку 3.2.5 отримано формулу для ймовірностей великих відхилень цієї щільності. Далі, за допомогою технічних лем 3.2.6, 3.2.7 отримано формулу для сумісної щільності випадкових величин $p_t(u)$ і $p'_t(u)$ (теорема 3.2.9).

У підрозділі 3.3 у теоремі 3.3.1 вказано формулу для інтенсивності перетинів рівня $c > 0$ випадковим процесом $p_t(u), u \in R$, для всіх додатніх t (теорема 3.3.1). У теоремі 3.3.2 описано асимптотичну при $c \to +\infty$ поведінку вказаної інтенсивності перетинів.

4-й розділ роботи присвячено вивченню розподілу числа кластерів у потоці Арратья. У підрозділі 4.1 з використаннями формули Карліна-Макгрегора обчислена ймовірність того, що образ відрізка під дією потоку Арратья в заданий додатній момент часу складається з двох елементів (теорема 4.1.3). У теоремі 4.1.4 розглянуто природне узагальнення попередньої теореми. Обчислення ймовірності того, що образ відрізка складається з $k > 2$ елементів різко ускладнюється при зростанні k, і тому у підрозділі 4.2 для знаходження розподілу образу відрізка під дією потоку Арратья використано техніку пфаффіанів (теорема 4.2.5 та її узагальнення – теорема 4.2.6). У підрозділі 4.3 на основі зв'язку із загальним часом вільного пробігу частинок потоку Арратья обчислено середнє значення числа елементів образу відрізка під дією цього потоку в будь-який момент часу $t > 0$.

Отримані нові наукові результати.

У дисертації отримано такі основні результати.

1) Знайдено асимптотику моментів відстані між частинками у потоках Харріса та асимптотику моментів їхніх n-точкових рухів.

2) Встановлено слабку збіжність в просторі C([0,+∞)) n-точкових рухів потоків Харріса при наближенні взаємодії між частинками до сингулярної – до n-точкових рухів потоку Арратья.

3) Отримано оцінку відстані Васерштейна між розподілами мір, перенесених потоком Харріса з малим радіусом взаємодії між частинками та потоком Арратья.

4) Обчислено інтенсивність перетинів рівня щільністю образу міри Лебега під дією дифеоморфного броунівського стохасичного потоку та встановлена її асимптотична поведінка при прямуванні висоти рівня до нескінченності.

5) Запропоновано два підходи до знаходження розподілу числа кластерів у потоці Арратья, які спираються на застосування формули Карліна-Макгрегора та техніку пфаффіанів.

Обґрунтування отриманих результатів.

Теоретичні результати роботи містяться у перелічених вище теоремах та лемах, строго доведених із ретельним та винахідливим використанням сучасної математичної техніки, яка включає в себе методи теорії ймовірностей, теорії випадкових процесів та функціонального аналізу.

Зауваження.

За текстом роботи необхідно зробити деякі зауваження.

1. Треба було якимось чином пояснити зв'язок теореми 1.2.6 (с. 35) з твердженням теореми 1.2.4 (с. 33-34) для ізотропного броунівського стохастичного потоку, на яке спирається доведення теореми 1.2.6.
2. Не варто було двічі давати означення потоку Харріса рівнянням (2.1) на с. 50 і рівнянням (3.1) на с .78, які співпадають.
3. На с. 80 та с. 111 вводиться одне й те саме позначення для істотно різних математичних об'єктів, які масовано використовуються у 3-му та 4-му розділах роботи.
4. С. 105. Передостання формула останнього рядка є зайвою.
5. С. 122. Мабуть, не треба доводити в тексті дисертації теорему 4.3.2, котру доведено, як вказує автор, в роботі [63].
6. Робота містить деякі описки, на які автору було вказано усно.

Всі названі зауваження мають редакторський характер і жодним чином не можуть вплинути на загальну позитивну оцінку роботи.

Викладення результатів у опублікованих працях та авторефераті.

Основні результати дисератації з достатньою повнотою викладено у 8 наукових публікаціях, серед яких 5 статтей у фахових наукових виданнях та 3 публікації – тези доповідей на міжнародних наукових конференціях. У закордонних виданнях надруковано 2 статті; 3 статті опубліковано у виданнях України, що включено до наукометричної бази SCOPUS.

Результати дослідження належним чином предеставлено в авторефераті, зміст якого – ідентичний з основними положеннями дисертації.

Висновки.

Дисертація є самостійним, логічно завершеним, методологічно і теоретично обґрунтованим, виконаним на високому фаховому рівні науковим дослідженням, яке містить суттєві нові результати в теорії броунівських стохастичних потоків.

Робота є теоретичним дослідженням. Результати автора можна використовувати для читання спеціальних курсів лекцій з теорії випадкових процесів та теорії стохастичних потоків на математичних факультетах провідних університетів України та за кордоном.

Вважаю, що дисертація Фомічьова Володимира Володимировича “Еволюція дифеоморфних броунівських стохастичних потоків”, подана на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика, відповідає вимогам п.п. 9, 10, 12, 13 “Порядку присудження наукових ступенів”, затвердженого Постановою КМУ №567 від 24.07.2013 р. (зі змінами, внесеними згідно з постановами КМУ №656 від 19.08.2015 р. та №1159 від 30.12.2015р.), а її автор, безсумнівно, заслуговує на присудження наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика.

Офіційний опонент
доктор фіз.-мат. наук, професор,
професор кафедри математичного
аналізу та теорії ймовріностей
Національного технічного університету
України “Київський політехнічний
інститут імені Ігоря Сікорського” О.В. Іванов

20 листопада 2017 р.

Учений секретар
КПІ ім. Ігоря Сікорського А.А. Мельниченко

Надійшов до спеціалізованої
вченої ради Д26.206.02 22.11.2017 р.
секретар ради Артеменко Ж.Я.