НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Кусій Сергій Миколайович

УДК 517.93; 519.71

ДИСЕРТАЦІЯ

Робастна стабілізація та оптимізація систем керування при наявності обмежених збурень

01.02.01 — теоретична механіка

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата
фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело
С.М. Кусій

Науковий керівник: **Мазко Олексій Григорович,**
доктор фізико-математичних наук, професор

Київ — 2017

АНОТАЦІЯ

Кусій С.М. Робастна стабілізація та оптимізація систем керування при наявності обмежених збурень. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.01 – теоретична механіка. — Інститут математики НАН України, Київ, 2017.

Дисертаційна робота присвячена розробці нових методів стабілізації та оптимізації систем керування, які описуються диференціальними або різницевими рівняннями з елементами невизначеності. Невизначеності в рівняннях руху керованих об'єктів обумовлюються не лише аналітичною складністю опису математичних моделей, а й наявністю неконтрольованих зовнішніх збурень, які виникають в реальних умовах їх функціонування. Задача робастної стабілізації полягає у побудові закону керування, який забезпечує асимптотичну стійкість руху керованого об'єкта при довільних значеннях елементів невизначеності із заданих множин. Задачі побудови стабілізуючих регуляторів по виходу навіть для класу лінійних систем керування за умов неповної інформації про вектор стану є досить складними з математичної точки зору, проте на практиці методи їх розв'язання необхідні і дуже важливі. У сучасному принципово новому підході до задач керування в рамках так званої теорії H_∞-оптимізації об'єднано класичні частотні методи дослідження і сучасні методи простору станів. Його засновниками вважаються G. Zames, B.A. Francis, J.C. Doyle та ін. В задачах H_∞-оптимізації необхідно знайти таке керування, яке забезпечує робастну стійкість стану рівноваги замкненої системи та мінімізує критерій якості, що характеризує рівень гасіння обмежених збурень. Методи розв'язання вказаних задач широко застосовуються у практичних дослідженнях, пов'язаних, зокрема, з розробкою високонадійних систем стабілізації для керованих транспортних та космічних об'єктів.

У дисертаційній роботі встановлено критерії існування статичних та динамічних регуляторів по вимірюваному виходу, які забезпечують асимптотичну

стійкість лінійних систем керування з гарантованим спектральним запасом. Показано, що методи побудови стабілізуючих регуляторів, які випливають із отриманих критеріїв, можна застосувати до класу нелінійних систем керування у векторно-матричній формі. Для дискретних систем керування розроблено ітераційний алгоритм побудови стабілізуючих статичних регуляторів по виходу, що зводиться до розв'язування лінійних матричних нерівностей. Даний алгоритм чисельно реалізовано для дискретної моделі стабілізації поздовжнього руху гелікоптера при вертикальному зльоті та посадці.

Для класів лінійних неперервних та дискретних систем з керованими і спостережуваними виходами на основі методу квадратичних функцій Ляпунова сформульовано критерії існування стабілізуючих регуляторів, які забезпечують задану верхню оцінку зваженого рівня гасіння зовнішніх і початкових збурень. Досліджено випадки наявності обмежених збурень у рівняннях динаміки об'єкта, його виходів, а також шуканих статичних або динамічних регуляторів. Розроблено конструктивні алгоритми робастної стабілізації та узагальненої (зваженої) H_∞-оптимізації указаних класів систем за допомогою динамічних регуляторів з нульовим початковим вектором.

Розроблені методи дослідження, що базуються на розв'язанні систем лінійних матричних нерівностей, за допомогою комп'ютерних засобів продемонстровано в задачах стабілізації та зваженої H_∞-оптимізації для таких механічних систем, як одноланковий робот-маніпулятор, перевернутий маятник на рухомій платформі та лінійний осцилятор з демпфуванням. Досліджено залежності зважених критеріїв якості замкнених систем від вагових коефіцієнтів та механічних параметрів.

Ключові слова: система керування, асимптотична стійкість, робастна стабілізація, динамічний регулятор, функція Ляпунова, лінійна матрична нерівність.

Kusii S.M. Robust stabilization and optimization of control systems with limited perturbations. — Qualifying scientific work on the right of manuscript.

Thesis submitted for the Degree of Candidate of Physics and Mathematics in speciality 01.02.01 — Theoretical mechanics. — Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2017.

The thesis is devoted to the development of new methods of stabilization and optimization of control systems described by either differential or difference systems with elements of an uncertainty. Uncertainties in the governing equations of the controlled objects are associated with both an analytical complexity of the mathematical models and uncontrolled external perturbations appearing for the actual functioning conditions. The robust stabilization problem consists of constructing a control law, which provides an asymptotic stability of the equilibrium state of the controlled object with arbitrary uncertainties in the prescribed sets. Construction of the stabilizing regulators, even for a class of linear systems but with an incomplete information on the state vector, is a mathematically complicated problem, however, the corresponding solution methods are strongly required being important in the engineering. Currently, a fundamentally new approach to the control problems within so-called H_∞-optimization theory by G. Zames, B.A. Francis, J.C. Doyle et al. combines the classical frequency research and states space methods. In the H_∞-optimization problem, one should find a control that ensures the robust stability of the equilibrium state of a closed system and minimizes the quality criterion, which describes a damping level of the bounded perturbations. Methods of solving these problems are widely used in applied studies related, in particular, to the development of high-reliability systems of stabilization for the controlled transport and space objects.

In the present thesis, criteria of the existence of output feedback static and dynamic regulators providing the asymptotic stability of linear control systems with a safe spectral stability margin are derived. It is shown that the methods of constructing the stabilizing regulators, which follow from the criteria, can be applied to a class of nonlinear control systems in a vector-matrix form. An iterative algorithm for constructing the static output feedback stabilizing regulator reduced to solving linear matrix inequalities is also generalised to discrete control systems. This algorithm is implemented for a discrete model of the longitudinal motion of a helicopter at the vertical takeoff and landing.

Using the Lyapunov quadratic function method, criteria for the existence of the stabilizing regulators, which provides specified evaluation of the weighted damping level of external and initial perturbations, are formulated for several classes of linear continuous and discrete systems with controlled and observed outputs. The cases of the presence of limited perturbations in the dynamic equations of the object, its outputs, as well as the desired static and dynamic regulators are studied. Constructive algorithms for the robust stabilization and generalized (weighted) H_∞-optimization of the classes of systems are developed by using dynamic regulators with the zero initial vector.

The developed methods based on solving the systems of linear matrix inequalities are used, by implementing a special computer codes, in the stabilization and weighted H_∞-optimization problems, which are exemplified by a single-link robot manipulator, an inverted pendulum on a moving platform and a linear damped oscillator. Dependencies of the weighted quality criteria of the closed systems on the weight coefficients and mechanical parameters are studied.

Keywords: control system, asymptotic stability, robust stabilization, dynamic controller, Lyapunov function, linear matrix inequality.

Список публікацій здобувача:

1. Mazko A.G. Stabilization by a measurable output and estimation of the level of attenuation for perturbations in control systems / A.G. Mazko, S.N. Kusii // Journal of Mathematical Sciences. — 2017. — **220**, 3. — P. 318–333.
2. Мазко О. Г. Задачі стабілізації і гасіння зовнішніх збурень в системах керування / О.Г. Мазко, С.М. Кусій // Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики: Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — 2015. — **12**, 5. — С. 90–108.
3. Мазко О. Г. Робастна стабілізація та гасіння зовнішніх збурень у системах з керованими і спостережуваними виходами / О.Г. Мазко, С.М.

Кусій // Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики: Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — 2016. — **13**, 3. — С. 129–145.

4. Мазко А. Г. Робастная стабилизация и оценка взвешенного подавления возмущений в системах управления / А.Г. Мазко, С.Н. Кусий // Проблемы управления и информатики. — 2016. — № 6. —– С. 71–82.
5. Кусій С. М. Стабілізація та гасіння обмежених збурень у дискретних системах керування / С. М. Кусій // Нелінійні коливання. — 2017. — **20**, № 2. — С. 198–210.
6. Мазко А. Г. Стабилизация и H_∞–оптимизация линейных систем управления / А.Г. Мазко, С.Н. Кусий // Thesis of XVII International Conference «Dynamic System Modelling and Stability Investigation» (May 27 – 29, 2015, Kyiv), p. 143.
7. Мазко А. Г. Робастная стабилизация и подавление ограниченных возмущений в системах управления / А.Г. Мазко, С.Н. Кусий // Матеріали XXIII Міжнародної конференції з автоматичного управління «Автоматика – 2016» (22–23 вересня 2016 року, м. Суми), С. 20–21.
8. Mazko A.G. Robust stabilization and suppression of limited disturbances in control systems / A.G. Mazko, S.N. Kusii // Book of Abstracts 5th International Conference of Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Ya. B. Lopatynsky (November 9–11, 2016, Kyiv), p. 101.
9. Мазко А. Г. Робастная стабилизация и подавление ограниченных возмущений в дискретных системах управления / А.Г. Мазко, С.Н. Кусий // Thesis of XVIII International Conference «Dynamic System Modelling and Stability Investigation» (May 27 – 29, 2017, Kyiv), p. 167.
10. Мазко О. Г. Робастна стабілізація та гасіння обмежених збурень в дискретних системах керування / О.Г. Мазко, С.М. Кусій // Thesis of International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100th Anniversary of Professor Yu.O.Mitropolskiy (June 7–10, 2017, Kyiv), p. 57.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

- $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел;
- $\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел;
- $\mathbb{R}^m$ — m-вимірний дійсний векторний простір, $m \in \mathbb{N}$;
- $\mathbb{R}^{n\times m}$ — простір дійсних $n \times m$ матриць;
- $0_{n\times m}$ — нульова $n \times m$ матриця;
- I_n — одинична $n \times n$ матриця;
- A^T — матриця транспонована до матриці A;
- $\det(A)$ — визначник матриці A;
- $\mathrm{tr}(A)$ — сума діагональних елементів (слід) матриці A;
- A^{-1} — матриця обернена до невиродженої квадратної матриці A;
- A^{+} — псевдообернена матриця до матриці A;
- $A^{\perp}$ — матриця ортогонального доповнення стрічок (стовпців) матриці A до матриці повного рангу, тобто
$$\det \begin{bmatrix} A \\ A^{\perp} \end{bmatrix} \neq 0,\ AA^{\perp T} = 0\ \left(\det[A, A^{\perp}] \neq 0,\ A^T A^{\perp} = 0\right);$$
- $\sigma(A)$ — спектр матриці A;
- $\rho(A)$ — спектральний радіус матриці A;
- $\lambda_i(A)$ — власне значення матриці A;
- $\lambda_{\max}(A)$ ($\lambda_{\min}(A)$) — максимальне (мінімальне) власне значення матриці A;
- $\mathrm{i}(A) = \{\mathrm{i}_+(A), \mathrm{i}_-(A), \mathrm{i}_0(A)\}$ — інерція симетричної матриці $A = A^T$, що складається з кількостей її додатних ($\mathrm{i}_+(A)$), від'ємних ($\mathrm{i}_-(A)$) і нульових ($\mathrm{i}_0(A)$) власних значень з урахуванням кратностей;
- $\|x\| = \sqrt{x^T x}$ — евклідова норма вектора x;
- $\mathrm{Co}\{A_1, \ldots, A_\nu\}$ — опукла оболонка векторів або матриць $A_1, \ldots, A_\nu$ (політоп з вершинами $A_1, \ldots, A_\nu$), що є множиною
$$\mathbb{A} = \Big\{ \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i A_i :\ \ \alpha_i \geq 0,\ i = \overline{1, \nu},\ \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i = 1 \Big\};$$

ВСТУП

Актуальність теми. У багатьох галузях прикладних досліджень виникають задачі аналізу стійкості та стабілізації руху динамічних систем, які описуються диференціальними або різницевими рівняннями з невизначеною функціональною структурою. Невизначеність в рівняннях руху керованих об'єктів обумовлюється не лише складністю математичних моделей, а й наявністю неконтрольованих зовнішніх збурень в реальних умовах їх функціонування. Елементи невизначеності (параметри, скалярні та матричні функції тощо) належать деяким множинам, що характеризують робастність (грубість) динамічної системи. Задача робастної стабілізації полягає у побудові закону керування, який забезпечує асимптотичну стійкість руху керованого об'єкта при довільних значеннях елементів невизначеності із заданих множин. Задачі побудови стабілізуючих статичних та динамічних регуляторів по виходу навіть для класу лінійних систем керування за умов неповної інформації про вектор стану повністю розв'язані лише в окремих випадках при додаткових обмеженнях. Із сучасними методами синтезу неперервних та дискретних систем керування за умов невизначеності можна ознайомитись в роботах В.Н. Афанасьєва, Б.Т. Поляка, П.С. Щербакова, Д.В. Баландіна, М.М. Когана, В.М. Кунцевича, В.Ф. Губарєва, В.І. Коробова, В.Б. Ларіна, О.Г. Мазка, J.C. Doyle, A.A. Stoorvogel, S. Boyd, C. Scherer, S. Weiland, D.D. Siljak та ін.

У 80-х роках минулого століття виник принципово новий і конструктивний підхід до проблем керування в рамках так званої теорії H_∞-керування динамічних систем, яка об'єднала класичні частотні методи дослідження і сучасні методи простору станів (G. Zames, B.A. Francis, J.C. Doyle та ін.). Критеріями якості в задачах H_∞-оптимізації є рівень гасіння обмежених зовнішніх збурень, який необхідно мінімізувати за допомогою статичних або динамічних регуляторів по вимірюваному виходу. Для класу лінійних стаціонарних систем дана характеристика співпадає з H_∞-нормою матричної передатної функції, а її верхню оцінку можна встановити на основі математичного апарату лінійних матричних нерівностей (ЛМН). Розвиток та узагальнення методів H_∞-оптимізації неперервних та дискретних систем керування отримано у роботах багатьох авторів (Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков, Д.В. Баландін, М.М. Коган, K. Glover, B.A. Francis, P.P. Kharconekar, P. Gahinet, P. Apkarian, G.E. Dullerud, F.G. Paganini, A.A. Stoorvogel, S. Weiland, D.D. Siljak та ін.).

Дана робота присвячена розробці конструктивних алгоритмів стабілізації та узагальненої (зваженої) H_∞-оптимізації по виходу неперервних та дискретних систем керування у векторно-матричній формі, а також їх чисельній реалізації для механічних об'єктів за допомогою комп'ютерних засобів. При цьому розглядаються випадки наявності обмежених збурень у рівняннях динаміки об'єкта, керованого і спостережуваного виходів, а також шуканого регулятора. Застосування узагальнених критеріїв якості, що характеризують зважений рівень гасіння зовнішніх і початкових збурень (Д.В. Баландін, М.М. Коган, О.Г. Мазко), дозволяє встановити пріоритети між компонентами керованого виходу, зовнішніх і початкових збурень. Тематика роботи є актуальною і перспективною для теоретичних досліджень та практичного застосування, зокрема, при конструюванні високонадійних транспортних об'єктів і керованих механічних пристроїв.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана згідно з планом наукових досліджень відділу математичних проблем механіки та теорії керування Інституту математики НАН України на 2015–2017 роки в рамках держбюджетної теми №III-13-16 «Математичні проблеми динаміки, стабілізації та оптимізації складних механічних систем» (номер держ. реєстрації 0116U003101), а також в межах науково-дослідної теми №III-23-12 «Математичні моделі поліагрегатних систем та чисельно-аналітичні методи розв'язування сучасних задач динаміки, стійкості та оптимального керування» (номер держ. реєстрації 0112U001015) за програмою «Розробка математичних моделей та чисельно-аналітичних методів розв'язування сучасних задач фізико-технічних і медико-біологічних наук та інформаційних технологій».

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є розробка нових методів аналізу стійкості, стабілізації по виходу та оптимізації систем керування при наявності зовнішніх збурень, їх застосування при дослідженні механічних об'єктів.

Об'єктом дослідження є неперервні та дискретні системи керування та моделі спеціальних механічних систем.

Предметом дослідження є вектори станів, керованого та спостережуваного виходів та керування динамічних систем, інтегральні критерії якості, властивості асимптотичної стійкості станів рівноваги систем.

Методи дослідження. Використовуються другий метод Ляпунова дослідження стійкості, його матричні інтерпретації та узагальнення, методи теорії диференціальних рівнянь, матричного аналізу та теорії керування.

Визначена мета зумовлює виконання таких завдань:
— розробити нові методи та алгоритми побудови стабілізуючих статичних та динамічних регуляторів по вимірюваному виходу для неперервних та дискретних систем керування;
— для неперервних та дискретних систем керування розробити методи синтезу регуляторів із зовнішніми збуреннями, які дозволяють оцінити та мінімізувати негативний вплив обмежених збурень на динаміку замкненої системи;
— для неперервних та дискретних систем з керованими і спостережуваними виходами знайти умови існування статичних та динамічних регуляторів, які забезпечують бажану оцінку зваженого рівня гасіння зовнішніх та початкових збурень та робастну стійкість нульового стану замкненої системи;
— провести дослідження задач робастної стабілізації та гасіння обмежених збурень для нелінійних систем керування, поданих у векторно-матричній формі;
— провести чисельну реалізацію та продемонструвати ефективність нових методів синтезу та оптимізації для маятникових, робото-технічних та ін. керованих систем при наявності зовнішніх збурень.

Наукова новизна одержаних результатів. В дисертаційній роботі отримано такі нові наукові результати:

- встановлено критерії та достатні умови існування стабілізуючих статичних та динамічних регуляторів по вимірюваному виходу для деяких класів неперервних та дискретних систем керування;
- розроблено ітераційний алгоритм стабілізації по виходу дискретних систем, що базується на розв'язуванні лінійних матричних нерівностей;
- для лінійних неперервних та дискретних систем керування запропоновано методи побудови статичних та динамічних регуляторів із зовнішніми збуреннями, які дозволяють оцінити та понизити зважений рівень гасіння обмежених збурень в замкненій системі;
- для лінійних неперервних та дискретних систем з керованими і спостережуваними виходами встановлено критерії існування статичних та динамічних регуляторів з нульовим початковим вектором, які забезпечують бажану оцінку зваженого рівня гасіння зовнішніх та початкових збурень, робастну стійкість нульового стану та спільну квадратичну функцію Ляпунова замкненої системи;
- обгрунтовано можливості застосування запропонованих алгоритмів синтезу регуляторів для деяких класів нелінійних систем керування, поданих у векторно-матричній формі;
- розроблені методи дослідження, що зводяться до розв'язання систем лінійних матричних нерівностей, застосовано в задачах стабілізації станів рівноваги, оцінки функціоналів якості таких механічних систем, як одноланковий робот-маніпулятор, маятник на рухомій платформі та лінійний осцилятор з демпфуванням.

Обґрунтованість і достовірність отриманих в дисертації наукових результатів підтверджується коректною постановкою задач та строгим доведенням всіх висновків на основі застосування класичних теорем з теорії стійкості і матричного аналізу, а також порівняння з відомими результатами інших авторів та проведення чисельних експериментів з використанням ефективних засобів комп'ютерної техніки.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають теоретичне і практичне значення. Вони можуть бути використані в практичних задачах синтезу систем керування для механічних об'єктів, математичні моделі яких повинні враховувати наявність неконтрольованих зовнішніх збурень та невизначених параметрів. Задачі погашення зовнішніх збурень виникають при розробці високонадійних систем стабілізації для нових об'єктів авіаційної, космічної та ін. техніки. Методи розв'язування вказаних задач можуть забезпечувати надійність та безпеку керованих систем на етапі їх експлуатації. Практична реалізація запропонованих в дисертації методів та алгоритмів базується на застосуванні ефективних засобів LMI Toolbox комп'ютерної системи Matlab.

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертаційної роботи отримані автором самостійно. У роботах, опублікованих у співавторстві [45–47, 90], особистий внесок здобувача полягає в обговоренні постановок та ідей розв'язування задач, виконанні основних доведень, створенні комп'ютерних програм та проведенні чисельних експериментів, формулюванні висновків та підготовці рукописів до опублікування. Співавтору О.Г. Мазку належать постановки задач та рекомендації щодо можливих методів їх розв'язування.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались і обговорювались на семінарах відділу математичних проблем механіки та теорії керування Інституту математики НАН України, відділу стійкості процесів Інституту механіки НАН України, а також на таких міжнародних конференціях: «Dynamical system modelling and stability investigation» (травень 2015 р., Київ); «XXIII Міжнародна конференція з автоматичного управління Автоматика – 2016» (вересень 2016 р., Суми); «5th International Conference for Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Ya. B. Lopatynsky» (листопад 2016 р., Київ); «Dynamical system modelling and stability investigation» (травень 2017 р., Київ); «International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100th Anniversary of

Professor Yu.O.Mitropolskiy» (червень 2017 р., Київ).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у 10 роботах. Серед них 5 статей [36, 45–47, 90] в наукових періодичних фахових виданнях, 2 із яких [47, 90] у журналах, що індексуються у наукометричній базі Scopus, та 5 тез доповідей [48–51, 91] на міжнародних наукових конференціях.

Структура та об'єм роботи. Дисертація складається із вступу, чотирьох розділів, висновків, додатку та списку використаних джерел із 100 найменувань, вона містить 14 малюнків та 1 таблицю. Обсяг дисертації становить 136 сторінок друкованого тексту.

У **вступі** до дисертації обґрунтовано актуальність досліджуваних проблем, сформульовано мету роботи, відображено наукову новизну, відзначено практичну цінність, наведено інформацію щодо апробації результатів та публікацій за темою дисертації. Розглянуто структуру роботи, а також наведено головні результати, які виносяться на захист.

У **першому** розділі проведено огляд літератури та основних задач, пов'язаних з темою дисертаційної роботи. Наведено основні класичні результати з теорії стійкості руху (підрозділ 1.1), а також сучасні напрямки та методи дослідження стійкості та побудови стабілізуючих регуляторів для динамічних систем з матрично-функціональною невизначеністю (підрозділ 1.2).

Другий розділ присвячено розробці нових методів аналізу стійкості та стабілізації станів рівноваги класу лінійних та нелінійних багатовимірних систем керування у векторно-матричній формі.

Спочатку розглядається лінійна система керування

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du, \tag{1}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ і $y \in \mathbb{R}^l$ — вектори відповідно стану, керування і вимірюваного виходу системи, а A, B, C і D — матриці відповідних розмірів, причому $\operatorname{rank} B \equiv m$ і $\operatorname{rank} C \equiv l$. Стабілізуюче керування в системі (1) будується у вигляді статичного регулятора

$$u = Ky, \quad K \in \mathcal{K}_D, \tag{2}$$

де $\mathcal{K}_D = \{K \in \mathbb{R}^{m\times l} : \det(I_m - KD) \neq 0\}$. Замкнена система (1), (2) має вигляд

$$\dot{x} = Mx, \quad M = A + B\mathbf{D}(K)C, \tag{3}$$

де $\mathbf{D}(K) = (I_m - KD)^{-1}K$ — нелінійний оператор у просторі матриць $\mathbb{R}^{m\times l}$. Лінійну систему (3) називаємо *α-стійкою*, якщо її спектр $\sigma(M)$ розміщений в області $\{\lambda : \mathrm{Re}\lambda + \alpha < 0\}$, де $\alpha \geq 0$. *Спектральний запас* стійкості α-стійкої системи не менший, ніж α.

Використовуючи ортогональні доповнення матриць $B^\perp$, $C^\perp$ і властивості інерції блочних матриць, сформульовано два критерії існування статичного регулятора (2), який забезпечує α-стійкість замкненої системи (3).

Перший критерій α-стійкості полягає в сумісності співвідношень

$$B^{\perp T}(AX + XA^T + 2\alpha X)\, B^\perp < 0, \tag{4}$$

$$\mathrm{i}(\Delta) = \big\{l, n, 0\big\}, \quad \Delta = \begin{bmatrix} AX + XA^T + 2\alpha X & XC^T \\ CX & 0 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

відносно матриці $X = X^T > 0$, а другий — в сумісності співвідношень (4) і

$$C^\perp(A^TY + YA + 2\alpha Y)\, C^{\perp T} < 0 \tag{6}$$

відносно взаємно обернених матриць $X = X^T > 0$ і $Y = Y^T > 0$. При виконанні одного із цих критеріїв матриця регулятора (2) знаходиться за формулою $K = -\mathbf{D}(-K_0) \in \mathcal{K}_D$, де K_0 — розв'язок ЛМН

$$AX + XA^T + 2\alpha X + BK_0CX + XC^TK_0^TB^T < 0. \tag{7}$$

У підрозділі 2.3 формулюються умови стабілізації системи (1) за допомогою динамічного регулятора

$$\dot{\xi} = Z\xi + Vy, \quad u = U\xi + Ky, \tag{8}$$

де $\xi \in \mathbb{R}^r$, $r \leq n$, а Z, V, U і K — матриці, які треба визначити. Співвідношення (1) і (8) подаються у вигляді системи керування зі статичним регулятором у розширеному фазовому просторі $\mathbb{R}^{n+r}$. При цьому замкнена система (1), (8) буде мати вигляд (3) з відповідними матричними коефіцієнтами.

Теорема 2.2. *Наступні твердження еквівалентні:*

1) *Існує динамічний регулятор* (8) *порядку* r, *що забезпечує* α-*стійкість замкненої системи* (1), (8).

2) *Існують матриці* X *і* X_0, *що задовольняють співвідношення* (4) *і*

$$\mathrm{i}(\Delta_0) = \{l, n, 0\}, \quad X \geq X_0 > 0, \quad \operatorname{rank}(X - X_0) \leq r, \tag{9}$$

$$\Delta_0 = \begin{bmatrix} AX_0 + X_0A^T + 2\alpha X_0 & X_0C^T \\ CX_0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3) *Існують матриці* X *і* Y, *що задовольняють співвідношення* (4), (6) *і*

$$W = \begin{bmatrix} X & I_n \\ I_n & Y \end{bmatrix} \geq 0, \quad \operatorname{rank} W \leq n + r. \tag{10}$$

Встановлено, що матриці X та X_0 задовольняють твердження 2) тоді і лише тоді, коли X та $Y = X_0^{-1}$ задовольняють твердження 3).

У підрозділі 2.4 розглядаються нелінійні системи керування у векторно-матричній формі

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u, \quad y = C(x)x + D(x)u, \tag{11}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ і $y \in \mathbb{R}^l$ — вектори відповідно стану, керування і вимірюваного виходу, а $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ і $D(x)$ — матриці відповідних розмірів, неперервно залежні від x в деякому околі $\mathcal{S}_0 = \{x : \|x\| \leq h\}$ точки $x = 0$, причому $\operatorname{rank} B(x) \equiv m$ і $\operatorname{rank} C(x) \equiv l$.

Система (11) з динамічним регулятором (8) також подається у вигляді системи керування зі статичним регулятором у розширеному фазовому просторі $\mathbb{R}^{n+r}$. Якщо покласти $A = A(0)$, $B = B(0)$, $C = C(0)$ і $D = D(0)$, то теорема 2.2 визначає динамічний регулятор, що забезпечує асимптотичну стійкість нульового стану замкненої нелінійної системи (11), (8). На основі даної теореми запропоновано алгоритм побудови стабілізуючих динамічних регуляторів типу (8) для систем (1) і (11).

У підрозділі 2.5 розглядається клас нелінійних систем (11) за умов невизначеності матричних коефіцієнтів типу $A \in \operatorname{Co}\{A_1, \ldots, A_\nu\}$, де $A_1, \ldots, A_\nu$ —

заданий набір вершин матричного політопа. Наводяться достатні умови існування статичних та динамічних регуляторів, які забезпечують α-стійкість замкненої лінійної системи, а також робастну стійкість нульового стану $x \equiv 0$ та спільну квадратичну функцію Ляпунова для відповідної сім'ї замкнених нелінійних систем.

Третій розділ присвячено розробці нових методів робастної стабілізації та гасіння обмежених збурень у неперервних системах керування. Розглядається клас систем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u, \quad x(0) = x_0, \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u, \\ y &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u, \end{aligned} \tag{12}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $w \in \mathbb{R}^s$, $z \in \mathbb{R}^k$ і $y \in \mathbb{R}^l$ — вектори відповідно стану, керування, зовнішніх збурень, керованого і спостережуваного виходів, а всі матричні коефіцієнти відповідних розмірів сталі. Вводиться зважений функціонал якості системи (12)

$$J = \sup_{0<\|w\|_P^2 + x_0^T X_0 x_0 < \infty} \varphi(w, x_0), \quad \varphi(w, x_0) = \frac{\|z\|_Q}{\sqrt{\|w\|_P^2 + x_0^T X_0 x_0}}, \tag{13}$$

де $Q = Q^T > 0$, $P = P^T > 0$ і $X_0 = X_0^T > 0$ — деякі вагові матриці, $\|z\|_Q$ і $\|w\|_P$ — узагальнені L_2-норми відповідних вектор-функцій, тобто

$$\|z\|_Q^2 = \int_0^\infty z^T Q z \, dt, \quad \|w\|_P^2 = \int_0^\infty w^T P w \, dt.$$

У випадку нульового вектора x_0 використовується позначення $J = J_0$.

Значення J характеризує зважений рівень гасіння зовнішніх і початкових збурень у системі (12). Задача полягає у побудові законів керування, які забезпечують верхню оцінку та пониження критеріїв якості (13). Статичні та динамічні регулятори, які мінімізують значення J, називаємо *J-оптимальними*.

Якщо керування у системі (12) шукати у вигляді статичного зворотного зв'язку

$$u = Ky, \quad \det(I_m - KD_{22}) \neq 0, \tag{14}$$

то замкнена система набуває вигляду

$$\dot{x} = Mx + Nw, \quad z = Fx + Gw, \quad x(0) = x_0, \tag{15}$$

де $M = A + B_2K_0C_2$, $N = B_1 + B_2K_0D_{21}$, $F = C_1 + D_{12}K_0C_2$, $G = D_{11} + D_{12}K_0D_{21}$, $K_0 = (I_m - KD_{22})^{-1}K$.

Формулюється критерій існування статичного регулятора (14) для системи (15), що забезпечує бажану оцінку $J < \gamma$. Даний критерій полягає в сумісності відносно матриці X співвідношень

$$0 < X < \gamma^2 X_0, \tag{16}$$

$$W_R^T \begin{bmatrix} A^TX + XA + C_1^TQC_1 & XB_1 + C_1^TQD_{11} \\ B_1^TX + D_{11}^TQC_1 & D_{11}^TQD_{11} - \gamma^2 P \end{bmatrix} W_R < 0, \tag{17}$$

$$W_L^T \begin{bmatrix} AY + YA^T + B_1P^{-1}B_1^T & YC_1^T + B_1P^{-1}D_{11}^T \\ C_1Y + D_{11}P^{-1}B_1^T & D_{11}P^{-1}D_{11}^T - \gamma^2 Q^{-1} \end{bmatrix} W_L < 0, \tag{18}$$

де $Y = \gamma^2 X^{-1}$, W_R і W_L — матриці, стовпці яких утворюють базиси ядер відповідних матриць $R = \begin{bmatrix} C_2, D_{21} \end{bmatrix}$ і $L = \begin{bmatrix} B_2^T, D_{12}^T \end{bmatrix}$.

Також розглядається динамічний регулятор порядку r з нульовим початковим вектором:

$$\dot{\xi} = Z\xi + Vy, \quad u = U\xi + Ky, \quad \xi(0) = 0, \tag{19}$$

де $\xi \in \mathbb{R}^r$ — вектор стану регулятора, Z, V, U і K — невідомі матриці відповідних розмірів $r \times r$, $r \times l$, $m \times r$ і $m \times l$.

Теорема 3.4. *Для системи* (12) *існує динамічний регулятор* (19), *що забезпечує оцінку $J < \gamma$, тоді і лише тоді, коли система співвідношень* (16) – (18) *і*

$$W = \begin{bmatrix} X & \gamma I_n \\ \gamma I_n & Y \end{bmatrix} \geq 0, \quad \operatorname{rank} W \leq n + r, \tag{20}$$

сумісна відносно матриць $X = X^T > 0$ і $Y = Y^T > 0$.

При пошуку J-оптимальних динамічних регуляторів використовуються умови теореми 3.4 при мінімально можливому значенні пераметра γ.

Наведені методи побудови статичних та динамічних регуляторів можна застосувати для класу нелінійних систем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(x)x + B_1(x)w + B_2(x)u, \quad x(0) = x_0, \\ z &= C_1(x)x + D_{11}(x)w + D_{12}(x)u, \\ y &= C_2(x)x + D_{21}(x)w + D_{22}(x)u, \end{aligned} \tag{21}$$

де всі матричні функції є неперервними в деякому околі $\mathcal{S}_0$ точки $x = 0$. Якщо $K \in \mathcal{K}_{D_{22}}$, то $\det\big[I_m - KD_{22}(x)\big] \neq 0$ при $x \in \mathcal{S}_0$ і замкнена система (19), (21) у просторі $\mathbb{R}^{n+r}$ набуває вигляду

$$\dot{\widehat{x}} = \widehat{M}(x)\widehat{x} + \widehat{N}(x)w, \quad z = \widehat{F}(x)\widehat{x} + \widehat{G}(x)w. \tag{22}$$

Динамічний регулятор (19) в теоремі 3.4 забезпечує робастну стійкість нульового стану системи (22) зі структурованою невизначеністю вхідного вектора

$$w = \gamma^{-1}\Theta z, \quad \Theta^T P \Theta \leq Q, \tag{23}$$

а також спільну квадратичну функцію Ляпунова $v(\widehat{x}) = \widehat{x}^T \widehat{X} \widehat{x}$.

У підрозділі 3.3 наводяться результати розрахунків для системи стабілізації одноланкового робота-маніпулятора. Використовуючи алгоритм 2.1, будується стабілізуючий динамічний регулятор, а за допомогою алгоритму 3.1 — динамічний регулятор повного порядку, що забезпечує умови неекспансивності та α-стійкості замкненої системи. Властивість неекспансивності лінійної системи означає, що $J \leq 1$.

У підрозділі 3.5 на основі алгоритму 3.1 будується J-оптимальний динамічний регулятор повного порядку в задачі гасіння коливань лінійного осцилятора з демпфуванням. Проводиться дослідження залежності зваженого функціонала якості від механічних параметрів та діагональних елементів вагових матриць.

Четвертий розділ присвячено розробці нових методів синтезу дискретних систем керування. Розглядається нелінійна система керування

$$x_{t+1} = A(x_t)x_t + B(x_t)u_t, \quad y_t = C(x_t)x_t + D(x_t)u_t, \tag{24}$$

де $x_t \in \mathbb{R}^n$, $u_t \in \mathbb{R}^m$ і $y_t \in \mathbb{R}^l$ — вектори відповідно стану, керування і вимірюваного виходу системи, а $A(x_t)$, $B(x_t)$, $C(x_t)$ і $D(x_t)$ — матриці відповідних розмірів, неперервно залежні від x_t в деякому околі $\mathcal{S}_0 = \{x : \|x\| \leq h\}$ точки $x = 0$, $t \in \mathcal{T} = \{0, 1, \dots\}$, причому $\operatorname{rank} B = m$, $\operatorname{rank} C = l$. Разом з (24) розглядаємо лінійну систему

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t, \quad y_t = Cx_t + Du_t, \tag{25}$$

де $A = A(0)$, $B = B(0)$, $C = C(0)$ і $D = D(0)$. Спочатку керування шукаємо у вигляді статичного зворотного зв'язку по виходу

$$u_t = Ky_t, \quad K \in \mathcal{K}_D, \quad t \in \mathcal{T}. \tag{26}$$

Замкнена лінійна система (25), (26) має вигляд

$$x_{t+1} = Mx_t, \quad M = A + B\mathbf{D}(K)C, \tag{27}$$

де $\mathbf{D}(K) = (I_m - KD)^{-1}K$. Систему (27) називаємо *ρ-стійкою*, якщо її спектр $\sigma(M)$ розміщений всередині круга $\{\lambda : |\lambda| < \rho\}$, де $0 < \rho \leq 1$. *Спектральний запас* стійкості ρ-стійкої системи $\alpha \geq 1 - \rho$.

Сформульвано два критерії існування статичного регулятора (26), що забезпечує ρ-стійкість замкненої системи (27). Перший критерій полягає в сумісності співвідношень

$$B^{\perp T}(AXA^T - \rho^2 X)\, B^{\perp} < 0, \tag{28}$$

$$AXA^T - \rho^2 X < AXC^T(CXC^T)^{-1}CXA^T, \tag{29}$$

відносно матриці $X = X^T > 0$, а другий — в сумісності співвідношень (28) і

$$C^{\perp}(A^T Y A - \rho^2 Y)\, C^{\perp T} < 0, \tag{30}$$

відносно взаємно обернених матриць $X = X^T > 0$ і $Y = Y^T > 0$. При виконанні одного із даних критеріїв матриця регулятора (26) знаходиться у вигляді

$$K = -\mathbf{D}(-K_0) \in \mathcal{K}_D, \tag{31}$$

де K_0 — довільний розв'язок ЛМН

$$P^T K_0 Q + Q^T K_0^T P < F, \tag{32}$$

$$P = \big[-B^T, 0_{m\times n}\big], \quad Q = \big[0_{l\times n}, CX\big], \quad F = \begin{bmatrix} \rho^2 X & AX \\ XA^T & X \end{bmatrix}.$$

Якщо виконується один із даних критеріїв для лінійної системи (25), то співвідношення (26), (28), (29), (31) і (32) визначають статичний регулятор, що забезпечує асимптотичну стійкість нульового стану $x_t \equiv 0$ та квадратичну функцію Ляпунова $v(x) = x^T X^{-1} x$ замкненої нелінійної системи (24), (26). Для розв'зання системи співвідношень (28) і (29) відносно X пропонується спеціальний ітераційний алгоритм 4.1, на кожному кроці якого розв'язується система ЛМН. Даний алгоритм успішно апробований на прикладі дискретної системи стабілізації поздовжнього руху гелікоптера при вертикальному зльоті і посадці (підрозділ 4.1).

Формулюються умови стабілізації нульового стану рівноваги систем (24) і (25) за допомогою динамічного регулятора

$$\xi_{t+1} = Z\xi_t + Vy_t, \quad u_t = U\xi_t + Ky_t, \tag{33}$$

де $\xi_t \in \mathbb{R}^r$, а Z, V, U і K — шукані матриці, r — порядок регулятора, $t \in \mathcal{T}$. Співвідношення (24) і (31) можна подати у вигляді системи керування зі статичним регулятором у розширеному фазовому просторі $\mathbb{R}^{n+r}$. При умові $K \in \mathcal{K}_D$ замкнена лінійна система (25), (33) має вигляд (27) з відповідними матричними коефіцієнтами.

Теорема 4.3. *Наступні твердження еквівалентні:*

1) *Існує динамічний регулятор* (33) *порядку r, що забезпечує ρ-стійкість замкненої системи* (25), (33).

2) *Існують матриці X і X_0, що задовольняють співвідношення* (28) *і*

$$X \geq X_0 > 0, \quad \operatorname{rank}(X - X_0) \leq r, \tag{34}$$

$$AX_0A^T - \rho^2 X_0 < AX_0C^T(CX_0C^T)^{-1}CX_0A^T. \tag{35}$$

3) *Існують матриці* $X = X^T > 0$ *і* $Y = Y^T > 0$, *що задовольняють співвідношення* (28), (30) *і* (10).

Наслідок 4.1. *Нехай виконується одне із тверджень* 2) *або* 3) *теореми* 4.3 *для лінійної системи* (25) *і* $\widehat{K}_0$ — *розв'язок ЛМН*

$$P^T \widehat{K}_0 Q + Q^T \widehat{K}_0^T P < F, \tag{36}$$

де

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} A & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times n} & 0_{r\times r} \end{bmatrix}, \quad \widehat{B} = \begin{bmatrix} B & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times m} & I_r \end{bmatrix}, \quad \widehat{C} = \begin{bmatrix} C & 0_{l\times r} \\ 0_{r\times n} & I_r \end{bmatrix},$$

$$P = \big[-\widehat{B}^T, 0_{m+r\times n+r} \big], \quad Q = \big[0_{l+r\times n+r}, \widehat{C}\widehat{X} \big],$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho^2 \widehat{X} & \widehat{A}\widehat{X} \\ \widehat{X}\widehat{A}^T & \widehat{X} \end{bmatrix}, \ \widehat{X} = \begin{bmatrix} X & X_1^T \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix} > 0, \ X - X_0 = X_1^T X_2^{-1} X_1 \geq 0,$$

$$\widehat{K}_0 = \begin{bmatrix} K_0 & U_0 \\ V_0 & Z_0 \end{bmatrix}, \quad K_0 \in \mathcal{K}_D, \quad 0 < \rho \leq 1.$$

Тоді динамічний регулятор (33) *з матрицями*

$$\begin{aligned} K &= (I_m + K_0 D)^{-1} K_0, \quad U = (I_m + K_0 D)^{-1} U_0, \\ V &= V_0 (I_l + D K_0)^{-1}, \quad Z = Z_0 - V_0 D (I_m + K_0 D)^{-1} U_0, \end{aligned} \tag{37}$$

забезпечує асимптотичну стійкість нульового стану $\widehat{x} \equiv 0$ *та квадратичну функцію Ляпунова* $v(\widehat{x}) = \widehat{x}^T \widehat{X}^{-1} \widehat{x}$ *замкненої нелінійної системи* (24), (33).

У підрозділі 4.3 розглядається нелінійна система керування

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= A(x_t)x_t + B_1(x_t)w_t + B_2(x_t)u_t, \\ z_t &= C_1(x_t)x_t + D_{11}(x_t)w_t + D_{12}(x_t)u_t, \\ y_t &= C_2(x_t)x_t + D_{21}(x_t)w_t + D_{22}(x_t)u_t, \end{aligned} \tag{38}$$

де $x_t \in \mathbb{R}^n$, $u_t \in \mathbb{R}^m$, $w_t \in \mathbb{R}^s$, $z_t \in \mathbb{R}^k$ і $y_t \in \mathbb{R}^l$ — вектори відповідно стану, керування, зовнішніх збурень, керованого і спостережуваного виходів,

$t \in \mathcal{T}$. Для даної системи вводиться критерій якості відносно вектора керованого виходу:

$$J = \sup_{0<\|w\|_P^2 + x_0^T X_0 x_0 < \infty} \frac{\|z\|_Q}{\sqrt{\|w\|_P^2 + x_0^T X_0 x_0}}. \tag{39}$$

Ставиться задача побудови J-оптимальних регуляторів, які забезпечують робастну стійкість нульового стану замкненої системи та мінімізують критерій якості J.

Разом з нелінійною системою (38) розглядається лінійна система

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= Ax_t + B_1 w_t + B_2 u_t, \\ z_t &= C_1 x_t + D_{11} w_t + D_{12} u_t, \\ y_t &= C_2 x_t + D_{21} w_t + D_{22} u, \end{aligned} \tag{40}$$

де всі матричні коефіцієнти формують значення відповідних матричних функцій в (38) при $x_t = 0$.

Теорема 4.6. *Для лінійної системи* (40) *існує динамічний регулятор* (33) *з нульовим початковим вектором, що забезпечує оцінку критерію якості* $J < \gamma$ *замкненої системи, тоді і лише тоді, коли для деяких матриць* $0 < X < \gamma^2 X_0$ *і* $Y = Y^T > 0$ *виконується система співвідношень* (20) *і*

$$W_R^T \begin{bmatrix} A^T XA - X + C_1^T QC_1 & A^T XB_1 + C_1^T QD_{11} \\ B_1^T XA + D_{11}^T QC_1 & B_1^T XB_1 + D_{11}^T QD_{11} - \gamma^2 P \end{bmatrix} W_R < 0, \tag{41}$$

$$W_L^T \begin{bmatrix} AYA^T - Y + B_1 P^{-1} B_1^T & AYC_1^T + B_1 P^{-1} D_{11}^T \\ C_1 YA^T + D_{11} P^{-1} B_1^T & C_1 YC_1^T + D_{11} P^{-1} D_{11}^T - \gamma^2 Q^{-1} \end{bmatrix} W_L < 0, \tag{42}$$

де $R = \left[C_2,\, D_{21}\right]$, $L = \left[B_2^T,\, D_{12}^T\right]$.

При пошуку J-оптимальних динамічних регуляторів використовуються умови теореми 4.6 при мінімально можливому значенні параметра γ.

Якщо $K \in \mathcal{K}_{D_{22}}$, то $\det\left[I_m - KD_{22}(x)\right] \neq 0$ при $x \in \mathcal{S}_0$, де $\mathcal{S}_0$ — деякий окіл точки $x = 0$, і нелінійна замкнена система (31), (38) набуває вигляду

$$\widehat{x}_{t+1} = \widehat{M}(x_t)\widehat{x}_t + \widehat{N}(x_t) w_t, \quad z_t = \widehat{F}(x_t)\widehat{x}_t + \widehat{G}(x_t) w_t, \tag{43}$$

де всі матричні коефіцієнти є неперервними функціями в $\mathcal{S}_0$. Динамічний регулятор (33) в теоремі 4.6 забезпечує робастну стійкість нульового стану системи (43) зі структурованою невизначеністю вхідного вектора

$$w_t = \gamma^{-1}\Theta z_t, \quad \Theta^T P \Theta \leq Q, \tag{44}$$

а також спільну квадратичну функцію Ляпунова $v(\widehat{x}) = \widehat{x}^T \widehat{X} \widehat{x}$.

У підрозділі 4.4 наводяться результати чисельних експериментів з метою побудови наближених J-оптимальних статичних регуляторів по стану для дискретної системи стабілізації перевернутого маятника на рухомій платформі. Досліджено залежність запасу стійкості і часу перехідного процесу замкненої системи від вагових коефіцієнтів функціоналу якості, які характеризують вплив переміщення платформи і кута відхилення маятника на зважений рівень гасіння обмежених збурень, що діють на платформу.

Хочу висловити щиру подяку моєму науковому керівнику Олексію Григоровичу Мазку та завідувачу відділу математичних проблем механіки та теорії керування Івану Олександровичу Луковському за поради при роботі над дисертацією, а також моїй сім'ї за підтримку.

Розділ 1
ОГЛЯД СТАНУ ДОСЛІДЖЕНЬ

1.1. Класичні методи аналізу стійкості руху, їх розвиток та узагальнення

Математична постановка задачі стійкості руху динамічних систем та класичні методи її розв'язування започатковані в роботі Олександра Михайловича Ляпунова [40]. О.М. Ляпунов вперше ввів означення стійкості, асимптотичної стійкості та нестійкості розв'язків систем диференціальних рівнянь та розробив два методи дослідження, які отримали назву перший та другий (прямий) методи Ляпунова.

При дослідженні різних типів стійкості довільного розв'язку системи диференціальних рівнянь незбуреного руху зазвичай будується відповідна система диференціальних рівнянь збуреного руху

$$\dot{x} = f(x,t), \quad f(0,t) \equiv 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq t_0, \tag{1.1}$$

яка має нульовий розв'язок (стан рівноваги) $x \equiv 0$. Нульовий розв'язок системи (1.1) називається стійким за Ляпуновим, якщо для будь-яких $\varepsilon > 0$ і $t_0 > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ таке, що для довільного розв'язку $x(t)$ при $\|x(t_0)\| \leq \delta$ і $t \geq t_0$ виконується нерівність $\|x(t)\| \leq \varepsilon$. Якщо при цьому $\delta = \delta(\varepsilon)$ не залежить від t_0, то стійкість нульового розв'язку є рівномірною по початковому моменту. Розв'язок $x \equiv 0$ системи (1.1) називається асимптотично стійким, якщо він стійкий за Ляпуновим і для будь-якого $t_0 > 0$ існує $\delta = \delta(t_0) > 0$ таке, що всі розв'язки $x(t)$ при $\|x_0\| \leq \delta$ задовольняють умову $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$. Якщо при цьому множина початкових векторів x_0 (область притягання) заповнює весь простір $\mathbb{R}^n$, то розв'язок $x \equiv 0$ системи (1.1) називається асимптотично стійким в цілому. Розв'язок $x \equiv 0$ системи (1.1) називається експоненціально стійким, якщо існують додатні числа α, β і γ такі, що для довільного розв'язку $x(t)$ при $\|x_0\| \leq \beta$ і $t \geq t_0$ виконується оцінка $\|x(t)\| \leq \gamma \|x_0\| e^{-\alpha(t-t_0)}$.

Перший метод Ляпунова є достатньо простим та ефективним методом, за допомогою якого можна, зокрема, дослідити стійкість розв'язків нелінійних систем на основі лінійного наближення. Для широкого класу систем (1.1) можливе квазілінійне представлення

$$\dot{x} = A(t)\,x + \varphi(x,t), \quad t \geq t_0, \tag{1.2}$$

де $A(t) = \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0}$ — матриця Якобі векторної функції $f(x,t)$, а векторна функція $\varphi(x,t)$ задовольняє умови

$$\|\varphi(x,t)\| \leq \beta \|x\|^{1+\alpha}, \quad x \in \mathcal{S}_0, \quad t \geq t_0, \quad \alpha > 0, \;\; \beta > 0. \tag{1.3}$$

При цьому $\varphi(0,t) \equiv 0$ і дана система має нульовий розв'язок, а система

$$\dot{x} = A(t)\,x, \quad t \geq t_0, \tag{1.4}$$

є лінійним наближенням для системи (1.1). Лінійна система (1.4) називається експоненціально стійкою, якщо для довільного її розв'язку виконується двостороння оцінка

$$\gamma_1\,\|x_0\|\,e^{-\alpha_1(t-t_0)} \leq \|x(t)\| \leq \gamma_2\,\|x_0\|\,e^{-\alpha_2(t-t_0)}, \quad t \geq t_0,$$

де γ_1, γ_2, α_1 і α_2 — деякі додатні сталі. Для класу лінійних систем (1.4) експоненціальна стійкість еквівалентна рівномірній асимптотичній стійкості. Із експоненціальної стійкості системи лінійного наближення (1.4) випливає асимптотична стійкість нульового розв'язку системи (1.2). Якщо система (1.4) є автономною, то із її асимптотичної стійкості (нестійкості) випливає асимптотична стійкість (нестійкість) нульового розв'язку системи (1.2).

Лінійна автономна система

$$\dot{x} = A\,x, \quad t \geq t_0, \tag{1.5}$$

стійка тоді і лише тоді, коли всі власні значення матриці A задовольняють умови $\mathrm{Re}\lambda_j(A) \leq 0$, $j = \overline{1,n}$, причому чисто уявним власним значенням відповідають лише прості елементарні дільники. Система (1.5) є асимптотично стійкою лише тоді, коли $\mathrm{Re}\lambda_j(A) < 0$, $j = \overline{1,n}$. Для асимптотичної стійкості лінійної неавтономної системи (1.4) достатньо, щоб всі її характеристичні показники Ляпунова були від'ємними.

Досить універсальним і ефективним методом в теорії стійкості руху як лінійних, так і нелінійних систем є другий метод Ляпунова — метод функцій Ляпунова. В ряді теорем цього методу введені типи стійкості збуреного руху описуються у вигляді спеціальних властивостей допоміжних функцій $v(x,t)$ та їх похідних по часу в силу системи (знаковизначеність, існування нескінченно малої вищої границі та ін.). В загальному випадку такі функції повинні бути неперервно диференційовними і задовольнять тотожність $v(0,t) \equiv 0$, $t \geq 0$.

Якщо існує додатно визначена функція $v(x,t)$, яка допускає недодатно визначену похідну в силу системи (1.1)

$$\dot{v}(x,t) = \frac{\partial v}{\partial t} + f^T(x,t)\,\mathrm{grad}_x v(x,t),$$

то нульовий стан $x \equiv 0$ даної системи стійкий за Ляпуновим (*перша теорема Ляпунова*). Якщо при цьому функція $v(x,t)$ допускає нескінченно малу вищу границю при $x \to 0$, то нульовий стан $x \equiv 0$ системи рівномірно стійкий (К.П. Персидський).

Якщо існує додатно визначена функція $v(x,t)$, яка допускає нескінченно малу вищу границю при $x \to 0$ і від'ємно визначену похідну в силу системи (1.1), то нульовий стан $x \equiv 0$ даної системи асимптотично стійкий (*друга теорема Ляпунова*). Якщо до того ж існує нескінченно велика нижня границя функції $v(x,t)$ при $x \to \infty$, то нульовий стан $x \equiv 0$ системи асимптотично стійкий в цілому (*теорема Барбашина-Красовського*).

Якщо існує функція $v(x,t)$, яка допускає нескінченно малу вищу границю при $x \to 0$ і знаковизначену похідну $\dot{v}(x,t)$ в силу системи (1.1), причому в довільному околі $\mathcal{S}_0$ стану рівноваги є точка x_0 така, що $v(x_0,t_0)\,\dot{v}(x_0,t_0) > 0$ при деякому $t_0 \geq 0$, то нульовий стан $x \equiv 0$ даної системи нестійкий за Ляпуновим (*третя теорема Ляпунова*). М.Г. Четаєв послабив умови третьої теореми Ляпунова, розглядаючи лише деяку частину околу $\mathcal{S}_0$, яка прилягає до початку координат [69].

Функції $v(x,t)$, які задовольняють умови першої, другої і третьої теорем Ляпунова називаються функціями Ляпунова відповідно першого, другого і третього роду. Основні теореми другого методу Ляпунова допускають зворотні твердження. Зокрема, для системи знайдені умови існування функцій Ляпунова першого роду (К.П. Персидський) та другого роду (Х.Л. Массера) [35, 52].

Друга теорема Ляпунова посилена для нелінійних автономних систем

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0, \quad t \geq t_0. \tag{1.6}$$

Якщо існує додатно визначена функція $v(x)$, яка допускає недодатно визначену похідну $\dot{v}(x)$ в силу системи (1.6), причому множина $\{x : \dot{v}(x) = 0\}$ не містить цілих траєкторій системи (1.6), окрім точки $x = 0$, то стан $x \equiv 0$ даної системи асимптотично стійкий (Є.А. Барбашин, Н.Н. Красовський).

Методом функцій Ляпунова встановлені умови експоненціальної стійкості нульового стану класу систем (1.1) (Н.Н. Красовський). Лінійна система (1.4) є експоненціально стійкою тоді і лише тоді, коли для деякої неперервної симетричної матриці $Y(t)$ існує неперервно диференційовний розв'язок $X(t)$ матричного диференціального рівняння Ляпунова

$$\dot{X}(t) + A^T(t)X(t) + X(t)A(t) = Y(t), \tag{1.7}$$

причому $\varepsilon_1 I_n \leq X(t) \leq \varepsilon_2 I_n, \quad -\delta_1 I_n \leq Y(t) \leq -\delta_2 I_n, \quad t \geq t_0$, де ε_1, ε_2, δ_1 і δ_2 — деякі додатні сталі. Лінійна автономна система (1.5) асимптотично стійка тоді і лише тоді, коли для будь-якої матриці $Y = Y^T < 0$ існує єдиний розв'язок $X = X^T > 0$ матричного алгебраїчного рівняння Ляпунова

$$A^T X + XA = Y. \tag{1.8}$$

Розв'язки матричних рівнянь (1.7) і (1.8) є ваговими матрицями квадратичних функцій Ляпунова $v(x,t) = x^T X(t) x$ і $v(x) = x^T X x$ для відповідних класів систем.

Розвитку та узагальненню методу функцій Ляпунова у різних напрямках присвячено роботи А.І. Лур'є, М.Г. Четаєва, І.Г. Малкіна, О.М. Лєтова, Є.О. Барбашина, М.М. Красовського, В.І. Зубова, К.Г. Персидського, В.В. Рум'янцева, В.М. Матросова, А.А. Мартинюка, Д.Я. Хусаінова, Ж. Ла-Салля, Т. Йошизава та ін. Значна кількість робіт присвячено методам побудови функцій Ляпунова для різних типів систем (див., наприклад, [12, 14, 16, 21–23, 30, 39, 55, 61, 66]). Проте, до теперішнього часу не розроблено універсальних конструктивних методів їх побудови для нелінійних систем, оскільки в загальному випадку для цього необхідно побудувати інтеграл системи. К.П. Персидським було показано, що функцію Ляпунова можна побудувати у вигляді суми квадратів інтегралів системи. Для класу консервативних систем як аналоги функцій Ляпунова використовують функції дії за Гамільтоном.

Якщо для конкретної системи вдається вдало побудувати функцію Ляпунова, то це дозволяє вирішувати багато практичних задач, зокрема, оцінки часу та якості регулювання, опису області притягання у фазовому просторі та впливу постійно діючих збурень тощо. Прямий метод дозволяє вирішувати проблему існування або відсутності періодичних розв'язків нелінійних систем, встановити їх обмеженість та оцінити інтегральні критерії якості [12, 24, 29]. Методом функцій Ляпунова вирішується проблема практичної стійкості, що дає можливість оцінити область у фазовому просторі, де знаходяться траєкторії системи (див., наприклад, [13]).

Виділимо клас нелінійних систем у векторно-матричній формі

$$\dot{x} = A(x,t)\,x, \quad t \geq t_0, \tag{1.9}$$

де $A(x,t)$ — неперервна матрична функція. Нелінійні системи подібної структури іноді називають квазілінійними. Нульовий стан $x \equiv 0$ є станом рівноваги системи (1.9). При вивченні стійкості даного стану доцільним є застосування методу квадратичних функцій Ляпунова $v(x,t) = x^T X(t) x$ з неперервно диференційовною додатно визначеною матрицею $X(t)$. В цьому випадку вираз похідної за часом в силу системи (1.9) представляється у вигляді:

$$\dot{v}(x,t) = x^T Y(x,t) x, \quad Y(x,t) = \dot{X}(t) + A^T(x,t) X(t) + X(t) A(x,t).$$

Слід зазначити, що кожна диференціальна система (1.1) з неперервно диференційовною векторною функцією f може бути представлена у вигляді (1.9), при цьому

$$A(x,t) = \frac{1}{n} \int_0^1 J(\theta x, t)\, d\theta, \quad J(x,t) = \left\| \frac{\partial f_i(x,t)}{\partial x_j} \right\|_{i,j=1}^n,$$

де $J(x,t)$ — матриця Якобі векторної функції $f(x,t)$.

Розглянемо більш загальний, ніж (1.2), клас систем

$$E(x)\dot{x} = A(x,t)\, x + \varphi(x,t), \quad t \geq t_0, \tag{1.10}$$

де $E(x)$ і $A(x,t)$ — неперервні і обмежені матричні функції при $x \in \mathcal{S}_0$ і $t \geq t_0$, а векторна функція $\varphi(x,t)$ задовольняє умови (1.3). Якщо існує матрична функція $X(t)$, для якої виконуються співвідношення

$$\varepsilon_1 I_n \leq X(t) \leq \varepsilon_2 I_n, \quad 0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2,$$

$$E_0^T \dot{X}(t) E_0 + A_0^T(t) X(t) E_0 + E_0^T X(t) A_0(t) + \varepsilon_0 I_n \leq 0, \quad \varepsilon_0 > 0,$$

де $E_0 = E(0)$ і $A_0(t) = A(0,t)$, то нульовий стан $x \equiv 0$ системи (1.10) асимптотично стійкий [42]. При цьому $v(x,t) = x^T E_0^T X(t) E_0 x$ є функцією Ляпунова другого роду даної системи.

Істотним розвитком і узагальненням методу функцій Ляпунова в теорії стійкості є метод порівняння систем. При цьому роль функції Ляпунова виконує оператор, що відображає простір станів досліджуваної складної системи в простір станів допоміжної системи порівняння. Розв'язки систем порівняння мають властивості типу монотонності щодо деякого конуса в просторі станів, що істотно спрощує дослідження їх стійкості і асимптотичних властивостей.

Розглянемо в просторі $\mathbb{R}^r$ конус невід'ємних векторів $\mathcal{K} = \mathbb{R}^r_+$ і диференціальну систему

$$\dot{y} = F(y,t), \quad v(0,t) \equiv 0, \quad t \geq t_0, \tag{1.11}$$

права частина якої визначена в деякому околі точки $y = 0$. Векторна функція $F(y,t)$ називається квазімонотонно зростаючою відносно конуса $\mathcal{K}$, якщо при всіх $i = \overline{1,r}$ і $t \geq t_0$ виконується умова

$$y \overset{\mathcal{K}}{\leq} z, \quad y_i = z_i \implies F_i(y,t) \leq F_i(z,t). \tag{1.12}$$

Зокрема, якщо $F(y,t)$ дифференційовна по компонентам y, то умова (1.12) еквівалентна співвідношенням $\frac{\partial F_i(y,t)}{\partial y_j} \geq 0$, $i \neq j$, $t \geq t_0$. Системи виду (1.11), для яких виконуються умови (1.12), називаються системами Важевського [54]. Конус $\mathcal{K}$ є інваріантною множиною даного класу систем. Стан $y \equiv 0$ системи (1.11) називається стійким у конусі $\mathcal{K}$, якщо для будь-яких $\varepsilon > 0$ і $t_0 \geq 0$ знайдеться таке $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, що

$$y_0 \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0, \quad \|y_0\| \leq \delta \implies y(t) \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0, \quad \|y(t)\| \leq \varepsilon, \quad t \geq t_0.$$

Якщо при цьому $\|y(t)\| \to 0$ для деякого $\delta > 0$, то стан $y \equiv 0$ системи (1.11) асимптотично стійкий в конусі $\mathcal{K}$.

Якщо існує неперервно диференційовна вектор-функція $v(x,t) = [v_1(x,t), ..., v_r(x,t)]^T$ така, що 1) $v(0,t) \equiv 0$, 2) функція $v_0(x,t) = \max\limits_j v_j(x,t)$ додатно визначена і допускає нескіннченно малу вищу границю при $x \to 0$, 3) для деякої квазімонотонно зростаючої функції $F(y,t)$ при $t \geq t_0$ виконується конусна нерівність $\dot{v}(x,t) \overset{\mathcal{K}}{\leq} F(v(x,t),t)$, де $\dot{v}(x,t)$ — похідна функції $v(x,t)$ в силу системи (1.1), то із стійкості (рівномірної асиптотичної стійкості) стану $y \equiv 0$ системи (1.11) випливає стійкість (рівномірна асимптотична стійкість) стану $x \equiv 0$ системи (1.1) (В.М. Матросов [1]). Якщо при цьому всі компоненти векторної функції $v(x,t)$ невід'ємно визначені, то для стійкості (асимптотичної стійкості) стану $y \equiv 0$ системи (1.1) достатньо, щоб стан $y \equiv 0$ системи (1.12) був стійким (асимптотично стійким) в конусі $\mathcal{K}$. Якщо система Важевського (1.12) автономна, то критерієм асимптотичної стійкості стану $y \equiv 0$ в конусі $\mathcal{K}$ є сумісність системи конусних нерівностей (А.А. Мартинюк, А.Ю. Оболенський [53])

$$F(y) \overset{\mathcal{K}}{<} 0, \quad y \overset{\mathcal{K}}{>} 0.$$

Методи порівняння узагальнено для неперервних та дискретних систем із застосуванням різних типів конусів [28, 37, 88], що дозволило, зокрема, сформулювати теореми про робастну стійкість динамічних систем з невизначеностями, які описуються за допомогою конусних нерівностей [88, 89].

На практиці широко застосовують методи аналізу та синтезу динамічних систем, математичні моделі яких містять невизначені елементи (параметри, коефіцієнти, функції тощо). Спільний стан рівноваги сім'ї систем, яку описують множини невизначених елементів, називається робастно стійким, якщо він асимптотично стійкий при довільних фіксованих значеннях невизначених елементів із даних множин. В роботах [58,59] наведена класифікація типів невизначеностей, які виникають при моделюванні систем керування. При цьому одночасно досліджується сім'я систем, яка визначена або за допомогою деякої множини параметрів (параметрична невизначеність), або за допомогою певної смуги в частотній області (частотна або неструктурована невизначеність), або за допомогою деякої допустимої множини матричних коефіцієнтів (матрична невизначеність). Якщо невідомі параметри є випадковими говорять про ймовірнісну невизначеність. Для практичного застосування досить зручною є інтервальна невизначеність параметрів та коефіцієнтів системи. Створено математичний апарат, який дозволяє одночасно досліджувати різні типи невизначеностей в системах керування (μ-аналіз) [77].

Про важливість проблеми стійкості для невизначених систем було зрозуміло ще в класичних роботах. І.А. Вишнеградський вперше сформулював задачу оцінки стійкості стаціонарної параметрично збуреної динамічної системи (параметри відомі неточно, але фіксовані) [15]. Основою його підходу була побудова області в просторі параметрів, якій відповідає асимптотична стійкість або задане розміщення коренів характеристичного рівняння. За допомогою методу А.М. Ляпунова можна проводити аналіз стійкості у просторі станів при параметричних збуреннях. Г. Найквіст в 1932 р запропонував частотний критерій для дослідження стійкості лінійних стаціонарних систем при непараметричних збуреннях. Критерій В.М. Попова (1958 р.) дає умови абсолютної стійкості станів рівноваги систем регулювання.

Прикладом теоретично красивого розв'язання однієї із практично важливих задач теорії робастної стійкості є теорема Харитонова для матриці лінійної системи (1.5) у формі Фробеніуса з інтервальним характеристичним поліномом

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n = 0, \quad \underline{a} \overset{\mathcal{K}}{\leq} a \overset{\mathcal{K}}{\leq} \overline{a}, \tag{1.13}$$

де $a = [a_0, \ldots, a_{n-1}]^T$, $\overline{a} = [\overline{a}_0, \ldots, \overline{a}_{n-1}]^T$, $\underline{a} = [\underline{a}_0, \ldots, \underline{a}_{n-1}]^T$ [64]. Для того, щоб інтервальний поліном (1.13) був гурвіцевим, необхідно і достатньо, щоб були гурвіцевими чотири поліноми Харитонова:

$$f_1(\lambda) = \overline{a}_0 + \underline{a}_1\lambda + \underline{a}_2\lambda^2 + \overline{a}_3\lambda^3 + \overline{a}_4\lambda^4 + \ldots,$$

$$f_2(\lambda) = \overline{a}_0 + \overline{a}_1\lambda + \underline{a}_2\lambda^2 + \underline{a}_3\lambda^3 + \overline{a}_4\lambda^4 + \ldots,$$

$$f_3(\lambda) = \underline{a}_0 + \overline{a}_1\lambda + \overline{a}_2\lambda^2 + \underline{a}_3\lambda^3 + \underline{a}_4\lambda^4 + \ldots,$$

$$f_4(\lambda) = \underline{a}_0 + \underline{a}_1\lambda + \overline{a}_2\lambda^2 + \overline{a}_3\lambda^3 + \underline{a}_4\lambda^4 + \ldots.$$

В цьому напрямку важливими є графічний критерій робастної стійкості поліномів [57], а також реберна теорема [73]. Слід зазначити, що аналога критерія Харитонова для лінійних дискретних систем не існує (див, наприклад, [34, 68]). В роботі [34] наведено достатні умови робастної стійкості лінійної неавтономної дискретної системи з матрицею у формі Фробеніуса.

При дослідженні задач робастної стійкості для класу систем типу (1.9) з невизначеною матрицею A застосовується апарат ЛМН. Так, умови робастної стійкості сім'ї лінійних систем (1.5) з матрицею $A \in \mathrm{Co}\{A_1, \ldots, A_\nu\}$, наведені в [4, 82], зводяться до сумісності системи ЛМН:

$$A_iX_j + X_jA_i^T + A_jX_i + X_iA_j^T < 2t_{ij}I, \quad X_j > I, \quad T = \|t_{ij}\|_{i,j=1}^{\nu} < 0.$$

Для асимптотичної стійкості нульового стану нелінійної автономної системи (1.9) достатньо виконання однієї із умов [72]:

1) $\lambda_{\max}[A(x) + A^T(x)] < 0$, $x \in \mathbb{R}^n$;

2) $a_{ii}(x) \leq h < 0 \; (x \neq 0)$, $\dfrac{1}{d_i} \displaystyle\sum_{j=1 (j \neq i)}^{n} d_j \frac{|a_{ij}(x)|}{|a_{ii}(x)|} \leq \delta < 1$,

де $h < 0$, $\delta \in (0,1)$ і $d_i > 0$, $i = \overline{1,n}$. Наведені умови описують відповідну функціональну невизначеність даної системи. В загальному випадку для класу систем (1.9) доцільно використовувати поліедральну невизначеність коефіцієнтів. Нульовий стан $x \equiv 0$ системи (1.9) з невизначеністю $A(x,t) \in \mathrm{Co}\{A_1, \ldots, A_\nu\}$ робастно стійкий, якщо для деякої симетричної матриці X виконується система ЛМН [75]

$$X > 0, \quad A_k^T X + X A_k < 0, \quad k = \overline{1,\nu}.$$

Аналогічне твердження справедливе для сім'ї нелінійних дискретних систем

$$x_{t+1} = A(x_t,t)x_t, \quad A(x_t,t) \in \mathrm{Co}\{A_1, \ldots, A_\nu\}, \quad x_t \in \mathbb{R}^n, \ \ t = 0,1,\ldots,$$

із використанням системи ЛМН

$$X > 0, \quad A_k^T X A_k - X < 0, \quad k = \overline{1,\nu}.$$

В наведених твердженнях $v(x) = x^T X x$ є спільною квадратичною функцією Ляпунова для відповідних класів систем.

З розвитком методів Ляпунова дослідження стійкості та нестійкості розв'язків диференціальних систем у банаховому просторі можна ознайомитися в роботах [19, 62]. Другий метод Ляпунова ефективно застосовується при розв'язанні практичних задач автоматичного регулювання, стабілізації та оптимізації параметрів складних динамічних систем, що функціонують під впливом постійно діючих збурень [6, 7, 59].

Динаміка багатьох механічних об'єктів описується у вигляді системи диференціальних рівнянь другого порядку

$$C\ddot{x} + B\dot{x} + Ax = f(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq t_0, \tag{1.14}$$

яка отримується на основі рівняння Лагранжа другого роду у випадку, коли потенціальна і кінетична енергії подаються у вигляді квадратичних форм узагальнених координат x і швидкостей $\dot{x}$. Матриця мас $C = C^T$ описує інерційні властивості системи, матриця $B = D + G$ складається із матриці дисипативних ($D = D^T$) та гіроскопічних ($G = -G^T$) сил, а складовими

матриці $A = K + S$ є матриці потенціальних ($K = K^T$) та неконсервативних позиційних ($S = -S^T$) сил [25, 26, 31]. В загальному випадку матричні коефіцієнти в (1.14) можуть залежати від x, $\dot{x}$ і t. Методи структурних перетворень системи (1.14), запропоновані в [32, 33]), дозволяють виключити матрицю неконсервативних позиційних сил S, при відсутності яких виконуються наступні твердження (теореми Томсона-Тета-Четаєва [22, 69, 94]):
1) якщо $\det K < 0$, то система нестійка; 2) якщо $K > 0$ і $D \geq 0$, то система стійка; 3) якщо $K > 0$ і $D > 0$, то система асимптотично стійка; 4) якщо $D > 0$ і матриця K має від'ємні власні значення, то система нестійка.

В роботах [2, 3, 42] побудовано алгебраїчні умови стійкості і методи стабілізації механічних систем на основі матричних нерівностей та властивостей гіперболічних пучків матриць. Досліджено також умови робастної стійкості систем типу (1.14) з поліедральною невизначеністю коефіцієнтів. Зокрема, встановлено, що якщо

$$A \in \mathrm{Co}\left\{A_1, \ldots, A_{\nu_1}\right\}, \quad B \in \mathrm{Co}\left\{B_1, \ldots, B_{\nu_2}\right\}, \tag{1.15}$$

і для деяких $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ($\alpha+\beta \geq 2$) виконується система матричних нерівностей

$$A_i^T C^{-1} B_j + B_j^T C^{-1} A_i > (\alpha A_i - \beta A_i^T)(B_j + B_j^T)^{-1}(\alpha A_i^T - \beta A_i),$$

$$C = C^T > 0, \quad B_j + B_j^T > 0, \quad \alpha(A_i + A_i^T) \geq 0, \quad i = \overline{1, \nu_1}, \quad j = \overline{1, \nu_2},$$

то нульовий стан системи (1.14) робастно стійкий відносно невизначеностей (1.15). Умови робастної стійкості лінійної системи (1.14) можуть бути сформульовані також в термінах власних значень квадратичних гіперболічних пучків матриць [42].

1.2. Сучасні методи стабілізації динамічних систем

Стабілізація руху динамічних систем є однією із основних задач теорії керування. В 30-ті роки минулого століття домінували частотні методи стабілізації систем і відповідні частотні критерії стійкості (Найквіста, Михайлова). Ці методи були розповсюджені на імпульсні та дискретні системи, а також на деякі класи нелінійних систем в задачах абсолютної стійкості систем регулювання (Лур'є, Айзерман, Попов). Методи простору станів, які складають основу сучасних напрямків в теорії керування, виникли в 1950-х роках в результаті розвитку космічної і авіаційної техніки. Динаміка системи в рамках цих методів описується диференціальними або різницевими системами рівнянь. Правих частини цих рівнянь містять невідомі функції (керування), які необхідно знайти з метою стабілізації бажаних траєкторій або положень рівноваги.

Найпростіша модель лінійної системи керування має вигляд

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad u = Kx, \tag{1.16}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$ і $u \in \mathbb{R}^m$ — вектори відповідно стану і керування, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — матриця коефіцієнтів системи, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ — матриця входу, а $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — невідома матриця коефіцієнтів підсилення статичного зворотного зв'язку по стану. Система (або пара матриць (A, B)) називається стабілізованою, якщо існує матриця зворотного зв'язку K, для якої замкнена система асимптотично стійка. Пара матриць (A, B) називається детектованою, якщо пара матриць (A^T, B^T) стабілізована. Достатньою умовою стабілізованості системи є критерій керованості Калмана $\operatorname{rank}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n$.

Стабілізуючу матрицю K в системі (1.16) можна знайти за допомогою принципу максимуму Понтрягіна або методу динамічного програмування Белмана в задачі мінімізації квадратичного функціоналу якості

$$J(u, x_0) = \int_0^\infty \varphi(x, u)\, dt,\ \varphi(x, u) = \left[x^T, u^T\right] \Phi \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix},\ \Phi = \begin{bmatrix} S & N \\ N^T & R \end{bmatrix}, \tag{1.17}$$

де $x_0 = x(0)$ — початковий вектор, а блоки симетричної матриці Φ задовольняють умови $R > 0$ і $S \geq NR^{-1}N^T$. Якщо пара матриць (A^T, B^T) стабілізована, а пара матриць (M, C), де $M = A - BR^{-1}N^T$ і $S - NR^{-1}N^T = C^TC \geq 0$, детектована, то матричне рівняння Ріккаті

$$A^TX + XA - (XB + N)R^{-1}(B^TX + N^T) + S = 0 \tag{1.18}$$

має єдиний розв'язок $X = X^T \geq 0$, а замкнена система (1.16) з матрицею керування $K = -R^{-1}(B^T X + N^T)$ є асимптотично стійкою, при цьому досягається мінімальне значення функціоналу $J(u, x_0) = x_0^T X x_0$ [99].

Із теореми Ляпунова випливають конструктивні методи побудови стабілізуючих матриць зворотного зв'язку K, що базуються на розв'язанні лінійних матричних нерівностей (див., наприклад [8, 42, 58]), зокрема:

$$K = ZX^{-1}, \quad AX + XA^T + BZ + Z^T B^T < 0$$

або

$$K = -B^T X^{-1}, \quad AX + XA^T < 2BB^T.$$

При цьому $v(x) = x^T X^{-1} x$ є функцією Ляпунова замкненої системи.

Задача стабілізації суттєво ускладнюється для класу лінійних систем

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du. \tag{1.19}$$

Тут вектор спостережуваного виходу $y \in \mathbb{R}^l$ є лінійною комбінацією векторів стану та керування, що призводить до певних обмежень на шукану матрицю зворотного зв'язку K:

$$u = Ky, \quad \det(I_m - KD) \neq 0. \tag{1.20}$$

Задача стабілізації системи по виходу відноситься до категорії складних задач теорії керування [60] і в повній мірі не розв'язана. У [4, 98] проведений огляд відомих методів стабілізації лінійних систем за допомогою статичного зворотного зв'язку по виходу. Наведемо деякі із них у випадку $D = 0$ (див., наприклад, [8, 76, 79, 85]:

1) Існує керування (1.20), що забезпечує асимптотичну стійкість замкненої системи (1.19), (1.20), тоді і лише тоді, коли для деякої матриці $X = X^T > 0$ виконується система співвідношень

$$B^{\perp T}(AX + XA^T)\, B^{\perp} < 0, \quad C^{\perp}(A^T X^{-1} + X^{-1} A)\, C^{\perp T} < 0.$$

При цьому стабілізуючу матрицю K можна знайти як розв'язок ЛМН

$$AX + XA^T + BKCX + XC^T K^T B^T < 0.$$

2) Якщо для деяких матриць K і $X = X^T > 0$ виконується матрична нерівність

$$AX + XA^T - XC^TCX + (BK + XC^T)(BK + XC^T)^T < 0$$

то керування (1.20) забезпечує асимптотичну стійкість замкненої системи (1.19), (1.20).

3) Якщо пара матриць (A, B) стабілізована, пара матриць (A, C) детектована і матричне рівняння

$$AX + XA^T - XC^TCX + (BK + XC^T)(BK + XC^T)^T = -BB^T$$

сумісне відносно K і $X = X^T \geq 0$, то керування (1.20) забезпечує асимптотичну стійкість замкненої системи (1.19), (1.20).

У випадках, коли властивості керованості і спостережуваності системи не гарантують для неї існування статичного стабілізуючого регулятора по виходу застосовуються динамічні регулятори або статичний зворотний зв'язок по стану спостерігача [7, 42, 58]. Формально задачі керування за допомогою динамічних регуляторів і спостерігачів зводяться до відповідних задач керування зі статичним зворотним зв'язком у розширеному фазовому просторі системи [42].

В сучасній теорії керування велика увага приділяється задачам стабілізації неперервних та дискретних систем з невизначеними елементами. Зокрема, для класу лінійних систем керування з афінною невизначеністю

$$\begin{gathered}\dot{x} = \left[A_0 + \sum_{i=1}^{k} A_i r_i(t)\right] x + \left[B_0 + \sum_{i=1}^{l} B_i r_i(t)\right] u, \\ |r_i(t)| \leq \overline{r}, \quad i = 1, \ldots, k, \quad |s_i(t)| \leq \overline{s}, \quad i = 1, \ldots, l,\end{gathered} \tag{1.21}$$

де $r_i(t)$ і $s_i(t)$ — невизначені функції, можна побудувати стабілізуюче керування у вигляді $u = -\gamma R^{-1} B_0^T P x$, де $\gamma > 0$ — достатньо велике чимсло, P — додатно визначений розв'язок алгебраїчного рівняння Ріккаті [38, 93].

Багато робіт присвячено задачам стабілізації та оптимізації систем з параметричною невизначеністю. Наприклад, для сім'ї систем

$$\dot{x} = A(p)x + Bu, \quad p \in \mathcal{P}, \tag{1.22}$$

де $A(p)$ — матриця, лінійно залежна від вектора параметрів $p \in \mathcal{P}$, умови робастної стабілізації формулюються наступним чином [58]. Якщо існують матриці $X = X^T > 0$ і Y, що задовольняють параметричній системі матричних нерівностей

$$A(p)X + XA^T(p) + BY + Y^T B^T < 0, \quad p \in \mathcal{P},$$

то статичний регулятор

$$u = Kx, \quad K = YX^{-1}, \tag{1.23}$$

робастно стабілізує систему (1.22) при всіх $p \in \mathcal{P}$, а квадратична форма $v(x) = x^T X^{-1} x$ є спільною функцією Ляпунова для відповідної сім'ї замкнених систем (робастна квадратична стабілізація [59]). При цьому множина невизначеності $\mathcal{P}$ може бути інтервальною, поліедральною або афінною. В [58] наведено також керування, яке при всіх значеннях параметрів $p \in \mathcal{P}$ забезпечує заданий рівень γ квадратичного критерію якості.

Для лінійної системи зі структурованою матричною невизначеністю

$$\dot{x} = (A + F\Delta H)x + Bu, \quad \|\Delta\| \leq \gamma, \quad \Delta \in \mathbb{R}^{p\times q}, \tag{1.24}$$

умови робастної квадратичної стабілізації за допомогою регулятора (1.23) зводяться до системи ЛМН

$$\begin{bmatrix} AX + XA^T + BY + Y^T B^T + \gamma^2 FF^T & XH^T \\ HX & -I_q \end{bmatrix} < 0, \quad X > 0. \tag{1.25}$$

При цьому $v(x) = x^T X^{-1} x$ є спільною функцією Ляпунова для відповідної сім'ї замкнених систем [59].

Для лінійної системи (1.19) побудовано множина стабілізуючих керувань

$$u = Ky, \quad K^T K \leq \eta^2 I_l, \tag{1.26}$$

на основі неущербленості так званої S-процедури [7]. Замкнена система (1.19), (1.26) асимптотично стійка зі спільною функцією Ляпунова $v(x) = x^T X x$, якщо існує матриця $X = X > 0$, яка задовольняє ЛМН

$$\Omega_\gamma = \begin{bmatrix} A^T X + XA & XB & C^T \\ B^T X & -\gamma I_m & D^T \\ C & D & -\gamma I_l \end{bmatrix} < 0, \tag{1.27}$$

де $\gamma = \eta^{-1}$. Розроблено метод знаходження максимального значення $\eta = \eta_{\max}$, при якому система (1.19) з невизначеністю (1.26) асимптотично стійка. Така величина $\eta_{\max}$ називається радіусом робастної стабілізації системи (1.19), (1.26). Аналогічний результат отриманий для класу лінійних дискретних систем.

Узагальнення даного факту сформульвано в [42]. Розглядається клас нелінійних систем керування, які можуть бути представлені у векторно-матричній формі

$$\dot{x} = A(x,t)\,x + B(x,t)\,u, \quad y = C(x,t)\,x + D(x,t)\,u, \tag{1.28}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^l$, а матричні коефіцієнти A, B, C і D відповідних розмірів неперервно залежать від x і t. Стабілізуюче керування шукається у вигляді лінійного зворотного зв'язку по виходу

$$u = K(x,t)\,y, \tag{1.29}$$

$$\det[I_m - K(x,t)D(x,t)] \neq 0, \quad x \in \mathcal{S}_0, \quad t \geq 0, \tag{1.30}$$

де $\mathcal{S}_0$ — деякий окіл стану рівноваги $x \equiv 0$. Будується множина стабілізуючих матричних функцій зворотнього зв'язку (1.29) у вигляді

$$K(x,t) = K_*(x,t) + \widetilde{K}(x,t), \quad \widetilde{K}(x,t) \in \mathcal{K}, \tag{1.31}$$

де $\mathcal{K} = \{K : K^T P K \leq Q\}$ — еліпсоїдальна множина матриць, $P = P^T > 0$, $Q = Q^T > 0$, а $K_*(x,t)$ — деяка матрична функція, що задовольняє умову (1.30) і забезпечує асимптотичну стійкість нульового стану замкненої системи з регулятором типу (1.29). Доведено, що якщо для деяких матричних функцій $X(t) = X^T(t)$ і $K_*(x,t)$ при $x = 0$ і $t \geq 0$ виконуються співвідношення

$$\Delta(x,t) = D^T Q D - G^T P G < 0, \quad \varepsilon_1 I_n \leq X(t) \leq \varepsilon_2 I_n, \quad 0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2,$$

$$\Omega(t) = \begin{bmatrix} \dot{X} + M_*^T X + X M_* + \varepsilon_0 I_n & X B_* & C_*^T \\ B_*^T X & -P & D_*^T \\ C_* & D_* & -Q^{-1} \end{bmatrix} \leq 0, \quad \varepsilon_0 > 0,$$

де $G = I_m - K_* D$, $M_* = A + B\mathcal{D}(K_*)C$, $B_* = B(I_m - K_* D)^{-1}$, $C_* = (I_l - DK_*)^{-1}C$, $D_* = (I_l - DK_*)^{-1}D$, то будь яке керування (1.29), (1.31) забезпечує асимптотичну стійкість стану $x \equiv 0$ системи (1.28) та спільну квадратичну функцію Ляпунова $v(x) = x^T X(t) x$. В роботі [42] також сформульовано аналог цього твердження для дискретних систем.

В [83] розроблено методи робастної стабілізації для широкого класу нелінійних неавтономних систем, які подаються у вигляді

$$\dot{x} = A(\cdot)x + B(\cdot)u, \tag{1.32}$$

де матричні коефіцієнти $A(\cdot)$ і $B(\cdot)$ можуть залежати від t, x, $x(t-h)$ та $\int_{t_0}^{t} x(\xi)d\xi$, а також від невизначених параметрів. У вигляді (1.32) можуть бути приедставлені деякі класи нелінійних диференціальних систем із запізненням та інтегро-диференціальних систем керування. В роботі [67] розглянуто нелінійні різницеві системи аналогічного типу з інтервальними коефіцієнтами із запізненням. Встановлено достатні умови абсолютної стійкості на основі другого методу Ляпунова з використанням функціоналу Ляпунова–Красовського.

В кінці минулого століття виник принципово новий клас задач в теорії керування — H_∞–теорія, основними засновниками якої вважаються G. Zames, B.A. Francis, J.C. Doyle і D. Glover. В цьому напрямку досліджень об'єднались частотні методи і методи простору станів, що дозволило по-новому розв'язувати проблеми стабілізації та оптимізації як неперервних, так і дискретних систем керування при наявності зовнішніх збурень і невизначеностей. Зокрема, для системи (1.19) з нульовим початковим вектором $x(0) = 0$ розглядається критерій якості

$$J = \sup_{0 < \|u\|_2 < \infty} \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2}, \quad \|y\|_2^2 = \int_0^\infty y^T y \, dt, \ \ \|u\|_2^2 = \int_0^\infty u^T u \, dt, \tag{1.33}$$

де вирази $\|y\|_2$ і $\|u\|_2$ визначають L_2-норму векторних функцій у відповідних просторах. Значення J співпадає з H_∞-нормою передатної матричної функції системи від входу u до виходу y (див., наприклад, [58, 97, 100])

$$\|H\|_\infty = \sup_{\omega\in\mathbb{R}} \sqrt{\lambda_{\max}(H^T(-i\omega)H(i\omega))}, \quad H(\lambda) = C(\lambda I_n - A)^{-1}B + D,$$

яка характеризує рівень гасіння енергії вхідних сигналів при їх проходженні через дану систему. При розв'язанні різних задач керування бажано, щоб дана характеристика була мінімальною.

Оцінка $J < \gamma$, еквівалентна частотній нерівності $H^T(-i\omega)H(i\omega) < \gamma^2 I_m$ $(\omega \in \mathbb{R})$, виконується тоді і тільки тоді, коли для деякої матриці $X = X^T > 0$ виконується лінійна матрична нерівність (1.27) (див., наприклад, [81,96]). При цьому матриця A повинна бути гурвіцевою, а система (1.19) зі структурованою невизначеністю вхідного вектора (1.26) робастно стійка зі спільною функцією Ляпунова $v(x) = x^T X x$. В результаті характеристика (1.33) визначається як розв'язок оптимізаційної задачі: $J = \inf\left\{\gamma : \Omega_\gamma < 0,\ X = X^T > 0\right\}$.

Загальні моделі систем керування в рамках лінійної H_∞-теорії подаються у вигляді

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u, \quad x(0) = x_0,\\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u, \\ y &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u, \end{aligned} \tag{1.34}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $w \in \mathbb{R}^s$, $z \in \mathbb{R}^k$ і $y \in \mathbb{R}^l$ — вектори відповідно стану, керування, зовнішніх збурень, керованого і спостережуваного виходів. Закони керування будуються у вигляді статичних або динамічних регуляторів по спостережуваному виходу, зокрема, по стану системи. В [10] у випадку $D_{22} = 0$ отримано критерій існування динамічного регулятора повного порядку $r = n$ з нульовим початковим вектором

$$\dot{x}_r = A_r x_r + B_r y, \quad u = C_r x_r + D_r y, \quad x_r(0) = 0,$$

який забезпечує бажану оцінку для зваженого критерію якості

$$J_\rho = \sup_{0<\|w\|_2^2+\rho^2 x_0^T x_0<\infty} \frac{\|z\|_2}{\sqrt{\|w\|_2^2 + \rho^2 x_0^T x_0}} < \gamma. \tag{1.35}$$

Застосування даного критерію зводиться до знаходження матриць $X > 0$ і $Y > 0$, які задовольняють систему ЛМН

$$\begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^TX + XA & XB_1 & C_1^T \\ B_1X & -\gamma^2 I & D_{11}^T \\ C_1 & D_{11} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0,$$

$$\begin{bmatrix} N_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} AY + YA^T & YC_1^T & B_1 \\ C_1Y & -I & D_{11} \\ B_1^T & D_{11}^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0, \tag{1.36}$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \geq 0, \quad 0 < X < \rho^2\gamma^2 I,$$

де стовпці матриць N_1 і N_2 утворюють базиси ядер відповідних блочних матриць $\big[C_2,\, D_{21}\big]$ і $\big[B_2^T,\, D_{12}^T\big]$. В [10] при виконанні умов (1.36) вказано також спосіб побудови динамічного регулятора, що забезпечує оцінку (1.35).

В теорії керування широко використовується техніка інваріантних множин, як засіб розв'язання задач гарантованих оцінок, фільтрації і мінімаксного оцінювання в динамічних системах з невизначеністю [34, 59, 68, 74]. Наприклад, за допомогою інваріантних множин апроксимують області досяжності динамічних систем. Серед інваріантних множин найбільш зручними є інваріантні еліпсоїди, які описуються у вигляді

$$\mathcal{E}_x = \big\{x \in \mathbb{R}^n : x^T P^{-1} x \leq 1\big\}, \quad P = P^T > 0. \tag{1.37}$$

Побудова інваріантних еліпсоїдів для динамічних систем безпосередньо пов'язана з методом квадратичних функцій Ляпунова і технікою ЛМН [56, 59, 65]. Метод інваріантних еліпсоїдів є один із ефективних засобів погашення зовнішніх збурень у системах керування. Синтез оптимального керування за цим методом зводиться до пошуку так званого *мінімального інваріантного еліпсоїда* замкнутої динамічної системи. Якщо в системі (1.19) матриця A — Гурвіцева, пара (A, B) керована, $\operatorname{rank} C = l$ і $D = 0$, а вхідний вектор u обмежений ($\|u(t)\| \leq 1$), то еліпсоїд (1.37) є інваріантним по стану даної системи тоді і лише тоді, коли для деякого $\alpha > 0$ виконується матрична нерівність

$$AP + PA^T + \alpha P + \frac{1}{\alpha}BB^T < 0. \tag{1.38}$$

При цьому множина досяжних виходів $y(t)$ даної системи належить еліпсоїду

$$\mathcal{E}_y = \left\{ y \in \mathbb{R}^l : y^T (CPC^T)^{-1} y \leq 1 \right\}. \tag{1.39}$$

Це означає, що оцінка міри впливу L_∞-обмежених вхідних сигналів або зовнішніх збурень на вектор виходу $y(t)$ системи керування зводиться до знаходження мінімального обмежуючого еліпсоїду (1.39). Критерієм мінімальності еліпсоїда (1.39) може бути його об'єм, найбільша піввісь або величина $f(P) = \mathrm{tr}(CPC^T)$.

Аналогічний підхід застосовується в задачі погашення l_∞-обмежених зовнішніх збурень для дискретних систем керування.

Слід зазначити, що проблема оцінки впливу зовнішніх збурень є однією із основних в сучасній теорії керування. Розвинуто також альтернативні підходи до цієї проблеми із застосуванням інших векторних норм: L_k-оптимізація для неперервних систем та l_k-оптимізація для дискретних систем ($k = 1, 2$) (див., наприклад, [78, 86, 100]). Більшість із них зводяться до систем ЛМН. Для чисельного розв'язання ЛМН розроблено ефективну оптимізаційну процедуру (метод внутрішньої точки), яка реалізована у програмному середовищі LMI Toolbox комп'ютерної системи Matlab [82].

Наведений огляд літератури з теорії стійкості і стабілізації систем не претендує на повноту. Даній тематиці присвячено дуже багато журнальних статей, підручників і монографій. З методами аналізу стійкості і стабілізації деяких класів нелінійних систем можна ознайомитись, наприклад, в [5, 18, 23]. Задача H_∞-оптимізації для деяких класів нелінійних систем розв'язана, наприклад, в термінах матричних нерівностей з нелінійно залежними від стану матричними коефіцієнтами [87,92], але практична реалізація запропонованих методів синтезу керування пов'язана з обчислювальними трудномщами. Вище цитовано лише основні на наш погляд роботи, які пов'язані з напрямками досліджень даної дисертації.

Розділ 2
СТАБІЛІЗАЦІЯ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ ПО ВИМІРЮВАНОМУ ВИХОДУ

Побудова стабілізуючих статичних та динамічних регуляторів по вимірюваному виходу є одна із найважливіших задач теорії керування. Задачі стабілізації навіть для класів лінійних систем за умов неповної інформації про їх стан недостатньо вивчені і розв'язані лише при додаткових обмеженнях [4, 60]. Слід зазначити, що практичне застосування багатьох методів синтезу систем керування базується на розв'язуванні лінійних матричних нерівностей (ЛМН). Для цього створені достатньо ефективні засоби LMI Toolbox комп'ютерної системи Matlab [82].

В даному розділі пропонуються нові методи побудови статичних та динамічних регуляторів, що забезпечують асимптотичну стійкість станів рівноваги деяких типових класів лінійних та нелінійних систем керування.

2.1. Допоміжні твердження

При дослідженні блочно-матричних виразів типу

$$M = \begin{bmatrix} A & B^T \\ B & C \end{bmatrix}, \quad A = A^T, \quad C = C^T,$$

часто використовуються наступні твердження.

Лема 2.1. *Якщо* $\det A \neq 0$*, то*

$$\mathrm{i}_\pm(M) = \mathrm{i}_\pm(A) + \mathrm{i}_\pm(C - BA^{-1}B^T). \tag{2.1}$$

Аналогічно, якщо $\det C \neq 0$*, то*

$$\mathrm{i}_\pm(M) = \mathrm{i}_\pm(C) + \mathrm{i}_\pm(A - B^TC^{-1}B). \tag{2.2}$$

Узагальнення даних формул на випадок вироджених діагональних блоків матриці M наведено в [42].

З леми 2.1 випливає наступне твердження.

Лема 2.2. (лема Шура [17]). *Якщо* $\det A \neq 0$, *то виконується наступний критерій*

$$M > 0\ (\geq 0) \iff A > 0,\ \ C - BA^{-1}B^T > 0\ (\geq 0). \tag{2.3}$$

Аналогічно, якщо $\det C \neq 0$, *то*

$$M > 0\ (\geq 0) \iff C > 0,\ \ A - B^TC^{-1}B > 0\ (\geq 0). \tag{2.4}$$

Лема 2.3. [81] *Лінійна матрична нерівність*

$$A^TXB + B^TX^TA < C, \tag{2.5}$$

де $A \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{q\times n}$ *і* $C = C^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *має розв'язок* $X \in \mathbb{R}^{p\times q}$ *тоді і лише тоді, коли виконується одна із умов:*

(a) $\operatorname{rank} A = n$, $\operatorname{rank} B = n$;

(b) $\operatorname{rank} A < n$, $\operatorname{rank} B = n$, $W_A^TCW_A > 0$;

(c) $\operatorname{rank} B < n$, $\operatorname{rank} A = n$, $W_B^TCW_B > 0$;

(d) $\operatorname{rank} A < n$, $\operatorname{rank} B < n$, $W_A^TCW_A > 0$, $W_B^TCW_B > 0$;

де W_A *і* W_B *— матриці, стовпці яких складають базиси відповідних ядер* $\ker \mathrm{A}$ *і* $\ker \mathrm{B}$.

В [9] за умов леми 2.3 наведено загальний розв'язок матричної нерівності (2.5) в параметричній формі.

2.2. Лінійні системи зі статичним зворотним зв'язком

Розглянемо лінійну систему керування

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du, \tag{2.6}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ і $y \in \mathbb{R}^l$ — вектори відповідно стану, керування і вимірюваного виходу системи, а A, B, C і D — матриці відповідних розмірів.

Сформулюємо умови стабілізації системи (2.6) за допомогою статичних регуляторів

$$u = Ky, \quad K \in \mathcal{K}_D, \tag{2.7}$$

де $\mathcal{K}_D = \{K \in \mathbb{R}^{m\times l} : \det(I_m - KD) \neq 0\}$. Замкнена система (2.6), (2.7) має вигляд

$$\dot{x} = Mx, \quad M = A + B\mathbf{D}(K)C, \tag{2.8}$$

де $\mathbf{D}(K) = (I_m - KD)^{-1}K$ — нелінійний оператор.

Систему (2.8) будемо називати *α-стійкою*, якщо її спектр $\sigma(M)$ розміщений у півплощині $\mathbb{C}^-_\alpha = \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda < -\alpha\}$, де $\alpha \geq 0$. Спектральний запас стійкості α-стійкої системи не менший, ніж α.

Теорема 2.1. *Наступні твердження еквівалентні:*

1) *Існує статичний регулятор* (2.7)*, що забезпечує α-стійкість замкненої системи* (2.8)*.*

2) *Існує матриця $X = X^T > 0$, що задовольняє співвідношення*

$$B^{\perp T}(AX + XA^T + 2\alpha X)\, B^{\perp} < 0, \tag{2.9}$$

$$\mathrm{i}(\Delta) = \big\{l, n, 0\big\}, \quad \Delta = \begin{bmatrix} AX + XA^T + 2\alpha X & XC^T \\ CX & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

3) *Існують взаємно обернені матриці $X = X^T > 0$ і $Y = Y^T > 0$, що задовольняють співвідношення* (2.9) *і*

$$C^{\perp}(A^TY + YA + 2\alpha Y)\, C^{\perp T} < 0. \tag{2.11}$$

При виконанні одного із тверджень 2) *або* 3) *регулятор*

$$u = Ky, \quad K = -\mathbf{D}(-K_0) \in \mathcal{K}_D, \tag{2.12}$$

де K_0 — розв'язок ЛМН

$$AX + XA^T + 2\alpha X + BK_0CX + XC^TK_0^TB^T < 0, \tag{2.13}$$

забезпечує α-стійкість замкненої системи (2.8)*.*

Доведення. Оскільки $\mathbf{D}(K) = K_0$, то за теоремою Ляпунова критерієм α-стійкості замкненої системи (2.8) є виконання нерівності (2.13) для деяких матриць K_0 і $X > 0$. Критерій існування розв'язку K_0 даної нерівності в термінах X у вигляді співвідношень (2.9) і (2.10) встановлено в [90] на основі леми 1 [43]. Нерівність (2.13) є строгою, тому за умов її сумісності завжди можна вибрати K_0 так, щоб $\det(I_m + K_0 D) \neq 0$), тобто $K \in \mathcal{K}_D$.

Еквівалентність тверджень 2) і 3) є наслідком співвідношень

$$\mathrm{i}_\pm(\Delta) = \mathrm{i}_\pm(\Delta_1) = \mathrm{i}_\pm(C^\perp L C^{\perp T}) + l, \quad \Delta_1 = R^T \Delta R = \begin{bmatrix} C^\perp L C^{\perp T} & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix},$$

де

$$L = A^T Y + YA + 2\alpha Y, \quad R = \begin{bmatrix} Y C^{\perp T} & 0 & Y C^+ \\ -C^{+T} L_1 C^{\perp T} & I_l & 0 \end{bmatrix},$$

$$Y = X^{-1}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 & I_l \\ I_l & C^{+T} L_1 C^+ \end{bmatrix}, \quad \mathrm{i}(S) = \{l, l, 0\}.$$

Тут R є квадратною невиродженою матрицею.

Стосовно еквівалентності тверджень 1) і 3) див. також [7]. $\square$

2.3. Динамічні стабілізуючі регулятори

Наведемо аналог теореми 2.1, використовуючи динамічні регулятори

$$\dot{\xi} = Z\xi + Vy, \quad u = U\xi + Ky, \tag{2.14}$$

де $\xi \in \mathbb{R}^r$, $r \leq n$, Z, V, U і K — невідомі матриці. Співвідношення (2.6) і (2.14) можна подати у вигляді системи керування зі статичним регулятором у розширеному фазовому просторі $\mathbb{R}^{n+r}$:

$$\dot{\widehat{x}} = \widehat{A}\widehat{x} + \widehat{B}\widehat{u}, \quad \widehat{y} = \widehat{C}\widehat{x} + \widehat{D}\widehat{u}, \quad \widehat{u} = \widehat{K}\widehat{y}, \tag{2.15}$$

де

$$\widehat{x} = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}, \quad \widehat{y} = \begin{bmatrix} y \\ \xi \end{bmatrix}, \quad \widehat{u} = \begin{bmatrix} u \\ \dot{\xi} \end{bmatrix}, \quad \widehat{K} = \begin{bmatrix} K & U \\ V & Z \end{bmatrix},$$

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} A & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times n} & 0_{r\times r} \end{bmatrix}, \widehat{B} = \begin{bmatrix} B & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times m} & I_r \end{bmatrix}, \widehat{C} = \begin{bmatrix} C & 0_{l\times r} \\ 0_{r\times n} & I_r \end{bmatrix}, \widehat{D} = \begin{bmatrix} D & 0_{l\times r} \\ 0_{r\times m} & 0_{r\times r} \end{bmatrix}.$$

При умові $K \in \mathcal{K}_D$ замкнена система (2.6), (2.14) має вигляд

$$\dot{\widehat{x}} = \widehat{M}\,\widehat{x}, \quad \widehat{M} = \widehat{A} + \widehat{B}\widehat{\mathbf{D}}(\widehat{K})\widehat{C}, \tag{2.16}$$

де $\widehat{\mathbf{D}}(\widehat{K}) = (I_{m+r} - \widehat{K}\widehat{D})^{-1}\widehat{K}$, причому

$$\widehat{\mathbf{D}}(\widehat{K}) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{D}(K) & (I_m - KD)^{-1}U \\ \hline V(I_l - DK)^{-1} & Z + VD(I_m - KD)^{-1}U \end{array}\right],$$

$$\widehat{M} = \left[\begin{array}{c|c} M & B(I_m - KD)^{-1}U \\ \hline V(I_l - DK)^{-1}C & Z + VD(I_m - KD)^{-1}U \end{array}\right], \; M = A + B\mathbf{D}(K)C.$$

Теорема 2.2. *Наступні твердження еквівалентні:*

1) *Існує динамічний регулятор* (2.14) *порядку* r, *що забезпечує* α-*стійкість замкненої системи* (2.16).

2) *Існують матриці* X *і* X_0, *що задовольняють співвідношення* (2.9) *і*

$$\mathrm{i}(\Delta_0) = \{l, n, 0\}, \quad X \geq X_0 > 0, \quad \mathrm{rank}(X - X_0) \leq r, \tag{2.17}$$

де

$$\Delta_0 = \begin{bmatrix} AX_0 + X_0A^T + 2\alpha X_0 & X_0C^T \\ CX_0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3) *Існують матриці* X *і* Y, *що задовольняють співвідношення* (2.9), (2.11) *і*

$$W = \begin{bmatrix} X & I_n \\ I_n & Y \end{bmatrix} \geq 0, \quad \mathrm{rank}\, W \leq n + r. \tag{2.18}$$

Доведення. За теоремою 2.1 маємо наступний критерій існування статичного регулятора, що забезпечує α-стійкість замкненої системи:

$$\widehat{B}^{\perp T}(\widehat{A}\widehat{X} + \widehat{X}\widehat{A}^T + 2\alpha\widehat{X})\widehat{B}^{\perp} < 0, \quad \mathrm{i}(\widehat{\Delta}) = \{l + r, n + r, 0\}, \tag{2.19}$$

де

$$\widehat{\Delta} = \begin{bmatrix} \widehat{A}\widehat{X} + \widehat{X}\widehat{A}^T + 2\alpha\widehat{X} & \widehat{X}\widehat{C}^T \\ \widehat{C}\widehat{X} & 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{X} = \begin{bmatrix} X & X_1^T \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix} > 0, \quad \alpha \geq 0.$$

Перше співвідношення в (2.19), враховуючи структуру блочних матриць, зводиться до матричної нерівності (2.9) відносно X.

Застосуємо конгруентне перетворення матриці $\widehat{\Delta}$:

$$\widehat{L}\widehat{\Delta}\widehat{L}^T = \begin{bmatrix} \Delta_0 & 0 \\ 0 & \Delta_1 \end{bmatrix}, \tag{2.20}$$

де

$$\widehat{L} = \left[\begin{array}{cc|cc} I_n & -X_1^T X_2^{-1} & 0 & -AX_1^T X_2^{-1} \\ 0 & 0 & I_l & -CX_1^T X_2^{-1} \\ \hline 0 & I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_r \end{array}\right], \quad \Delta_1 = \begin{bmatrix} 2\alpha X_2 & X_2 \\ X_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тут діагональний блок Δ_0 визначено в (2.17) при $X_0 = X - X_1^T X_2^{-1} X_1$. При цьому $\mathrm{i}(\Delta_1) = \{r, r, 0\}$, $\operatorname{rank}(X - X_0) = \operatorname{rank}(X_1^T X_2^{-1} X_1) \leq r$ і $X \geq X_0$.

Отже, із (2.19) випливають співвідношення (2.9) і (2.17) для деяких додатно визначених матриць X і X_0. Навпаки, якщо система співвідношень (2.9) і (2.17) сумісна відносно $X = X^T > 0$ і $X_0 = X_0^T > 0$, то, враховуючи (2.20), завжди можна знайти блочну матрицю $\widehat{X} > 0$, що задовольняє співвідношення (2.19). При цьому матриця X повинна бути її першим діагональним блоком, а значеннями X_1 і X_2 можуть бути, наприклад, множник розкладу Холецького невід'ємно визначеної матриці $X - X_0 = X_1^T X_1 \geq 0$ і одинична матриця I_r відповідно.

Покажемо, що твердження 2) і 3) еквівалентні. Позначимо $Y = X_0^{-1}$ і застосуємо конгруентне перетворення матриці Δ_0:

$$\Delta_1 = R^T \Delta_0 R = \begin{bmatrix} C^\perp L C^{\perp T} & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix},$$

де

$$L = A^T Y + YA + 2\alpha Y, \; R = \begin{bmatrix} YC^{\perp T} & 0 & YC^+ \\ -C^{+T} L C^{\perp T} & I_l & 0 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 0 & I_l \\ I_l & C^{+T} L_1 C^+ \end{bmatrix}.$$

Неважко встановити, що матриця S має інерцію $\mathrm{i}(S) = \{l, l, 0\}$. Оскільки R — квадратна невироджена матриця, то, застосовуючи формулу для інерції блочної матриці, отримаємо

$$\mathrm{i}_\pm(\Delta_0) = \mathrm{i}_\pm(\Delta_1) = \mathrm{i}_\pm(C^\perp L_1 C^{\perp T}) + l.$$

Звідси випливає, що матриці X і X_0 задовольняють твердження 2) тоді і лише тоді, коли матриці X і $Y = X_0^{-1}$ задовольняють твердження 3).

Еквівалентність тверджень 1) і 3) також всановлюється із урахуванням блочної структури використаних матриць (див. також [9]). Для виконання співвідношень (2.18) необхідно, щоб матриці X і Y були додатно визначеними.

Теорема доведена. □

Зауваження 2.1. Рангові обмеження в (2.17) і (2.18) завжди виконується у випадку $r = n$. Отже, задача стабілізації системи (2.6) за допомогою динамічного регулятора (2.14) повного порядку $r = n$ зводиться до розв'язування системи ЛМН (2.9), (2.11) і (2.18).

2.4. Побудова стабілізуючих регуляторів для нелінійних систем

Розглянемо нелінійну систему керування

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u, \quad y = C(x)x + D(x)u, \tag{2.21}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ і $y \in \mathbb{R}^l$ — вектори відповідно стану, керування і вимірюваного виходу системи, а $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ і $D(x)$ — матриці відповідних розмірів. Припускаємо, що залежності $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ і $D(x)$ неперервні, причому $\operatorname{rank} B(x) \equiv m$ і $\operatorname{rank} C(x) \equiv l$ в деякому околі $\mathcal{S}_0 = \{x : \|x\| \le h\}$ точки $x = 0$.

Разом з нелінійною системою (2.21) будемо розглядати лінійну систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du, \tag{2.22}$$

де $A = A(0)$, $B = B(0)$, $C = C(0)$ і $D = D(0)$.

Сформулюємо теорему про існування статичного регулятора, що забезпечує асимптотичну стійкість нульового стану $x \equiv 0$ нелінійної системи (2.21).

Теорема 2.3. *Нехай виконується одне із тверджень* 2) *або* 3) *теореми* 2.1 *для лінійної системи* (2.22). *Тоді співвідношення* (2.12) *і* (2.13) *визначають статичний регулятор, що забезпечує асимптотичну стійкість нульового стану* $x \equiv 0$ *та квадратичну функцію Ляпунова* $v(x) = x^T X^{-1} x$ *замкненої нелінійної системи* (2.21), (2.12).

Доведення. Умови (2.9), (2.10) або (2.9), (2.11) забезпечують сумісність ЛМН (2.13) відносно K_0. В силу неперервності матричних функцій $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ і $D(x)$ для деякого $h > 0$ виконується співвідношення

$$M(x)X + XM^T(x) + 2\alpha X < 0, \quad x \in \mathcal{S}_0,$$

де

$$M(x) = A(x) + B(x)\widetilde{K}(x)C(x), \quad \mathcal{S}_0 = \{x : \|x\| < h\}.$$

$$\widetilde{K}(x) = [I_m - K_* D(x)]^{-1} K_*, \quad K_* = (I_m + K_0 D)^{-1} K_0, \quad \widetilde{K}(0) = K_0.$$

Помножимо дану нерівність зліва та справа на матрицю $Y = X^{-1}$, отримаємо

$$M(x)^T Y + YM(x) + 2\alpha Y < 0,$$

звідки

$$\dot{v}(x) < -2\alpha\, v(x) \leq 0, \quad x \in \mathcal{S}_0,$$

де $\dot{v}(x)$ — похідна функції $v(x)$ в силу замкненої системи (2.21), (2.12). Тому твердження теореми 2.3 є наслідком теореми 2.1 і теореми Ляпунова про асимптотичну стійкість [20].

Теорема доведена. $\square$

Розглянемо динамічний регулятор (2.14). Об'єднану систему (2.21), (2.14) можна подати у вигляді системи керування зі статичним регулятором у розширеному фазовому просторі:

$$\dot{\widehat{x}} = \widehat{A}(\widehat{x})\widehat{x} + \widehat{B}(\widehat{x})\widehat{u}, \quad \widehat{y} = \widehat{C}(\widehat{x})\widehat{x} + \widehat{D}(\widehat{x})\widehat{u}, \quad \widehat{u} = \widehat{K}\widehat{y}, \tag{2.23}$$

де

$$\widehat{x} = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}, \quad \widehat{y} = \begin{bmatrix} y \\ \xi \end{bmatrix}, \quad \widehat{u} = \begin{bmatrix} u \\ \dot{\xi} \end{bmatrix}, \quad \widehat{K} = \begin{bmatrix} K & U \\ V & Z \end{bmatrix},$$

$$\widehat{A}(\widehat{x}) = \begin{bmatrix} A(x) & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times n} & 0_{r\times r} \end{bmatrix}, \quad \widehat{B}(\widehat{x}) = \begin{bmatrix} B(x) & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times m} & I_r \end{bmatrix},$$

$$\widehat{C}(\widehat{x}) = \begin{bmatrix} C(x) & 0_{l\times r} \\ 0_{r\times n} & I_r \end{bmatrix}, \quad \widehat{D}(\widehat{x}) = \begin{bmatrix} D(x) & 0_{l\times r} \\ 0_{r\times m} & 0_{r\times r} \end{bmatrix}.$$

Якщо в замкненій системі (2.16) покласти $\widehat{A} = \widehat{A}(0)$, $\widehat{B} = \widehat{B}(0)$, $\widehat{C} = \widehat{C}(0)$, $\widehat{D} = \widehat{D}(0)$, то теорема 2.2 визначає динамічний регулятор, що забезпечує асимптотичну стійкість нульового стану замкненої нелінійної системи (2.23).

Приведемо алгоритм побудови динамічного регулятора (2.14), що забезпечує α-стійкість системи (2.16), а також асимптотичну стійкість нульового стану замкненої нелінійної системи (2.23).

Алгоритм 2.1. 1) Знаходження матриць X і X_0, що задовольняють співвідношення (2.9) і (2.17).

2) Розклад невід'ємно визначеної матриці

$$X - X_0 = X_1^T X_1 \geq 0, \quad X_1 \in \mathbb{R}^{r \times n}, \quad \mathrm{rank} X_1 \leq r.$$

3) Розв'язування ЛМН

$$\widehat{A}\widehat{X} + \widehat{X}\widehat{A}^T + 2\alpha\widehat{X} + \widehat{B}\widehat{K}_0\widehat{C}\widehat{X} + \widehat{X}\widehat{C}^T\widehat{K}_0^T\widehat{B}^T < 0$$

відносно $\widehat{K}_0$ при умовах $\det(I_m + K_0 D) \neq 0$ і $\alpha \geq 0$, де

$$\widehat{X} = \begin{bmatrix} X & X_1^T \\ X_1 & I_r \end{bmatrix} > 0, \quad \widehat{K}_0 = \begin{bmatrix} K_0 & U_0 \\ V_0 & Z_0 \end{bmatrix}.$$

4) Обчислення матриць регулятора (2.14) за формулами

$$\begin{gathered} K = (I_m + K_0 D)^{-1} K_0, \quad U = (I_m + K_0 D)^{-1} U_0, \\ V = V_0 (I_l + D K_0)^{-1}, \quad Z = Z_0 - V_0 D (I_m + K_0 D)^{-1} U_0. \end{gathered} \tag{2.24}$$

2.5. Стабілізація систем за умов невизначеності

Розглянемо нелінійну систему керування (2.21) і припустимо, що матриця A відповідної лінійної системи (2.22) невизначена, причому

$$A \in \mathrm{Co}\,\{A_1, \ldots, A_\nu\}, \tag{2.25}$$

де $A_1, \ldots, A_\nu$ — заданий набір вершин матричного політопа.

Нехай існують додатно визначені матриці X і Y, які задовольняють співвідношення

$$B^{\perp T}(A_j X + X A_j^T + 2\alpha X)\, B^{\perp} < 0, \quad j = \overline{1,\nu}, \tag{2.26}$$

$$C^{\perp}(A_j^T Y + Y A_j + 2\alpha Y)\, C^{\perp T} < 0, \quad XY = I_n, \quad j = \overline{1,\nu}. \tag{2.27}$$

Тоді для довільної матриці A, що подається у вигляді

$$A = \sum_{j=1}^{\nu} \gamma_j A_j, \quad \gamma_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{\nu} \gamma_j = 1,$$

виконуються умови (2.9) і (2.11) теореми 2.1, причому (2.13) є наслідком системи співвідношень

$$A_j X + X A_j^T + 2\alpha X + B K_0 C X + X C^T K_0^T B^T < 0, \quad j = \overline{1,\nu}. \tag{2.28}$$

При виконанні (2.26) умови (2.27) можна записати також у вигляді (див. доведення еквівалентності тверджень 2) і 3) теореми 2.1)

$$\mathrm{i}(\Delta_j) = \big\{l, n, 0\big\}, \quad \Delta_j = \begin{bmatrix} A_j X + X A_j^T + 2\alpha X & X C^T \\ C X & 0 \end{bmatrix}, \quad j = \overline{1,\nu}. \tag{2.29}$$

Отже, якщо для деякої матриці $X = X^T > 0$ виконується система співвідношень (2.26) і (2.29), то статичний регулятор (2.12), де K_0 — розв'язок системи ЛМН (2.28), забезпечує α-стійкість замкненої лінійної системи (2.8), а також робастну стійкість нульового стану $x \equiv 0$ та квадратичну функцію Ляпунова $v(x) = x^T X^{-1} x$ замкненої нелінійної системи (2.21), (2.12) з невизначеністю (2.25) (див. доведення теореми 2.3).

Аналогічно формулюються умови існування динамічного регулятора (2.14), що забезпечує α-стійкість системи (2.16), а також робастну стійкість нульового стану замкненої нелінійної системи (2.23) з невизначеністю (2.25). При цьому замість (2.29) використовуються співвідношення

$$\mathrm{i}(\Delta_{0j}) = \big\{l, n, 0\big\}, \quad \Delta_{0j} = \begin{bmatrix} A_j X_0 + X_0 A_j^T + 2\alpha X_0 & X_0 C^T \\ C X_0 & 0 \end{bmatrix}, \quad j = \overline{1,\nu},$$

де $X_0 > 0$ — довільна матриця така, що $X \geq X_0$ і $\operatorname{rank}(X - X_0) \leq r$, а замість обмеження $XY = I_n$ — співвідношення (2.18).

Викладена методика робастної стабілізації може бути застосована для нелінійних систем типу (2.21) з матрицею A, що неперервно залежить від x і t. При цьому параметр α повинен бути строго додатнім.

Розглянемо системи керування (2.21), (2.22) і сім'ю статичних регуляторів

$$u = Ky, \quad K \in \mathcal{K}, \tag{2.30}$$

з еліпсоїдальною множиною матриць коефіцієнтів підсилення

$$\mathcal{K} = \{K : K^T P K \leq Q\},$$

яку визначають задані матриці $P = P^T > 0$ і $Q = Q^T > 0$ відповідних розмірів. Наведемо умови робастної стабілізації нульового стану даних систем як окремий випадок теореми 1 [41].

Лема 2.4. *Нехай для деякої матриці* $X = X^T > 0$ *виконується матрична нерівність*

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA & XB & C^T \\ B^T X & -P & D^T \\ C & D & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0. \tag{2.31}$$

Тоді нульовий стан замкнених систем (2.21), (2.30) *і* (2.23), (2.30) *робастно стійкий, причому* $v(X) = x^T X x$ *є спільною функцією Ляпунова даних систем.*

Зазначимо, що матричну нерівність (2.31) за допомогою леми Шура можна подати у вигляді

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA + C^T QC & XB + C^T QD \\ B^T X + D^T QC & D^T QD - P \end{bmatrix} < 0.$$

2.6. Висновки до розділу

В даному підрозділі розглянуто класи лінійних та нелінійних систем керування у векторно-матричній формі. На основі методу квадратичних функцій Ляпунова досліджено задачі стабілізації систем, вектори вимірюваного виходу яких формуються у вигляді лінійних комбінацій векторів стану та керування. Отримано такі результати:

- Запропоновано нові необхідні та достатні умови існування статичного зворотного зв'язку по вимірюваному виходу, який забезпечує асимптотичну стійкість лінійної системи керування з бажаним спектральним запасом (α-стійкість).

- Встановлено необхідні та достатні умови існування динамічного зворотного зв'язку по вимірюваному виходу, який забезпечує α-стійкість лінійної системи керування. Отримані умови у випадку динамічного регулятора повного порядку зводяться до розв'язування лінійних матричних нерівностей.

- Показано, що методи побудови статичних та динамічних регуляторів, які випливають із отриманих критеріїв стабілізації лінійних систем, можуть бути застосовані до деякого класу нелінійних систем керування у векторно-матричній формі.

- Розроблено новий алгоритм стабілізації систем керування, що базується на розв'язуванні лінійних матричних нерівностей.

Розділ 3
РОБАСТНА СТАБІЛІЗАЦІЯ ТА ГАСІННЯ ОБМЕЖЕНИХ ЗБУРЕНЬ У СИСТЕМАХ КЕРУВАННЯ

В сучасній теорії керування інтенсивно розвиваються методи робастної стабілізації та H_∞-оптимізації динамічних систем, математичні моделі яких враховують вплив обмежених зовнішніх збурень. Критерієм якості J таких систем є H_∞-норма матричної передатної функції, яка характеризує рівень гасіння обмежених вхідних сигналів. Задача H-оптимізації полягає у побудові законів керування, які мінімізують даний критерій якості.

В даному розділі викладено деякі узагальнення відомих підходів до побудови статичних та динамічних H_∞-регуляторів по виходу, які забезпечують оцінку та мінімізацію зважених критеріїв якості J та J_0, а також робастну стійкість замкненої системи зі структурованою невизначеністю вхідних сигналів.

3.1. Означення та допоміжні твердження

Розглянемо динамічну систему без керування

$$\dot{x} = Ax + Bw, \quad z = Cx + Dw, \quad x(0) = x_0, \tag{3.1}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $w \in \mathbb{R}^s$ і $z \in \mathbb{R}^k$ — вектори відповідно стану, зовнішніх збурень і виходу системи, A, B, C і D — сталі матриці відповідних розмірів.

Означення 3.1. [42] Система (3.1) називається *неекспансивною*, якщо її вектор виходу при довільному $T > 0$ задовольняє нерівність

$$\int_0^T z^T Q z dt \le \int_0^T w^T P w dt + x_0^T X_0 x_0,$$

$Q = Q^T > 0$, $P = P^T > 0$ і $X_0 = X_0^T > 0$ — деякі вагові матриці.

Введемо критерії якості системи (3.1) відносно її вектора виходу:

$$J_0 = \sup_{0<\|w\|_P<\infty} \varphi_0(w), \quad \varphi_0(w) = \frac{\|z\|_Q}{\|w\|_P}, \tag{3.2}$$

$$J = \sup_{0<\|w\|_P^2+x_0^T X_0 x_0<\infty} \varphi(w,x_0), \quad \varphi(w,x_0) = \frac{\|z\|_Q}{\sqrt{\|w\|_P^2 + x_0^T X_0 x_0}}, \tag{3.3}$$

де $\|z\|_Q$ і $\|w\|_P$ — узагальнені L_2-норми відповідних вектор-функцій, тобто

$$\|z\|_Q^2 = \int_0^\infty z^T Q z\, dt, \quad \|w\|_P^2 = \int_0^\infty w^T P w\, dt.$$

Значення J характеризує зважений рівень гасіння зовнішніх і початкових збурень у системі (3.1). Даний критерій якості відомий у випадку вагових матриць $P = I_s$, $Q = I_k$ і $X_0 = \rho I_n$ [10]. Характеристику системи J_0 використовуємо у випадку нульового початкового вектора x_0. Очевидно, що $J_0 \le J$, оскільки $\varphi(w,0) = \varphi_0(w)$, тобто J_0 і J при $x_0 = 0$ співпадають. Якщо система (3.1) нееспансивна, то $J \le 1$. Зворотне твердження для класу лінійних систем (3.1) також має місце [45].

Лема 3.1. *Нехай матриця A гурвіцева. Тоді оцінка $J_0 < \gamma$ виконується у тому і лише у тому випадку, коли ЛМН*

$$\Phi_\gamma = \begin{bmatrix} A^T X + XA + C^T QC & XB + C^T QD \\ B^T X + D^T QC & D^T QD - \gamma^2 P \end{bmatrix} < 0 \tag{3.4}$$

має розв'язок $X = X^T > 0$. Для виконання оцінки $J < \gamma$ необхідно і достатньо, щоб була сумісною система ЛМН (3.4) *і*

$$0 < X < \gamma^2 X_0. \tag{3.5}$$

Доведення. Достатність. Побудуємо для системи (3.1) квадратичну функцію Ляпунова $v(x) = x^T X x$ і обчислимо вираз

$$\dot v(x) + z^T Q z - \gamma^2 w^T P w = [x^T, w^T]\Phi_\gamma \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix},$$

де $\dot v(x)$ — похідна даної функції у силу системи (3.1). Після інтегрування даного виразу, враховуючи співвідношення (3.4) і (3.5), маємо нерівності

$$\|z\|_Q^2 < \gamma^2(\|w\|_P^2 + x_0^T X_0 x_0), \quad \varphi(w,x_0) \le \gamma.$$

Більше того, $\varphi(w,x_0) \le \gamma - \varepsilon$ для деякого $\varepsilon > 0$. Остання нерівність також є наслідком строгих матричних нерівностей (3.4) и (3.5), які виконуються при зменшенні γ на достатньо мале число ε. Тому $J < \gamma$. Зокрема, у випадку $x_0 = 0$ повинно бути $J_0 < \gamma$.

Необхідність. Використаємо розклади додатно визначених матриць $Q = \widetilde{Q}^T\widetilde{Q}$, $P = \widetilde{P}^T\widetilde{P}$, $X_0 = \widetilde{X}_0^T\widetilde{X}_0$ і перетворимо систему (3.1):

$$\dot{\widetilde{x}} = \widetilde{A}\widetilde{x} + \widetilde{B}\widetilde{w}, \quad \widetilde{z} = \widetilde{C}\widetilde{x} + \widetilde{D}\widetilde{w}, \quad \widetilde{x}(0) = \widetilde{x}_0, \tag{3.6}$$

де $\widetilde{x} = \widetilde{X}_0x$, $\widetilde{z} = \widetilde{Q}z$, $\widetilde{w} = \widetilde{P}w$, $\widetilde{A} = \widetilde{X}_0A\widetilde{X}_0^{-1}$, $\widetilde{B} = \widetilde{X}_0B\widetilde{P}^{-1}$, $\widetilde{C} = \widetilde{Q}C\widetilde{X}_0^{-1}$ і $\widetilde{D} = \widetilde{Q}D\widetilde{P}^{-1}$. При цьому критерій якості (3.3) для системи (3.6) набуває вигляду

$$\widetilde{J} = \sup_{0<\|\widetilde{w}\|_{I_m}^2+\widetilde{x}_0^T\widetilde{x}_0<\infty} \frac{\|\widetilde{z}\|_{I_l}}{\sqrt{\|\widetilde{w}\|_{I_m}^2 + \widetilde{x}_0^T\widetilde{x}_0}}.$$

Якщо $\widetilde{J} < \gamma$, то для деякої матриці $\widetilde{X} = \widetilde{X}^T$ (див. [10, теорема 1])

$$0 < \widetilde{X} < \gamma^2 I_n, \quad \widetilde{\Omega} = \begin{bmatrix} \widetilde{A}^T\widetilde{X} + \widetilde{X}\widetilde{A} & \widetilde{X}\widetilde{B} & \widetilde{C}^T \\ \widetilde{B}^T\widetilde{X} & -\gamma^2 I_m & \widetilde{D}^T \\ \widetilde{C} & \widetilde{D} & -I_l \end{bmatrix} < 0,$$

або за законом інерції

$$0 < X < \gamma^2 X_0, \quad \Omega = S^T\widetilde{\Omega}S = \begin{bmatrix} A^TX + XA & XB & C^T \\ B^TX & -\gamma^2 P & D^T \\ C & D & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0,$$

де $X = \widetilde{X}_0^T\widetilde{X}\widetilde{X}_0$, $S = \operatorname{diag}\left\{\widetilde{X}_0, \widetilde{P}, \widetilde{Q}^{-1T}\right\}$. Останнє співвідношення за лемою Шура еквівалентне матричній нерівності (3.4).

Лему доведено. □

Зауваження 3.1. Якщо вхідний вектор $w(t)$ розглядати як структуровану невизначеність у вигляді лінійного зворотного зв'язку по виходу

$$w = \frac{1}{\gamma}\Theta z, \quad \Theta^T P\Theta \le Q, \tag{3.7}$$

то при умові $J_0 < \gamma$ система (3.1), (3.7) робастно стійка і має спільну квадратичну функцію Ляпунова $v(x) = x^TXx$. Це твердження є наслідком лем 2.4

і 3.1 при $\Theta = \gamma K$. На множині функцій (3.7) функціонали $\varphi_0(w)$ і $\varphi(w, x_0)$ в (3.2) і (3.3) приймають мінімальні значення, якщо виконується рівність $\Theta^T P \Theta = Q$. Зокрема, у випадку $k \leq s$ маємо $\varphi_0(w) = \gamma$ при

$$\Theta = (\sqrt{P})^{-1} E \sqrt{Q}, \quad E = \begin{cases} I_k, & k = s, \\ \left[I_k, 0_{k \times s-k}\right]^T, & k < s. \end{cases}$$

Із леми 3.1 також випливає, що критерії якості (3.2) і (3.3) системи (3.1) можна обчислити як розв'язки відповідних оптимізаційних задач:

$$J_0 = \inf\left\{\gamma : \Phi_\gamma < 0,\ X > 0\right\}, \quad J = \inf\left\{\gamma : \Phi_\gamma < 0,\ 0 < X < \gamma^2 X_0\right\}. \quad (3.8)$$

Якщо в лемі 3.1 замість (3.4) використати нерівність $\Phi_\gamma \leq 0$, то отримаємо критерії виконання нестрогих оцінок $J_0 \leq \gamma$ і $J \leq \gamma$.

Узагальнимо систему (3.1) у вигляді

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)w, \quad z = C(x)x + D(x)w, \quad x(0) = x_0, \quad (3.9)$$

де $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ і $D(x)$ — матричні коефіцієнти, неперервно залежні від x у деякому околі $\mathcal{S}_0$ стану рівноваги $x \equiv 0$. Повторюючи доведення достатності леми 3.1 для системи (3.9), отримаємо наступне твердження.

Лема 3.2. *Для системи* (3.9) *виконується оцінка* $J_0 \leq \gamma$, *якщо існує матриця* $X = X^T > 0$ *така, що*

$$\begin{bmatrix} A^T(x)X + XA(x) + C^T(x)QC(x) & XB(x) + C^T(x)QD(x) \\ B^T(x)X + D^T(x)QC(x) & D^T(x)QD(x) - \gamma^2 P \end{bmatrix} < 0 \quad (3.10)$$

при $x \in \mathcal{S}_0$. *Якщо до того ж* $0 < X \leq \gamma^2 X_0$, *то* $J \leq \gamma$.

Зауваження 3.2. При виконанні умови (3.10) леми 3.2 нульовий стан системи (3.9) з невизначеністю (3.7) робастно стійкий і $v(x) = x^T X x$ є спільною функцією Ляпунова даної системи (див. зауваження 3.1 і теорему 1 [41]).

Наведемо допоміжне твердження, яке відоме у випадку $\gamma = 1$ [10].

Лема 3.3. *Для заданих матриць* $X > 0$, $Y > 0$ *і числа* $\gamma > 0$ *існують матриці* $X_1 \in \mathbb{R}^{r \times n}$, $X_2 \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $Y_1 \in \mathbb{R}^{r \times n}$ *і* $Y_2 \in \mathbb{R}^{r \times r}$, *що задовольняють співвідношення*

$$\widehat{X} = \begin{bmatrix} X & X_1^T \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix} > 0, \quad \widehat{Y} = \begin{bmatrix} Y & Y_1^T \\ Y_1 & Y_2 \end{bmatrix} > 0, \quad \widehat{X}\widehat{Y} = \gamma^2 I_{n+r}, \quad (3.11)$$

тоді і лише тоді, коли

$$W = \begin{bmatrix} X & \gamma I_n \\ \gamma I_n & Y \end{bmatrix} \geq 0, \quad \operatorname{rank} W \leq n + r. \tag{3.12}$$

Доведення. Із леми Шура і формули для рангу блочних матриць випливає еквівалентність співвідношень (3.12) і

$$Z = Y - \gamma^2 X^{-1} \geq 0, \quad \operatorname{rank} Z \leq r. \tag{3.13}$$

Застосуємо формулу Фробеніуса [17] для обернення блочної матриці $\widehat{X}$ в (3.11):

$$\frac{1}{\gamma^2} \begin{bmatrix} Y & Y_1^T \\ Y_1 & Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^{-1} + X^{-1} X_1^T H^{-1} X_1 X^{-1} & -X^{-1} X_1^T H^{-1} \\ -H^{-1} X_1 X^{-1} & H^{-1} \end{bmatrix},$$

де $H = X_2 - X_1 X^{-1} X_1^T$. Звідси маємо $Z = \gamma^2 X^{-1} X_1^T H^{-1} X_1 X^{-1} \geq 0$. Це означає, що (3.13) є наслідком (3.11).

Покажемо, що (3.11) є наслідком (3.13), використовуючи, наприклад, розклад невід'ємно визначеної матриці $Z = V^T V$, де $V \in \mathbb{R}^{r \times n}$ — довільна матриця така, що $\ker V = \ker Z$. Покладемо

$$X_1 = \frac{1}{\gamma} V X, \;\; X_2 = \frac{1}{\gamma^2} V X V^T + I_r, \;\; Y_1 = -\gamma V, \;\; Y_2 = \gamma^2 I_r. \tag{3.14}$$

Тоді $H = I_r > 0$ і виконуються співвідношення (3.11).

Лему доведено. $\square$

3.2. Оцінка рівня гасіння обмежених збурень в рівняннях регулятора

Розглянемо системи (2.21) і (2.22) з початковим вектором $x(0) = x_0$ і керуванням

$$u = K_* y + w, \quad K_* \in \mathcal{K}_D, \tag{3.15}$$

де $w \in \mathbb{R}^m$ — вектор обмежених зовнішніх збурень. Перепишемо відповідні замкнені системи у вигляді

$$\dot{x} = A_*(x)x + B_*(x)w, \quad y = C_*(x)x + D_*(x)w, \quad x(0) = x_0, \tag{3.16}$$

$$\dot{x} = A_*x + B_*w, \quad y = C_*x + D_*w, \quad x(0) = x_0, \tag{3.17}$$

де $A_*(x) = A(x) + B(x)\mathbf{D}_x(K_*)C(x)$, $B_*(x) = B(x)(I_m - K_*D(x))^{-1}$, $C_*(x) = (I_l - D(x)K_*)^{-1}C(x)$, $D_*(x) = (I_l - D(x)K_*)^{-1}D(x)$, $A_* = A_*(0)$, $B_* = B_*(0)$, $C_* = C_*(0)$, $D_* = D_*(0)$, $\mathbf{D}_x(K_*) = (I_m - K_*D(x))^{-1}K_*$. Вхідна вектор-функція $w(t)$ і початковий вектор x_0 вважаються невідомими.

Оскільки $A_* = A + BK_0C$, $B_* = B(I_m + K_0D)$, $C_* = (I_l + DK_0)C$ і $D_* = (I_l + DK_0)D$, де $K_0 = \mathbf{D}(K_*)$, то матричну нерівність типу (3.4) для системи (3.17) можна подати у вигляді ЛМН відносно K_0:

$$L_0^T K_0 R_0 + R_0^T K_0^T L_0 + \Omega < 0, \tag{3.18}$$

де

$$R_0 = \left[C, D, 0_{l\times l}\right], \quad L_0 = \left[B^T, D^T, 0_{m\times m}\right] \widetilde{X},$$

$$\widetilde{X} = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_l \\ 0 & I_m & 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} A^TX + XA & XB & C^T \\ B^TX & -\gamma^2 P & D^T \\ C & D & -Q^{-1} \end{bmatrix}.$$

Застосовуючи лему 3.1 і вираховуючи вирази W_{R_0} і W_{L_0} в твердженні леми 2.3 для даної ЛМН, маємо наступний результат.

Теорема 3.1. *Для лінійної системи* (3.17) *існує матриця* K_* *така, що* $J < \gamma$ *тоді і лише тоді, коли сумісна система співвідношень*

$$W_R^T \begin{bmatrix} A^TX + XA + C^TQC & XB + C^TQD \\ B^TX + D^TQC & D^TQD - \gamma^2 P \end{bmatrix} W_R < 0, \tag{3.19}$$

$$W_L^T \begin{bmatrix} AY + YA^T + BP^{-1}B^T & YC^T + BP^{-1}D^T \\ CY + DP^{-1}B^T & DP^{-1}D^T - \gamma^2 Q^{-1} \end{bmatrix} W_L < 0, \tag{3.20}$$

$$0 < X < \gamma^2 X_0, \quad XY = \gamma^2 I_n, \tag{3.21}$$

де $R = [C, D]$, $L = [B^T, D^T]$.

Зауваження 3.3. Якщо матриці X і Y задовольняють умови (3.19) – (3.21), то матрицю K_* в теоремі 3.1 можна побудувати у вигляді

$$K_* = K_0(I_l + DK_0)^{-1}, \tag{3.22}$$

де K_0 — довільна матриця, що задовольняє ЛМН (3.18), причому $-K_0 \in \mathcal{K}_D$.

Розглянемо системи (2.21) і (2.6) з динамічним зворотним зв'язком

$$\dot{\xi} = Z\xi + Vy, \quad u = U\xi + Ky + w, \quad \xi(0) = \xi_0, \tag{3.23}$$

де $\xi \in \mathbb{R}^r$ і $w \in \mathbb{R}^m$ — вектори відповідно стану регулятора і вхідних сигналів (зовнішніх збурень), Z, V, U і K — невідомі сталі матриці. При умові $K \in \mathcal{K}_D$ відповідні замкнені системи мають вигляд

$$\dot{\widehat{x}} = \widehat{M}(x)\widehat{x} + \widehat{N}(x)w, \quad y = \widehat{F}(x)\widehat{x} + \widehat{G}(x)w, \quad \widehat{x}(0) = \widehat{x}_0, \tag{3.24}$$

$$\dot{\widehat{x}} = \widehat{M}\widehat{x} + \widehat{N}w, \quad y = \widehat{F}\widehat{x} + \widehat{G}w, \quad \widehat{x}(0) = \widehat{x}_0, \tag{3.25}$$

де

$$\widehat{x} = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}, \quad \widehat{M}(x) = \begin{bmatrix} A(x) + B(x)K_0(x)C(x) & B(x)U_0(x) \\ V_0(x)C(x) & Z_0(x) \end{bmatrix},$$

$$\widehat{N}(x) = \begin{bmatrix} B(x) + B(x)K_0(x)D(x) \\ V_0(x)D(x) \end{bmatrix}, \quad \widehat{G}(x) = D(x) + D(x)K_0(x)D(x),$$

$$\widehat{F}(x) = \big[\, C(x) + D(x)K_0(x)C(x), D(x)U_0(x) \,\big],$$

$$\widehat{M} = \widehat{M}(0), \ \ \widehat{N} = \widehat{N}(0), \ \ \widehat{F} = \widehat{F}(0), \ \ \widehat{G} = \widehat{G}(0),$$

$$K_0(x) = (I_m - KD(x))^{-1}K, \quad U_0(x) = (I_m - KD(x))^{-1}U,$$

$$V_0(x) = V(I_l - D(x)K)^{-1}, \ \ Z_0(x) = Z + VD(x)(I_m - KD(x))^{-1}U.$$

За лемою 3.2 для нелінійної системи (3.24) виконується оцінка $\widehat{J} \le \gamma$, де $\widehat{J}$ — критерій якості типу (3.3) з ваговими матрицями P, Q і $\widehat{X_0}$, якщо виконується система співвідношень

$$0 < \widehat{X} \le \gamma^2 \widehat{X}_0, \quad \widehat{\Phi}(\widehat{x}) \le 0, \quad \widehat{x} \in \mathbb{R}^{n+r}, \tag{3.26}$$

де

$$\widehat{\Phi}(\widehat{x}) = \begin{bmatrix} \widehat{M}^T(\widehat{x})\widehat{X} + \widehat{X}\widehat{M}(\widehat{x}) + \widehat{F}^T(\widehat{x})Q\widehat{F}(x) & \widehat{X}\widehat{N}(\widehat{x}) + \widehat{F}^T(\widehat{x})Q\widehat{G}(\widehat{x}) \\ \widehat{N}^T(\widehat{x})\widehat{X} + \widehat{G}^T(\widehat{x})Q\widehat{F}(x) & \widehat{G}^T(\widehat{x})Q\widehat{G}(\widehat{x}) - \gamma^2 P \end{bmatrix},$$

$$\widehat{X} = \begin{bmatrix} X & X_1^T \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix} > 0, \quad \widehat{X}_0 = \begin{bmatrix} X_0 & X_{01}^T \\ X_{01} & X_{02} \end{bmatrix} > 0.$$

Будемо шукати динамічний регулятор (3.23) з нульовим початковим вектором $\xi_0 = 0$. Тоді критерій якості $\widehat{J}$ співпадає з J. Для лінійної системи (3.25) замість (3.26) маємо умови

$$0 < \widehat{X} < \gamma^2 \widehat{X}_0, \quad \widehat{\Phi}(0) < 0. \tag{3.27}$$

Теорема 3.2. *Для лінійної системи* (2.22) *існує динамічний регулятор* (3.23) *з нульовим початковим вектором, що забезпечує критерій якості* $J < \gamma$ *тоді і лише тоді, коли для деяких матриць* $X = X^T > 0$ *і* $Y = Y^T > 0$ *виконується система співвідношень* (3.5), (3.12), (3.19) *і* (3.20).

Доведення. За лемою 3.1 для лінійної системи (3.25) $J < \gamma$ тоді і лише тоді, коли співвідношення (3.27) виконуються при $\widehat{x} = 0$. Оскільки $\xi_0 = 0$, то обмеження на $\widehat{X}$ і $\widehat{X}_0$ в (3.27) зводяться до співвідношення для перших діагональних блоків $0 < X < \gamma^2 X_0$ (див. доведення леми 3.1).

Перепишемо співвідношення $\widehat{\Phi}(0) < 0$ у вигляді ЛМН відносно блочної матриці $\widehat{K}_0$:

$$\widehat{L}^T \widehat{K}_0 \widehat{R} + \widehat{R}^T \widehat{K}_0^T \widehat{L} + \widehat{\Omega} < 0, \tag{3.28}$$

де

$$\widehat{\Omega} = \begin{bmatrix} A^T X + XA & A^T X_1^T & XB & C^T \\ X_1 A & 0 & X_1 B & 0 \\ B^T X & B^T X_1^T & -\gamma^2 P & D^T \\ C & 0 & D & -Q^{-1} \end{bmatrix}, \quad \widehat{L}^T = \begin{bmatrix} XB & X_1^T \\ X_1 B & X_2 \\ 0 & 0 \\ D & 0 \end{bmatrix},$$

$$\widehat{R} = \begin{bmatrix} C & 0 & D & 0 \\ 0 & I_r & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{K}_0 = \begin{bmatrix} K_0 & U_0 \\ V_0 & Z_0 \end{bmatrix}.$$

Для існування розв'язку $\widehat{K}_0$ матричної нерівності (3.28) необхідно і достатньо, щоб виконувались співвідношення (лема 2.3)

$$W_{\widehat{R}}^T \widehat{\Omega} W_{\widehat{R}} < 0, \quad W_{\widehat{L}}^T \widehat{\Omega} W_{\widehat{L}} < 0. \tag{3.29}$$

Обчислимо матриці

$$W_{\widehat{R}} = E_1 \begin{bmatrix} W_R & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I_l \end{bmatrix}, \quad W_{\widehat{L}} = E_2 \begin{bmatrix} W_L & 0 \\ 0 & I_m \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

де

$$E_1 = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_r & 0 \\ 0 & I_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_l \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} \gamma^2 Y & 0 & 0 & \gamma^{-2} Y_1^T \\ \gamma^2 Y_1 & 0 & 0 & \gamma^{-2} Y_2 \\ 0 & 0 & I_m & 0 \\ 0 & I_l & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\widehat{Y} = \begin{bmatrix} Y & Y_1^T \\ Y_1 & Y_2 \end{bmatrix} = \gamma^2 \widehat{X}^{-1}.$$

Блоки взаємно обернених матриць $\widehat{X}$ і $\widehat{Y}$ задовольняють рівності

$$XY + X_1^T Y_1 = \gamma I_n, \quad XY_1^T + X_1^T Y_2 = 0,$$

$$X_1 Y + X_2 Y_1 = 0, \quad X_1 Y_1^T + X_2 Y_2 = \gamma I_r.$$

Враховуючи ці рівності і блочну структуру наведених виразів, співвідношення (3.29) набувають вигляду (3.19) і (3.20), де невідомими є лише перші діагональні блоки X і Y відповідних матриць $\widehat{X}$ і $\widehat{Y}$. Умови (3.12) є необхідними і достатніми для існування блочних взаємно обернених матриць $\widehat{X} > 0$ і $\widehat{Y} > 0$ із наперед заданими першими діагональними блоками $X > 0$ і $Y > 0$ (див. лему 3.3). При цьому рангове обмеження в (3.12) завжди виконується у випадку динамічного регулятора повного порядку $r = n$. □

Наведемо алгоритм побудови динамічного регулятора (3.23), що задовольняє теорему 3.2 при $\gamma = 1$ і забезпечує властивість неекспансивності замкненої системи (3.25).

Алгоритм 3.1. 1) обчислення матриць W_R і W_L, де $R = [C, D]$, $L = [B^T, D^T]$;

2) знаходження матриць $X = X^T > 0$ і $Y = Y^T > 0$, що задовольняють співвідношення (3.12), (3.19), (3.20) і $X < X_0$;

3) формування блочних взаємно обернених матриць $\widehat{X}$ і $\widehat{Y}$;

4) розв'язання ЛМН (3.28) відносно $\widehat{K}_0$ при обмеженні $\det(I_l + DK_0) \neq 0$;

5) обчислення матриць регулятора (3.23) за формулами (2.24).

В п. 3) наведеного алгоритму можна використати формулу Фробеніуса для обернення блочних матриць [17], згідно з якою

$$X = Y^{-1} + Y^{-1}Y_1^T H^{-1} Y_1 Y^{-1}, \quad X_1 = -H^{-1}Y_1Y^{-1}, \quad X_2 = H^{-1},$$

де $H = Y_2 - Y_1Y^{-1}Y_1^T$. Якщо для деяких матриць X_1 і H виконуються співвідношення

$$X - Y^{-1} = X_1^T H X_1 \geq 0, \quad H = H^T > 0, \quad \operatorname{rank} X_1 \leq r,$$

то можна покласти $X_2 = H^{-1}$, $Y_1 = -HX_1Y$ і $Y_2 = H + HX_1YX_1^TH$. Зокрема, при умовах $r = n$ і $X > Y^{-1}$ можна взяти $X_1 = X_2 = X - Y^{-1}$ і $H = (X - Y^{-1})^{-1}$.

Слід відмітити, що в теоремах 3.1 і 3.2 матриці P і Q є заданими. Але в алгоритмі робастної стабілізації 3.1 їх можна вважати невідомими і обчислювати разом з додатно визначеними матрицями X і Y. Крім того, можна враховувати невизначеність $A \in \mathrm{Co}\{A_1, \dots, A_\alpha\}$.

3.3. Приклад. Стабілізація одноланкового робота-маніпулятора

Розглянемо систему керування одноланкового робота-маніпулятора, круговий рух ланки якого навколо одного з кінців здійснюється за допомогою гнучкого з'єднання ланки та виконавчого механізму (рис. 1). Між виконавчим механізмом (валом електодвигуна) і кінцем ланки знаходиться лінійна торсійна пружина. Дана система описується в вигляді двох нелінійних диференціальних рівнянь другого роду, які відповідають за механічний баланс виконавчого механізму та ланки робота-маніпулятора без урахування сил тертя і зовнішніх збурень. Рівняння руху системи представляються в векторно-

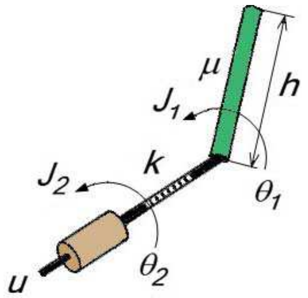

Рис. 3.1: Одноланковий робот-маніпулятор.

матричній формі (2.21), де

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{\mu gh\,\varphi(\theta_1)+k}{J_1} & 0 & \dfrac{k}{J_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k}{J_2} & 0 & -\dfrac{k}{J_2} & -\dfrac{d}{J_2} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{J_2} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix},$$

x_1 і x_2 — кутові координати відповідно ланки маніпулятора і вала двигуна, u — керуючий момент, який створює двигун, J_1 і J_2 — моменти інерції відповідно ланки маніпулятора і вала двигуна, k — жорсткість передатного механізму, d — коефіцієнт демпфування, μ — маса ланки маніпулятора, h — довжина ланки маніпулятора, g — прискорення вільного падіння, $\mu gh\sin\theta_1$ — момент сили тяжіння, що діє на ланку маніпулятора, $\varphi(\theta) = (sin\,\theta)/\theta$ — неперервна функція.

Нехай $\mu gh = 5$, $d = 0,1$, $k = 100$, $J_1 = 1$, $J_2 = 0,3$ і вимірюється вектор виходу

$$y = Cx + Du = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 + u \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}.$$

Використовуючи алгоритм 2.1, отримано шукані матриці динамічного регулятора (3.23)

$$K = \begin{bmatrix} 1,03905 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1,78373 & 0,47388 & 3,32968 & -4,93660 \end{bmatrix},$$

$$V = \begin{bmatrix} -1,77794 \\ 3,46321 \\ 27,22583 \\ -1,20941 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} 7,75694 & -18,47507 & -128,02370 & 5,73633 \\ 12,78966 & -22,37844 & -179,45836 & 7,37386 \\ 135,31195 & -252,41576 & -2078,56531 & 84,27264 \\ -39,63772 & 77,04892 & 614,12793 & -35,01502 \end{bmatrix},$$

який забезпечує α-стійкість замкненої лінійної системи (3.25) при $\alpha = 0,3$. Нульовий розв'язок замкненої нелінійної системи (3.24) також асимптотично стійкий.

Крім того, поклавши в (3.19) $P = 1$, $Q = 0,01$ і $X_0 = 10I_4$, за допомогою алгоритму 3.1 побудовано динамічний регулятор (3.23) з матрицями

$$K = \begin{bmatrix} 1,82161 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} -1,29476 & 0,01041 & 1,25865 & 0,96167 \end{bmatrix},$$

$$V = \begin{bmatrix} 1,10060 \\ -13,80181 \\ -2,03002 \\ 51,48452 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} -2,27078 & -76,73505 & 4,34814 & 220,43906 \\ 1,01722 & -0,21598 & -0,03272 & 0,85998 \\ 2,21576 & 72,41993 & -4,24540 & -223,16699 \\ -0,04464 & 0,56263 & 1,08013 & -5,89252 \end{bmatrix},$$

що забезпечує критерій якості $J < 1$. Знайдено також матриці

$$X = \begin{bmatrix} 7,67175 & -0,67223 & -0,46220 & -0,33429 \\ -0,67223 & 1,76134 & 1,98760 & 0,53081 \\ -0,46220 & 1,98760 & 5,20547 & 0,70099 \\ -0,33429 & 0,53081 & 0,70099 & 0,17849 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 374,39850 & -165,72393 & 376,51701 & -135,90249 \\ -165,72393 & 1627,17576 & -178,84153 & 151,20462 \\ 376,51701 & -178,84153 & 393,51496 & -179,48245 \\ -135,90249 & 151,20462 & -179,48245 & 4902,68005 \end{bmatrix},$$

що задовольняють систему ЛМН (2.18), (3.19), (3.20) і $X < X_0$, а в якості доповнюючих блоків X_1 и X_2 вибраний вираз $X - Y^{-1}$. При цьому нульовий розв'язок систем (3.24) і (3.25) зі структурованою невизначеністю $w = \Theta y$ ($\Theta^T P \Theta \leq Q$) робастно стійкий зі спільною функцією Ляпунова $v(\widehat{x}) = \widehat{x}^T \widehat{X} \widehat{x}$.

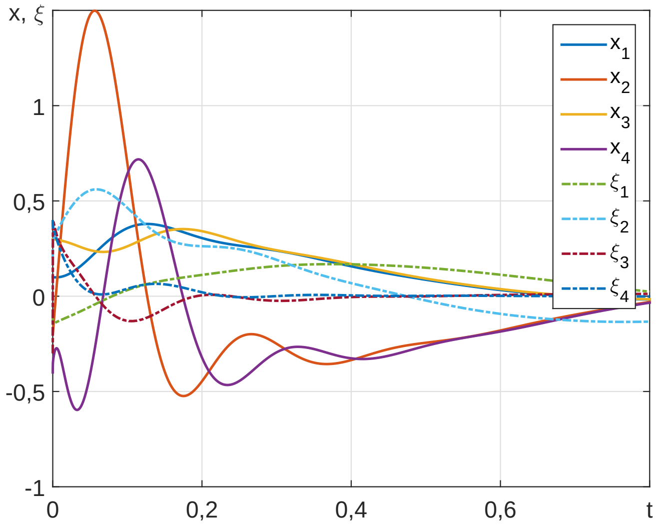

Рис. 3.2: Поведінка замкненої системи керування (алгоритм 2.1).

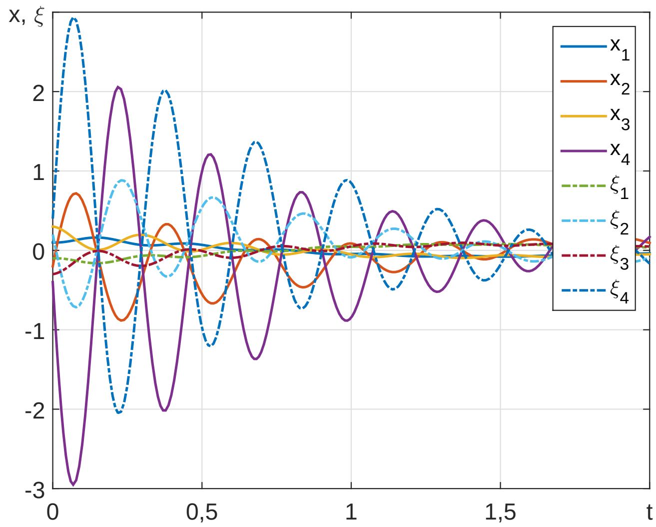

Рис. 3.3: Поведінка замкненої системи керування (алгоритм 3.1).

На рис. 2 і 3 показана поведінка розв'язку замкненої нелінійної системи керування (3.24) з початковим вектором

$$\widehat{x}_0 = \left[0,1,\ -0,2,\ 0,3,\ -0,4,\ -0,1,\ 0,2,\ -0,3,\ 0,4\right]^T$$

при використанні динамічного регулятора (3.23) повного порядку $r = 4$ з матрицями K, U, V і Z при $w = 0$, які отримані за допомогою алгоритмів 2.1 і 3.1. Суцільними і штрих-пунктирними лініями позначено траєкторії відповідно системи $x_i(t)$ і регулятора $\xi_i(t)$ $(i = \overline{1,4})$.

3.4. Системи стабілізації з керованими і спостережуваними виходами

Розглянемо систему керування

$$\begin{aligned} &\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u, \quad x(0) = x_0, \\ &z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u, \\ &y = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u, \end{aligned} \tag{3.30}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $w \in \mathbb{R}^s$, $z \in \mathbb{R}^k$ і $y \in \mathbb{R}^l$ — вектори відповідно стану, керування, зовнішніх збурень, керованого і спостережуваного виходів, а всі матричні коефіцієнти відповідних розмірів сталі. Нас цікавлять керування, які понижують критерії якості (3.2) і (3.3) та забезпечують умови нееекспансивності замкненої системи відносно вектора керованого виходу z. Статичні та динамічні регулятори, які мінімізують критерій якості J, будемо називати *J-оптимальними.* J_0-оптимальне керування у випадку одиничних вагових матриць функціоналу $\varphi_0(w)$ є H_∞-оптимальним.

Якщо керування у системі (3.30) шукати у вигляді статичного зворотного зв'язку

$$u = Ky, \quad \det(I_m - KD_{22}) \neq 0, \tag{3.31}$$

то замкнена система набуває вигляду

$$\dot{x} = Mx + Nw, \quad z = Fx + Gw, \quad x(0) = x_0, \tag{3.32}$$

де $M = A + B_2 K_0 C_2$, $N = B_1 + B_2 K_0 D_{21}$, $F = C_1 + D_{12} K_0 C_2$, $G = D_{11} + D_{12} K_0 D_{21}$, $K_0 = (I_m - KD_{22})^{-1} K$. Застосуємо лему 3.1 для системи (3.32) і, враховуючи лему Шура, подамо критерій виконання оцінки $J_0 < \gamma$ у вигляді

$$\begin{bmatrix} M^TX + XM & XN & F^T \\ N^TX & -\gamma^2 P & G^T \\ F & G & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0. \tag{3.33}$$

При цьому $X = X^T > 0$, а матриця M повинна бути гурвіцевою. Співвідношення (3.33) можна переписати у вигляді ЛМН відносно K_0:

$$\widehat{L}^T K_0 \widehat{R} + \widehat{R}^T K_0^T \widehat{L} + \Omega < 0, \tag{3.34}$$

де $\widehat{R} = \big[R, 0_{l\times k}\big]$, $R = \big[\,C_2, D_{21}\,\big]$, $\widehat{L} = \big[L, 0_{m\times s}\big]\,\widetilde{X}$, $L = \big[\,B_2^T, D_{12}^T\,\big]$,

$$\widetilde{X} = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_k \\ 0 & I_s & 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} A^TX + XA & XB_1 & C_1^T \\ B_1^TX & -\gamma^2 P & D_{11}^T \\ C_1 & D_{11} & -Q^{-1} \end{bmatrix}.$$

Якщо матрична нерівність (3.34) сумісна, то завжди можна вибрати такий його розв'язок K_0, щоб $\det(I_m - KD_{22}) \neq 0$, де

$$K = K_0(I_l + D_{22}K_0)^{-1}. \tag{3.35}$$

Далі застосуємо твердження (d) леми 2.3 до нерівності (3.34). Оскільки

$$W_{\widehat{R}} = \begin{bmatrix} W_R & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix}, \quad W_{\widehat{L}} = \widetilde{X}^{-1} \begin{bmatrix} W_L & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix},$$

то існування розв'язку K_0 матричної нерівності (3.34) еквівалентне співвідношенням

$$W_R^T \begin{bmatrix} A^TX + XA + C_1^TQC_1 & XB_1 + C_1^TQD_{11} \\ B_1^TX + D_{11}^TQC_1 & D_{11}^TQD_{11} - \gamma^2 P \end{bmatrix} W_R < 0, \tag{3.36}$$

$$W_L^T \begin{bmatrix} AY + YA^T + B_1P^{-1}B_1^T & YC_1^T + B_1P^{-1}D_{11}^T \\ C_1Y + D_{11}P^{-1}B_1^T & D_{11}P^{-1}D_{11}^T - \gamma^2 Q^{-1} \end{bmatrix} W_L < 0, \tag{3.37}$$

де $Y = \gamma^2 X^{-1}$. Таким чином, доведено таке твердження.

Теорема 3.3. *Для системи* (3.30) *існує статичний регулятор* (3.31), *що забезпечує оцінку* $J_0 < \gamma$ $(J < \gamma)$, *тоді і лише тоді, коли для деякої матриці* $X = X^T > 0$ *виконується система співвідношень* (3.36) *і* (3.37) $\big($(3.5), (3.36) і (3.37)$\big)$.

Розглянемо випадок статичного зворотного зв'язку по стану: $C_2 = I_n$, $D_{21} = 0$ і $D_{22} = 0$. Оскільки $XY = \gamma^2 I_n$ і $W_R = \left[0_{s\times n}, I_s\right]^T$, то в цьому випадку співвідношення (3.5) і (3.36) набувають вигляду

$$\begin{bmatrix} X_0 & I_n \\ I_n & Y \end{bmatrix} \geq 0, \tag{3.38}$$

$$D_{11}^T Q D_{11} - \gamma^2 P < 0. \tag{3.39}$$

Наслідок 3.1. *Для системи* (3.30) *існує статичний регулятор по стану* $u = Kx$, *що забезпечує оцінку* $J_0 < \gamma$ $(J < \gamma)$, *тоді і лише тоді, коли для деякої матриці* $Y = Y^T > 0$ *виконується система співвідношень* (3.37) *і* (3.39) $\big($ (3.37) – (3.39) $\big)$. *При цьому замкнена система* (3.32) *з невизначеністю* (3.7) *робастно стійка і має спільну функцію Ляпунова* $v(x) = \gamma^2 x^T Y^{-1} x$, *а матрицю регулятора* K *можна знайти у вигляді* (3.35), *де* K_0 *— розв'язок ЛМН* (3.34).

Побудуємо динамічний регулятор порядку r з нульовим початковим вектором:

$$\dot{\xi} = Z\xi + Vy, \quad u = U\xi + Ky, \quad \xi(0) = 0, \tag{3.40}$$

де $\xi \in \mathbb{R}^r$ — вектор стану регулятора, Z, V, U і K — невідомі матриці відповідних розмірів $r \times r$, $r \times l$, $m \times r$ і $m \times l$. Припустимо, що

$$\det(I_m - KD_{22}) \neq 0. \tag{3.41}$$

Тоді замкнена система (3.30), (3.40) набуває вигляду

$$\dot{\widehat{x}} = \widehat{M}\widehat{x} + \widehat{N}w, \quad z = \widehat{F}\widehat{x} + \widehat{G}w, \quad \widehat{x}(0) = \widehat{x}_0, \tag{3.42}$$

де

$$\widehat{x} = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}, \quad \widehat{M} = \begin{bmatrix} A + B_2K_0C_2 & B_2U_0 \\ V_0C_2 & Z_0 \end{bmatrix} = \widehat{A} + \widehat{B}_2\widehat{K}_0\widehat{C}_2,$$

$$\widehat{N} = \begin{bmatrix} B_1 + B_2K_0D_{21} \\ V_0D_{21} \end{bmatrix} = \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2\widehat{K}_0\widehat{D}_{21},$$

$$\widehat{F} = \left[C_1 + D_{12}K_0C_2, D_{12}U_0\right] = \widehat{C}_1 + \widehat{D}_{12}\widehat{K}_0\widehat{C}_2,$$

$$\widehat{G} = D_{11} + D_{12}K_0D_{21} = D_{11} + \widehat{D}_{12}\widehat{K}_0\widehat{D}_{21},$$

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} A & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times n} & 0_{r\times r} \end{bmatrix},\ \widehat{B}_2 = \begin{bmatrix} B_2 & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times m} & I_r \end{bmatrix},\ \widehat{C}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0_{l\times r} \\ 0_{r\times n} & I_r \end{bmatrix},$$

$$\widehat{K}_0 = \begin{bmatrix} K_0 & U_0 \\ V_0 & Z_0 \end{bmatrix},\ \widehat{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0_{r\times s} \end{bmatrix},\ \widehat{D}_{21} = \begin{bmatrix} D_{21} \\ 0_{r\times s} \end{bmatrix},$$

$$\widehat{C}_1 = \begin{bmatrix} C_1, 0_{k\times r} \end{bmatrix}, \quad \widehat{D}_{12} = \begin{bmatrix} D_{12}, 0_{k\times r} \end{bmatrix}.$$

Тут невідомими є блоки матриці $\widehat{K}_0$

$$K_0 = (I_m - KD_{22})^{-1}K, \quad U_0 = (I_m - KD_{22})^{-1}U,$$

$$V_0 = V(I_l - D_{22}K)^{-1}, \quad Z_0 = Z + VD_{22}(I_m - KD_{22})^{-1}U,$$

які однозначно визначають шукані матриці динамічного регулятора (3.40):

$$\begin{gathered} K = (I_m + K_0D_{22})^{-1}K_0, \quad U = (I_m + K_0D_{22})^{-1}U_0, \\ V = V_0(I_l + D_{22}K_0)^{-1}, \quad Z = Z_0 - V_0D_{22}(I_m + K_0D_{22})^{-1}U_0. \end{gathered} \tag{3.43}$$

Застосуємо твердження леми 3.1 для системи (3.42) і, враховуючи лему Шура, перепишемо критерій виконання оцінки $J_0 < \gamma$ у вигляді

$$\begin{bmatrix} \widehat{M}^T\widehat{X} + \widehat{X}\widehat{M} & \widehat{X}\widehat{N} & \widehat{F}^T \\ \widehat{N}^T\widehat{X} & -\gamma^2P & \widehat{G}^T \\ \widehat{F} & \widehat{G} & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad \widehat{X} = \begin{bmatrix} X & X_1^T \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix} > 0. \tag{3.44}$$

При цьому матриця $\widehat{M}$ повинна бути гурвіцевою. Оскільки критерій якості $\widehat{J}$ типу (3.3) для системи (3.42) з початковим вектором $\widehat{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0^T, 0 \end{bmatrix}^T$ співпадає з J, де X_0 — перший діагональний блок матриці $\widehat{X}_0$, то існування розв'язку системи (3.44) при обмеженні (3.5) еквівалентне нерівності $J < \gamma$ і у випадку $\gamma = 1$ забезпечує неекспансивність системи відносно критерія якості J.

Враховуючи блочну структуру матриць в (3.42), перепишемо перше співвідношення (3.44) у вигляді ЛМН відносно $\widehat{K}_0$:

$$\widehat{L}^T\widehat{K}_0\widehat{R} + \widehat{R}^T\widehat{K}_0^T\widehat{L} + \widehat{\Omega} < 0, \tag{3.45}$$

де

$$\widehat{R} = \left[\widehat{R}_1, 0_{l+r\times k}\right], \quad \widehat{R}_1 = \left[\,\widehat{C}_2, \widehat{D}_{21}\,\right],$$

$$\widehat{L} = \left[\widehat{L}_1, 0_{m+r\times s}\,\right] \widetilde{X}, \quad \widehat{L}_1 = \left[\,\widehat{B}_2^T, \widehat{D}_{12}^T\,\right],$$

$$\widetilde{X} = \begin{bmatrix} \widehat{X} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_k \\ 0 & I_s & 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{\Omega} = \begin{bmatrix} \widehat{A}^T\widehat{X} + \widehat{X}\widehat{A} & \widehat{X}\widehat{B}_1 & \widehat{C}_1^T \\ \widehat{B}_1^T\widehat{X} & -\gamma^2 P & D_{11}^T \\ \widehat{C}_1 & D_{11} & -Q^{-1} \end{bmatrix}.$$

Якщо дана нерівність сумісна, то завжди можна вибрати такий розв'язок $\widehat{K}_0$, щоб виконувалась умова (3.41).

Оскільки

$$W_{\widehat{R}} = \begin{bmatrix} W_{\widehat{R}_1} & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix}, \quad W_{\widehat{L}} = \widetilde{X}^{-1}\begin{bmatrix} W_{\widehat{L}_1} & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix},$$

то існування розв'язку $\widehat{K}_0$ матричної нерівності (3.45) еквівалентне співвідношенням (див. лему 2.3)

$$W_{\widehat{R}_1}^T \begin{bmatrix} \widehat{A}^T\widehat{X} + \widehat{X}\widehat{A} + \widehat{C}_1^T Q\widehat{C}_1 & \widehat{X}\widehat{B}_1 + \widehat{C}_1^T Q D_{11} \\ \widehat{B}_1^T\widehat{X} + D_{11}^T Q\widehat{C}_1 & D_{11}^T Q D_{11} - \gamma^2 P \end{bmatrix} W_{\widehat{R}_1} < 0,$$

$$W_{\widehat{L}_1}^T \begin{bmatrix} \widehat{A}\widehat{Y} + \widehat{Y}\widehat{A}^T + \widehat{B}_1 P^{-1}\widehat{B}_1^T & \widehat{Y}\widehat{C}_1^T + \widehat{B}_1 P^{-1} D_{11}^T \\ \widehat{C}_1\widehat{Y} + D_{11}P^{-1}\widehat{B}_1^T & D_{11}P^{-1}D_{11}^T - \gamma^2 Q^{-1} \end{bmatrix} W_{\widehat{L}_1} < 0,$$

де $\widehat{Y} = \gamma^2\widehat{X}^{-1}$. Далі, використовуючи блочні вирази

$$W_{\widehat{R}_1} = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_r \\ 0 & I_s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_R \\ 0_{r\,\times\, s_1} \end{bmatrix}, \quad R = \left[C_2, D_{21}\right],$$

$$W_{\widehat{L}_1} = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_r \\ 0 & I_k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_L \\ 0_{r\,\times\, k_1} \end{bmatrix}, \quad L = \left[B_2^T, D_{12}^T\right],$$

де $s_1 = n+s-\operatorname{rank} R$ і $k_1 = n+k-\operatorname{rank} L$, отримані співвідношення набувають вигляду (3.36) і (3.37), де X і Y — перші діагональні блоки матриць (3.11).

Таким чином, враховуючи лему 3.3, доведено таке твердження.

Теорема 3.4. *Для системи* (3.30) *існує динамічний регулятор* (3.40), *що забезпечує оцінку* $J_0 < \gamma$ $(J < \gamma)$, *тоді і лише тоді, коли система співвідношень* (3.12), (3.36) *і* (3.37) $\big($ (3.5), (3.12), (3.36) *і* (3.37) $\big)$ *сумісна відносно матриць* $X = X^T > 0$ *і* $Y = Y^T > 0$.

Наведемо алгоритм побудови динамічного регулятора (3.40), який задовольняє умови теореми 3.4, а також забезпечує робастну стійкість замкненої системи (3.42) з невизначеністю (3.7) і спільну функцію Ляпунова $v(\widehat{x}) = \widehat{x}^T \widehat{X} \widehat{x}$, де $\widehat{X}$ — розв'язок ЛМН (3.44).

Алгоритм 3.2. 1) обчислення матриць W_R і W_L, де $R = \big[C_2, D_{21}\big]$, $L = \big[B_2^T, D_{12}^T\big]$;

2) знаходження матриць $X = X^T > 0$ і $Y = Y^T > 0$, які задовольняють систему співвідношень (3.5), (3.12), (3.36) і (3.37);

3) побудова розкладу $Z = Y - \gamma^2 X^{-1} = V^T V$, де $V \in \mathbb{R}^{r\times n}$, $\ker V = \ker Z$, і формування блочної матриці

$$\widehat{X} = \begin{bmatrix} X & X_1^T \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix} > 0, \quad X_1 = \frac{1}{\gamma} V X, \quad X_2 = \frac{1}{\gamma^2} V X V^T + I_r;$$

4) розв'язання ЛМН (3.45) відносно $\widehat{K}_0$ при обмеженні (3.41);

5) обчислення матриць регулятора (3.40) за формулами (3.43).

Для забезпечення оцінки $J_0 < \gamma$ додаткове обмеження (3.5) в п. 2) даного алгоритму можна не використовувати. При визначенні матриць X і Y у випадку динамічного регулятора повного порядку виконується рангове обмеження в (3.12) і необхідно розв'язати систему ЛМН. Всі інші блоки матриць (3.11) можуть бути визначені за допомогою співвідношень (3.14).

Можна сформулювати аналоги теореми 3.4 і відповідні алгоритми побудови регуляторів для системи (3.30), в яких враховуються невизначеності поліедрального типу

$$A \in \mathrm{Co}\{A^1, \ldots, A^{\nu_1}\},\ B_1 \in \mathrm{Co}\{B_1^1, \ldots, B_1^{\nu_2}\},$$

$$C_1 \in \mathrm{Co}\{C_1^1, \ldots, C_1^{\nu_3}\},\ D_{11} \in \mathrm{Co}\{D_{11}^1, \ldots, D_{11}^{\nu_4}\},$$

а матриці P і Q разом з X і Y визначаються при розв'язанні системи матричних нерівностей типу (3.36) і (3.37), сформованої для всіх вершин заданих політопів. Дійсно, співвідношення (3.36) і (3.37) за допомогою леми Шура можна подати у вигляді

$$\begin{bmatrix} W_R^T & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T X + XA & XB_1 & C_1^T \\ B_1^T X & -\gamma^2 P & D_{11}^T \\ C_1 & D_{11} & -Q^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_R & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix} < 0,$$

$$\begin{bmatrix} W_L^T & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AY + YA^T & YC_1^T & B_1 \\ C_1 Y & -\gamma^2 Q^{-1} & D_{11} \\ B_1^T & D_{11}^T & -P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_L & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix} < 0.$$

Тут матричні вирази залежать від A, B_1, C_1 і D_{11} лінійно. Тому твердження теореми 3.4 виконуються, якщо замість (3.36) і (3.37) використати систему ЛМН

$$\begin{bmatrix} W_R^T & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i^T X + XA_i & XB_{1j} & C_{1p}^T \\ B_{1j}^T X & -\gamma^2 P & D_{11q}^T \\ C_{1p} & D_{11q} & -Q^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_R & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix} < 0,$$

$$\begin{bmatrix} W_L^T & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i Y + YA_i^T & YC_{1p}^T & B_{1j} \\ C_{1p} Y & -\gamma^2 Q^{-1} & D_{11q} \\ B_{1j}^T & D_{11q}^T & -P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_L & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix} < 0.$$

$$i = \overline{1, \nu_1}, \quad j = \overline{1, \nu_2}, \quad p = \overline{1, \nu_3}, \quad q = \overline{1, \nu_4}.$$

Викладені методи побудови статичних та динамічних регуляторів типу (3.31) і (3.40) можна застосувати до більш загального класу нелінійних систем з керованими і спостережуваними виходами

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(x)x + B_1(x)w + B_2(x)u, \quad x(0) = x_0, \\ z &= C_1(x)x + D_{11}(x)w + D_{12}(x)u, \\ y &= C_2(x)x + D_{21}(x)w + D_{22}(x)u, \end{aligned} \tag{3.46}$$

де всі матричні коефіцієнти є неперервними функціями стану $x \in \mathcal{S}_0$. При цьому виконується висновок про робастну стабілізацію нульового стану рівноваги відповідних замкнених нелінійних систем типу (3.32) і (3.42) з невизначеністю (3.7) (див. зауваження 3.1), а характеристики якості J_0 і J даних систем можна оцінити за допомогою леми 3.2.

Зазначимо, що для побудови наближених J-оптимальних законів керування для наведених класів систем можуть бути застосовані твердження теорем 3.3 і 3.4 при мінімально можливих значеннях параметра γ.

3.5. Приклад. Гасіння коливань лінійного осцилятора

Розглянемо рівняння руху керованого лінійного осцилятора з демпфуванням

$$\ddot{\varphi} + \delta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = u + w, \tag{3.47}$$

де δ і ω_0 — відповідно коефіцієнт демпфування і власна частота коливань осцилятора, u — керування, а w — обмежене зовнішнє збурення. Нехай $z = \left[\,\varphi,\, u\,\right]^T$ — керований, а $y = \varphi$ — спостережуваний виходи даної системи, яка подається у вигляді (3.30), де

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\delta \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \left[\,1, 0\,\right],$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D_{21} = D_{22} = 0, \quad x = \begin{bmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}.$$

Для системи без керування ($u = 0$) згідно з (3.8) знайдено відповідні характеристики $J_0 = 1,001$ і $J = 1,289$ при таких значеннях параметрів:

$$\delta = 0,1, \quad \omega_0 = 1, \quad P = 1, \quad Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix}, \quad X_0 = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{bmatrix},$$

де $q_1 = 0,01$, $q_2 = 0,1$, $\rho_1 = \rho_2 = 0,04$. Досліджено залежності даних характеристик від δ і ω_0, а також від діагональних елементів вагових матриць Q і X_0 (див. рис. 3.4, 3.6 і 3.8). Рівень гасіння зовнішніх і початкових збурень осцилятора зменшується при збільшенні його власної частоти коливань і майже не змінюється при збільшенні коефіцієнта демпфування (рис. 3.4).

Далі, застосовуючи алгоритм 3.2, проводилась мінімізація параметра γ, при якому виконується теорема 3.4. В результаті при $\gamma = 0,865$ наближено побудовано J-оптимальний динамічний регулятор (3.40) повного порядку з матрицями

$$Z = \begin{bmatrix} -0,06612 & -0,09307 \\ 0,23117 & -1,05843 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} -0,00037 \\ 0,11011 \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} -0,31404 & 3,90247 \end{bmatrix}, \quad K = -0,23776,$$

який забезпечує властивості робастної стійкості і неекспансивності замкненої системи (3.42), матриця $\widehat{M}$ якої має спектр

$$\sigma(\widehat{M}) = \big\{ -0,16870 \pm 1,01840\, i;\ -0,78994;\ -0,09722 \big\}.$$

Даний регулятор суттєво понизив рівні гасіння зовнішніх і початкових збурень (див. порівняння значень функцій $J_0(q_1, q_2)$ і $J(\rho_1, \rho_2)$ для системи без керування (рис. 3.6, 3.8) і замкненої системи (рис. 3.7, 3.9)). Так, для наведених значень параметрів і матриць регулятора $J_0 = 0,39062 < J = 0,86181 < 1$.

Осцилятор з побудованим регулятором (3.40) зберігає асимптотичну стійкість при довільній функції збурення (невизначеності)

$$w(t) = \frac{1}{\gamma}\theta z(t),\ \theta = [\theta_1, \theta_2], \quad \frac{\theta_1^2}{q_1} + \frac{\theta_2^2}{q_2} \leq 1,\ |w| \leq \frac{1}{\gamma}\sqrt{q_1\varphi^2 + q_2 u^2}, \qquad (3.48)$$

значення якої знаходяться між двома поверхнями (див. рис. 3.5).

На рис. 3.10 показана поведінка розв'язків системи без керування з початковим вектором $x_0 = [1, -2]^T$, а на рис. 3.11 — поведінка розв'язків замкненої системи (3.42) з регулятором (3.40) і початковим вектором $\widehat{x}_0 = [1, -2, 0, 0]^T$. При цьому функція збурення w задана у вигляді (3.48) при $\theta_1 = \sqrt{q_1/2}$ і $\theta_2 = \sqrt{q_2/2}$.

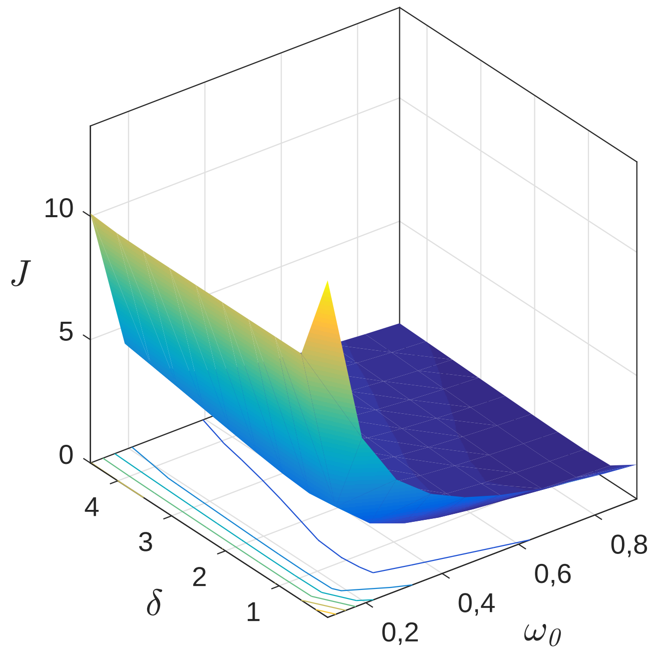

Рис. 3.4: Залежність J від δ і ω_0.

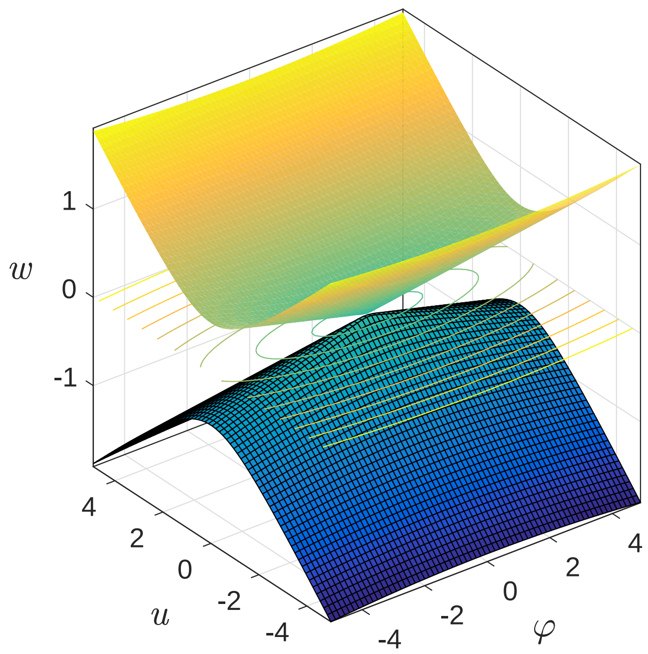

Рис. 3.5: Область невизначеності.

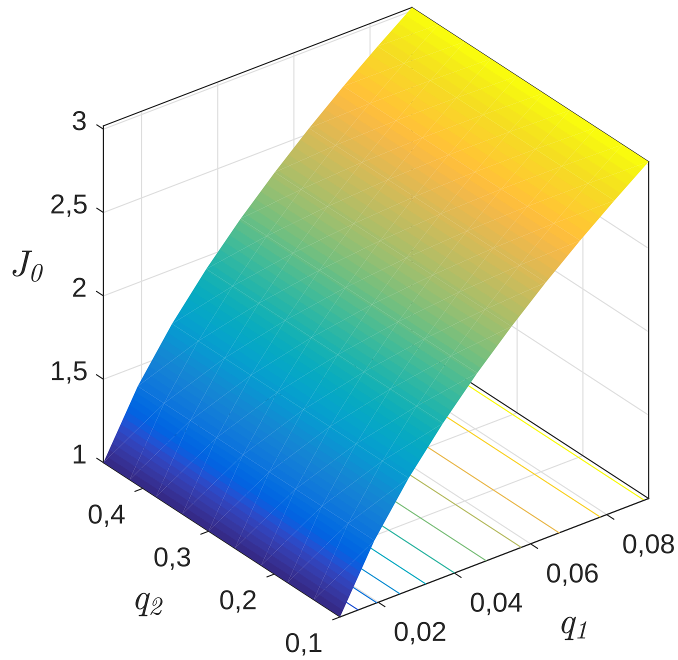

Рис. 3.6: Залежність J_0 від q_1 і q_2 (система без керування).

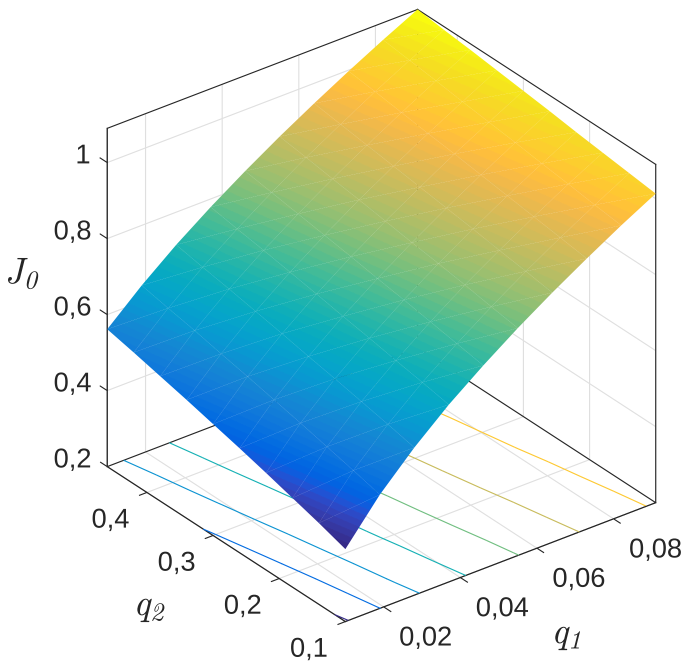

Рис. 3.7: Залежність J_0 від q_1 і q_2 (замкнена система).

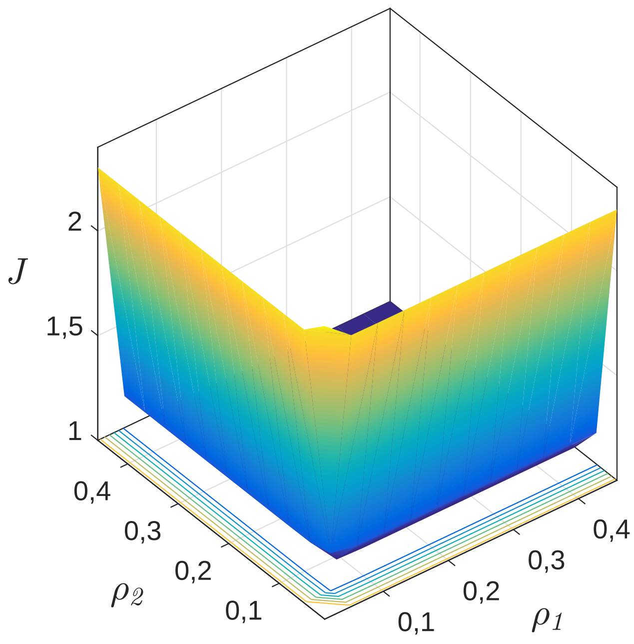

Рис. 3.8: Залежність J від ρ_1 і ρ_2 (система без керування).

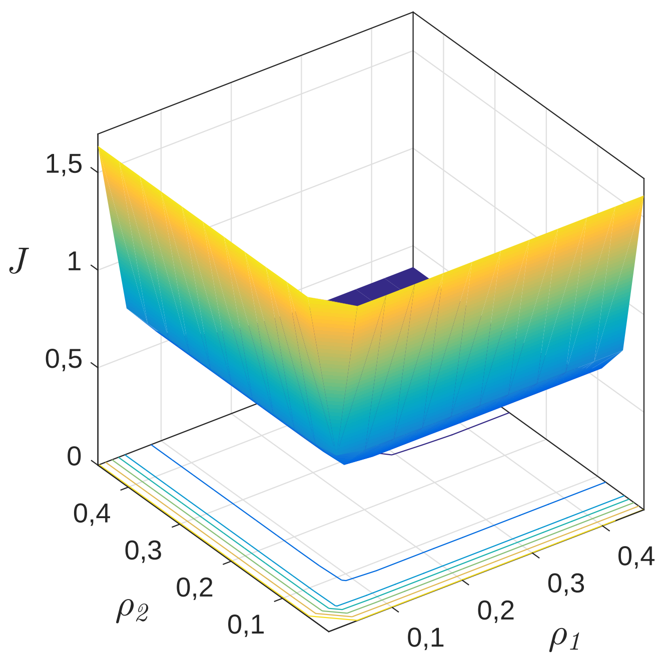

Рис. 3.9: Залежність J від ρ_1 і ρ_2 (замкнена система).

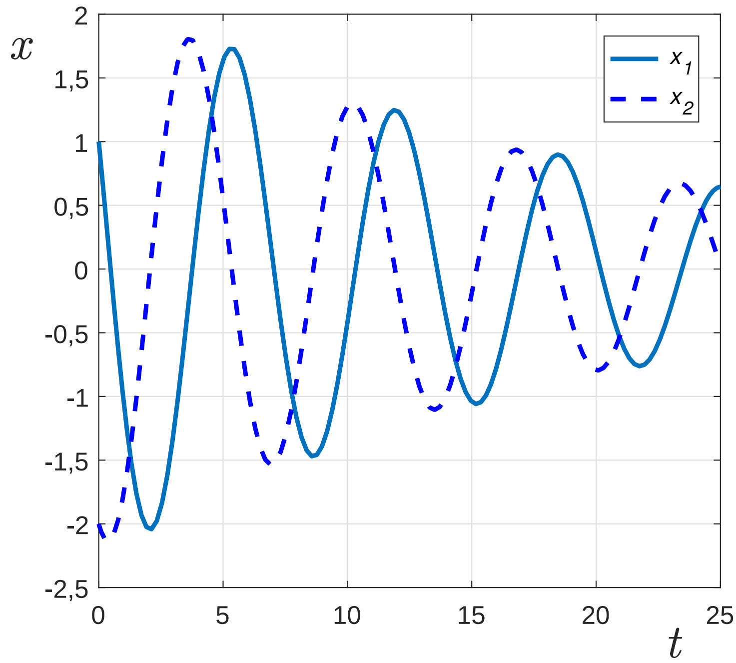

Рис. 3.10: Поведінка системи без керування з початковим вектором $x_0 = [1, -2]^T$.

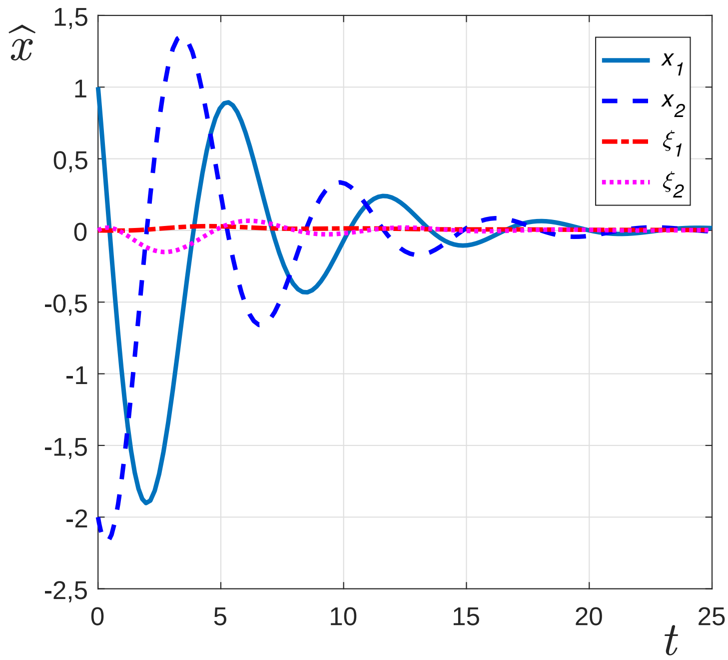

Рис. 3.11: Поведінка замкненої системи з початковим вектором $\widehat{x}_0 = [1, -2, 0, 0]^T$.

3.6. Висновки до розділу

В даному підрозділі розглянуто класи лінійних та нелінійних систем керування у векторно-матричній формі. На основі методу квадратичних функцій Ляпунова досліджено задачі оцінки та гасіння обмежених збурень у системах з керованими і спостережуваними виходами. Отримано такі результати:

• Встановлено необхідні та достатні умови виконання верхньої оцінки критерію якості лінійної системи, що характеризує зважений рівень гасіння обмежених зовнішніх та початкових збурень. Побудована множина значень вектора збурень, при яких система має властивість робастної стійкості.

• Сформульовано критерії існування статичних та динамічних регуляторів з наявними збуреннями, які гарантують бажані оцінки відповідних критеріїв якості та робастну стійкість замкненої системи.

• Для класу лінійних систем з керованими і спостережуваними виходами встановлено критерії існування статичних та динамічних регуляторів з нульовим початковим вектором, які забезпечують задану оцінку зваженого рівня гасіння зовнішніх і початкових збурень, робастну стійкість та спільну квадратичну функцію Ляпунова замкненої системи.

• Розроблено алгоритм побудови динамічного регулятора, який дозволяє оцінити та мінімізувати зважений рівень гасіння обмежених збурень у системах з керованими і спостережуваними виходами.

• Ефективність розроблених методів синтезу систем керування продемонстровано в задачах стабілізації одноланкового робота-маніпулятора та гасіння коливань лінійного осцилятора.

Розділ 4
СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ З ДИСКРЕТНИМ ЧАСОМ

4.1. Умови стабілізації дискретних систем

Розглянемо нелінійну систему керування

$$x_{t+1} = A(x_t)x_t + B(x_t)u_t, \quad y_t = C(x_t)x_t + D(x_t)u_t, \tag{4.1}$$

де $x_t \in \mathbb{R}^n$, $u_t \in \mathbb{R}^m$ і $y_t \in \mathbb{R}^l$ — вектори відповідно стану, керування і вимірюваного виходу системи, а $A(x_t)$, $B(x_t)$, $C(x_t)$ і $D(x_t)$ — матриці відповідних розмірів, неперервно залежні від x_t в деякому околі $\mathcal{S}_0 = \{x : \|x\| \le h\}$ точки $x = 0$, $t \in \mathcal{T} = \{0, 1, \dots\}$.

Припустимо, що $\operatorname{rank} B = m$, $\operatorname{rank} C = l$ і разом з (4.1) розглядаємо лінійну систему

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t, \quad y_t = Cx_t + Du_t, \tag{4.2}$$

де $A = A(0)$, $B = B(0)$, $C = C(0)$ і $D = D(0)$. Сформулюємо умови стабілізації нульового стану рівноваги систем (4.1) і (4.2) за допомогою статичних регуляторів

$$u_t = Ky_t, \quad K \in \mathcal{K}_D, \quad t \in \mathcal{T}, \tag{4.3}$$

де $\mathcal{K}_D = \left\{K \in \mathbb{R}^{m\times l} : \det(I_m - KD) \ne 0\right\}$. Замкнена система (4.2), (4.3) має вигляд

$$x_{t+1} = Mx_t, \quad M = A + B\mathbf{D}(K)C, \tag{4.4}$$

де $\mathbf{D}(K) = (I_m - KD)^{-1}K$ — нелінійний оператор у просторі матриць $\mathbb{R}^{m\times l}$.

Систему (4.4) будемо називати *ρ-стійкою*, якщо її спектр $\sigma(M)$ розміщений всередині круга $\{\lambda : |\lambda| < \rho\}$, де $0 < \rho \le 1$. *Спектральний запас* стійкості ρ-стійкої системи $\alpha \ge 1 - \rho$.

Теорема 4.1. *Наступні твердження еквівалентні:*

1) *Існує статичний регулятор* (4.3)*, що забезпечує ρ-стійкість замкненої системи* (4.4).

2) *Існує матриця* $X = X^T > 0$, *що задовольняє співвідношення*

$$B^{\perp T}(AXA^T - \rho^2 X)\, B^{\perp} < 0, \tag{4.5}$$

$$AXA^T - \rho^2 X < AXC^T(CXC^T)^{-1}CXA^T. \tag{4.6}$$

3) *Існують взаємно обернені матриці* $X = X^T > 0$ *і* $Y = Y^T > 0$, *що задовольняють співвідношення* (4.5) *і*

$$C^{\perp}(A^T Y A - \rho^2 Y)\, C^{\perp T} < 0. \tag{4.7}$$

Якщо виконується одне із тверджень 2) *або* 3), *то регулятор*

$$u_t = K y_t, \quad K = -\mathbf{D}(-K_0) \in \mathcal{K}_D, \quad t \in \mathcal{T}, \tag{4.8}$$

де K_0 — *довільний розв'язок ЛМН*

$$P^T K_0 Q + Q^T K_0^T P < F, \tag{4.9}$$

$$P = \big[-B^T, 0_{m\times n}\big], \quad Q = \big[0_{l\times n}, CX\big], \quad F = \begin{bmatrix} \rho^2 X & AX \\ XA^T & X \end{bmatrix},$$

забезпечує ρ-*стійкість замкненої системи* (4.4).

Доведення. Оскільки $\mathbf{D}(K) = K_0$, то за теоремою Ляпунова критерієм досягнення ρ-стійкості системи (4.4) є існування розв'язку $X = X^T > 0$ матричної нерівності

$$Y_0 = (A + BK_0C)X(A + BK_0C)^T - \rho^2 X < 0, \tag{4.10}$$

яка на основі конгруентного перетворення [42]

$$\begin{bmatrix} B^+ \\ B^{\perp +} \end{bmatrix} Y_0 \big[B^{+T},\ B^{\perp}\big] = \begin{bmatrix} B^+ Y_0 B^{+T} & B^+ Y_0 B^{\perp} \\ B^{\perp +} Y_0 B^{+T} & S \end{bmatrix} < 0,$$

зводиться до системи співвідношень (4.5) і

$$H_0 + K_0 H_1 + H_1^T K_0^T + K_0 H_2 K_0^T < 0, \tag{4.11}$$

де

$$H_0 = B^+(L - LRL)B^{+T}, \quad H_1 = CXA^T(I_n - RL)B^{+T},$$

$$H_2 = C(X - XA^TRAX)C^T, \quad L = AXA^T - \rho^2 X,$$

$$R = B^{\perp}S^{-1}B^{\perp T}, \quad S = B^{\perp T}LB^{\perp}.$$

При виконанні умови (4.5) критерієм існування матриці K_0, що задовольняє (4.11), є обмеження на інерцію блочної матриці H (див. доведення леми 3.1.1 і теореми 6.1.1 в [42]):

$$\mathrm{i}(H) = \{l, m, 0\}, \quad H = \begin{bmatrix} H_0 & H_1^T \\ H_1 & H_2 \end{bmatrix}.$$

З іншого боку $H = \widehat{H}_0 - \widehat{H}_1^T \widehat{H}_2^{-1} \widehat{H}_1$ і згідно з (2.2) $\mathrm{i}_{\pm}(\widehat{H}) = \mathrm{i}_{\pm}(S) + \mathrm{i}_{\pm}(H)$, де

$$\widehat{H} = \left[\begin{array}{cc} \widehat{H}_0 & \widehat{H}_1^T \\ \widehat{H}_1 & \widehat{H}_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} B^{+}LB^{+T} & B^{+}AXC^T & B^{+}LB^{\perp} \\ CXA^TB^{+T} & CXC^T & CXA^TB^{\perp} \\ \hline B^{\perp T}LB^{+T} & B^{\perp T}AXC^T & S \end{array}\right] = V_1 \Delta V_1^T,$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} AXA^T - \rho^2 X & AXC^T \\ CXA^T & CXC^T \end{bmatrix}, \quad V_1^T = \begin{bmatrix} B^{+T} & 0 & B^{\perp} \\ 0 & I_l & 0 \end{bmatrix}.$$

Оскільки V_1 — квадратна невироджена матриця, то $\mathrm{i}(\widehat{H}) = \mathrm{i}(\Delta) = \{l, n, 0\}$, що еквівалентно нерівності (4.6). Отже, твердження 1) і 2) еквівалентні.

Доведемо еквівалентність тверджень 2) і 3). Застосуємо формули (2.1) і (2.2) до блочної матриці

$$\Omega = \begin{bmatrix} -\rho^2 X & 0 & A \\ 0 & 0 & C \\ A^T & C^T & -X^{-1} \end{bmatrix},$$

отримаємо рівності $\mathrm{i}(\Delta) = \mathrm{i}(\Delta_1) = \mathrm{i}(\Delta_2)$, де

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 0 & C \\ C^T & \rho^{-2}A^TYA - Y \end{bmatrix}, \quad Y = X^{-1},$$

$$\Delta_2 = \rho^2 V_2 \Delta_1 V_2^T = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & C^{\perp}ZC^{\perp T} \end{bmatrix}, \quad Z = A^TYA - \rho^2 Y,$$

$$E = \begin{bmatrix} C^{+T} Z C^{+} & \rho^2 I_l \\ \rho^2 I_l & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{i}(E) = \{l, l, 0\},$$

$$V_2^T = \begin{bmatrix} 0 & I_l & -\rho^{-2} C^{+T} Z C^{\perp T} \\ C^{+} & 0 & C^{\perp T} \end{bmatrix}, \quad \det V_2 \neq 0.$$

Оскільки V_2 — квадратна невироджена матриця, то $\mathrm{i}_\pm(\Delta_2) = \mathrm{i}_\pm(C^\perp Z C^{\perp T}) + l$. Враховуючи еквівалентність співвідношень $\mathrm{i}(\Delta) = \{l, n, 0\}$ і (4.6) можемо стверджувати, що при умові (4.5) матричні нерівності (4.6) і (4.7) еквівалентні.

Зазначимо, що еквівалентність тверджень 1) і 3) можна встановити безпосередньо, застосовуючи твердження (d) леми 2.5 для ЛМН (4.9) (див. також [9]):

$$W_P^T F W_P > 0,\ W_Q^T F W_Q > 0,\ W_P = \begin{bmatrix} B^\perp & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix},\ W_Q = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & Y C^{\perp T} \end{bmatrix}.$$

При цьому шуканий регулятор можна побудувати на основі співвідношень (4.8) і (4.9).

Теорему доведено. □

Сформулюємо достатні умови стабілізації стану рівноваги нелінійної системи (4.1).

Теорема 4.2. *Нехай виконується одне із тверджень* 2) *або* 3) *теореми 4.1 для лінійної системи* (4.2). *Тоді співвідношення* (4.8) *і* (4.9) *визначають статичний регулятор, що забезпечує асимптотичну стійкість нульового стану* $x_t \equiv 0$ *та квадратичну функцію Ляпунова* $v(x) = x^T X^{-1} x$ *замкненої нелінійної системи* (4.1), (4.8).

Доведення. За теоремою 4.1 для замкненої лінійної системи (4.4) маємо

$$M X M^T - \rho^2 X < 0, \quad M^T Y M - Y < (\rho^2 - 1) Y \leq 0,$$

де $Y = X^{-1}$. При цьому в силу неперервності матричних функцій $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ і $D(x)$ для деякого $h > 0$ виконуються співвідношення

$$\det\left[I_m - K D(x)\right] \neq 0, \quad M^T(x) Y M(x) - Y < (\rho^2 - 1) Y \leq 0, \quad x \in \mathcal{S}_0,$$

де $M(x) = A(x) + B(x)\big[I_m - KD(x)\big]^{-1}KC(x)$, $\mathcal{S}_0 = \{x : \|x\| < h\}$, причому $M(0) = M$. Тоді для першої різниці функції $v(x)$ в силу нелінійної системи (4.1) маємо

$$v(x_{t+1}) - v(x_t) = x_t^T\big[M^T(x_t)YM(x_t) - Y\big]x_t < (\rho^2 - 1)v(x_t) \leq 0,\ x_t \in \mathcal{S}_0.$$

Отже, твердження теореми 4.2 є наслідком теореми 4.1 і аналога теореми Ляпунова про асимптотичну стійкість для дискретних систем.

Теорему доведено. $\square$

Матричну нерівність (4.6) в твердженні 2) теореми 4.1 можна подати у вигляді $ASA^T < \rho^2 X$, де

$$S = X - XC^T(CXC^T)^{-1}CX = G\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Psi(Z) \end{bmatrix}G^T, \quad X = GZG^T,$$

$$G = \big[C^+, C^{\perp T}\big], \quad Z = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2^T \\ Z_2 & Z_3 \end{bmatrix}, \quad \Psi(Z) = Z_3 - Z_2Z_1^{-1}Z_2^T.$$

На основі даних співвідношень і твердження 2) теореми 4.1 наведемо ітераційний алгоритм обчислення матриці регулятора (4.3), який забезпечує ρ-стійкість лінійної системи (4.2) і асимптотичну стійкість нульового стану нелінійної системи (4.1).

Алгоритм 4.1. 1) Знаходження матриць $B^\perp$, $C^\perp$, C^+ і G.

2) Вибір початкового наближення Z_0 і розв'язування системи ЛМН відносно Z_k:

$$B^{\perp T}\left(AGZ_kG^TA^T - \rho^2 GZ_kG^T\right)B^\perp < 0, \quad Z_k = \begin{bmatrix} Z_{k1} & Z_{k2}^T \\ Z_{k2} & Z_{k3} \end{bmatrix},$$

$$\rho^2 GZ_kG^T > AG\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Psi(Z_{k-1}) \end{bmatrix}G^TA^T, \quad 0 < Z_k \leq Z_{k-1}, \quad k = \overline{1, N},$$

де $\Psi(Z_k) = Z_{3k} - Z_{2k}Z_{1k}^{-1}Z_{2k}^T$, N — кількість ітерацій.

3) Розв'язування ЛМН (4.9) відносно K_0 при умовах

$$X = GZ_NG^T, \quad -K_0 \in \mathcal{K}_D.$$

4) Обчислення матриці регулятора K за формулою $K = -\mathbf{D}(-K_0)$.

В даному алгоритмі монотонна і обмежена послідовність матриць $Z_0 \geq Z_1 \geq ... \geq Z_k \geq ... > 0$ має границю. Якщо на деякому кроці $k = N$ відповідна матриця X задовольняє умови (4.5) і (4.6), то стабілізуючий регулятор для систем (4.1) і (4.2) можна визначити за допомогою співвідношень (4.8) і (4.9).

Приклад. Для ілюстрації теореми 4.1 і результативності алгоритму 4.1 розглянемо дискретну модель поздовжнього руху гелікоптера при вертикальному зльоті і посадці, яка описується системою рівнянь (4.2) з матрицями [95]

$$A = \begin{bmatrix} 1,00000 & 0,00027 & 0,00016 & -0,00456 \\ 0,00048 & 0,98995 & -0,00018 & -0,04001 \\ 0,00100 & 0,00365 & 0,99303 & 0,01407 \\ 0,00001 & 0,00002 & 0,00997 & 1,00010 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0,00442 & 0,00175 \\ 0,03527 & -0,07554 \\ -0,05494 & 0,04461 \\ -0,00028 & 0,00022 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Компонентами фазового вектора x_t є відповідно горизонтальна швидкість, вертикальна швидкість, кутова швидкість і кут тангажа. Компонентами вектора керування u_t є керування підйомом/посадкою і кутом нахилу гелікоптера. Ця система без керування нестійка, оскільки її спектральний радіус $\rho(A) = 1,00287 > 1$.

Для знаходження матриці X, що задовольняє систему співвідношень (4.5) і (4.6), за допомогою засобів комп'ютерної системи Matlab реалізовано ітераційний алгоритм 4.1. В результаті матриця $K = K_0$ стабілізуючого регулятора (4.8) знайдена на основі ЛМН (4.9) при $\rho = 0,999$ і отримано такі значення

$$X = \begin{bmatrix} 0,93496 & 0,27593 & 0,01254 & 0,42731 \\ 0,27593 & 0,10313 & 0,02846 & 0,03076 \\ 0,01254 & 0,02846 & 8,06526 & -0,50980 \\ 0,42731 & 0,03076 & -0,50980 & 2,60944 \end{bmatrix} > 0,$$

$$K = \begin{bmatrix} 5,36439 & -19,07149 \\ -1,61648 & 4,07012 \end{bmatrix}.$$

При цьому відповідна замкнена система (4.4) асимптотично стійка зі спектральним запасом $\alpha = 0,00274$, оскільки

$$\sigma(M) = \big\{0,03418;\ 0,99550;\ 0,99709 \pm 0,01837\, i\big\}, \quad \rho(M) = 0,99726 < 1.$$

Сформулюємо умови стабілізації нульового стану рівноваги систем (4.1) і (4.2) за допомогою динамічного регулятора

$$\xi_{t+1} = Z\xi_t + Vy_t, \quad u_t = U\xi_t + Ky_t, \tag{4.12}$$

де $\xi_t \in \mathbb{R}^r$, а Z, V, U і K — невідомі матриці, r — порядок регулятора, $t \in \mathcal{T}$. Співвідношення (4.1) і (4.12) можна подати у вигляді системи керування зі статичним регулятором у розширеному фазовому просторі:

$$\widehat{x}_{t+1} = \widehat{A}(\widehat{x}_t)\widehat{x}_t + \widehat{B}(\widehat{x}_t)\widehat{u}_t, \quad \widehat{y}_t = \widehat{C}(\widehat{x}_t)\widehat{x}_t + \widehat{D}(\widehat{x}_t)\widehat{u}_t, \quad \widehat{u}_t = \widehat{K}\widehat{y}_t, \tag{4.13}$$

де

$$\widehat{x}_t = \begin{bmatrix} x_t \\ \xi_t \end{bmatrix}, \quad \widehat{y}_t = \begin{bmatrix} y_t \\ \xi_t \end{bmatrix}, \quad \widehat{u}_t = \begin{bmatrix} u_t \\ \xi_{t+1} \end{bmatrix}, \quad \widehat{K} = \begin{bmatrix} K & U \\ V & Z \end{bmatrix},$$

$$\widehat{A}(\widehat{x}_t) = \begin{bmatrix} A(x_t) & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times n} & 0_{r\times r} \end{bmatrix}, \quad \widehat{B}(\widehat{x}_t) = \begin{bmatrix} B(x_t) & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times m} & I_r \end{bmatrix},$$

$$\widehat{C}(\widehat{x}_t) = \begin{bmatrix} C(x_t) & 0_{l\times r} \\ 0_{r\times n} & I_r \end{bmatrix}, \quad \widehat{D}(\widehat{x}_t) = \begin{bmatrix} D(x_t) & 0_{l\times r} \\ 0_{r\times m} & 0_{r\times r} \end{bmatrix}.$$

Позначимо множину матриць $\mathcal{K}_D = \{K \in \mathbb{R}^{m\times l} : \det(I_m - KD) \neq 0\}$. При умові $K \in \mathcal{K}_D$ замкнена лінійна система (4.2), (4.12) має вигляд

$$\widehat{x}_{t+1} = \widehat{M}\,\widehat{x}_t, \quad \widehat{M} = \widehat{A} + \widehat{B}\widehat{\mathbf{D}}(\widehat{K})\widehat{C}, \tag{4.14}$$

де $\widehat{A} = \widehat{A}(0)$, $\widehat{B} = \widehat{B}(0)$, $\widehat{C} = \widehat{C}(0)$, $\mathbf{D}(K) = (I_m - KD)^{-1}K$,

$$\widehat{\mathbf{D}}(\widehat{K}) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}(K) & (I_m - KD)^{-1}U \\ V(I_l - DK)^{-1} & Z + VD(I_m - KD)^{-1}U \end{bmatrix}.$$

Теорема 4.3. *Наступні твердження еквівалентні:*

1) *Існує динамічний регулятор* (4.12) *порядку r, що забезпечує ρ-стійкість замкненої системи* (4.14).

2) *Існують матриці X і X_0, що задовольняють співвідношення*

$$B^{\perp T}(AXA^T - \rho^2 X)\, B^{\perp} < 0, \tag{4.15}$$

$$X \geq X_0 > 0, \quad \operatorname{rank}(X - X_0) \leq r, \tag{4.16}$$

$$AX_0A^T - \rho^2 X_0 < AX_0C^T(CX_0C^T)^{-1}CX_0A^T. \tag{4.17}$$

3) *Існують матриці $X = X^T > 0$ і $Y = Y^T > 0$, що задовольняють співвідношення* (4.15) *і*

$$C^{\perp}(A^TYA - \rho^2 Y)\, C^{\perp T} < 0, \tag{4.18}$$

$$W = \begin{bmatrix} X & I_n \\ I_n & Y \end{bmatrix} \geq 0, \quad \operatorname{rank} W \leq n + r. \tag{4.19}$$

Доведення. За теоремою Ляпунова критерієм досягнення ρ-стійкості системи (4.13) є існування матриць $\widehat{K}_0$ і $\widehat{X} = \widehat{X}^T > 0$ таких, що

$$(\widehat{A} + \widehat{B}\widehat{K}_0\widehat{C})\widehat{X}(\widehat{A} + \widehat{B}\widehat{K}_0\widehat{C})^T - \rho^2\widehat{X} < 0. \tag{4.20}$$

Дана нерівність для деякої матриці $\widehat{X} > 0$ має розв'язок $\widehat{K}_0$ лише тоді, коли виконується система співвідношень (див. доведення теореми 6.1.1 в [42] при $\rho = 1$)

$$\widehat{B}^{\perp T}(\widehat{A}\widehat{X}\widehat{A}^T - \rho^2\widehat{X})\, \widehat{B}^{\perp} < 0, \tag{4.21}$$

$$\widehat{A}\widehat{X}\widehat{A}^T - \rho^2\widehat{X} < \widehat{A}\widehat{X}\widehat{C}^T(\widehat{C}\widehat{X}\widehat{C}^T)^{-1}\widehat{C}\widehat{X}\widehat{A}^T. \tag{4.22}$$

В даному випадку

$$\widehat{B}^{\perp} = \begin{bmatrix} B^{\perp} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{C}^{\perp} = \begin{bmatrix} C^{\perp}, \ 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{X} = \begin{bmatrix} X & X_1^T \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix} > 0$$

і за формулою Фробеніуса [17]

$$(\widehat{C}\widehat{X}\widehat{C}^T)^{-1} = \begin{bmatrix} S^{-1} & -S^{-1}CX_1^TX_2^{-1} \\ -X_2^{-1}X_1C^TS^{-1} & X_2^{-1} + X_2^{-1}X_1C^TS^{-1}CX_1^TX_2^{-1} \end{bmatrix},$$

де $S = CX_0C^T$, $X_0 = X - X_1^T X_2^{-1} X_1$. Використовуючи блочну структуру наведених виразів в (4.21) і (4.22) та лему Шура, приходимо до еквівалентних співвідношень (4.15)–(4.17), де $\operatorname{rank}(X - X_0) = \operatorname{rank} X_1 \le r$. Отже, твердження 1) і 2) еквівалентні.

Покажемо, що матриці X і X_0 задовольняють співвідношення (4.15) – (4.17) лише тоді, коли X і $Y = X_0^{-1}$ задовольняють співвідношення (4.15), (4.18) і (4.19). Очевидно, що формули (4.16) і (4.19) еквівалентні.

Застосовуючи лему 2.1 до блочних матриць

$$\Delta_0 = \begin{bmatrix} AX_0A^T - \rho^2 X_0 & AX_0C^T \\ CX_0A^T & CX_0C^T \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} -\rho^2 X_0 & 0 & A \\ 0 & 0 & C \\ A^T & C^T & -X_0^{-1} \end{bmatrix},$$

маємо еквівалентність співвідношень (4.17) і

$$\mathrm{i}(\Delta_0) = \mathrm{i}(\Delta_1) = \mathrm{i}(\Delta_2) = \{l, n, 0\},$$

де

$$\Delta_0 = \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} X_0 \big[A^T,\ C^T\big] - \rho^2 \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} X_0 \big[I_n,\ 0\big],$$

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 0 & C \\ C^T & -X_0^{-1} \end{bmatrix} + \frac{1}{\rho^2} \begin{bmatrix} 0 \\ A^T \end{bmatrix} X_0^{-1} \big[0,\ A\big],$$

$$\Delta_2 = \rho^2 G \Delta_1 G^T = \left[\begin{array}{cc|c} C^{+T}ZC^{+} & \rho^2 I_l & C^{+T}ZC^{\perp T} \\ \rho^2 I_l & 0 & 0 \\ \hline C^{\perp}ZC^{+} & 0 & C^{\perp}ZC^{\perp T} \end{array}\right], \ G = \begin{bmatrix} 0 & C^{+T} \\ I_l & 0 \\ 0 & C^{\perp} \end{bmatrix},$$

$Z = A^T X_0^{-1} A - \rho^2 X_0^{-1}$. Матричні вирази типу першого виділеного діагонального блока матриці Δ_2 мають інерцію $\{l, l, 0\}$, а вираз її другого діагонального блока $Z_1 = C^{\perp} Z C^{\perp T}$ співпадає з (4.18).

Оскільки G — квадратна невироджена матриця, то згідно з (2.2) рівність $\mathrm{i}(\Delta_2) = \{l, n, 0\}$ виконується лише тоді, коли $Z_1 < 0$.

Теорему доведено. $\square$

Наслідок 4.1. *Нехай виконується одне із тверджень* 2) *або* 3) *теореми* 4.3 *для лінійної системи* (4.14) *і* $\widehat{K}_0$ *— розв'язок ЛМН*

$$P^T\widehat{K}_0Q + Q^T\widehat{K}_0^TP < F, \tag{4.23}$$

де

$$P = \big[-\widehat{B}^T, 0_{m+r\times n+r}\big], \quad Q = \big[0_{l+r\times n+r}, \widehat{C}\widehat{X}\big],$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho^2\widehat{X} & \widehat{A}\widehat{X} \\ \widehat{X}\widehat{A}^T & \widehat{X} \end{bmatrix}, \ \widehat{X} = \begin{bmatrix} X & X_1^T \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix} > 0, \ X - X_0 = X_1^TX_2^{-1}X_1 \geq 0,$$

$$\widehat{K}_0 = \begin{bmatrix} K_0 & U_0 \\ V_0 & Z_0 \end{bmatrix}, \quad K_0 \in \mathcal{K}_D, \quad 0 < \rho \leq 1.$$

Тоді динамічний регулятор (4.12) *з матрицями*

$$\begin{aligned} K = (I_m + K_0D)^{-1}K_0, \quad U = (I_m + K_0D)^{-1}U_0, \\ V = V_0(I_l + DK_0)^{-1}, \quad Z = Z_0 - V_0D(I_m + K_0D)^{-1}U_0, \end{aligned} \tag{4.24}$$

забезпечує асимптотичну стійкість нульового стану $\widehat{x} \equiv 0$ *та квадратичну функцію Ляпунова* $v(\widehat{x}) = \widehat{x}^T\widehat{X}^{-1}\widehat{x}$ *замкненої нелінійної системи* (4.1), (4.12).

Останнє твердження випливає із доведення теореми 4.3 і припущень відносно матричних функцій $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ і $D(x)$ (див. доведення аналогічного твердження для неперервних систем [45]). Співвідношення (4.24) є наслідком такої властивості оператора $\widehat{\mathbf{D}}(\widehat{K})$: якщо $\widehat{\mathbf{D}}(\widehat{K}) = \widehat{K}_0$, то $\widehat{K} = -\widehat{\mathbf{D}}(-\widehat{K}_0)$.

На основі наслідку 4.1 сформулюємо алгоритм побудови динамічного регулятора (4.12), що забезпечує ρ-стійкість системи (4.14), а також асимптотичну стійкість нульового стану замкненої нелінійної системи (4.1), (4.12).

Алгоритм 4.2. 1) Знаходження матриць X і X_0, що задовольняють співвідношення (4.15)–(4.17).

2) Побудова розкладу Холецького невід'ємно визначеної матриці $X - X_0 = X_1^TX_1$, де $X_1 \in \mathbb{R}^{r\times n}$, $\mathrm{rank}X_1 \leq r$.

3) Розв'язування ЛМН (4.23) відносно $\widehat{K}_0$ при умовах $X_2 = I_r$ і $\det(I_m + K_0D) \neq 0$.

4) Обчислення матриць регулятора (4.12) за формулами (4.24).

В п. 2) даного алгоритму замість розкладу Холецького невід'ємно визначеної матриці можна використати її спектральний розклад

$$X - X_0 = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i h_i h_i^T,$$

де $\alpha_i > 0$ — власні значення даної матриці, які відповідають власним векторам h_i. Тоді $X_2^{-1} = \operatorname{diag}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$, $X_1^T = \big[h_1, \ldots, h_r\big]$. Зазначимо, що у випадку $r \geq n$ завжди виконуються рангові обмеження в (4.16) і (4.19).

4.2. Оцінка рівня гасіння обмежених збурень в рівняннях регулятора

Розглянемо систему без керування

$$x_{t+1} = A(x_t)x_t + B(x_t)w_t, \quad y_t = C(x_t)x_t + D(x_t)w_t, \tag{4.25}$$

яка функціонує у деякій області фазового простору $\mathcal{S}_0$, що містить точку $x = 0$. Тут $x_t \in \mathbb{R}^n$, $w_t \in \mathbb{R}^m$ і $y_t \in \mathbb{R}^l$ — вектори відповідно стану, зовнішніх збурень і виходу системи, $A(x_t)$, $B(x_t)$, $C(x_t)$ і $D(x_t)$ — матриці відповідних розмірів, неперервно залежні від $x_t \in \mathcal{S}_0$.

Введемо критерій якості системи (4.25) відносно її вектора виходу:

$$J = \sup_{0 < \|w\|_P^2 + x_0^T X_0 x_0 < \infty} \varphi(w, x_0), \tag{4.26}$$

де

$$\varphi(w, x_0) = \frac{\|y\|_Q}{\sqrt{\|w\|_P^2 + x_0^T X_0 x_0}}, \quad \|y\|_Q^2 = \sum_{t=0}^{\infty} y_t^T Q y_t, \quad \|w\|_P^2 = \sum_{t=0}^{\infty} w_t^T P w_t,$$

$Q = Q^T > 0$, $P = P^T > 0$ і $X_0 = X_0^T > 0$ — деякі вагові матриці. Припустимо, що векторна послідовність зовнішніх збурень w_t обмежена по зваженій l_2-нормі $\|w\|_P$, а x_0 — невідомий початковий вектор.

Значення J характеризує зважений рівень гасіння зовнішніх і початкових збурень в системі (4.25). Даний критерій якості у випадку вагових матриць $P = I_m$, $Q = I_l$ і $X_0 = \beta I_n$ відомий [10, 11]. Вираз (4.26) при фіксованому початковому векторі $x_0 = 0$ позначимо через J_0. Очевидно, що $J_0 \leq J$.

Система (4.25) має властивість *нееkспансивності* [42], якщо її вектор виходу при довільному $\nu > 0$ задовольняє нерівність

$$\sum_{t=0}^{\nu} y_t^T Q y_t \leq \sum_{t=0}^{\nu} w_t^T P w_t + x_0^T X_0 x_0.$$

Для характеристики (4.26) неекспансивної системи виконується нерівність $J \leq 1$.

Лема 4.1. *Нехай існує матриця* $X = X^T > 0$ *така, що*

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} \Phi_1(x) & \Phi_2(x) \\ \Phi_3(x) & \Phi_4(x) \end{bmatrix} < 0, \quad x \in \mathcal{S}_0,$$

де

$$\Phi_1(x) = A^T(x)XA(x) - X + C^T(x)QC(x), \Phi_2(x) = A^T(x)XB(x) + C^T(x)QD(x),$$

$$\Phi_3(x) = B^T(x)XA(x) + D^T(x)QC(x),$$

$$\Phi_4(x) = B^T(x)XB(x) + D^T(x)QD(x) - \gamma^2 P.$$

Тоді виконується оцінка $J_0 \leq \gamma$. *Якщо до того ж* $0 < X \leq \gamma^2 X_0$, *то* $J \leq \gamma$.

Доведення. Для першої різниці функції Ляпунова $v(x) = x^T X x$ в силу системи (4.25) виконуються співвідношення

$$v(x_{t+1}) - v(x_t) + y_t^T Q y_t - \gamma^2 w_t^T P w_t = \left[x_t^T,\ w_t^T\right] \Phi(x_t) \begin{bmatrix} x_t \\ w_t \end{bmatrix},$$

$$v(x_{\nu+1}) - v(x_0) + \sum_{t=0}^{\nu} y_t^T Q y_t - \gamma^2 \sum_{t=0}^{\nu} w_t^T P w_t < 0.$$

Звідси при $\nu \to \infty$ маємо

$$\|y\|_Q^2 \leq \gamma^2(\|w\|_P^2 + x_0^T X_0 x_0), \quad \varphi(w, x_0) \leq \gamma,$$

що означає $J \leq \gamma$. Зокрема, при $x_0 = 0$ виконується нерівність $J_0 \leq \gamma$.

Лему доведено. □

Зауваження 4.1. Якщо вхідний вектор w_t розглядати як структуровану невизначеність у вигляді лінійного зворотного зв'язку по виходу

$$w_t = \frac{1}{\gamma}\Theta y_t, \quad \Theta^T P \Theta \leq Q, \tag{4.27}$$

то при умовах леми 4.1 нульовий стан системи (4.25) з даною невизначеністю робастно стійкий зі спільною функцією Ляпунова $v(x) = x^T X x$. Цей факт є наслідком леми 4.1 і теореми 6.2.1 із [42].

Разом з (4.25) розглянемо лінійну систему

$$x_{t+1} = Ax_t + Bw_t, \quad y_t = Cx_t + Dw_t, \tag{4.28}$$

де $A = A(0)$, $B = B(0)$, $C = C(0)$ і $D = D(0)$.

Лема 4.2. *Для лінійної системи* (4.28) *виконується оцінка* $J_0 < \gamma$ *тоді і лише тоді, коли ЛМН*

$$\Phi_\gamma = \begin{bmatrix} A^T X A - X + C^T Q C & A^T X B + C^T Q D \\ B^T X A + D^T Q C & B^T X B + D^T Q D - \gamma^2 P \end{bmatrix} < 0 \tag{4.29}$$

має розв'язок $X = X^T > 0$. *При цьому* $J < \gamma$, *якщо* $0 < X < \gamma^2 X_0$.

Твердження достатності леми 4.2 випливає із доведення леми 4.1. Твердження необхідності можна встановити шляхом представлення J_0 і J аналогічними виразами з одиничними ваговими матрицями (див. доведення леми 2.3 в [45]) і використання роботи [11].

Із леми 4.2, зокрема, випливає, що критерії якості J_0 і J системи (4.28) можна обчислити як розв'язки відповідних оптимізаційних задач:

$$J_0 = \inf\left\{\gamma : \Phi_\gamma < 0,\ X > 0\right\}, \quad J = \inf\left\{\gamma : \Phi_\gamma < 0,\ 0 < X < \gamma^2 X_0\right\}. \tag{4.30}$$

Статичний регулятор зі збуреннями. Розглянемо нелінійну дискретну систему керування (4.1). По аналогії з методикою, запропонованою в [45] для неперервних систем, керування будемо шукати у вигляді статичного зворотного зв'язку по вимірюваному виходу

$$u_t = Ky_t + w_t, \quad K \in \mathcal{K}_D, \tag{4.31}$$

де $w_t \in \mathbb{R}^m$ — вектор обмежених зовнішніх збурень, D — матриця обходу відповідної лінійної системи (4.2). Вхідну вектор-функцію $w(t)$ і початковий вектор x_0 вважаємо невідомими.

Якщо $K \in \mathcal{K}_D$, то $\det(I_m - KD(x)) \neq 0$ в деякому околі $\mathcal{S}_0$ точки $x = 0$ і замкнена системи (4.1), (4.31) в $\mathcal{S}_0$ набуває вигляду

$$x_{t+1} = A_*(x_t)x_t + B_*(x_t)w, \quad y_t = C_*(x_t)x_t + D_*(x_t)w_t, \tag{4.32}$$

де

$$A_*(x) = A(x) + B(x)\mathbf{D}_x(K)C(x), \quad B_*(x) = B(x)\big[I_m - KD(x)\big]^{-1},$$

$$C_*(x) = \big[I_l - D(x)K\big]^{-1}C(x), \;\; D_*(x) = \big[I_l - D(x)K\big]^{-1}D(x),$$

$$\mathbf{D}_x(K) = \big[I_m - KD(x)\big]^{-1}K.$$

Наведемо також замкнену лінійну систему (4.2), (4.31):

$$x_{t+1} = A_*x_t + B_*w, \quad y_t = C_*x_t + D_*w_t, \tag{4.33}$$

матричні коефіцієнти якої є значення відповідних матричних функцій в (4.32) при $x_t = 0$.

Нас цікавлять регулятори (4.31), які мінімізують критерії якості J_0 і J типу (4.26) і забезпечують умови неекспансивності систем (4.32) і (4.33). Закони керування, які забезпечують мінімальне значення J для замкненої системи, будемо називати J-*оптимальними.* Алгоритми пошуку J-оптимальних і J_0-оптимальних керувань можна реалізувати на основі побудови відповідних верхніх оцінок для J і J_0.

Теорема 4.4. *Для лінійної системи* (4.2) *існує керування* (4.31), *що забезпечує оцінку $J < \gamma$, тоді і лише тоді, коли сумісна система співвідношень*

$$W_R^T \begin{bmatrix} A^TXA - X + C^TQC & A^TXB + C^TQD \\ B^TXA + D^TQC & B^TXB + D^TQD - \gamma^2 P \end{bmatrix} W_R < 0, \tag{4.34}$$

$$W_L^T \begin{bmatrix} AYA^T - Y + BP^{-1}B^T & AYC^T + BP^{-1}D^T \\ CYA^T + DP^{-1}B^T & CYC^T + DP^{-1}D^T - \gamma^2 Q^{-1} \end{bmatrix} W_L < 0, \tag{4.35}$$

$$0 < X < \gamma^2 X_0, \quad XY = \gamma^2 I_n, \tag{4.36}$$

де $R = \big[C,\ D\big]$, $L = \big[B^T,\ D^T\big]$.

Доведення. За лемою 4.2 нерівність $J_0 < \gamma$ виконується лише тоді, коли

$$\begin{bmatrix} A_*^T X A_* - X + C_*^T Q C_* & A_*^T X B_* + C_*^T Q D_* \\ B_*^T X A_* + D_*^T Q C_* & B_*^T X B_* + D_*^T Q D_* - \gamma^2 P \end{bmatrix} < 0 \tag{4.37}$$

для деякої матриці $X = X^T > 0$. Використовуючи лему Шура і вирази $A_* = A + BK_0C$, $B_* = B + BK_0D$, $C_* = C + DK_0C$, $D_* = D + DK_0D$, перепишемо ЛМН (4.37) відносно $K_0 = \mathbf{D}(K)$ у вигляді

$$L_0^T K_0 R_0 + R_0^T K_0^T L_0 + \Omega < 0, \tag{4.38}$$

де

$$\Omega = \begin{bmatrix} -X & 0 & A^T & C^T \\ 0 & -\gamma^2 P & B^T & D^T \\ A & B & -X^{-1} & 0 \\ C & D & 0 & -Q^{-1} \end{bmatrix}, \ R_0^T = \begin{bmatrix} C^T \\ D^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ L_0^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B \\ D \end{bmatrix}.$$

Критерієм сумісності ЛМН (4.38) є умови (див. лему 2.3)

$$\begin{gathered} W_{L_0}^T \Omega W_{L_0} < 0, \quad W_{R_0}^T \Omega W_{R_0} < 0, \\ W_{R_0} = \begin{bmatrix} W_R & 0 \\ 0 & I_{n+l} \end{bmatrix}, \quad W_{L_0} = \begin{bmatrix} I_{n+m} & 0 \\ 0 & W_L \end{bmatrix}. \end{gathered} \tag{4.39}$$

Враховуючи матричні вирази в (4.39) та вводячи позначення $Y = \gamma^2 X^{-1}$ (друге співвідношення (4.36)), за допомогою леми Шура приходимо до відповідних матричних нерівностей (4.34) і (4.35). Причому, якщо виконується також перше співвідношення (4.36), то маємо оцінку $J < \gamma$.

Теорему доведено. □

Зауваження 4.2. Якщо матриці X і Y задовольняють умови (4.34) – (4.36), то невідому матрицю K в теоремі 4.4 можна побудувати у вигляді

$$K = K_0(I_l + DK_0)^{-1}, \quad -K_0 \in \mathcal{K}_D, \tag{4.40}$$

де K_0 — довільний розв'язок ЛМН (4.38). При цьому нульовий стан $x_t \equiv 0$ замкнених систем (4.32) і (4.33) з невизначеністю (4.27) робастно стійкий, а $v(x) = x^T X x$ є спільною функцією Ляпунова даних систем (див. зауваження 4.1). Для оцінки критеріїв якості J_0 і J замненої нелінійної системи (4.32) може бути використана лема 4.1.

Розглянемо випадок статичного регулятора по стану

$$u_t = Kx_t + w_t, \quad K \in \mathcal{K}_D, \tag{4.41}$$

і в наведених вище співвідношеннях покладемо

$$C = I_n, \quad D = 0, \quad W_R = \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix}, \quad W_L = \begin{bmatrix} B^\perp & 0 \\ 0 & I_l \end{bmatrix}, \quad Y = \gamma^2 X^{-1}.$$

В результаті замість (4.34) – (4.36) маємо систему ЛМН відносно Y:

$$\begin{bmatrix} P & B^T \\ B & Y \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} X_0 & I_n \\ I_n & Y \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} B^{\perp T}(AYA^T - Y)B^\perp & B^{\perp T}AY \\ YA^T B^\perp & Y - \gamma^2 Q^{-1} \end{bmatrix} < 0. \tag{4.42}$$

Наслідок 4.2. *Для лінійної системи* (4.2) *існує керування* (4.41), *що забезпечує оцінку* $J < \gamma$, *тоді і лише тоді, коли система ЛМН* (4.42) *має розв'язок* $Y = Y^T > 0$. *При цьому нульовий стан замкнених систем* (4.1), (4.41) *та* (4.2), (4.41) *з невизначеністю* (4.27) *робастно стійкий зі спільною функцією Ляпунова* $v(x) = \gamma^2 x^T Y^{-1} x$.

Динамічний регулятор зі збуреннями. Розглянемо системи керування (4.1) і (4.2) з динамічним регулятором

$$\xi_{t+1} = Z\xi_t + Vy_t, \quad u_t = U\xi_t + Ky_t + w_t, \quad \xi_0 = 0, \tag{4.43}$$

де $\xi_t \in \mathbb{R}^r$ і $w_t \in \mathbb{R}^m$ — вектори відповідно стану регулятора та вхідних сигналів (зовнішніх збурень), Z, V, U і K — невідомі сталі матриці. При умові $K \in \mathcal{K}_D$ замкнена лінійна система (4.2), (4.43) має вигляд

$$\widehat{x}_{t+1} = \widehat{M}\widehat{x}_t + \widehat{N}w_t, \quad y_t = \widehat{F}\widehat{x}_t + \widehat{G}w_t, \tag{4.44}$$

де

$$\widehat{x_t} = \begin{bmatrix} x_t \\ \xi_t \end{bmatrix}, \widehat{M} = \begin{bmatrix} A + BK_0C & BU_0 \\ V_0C & Z_0 \end{bmatrix} = \widehat{A} + \widehat{B}\widehat{K}_0\widehat{C},\ \widehat{K}_0 = \begin{bmatrix} K_0 & U_0 \\ V_0 & Z_0 \end{bmatrix},$$

$$\widehat{N} = \begin{bmatrix} B + BK_0D \\ V_0D \end{bmatrix} = \widehat{B}_1 + \widehat{B}\widehat{K}_0\widehat{D}_1,\ \widehat{B}_1 = \begin{bmatrix} B \\ 0_{r\times m} \end{bmatrix},\ \widehat{D}_1 = \begin{bmatrix} D \\ 0_{r\times m} \end{bmatrix},$$

$$\widehat{F} = \left[C + DK_0C,\ DU_0\right] = \widehat{C}_1 + \widehat{D}_2\widehat{K}_0\widehat{C},\ \widehat{C}_1 = \left[C,\ 0_{l\times r}\right],\ \widehat{D}_2 = \left[D,\ 0_{l\times r}\right],$$

$$\widehat{G} = D + DK_0D = D + \widehat{D}_2\widehat{K}_0\widehat{D}_1, \quad K_0 = \mathbf{D}(K),$$

$$U_0 = (I_m - KD)^{-1}U,\ \ V_0 = V(I_l - DK)^{-1},\ \ Z_0 = Z + VD(I_m - KD)^{-1}U.$$

Для даної системи задамо критерії якості J_0 і $\widehat{J}$ типу (4.26) з ваговими матрицями P, Q і $\widehat{X}_0$. Оскільки $\xi_0 = 0$, то значення $\widehat{J}$ залежить лише від першого діагонального блока X_0 матриці $\widehat{X}_0$, тобто $\widehat{J} = J$.

Нас цікавлять регулятори, які мінімізують введені критерії якості та забезпечують умови неекспансивності відповідної замкненої системи. Алгоритми пошуку J-оптимальних і J_0-оптимальних динамічних регуляторів можна реалізувати на основі побудови відповідних верхніх оцінок для J і J_0.

Теорема 4.5. *Для лінійної системи* (4.2) *існує динамічний регулятор* (4.43)*, що забезпечує критерій якості* $J < \gamma$ *тоді і лише тоді, коли для деяких матриць* $0 < X < \gamma^2 X_0$ *і* $Y = Y^T > 0$ *виконується система співвідношень* (3.12)*,* (4.34) *і* (4.35)*.*

Доведення. За лемою 4.2 оцінка $J < \gamma$ для системи (4.44) виконується лише тоді, коли сумісна система співвідношень

$$\begin{bmatrix} \widehat{M}^T\widehat{X}\widehat{M} - \widehat{X} + \widehat{F}^TQ\widehat{F} & \widehat{M}^T\widehat{X}\widehat{N} + \widehat{F}^TQ\widehat{G} \\ \widehat{N}^T\widehat{X}\widehat{M} + \widehat{G}^TQ\widehat{F} & \widehat{N}^T\widehat{X}\widehat{N} + \widehat{G}^TQ\widehat{G} - \gamma^2P \end{bmatrix} < 0, \tag{4.45}$$

$$0 < \widehat{X} = \begin{bmatrix} X & X_1^T \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix} < \gamma^2\widehat{X}_0 = \gamma^2 \begin{bmatrix} X_0 & X_{10}^T \\ X_{10} & X_{20} \end{bmatrix}. \tag{4.46}$$

Матричну нерівність (4.45) на основі леми Шура можна подати у вигляді ЛМН відносно $\widehat{K}_0$:

$$\begin{bmatrix} -\widehat{X} & 0 & \widehat{M}^T & \widehat{F}^T \\ 0 & -\gamma^2 P & \widehat{N}^T & \widehat{G}^T \\ \widehat{M} & \widehat{N} & -\widehat{X}^{-1} & 0 \\ \widehat{F} & \widehat{G} & 0 & -Q^{-1} \end{bmatrix} = \widehat{L}^T \widehat{K}_0 \widehat{R} + \widehat{R}^T \widehat{K}_0^T \widehat{L} + \widehat{\Omega} < 0, \qquad (4.47)$$

де

$$\widehat{R} = \left[\widehat{C}, \widehat{D}_1, 0, 0\right] = \widehat{R}_1 E_1, \quad \widehat{L} = \left[0, 0, \widehat{B}^T, \widehat{D}_2^T\right] = \widehat{L}_1 E_2,$$

$$\widehat{R}_1 = \begin{bmatrix} C & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_r & 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{L}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & B^T & D^T \\ 0 & I_r & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m & 0 \\ 0 & I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n+r+l} \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} I_{n+r+m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_r & 0 \\ 0 & I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_l \end{bmatrix},$$

$$\widehat{\Omega} = \begin{bmatrix} -\widehat{X} & 0 & \widehat{A}^T & \widehat{C}_1^T \\ 0 & -\gamma^2 P & \widehat{B}_1^T & D^T \\ \widehat{A} & \widehat{B}_1 & -\widehat{X}^{-1} & 0 \\ \widehat{C}_1 & D & 0 & -Q^{-1} \end{bmatrix}.$$

При цьому із (4.46) випливає $0 < X < \gamma^2 X_0$.

Враховуючи вирази $\widehat{Y} = \gamma^2 \widehat{X}^{-1}$, $W_{\widehat{R}} = E_1^T W_{\widehat{R}_1}$ і $W_{\widehat{L}} = E_2^T W_{\widehat{L}_1}$, де

$$W_{\widehat{R}_1} = \begin{bmatrix} W_R & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I_{n+r+l} \end{bmatrix}, \quad W_{\widehat{L}_1} = \begin{bmatrix} I_{n+r+m} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & W_L \end{bmatrix}$$

та застосовуючи лему 2.3 до ЛМН (4.47), а також лему 3.3 для блочних матриць (3.11), отримаємо критерій існування розв'язку $\widehat{K}_0$ даної нерівності у вигляді співвідношень (3.12), (4.34) і (4.35). При цьому нульовий стан $\widehat{x}_t \equiv 0$ замкненої системи (4.44) з невизначеністю (4.27) робастно стійкий зі спільною функцією Ляпунова $v(\widehat{x}) = \widehat{x}^T \widehat{X} \widehat{x}$ (див. зауваження 4.1). Отримані співвідношення залежать лише від перших діагональних блоків X і Y матриць (3.11).

Теорему доведено. □

Зауваження 4.3. Якщо $K \in \mathcal{K}_D$, то $\det\left[I_m - KD(x)\right] \neq 0$ при $x \in \mathcal{S}_0$, де $\mathcal{S}_0$ — деякий окіл точки $x = 0$, і замкнена нелінійна система (4.1), (4.43) має вигляд

$$\widehat{x}_{t+1} = \widehat{M}(x_t)\widehat{x}_t + \widehat{N}(x_t)w_t, \quad y_t = \widehat{F}(x_t)\widehat{x}_t + \widehat{G}(x_t)w_t, \tag{4.48}$$

де всі матричні коефіцієнти є неперервними функціями в $\mathcal{S}_0$. Динамічний регулятор (4.43) в теоремі 4.5 забезпечує робастну стійкість нульового стану системи (4.48) з невизначеністю (4.27) і спільну функцію Ляпунова $v(\widehat{x}) = \widehat{x}^T\widehat{X}\widehat{x}$, а лема 4.1 може бути використана для оцінки критеріїв якості J_0 і J даної системи.

4.3. Дискретні системи стабілізації з керованими і спостережуваними виходами

Розглянемо систему керування

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= A(x_t)x_t + B_1(x_t)w_t + B_2(x_t)u_t, \\ z_t &= C_1(x_t)x_t + D_{11}(x_t)w_t + D_{12}(x_t)u_t, \\ y_t &= C_2(x_t)x_t + D_{21}(x_t)w_t + D_{22}(x_t)u_t, \end{aligned} \tag{4.49}$$

де $x_t \in \mathbb{R}^n$, $u_t \in \mathbb{R}^m$, $w_t \in \mathbb{R}^s$, $z_t \in \mathbb{R}^k$ і $y_t \in \mathbb{R}^l$ — вектори відповідно стану, керування, зовнішніх збурень, керованого і спостережуваного виходів, $t \in \mathcal{T}$. Введемо критерій якості типу (4.26) для даної системи відносно вектора керованого виходу:

$$J = \sup_{0<\|w\|_P^2 + x_0^T X_0 x_0 < \infty} \frac{\|z\|_Q}{\sqrt{\|w\|_P^2 + x_0^T X_0 x_0}}. \tag{4.50}$$

Значення J у випадку нульового початкового вектора $x_0 = 0$ позначимо через J_0. Ставиться задача побудови J- та J_0-оптимальних регуляторів, які забезпечують робастну стійкість нульового стану замкненої системи та мінімізують відповідні критерії якості J і J_0.

Сформулюємо аналог теореми 4.5 для лінійної системи з керованими і спостережуваними виходами

$$
\begin{aligned}
x_{t+1} &= Ax_t + B_1 w_t + B_2 u_t,\\
z_t &= C_1 x_t + D_{11} w_t + D_{12} u_t,\\
y_t &= C_2 x_t + D_{21} w_t + D_{22} u,
\end{aligned}
\tag{4.51}
$$

використовуючи динамічний регулятор (4.12) з початковим вектором $\xi_0 = 0$. При умові $K \in \mathcal{K}_{D_{22}}$ замкнена система (4.12), (4.51) має вигляд

$$
\widehat{x}_{t+1} = \widehat{M}\widehat{x}_t + \widehat{N} w_t, \quad z_t = \widehat{F}\widehat{x}_t + \widehat{G} w_t, \tag{4.52}
$$

де

$$
\widehat{x}_t = \begin{bmatrix} x_t \\ \xi_t \end{bmatrix}, \quad \widehat{M} = \begin{bmatrix} A + B_2 K_0 C_2 & B_2 U_0 \\ V_0 C_2 & Z_0 \end{bmatrix} = \widehat{A} + \widehat{B}_2 \widehat{K}_0 \widehat{C}_2,
$$

$$
\widehat{N} = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 K_0 D_{21} \\ V_0 D_{21} \end{bmatrix} = \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 \widehat{K}_0 \widehat{D}_{21},
$$

$$
\widehat{F} = \left[C_1 + D_{12} K_0 C_2, D_{12} U_0\right] = \widehat{C}_1 + \widehat{D}_{12} \widehat{K}_0 \widehat{C}_2,
$$

$$
\widehat{G} = D_{11} + D_{12} K_0 D_{21} = D_{11} + \widehat{D}_{12} \widehat{K}_0 \widehat{D}_{21},
$$

$$
\widehat{A} = \begin{bmatrix} A & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times n} & 0_{r\times r} \end{bmatrix}, \ \widehat{B}_2 = \begin{bmatrix} B_2 & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times m} & I_r \end{bmatrix}, \ \widehat{C}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0_{l\times r} \\ 0_{r\times n} & I_r \end{bmatrix},
$$

$$
\widehat{K}_0 = \begin{bmatrix} K_0 & U_0 \\ V_0 & Z_0 \end{bmatrix}, \ \widehat{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0_{r\times s} \end{bmatrix}, \ \widehat{D}_{21} = \begin{bmatrix} D_{21} \\ 0_{r\times s} \end{bmatrix},
$$

$$
\widehat{C}_1 = \left[C_1, 0_{k\times r}\right], \quad \widehat{D}_{12} = \left[D_{12}, 0_{k\times r}\right].
$$

Тут невідомими є блоки матриці $\widehat{K}_0$

$$
K_0 = (I_m - KD_{22})^{-1} K, \quad U_0 = (I_m - KD_{22})^{-1} U,
$$

$$
V_0 = V(I_l - D_{22} K)^{-1}, \quad Z_0 = Z + VD_{22}(I_m - KD_{22})^{-1} U,
$$

які однозначно визначають шукані матриці регулятора (4.43):

$$
\begin{aligned}
K &= (I_m + K_0 D_{22})^{-1} K_0, \quad U = (I_m + K_0 D_{22})^{-1} U_0,\\
V &= V_0 (I_l + D_{22} K_0)^{-1}, \quad Z = Z_0 - V_0 D_{22} (I_m + K_0 D_{22})^{-1} U_0.
\end{aligned}
\tag{4.53}
$$

Перепишемо співвідношення (4.45) для системи (4.52) у вигляді ЛМН (4.47) відносно $\widehat{K}_0$ з такими матрицями:

$$\widehat{R} = \left[\,\widehat{C}_2, \widehat{D}_{21}, 0, 0\,\right] = \begin{bmatrix} C_2 & D_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_s & 0 \\ 0 & I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n+r+k} \end{bmatrix},$$

$$\widehat{\Omega} = \begin{bmatrix} -\widehat{X} & 0 & \widehat{A}^T & \widehat{C}_1^T \\ 0 & -\gamma^2 P & \widehat{B}_1^T & D_{11}^T \\ \widehat{A} & \widehat{B}_1 & -\widehat{X}^{-1} & 0 \\ \widehat{C}_1 & D_{11} & 0 & -Q^{-1} \end{bmatrix}, \tag{4.54}$$

$$\widehat{L} = \left[\,0, 0, \widehat{B}_2^T, \widehat{D}_{12}^T\,\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_2^T & D_{12}^T \\ 0 & I_r & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n+r+s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_r & 0 \\ 0 & I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_k \end{bmatrix}.$$

Вираховуючи матриці $W_{\widehat{R}}$, $W_{\widehat{L}}$ і застосовуючи леми 2.3, 3.3 і 4.2 (див. доведення теореми 4.5), отримаємо наступний результат.

Теорема 4.6. *Для лінійної системи* (4.51) *існує динамічний регулятор* (4.12) *з нульовим початковим вектором, що забезпечує критерій якості $J < \gamma$ замкненої системи, тоді і лише тоді, коли для деяких матриць $0 < X < \gamma^2 X_0$ і $Y = Y^T > 0$ виконується система співвідношень* (3.12) *і*

$$W_R^T \begin{bmatrix} A^T X A - X + C_1^T Q C_1 & A^T X B_1 + C_1^T Q D_{11} \\ B_1^T X A + D_{11}^T Q C_1 & B_1^T X B_1 + D_{11}^T Q D_{11} - \gamma^2 P \end{bmatrix} W_R < 0, \tag{4.55}$$

$$W_L^T \begin{bmatrix} A Y A^T - Y + B_1 P^{-1} B_1^T & A Y C_1^T + B_1 P^{-1} D_{11}^T \\ C_1 Y A^T + D_{11} P^{-1} B_1^T & C_1 Y C_1^T + D_{11} P^{-1} D_{11}^T - \gamma^2 Q^{-1} \end{bmatrix} W_L < 0, \tag{4.56}$$

де $R = \left[C_2,\, D_{21}\right]$, $L = \left[B_2^T,\, D_{12}^T\right]$.

Зауваження 4.4. При застосуванні динамічного регулятора (4.12) порядку $r \geq n$ рангове обмеження в (3.12) виконується автоматично і оцінка $J < \gamma$ в теоремах 4.5 і 4.6 описується у вигляді відповідних систем ЛМН відносно X і Y.

Наведемо алгоритм побудови динамічного регулятора (4.12), який забезпечує оцінку $J < \gamma$ в теоремі 4.6, а також робастну стійкість нульового стану замкненої системи (4.52) з невизначеністю

$$w_t = \gamma^{-1}\Theta z_t, \quad \Theta^T P \Theta \le Q. \tag{4.57}$$

Алгоритм 4.3. 1) обчислення матриць W_R і W_L, де $R = \left[C_2,\, D_{21}\right]$, $L = \left[B_2^T,\, D_{12}^T\right]$;

2) знаходження матриць $0 < X < \gamma^2 X_0$ і $Y = Y^T > 0$, які задовольняють систему співвідношень (3.12), (4.55) і (4.56);

3) побудова розкладу Холецького $Z = Y - \gamma^2 X^{-1} = S^T S$, де $S \in \mathbb{R}^{r\times n}$, $\ker S = \ker Z$ і формування блочної матриці

$$\widehat{X} = \begin{bmatrix} X & \gamma^{-1} X S^T \\ \gamma^{-1} S X & \gamma^{-2} S X S^T + I_r \end{bmatrix};$$

4) розв'язання ЛМН (4.47) з матрицями (4.54) відносно $\widehat{K}_0$ при обмеженні $\det(I_m - K D_{22}) \ne 0$;

5) обчислення матриць регулятора (4.12) за формулами (4.53).

Зауваження 4.5. Із леми Шура випливає еквівалентне представлення матричних нерівностей (4.55) і (4.56):

$$\begin{bmatrix} W_R^T & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T X A - X & A^T X B_1 & C_1^T \\ B_1^T X A & B_1^T X B_1 - \gamma^2 P & D_{11}^T \\ C_1 & D_{11} & -Q^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_R & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix} < 0, \tag{4.58}$$

$$\begin{bmatrix} W_L^T & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A Y A^T - Y & A Y C_1^T & B_1 \\ C_1 Y A^T & C_1 Y C_1^T - \gamma^2 Q^{-1} & D_{11} \\ B_1^T & D_{11}^T & -P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_L & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix} < 0. \tag{4.59}$$

Співвідношення (4.58) і (4.59) є ЛМН відносно X, Y, P і $Q_1 = Q^{-1}$. Тому застосування даних співвідношень замість (4.55) і (4.56) у наведеному алгоритмі дає можливість разом з X і Y знаходити вагові матриці P і Q критерію якості J.

Зауваження 4.6. Можна встановити, що критерієм існування статичного регулятора по виходу $u_t = Ky_t$, що забезпечує оцінку $J < \gamma$ в теоремі 4.6, є сумісність системи співвідношень (4.36), (4.55) і (4.56). Дані співвідношення у випадку регулятора по стану ($C_2 = I_n$, $D_{21} = 0$, $D_{22} = 0$) зводяться до системи ЛМН відносно Y, яка включає нерівності (4.56) і

$$\begin{bmatrix} X_0 & I_n \\ I_n & Y \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} P - \gamma^{-2} D_{11}^T Q D_{11} & B_1^T \\ B_1 & Y \end{bmatrix} > 0.$$

Зауваження 4.7. Якщо $K \in \mathcal{K}_{D_{22}}$, то $\det\left[I_m - KD_{22}(x)\right] \neq 0$ при $x \in \mathcal{S}_0$, де $\mathcal{S}_0$ — деякий окіл точки $x = 0$. Тоді нелінійна замкнена система (4.12), (4.49) набуває вигляд

$$\widehat{x}_{t+1} = \widehat{M}(x_t)\widehat{x}_t + \widehat{N}(x_t)w_t, \quad z_t = \widehat{F}(x_t)\widehat{x}_t + \widehat{G}(x_t)w_t, \tag{4.60}$$

де всі матричні коефіцієнти є неперервними функціями в $\mathcal{S}_0$. Динамічний регулятор (4.12) в теоремі 4.6 забезпечує робастну стійкість нульового стану системи (4.60) з невизначеністю (4.57) і спільну функцію Ляпунова $v(\widehat{x}) = \widehat{x}^T \widehat{X} \widehat{x}$, а лема 4.1 може бути використана для оцінки критеріїв якості J_0 і J даної системи.

4.4. Приклад. Дискретна стабілізація одноланкового перевернутого маятника на рухомій платформі

Розглянемо систему керування перевернутого маятника на рухомій платформі (рис. 4.1). Для утримання маятника у верхньому положенні рівноваги до платформи прикладена керуюча сила u. Нелінійні рівняння руху системи мають вигляд

$$(m_0 + m_1)\ddot{z} + k\dot{z} + m_1 l\ddot{\theta}\cos\theta - m_1 l\dot{\theta}^2 \sin\theta = u,$$

$$(I + m_1 l^2)\ddot{\theta} + m_1 g l \sin\theta = -m_1 l \ddot{z}\cos\theta,$$

де m_0 — маса платформи, m_1 — маса маятника, k — коефіцієнт тертя платформи, l — відстань від точки кріплення маятника до його центра мас,

I — момент інерції маятника, g — прискорення сили тяжіння, z — горизонтальне переміщення платформи, $\varphi = \theta - \pi$ — кут відхилення маятника від вертикальної осі, u — керуюча сила, прикладена до платформи.

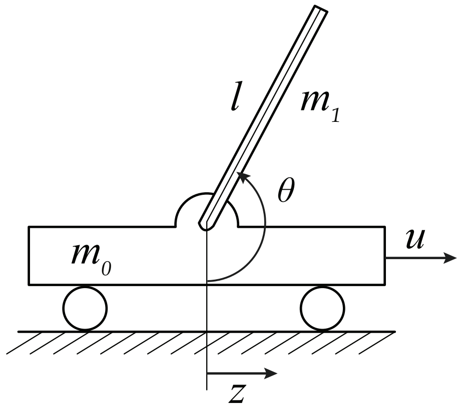

Рис. 4.1: Маятник на рухомій платформі.

Позначимо вираз $\delta = I(m_0 + m_1) + m_0 m_1 l^2$ і, враховуючи, що $\cos\theta \approx -1$, $\sin\theta \approx -\varphi$ і $\dot{\theta}^2 = \dot{\varphi}^2 \approx 0$ при малих значеннях кута φ, отримаємо лінійні рівняння руху системи у вигляді

$$\dot{x} = A_c x + B_c u, \tag{4.61}$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -(I + m_1 l^2)k/\delta & m_1^2 g l^2/\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -m_1 l k/\delta & m_1 g l(m_0 + m_1)/\delta & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ (I + m_1 l^2)/\delta \\ 0 \\ m_1 l/\delta \end{bmatrix}, \; x = \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}.$$

Для проведення чисельних розрахунків побудовано дискретний аналог системи керування (4.61) у вигляді (4.2), де

$$A = e^{dA_c} \approx I_4 + dA_c + \frac{d^2}{2}A_c^2 + \frac{d^3}{6}A_c^3,$$

$$B = \int_0^d e^{\tau A_c} B_c d\tau \approx \Big(dI_n + \frac{d^2}{2} A_c + \frac{d^3}{6} A_c^2 \Big) B_c,$$

$d = 0,1$ — крок дискретизації, і вибрано такі значення механічних параметрів: $m_0 = 0,5$, $m_1 = 0,2$, $k = 0,1$, $l = 0,3$ і $I = 0,006$. В якості вагових коефіцієнтів функціоналу (4.26) взято діагональні матриці: $P = 1$, $Q = \mathrm{diag}\big\{q_1, q_2, q_3, q_4\big\}$ і $X_0 = \beta I_4$, де $\beta = 200$.

Таблиця 4.1: Результати розрахунків.

N	q_1	q_2	q_3	q_4	K	J	α	T_0
1	1	1	1	1	[1,4663 2,5332 -19,4920 -3,9697]	0,7996	0,0952	38
2	2	1	2	1	[2,0342 2,8795 -20,5162 -4,1427]	0,8704	0,1319	31
3	3	1	3	1	[2,4539 3,1342 -21,2669 -4,2693]	0,9265	0,1590	27
4	4	1	4	1	[2,7993 3,3446 -21,8865 -4,3739]	0,9741	0,1809	26
5	1	2	1	2	[1,0515 2,2804 -18,7465 -3,8440]	1,0645	0,0683	48
6	2	2	2	2	[1,4659 2,5329 -19,4895 -3,9693]	1,1316	0,0952	38
7	3	2	3	2	[1,7772 2,7232 -20,0531 -4,0646]	1,1853	0,1153	33
8	4	2	4	2	[2,0337 2,8786 -20,5130 -4,1420]	1,2317	0,1319	31
9	1	3	1	3	[0,8640 2,1663 -18,4077 -3,7868]	1,2671	0,0561	56
10	2	3	2	3	[1,2079 2,3761 -19,0236 -3,8907]	1,3342	0,0784	43
11	3	3	3	3	[1,4661 2,5331 -19,4904 -3,9694]	1,3867	0,0952	38
12	4	3	4	3	[1,6809 2,6638 -19,8796 -4,0351]	1,4307	0,1091	34
13	1	4	1	4	[0,7512 2,0977 -18,2044 -3,7525]	1,4392	0,0488	63
14	2	4	2	4	[1,0515 2,2804 -18,7460 -3,8438]	1,5051	0,0683	48
15	3	4	3	4	[1,2783 2,4191 -19,1542 -3,9130]	1,5564	0,0830	42
16	4	4	4	4	[1,4664 2,5332 -19,4938 -3,9700]	1,6003	0,0952	38

На основі наслідку 4.2 теореми 4.4 і формул (4.30) і (4.42) проведено ряд чисельних експериментів з метою побудови наближених J-оптимальних керувань у вигляді статичного регулятора по стану (4.41) при різних значення діагональних елементів матриці Q. В табл. 4.1 наведено знайдені відповідні значення матриці J-оптимального регулятора K, критерія якості J, запасу стійкості α і часу перехідного процесу T_0 замкненої системи. Остання характеристика знаходилась за формулою $T_0 = \min\{T : \|x_t\| \leq \varepsilon, t \geq T\}$, де $\varepsilon = 0,05$.

Діагональні елементи q_1 і q_3 вагової матриці Q характеризують вплив переміщення платформи z і кута відхилення маятника φ на зважений рівень гасіння обмежених збурень, що діють на платформу. Як видно з табл. 1, збільшення q_1 і q_3 при сталих q_2 і q_4 призводить до збільшення запасу стійкості і зменшення часу перехідного процесу системи при відповідному J-оптимальному керуванні. Замкнена система є неекспансивною у випадках $N = \overline{1,4}$.

На рис. 4.2 показана поведінка розв'язків дискретної системи без керування, а на рис. 4.3 — поведінка розв'язків замкненої системи з початковим вектором $x_0 = \big[-1, 1, -2, 2\big]^T$ для J-оптимального регулятора у випадку $N = 4$. При цьому збурення w_t задано у вигляді (4.27), де $y_t = x_t$, $\gamma = 0,976$, $\Theta = \sqrt{P}^{-1} E \sqrt{Q}$, $E = 0,5\big[1,1,1,1\big]$ і виконується матрична нерівність $\Theta^T P \Theta \leq Q$.

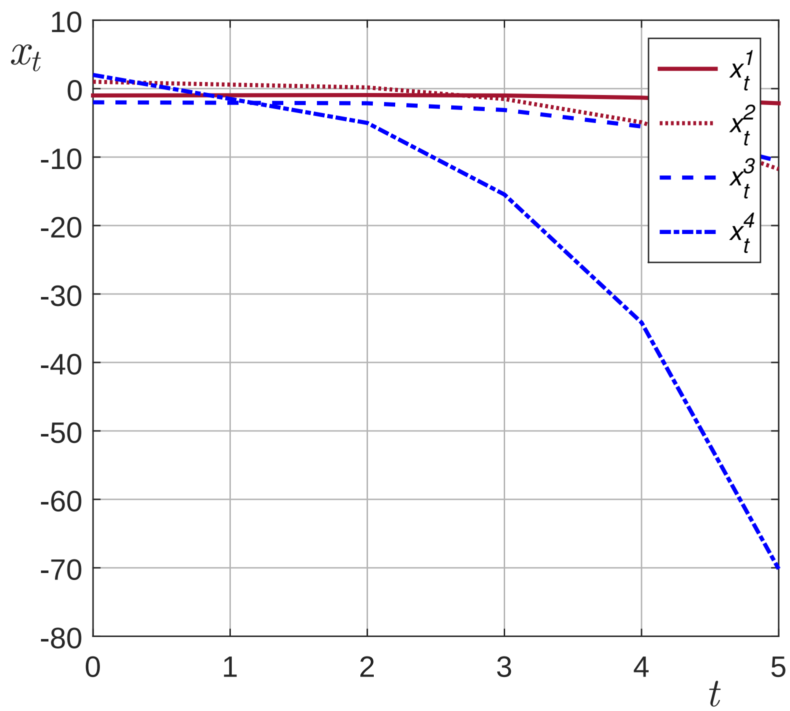

Рис. 4.2: Поведінка системи без керування.

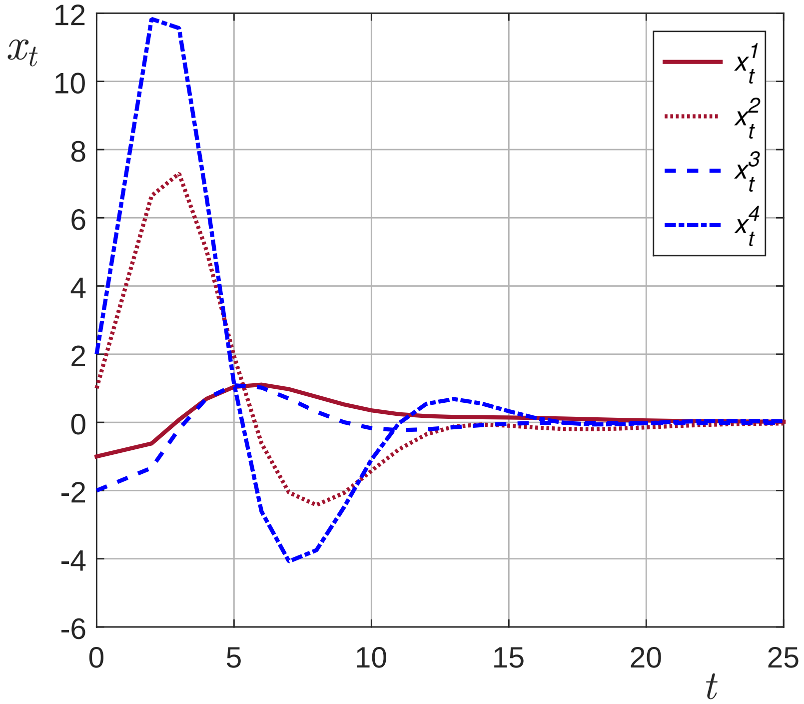

Рис. 4.3: Поведінка замкненої системи.

4.5. Висновки до розділу

В даному підрозділі розглянуто класи лінійних та нелінійних систем керування з дискретним часом у векторно-матричній формі. На основі методу квадратичних функцій Ляпунова досліджено задачі стабілізації, оцінки та гасіння обмежених збурень у системах з керованими і спостережуваними виходами. Отримано такі результати:

• У вигляді матричних нерівностей побудовано необхідні та достатні умови існування статичного зворотного зв'язку по вимірюваному виходу, який забезпечує асимптотичну стійкість лінійної дискретної системи керування з бажаним спектральним запасом (ρ-стійкість).

• Встановлено необхідні та достатні умови існування динамічного зворотного зв'язку по вимірюваному виходу, який забезпечує ρ-стійкість лінійної дискретної системи керування. Отримані умови у випадку динамічного регулятора повного порядку зводяться до розв'язування лінійних матричних нерівностей.

• Розроблено ітераційний алгоритм обчислення матриці статичного регулятора, що забезпечує ρ-стійкість лінійної дискретної системи та асимптотичну стійкість стану рівноваги нелінійної системи керування. Даний алгоритм чисельно реалізовано в задачі дискретної стабілізації поздовжнього руху гелікоптера при вертикальному зльоті і посадці.

• Сформульовано критерії існування статичних та динамічних регуляторів з наявними збуреннями, які гарантують задану оцінку зваженого рівня гасіння зовнішніх і початкових збурень, робастну стійкість та спільну квадратичну функцію Ляпунова замкненої дискретної системи керування.

• Для класу лінійних дискретних систем з керованими і спостережуваними виходами сформульовано критерії існування статичних та динамічних регуляторів, які забезпечують задану оцінку зваженого рівня гасіння зовнішніх і початкових збурень, робастну стійкість та спільну квадратичну функцію Ляпунова замкненої системи.

• Розроблено алгоритм побудови динамічного регулятора з нульовим початковим вектором, який дозволяє оцінити та мінімізувати зважений рівень гасіння обмежених збурень у дискретних системах з керованими і спостережуваними виходами.

• На основі запропонованого алгоритму проведено ряд чисельних експериментів в задачі дискретної стабілізації одноланкового перевернутого маятника на рухомій платформі. Досліджено залежність запасу стійкості і часу перехідного процесу замкненої системи від вагових коефіцієнтів функціоналу якості, які характеризують вплив переміщення платформи і кута відхилення маятника на зважений рівень гасіння обмежених збурень, що діють на платформу.

ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі сформульовано та розв'язано нові задачі синтезу неперервних та дискретних систем керування у векторно-матричній формі. Основні нові результати проведених досліджень полягають у наступному:

1. Встановлено критерії існування статичних та динамічних регуляторів по вимірюваному виходу, які забезпечують α-стійкість лінійних систем керування.

2. Показано, що методи побудови статичних та динамічних регуляторів, які випливають із отриманих критеріїв стабілізації лінійних систем, можуть бути застосовані до деякого класу нелінійних систем керування у векторно-матричній формі.

3. Для лінійних систем з керованими і спостережуваними виходами сформульовано критерій існування та алгоритм побудови динамічних регуляторів з нульовим початковим вектором, які забезпечують задану оцінку зваженого рівня гасіння зовнішніх і початкових збурень, робастну стійкість та спільну квадратичну функцію Ляпунова замкненої системи.

4. Розроблено ітераційний алгоритм побудови статичного регулятора, що забезпечує ρ-стійкість лінійної дискретної системи та асимптотичну стійкість стану рівноваги нелінійної системи керування. Даний алгоритм чисельно реалізовано в задачі дискретної стабілізації поздовжнього руху гелікоптера при вертикальному зльоті і посадці.

5. Для класу лінійних дискретних систем керування сформульовано критерій існування та алгоритм побудови динамічних регуляторів з нульовим початковим вектором, які забезпечують задану оцінку зваженого рівня гасіння зовнішніх і початкових збурень, робастну стійкість та спільну квадратичну функцію Ляпунова замкненої системи.

6. Розроблені методи дослідження, що зводяться до розв'язання систем лінійних матричних нерівностей, застосовано в задачах стабілізації

та H_∞-оптимізації для таких механічних систем, як одноланковий робот-маніпулятор, маятник на рухомій платформі, двомасова механічна система та лінійний осцилятор з демпфуванням. Досліджено залежності критеріїв якості замкнених систем, що характеризують зважений рівень гасіння обмежених збурень, від вагових коефіцієнтів та механічних параметрів.

ДОДАТОК

Додаток А

Алгоритм 3.2. Зважена H_∞-оптимізація лінійного осцилятора.

```
% Гасіння коливань лінійного осцилятора
% Неперервна система, динамічний регулятор
clc; clear;
global g_print_count_after_drop;
g_print_count_after_drop = 5;
global g_print_str;
g_print_str = '\t ОСЦИЛЯТОР \n\n';
format long;

n = 2; m = 1; l = 1; r=2; s=1; k=2;
a=1.0; b=0.1; A = [0 1;-a -b];
B1 = [0;1]; B2=B1;
C1 = [1 0;0 0]; C2=[1 0];
D11 =zeros(k,s); D12=[0;1]; D21=zeros(l,s); D22=zeros(l,m);
In=eye(n); Im=eye(m); Il=eye(l); Ir=eye(r); Is=eye(s); Ik=eye(k);

P=Is;
q1=0.01; q2=0.1; Q=[q1 0; 0 q2];
ro=0.2; X0=(ro^2)*In;

gamma=0.865; prnValue('Значення gamma:', gamma);
[J_0, ~]=JPQ(A,B1,C1,D11,P,Q); [J, ~]=JPQX0(A,B1,C1,D11,P,Q,X0);
prnValue('Значення критерія якості J_0 системи без керування:', J_0);
prnValue('Значення критерія якості J системи без керування:', J);

% Побудова динамічного регулятора з оцінкою J < gamma
R=[C2 D21];  W1=null(R,'r');  % базис ядра матриці R
L=[B2' D12']; W2=null(L,'r');  % базис ядра матриці L
W11=W1(1:n,1:n+s-l); W12=W1(n+1:n+s,1:n+s-l);
W21=W2(1:n,1:n+k-m); W22=W2(n+1:n+k,1:n+k-m);

setlmis([]);
X=lmivar(1,[n 1]);  % 1-symmetryc, n - nxn
Y=lmivar(1,[n 1]);   % 1-symmetryc, n - nxn
% 1st LMI
 lmiterm([1 1 1 X],W11',A*W11,'s'); lmiterm([1 1 1 X],W11',B1*W12,'s');
 S1=W11'*C1'*Q*C1*W11+W11'*C1'*Q*D11*W12+W12'*D11'*Q*C1*W11+W12'*(D11'*Q*
    D11-gamma^2*P)*W12;
```

```
 lmiterm([1 1 1 0],S1);
% 2st LMI
 lmiterm([2 1 1 Y],W21'*A,W21,'s');  lmiterm([2 1 1 Y],W22'*C1,W21,'s');
 S2=W21'*B1/P*B1'*W21+W21'*B1/P*D11'*W22+W22'*D11/P*B1'*W21+W22'*(D11/P*
    D11'-gamma^2*(inv(Q)))*W22;
 lmiterm([2 1 1 0],S2);
% 3st LMI
 lmiterm([3 1 1 X],1,-1);  lmiterm([3 1 2 0],-gamma*In); lmiterm([3 2 2 Y
    ],1,-1);
% 4st LMI
lmiterm([4 1 1 X],1,1);  lmiterm([4 1 1 0],-gamma^2*X0);
lmis = getlmis; [tmin,xfeas] = feasp(lmis, [0,0,0,0,1]);
X = dec2mat(lmis,xfeas,X); eX = eig(X);
Y = dec2mat(lmis,xfeas,Y); eY = eig(Y);
prnValue('Матриця X:', X);prnValue('Власні значення матриці X:', eX);
prnValue('Матриця Y:', Y);prnValue('Власні значення матриці Y:', eY);

%%% Перевірка нерівностей
F1=[A'*X+X*A+C1'*Q*C1  X*B1+C1'*Q*D11; B1'*X+D11'*Q*C1  D11'*Q*D11-gamma
   ^2*P];
H1=-W1'*F1*W1;eH1 = eig(H1);
prnValue('Власні значення матриці H1:', eH1);
F2=[A*Y+Y*A'+(B1/P)*B1'  Y*C1'+(B1/P)*D11'; C1*Y+(D11/P)*B1'  (D11/P)*D11
   '-gamma^2*(inv(Q))];
H2=-W2'*F2*W2; eH2 = eig(H2);
prnValue('Власні значення матриці H2:', eH2);
%%% Перевірка нерівності
XX0=gamma^2*X0-X; eXX0 = eig(XX0);
prnValue('Власні значення матриці XX0:', eXX0);
%%% Перевірка нерівності
W=[X gamma*In;gamma*In Y]; eW = eig(W);
prnValue('Власні значення матриці W:', eW);

%%% Формування блочної матриці Xd
Z=Y-(gamma^2)*(inv(X)); eZ = eig(Z);
prnValue('Власні значення матриці Z:', eZ);

[T,E]=eig(Z); E1=eye(n);  %%  X1 i X2
for i=1:n
   E1(i,i)=sqrt(E(i,i));
end;
T=T*E1;
if r<n
```

```
    n1=n-r;
    for j=1:n1
        em=E(1,1); im=1;
        for i=1:n-j+1
            if E(i,i)<em
                em=E(i,i); im=i; end;
        end;
        T(:,im)=[]; E(:,im)=[];  E(im,:)=[];
    end;
end;
V=T'; X1=gamma\V*X; X2=gamma^2\V*X*V'+Ir;
Xd=[X X1';X1 X2]; eXd = eig(Xd);
Y1=-gamma*V;Y2=gamma^2*Ir;Yd=[Y Y1';Y1 Y2]; eYd = eig(Yd);
Zd=Xd*Yd-gamma^2*eye(n+r);
prnValue('Власні значення матриці Xd:', eXd);
prnValue('Власні значення матриці Yd:', eYd);
prnValue('Різниця Zd=Xd*Yd-gamma^2*I_n+r:', Zd);

%Формування ЛМН;
S = [A'*X+X*A  A'*X1'  X*B1  C1'; X1*A   zeros(r,r)   X1*B1  zeros(r,k);
   B1'*X  B1'*X1'  -gamma^2*P  D11'; C1  zeros(k,r)  D11  -inv(Q)];
L=[B2'*X  B2'*X1'  zeros(m,s)  D12';X1  X2  zeros(r,s)  zeros(r,k)];
R=[C2 zeros(l,r) D21 zeros(l,k); zeros(r,n) Ir zeros(r,s) zeros(r,k)];
Kd0 = basiclmi(S,L,R,'Xmin'); % розв'язування ЛМН з мінімізацією норми:
     S + L'XR + R'X'L < 0

K0 = Kd0(1:m,1:l); U0 = Kd0(1:m,l+1:l+r); V0 = Kd0(m+1:m+r,1:l); Z0 = Kd0
   (m+1:m+r,l+1:l+r);
K = (Im+K0*D22)\K0; U = (Im+K0*D22)\U0; V = V0/(Il+D22*K0); Z = Z0-V0*D22
   /(Im+K0*D22)*U0;
prnValue('Матриця K:', K);prnValue('Матриця U:', U);
prnValue('Матриця V:', V);prnValue('Матриця Z:', Z);

M11=A+B2*K0*C2; M12=B2*U0; M21=V0*C2; M22=Z0;
M = [M11 M12; M21 M22]; eM = eig(M);

mBegin = eM;
mEnd = zeros(2*length(mBegin(:)),1);
mEnd(1:2:end) = real(mBegin);
mEnd(2:2:end) = imag(mBegin);
prnValue('Власні значення матриці Ac:', mEnd);

N1=B1+B2*K0*D21; N2=V0*D21; N=[N1; N2];
```

```
F1=C1+D12*K0*C2; F2=D12*U0; F = [F1  F2];
G = D11+D12*K0*D21;

[J_0, ~]=JPQ(M,N,F,G,P,Q); [J, ~]=JPQX0r(M,N,F,G,P,Q,X0,n,r,s);
prnValue('Значення критерія якості J_0 замкненої системи:', J_0);
prnValue('Значення критерія якості J замкненої системи:', J);

 fileID = fopen('results_Oscylliator.txt','wt');
fprintf(fileID, g_print_str); fclose(fileID); fprintf(g_print_str);
```

```
% Обчислення J_{P,Q} як мінімум gamma
function [J_PQ, h] =JPQ(A,B,C,D,P,Q)
n1=size(A,1); s1=size(P,1);
gamma=10; N=1000; h=gamma/2;
for i= 1:N
    setlmis([]);  X=lmivar(1,[n1 1]);
    lmiterm([1 1 1 X],1,A,'s'); lmiterm([1 1 1 0],C'*Q*C);
    lmiterm([1 1 2 X],1,B);  lmiterm([1 1 2 0],C'*Q*D);
    lmiterm([1 2 2 0],D'*Q*D); lmiterm([1 2 2 0],-gamma^2*P);
    lmiterm([2 1 1 X],-1,1);
    lmis = getlmis; [~,xfeas] = feasp(lmis, [0,0,0,0,1]);
    X = dec2mat(lmis,xfeas,X); eX = eig(X);
    FI=[A'*X+X*A+C'*Q*C  X*B+C'*Q*D; B'*X+D'*Q*C  D'*Q*D-gamma^2*P]; eFI
       = eig(FI);
    ind=1;
    for j= 1:n1
        if eX(j) <= 0
            ind=-1;
            break;
        end;
    end;
    for j= 1:n1+s1
        if eFI(j) >= 0
            ind=-1;
            break;
        end;
    end;
    gamma=gamma-ind*h;
    if ind == 1
        h=h/2;
    end;
    if h < 0.001
        break;
    end;
```

```
end;
J_PQ =gamma;
```

```
% Обчислення J_{P,Q,X0} як мінімум gamma
function [J_PQX0, h] =JPQX0(A,B,C,D,P,Q,X0)
n1=size(A,1); s1=size(P,1);
gamma=10; N=1000; h=gamma/2;
for i= 1:N
    setlmis([]); X=lmivar(1,[n1 1]);
    lmiterm([1 1 1 X],1,A,'s'); lmiterm([1 1 1 0],C'*Q*C);
    lmiterm([1 1 2 X],1,B);  lmiterm([1 1 2 0],C'*Q*D);
    lmiterm([1 2 2 0],D'*Q*D-gamma^2*P);
    lmiterm([2 1 1 X],-1,1);
    lmiterm([3 1 1 X],1,1); lmiterm([3 1 1 0],-gamma^2*X0);
    lmis = getlmis; [~,xfeas] = feasp(lmis, [0,0,0,0,1]);
    X = dec2mat(lmis,xfeas,X); eX = eig(X);
    FI=[A'*X+X*A+C'*Q*C  X*B+C'*Q*D; B'*X+D'*Q*C  D'*Q*D-gamma^2*P]; eFI
       = eig(FI);
    XX0=gamma^2*X0-X; eXX0 = eig(XX0);
    ind=1;
    for j= 1:n1
        if eX(j) <= 0
            ind=-1;
            break;
        end;
        if eXX0(j) <= 0
            ind=-1;
            break;
        end;
    end;
    for j= 1:n1+s1
        if eFI(j) >= 0
            ind=-1;
            break;
        end;
    end;
    gamma=gamma-ind*h;
    if ind == 1
        h=h/2;
    end;
    if h < 0.001
        break;
    end;
end;
```

```
J_PQX0=gamma;
```

```
% Обчислення J_{P,Q,X0} як мінімум gamma
function [J_PQX0r, h] = JPQX0r(A,B,C,D,P,Q,X0,n,r,s)
gamma=10; N=1000; h=gamma/2;
E=[eye(n) zeros(n,r)];
for i= 1:N
    setlmis([]); X=lmivar(1,[n+r 1]);
    lmiterm([1 1 1 X],1,A,'s'); lmiterm([1 1 1 0],C'*Q*C);
    lmiterm([1 1 2 X],1,B);  lmiterm([1 1 2 0],C'*Q*D);
    lmiterm([1 2 2 0],D'*Q*D-gamma^2*P);
    lmiterm([2 1 1 X],-1,1);
    lmiterm([3 1 1 X],E,E'); lmiterm([3 1 1 0],-gamma^2*X0);
    lmis = getlmis; [~,xfeas] = feasp(lmis, [0,0,0,0,1]);
    X = dec2mat(lmis,xfeas,X); eX = eig(X);
    FI=[A'*X+X*A+C'*Q*C  X*B+C'*Q*D; B'*X+D'*Q*C  D'*Q*D-gamma^2*P]; eFI
       = eig(FI);
    XX0=gamma^2*X0-E*X*E'; eXX0 = eig(XX0);
    ind=1;
    for j= 1:n
         if eXX0(j) <= 0
             ind=-1;
             break;
         end;
    end;
    for j= 1:n+r
        if eX(j) <= 0
            ind=-1;
            break;
        end;
    end;
    for j= 1:n+r+s
        if eFI(j) >= 0
            ind=-1;
            break;
        end;
    end;
    gamma=gamma-ind*h;
    if ind == 1
        h=h/2;
    end;
    if h < 0.001
        break;
    end;
```

```
end;
J_PQX0r=gamma;
```

```
%This function converts values (matrix, number ...) in text
function txt = prnValue( prompt, value, complex, formatReal,
    formatComplex, type)
global g_print_str;

if nargin < 6
    type = 'M';
end
if nargin < 5
    formatComplex = makeFormat(imag(value));
end
if nargin < 4
    formatReal = makeFormat(real(value));
end
if nargin < 3
    ivalue = imag(value);
    complex = any(abs(ivalue(:)) > 0);
end

if nargin < 2
    msgID = 'prnValues';
    msg = 'Function prnValues might be called with too few arguments.';
    baseException = MException(msgID,msg);
    throw(baseException);
end

if type == 'M'
    txt = printMatrix(prompt, value, complex, formatReal, formatComplex);
else
    msgID = 'prnValues';
    msg = 'Wrong type value.';
    baseException = MException(msgID,msg);
    throw(baseException);
end

g_print_str = strcat(g_print_str, strcat(txt, '\n'));
end

function txt = printMatrix(prompt, matrix, complex, formatReal,
    formatComplex)
txt = '';
```

```
if ~isempty(prompt)
    txt = strcat(prompt, '\n');
end

[mSize, nSize] = size(matrix);
for i=1:mSize
    for j=1:nSize
        txt = strcat(txt, printNumeric(matrix(i,j), complex, formatReal,
            formatComplex), '\t');
    end
    txt = strcat(txt, '\n');
end
end

function txt = printNumeric(numeric, complex, formatReal, formatComplex)
txt = sprintf(formatReal, real(numeric));
if complex
    if imag(numeric) >= 0
        txt = strcat(txt, '+');
    end
    txt = strcat(txt, sprintf(formatComplex, imag(numeric)), 'i');
end
end

function txt = makeFormat(matrix)
global g_print_count_after_drop;
maxNum = max(max(abs(matrix)));
txtNum = sprintf('%u', maxNum);
if (g_print_count_after_drop >= 0)
  countAfterDrop = g_print_count_after_drop;
elseif strcmp(get(0, 'format'), 'short')
    countAfterDrop = 4;
else
    countAfterDrop = 16;
end

txt = sprintf('%u.%u', length(txtNum), countAfterDrop);
txt = strcat('%', txt, 'f');
end
```

Додаток Б

Алгоритм 4.1. Ітераційна процедура дискретної системи стабілізації по виходу гелікоптера.

```
% Модель поздовжнього руху вертольота при вертикальному зльоті і посадці
% Дискретна постановака, статичний регулятор
clc; clear;
global g_print_count_after_drop;
g_print_count_after_drop = 5;
global g_print_str;
g_print_str = '\t СТАБІЛІЗАЦІЯ: Гелікоптер n = 4; m = 2; s=1  \n\n';
format long;

n = 4; m = 2; r=1-0.001;
In=eye(n); Im=eye(m);

A=[1  0.00027  0.00016  -0.00456;
    0.00048  0.98995  -0.00018  -0.04001;
    0.001  0.00365  0.99303  0.01407;
    0.00001  0.00002  0.00997  1.0001];
B=[ 0.00442  0.00175;
  0.03527  -0.07554;
  -0.05494 0.04461;
  -0.00028 0.00022];
C=[1 0 0 0;0 1 0 0]; s=2;

prnValue('Матриця A:', A);
srad=max(abs(eig(A)));
prnValue('Спектральний радіус матриці A:', srad);
prnValue('Матриця B:', B);
prnValue('Матриця C:', C);

RB=[B A*B A^2*B A^3*B]; rankRB= rank(RB);
prnValue('Ранг матриці керованості:', rankRB);
RC=[C; C*A; C*A^2; C*A^3]; rankRC= rank(RC);
prnValue('Ранг матриці спостережуваності:', rankRC);

%% Побудова стабілізуючого статичного регулятора по виходу
 W=null(B','r'); %ортогональне доповнення B, тобто базис ядра матриці B'
 W1=null(C,'r');
 G=[C'*(inv(C*C'))  W1];

 setlmis([]);
```

```
 Z=lmivar(1,[n 1]);    % 1-symmetryc, n - nxn
 lmiterm([1 1 1 Z],W'*A*G,G'*A'*W); lmiterm([1 1 1 Z],-r^2*W'*G,G'*W);
 lmiterm([2 1 1 Z],1,-1);
 e=0.01; lmiterm([2 1 1 0],e*In);
 lmis = getlmis; [~,xfeas] = feasp(lmis, [0,0,0,0,1]);
 Z = dec2mat(lmis,xfeas,Z);Z0=Z;
 prnValue('Матриця X0:', Z0); eZ0=eig(Z0);
 prnValue('Власні значення матриці Z0:', eZ0);

 N=100;
 for j=1:N
   setlmis([]);
   Z=lmivar(1,[n 1]);    % 1-symmetryc, n - nxn
   lmiterm([1 1 1 Z],W'*A*G,G'*A'*W); lmiterm([1 1 1 Z],-r^2*W'*G,G'*W);
   Z1=Z0(1:s,1:s);Z2=Z0(s+1:n,1:s);Z3=Z0(s+1:n,s+1:n);
   D=Z3-Z2*(inv(Z1))*Z2'; lmiterm([2 1 1 Z],-r^2*G,G');
   A1=A*G*[zeros(s,s) zeros(s,n-s); zeros(n-s,s) D]*G'*A';
   lmiterm([2 1 1 0], A1);
   lmiterm([3 1 1 Z],1,1);  lmiterm([3 1 1 0],-Z0);
   lmiterm([4 1 1 Z],1,-1);
   e=0.01;  lmiterm([4 1 1 0],e*In);
   lmis = getlmis; [~,xfeas] = feasp(lmis, [0,0,0,0,1]);
   Z = dec2mat(lmis,xfeas,Z);
   X=G*Z*G';eX=eig(X);
   Y1=W'*(A*X*A'-r^2*X)*W; eY1=eig(Y1);
   Y2=A*X*A'-r^2*X-A*X*C'*(inv(C*X*C'))*C*X*A'; eY2=eig(Y2);
   e0=0.00001; e1=0.00001; e2=0.00001;
   if (min(eX)>e0)&&(max(eY1)<-e1)&&(max(eY2)<-e2)
    prnValue('Кількість ітерацій j:', j);
    break;
   end
   Z0=Z;
 end;

prnValue('Матриця X:', X); eX=eig(X);
prnValue('Власні значення матриці X:', eX);

%% Перевірка умов теореми
Y1=W'*(A*X*A'-r^2*X)*W; eY1=eig(Y1);
prnValue('Власні значення матриці Y1:', eY1);
Y2=A*X*A'-r^2*X-A*X*C'*(inv(C*X*C'))*C*X*A'; eY2=eig(Y2);
prnValue('Власні значення матриці Y2:', eY2);
```

```
%% Побудова регулятора
L=[-B' zeros(m,n)]; R=[zeros(s,n)  C*X]; F=-[r^2*X  A*X; X*A'  X];
setlmis([]);
K=lmivar(2,[m s]);    % 2- mxs
lmiterm([1 1 1 K],L',R,'s'); lmiterm([1 1 1 0],F);
lmis = getlmis; [tmin,xfeas] = feasp(lmis, [0,0,0,0,1]);
K = dec2mat(lmis,xfeas,K);prnValue('Матриця регулятора K:', K);

H=L'*K*R+R'*K'*L+F;eH=eig(H);prnValue('Власні значення матриці H:', eH);

%% Перевірка умов стійкості
M=A+B*K*C; eM=eig(M);
prnValue('Власні значення матриці M:', eM);
abseM=sort(abs(eM)); sradM=max(abseM);
prnValue('Модулі власних значень матриці M:', abseM);
prnValue('Спектральний радіус матриці M:', sradM);
zapas=1-sradM; prnValue('Запас стійкості >=:', zapas);

fileID = fopen('results_Helicopter.txt','wt');
fprintf(fileID, g_print_str); fclose(fileID); fprintf(g_print_str);
```

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Абдуллин Р.З. Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости / Р.З. Абдуллин, Л.Ю. Анапольский, А.А. Воронов, А.С. Земляков, Р.И. Козлов, А.И. Маликов, В.М. Матросов — М.: Наука, 1987.— 312 с.

2. Алілуйко А.М. Алгебраїчні умови стійкості диференціальних систем другого порядку / Алілуйко А.М. // Динамические системы. — Вып. 22. — 2007. — С. 96–108.

3. Алілуйко А.М. Стійкість та стабілізація диференціальних систем другого порядку / А.М. Алілуйко, О.Г. Мазко // Проблеми аналітичної механіки: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2006. — **3**, №1. — С. 7–24.

4. Алиев Ф.А. Задачи стабилизации системы с обратной связью по выходной переменной (обзор) / Ф.А. Алиев, В.Б. Ларин // Прикладная механика. — 2011. – **47**, №3. — С. 3–49.

5. Андриевский Б.Р. Нелинейные системы. Частотные и матричные неравенства / Б.Р. Андриевский, А.Е. Барабанов, В.А. Бондарко, Р.У. Брокетт и др. — М. : Физматлит, 2008. — 608 с.

6. Афанасьев В.Н. Математическая теория конструирования систем управления / В.Н. Афанасьев, В.Б. Колмановский, В.Р. Носов. — М.: Высш. шк., 1989. — 447 с.

7. Баландин Д.В. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств / Д.В. Баландин, М.М. Коган. — М. : Физматлит, 2007.— 280 с.

8. Баландин Д.В. Синтез регуляторов на основе линейных матричных неравенств и алгоритма поиска взаимнообратных матриц / Д.В. Баландин, М.М. Коган // Автоматика и телемеханика. — 2005. — №1. — С. 82–99.

9. Баландин Д. В. Применение линейных матричных неравенств в синтезе законов управления / Д.В. Баландин, М.М. Коган — Нижний Новгород: ННГУ, 2010. — 93 с.

10. Баландин Д. В. Обобщенное H_∞-оптимальное управление как компромисс между H_∞-оптимальным и γ-оптимальным управлениями / Д.В. Баландин, М.М. Коган // Автоматика и телемеханика. — 2010. — № 6. — С. 20–38.

11. Баландин Д. В. Синтез обобщенного H_∞-оптимального управления в дискретном времени на конечном и бесконечном интервалах / Д.В. Баландин, М.М. Коган, Л. Н. Кривдина, А. А. Федюков // Автоматика и телемеханика. — 2014. — № 1. — С. 3–22.

12. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова / Е.А. Барбашин — М. : Наука, 1970. — 240 с.

13. Башняков О.М. Практична стійкість, оцінки та оптимізація / О.М. Башняков, Ф.Г. Гаращенко, В.В. Пічкур. — К. : Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2008. — 383 с.

14. Валеев К.Г. Построение функций Ляпунова / К.Г. Валеев, Г.С. Финин. — К. : Наукова думка, 1981. — 412 с.

15. Вышнеградский И.А. О регуляторах прямого действия / И.А. Вышнеградский, Д.К. Максвелл, А. Стодола // Теория автоматического управления. — М. : Изд-во АН СССР, 1949.

16. Воронов А.А. Современное состояние и проблемы теории устойчивости / А.А. Воронов // Автомат. и телемех. — 1982. — №5. — С. 5–28.

17. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер — М. : Наука, 1988. — 552 с.

18. Гелиг А. Устойчивость и стабилизация нелинейных систем / А. Гелиг, И. Зубер, А. Чурилов //Санкт-Петербург: Издательство СПбГУ, 2006. — 272 с.

19. Далецкий Ю.Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн — М. : Наука, 1970. — 534 с.

20. Демидович Б.И. Лекции по математической теории устойчивости / Б.И. Демидович — М. : Наука,1967. — 472 с.

21. Двирный А.И. Об устойчивости по нелинейному квазиоднородному приближению дифференциальных уравнений с импульсным воздействием / А.И. Двирный, В.И. Слынько // Математический сборник.— 2014. — **205**, № 6. — С. 109–138.

22. Зайцев В.В. Второй метод Ляпунова для оценок областей достижимости нелинейных систем / В.В. Зайцев // Автоматика и телемеханика, 1994. — №6. — С. 32–40.

23. Зуев А.Л. Устойчивость и стабилизация нелинейных систем / А.Л. Зуев, А.О. Игнатьев, А.М. Ковалёв — К.: Наук. думка, 2013. — 431 с.

24. Калитин Б.С. Оценка области притяжения методом функция Ляпунова / Б.С. Калитин, Л.В. Тртьякова // Развитие и применение метода функций Ляпунова. — Новосибирск : Наука. — 1992. — С. 210–215.

25. Карапетян А.В. Устойчивость консервативных и диссипативных систем / А.В. Карапетян, В.В. Румянцев. // Итоги науки и техн. Серия Общая механика / ВИНИТИ. — 1983. — **6**. — С. 3–128.

26. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики : в 2-х т. / Н.А. Кильчевский — М. : Наука, 1977. — **2**. — 544 с.

27. Кириченко Н.Ф. Введение в теорию стабилизации движения / Н.Ф. Кириченко — К. : Вища школа, 1978. — 184 с.

28. Козлов Р.И. Теория систем сравнения в методе векторных функций Ляпунова / Р.И. Козлов — Новосибирск: Наука, 2001. — 128 с.

29. Комарова Г.Л. Об оценке областей притяжения состояния равновесия динамической системы прямым методом Ляпунова / Г.Л. Комарова, Г.А. Леонов // Прикладная математика и механика. — 1985. – **49**, № 6. — С. 900–908.

30. Кореневский Д.Г. Устойчивость решений детерминированных и стохастических дифференциально-разностных уравнений / Д.Г. Кореневский — К. : Наук. думка, 1992. — 148 с.

31. Кошляков В.Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов / В.Н. Кошляков — М. : Наука, 1985. — 286 с.

32. Кошляков В.Н. О структурных преобразованиях динамических систем / В.Н. Кошляков // Прикл. мат. и мех. — 1997. — **61**, №5. — С. 774–780.

33. Кошляков В.Н. Структурный анализ некоторого класа динамических систем / В.Н. Кошляков, В.Л. Макаров. // Укр. мат. журнал. — 2000. — **52**, №8. — С. 1089–1096.

34. Кунцевич В.М. Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации / В.М. Кунцевич — К. : Наук. думка, 2006. — 264 с.

35. Курцвейль Я. Об обращении второй теоремы Ляпунова об устойчивости движения / Я. Курцвейль // Чехословацкий мат. журнал. — 1956. – **6**, №2. — С. 217–259.

36. Кусій С. М. Стабілізація та гасіння обмежених збурень в дискретних системах керування / С. М Кусій // Нелінійні коливання. — 2017. — **20**, №2. — С. 198–210.

37. Лакшмикантам В. Устойчивость движения: метод сравнения / В. Лакшмикантам, С. Лила, А. Мартынюк — К: Наук. думка, 1991.—248 с.

38. Ларин В.Б. Задачи управления системами, содержащими неопределенность / В.Б. Ларин // Прикладная механика. — 2001. – **37**, №12. — С. 37–67.

39. Лозгачев Г.И. Построение функций Ляпунова для нелинейных динамических систем / Г.И. Лозгачев // Дифференциальные уравнения. — 1998. — **34**, №11. — С. 1565–1567.

40. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения / А.М. Ляпунов — М.–Л. : Гос. издательство технико-теоретической литературы, 1950. — 472 с.

41. Мазко А. Г. Робастная устойчивость и оценка функционала качества нелинейных систем управления / А.Г. Мазко // Автоматика и телемеханика. — 2015. — № 2. — С. 73–88.

42. Мазко А. Г. Робастная устойчивость и стабилизация динамических систем. Методы матричных и конусных неравенств / А.Г. Мазко // Праці Інституту математики НАН України. — Київ, 2016. — **102**. — 332 с.

43. Мазко О.Г. Робастна стійкість і оптимізація нелінійних систем керування / О.Г. Мазко, Л.В. Богданович // Аналітична механіка та її застосування : Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — 2012. — **9**, №1. — С. 213–230.

44. Мазко А.Г. Стабилизация по измеряемому выходу и оценка уровня гашения возмущений в системах управления / А.Г. Мазко, С.Н. Кусий // Нелінійні коливання.— 2015. — **18**, № 3. — С. 373–387.

45. Мазко О. Г. Задачі стабілізації і гасіння зовнішніх збурень в системах керування / О.Г. Мазко, С.М. Кусій // Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики: Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — 2015. — **12**, 5. — С. 90–108.

46. Мазко О. Г. Робастна стабілізація та гасіння зовнішніх збурень у системах з керованими і спостережуваними виходами / О.Г. Мазко, С.М. Кусій

// Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики: Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — 2016. — **13**, 3. — С. 129–145.

47. Мазко А. Г. Робастная стабилизация и оценка взвешенного подавления возмущений в системах управления / А.Г. Мазко, С.Н. Кусий // Проблемы управления и информатики. — 2016. — № 6. —– С. 71—82.

48. Мазко А. Г. Стабилизация и H_∞– оптимизация линейных систем управления / А.Г. Мазко, С.Н. Кусий // Thesis of XVII International Conference «Dynamic System Modelling and Stability Investigation» (May 27 – 29, 2015, Kyiv), p. 143.

49. Мазко А. Г. Робастная стабилизация и подавление ограниченных возмущений в системах управления / А.Г. Мазко, С.Н. Кусий // Матеріали XXIII Міжнародної конференції з автоматичного управління «Автоматика – 2016» (22–23 вересня 2016 року, м. Суми), С. 20–21.

50. Мазко А. Г. Робастная стабилизация и подавление ограниченных возмущений в дискретных системах управления / А.Г. Мазко, С.Н. Кусий // Thesis of XVIII International Conference «Dynamic System Modelling and Stability Investigation» (May 27 – 29, 2017, Kyiv), p. 167.

51. Мазко О. Г. Робастна стабілізація та гасіння обмежених збурень в дискретних системах керування / О.Г. Мазко, С.М. Кусій // Thesis of International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100th Anniversary of Professor Yu.O.Mitropolskiy (June 7 – 10, 2017, Kyiv), p. 57.

52. Массера Х.Л. К теории устойчивости / Х.Л. Массера // Математика. — 1957. — **1**, №4. — С. 81–104.

53. Мартынюк А.А. Об устойчивости решений автономних систем Важевского / А.А. Мартынюк, А.Ю. Оболенський // Дифф. уравнения. — 1980. — **16**, №8. — С. 1392–1407.

54. Матросов В.М. Метод сравнения в математической теории систем / В.М. Матросов, Л.Ю. Анапольский, С.Н. Васильев — Новосибирск: Наука, 1980. — 480 с.

55. Меркин Д.Р. Гироскопические системы / Д.Р. Меркин — М. : Наука, 1974. — 344 с.

56. Назин С. А. Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов / С. А. Назин, Б. Т. Поляк, М. В. Топунов // Автоматика и телемеханика. — 2007. — № 3. — С. 106–125.

57. Поляк Б.П. Частотные критерии робастной устойчивости и апериодичности линейных систем / Б.П. Поляк, Я.З. Ципкин // Автом. телемех. — 2000. — №9. — С. 45–54.

58. Поляк Б.Т. Робастная устойчивость и управление / Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков. — М.: Наука, 2002. — 303 с.

59. Поляк Б.Т. Управление линейными системами при внешних возмущениях. Техника линейных матричных неравенств / Б. Т. Поляк, М. В. Хлебников, П. С. Щербаков — М.: Ленанд, 2014. — 560 с.

60. Поляк Б.Т. Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к решению / Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков // Автоматика и телемеханика.— 2005. — № 5. — С. 7–46.

61. Румянцев В.В. О развитии исследований в СССР по теории устойчивости движения / В.В. Румянцев // Дифференциальные уравнения. — 1983. — №5. — С. 739–774.

62. Слюсарчук В.Ю. Нестійкість розв'язків еволюційних рівнянь / В.Ю. Слюсарчук — Рівне : Вид-во НУВГП, 2004. — 416 с.

63. Сосницький С.П. Функція дії за Гамільтоном та стійкість руху консервативних систем / С.П. Сосницький — К. : Наук. думка, 2002. — 227 с.

64. Харитонов В.Л. Асимптотическая устойчивость семейства систем линейных дифференциальных уравнений / В.Л. Харитонов // Дифф. уравн. — 1978. — **14**, Вып. 11. — С. 2086–2088.

65. Хлебников М.В. Оптимизация линейных систем при ограниченных внешних возмущениях (техника инвариантных эллипсоидов) / М.В. Хлебников, Б.Т. Поляк, В.М. Кунцевич // Автомат. и телемех. — 2011. — №11. — С. 9-–59.

66. Хусаинов Д.Я. Метод функций Ляпуноа в иследованиях устойчивости дифференциально-функциональных систем / Д.Я. Хусаинов, А.В. Шатырко. — К. : Изд-во Киевского университета, 1997. — 236 с.

67. Хусаінов Д.Я. Умови абсолютної інтервальної стійкості різницевих систем із запізнюванням / Д.Я. Хусаінов, А.В. Шатирко // Вісник Київського університету. Сер. Кібернетика. — 2010. — Вип. 10. — С. 34–47.

68. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем / Ф.Л. Черноусько — М. : Наука, 1988. — 320 с.

69. Четаев Н.Г. Устойчивость движения / Н.Г. Четаев — М. : Гостехиздат, 1955. — 176 с.

70. Ackermann J. Robust control. Systems with Uncertain Physical Parameters / J. Ackermann — Berlin, Springer Verlag, 1993.

71. Aliev F.A. Optimization of linear control systems. Analytical methods and computational algorithms. Stability and Control: Theory, Methods and Applications, Vol. 8. / F.A. Aliev, V.B. Larin // Gordon and Breach Science Publishers. — 1998. — Amsterdam, X+261 pp.

72. Banks S.P. Pseudo-linear systems, Lie algebras and stability / S.P. Banks, S.K. Al-Jurani // IMA J. of Mathematical Control & Information. — 1996. — Vol. 13. — P. 385–401.

73. Barlett A.C. Root location of an entire polytope of polynomials: it suffices to check the edges / A.C. Barlett, C.V Hollot, H. Lin // Mat. Contr. Sig. Syst. — 1988. — **1**. — P. 61–71.

74. Blanchini F. Set Invariance in Control — A Survey / F. Blanchini // Automatica J. IFAC. — 1999. — **35**, No. 11. — P. 1747-–1767.

75. Boyd S. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory // S. Boyd, L.El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishman. — SIAM Studies in Applied Mathematics, Vol. 15. Philadelphia, PA, 1994. — 193 p.

76. Cao Yong-Yan Static Output Feedback Stabilization: An ILMI Approach / Cao Yong-Yan, J. Lam, Sun You-Xiam // Automatica. — 1998. — No. 12. — P. 1641–1645.

77. Doyle J.C., Francis B.A., Tannenbaum A.R. Feedback control theory / J.C. Doyle, B.A. Francis, A.R. Tannenbaum. — Englewood Cliffs, NY: MacMillan, 1992. — 196 p.

78. Dullerud G. E. A Course in Robust Control Theory. A Convex Approach / G. E. Dullerud, F. G. Paganini — Berlin: Springer-Verlag, 2000. — 419 p.

79. El-Ghaoui L. Rank minimization under LMI constraints: a framework for output feedback problems / L. El-Ghaoui, P. Gahinet. — In: Proc. Eur. Control Conf. Groningen, The Netherlands, 1993. — P. 1176–1179.

80. Faedo S. Un nuovo problema di stabilit'a per le equazioni algebriche a coefficienti reali. (Italian) / S. Faedo // Ann. Scuola Norm. Super. — 1953. — **(3)7**. — P. 53-–63.

81. Gahinet P. A Linear Matrix Inequality Approach to H_∞ Control / P. Gahinet, P. Apkarian. // Intern. J. of Robust and Nonlinear Control. — 1994. — P. 421–448.

82. Gahinet P. The LMI Control Toolbox. For Use with Matlab. User's Guide / P. Gahinet, A. Nemirovski, A.J. Laub, M. Chilali — Natick, MA: The MathWorks, Inc., 1995.

83. Gelig A.Ch. Vector Control Design for Robust Stabilization of a Class of Uncertain Systems / A.Ch. Gelig, I.E. Zuber // Avtomatika i Telemekhanika. — 2009. — No. 11. — P. 117-–125.

84. Godunov S.K. Ordinary Differential Equations with Constant Coefficient / S.K. Godunov // Translations of Mathematival Monographs, Vol. 169. — Providence: American Mathematical Society, 1997. — ix+282 p.

85. Kucera V. A Necessary and Sufficient Condition for Output Feedback Stabilizability / V. Kucera, C.E. De Souza // Automatica. — 1995. — No. 9. — P. 1357–1359.

86. Kwakernaak H. Robust control and H_∞-optimization — Tutorial paper / H. Kwakernaak // Automatica. — 1993. — **29**, 2. — P. 255–273.

87. Wei-Min Lu. H_∞ control of nonlinear systems: a convex characterization / Wei-Min Lu, J. C. Doyle // *IEEE Trans. Automat. Control.* — 1995. — **AC-40**, No. 9. — P. 1668–1675.

88. Mazko A.G. Matrix Equations, Spectral Problems and Stability of Dynamic Systems / A.G. Mazko // An international book series «Stability, Oscillations and Optimization of Systems» (Eds. A.A. Martynyuk, P. Borne and C. Cruz-Hernandez), Vol. 2. — Cambridge : Cambridge Scientific Publishers Ltd, 2008. — xx + 270 p.

89. Mazko A.G. Cone Inequalities and Stability of Dynamical Systems / A.G. Mazko // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. – 2011. – No. 3. – P. 303–318.

90. Mazko A.G. Stabilization by a measurable output and estimation of the level of attenuation for perturbations in control systems / A.G. Mazko, S.N. Kusii // Journal of Mathematical Sciences. — 2017. — **220**, 3. — P. 318–333.

91. Mazko A.G. Robust stabilization and suppression of limited disturbances in control systems / A.G. Mazko, S.N. Kusii // Book of Abstracts 5th International Conference of Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Ya. B. Lopatynsky (November 9–11, 2016, Kyiv), p. 101.

92. Najmurrokhman A. On solvability of output feedback nonlinear h_∞-control problem using nonlinear matrix inequalities approach / Najmurrokhman A. // J. of Electrical Engineering and Information Technology. — 2003. — **1**, No. 1. — P. 33–39.

93. Petersen I.R. Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems / I.R. Petersen, C.V. Hollot // Automatica. — 1986. — **22**, No. 4. — P. 397–411.

94. Roberson R.E. Notes on the Thomson-Tait-Chetaev stability theorem / Roberson R.E. // J. Astronaut. Sci. — 1968. — **15**, No. 6. — P. 319–324.

95. Rosinova D. A necessary and sufficient condition for static output feedback stabilizability of linear discrete-time systems / D. Rosinova, V. Vesely, V. Kucera // Kybernetika. — 2003. — **39**, No. 4. — P. 447–459.

96. Scherer C. The Riccati Enequality and State-Space H_∞–Optimal Control / Ph. D. Dissertation. — Universitat Wurzburg, Germany, 1990.

97. Stoorvogel A.A. The H_∞ Control Problem: A State Space Approach / A.A. Stoorvogel — New York: Prentice-Hall, 1992. — 468 p.

98. Syrmos V.L. Static output feedback : a survey / V.L. Syrmos, C.T. Abdallah, P. Dorato, K. Grigoriadis // Automatica. — 1997. — **33**, No. 2. — P. 125–137.

99. Wonham W. M. Linear multivariable control: A geometric approach / W. M. Wonham — New York: Springer-Verlag, 1979. — xv+326 p.

100. Zhou K. Robust and optimal control / K. Zhou, J.C. Doyle, K. Glover. — Englewood : Prentice Hall. — 1996. — 596 p.