ВІДГУК

офіційного опонента на дисертацію

Фомічьова Володимира Володимировича

“Еволюція дифеоморфних броунівських стохастичних потоків”,

подану на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

за спеціальністю 01.01.05 — теорія ймовірностей і математична статистика

Дисертаційна робота В. В. Фомічьова присвячена дослідженню актуальних питань, які стосуються теорії стохастичних потоків.

Стохастичні потоки використовуються як математичні моделі систем взаємодіючих частинок, що розглядаються в теорії турбулентності, статистичній механіці, гідрології, океанографії, популяційній генетиці. Найпростіші класи стохастичних потоків можуть бути описані за допомогою розв’язків стохастичних диференціальних рівнянь з регулярними коефіцієнтами. Такі потоки природно трактувати як випадкові аналоги фазових потоків, породжених звичайними диференціальними рівняннями. Результати досліджень, які відносяться до згаданого класу стохастичних потоків підсумовані в монографії Х. Куніти (1990р.). Найбільш відомими прикладами моделей систем броунівських частинок із сингулярною взаємодією є так званий потік Арратья та його узагальнення, що розглядали в своїх роботах D. A. Dawson і H. Wang, А. А. Дороговцев, В. В. Конаровський, М. П. Карликова та ін. Основним припущенням у цих моделях є те, що броунівські частинки, які стартують з усіх точок дійсної прямої і до моменту “зустрічі” рухаються незалежно, після зіткнення склеюються і рухаються разом, проте характер їх руху не змінюється. Важливо зауважити, що така сім’я броунівських рухів вже не може бути описана за допомогою розв’язків класичних стохастичних диференціальних рівнянь. Потік Арратья можна розглядати також як окремий випадок потоку Харріса за умови, що його локальна характеристика є нерегулярною функцією спеціального вигляду (у випадку, коли локальна характеристика потоку Харріса є достатньо гладкою функцією, цей потік може бути отриманий як розв’язок задачі Коші деякого стохастичного диференціального рівняння). Різні підходи до побудови потоку Арратья розглядали в своїх роботах Р. Арратья, C. Newman, K. Ravishankar, R. Sun, I. Norris, A. Turner, А. А. Дороговцев, І. І. Ніщенко та ін.

На сьогоднішній день науковий напрямок, пов’язаний з вивченням стохастичних потоків, і надалі активно розвивається в математичних наукових центрах Франції, Німеччини, Великобританії, а також у відділі теорії випадкових процесів Інституту математики НАН України під керівництвом А. А. Дороговцева. Підтвердженням цього є дисертація В. В. Фомічьова. У ній вивчається ряд ще не досліджених важливих питань, пов'язаних із наближенням стохастичних потоків із сингулярною взаємодією типу потоку Арратья дифеоморфними броунівськими стохастичними потоками.

Отже, запропонована тема дисертації є актуальною як з точки зору загальної теорії випадкових процесів, так і її застосування.

Дисертація складається з анотацій українською та англійською мовами, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаної літератури та додатку.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертації, вказано на зв'язок роботи з науковими програмами, сформульовано мету і завдання дослідження, відзначено наукову новизну та практичне значення отриманих результатів, їх апробацію та публікації, а також наведено короткий зміст роботи.

Перший розділ дисертації присвячений дослідженню асимптотичної поведінки потоків Харріса за умови прямування часової змінної до нескінченності. У підрозділі 1.1, який має назву “Броунівські стохастичні потоки”, наведено означення досліджуваних об'єктів з відповідними прикладами, а також описані деякі їх властивості. Зокрема, тут доведено твердження (Теорема 1.1.9), з якого випливає, що за умови, коли коваріаційна функція потоку Харріса на доповненні будь-якого околу нуля відокремлена від одиниці, відстань між частинками потоку збігається до нуля. У підрозділі 1.2 показано, що при деяких додаткових припущеннях відносно коваріаційної функції відстань між будь-якими двома частинками потоку Харріса збігається до нуля з експоненційною швидкістю (Теорема 1.2.2). Крім цього, тут досліджено також асимптотичну поведінку всіх моментів відстані між двома частинками потоку Харріса (Теорема 1.2.6). Аналогічні питання, але вже по відношенню до змішаних моментів n-точкових рухів потоку Харріса, розглянуто в третьому підрозділі даного розділу. Тут основні результати відображені у твердженнях лем 1.3.1, 1.3.2 та теорем 1.3.3, 1.3.4.

Дослідження властивостей n-точкових рухів потоків Харріса продовжено у другому розділі дисертації, який містить два підрозділи. У першому з них досліджено питання слабкої збіжності n-точкових рухів потоків Харріса до n-точкових рухів потоку Арратья. Цю збіжність встановлено тут за умови, коли коваріаційні функції розглядуваних потоків Харріса поточково збігаються до невід'ємно визначеної функції, носій якої є зліченною множиною. Відповідний результат представлено в теоремі 2.1.3. У підрозділі 2.2 отримано оцінку відстані Васерштейна між розподілами двох випадкових мір, які є образами детермінованої ймовірнісної міри, зосередженої на відрізку $[0;1]$, внаслідок дії потоку Харріса з достатньо малими радіусами взаємодії між частинками та потоку Арратья відповідно. Тут основний результат відображений у твердженні теореми 2.2.1.

Третій розділ присвячено дослідженню явища концентрації міри в броунівських стохастичних потоках. Його підрозділи 3.1 і 3.2 мають допоміжний характер. Зокрема, у підрозділі 3.1 доведено, що дифеоморфний стохастичний потік Харріса є стаціонарним за просторовою змінною (Теорема 3.1.2) і що випадковий процес $\{p_t(u), p_t'(u), u \in R\}$, де p_t означає щільність випадкової міри λ_t, яка є образом одновимірної міри Лебега внаслідок дії даного потоку, володіє властивістю θ-однорідності в розумінні означення 3.1.5 (Лема 3.1.9). Щільність спільного розподілу випадкових величин $p_t(u)$ та $p_t'(u)$ отримано у підрозділі 3.2 (Теорема 3.2.9). У третьому підрозділі на основі допоміжних тверджень, отриманих у попередніх двох підрозділах, обчислено інтенсивність перетинів рівня стаціонарним випадковим процесом p_t, а також встановлено її асимптотику при необмеженому зростанні висоти рівня. Ці основні результати даного розділу сформульовані у вигляді теорем 3.3.1 і 3.3.2.

Важливі результати отримані автором у четвертому розділі дисертації, який присвячено вивченню розподілу числа елементів в образі відрізка внаслідок дії потоку Арратья. Для знаходження цього розподілу автор використовує два підходи. Перший з них, що представлений у підрозділі 4.1, спирається на обчислення відповідних ймовірностей за допомогою формул Карліна – Макрегора. Другий підхід, який описаний у підрозділі 4.2, реалізовано на підставі зображення кожної з шуканих ймовірностей у вигляді інтеграла від пфаффіана деякої антисиметричної матриці. У підрозділі 4.3 для досліджуваного розподілу обчислено також його середнє значення. Відзначені результати сформульовані тут за допомогою теорем 4.1.3, 4.1.4, 4.2.5, 4.2.6 та 4.3.3.

Підсумовуючи наш короткий огляд змісту дисертації, відзначимо, що при встановленні отриманих в ній результатів автор використовує різні достатньо складні методи, ідеї та факти з теорії ймовірностей, функціонального та стохастичного аналізу. Їх широке та грамотне застосування забезпечило високий науковий рівень проведених досліджень.

Перейдемо до загальної оцінки дисертаційної роботи.

1. Тема роботи є актуальною. Вона тісно пов'язана як із попередніми, так і теперішніми дослідженнями, які ведуться у відділі теорії випадкових процесів Інституту математики НАН України.
2. Дисертація є завершеною науково-дослідною працею. У ній отримано нові строго математично обґрунтовані теоретичні результати з теорії випадкових процесів, які можна кваліфікувати як суттєві для розвитку напрямку "Стохастичний аналіз складних систем". Основні результати роботи, які підтверджують цей висновок такі:

- встановлено точну асимптотику відстані між будь-якими двома частинками потоку Харріса з гладкою коваріаційною функцією та всіх її моментів;
- встановлено асимптотичну поведінку всіх змішаних моментів потоків Харріса;
- доведено слабку збіжність n-точкових рухів потоків Харріса до n-точкових рухів потоку Арратья за умови збіжності їх коваріаційних функцій до невід'ємно визначеної функції, носій якої є зліченною множиною;
- отримано оцінку відстані Васерштейна між розподілами випадкових мір на дійсній осі, які є образами ймовірнісної міри, зосередженої на відрізку $[0;1]$, внаслідок дії потоку Харріса з достатньо малими радіусами взаємодії між частинками та потоку Арратья;
- обчислено інтенсивність перетинів рівня для стаціонарного випадкового процесу, породженого щільністю випадкової міри, яка є образом міри Лебега внаслідок дії дифеомофного потоку Харріса, та встановлено її асимптотику при необмеженому зростанні висоти рівня;
- знайдено розподіл і середнє значення числа елементів в образі відрізка внаслідок дії потоку Арратья.

3. Достовірність результатів роботи в цілому не викликає сумніву, ключові моменти в доведеннях сформульованих тверджень викладені повно та детально. До зауважень можна віднести такі:

а) в роботі відсутні доведення деяких допоміжних тверджень (наприклад, твердження 1.2.1, лема 1.3.7, початок доведення теореми 3.1.2). Незважаючи на те, що ці доведення є елементарними або аналогічними до доведень відомих результатів, їх бажано було включити у текст дисертації;

b) в роботі суттєво використовується поняття вінерового листа та стохастичного інтеграла за цим процесом. Тому бажано було сформулювати означення цих понять і, можливо, детальніше описати деякі їх властивості (наприклад, обґрунтувати твердження про те, що згаданий інтеграл є стохастичним інтегралом за семімартингалом);
c) при доведенні леми 2.1.7 неявно використовується те, що розглядувана там функція Φ є спадною на проміжку $[0;+\infty)$. Цей факт доцільно було в роботі відзначити та обґрунтувати;
d) у формулюванні теореми 3.0.2 умову коректної визначеності умовного математичного сподівання $E(|\xi^{'}(u)||\xi(u)=c)$ мабуть краще було замінити умовою існування звичайного математичного сподівання $E(|\xi^{'}(u)|)$;
e) у вступній частині до четвертого розділу відзначається, що досліджуваний тут розподіл випадкової величини може бути знайдений (проте в незамкненому вигляді) за допомогою формули, яку наведено без обґрунтування в праці [47]. Автору доцільно було також виписати цю формулу з метою її порівняння з відповідним результатом, отриманим в дисертації;
f) виклад матеріалу в тексті дисертації та авторефераті чіткий, але інколи зустрічаються описки та невластиві українській мові слова і фрази (наприклад, “зі зносом” замість “з переносом”, “залишилося помітити” замість “залишилося зауважити”, “тривіальним чином” замість “у тривіальний спосіб”, “ясно, що” замість “зрозуміло, що”).

Наведені зауваження не впливають на загальну високу оцінку дисертаційної роботи.

4. Робота має теоретичний характер. Її результати та методика їх досліджень можуть використовуватися при подальшому вивченні проблем, що стосуються складних стохастичних систем. Ці результати можна рекомендувати для застосування в дослідженнях, які ведуться в Інституті прикладних проблем механіки і математики НАН України, а також у національних університетах: “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, “Львівська політехніка”, у Львівському національному університеті імені Івана Франка, Чернівецькому національному університеті імені Юрія Федьковича та Прикарпатському національному

університеті імені Василя Стефаника.

5. Основні результати дисертації з достатньою повнотою опубліковано в п'яти наукових статтях у фахових виданнях, три з яких включено до наукометричної бази Scopus, а також у матеріалах (тезах) трьох міжнародних конференцій. Матеріали дисертації доповідались також на засіданнях наукового семінару "Числення Малявена та його застосування" Інституту математики НАН України (науковий керівник – професор А. А. Дороговцев). Автореферат дисертації правильно відображає її зміст.

Отже, є підстави зробити такий висновок. Дисертаційна робота Фомічьова Володимира Володимировича "Еволюція дифеоморфних броунівських стохастичних потоків", подана на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук, є завершеним науковим дослідженням і задовольняє вимогам "Порядку присудження наукових ступенів", затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 24 липня 2013 р. № 567 (зі змінами, внесеними згідно з Постановами КМУ № 656 від 19.08.2015 р. та № 159 від 30.12.2015 р.), стосовно кандидатських дисертацій, а її автор — Фомічьов Володимир Володимирович заслуговує на присудження наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 — теорія ймовірностей і математична статистика.

Офіційний опонент
доктор фізико-математичних наук, професор,
професор Інституту математики,
Ченстоховський політехнічний університет,
Польща Копитко Б. І.

POLITECHNIKA CZĘSTOCHOWSKA
Instytut Matematyki
42-201 Częstochowa, Al. Armii Krajowej 21
tel. (34) 325 03 24, im@im.pcz.pl

Інститут математики Академії наук
Канцелярія

Надійшов до спеціалізованої вченої ради Д26.206.02 20.11.2017р.
секретар ради (Артемиченко Ж.Я.)