

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ІВАНА ФРАНКА

На правах рукопису

Сорокін Олексій Сергійович

УДК 512.552.13

Кільця пов'язані з умовами
стабільного рангу

01.01.06. Алгебра та теорія чисел

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата
фізико-математичних наук

Науковий керівник:
Забавський Богдан Володимирович
доктор фізико-математичних
наук, професор

ЛЬВІВ – 2015

Зміст

ВСТУП	4
РОЗДІЛ 1. Попередні відомості та допоміжні факти	27
РОЗДІЛ 2. Некомутативні кільця Безу скінченного ста- більного рангу	53
2.1. Праві квазі-дуо-кільця Безу стабільного рангу 1.	53
2.2. Скінченні гомоморфні образи дуо-областей Безу та май- же вільні від квадратів елементи	57
2.3. Морфічні кільця, праві максимальні ідеали яких є лівими чистими ідеалами	65
РОЗДІЛ 3. Узагальнено адекватні кільця	69
3.1. Стабільний ранг узагальнено адекватних кілець	69
РОЗДІЛ 4. Структура головних ідеалів кілець Безу	75
4.1. Арифметичні властивості морфічних кілець	75
4.2. Властивості головних ідеалів кілець Безу	86
РОЗДІЛ 5. Слабка група Гротендіка	91
5.1. Побудова слабкої групи Гротендіка та скорочення голов- них ідеалів у прямих сумах	92
5.2. Зв'язок слабкої групи Гротендіка із кільцями Вітта . . .	104
5.3. Структура елементів слабкої групи Гротендіка	110

Загальні висновки	118
Список використаних джерел	120

ВСТУП

Актуальність теми.

Поняття стабільного рангу кільця, введене Басом у другій половині минулого століття, відіграє фундаментальну роль при вивченні структурних властивостей кілець. Впродовж останніх десятиліть такі автори як Амітцур, Ара, Менал, Монказі, Гудьорл, Капланський, Кон, Хенріксен, Лем, Забавський, Чен, Ніколсон, МакГоверн, Кушо, Хурана, Срівастава, Ройтман, Вассерштейн, Суслін та багато інших досліджували питання впливу стабільного рангу кільця на його властивості та поведінку при розв'язанні різноманітних теоретико-кільцевих задач. Крім того, було зауважено, що надаючи кільцям певні властивості, накладаються обмеження і на його стабільний ранг, причому природа накладених на кільце властивостей може бути доволі різноманітною. Таким чином прослідковується тісний взаємозв'язок між стабільним рангом та іншими властивостями кілець. Зокрема, дане поняття виявилося дуже дієвим у задачах діагоналізації матриць. Основні результати цього напрямку є викладені у роботах [123, 124].

Проблема діагоналізації матриць має глибокі історичні корені і в різних аспектах їй приділяли увагу багато відомих математиків. Класична задача діагоналізації матриць бере свій початок із теореми Гауса яка стверджує, що довільна матриця над полем може бути зведена до діагонального вигляду із нулями та одиницями на головній діагоналі. У 1861 році Г. Сміт показав, що кожна матриця із цілими коефіцієнтами зводиться до діагонального вигляду шляхом елементарних пере-

творень рядків і стовпців, причому ці діагональні елементи володіють такою властивістю: кожен із них є дільником наступного елемента. У подальшому цю діагональну форму назвали нормальною формою Сміта на честь автора цієї теореми. На початку 20-го століття результат Сміта був поширений на такі класи кілець: області Евкліда, області головних ідеалів. Зауважимо, що помітною є тенденція у доведенні цих тверджень – спочатку у комутативному, а згодом і некомутативному випадку. Вагомим у цей період є внесок таких дослідників як Веддербарн [117], Діксон [57], Тейхмюллер [109], ван дер Варден [7], Асано [42], Джекобсон [69]. З історією та результатами даних досліджень можна ознайомитись у роботах [14, 75].

Як наслідок із вказаних результатів, що стосувалась різноманітних за своєю природою кілець, виникло питання потенційної можливості канонічної діагоналізації матриць над кільцями: які матриці і над якими кільцями допускають діагоналізацію із подільністю елементів на головній діагоналі? Все це стало причиною введення Капланським у 1949 році [75] поняття кільця елементарних дільників. Серед тих, хто займався вивченням кілець елементарних дільників слід відмітити таких закордонних авторів, як Капланський [75, 76], Хенрінсен [67, 68], Кон [32], Гілман [61, 62], Хелмер [66], Амітцур [40], Ларсен [80], Левіс [80], Шорес [80, 98, 99, 100], Вігант [99, 100, 120]. Ряд вітчизняних авторів також займався дослідженням даної тематики: Казімірський, Лопатинський, Забавський, Петричкович та їх учні. Також результати, які стосуються кілець елементарних дільників відображені у роботах Львівських математиків [11, 12, 13, 20, 22, 24, 26, 29, 123, 124, 126].

Капланським у роботі [75] було зауважено, що якщо довільні матриці розмірів 1×2 , 2×1 та 2×2 над деяким кільцем володіють канонічною діагональною редукцією, то дане кільце є кільцем елементарних дільників. Тобто, для канонічної діагоналізації усіх матриць над кільцем необхідно, щоб діагоналізувались рядки і стовпці довжини і висоти 2 відповідно. Дані кільця отримали назву кілець Ерміта. Вони є прикладами кілець Безу, тобто таких кілець, де кожен скінченно-породжений ідеал є головним. Відповідно розрізняють праві та ліві кільця Безу, тобто накладаються обмеження на те, що скінченно-породжені праві (ліві) ідеали є головними правими (лівими) ідеалами. Кільце Безу – це кільце, яке є одночасно лівим і правим кільцем Безу. Прикладами кілець Безу є: кільце цілих алгебраїчних чисел, кільце цілих Гаусових чисел, кільце цілих аналітичних функцій однієї комплексної змінної, усі кільця головних ідеалів, регулярні кільця, кільце нормування, кільця вигляду $D + xQ[x]$, $D + xQ[[x]]$, де D є областю головних ідеалів, яка не є полем, а Q – її поле дробів, кільце неперервних дійснозначних функцій над цілком регулярним Хаусдорфним топологічним простором. Також, слід зауважити, що існують відмінності між кільцями Безу, Ерміта, та кільцями елементарних дільників. Так, якщо у комутативному випадку кільця Безу без дільників нуля є кільцями Ерміта, то у випадку присутності дільників нуля існують приклади, які показують, що дані класи кілець не співпадають [62]. Також у вказаній роботі наведено приклад кільця Ерміта, яке не є кільцем елементарних дільників.

Серед комутативних кілець елементарних дільників важливе місце займають адекватні кільця. Вперше властивість адекватності була по-

казана Веддербарном у 1915 році для кільця цілих аналітичних функцій [117]. Проте лише у 1943 році Хелмером [66] було названо адекватними кільця із вказаною властивістю. Принциповість введення цього поняття полягає у тому, що дані кільця є кільцями елементарних дільників, проте на ланцюги їх ідеалів не накладаються жодні обмеження. В означенні адекватних кілець Хелмера присутня умова відсутності дільників нуля, проте є зміст розглядати такі кільця і в більш загальних випадках. Так, Гілман і Хенріксен показали, що комутативне регулярне кільце є адекватним [61]. Крім того, доведено, що напівлокальне кільце Безу є адекватним тоді і лише тоді, коли воно є перетином скінченного числа попарно незалежних кілець нормування без дільників нуля із спільним полем дробів, або є скінченною прямою сумою кілець нормування [80]. Також можна відзначити брак структурних теорем про адекватні кільця в цілому. Основними результатами у цьому напрямку можна вважати:

- теорему Хенріксена [67] про те, що у комутативному регулярному кільці кожен ненульовий простий ідеал міститься у єдиному максимальному ідеалі;
- комутативна область Безу є адекватною тоді і лише тоді, коли усі її скінченні гомоморфні образи є напіврегулярними кільцями [124];
- стабільний ранг адекватного кільця рівний 2, а якщо радикал Джекобсона даного кільця є ненульовим, то це кільце є кільцем стабільного рангу 1 [4].

Ларсен, Левіс і Шорес [80] поставили питання: чи є адекватною комутативна область Безу, кожен ненульовий простий ідеал якої міс-

титься у єдиному максимальному ідеалі? Відповідь на дане питання в загальному випадку є негативною – Брювер, Конрад і Монтгомері [45] навели приклад кільця, яке спростовує дане припущення. Проте Забавський та Білявська [17] підтверджують гіпотезу у випадку комутативних областей Безу із нетеровим спектром.

В останні роки простежується тенденція до узагальнення класичних понять, зокрема поняття адекватності. Забавським [123] було вперше розглянуто адекватні в нулі кільця, як кільця в яких нуль є адекватним елементом (такими є комутативні регулярні кільця та кільця нормування [80]), всюди адекватні кільця [17, 124], узагальнено адекватні кільця [21]. Крім того, у [17] показано, що адекватні в нулі кільця є кільцями з властивістю заміни, узагальнено адекватні кільця без дільників нуля є кільцями елементарних дільників. Також, класичне означення Хелмера отримало продовження у вигляді понять: адекватного елемента [30], коадекватного елемента [21], адекватного ідеалу [29], пари елементів, в якій один із них адекватний іншому [21].

Широке застосування знаходить поняття стабільного рангу, яке вперше було введене Бассом у 1964 році. Це поняття є одним з основних інваріантів К-теорії, а сучасні дослідження з теорії матриць над кільцями лише підкреслюють важливість даного поняття в теорії кілець та модулів. Зокрема стабільний ранг застосовується в задачах діагоналізації матриць [27, 85, 87, 95, 112, 116]. Це поняття дозволило Б. Забавському [22, 28, 122] розв'язати ряд відкритих задач сформульованих М. Хенріксоном у другій половині 20 століття [67, 68]. Хоча ці задачі і були поставлені лише у випадку комутативних кілець, про-

те використовуючи поняття стабільного рангу, вдалося розв'язати ці проблеми для більш загальних класів кілець [22, 23, 28, 122]. Це все стало поштовхом до знаходження стабільного рангу інших типів кілець і вивчення його впливу на розв'язність тих чи інших відкритих задач.

Також важливим є зв'язок стабільного рангу кільця та стабільного рангу кільця матриць на ним. Вассерштейном було встановлено, що стабільний ранг кільця матриць порядку n над кільцем стабільного рангу r рівний $1 + \lfloor \frac{r-1}{n} \rfloor$, де $\lfloor m \rfloor$ – найменше ціле число, що не перевищує числа m [111]. Також у роботі [36] встановлено нижні та верхні оцінки стабільного рангу кільця многочленів від багатьох змінних над полем, та пояснено як пов'язаний стабільний ранг із К-групами вищих порядків.

Глибокий зв'язок кілець елементарних дільників та теорії модулів прослідковується у результаті Капланського [75]: над кільцем елементарних дільників довільний скінченно-зображуваний модуль ізоморфний прямій сумі циклічних модулів. Ларсен, Левіс і Шорес [80] довели і обернене твердження у випадку комутативних кілець. Тобто, комутативні кільця елементарних дільників є кільцями, над якими довільний скінченно-зображуваний модуль є прямою сумою циклічних модулів, що є відповіддю на питання Капланського [75], Кона [32], Хенріксена [67] про описання класу кілець елементарних дільників. Також вказане твердження є частковою відповіддю до проблеми Уорфілда [116]: описати кільця над якими кожен скінченно-зображуваний модуль є прямою сумою циклічних модулів. У некомутативному випадку дана

проблема розв’язана лише частково. Наприклад, розв’язання для класу узагальнено однорядних кілець отримане Дроздом [15]; також слід відмітити результати Кириченка [31], Капланського [75], Лафона [74].

Алгебраїчна K -теорія, а зокрема дослідження K -функторів, започатковані у 1957 році у працях А. Гротендіка, пов’язаних із алгебраїчною геометрією. З теорії кілець зображень відомо, що кільця Вітта квадратичних форм і інші подібні конструкції мають зв’язок із K -функтором. Також серед витоків даної теорії можна назвати роботи Хігмана, Дьедоне, Серра, Ріма, Суона, Басса. Функтор K згодом знайшов широке застосування у топології, зокрема у роботах Атьї, Хірцербруха, Адамса та інших. Алгебраїчна K -теорія є частиною загальної лінійної алгебри, вона розробляє структурну будову проективних модулів та їх груп. Іншою мовою, вона узагальнює теореми існування і єдиності бази лінійного простору над полем, а також загальні теоретико-групові результати про лінійні групи над полями. Розвиток алгебраїчної K -теорії дає можливість прослідкувати вдосконалення формулювань цих теорем при переході до більш загальних алгебраїчних понять, аніж поля. Так, групи Гротендіка та Уайтхеда можна розглядати як ступінь відхилень цих результатів від класичної теорії. Важливим моментом у згаданих дослідженнях є теорія “стабільності”, яка полягає у тому, що загальні закономірності поведінки досліджуваних об’єктів проявляються при переході до границі у розмірностях об’єктів, які розглядаються.

Відомим є те, що скінченно-породжений проективний модуль над комутативним кільцем є скінченно-зображуваним, циклічні модулі над

кільцем Безу є ізоморфні як модулі скінченним гомоморфним обра-
зам даного кільця. Тобто, кожен скінченно-породжений проективний
модуль над комутативним кільцем елементарних дільників R зобра-
жується у вигляді скінченної прямої суми циклічних модулів вигляду
 R/aR , де $a \in R$, причому дане зображення є однозначним, якщо роз-
глядати канонічну форму модуля [75]. Таким чином, вивчення групи
Гротендіка комутативного кільця Безу пов'язане із проблемою Уор-
філда, яка, як було вже зазначено, є еквівалентна описанню кілець
елементарних дільників.

Одним із застосувань теорії стабільності є властивість скорочувано-
сті модулів. Наприклад, якщо кільце має скінченний стабільний ранг,
то кожна база скінченно-породженого вільного модуля над цим кільцем
має однакову кількість елементів [119]. Питання про скорочуваність ви-
никає природним чином у довільній алгебраїчній системі де визначене
поняття прямої суми: чи з того, що $A \oplus C \cong B \oplus C$ у заданій системі
впливає, що $A \cong B$? Однією із перших робіт по даній тематиці мо-
жна назвати роботу 1947 року Джонсона і Тарського [73]. У загальному
випадку відповідь на вказане питання суттєво залежить від класу об'-
єктів, які розглядаються, а також від того, які об'єкти потрібно вміти
скорочувати. Наприклад, із Основної теореми про скінченно-породжені
абелеві групи випливає, що категорія скінченно-породжених абелевих
груп володіє властивістю скорочуваності. Також, якщо A, B є довіль-
ними абелевими групами, а C є скінченно-породженою, то із того, що
 $A \oplus C \cong B \oplus C$ випливає, що $A \cong B$ (це незалежно доведене Коном [48]
і Уолкером [113]). Переходячи від цілих чисел в якості базового кільця

до довільного кільця, і розглядаючи категорію скінченно-породжених проєктивних модулів, ми отримуємо таке запитання: чи з рівності елементів $[A] = [B]$ у групі Гротедіка $K_0(R)$ вказаного кільця R випливає ізоморфізм елементів $A \cong B$? В загальному випадку відома лише стабільна ізоморфність представників $A \oplus R^n \cong B \oplus R^n$, тобто дані модулі стають ізоморфними, якщо додати до кожного із них деякий скінченно-породжений вільний модуль [88]. Проте, переходячи до більш широкого класу твірних, можуть бути отримані кращі результати, що і доведено у даній роботі.

У роботі [98] показано, що напівспадкове кільце Безу є кільцем елементарних дільників тоді і лише тоді, коли кожен скінченний гомоморфний образ цього кільця стосовно головного ідеалу, який породжений не дільником нуля, є кільцем елементарних дільників. Тобто задача визначення того, чи є комутативна область Безу кільцем елементарних дільників еквівалентна дослідженню канонічної діагональної редукції матриць над її скінченними гомоморфними образами. Протягом останніх років різними авторами було показано, що скінченні гомоморфні образи комутативної області Безу є IF-кільцями [55], R -ін'єктивними [93], когерентними [55], псевдо-нетеровими [84], морфічними [124], слабкої глобальної розмірності 0 або нескінченність [25], які співпадають із своїми класичними кільцями дробів [9]. Ці дослідження належать до загальної концепції визначення властивостей кільця, на фактор-кільця або фактор-модулі якого накладено деякі умови скінченності або певні гомологічні обмеження. Детально даному питанню присвячена монографія [70]. В зв'язку із цим цікавим є вивчення го-

моморфних образів некомутативних кілець, що і відображено у цій дисертаційній роботі.

Особливу роль в усіх вказаних дослідженнях відіграють головні ідеали кілець, а також фактор-кільця стосовно головних ідеалів. Так, більшість результатів та понять, які пов'язані із діагоналізацією матриць можуть бути охарактеризовані у цих термінах (Забавський, Чен, Фаччіні, Джейн, Срівастава, Туганбаєв, Ніколсон, Камілло, Санчез Кампос). Все це підкреслює актуальність дослідження структури головних ідеалів кілець та їх взаємодії у різноманітних алгебраїчних конструкціях.

Відома теорема Ерліх [58] стверджує, що ендоморфізм f R -модуля M є одинично-регулярним тоді і лише тоді, коли він є регулярним та $M/im(f) \cong \ker(f)$ як R -модулі. Остання властивість отримала назву дуальної теореми про ізоморфізм, і у випадку лівого регулярного модуля кожен ендоморфізм є домноженням справа на деякий елемент a кільця R , і дуальний аналог теореми про ізоморфізм може бути записаний як $R/Ra \cong l(a)$, де $l(a)$ є лівим аннулятором елемента a . Ця конструкція фрагментарно виникала у різні час у дослідженнях пов'язаних із одинично-регулярними кільцями, проте систематичне вивчення кілець із вказаною властивістю розпочалось із роботи Ніколсона і Санчез Кампоса 2004 року, в якій такі кільця отримали назву лівих та правих морфічних кілець. Ці кільця цікаві тим, що кожен їх елемент є оборотним або є лівим чи правим дільником нуля, вони є правими (лівими) P -ін'єктивними лівими (правими) кільцями Безу. Крім цього, кожен скінченний гомоморфний образ комутативної області Безу є

морфічним кільцем, що може бути використане для побудови різноманітних прикладів та контрприкладів. У вказаній роботі також доведено критерій морфічності кільця: кільце R є лівим (правим) морфічним тоді і лише тоді, коли для кожного елемента $a \in R$ існує такий елемент $b \in R$, що $l(a) = Rb$, $l(b) = R(a)$ ($r(a) = bR$, $r(b) = aR$). Таким чином, множина головних ідеалів лівого (правого) морфічного кільця розпадається на пари головних лівих (правих) ідеалів, які є відповідними аннуляторами одне одного, враховуючи те, що деякий ідеал може бути власним аннулятором. Слід додати, що регулярний елемент кільця є одинично-регулярним тоді і лише тоді, коли він є лівим (або правим) морфічним елементом (тобто для нього виконується дуальний аналог теореми про ізоморфізм). Крім цього, комутативне морфічне кільце є кільцем елементарних дільників тоді і лише тоді, коли кожен скінченно-зображуваний модуль ізоморфний прямій сумі головних ідеалів цього кільця. Все це вплинуло на вибір морфічних кілець та їх властивостей в якості об'єктів дослідження цієї дисертаційної роботи.

У багатьох задачах теорії кілець спектр кільця відіграє вирішальну роль у визначенні його структури. Наприклад, згідно з теоремами Коена [47], якщо кожен простий ідеал комутативного кільця є скінченно-породженим, то всі ідеали цього кільця є скінченно-породженими (тобто це нетерове кільце). Проте, у деяких випадках достатньо інформації лише про максимальні ідеали, щоб робити висновки про дане кільце. Так, Туганбаєвим [37] доведено, що у випадку кільця Безу двобічність його правих максимальних ідеалів, лівих максимальних ідеалів, дистрибутивність ґратки правих ідеалів, та дистрибутивність ґратки

лівих ідеалів є еквівалентними. Лемом та Дугасом у [78] показано, що двобічність правих максимальних ідеалів еквівалентна тому, що із лівої взаємної простоти елементів даного кільця випливає їх права взаємна простота. У 1990 році Забавським і Комарницьким [26] показано, що права дистрибутивна область елементарних дільників є дуо-областю. Таким чином, дослідження пов'язані із спектром кільця тісно пов'язані із діагоналізацією матриць над такими кільцями. Вищевказані результати спонукали до вивчення ситуації в припущенні про можливість існування дільників нуля у правому дистрибутивному кільці стабільного рангу 1.

Наведені вище міркування свідчать, що тематика дисертаційної роботи відноситься до тих розділів математики, які перебувають у стадії розвитку та мають багато теоретичних і практичних застосувань. Це дозволяє зробити висновок про актуальність теми роботи.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тематика дисертації знаходиться в руслі основних досліджень кафедри алгебри і логіки, а також пов'язана з науковими дослідженнями, які проводяться в галузі математики у Львівському національному університеті імені Івана Франка. Матеріал дисертації є складовою частиною досліджень держбюджетної теми (номер державної реєстрації №0113U003052), яка виконувалась на кафедрі алгебри і логіки.

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є вивчення теоретико-структурних властивостей матриць та модулів над кільцями Безу. Зокрема, обчислити стабільний ранг узагальнено адекватних кілець, описати скінченно-зображувані модулі над мор-

фічними кільцями елементарних дільників, а також вивчити будову скінченно-породжених проективних модулів над морфічними кільцями елементарних дільників, тобто встановити умови на групу Гротендіка для випадку, коли вихідне кільце є кільцем елементарних дільників. Також одним із завдань було вивчити властивість скорочення відповідних модулів над досліджуваними класами кілець.

Завданнями дослідження є:

- дослідити дистрибутивні кільця, які є кільцями елементарних дільників та дослідити властивості дуо-областей Безу;
- встановити умови, за яких скінченні гомоморфні образи дуо-областей Безу є регулярними кільцями в сенсі фон Неймана;
- обчислити стабільний ранг узагальнено адекватних кілець, а також визначити чи вони є кільцями елементарних дільників;
- описати взаємодію головних ідеалів та скінченні гомоморфні образи різних класів кілець при алгебраїчних операціях, зокрема, визначити їх зв'язок із канонічними діагональними формами матриць і канонічними формами модулів;
- описати нові класи як комутативних так і некомутативних кілець елементарних дільників.

Об'єкт дослідження: кільця скінченного стабільного рангу, кільця Безу, морфічні кільця.

Предмет дослідження: стабільний ранг та пов'язані з ним властивості елементів і матриць.

Методи дослідження: у дисертаційній роботі є методи, які використовуються у теорії кілець та модулів, алгебраїчній К-теорії та

лінійній алгебрі.

Наукова новизна одержаних результатів.

Усі одержані наукові результати роботи є новими. В дисертації вперше:

- введено поняття слабкої групи Гротендіка морфічного кільця та досліджено властивості її елементів;

- встановлено взаємозв'язок між слабкою групою Гротендіка та підкільцем кільця Вітта над глобалізацією морфічного кільця;

- встановлено рівність слабкої та звичайної групи Гротендіка для регулярних кілець, а також знайдено необхідну умову кільця елементарних дільників у термінах груп Гротендіка;

- введено аналог поняття вільного від квадратів елемента та показано, що такі елементи є адекватними елементами майже стабільного рангу 1 у дуо-областях Безу;

- показано, що елемент дуо-області Безу є майже вільним від квадратів тоді і лише тоді, коли фактор-кільце по головному ідеалу, який він породжує, є регулярним кільцем;

- доведено, що фактор-кільце комутативного кільця Безу за головним ідеалом, який породжений не дільником нуля, є морфічним кільцем, а також наведено умови, коли фактор-кільце довільного комутативного кільця є морфічним;

- встановлено взаємозв'язок між морфічними парами при арифметичних операціях у термінах твірних цих пар;

- показано, що стабільний ранг узагальнено адекватного кільця рівний 2, а також, що такі кільця є кільцями елементарних дільників;

— доведено, що морфічне праве МРІ-кільце є строго регулярним кільцем тоді і лише тоді, коли воно є дуо-кільцем.

Наукове та практичне значення одержаних результатів.

Усі основні результати дисертації мають теоретичний характер і можуть бути використані в подальших дослідженнях, що стосуються дуо-кільць, комутативних кілець Безу та їх К-теоретичних аспектів.

Особистий внесок здобувача. Усі основні наведені у роботі результати отримані здобувачем самостійно.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідались та обговорювалися на:

- 1) Міжнародній науковій конференції “Сучасні проблеми механіки та математики” присвяченій 85-річчю від дня народження академіка НАН України Ярослава Степановича Підстригача (м. Львів, 2013);
- 2) Дев’ятій міжнародній алгебраїчній конференції (м. Львів, 2013);
- 3) Конференції молодих учених “Підстригачівські читання 2014” (м. Львів, 2014);
- 4) Міжнародній алгебраїчній конференції, присвяченій 100-річчю від дня народження Л. А. Калужніна (м. Київ, 2014).

Крім того, результати дисертації неодноразово доповідались на наукових семінарах:

- 1) Алгебраїчному семінарі Інституту математики НАН України (Інститут математики НАН України, м. Київ, 2015);
- 2) Алгебраїчному семінарі Київського національного університету ім. Т. Г. Шевченка (Київський національний університет ім. Т. Г. Шев-

чення, м. Київ, 2014);

3) Алгебраїчному семінарі “Problems of elementary divisor rings” (Львівський національний університет ім. І. Франка, м. Львів, 2013-2015);

4) Львівському міському алгебраїчному семінарі (Львівський національний університет ім. І. Франка, керівник - проф. М. Я. Комарницький, 2015).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані у 9 наукових працях, з них 5 статей у фахових виданнях з переліку затвердженого МОН України (з яких дві праці опубліковані у виданнях, що включені до міжнародних наукометричних баз), 3 у матеріалах міжнародних наукових конференцій, 1 у матеріалах всеукраїнської наукової конференції.

Структура та обсяг роботи. Дисертаційна робота складається зі вступу, п'яти розділів (перший з яких складає попередні відомості), висновків та списку використаних джерел, що містить 126 найменувань, який займає 12 сторінок. Повний обсяг роботи становить 131 сторінку. Для її оформлення використано видавничу систему L^AT_EX.

КОРОТКИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ.

У **вступі** обґрунтована актуальність дисертаційного дослідження автора, визначені мета, актуальність, предмет, об'єкт та методи досліджень; вказано наукову новизну отриманих результатів; наведено форми апробації одержаних результатів.

У **першому розділі**, який має допоміжний характер, зібрані необхідні означення та факти, пов'язані з тематикою досліджень, що ви-

користовуються у дисертації. Перелічені потрібні позначення та термінологія, наведені посилання на першоджерела досліджень роботи, а також сформульовано відомі результати, які є необхідними для подальшого викладу матеріалу.

У **другому розділі** розглядається дистрибутивні кільця Безу, наведено аналог теореми Забавського та Комарницького про праві дистрибутивні області елементарних дільників [26], досліджено і узагальнено властивості скінченних гомоморфних образів дуо-областей Безу, які вивчаються у працях [9, 93, 124, 125], введено аналог поняття вільного від квадратів елемента кільця.

В першому підрозділі наводиться достатня умова кільця елементарних дільників для дуо-кілець стабільного рангу 1, а також доводиться теорема про праві дистрибутивні кільця елементарних дільників стабільного рангу 1.

Лема 2.1.1. *Нехай R є дуо-кільцем Безу стабільного рангу 1. Якщо для довільних елементів $a, b, c \in R$, таких що $aR + bR + cR = R$, існують елементи $p, q \in R$, що*

$$(pa + qb)R + qcR = R,$$

то R є кільцем елементарних дільників.

Виявилось, що умова дуо-кільця для квазі-дуо кілець елементарних дільників стабільного рангу 1 є не лише необхідною, але й достатньою.

Теорема 2.1.2. *Нехай R є квазі-дуо-кільцем Безу стабільного рангу 1. Тоді R є кільцем елементарних дільників тоді і лише тоді, коли R є дуо-кільцем.*

Використовуючи результати з [37] отримано такий наслідок.

Наслідок 2.1.3. *Праве дистрибутивне кільце Безу стабільного рангу 1 є кільцем елементарних дільників тоді і лише тоді, коли воно є дуо-кільцем.*

В другому підрозділі досліджуються скінченні гомоморфні образи дуо-областей Безу та вводиться аналог поняття вільного від квадратів елемента. Встановлено критерій існування таких елементів в термінах регулярності фактор-кілець стосовно ідеалів, які породжуються такими елементами. Показано, що такі елементи є елементами майже стабільного рангу 1.

Теорема 2.2.4. *Якщо R є дуо-областю Безу та $a \in R$ є деяким ненульовим елементом, то*

- (1) класичне кільце дробів $Q(R/aR)$ і саме кільце R/aR співпадають: $Q(R/aR) = R/aR$.*
- (2) R/aR є майже Беровим кільцем.*
- (3) R/aR є P -ін'єктивним кільцем.*
- (4) R/aR є морфічним кільцем, в якому ліві і праві морфічні пари співпадають.*
- (5) R/aR є когерентним кільцем.*
- (6) R/aR є реверсивним кільцем.*
- (7) R/aR є IF -кільцем.*
- (8) слабка глобальна розмірність R/aR рівна нулю або є нескінченною.*

Означення 2.2.1 *Ненульовий елемент a кільця R називається майже вільним від квадратів елементом, якщо із рівності $a = xu$, де $x, u \in R$, випливає, що $xR + uR = R$ і $Rx + Ru = R$.*

Вказані елементи дуо-областей Безу є адекватними:

Твердження 2.2.6. *Майже вільні від квадратів елементи в дуо-області Безу є адекватними.*

Наступний результат дає можливість визначити, чи є деякий елемент майже вільним від квадратів.

Теорема 2.2.7. *Нехай R дуо-область Безу та a деякий її ненульовий елемент. Тоді такі властивості є рівносильними:*

- 1) a є майже вільним від квадратів елементом;
- 2) R/aR є регулярним кільцем;
- 3) $J(R/aR) = 0$;
- 4) $w.gl.dim(R/aR) = 0$;
- 5) $w.gl.dim(R/aR)$ є скінченним числом.

Дану теорему можна розглядати як відповідь на питання про описання елементів, фактор-кільця стосовно головних ідеалів, які ними породжені, є регулярними. Оскільки регулярні дуо-кільця мають стабільний ранг 1, то отримано такий наслідок:

Наслідок 2.2.8. *Майже вільні від квадратів елементи дуо-області Безу є елементами майже стабільного рангу 1.*

У третьому підрозділі показано, що морфічне кільце праві максимальні ідеали якого є лівими чистими є строго регулярним тоді і лише тоді, коли воно є правим (лівим) дуо-кільцем.

Означення 2.3.2 *Кільце R називається правим MPI-кільцем, якщо усі його праві максимальні ідеали є лівими чистими.*

Основним результатом цього підрозділу є наступна теорема:

Теорема 2.3.11. *Для морфічного правого MPI-кільця R такі вла-*

стивості є рівносильні:

- 1) R є правим дуо-кілльцем;
- 2) R є реверсивним кілльцем;
- 3) R є редукованим кілльцем;
- 4) Радикал Джекобсона кілльця R є нульовим;
- 5) R є напівпервинним кілльцем;
- 6) R є регулярним кілльцем;
- 7) R є строго регулярним кілльцем;
- 8) R є одинично-регулярним кілльцем;
- 9) R є лівим дуо-кілльцем;
- 10) R є дуо-кілльцем.

У **третьому розділі** дисертації досліджуються узагальнено адекватні кілльця.

До основних результатів першого підрозділу третього розділу відносимо такі теореми:

Теорема 3.1.1. *Стабільний ранг узагальнено адекватного кілльця R не перевищує 2.*

Використовуючи цей факт показано, що узагальнено адекватні кілльця є кілльцями Ерміта, а також кілльцями елементарних дільників.

Теорема 3.1.3. *Узагальнено адекватне кілльце R є кілльцем елементарних дільників.*

Дана теорема показує, що існують кілльця елементарних дільників, які не є адекватними, але вони володіють певними близькими до адекватних кілець властивостями.

Четвертий розділ дисертації присвячено вивченню головних ідеа-

лів морфічних кілець та кілець Безу.

Перший підрозділ присвячений вивченню арифметичних властивостей головних ідеалів та морфічних пар морфічних кілець. Наступні результати є основними у першому підрозділі четвертого розділу:

Твердження 4.1.2. *Класичне кільце дробів $Q(R)$ морфічного кільця R співпадає з R .*

Теорема 4.1.4. *Нехай R комутативне кільце, а I деякий його ідеал. Тоді кільце R/I є морфічним тоді і лише тоді, коли для кожного елемента $\bar{a} \in R/I$ існує деякий елемент $\bar{b} \in R/I$ такий, що*

$$(I : a) = I + \langle b \rangle, \quad (I : b) = I + \langle a \rangle.$$

Теорема 4.1.7. *Нехай R – комутативне кільце Безу ідемпотентного стабільного рангу 1. Якщо $ab = 0$ тоді існує $d \in R$ таке, що $a^2 + b^2 = d^2$, $\langle d \rangle = \langle a, b \rangle$.*

Твердження 4.1.9. *У комутативному морфічному кільці R виконується властивість: $\langle a \rangle \otimes_R \langle b \rangle \cong \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$ для всіх $a, b \in R$.*

В другому підрозділі обчислюються твірні частки і перетину головних ідеалів комутативного кільця Безу, показано коли скінченний гомоморфний образ кільця Безу є морфічним кільцем.

Лема 4.2.12. *Нехай R є кільцем Безу та $a, b \in R$. Тоді*

$$(a : b) = \left\langle \frac{a}{(a, b)} \right\rangle + \text{Ann}(\langle a \rangle + \langle b \rangle), \quad \langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \left\langle \frac{ab}{(a, b)} \right\rangle.$$

Теорема 4.2.14. *Нехай R – кільце Безу та $a \in R \setminus \{0\}$ не є дільником нуля. Тоді R/aR є морфічним кільцем.*

Твердження 4.2.15. *Нехай R є арифметичним кільцем та $a, b \in$*

R . Тоді $\langle a, b \rangle = \langle a + tb \rangle + \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$, для довільного елемента $t \in R$, причому $\langle a, t \rangle = \langle 1 \rangle$.

П'ятий розділ дисертації присвячено вивченню слабкої групи Гротендіка морфічного кільця.

Перший підрозділ присвячений побудові слабкої групи Гротендіка, та дослідженню питання про однозначність твірних її елементів. Наступні результати є основними у першому підрозділі п'ятого розділу:

Теорема 5.1.4. *Нехай R є морфічним кільцем та $[A], [B] \in K'_0(R)$. Тоді $[A] = [B]$ тоді і лише тоді, коли $A = B$, у випадку канонічних форм A, B , та $A \cong B$ у всіх інших випадках.*

Теорема 5.1.5. *Нехай R є комутативним морфічним кільцем. Адитивна абелева група $K'_0(R)$ перетворюється на комутативне кільце з одиницею, якщо визначити добуток за правилом:*

$$[aR][bR] = [aR \otimes_R bR]$$

для довільних $a, b \in R$, і поширити за лінійністю дану властивість на довільні елементи з $K'_0(R)$.

Твердження 5.1.6. *K'_0 є функтором із категорії морфічних кілець **MorphicRings** у категорію усіх кілець.*

Також наведено критерій того, що слабка група Гротендіка є ізоморфною кільцю цілих чисел.

Теорема 5.1.8. *Нехай R – морфічне кільце. Якщо $K'_0(R) \cong \mathbb{Z}$, то R є полем, і навпаки.*

В другому підрозділі встановлюється зв'язок слабкої групи Гротендіка морфічного кільця із векторами Вітта та наведено спосіб обчислення канонічної форми суми та добутку її елементів.

Означення 5.2.3 *Нехай R є комутативним кільцем Безу. Навівкільце*

$$G(R) = \{aR \mid a \in R\}$$

головних ідеалів цього кільця стосовно додавання та перетину ідеалів назовемо глобалізацією кільця R .

Теорема 5.2.9. *Якщо R є морфічним кільцем то*

$$K'_0(R) \cong W'(G(R)),$$

де кільце $W'(G(R))$ є підкільцем кільця векторів Вітта $W(G(R))$, яке складається із елементів вигляду

$$\frac{1 + (a_1R)t + \dots + (a_nR)t^n}{1 + (b_1R)t + \dots + (b_mR)t^m},$$

причому $a_1R \supseteq \dots \supseteq a_nR$, $b_1R \supseteq \dots \supseteq b_mR$, $n, m \geq 0$.

В третьому підрозділі досліджено базові властивості елементів слабкої групи Гротендіка морфічного кільця, показано, що вона є редукованим кільцем, визначено загальний вигляд її ідемпотентів. Розділ завершується такими теоремами.

Теорема 5.3.17. *Якщо R є регулярним кільцем, то група Гротендіка $K_0(R)$ та слабка група Гротендіка $K'_0(R)$ кільця R співпадають.*

Теорема 5.3.18. *Якщо R є комутативним морфічним кільцем елементарних дільників, то група Гротендіка $K_0(R)$ є підгрупою слабкої групи Гротендіка $K'_0(R)$.*

РОЗДІЛ 1

Попередні відомості та допоміжні факти

У даному розділі подаються означення, відомі теореми, твердження та певні факти, що стосуються теми дисертації, методики досліджень, а також розглядаються домовленості щодо позначень. Зокрема, у дисертації будемо використовувати такі позначення:

$U(R)$ — група оборотних елементів кільця R ;

$J(R)$ — радикал Джекобсона кільця R ;

$Nil(R)$ — нільрадикал кільця R ;

$GL_n(R)$ — повна лінійна група порядку n над кільцем R ;

$M_n(R)$ — множина квадратних матриць порядку n кільця R ;

$st.r.(R)$ — стабільний ранг кільця R ;

$\langle S \rangle$ — ідеал кільця породжений множиною S ;

$\langle a \rangle$, aR — головний ідеал кільця породжений елементом a ;

R^n — множина рядків довжини n з елементами кільця R ;

$a \mid b$ — елемент a є дільником елемента b ;

$\text{spec}(R)$ — множина простих ідеалів кільця R ;

$\text{mspec}(R)$ — множина максимальних ідеалів кільця R .

Нагадаємо необхідні означення, факти та відомі результати, які не-

обхідні для подальшого викладу матеріалу.

Відзначимо, що ми дотримуємось термінології та позначень згідно з роботами [1, 3, 43, 63, 71].

Під кільцем R розуміємо асоціативне кільце із нетривіальною одиницею.

Означення 1.1.1. [68] Кільце R називається кільцем елементарних дільників (за Хенріксоном), якщо довільна матриця A над кільцем R володіє діагональною редукцією, тобто для матриці A розміру $m \times n$ існують такі оборотні матриці $P \in GL_m(R)$, $Q \in GL_n(R)$, що матриця PAQ є діагональною матрицею.

Означення 1.1.2. [75] Скажемо, що елемент a називається повним (тотальним) дільником елемента b , якщо

$$RbR \subseteq aR \cap Ra.$$

Той факт, що елемент a є повним дільником елемента b позначатимемо $a \parallel b$.

Означення 1.1.3. [75] Кільце R називається кільцем елементарних дільників (за Капланським), якщо довільна матриця A розміру $m \times n$ володіє канонічною діагональною редукцією, тобто еквівалентна канонічній діагональній матриці, а саме для матриці A існують такі оборотні матриці $P \in GL_m(R)$, $Q \in GL_n(R)$, що мат-

риця

$$PAQ = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varepsilon_r & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

де $\varepsilon_i \parallel \varepsilon_{i+1}$, $i = 1, \dots, r-1$.

Це означення є класичним означенням кільця елементарних дільників. У даній роботі під кільцем елементарних дільників розумітимемо кільце елементарних дільників за Капланським.

Із канонічною діагональною редукцією пов'язані розклади модулів у прямі суми циклічних модулів.

Означення 1.1.4. [80] Кажуть, що R -модуль M перебуває у канонічній формі, якщо

$$M \cong R/A_1 \oplus R/A_2 \oplus \dots \oplus R/A_n$$

для деяких ідеалів $A_1, A_2, \dots, A_n$ кільця R , причому $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \neq R$.

Згідно з результатами Капланського [75] ідеали $A_1, A_2, \dots, A_n$ та їх кількість у канонічній формі модуля визначені однозначно.

Означення 1.1.5. [80] Будемо казати, що R -модуль M є циклічно-зображуваним, якщо $M \cong R/aR$ для деякого двобічного ідеалу aR .

Означення 1.1.6. [75] Якщо над кільцем R для довільної матриці $(a \ b) \ ((a \ b)^T)$ розмірів 1×2 (2×1) існує така оборотна матриця $P \in GL_2(R)$, що $(a \ b)P = (d \ 0)$, $(P(a \ b)^T = (d \ 0)^T)$ для деякого елемента $d \in R$, то кільце R називається правим (лівим) кільцем Ерміта. Кільце R , яке є одночасно правим і лівим кільцем Ерміта називається кільцем Ерміта.

Означення 1.1.7. [53], [54] Правим (лівим) кільцем Безу називається кільце, в якому довільний скінченно породжений правий (лівий) ідеал є головним. Кільце Безу — це кільце, яке є одночасно правим і лівим кільцем Безу.

Очевидно, що кільця головних ідеалів є кільцями Безу. Проте, кільце цілих аналітичних функцій однієї комплексної змінної та кільце цілих алгебраїчних чисел служать прикладами комутативних областей Безу, які не є кільцями головних ідеалів [96, 118]. Також, гомоморфні образи та скінченні прямі суми кілець Безу, кільце цілих Гаусових чисел, регулярні кільця, кільця нормування, кільця вигляду $D + xQ[x]$, $D + xQ[[x]]$, де D є областю головних ідеалів, яка не є полем, а Q — її поле дробів, кільце неперервних дійснозначних функцій над цілком регулярним Хаусдорфним топологічним простором є прикладами кілець Безу.

Той факт, що праві (ліві) кільця Ерміта є кільцями елементарних дільників безпосередньо впливає із їх означення. Наступна теорема встановлює зв'язок між кільцями Безу та кільцями Ерміта.

Теорема 1.1.1. [75] Праве (ліве) кільце Ерміта є правим (лівим)

кільцем Безу. Тому і кільце Ерміта є кільцем Безу.

Наступні теореми визначають умови за яких кільця Безу є кільцями Ерміта, та кільцями елементарних дільників.

Теорема 1.1.2. [40] Область є правим (лівим) кільцем Ерміта тоді і тільки тоді, коли вона є правим (лівим) кільцем Безу.

Теорема 1.1.3. [87] Якщо кільце R є лівим кільцем Ерміта і правим кільцем Безу, то воно є і правим кільцем Ерміта .

Теорема 1.1.4. [75] Якщо кожні довільні матриці розміру 1×2 , 2×1 , 2×2 над кільцем R володіють канонічною діагональною редукацією, то кільце R є кільцем елементарних дільників.

Теорема 1.1.5. [80] Комутативне кільце R є кільцем елементарних дільників тоді і лише тоді, коли довільна 2×2 матриця над R володіє канонічною діагональною редукацією.

Теорема 1.1.6. [75] Комутативне кільце R є кільцем елементарних дільників тоді і лише тоді, коли воно є кільцем Ерміта і для таких довільних елементів $a, b, c \in R$, що $aR + bR + cR = R$, існують такі елементи $p, q \in R$, для яких

$$(pa + qb)R + qcR = R.$$

Теорема 1.1.7. [80] Комутативне кільце R є кільцем елементарних дільників, тоді і лише тоді, коли довільний скінченно-зображуваний R -модуль розкладається у пряму суму циклічних підмодулів.

Критерієм того, що комутативне кільце є кільцем Ерміта є наступна теорема:

Теорема 1.1.8. [61] *Комутативне кільце R є кільцем Ерміта тоді і лише тоді, коли для довільних елементів $a, b \in R$ існують такі елементи $a_1, b_1, d \in R$, що $a = da_1$, $b = db_1$ і*

$$a_1R + b_1R = R.$$

Для некомутативних кілець Безу характерна властивість симетрії певних умов комутативності її ідеалів.

Означення 1.1.8. [56] *Елемент a кільця R називається правим (лівим) дуо-елементом, якщо*

$$Ra \subseteq aR \quad (aR \subseteq Ra)$$

і дуо-елементом, якщо $Ra = aR$.

Означення 1.1.9. [49] *Лівим (правим) дуо-кільцем називається кільце, в якому довільний елемент кільця є лівим (правим) дуо-елементом. В свою чергу під дуо-кільцем розуміємо кільце, яке є лівим і правим дуо-кільцем одночасно.*

Прикладами дуо-кілець можуть бути: кожне комутативне кільце, довільне тіло, прямий добуток дуо-кілець, кільце верхніх трикутних матриць над полем, довільне строго регулярне кільце.

Означення 1.1.10. [37] *Кільце R називається правим (лівим) дистрибутивним кільцем, якщо гратка правих (лівих) ідеалів є дистрибутивною. Дистрибутивне кільце — це кільце, яке є правим і лівим дистрибутивним кільцем одночасно. Комутативне дистрибутивне кільце називається арифметичним.*

Означення 1.1.11. [37, 78] Кільце R називається *правим (лівим) квазі-дуо-кільцем*, якщо довільний максимальний правий (лівий) ідеал кільця є двобічним. Квазі-дуо-кільце — це кільце, яке є правим і лівим квазі-дуо-кільцем одночасно.

Зауважимо, що квазі-дуо-кільця вивчались в роботах [78, 121], і саме там може бути знайдена інформація про їх основні властивості а також зв'язки із класами регулярних кілець і кілець з властивістю заміни.

А. Туганбаєвим в роботах [37, 38] було доведено наступні теореми.

Теорема 1.1.9. [37] Нехай R — кільце Безу. Тоді такі властивості є еквівалентними:

- 1) R — праве дистрибутивне;
- 2) R — ліве дистрибутивне;
- 3) R — праве квазі-дуо-кільце;
- 4) R — ліве квазі-дуо-кільце.

Теорема 1.1.10. [37] Праве кільце Безу є правим дистрибутивним тоді і лише тоді, коли воно є квазі-дуо кільцем.

Теорема 1.1.11. [38] Праве дистрибутивне кільце R є арифметичним кільцем. Якщо R є правим дуо-кільцем, то справедливе і обернене твердження.

Також відомий зв'язок кілець елементарних дільників та дуо-кілець.

Означення 1.1.12. [16] Якщо для довільного елемента a кільця R існує такий елемент $b \in R$, що

$$RaR = bR = Rb,$$

то скажемо, що кільце R володіє “умовою Дубровіна”.

Кільця з “умовою Дубровіна” вивчались також у праці [18].

М. Дубровін довів таку теорему.

Теорема 1.1.12. [16] *Нехай R — напівлокальне, напівпервинне кільце Безу. Тоді рівносильними є такі твердження:*

- 1) R — кільце елементарних дільників;
- 2) для довільного елемента a з кільця R існує такий елемент $b \in R$, що $RaR = bR = Rb$.

Твердження 1.1.13. [22] *Нехай R — область Безу, в якій виконується “умовою Дубровіна”. Кільце R є кільцем елементарних дільників тоді і лише тоді, коли довільна матриця A , вигляду*

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$$

володіє канонічною діагональною редукцією, де $RaR + RbR + RcR = R$.

Теорема 1.1.14. [26] *Права дистрибутивна область елементарних дільників є дуо-областю.*

Теорема 1.1.15. [26] *У правому дистрибутивному кільці елементарних дільників для кожного елемента $a \in R$ існує елемент $b \in R$, такий що $RaR = bR = Rb$*

Теорема 1.1.16. [26] *Праве дистрибутивне кільце елементарних дільників, де усі дільники нуля містяться в радикалі Джекобсона, є дуо-кільцем.*

Означення 1.1.13. [38, 65] *Елемент a кільця R називають регулярним (в сенсі фон Неймана) елементом, якщо існує елемент $b \in R$,*

такий, що $aba = a$. Якщо вказаний елемент b може бути вибраний оборотним елементом, то a називають *одинично-регулярним* елементом. Якщо для елемента a існує такий елемент b , що $a^2b = a$, то a називають *строго регулярним* елементом. Кільце R називають *регулярним* (*одинично-регулярним*, *строго регулярним*) кільцем, якщо всі його елементи є регулярними (*одинично-регулярними*, *строго регулярними*) елементами.

Для регулярних кілець відома така характеристикація.

Теорема 1.1.17. [65] Для кільця R еквівалентні такі властивості:

- 1) кільце R — регулярне кільце;
- 2) довільний головний правий (лівий) ідеал кільця R породжений ідемпотентом;
- 3) довільний скінченно породжений правий (лівий) ідеал кільця R породжений ідемпотентним елементом.

Твердження 1.1.18. [68] Нехай R — одинично-регулярне кільце. Тоді для довільного елемента $a \in R$ існують ідемпотентні елементи $e_1 = e_1^2$, $e_2 = e_2^2 \in R$ і оборотні елементи $u_1, u_2 \in U(R)$ такі, що

$$a = e_1 u_1 = u_2 e_2.$$

Зауважимо, що строго регулярні кільця є одинично-регулярними, а вони, в свою чергу, є звичайними регулярними кільцями.

Теорема 1.1.19. [24] Строго регулярне кільце є кільцем елементарних дільників.

Важливим підкласом у класі кілець елементарних дільників є адекватні кільця та їх узагальнення.

Означення 1.1.14. [29, 30] Елемент a комутативного кільця Безу R називається адекватним до елемента $b \in R$, якщо елемент a можна зобразити у вигляді

$$a = r \cdot s,$$

де $rR + bR = R$ та $s'R + bR \neq R$, для довільного необоротного дільника s' елемента s . Якщо елемент a є адекватним до довільного елемента b з цього кільця, то такий елемент назвемо адекватним елементом.

Означення 1.1.15. [66] Адекватним кільцем називається комутативне кільце Безу, в якому довільний ненульовий елемент адекватний.

Очевидними прикладами адекватних елементів можуть послужити атоми, факторіальні елементи та оборотні елементи кільця.

Означення 1.1.16. [56] Ненульовий елемент a кільця R називається атомом, якщо він є необоротним і не може бути представлений у вигляді добутку двох необоротних елементів.

Означення 1.1.17. [56] Атомним розкладом елемента називається його зображення у вигляді добутку елементів, всі необоротні дільники якого є атомами.

Означення 1.1.18. [56] Два атомні розклади елемента a кільця R у добуток елементів (не дільників нуля) $a = c_1 \dots c_n$ і $a = b_1 \dots b_m$ називаються ізоморфними, якщо $n = m$ та існує така підстановка

$i \rightarrow i'$ індексів $1, 2, \dots, n$, що

$$R/b_i R \cong R/c_i R$$

як праві R -модулі.

Означення 1.1.19. [56] Ненульовий елемент, який не є дільником нуля, називається факторіальним, якщо він володіє скінченним атомним розкладом, причому довільні два атомні розклади даного елемента ізоморфні.

Теорема 1.1.20. [4] Комутативне адекватне кільце є кільцем елементарних дільників.

Теорема 1.1.21. [61] Комутативне регулярне кільце є адекватним кільцем.

Зауважимо, що у випадку регулярного кільця друга умова з означення адекватного кільця, виконується для нульового елемента, більше того, вона виконується і для кільця нормування. Цей результат спонукав Б. Забавського до введення поняття всюди адекватного кільця [20].

Означення 1.1.20. [20] Комутативне кільце Безу називається правим всюди адекватним, якщо довільний елемент цього кільця є адекватним.

Прикладами комутативних всюди адекватних кілець можуть бути комутативні регулярні кільця та кільця нормування [80].

Означення 1.1.21. Скажемо, що комутативне кільце R називається кільцем нормування, якщо для довільних елементів $a, b \in R$ виконується $a|b$ або $b|a$.

Також в останні десятиліття спостерігається тенденція до розширення поняття адекватності, зберігаючи при цьому належність цих кілець до класу кілець елементарних дільників.

У [12] Гаталевичом вперше розглянуто некомутативні адекватні кільця та їх узагальнення. У цій дисертаційній роботі будуть наведені результати дотичні до досліджень у даній області теорії кілець.

Означення 1.1.22. *Ненульовий елемент a у кільці R називається правим адекватним, якщо для довільного ненульового елемента $b \in R$ знайдуться елементи $r, s \in R$ такі, що справедливим є розклад $a = sr$, та виконуються такі властивості:*

$$1) rR + bR = R,$$

$$2) s'R + bR \neq R, \text{ де } sR \subseteq s'R \neq R.$$

Аналогічним чином, може бути введено означення лівого адекватного елемента. У дуо-кільцях (а, зокрема, і комутативних кільцях) дані поняття співпадають, і ми говоримо про адекватні елементи цих кілець.

Означення 1.1.23. [21] *Скажемо, що комутативне кільце Безу R є узагальнено адекватним кільцем, якщо для довільної пари ненульових елементів $a, b \in R \setminus \{0\}$ хоча б один із них є адекватним до іншого.*

Для випадку кілець Безу без дільників нуля відомі такі результати.

Теорема 1.1.22. [21] *Комутативна область Безу із єдиним максимально неадекватним ідеалом є узагальнено адекватною областю.*

Теорема 1.1.23. [21] *Узагальнено адекватна область є кільцем елементарних дільників.*

Центральне місце у дослідженнях, які розглядаються у даній роботі займає поняття стабільного рангу, яке є одним із найважливіших інваріантів К-теорії. Також ми будемо використовувати означення групи Гротендіка кільця R .

Означення 1.1.24. *Групою Гротендіка $K_0(R)$ кільця R називають вільну абелеву групу породжену класами ізоморфізмів скінченно-породжених проективних R -модулів, із заданим співвідношенням:*

$$[A] + [B] = [A \oplus B]$$

для довільних елементів $[A], [B] \in K_0(R)$.

Означення 1.1.25. *Рядок $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \in R^{n+1}$ називається правим унімодулярним, якщо*

$$a_1R + a_2R + \dots + a_nR + a_{n+1}R = R$$

Означення 1.1.26. [110] *Стабільним рангом n кільця R називається найменше натуральне число n , для якого виконується: для довільного правого унімодулярного рядка $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \in R^{n+1}$ існують такі елементи $b_1, \dots, b_n \in R$, що рядок*

$$(a_1 + a_{n+1}b_1, a_2 + a_{n+1}b_2, \dots, a_n + a_{n+1}b_n) \in R^n$$

є правим унімодулярним.

Той факт, що стабільний ранг кільця R рівний n позначається так: $st.r.(R) = n$.

Зауважимо, що в попередньому означенні фігурують праві ідеали, але поняття стабільного рангу є ліво-право симетричним згідно з результатами Л. Вассерштейна [110] та Р. Уорфілда [116] ці поняття співпадають.

Необхідно зауважити, що якщо $st.r.(R) = n$, то умови аналогічні до тих, що визначають стабільний ранг кільця виконуються і для довільного натурального числа більшого за n . Отже, означення стабільного рангу кільця враховує те, що натуральне число, яке визначає стабільний ранг визначається як найменше з такою властивістю. Якщо ж такого натурального числа n не існує, то кажуть, що стабільний ранг такого кільця дорівнює ∞ . Зауважимо, що такі кільця існують, а саме таким є кільце ендоморфізмів довільного нескінченновимірного лінійного простору.

Важливу роль у дослідженнях, які проводяться у дисертації відіграють кільця стабільного рангу 1 та 2, тому конкретизуємо означення стабільного рангу для $n = 1$ та $n = 2$.

Означення 1.1.27. [43, 110] Кільце R називається кільцем стабільного рангу 1 (в позначеннях $st.r.(R) = 1$), якщо для довільних елементів $a, b \in R$ таких, що $aR + bR = R$, існує такий елемент $t \in R$, що

$$(a + bt)R = R,$$

тобто $a + bt$ - оборотний елемент кільця R .

Означення 1.1.28. [5] Скажемо, що елемент a кільця R є елементом майже стабільного рангу 1, якщо стабільний ранг кільця

R/aR рівний 1.

Прикладами кілець стабільного рангу 1 є:

- 1) артінове кільце [43];
- 2) кільце цілих функцій від однієї комплексної змінної [95];
- 3) кільце Кронекерівських функцій для довільної цілозамкнутої області [97];
- 4) кільце всіх неперервних дійсних (комплексних, кватерніонних) функцій на топологічному просторі X є кільцем стабільного рангу 1 тоді і лише тоді, коли розмірність X не перевищує 0 (відповідно 1,3) [110], [111];
- 5) Р. Рой побудував приклад кільця головних ідеалів стабільного рангу 1, яке не є напівлокальним. В праці [112] наведено приклад Дедекіндового кільця стабільного рангу 1, яке не є кільцем головних ідеалів;
- 6) для довільного поля P , $\text{st.r.}(P[[x_1, \dots, x_n]]) = 1$.

Для регулярних кілець має місце такий результат І. Капланського:

Теорема 1.1.24. [68] *Регулярне кільце є одинично-регулярним кільцем тоді і лише тоді, коли його стабільний ранг дорівнює 1.*

Зауважимо, що комутативне регулярне кільце є одинично-регулярним, а згідно з попередньою теоремою дане кільце є кільцем стабільного рангу 1.

Теорема 1.1.25. [111] *Стабільний ранг кільця R дорівнює 1 тоді і лише тоді, коли стабільний ранг фактор-кільця по радикалу Джекобсона $R/J(R)$ дорівнює 1.*

Звідси, як наслідок, отримуємо наступну теорему:

Теорема 1.1.26. [111] *Напівлокальне кільце є кільцем стабільного рангу 1.*

Серед властивостей кілець стабільного рангу 1 виділимо наступні властивості:

Теорема 1.1.27. [111] *Якщо стабільний ранг кільця R дорівнює 1, то воно є прямо скінченним, тобто кільцем, в якому з умови $ab = 1$ випливає, що $ba = 1$, де $a, b \in R$.*

Теорема 1.1.28. [111] *Довільне фактор-кільце кільця стабільного рангу 1 є кільцем стабільного рангу 1.*

Теорема 1.1.29. [111] *Нехай стабільний ранг кільця дорівнює 1. Тоді кільце ендоморфізмів правого (лівого) проективного R -модуля є кільцем стабільного рангу 1.*

Теорема 1.1.30. [111] *Якщо стабільний ранг кільця R дорівнює 1 і елемент e — довільний ідемпотент кільця R , то кільце eRe також є кільцем стабільного рангу 1.*

Теорема 1.1.31. [59] *Нехай R — комутативна область головних ідеалів стабільного рангу 1, тоді R є евклідовим кільцем.*

Означення 1.1.29. [5, 86] *Дуо-кільце R є кільцем майже стабільного рангу 1, якщо для довільного ненульового елемента $a \in R$ стабільний ранг фактор-кільця R/aR дорівнює 1.*

Розглянемо приклади елементів майже стабільного рангу 1:

Приклад 1.1.1. Нехай R — комутативна область стабільного рангу 1. Тоді очевидно, що довільний елемент цього кільця є елементом майже стабільного рангу 1. Більше того, якщо R — комутативна область головних ідеалів, яка не є кільцем стабільного рангу 1, (наприклад кільце цілих чисел), то будь-який ненульовий елемент кільця R є елементом майже стабільного рангу 1, хоча саме кільце R не є кільцем стабільного рангу 1. Справді, для довільного елемента $a \in R^*$, $a \notin U(R)$, в силу факторіальності R , фактор-кільце R/aR є скінченним кільцем, а отже кільцем стабільного рангу 1.

Означення 1.1.30. [111] Кільце R називається кільцем стабільного рангу 2 (в позначеннях $st.r.(R) = 2$), якщо для довільних таких елементів $a, b, c \in R$, що $aR + bR + cR = R$, виконується співвідношення

$$(a + cx)R + (b + cy)R = R$$

для деяких елементів $x, y \in R$.

Існує багато прикладів кільця стабільного рангу 2, зокрема:

- 1) довільне комутативне кільце, простір максимальних ідеалів якого є нетеровим розмірності 1, є кільцем стабільного рангу 2 [43];
- 2) довільна скінченнопороджена алгебра R над довільним скінченним полем, $\dim(R) = 2$, є кільцем стабільного рангу 2 [43];
- 3) кільце дійсних нетерових функцій на інтервалі, або більш загально, на довільному топологічному просторі розмірності 1 є кільцем стабільного рангу 2 [111].

Зауважимо, що кільце цілих чисел є кільцем стабільного рангу 2,

але не є кільцем стабільного рангу 1.

Теорема 1.1.32. [43] Якщо R — комутативне нетерове кільце скінченної розмірності Круля $\dim(R)$, то

$$st.r.(R) = 1 + \dim R.$$

Як наслідок отримуємо наступну теорему:

Теорема 1.1.33. [43] Якщо R — комутативне кільце головних ідеалів, то $st.r.(R) = 2$.

Теорема 1.1.34. [87] Якщо R — праве або ліве кільце Ерміта, то $st.r.(R) = 2$.

У випадку комутативних кілець має місце:

Теорема 1.1.35. [122] Комутативне кільце Безу є кільцем Ерміта тоді і лише тоді, коли його стабільний ранг дорівнює 2.

Теорема 1.1.36. [75] Для кожної матриці A над правим (лівим) кільцем Ерміта R існує така унімодулярна матриця U , що матриця AU (UA) є нижньою (верхньою) трикутною матрицею.

Теорема 1.1.37. [123] Якщо над кільцем Безу R стабільного рангу n рядок з елементів $a_1, \dots, a_m \in R$ є таким, що $a_1R + \dots + a_mR = R$, де $m \geq n + 1$, то він може бути доповнений до оборотної матриці, яка породжується елементарними матрицями.

Теорема 1.1.38. [123] Для довільних двох елементів a, b у правому кільці Безу R стабільного рангу 1 існують такі елементи $x, d \in R$, що $a + bx = d$ та $aR + bR = dR$.

Теорема 1.1.39. [123] *Праве (ліве) кільце Безу стабільного рангу 1 є правим (лівим) кільцем Ерміта.*

Теорема 1.1.40. [123] *Над кільцем Ерміта довільний правий (лівий) унімодулярний рядок (стовпчик) доповнюється до унімодулярної матриці.*

Починаючи із 1970-х років активно досліджуються різноманітні класи кілець пов'язані із ідемпотентами та властивостями розкладу модулів. Такими є кільця з властивістю заміни, чисті кільця, майже Берові кільця, P -ін'єктивні кільця, когерентні кільця, морфічні кільця.

Означення 1.1.31. [91] *Кільце R називається кільцем з властивістю заміни, якщо для довільного елемента $a \in R$ існує такий ідемпотент $e \in aR$, що $(1 - e) \in (1 - a)R$.*

Останнє означення сформульоване використовуючи праві ідеали, проте воно може бути еквівалентно записане і через ліві ідеали, тобто є ліво-право симетричним [91].

Означення 1.1.32. [91] *Кільце R називають чистим, якщо довільний елемент $x \in R$ можна записати у вигляді суми деякого ідемпотента та оборотного елемента, тобто $x = u + e$, де $e = e^2$ і $u \in U(R)$.*

Означення 1.1.33. [46] *Кільце R називають кільцем ідемпотентного стабільного рангу 1, якщо для довільних таких елементів $a, b \in R$, що $aR + bR = R$, існує такий ідемпотент $e \in R$, що*

$(a + be)R = R$, тобто елемент $a + be$ — оборотний елемент кільця R .

Звернемо увагу на те, що комутативне кільце з властивістю заміни співпадає з кільцем ідемпотентного стабільного рангу 1. Також зауважимо, що у випадку комутативності кільця, чисте кільце є кільцем з властивістю заміни, а в некомутативному клас чистих кілець міститься в класі кілець з властивістю заміни.

Теорема 1.1.41. [46] *Наступні властивості комутативного кільця R є еквівалентними:*

- 1) R — кільце ідемпотентного стабільного рангу 1;
- 2) R — чисте кільце;
- 3) R — кільце з властивістю заміни.

Дана теорема залишається справедливою і в слабшому припущенні, а саме у випадку кільця в якому ідемпотенти є центральними.

Прикладами чистих кілець є: одинично-регулярні кільця, кільця матриць над чистими кільцями, локальні області, напівдосконалі кільця, прямі добутки та гомоморфні образи чистих кілець, комутативні нуль-вимірні кільця.

Відомий такий зв'язок між адекватними елементами та чистими кільцями:

Теорема 1.1.42. [6] *Нехай R — комутативне кільце Безу і a — адекватний елемент цього кільця. Тоді:*

- 1) R/aR — кільце ідемпотентного стабільного рангу 1;
- 2) R/aR — чисте кільце;

3) R/aR — кільце з властивістю заміни;

4) R/aR — кільце, де кожен простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі.

Означення 1.1.34. [93] Скажемо, що ідемпотенти піднімаються за модулем ідеалу I кільця R , якщо в кожного ідемпотента з кільця R/I знайдеться прообраз при канонічному гомоморфізмі, який є ідемпотентом кільця R .

Означення 1.1.35. [93] Кільце R називається напіврегулярним кільцем, якщо його фактор-кільце стосовно радикалу Джекобсона є регулярним кільцем, та ідемпотенти піднімаються стосовно радикалу Джекобсона.

Відомо, що напіврегулярні кільця є кільцями з властивістю заміни, тому, у комутативному випадку, є кільцями стабільного рангу 1.

Наступний результат дає змогу цілком описати адекватні елементи комутативної області Безу в термінах напіврегулярності її скінченних гомоморфних образів.

Теорема 1.1.43. [124] Нехай R — комутативне кільце Безу і $a \in R$. Тоді такі властивості рівносильні:

1) a — адекватний елемент;

2) R/aR — напіврегулярне кільце;

Зауважимо, що не всі чисті кільця є кільцями Безу. Таким є наприклад тривіальне розширення $T(k[[x]], k[[x]]/\langle x \rangle)$, де k є полем.

В якості певного компромісу між регулярністю та когерентністю виступають морфічні кільця. Це кільця, які характеризуються тим, що

для них є справедливим аналог дуальної теореми про ізоморфізм.

Означення 1.1.36. [92] Кільце R задовольняє дуальний аналог теореми про ізоморфізм, якщо для довільного ендоморфізму $\phi \in \text{End}(R)$ справедливим є ізоморфізм R -модулів $R/\text{im}(\phi) \cong \ker \phi$.

Означення 1.1.37. [92] Кільце R називається лівим (правим) морфічним, якщо для кожного елементу $a \in R$ виконується ізоморфізм: $R/Ra \cong l(a)$ ($R/aR \cong l(x)$) як лівих (правих) R -модулів. Кільце R називають морфічним, якщо воно є лівим і правим морфічним одночасно.

Теорема, наведена нижче, є критерієм морфічності на рівні елементів.

Теорема 1.1.44. [92] Наступні властивості є рівносильними для кільця R :

- 1) R є лівим морфічним кільцем;
- 2) Для довільного елемента $a \in R$ знайдеться елемент $b \in R$, такий, що $l(a) = Rb$, $l(b) = Ra$;
- 3) Для довільного елемента $a \in R$ знайдеться елемент $b \in R$, такий що $l(a) = Rb$, $l(b) \cong Ra$.

Поряд із морфічними кільцями варто згадати і інші, дотичні до них, класи кілець.

Означення 1.1.38. [125] Кільце R називають правим (лівим) майже Беровим кільцем, якщо праві (ліві) аннулятори елементів кільця R є головними ідеалами.

Означення 1.1.39. [93] Кажуть, що кільце R є правим (лівим) P -ін'єктивним кільцем, якщо кожен гомоморфізм з довільного головного ідеалу aR (або Ra у “лівому” випадку) в кільце R може бути продовжений до ендоморфізму кільця R , а саме шляхом домноження на деякий фіксований елемент кільця R .

Теорема 1.1.45. [93] Наступні властивості є рівносильними для кільця R :

- 1) R є правим P -ін'єктивним кільцем;
- 2) Для довільного елемента $a \in R$: $lr(a) = Ra$;
- 3) Для довільних елементів $a, b \in R$ виконується властивість:

$$r(a) \subseteq r(b) \Rightarrow Rb \subseteq Ra;$$

- 4) Для довільних елементів $a, b \in R$: $l(bR \cap r(a)) = l(b) + Ra$.

Також в [92] доведено, що ліве морфічне кільце є правим P -ін'єктивним. Окрім цього, зауважимо, що пару елементів (a, b) з кільця R у попередній Теоремі 1.1.44 називають лівою морфічною парою, і позначають як $a \sim_l b$. Аналогічно вводиться права морфічна пара $a \sim_r b$.

Прикладами морфічних кілець є одинично-регулярні кільця, скінченні гомоморфні образи областей Безу [124]. Зокрема, скінченний гомоморфний образ комутативної області Безу $\hat{H} = \mathbb{Z} + x\mathbb{Q}[[x]]$ стосовно ідеалу $\langle x \rangle$ є ізоморфним тривіальному розширенню $R = T(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, яке є морфічним. Зауважимо, що існують приклади лівих морфічних кілець, які не є правими морфічними [92].

Крім того, вищезгадане кільце $R = T(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ є морфічним, але не

є напіврегулярним, оскільки $R/J(R) \cong \mathbb{Z}$, а цілі числа не утворюють регулярне кільце.

Означення 1.1.40. [64] Кільце R називається правим (лівим) когерентним, якщо правий (лівий) аннулятор довільного елемента з кільця R є скінченно-породженим правим (лівим) ідеалом, та перетин двох довільних скінченно-породжених правих (лівих) ідеалів теж є скінченно-породженим правим (лівим) ідеалом.

У випадку правого (лівого) кільця Безу вказана умова рівносильна тому, що перетин довільних двох правих (лівих) головних ідеалів є правим (лівим) головним ідеалом та тому, що дане кільце є правим (лівим) майже Беровим кільцем.

Означення 1.1.41. Кільце R називають реверсивним, якщо для довільних елементів $a, b \in R$ з рівності $ab = 0$ випливає, що $ba = 0$.

Означення 1.1.42. Кільце, в якому 0 є єдиним нільпотентним елементом, називають редукованим.

Означення 1.1.43. [10] Кільце R називають правим (лівим) IF-кільцем, якщо кожен ін'єктивний правий (лівий) модуль над кільцем R є плоским.

Означення 1.1.44. Число

$$w.gl.dim(R) = \sup\{w.dim(A) | A \in mod - R\}$$

називають слабкою глобальною розмірністю кільця R , якщо $w.dim(A)$ є найменшим можливим невід'ємним цілим числом n , таким, що

існує точна послідовність

$$0 \rightarrow B_n \rightarrow B_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow B_0 \rightarrow A \rightarrow 0,$$

де всі B_i є плоскими R -модулями.

Означення 1.1.45. Правий ідеал I кільця R називається лівим чистим ідеалом, якщо для довільного елемента $a \in I$ знайдеться такий елемент $b \in I$, що $a = ba$.

Використовуючи це означення, ряд авторів [81, 82, 83, 89] вводять в розгляд різноманітні кільця, де лише ліві (або праві) максимальні чи головні ідеали є правими (лівими) чистими. За додаткових припущень, такі кільця стають регулярними, строго регулярними, чи редукованими, чим і пояснюється інтерес до їх вивчення.

Означення 1.1.46. Кільце R називається правим MPI-кільцем, якщо усі його праві максимальні ідеали є лівими чистими.

Із поняттям аннулятора пов'язана частка ідеалів у кільці. Наведемо твердження, яке неодноразово буде використовуватись у доведеннях.

Твердження 1.1.46. Нехай R комутативне кільце. Тоді частка $(A : B) = \{x \in R \mid xB \subset A\}$ ідеалів A, B кільця R володіє такими властивостями:

1. $(A : B)B \subset A \subset (A : B)$;
2. $((A : B) : C) = (A : BC) = ((A : C) : B)$;
3. $(\bigcap_i A_i : B) = \bigcap_i (A_i : B)$;
4. $(A : \sum_i B_i) = \bigcap_i (A : B_i)$;

$$5. \operatorname{Ann}(A) = (0 : A).$$

Також нам знадобиться таке твердження:

Твердження 1.1.47. *Нехай M є R -модулем та I, J є деякими ідеалами комутативного кільця R . Тоді*

$$1. M \otimes_R R/I \cong M/IM;$$

$$2. R/I \otimes_R R/J \cong R/(I + J).$$

РОЗДІЛ 2

Некомутативні кільця Безу скінченного стабільного рангу

Одним із найважливіших інваріантів теорії кілець є їх стабільний ранг. Дане поняття прийшло в теорію кілець з К-теорії і виявилось корисним при розв'язанні задач про діагональну редукцію матриць. Особливо корисним дане поняття стає у випадку некомутативних кілець, що і буде предметом дослідження у цьому розділі. Буде розглянуто квазі-дуо-кільця Безу стабільного рангу 1, дуо-області Безу, їх скінченні гомоморфні образи. У розділі вводиться поняття майже вільного від квадратів елемента. Показано, що кільце R/aR є регулярним тоді і лише тоді, коли a є майже вільним від квадратів елементом.

В цьому розділі під кільцем R завжди розуміємо асоціативне кільце з одиницею $1 \neq 0$.

2.1. Праві квазі-дуо-кільця Безу стабільного рангу 1.

Безпосередньо, перед доведенням основного результату доведемо таку лему.

Лема 2.1.1. *Нехай R є дуо-кільцем Безу стабільного рангу 1. Якщо для довільних елементів $a, b, c \in R$, таких, що $aR + bR + cR = R$,*

існують елементи $p, q \in R$ для яких виконується рівність

$$(pa + qb)R + qcR = R,$$

то R є кільцем елементарних дільників.

Доведення. Згідно з Теоремою 1.1.39 дуо-кільце Безу стабільного рангу 1 є кільцем Ерміта, а тому, відповідно до Теорема 1.1.36 достатньо довести наше твердження для матриць вигляду

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix},$$

де $aR + bR + cR = R$. За умовою теореми існують такі елементи $p, q \in R$, що

$$(pa + qb)u + qcv = 1,$$

для деяких $u, v \in R$. Оскільки за Теоремою 1.1.40 кожна матриця другого порядку над кільцем Ерміта доповнюється до унімодулярної, то можемо стверджувати, що знайдуться такі унімодулярні матриці

$$P = \begin{pmatrix} p & q \\ * & * \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} u & * \\ v & * \end{pmatrix},$$

що елемент c_{11} матриці $C = PAQ$ є рівний 1, а тому матриця C (та матриця A) володіє канонічною діагональною редукцією. Отже, R є кільцем елементарних дільників. Лему доведено. $\square$

Теорема 2.1.2. *Нехай R є квазі-дуо-кільцем Безу стабільного рангу 1. Тоді R є кільцем елементарних дільників тоді і лише тоді, коли R є дуо-кільцем.*

Доведення. Доведення необхідності впливає із результатів у [37].

Для доведення достатності розглянемо трійку елементів $a, b, c \in R$ із властивістю $aR + bR + cR = R$. За Теоремою 1.1.38 можемо стверджувати, що існують такі елементи $z, h \in R$, що $b + cz = h$ та $bR + cR = hR$. Тому, з того, що $aR + hR = R$ випливає, що існує елемент $q \in R$, такий, що $a + qh = g \in U(R)$, оскільки $st.r.(R) = 1$. Після підстановки ми отримаємо

$$ag^{-1} + q(b + cz)g^{-1} = 1,$$

і, перегруповуючи доданки, маємо рівність

$$(a + qb)g^{-1} + (qc)(zg^{-1}) = 1,$$

тобто

$$(a + qb)R + qcR = R.$$

За Лемою 2.1.1 R є кільцем елементарних дільників. Теорему доведено. $\square$

Згідно з [37] отримуємо наслідок:

Наслідок 2.1.3. *Праве дистрибутивне кільце Безу стабільного рангу 1 є кільцем елементарних дільників тоді і лише тоді, коли воно є дуо-кільцем.*

Приклад, наведений нижче, відповідає на питання про існування таких кілець.

Приклад 2.1.1. *Кожне кільце верхніх трикутних матриць над кільцем Безу стабільного рангу 1 задовольняє умови вказаної теореми. Те саме можна сказати про кільце $R[[x]]$ формальних степеневих рядів над строго регулярним кільцем R . Кільце формальних*

*степеневих рядів $R[[x]]$ над тілом (чи прямою сумою тіл) R є дуо-
кільцем елементарних дільників стабільного рангу 1.*

2.2. Скінченні гомоморфні образи дуо-областей Безу та майже вільні від квадратів елементи

Важливість умови дуо-кільця була продемонстрована у Теоремі 2.1.2 для некомутативних кілець Безу. Тепер нашим завданням є визначення того, які властивості скінченних гомоморфних образів кільця Безу переносяться із комутативних кілець на клас дуо-кілець. Нижче будуть доведені дуо-аналоги результатів з [9, 93, 124, 125].

Теорема 2.2.4. *Якщо R є дуо-областю Безу та $a \in R$ є деяким ненульовим елементом, то*

1) *класичним кільцем дробів $Q(R/aR)$ кільця R/aR співпадає із цим кільцем: $Q(R/aR) = R/aR$.*

2) *R/aR є майже Беровим кільцем.*

3) *R/aR є P -ін'єктивним кільцем.*

4) *R/aR є морфічним кільцем, в якому ліві і праві морфічні пари співпадають.*

5) *R/aR є когерентним кільцем.*

6) *R/aR є реверсивним кільцем.*

7) *R/aR є IF -кільцем.*

8) *слабка глобальна розмірність R/aR рівна нулю або є нескінченною.*

Доведення. Властивість 1. Для довільного елемента $b \in R$ єдиними можливими ситуаціями є: або $aR + bR = R$ або $aR + bR = dR \neq R$.

У першому випадку знайдеться пара елементів $u, v \in R$, таких що $au + bv = 1$, і $\bar{b}\bar{v} = \bar{1}$, перейшовши до образу $\bar{R} = R/aR$. Тому $\bar{b}$ є

оборотним справа в $\overline{R}$. Оскільки R є дуо-областю, то

$$Ra + Rb = aR + bR = R$$

і аналогічно ми отримуємо, що $\bar{b}$ є лівим оборотним також. Отже, $\bar{b}$ буде оборотним елементом.

У випадку $aR + bR = dR$, існують такі елементи $x, y \in R$, що

$$a = dx, \quad b = dy, \quad xR + yR = R.$$

Використовуючи те, що R є дуо-областю, маємо $bx = d y x = z d x = z a \in aR$ для деякого $z \in R$. Звідси випливає, що образ $\bar{b}$ в $\overline{R}$ буде лівим дільником нуля. Аналогічно доводиться, що він буде правим дільником нуля також.

У підсумку маємо: кожен елемент кільця $\overline{R} = R/aR$ є або оборотним елементом, або є дільником нуля, а тому множина елементів, які не є дільниками нуля складається лише з одиниць кільця R/aR . Отже, класичне кільце дробів співпадатиме із R/aR .

Властивість 2. Тепер покажемо, що $\overline{R}$ є правим майже Беровим кільцем, тобто, необхідно довести, що $r(\bar{b})$ є правим головним ідеалом, для довільного $\bar{b} \in \overline{R}$. Нехай $\bar{t} \in r(\bar{b})$, звідки $\bar{b}\bar{t} = \bar{0}$, або що те саме $bt = as$, для деякого $s \in R$. Припустимо, що $bR + aR = hR$. Якщо $hR = R$, то $\bar{b}$ є оборотним за властивістю 1, яка доведена вище, і його правий аннулятор є нульовим, тому це правий головний ідеал. Припустимо, що $hR \neq R$. Оскільки R є дуо-областю Безу, то можемо вважати, що

$$a = hx, \quad b = hy, \quad xR + yR = R,$$

для деяких елементів $x, y \in R$. Тоді, з рівності $bt = as$ випливає, що $hyt = hxt$, і після скорочення маємо $yt = xs$. Враховуючи те, що $x, y \in$

взаємно простими елементами ми отримуємо, що x повинен бути дільником t , а тому $t \in xR$ і $r(\bar{b}) \subseteq \bar{x}\bar{R}$. Крім того, для довільного елемента $xr \in xR$ виконується співвідношення:

$$bxr = huxr = y_1 hxr = y_1 ar = ay_2 r \in aR,$$

для деяких елементів $y_1, y_2 \in R$. З останньої рівності робимо висновок, що $\bar{x}\bar{r} \in r(\bar{b})$ та $\bar{x}\bar{R} \subseteq r(\bar{b})$. На сам кінець, ми отримали, що $\bar{x}\bar{R} = r(\bar{b})$, а тому R/aR є правим майже Беровим кільцем. Схожі міркування доводять, що R/aR буде також і лівим майже Беровим кільцем.

Властивість 3. Розглянемо в кільці $\bar{R}$ включення $r(\bar{c}) \subseteq r(\bar{b})$. Припустивши, що $aR + cR = dR$, отримаємо: $a = dx$, $c = dy$. Тоді $cx = dux = dxy_1 = ay_1$, для деякого $y_1 \in R$, за умовою дуо-області. Звідси, $\bar{c}\bar{x} = \bar{0}$ та $\bar{x} \in r(\bar{c}) \subseteq r(\bar{b})$, а тому $\bar{b}\bar{x} = \bar{0}$. Остання рівність свідчить про те, що існує деякий елемент $k \in R$, такий, що $bx = ak$. Оскільки R є дуо-областю, то існує $h \in R$, такий, що $bx = ak = ha = hdx$. Скоротивши, отримуємо, що $b = hd \in Rd$. Тоді $\bar{b} \in \bar{Rd} = \bar{Rc}$ та $\bar{Rb} \subseteq \bar{Rc}$. Отже, R/aR є правим Р-ін'єктивним за Теоремою 1.1.45. Випадок лівого Р-ін'єктивного кільця є аналогічним.

Властивість 4. Припустимо, що $\bar{x} \in \bar{R} = R/aR$. Тоді, згідно з властивостями 2 та 3 ми можемо стверджувати, що існують елементи $y, z \in R$, такі що

$$l(\bar{x}) = \bar{R}\bar{y} \Rightarrow \bar{x}\bar{R} = r l(\bar{x}) = r(\bar{y})r(\bar{x}) = \bar{x}\bar{R} \Rightarrow \bar{R}\bar{x} = l r(\bar{x}) = r(\bar{z}).$$

Оскільки $\bar{R}$ також є дуо-кільцем, то $\bar{x}\bar{R} = \bar{R}\bar{x}$ і тому $r(\bar{y}) = l(\bar{z})$.

Розглянемо два гомоморфізми $f, g : \bar{R} \rightarrow \bar{R}$ визначені за правилами

$f(\bar{r}) = \bar{r}\bar{x}, g(\bar{r}) = \bar{x}\bar{r}$. Згідно з першою теоремою про ізоморфізм:

$$\bar{R}/Ker(f) = \bar{R}/l(\bar{x}) \cong \bar{R}\bar{x}, \bar{R}/Ker(g) = \bar{R}/r(\bar{x}) \cong \bar{x}\bar{R}.$$

Але $\bar{x}\bar{R} = \bar{R}\bar{x}$, а тому $\bar{R}/l(\bar{x}) \cong \bar{R}/r(\bar{x})$ або $\bar{R}/\bar{z}\bar{R} \cong \bar{R}/\bar{R}\bar{y} = \bar{R}/\bar{y}\bar{R}$.

Розглянемо комутативну діаграму із точними рядками:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \bar{y}\bar{R} & \longrightarrow & \bar{R} & \longrightarrow & \bar{R}/\bar{y}\bar{R} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow j & & \downarrow = & & \downarrow \cong \\ 0 & \longrightarrow & \bar{z}\bar{R} & \longrightarrow & \bar{R} & \longrightarrow & \bar{R}/\bar{z}\bar{R} \longrightarrow 0 \end{array}$$

причому єдиним чином визначений ізоморфізм $j : \bar{y}\bar{R} \rightarrow \bar{z}\bar{R}$ існує згідно з [94]. Отже, маємо:

$$\bar{x}\bar{R} = r(\bar{y}), r(\bar{x}) = \bar{z}\bar{R} \cong \bar{y}\bar{R}, \bar{R}\bar{x} = l(\bar{z}), l(\bar{x}) = \bar{R}\bar{y} = \bar{y}\bar{R} \cong \bar{z}\bar{R} = \bar{R}\bar{z}.$$

Таким чином, за Теоремою 1.1.44 R/aR є лівим і правим морфічним кільцем. Для доведення рівності лівої і правої морфічних пар нам необхідна наступна лема.

Лема 2.2.5. *Із ізоморфності правих головних ідеалів у правому P -ін'єктивному кільці випливає їх рівність.*

Доведення. Нехай $f : xR \rightarrow yR$ є вказаним ізоморфізмом. Вкладаючи yR в R розширимо f до $F : R \rightarrow R$ згідно з правою P -ін'єктивністю кільця R . Поклавши $F(1) = u$, зауважимо, що $F(xR) = xuR = f(xR) = yR$. Тому, $xuR = yR$, а звідси $yR \subseteq xR$. Аналогічно отримуємо протилежне включення. Отже, $xR = yR$. Лему доведено. $\square$

Таким чином, із доведеної леми маємо, що з $\bar{y}\bar{R} \cong \bar{z}\bar{R}$ випливає, що $\bar{y}\bar{R} = \bar{z}\bar{R}$, а тому. ліва і права морфічні пари співпадають.

Властивість 5. Враховуючи те, що кільце R/aR є майже Беровим кільцем, згідно з доведеним вище, залишається довести, що перетин

двох головних правих (лівих) ідеалів цього кільця теж є правим (лівим) головним ідеалом. Нехай ми маємо ідеали $\overline{bR}$, $\overline{cR}$. Використовуючи властивість 4, можемо вважати, що існують такі $\overline{x}, \overline{y} \in \overline{R}$, що $\overline{bR} = r(\overline{x})$, $\overline{cR} = r(\overline{y})$. Тоді

$$\overline{rR} \cap \overline{cR} = r(\overline{x}) \cap r(\overline{y}) = r(\overline{xR} + \overline{yR}) = r(\overline{zR}) = \overline{dR},$$

для деяких елементів $\overline{z}$, $\overline{d} \in \overline{R}$. Із цього ми робимо висновок, що R/aR є правим (і, аналогічно, лівим) когерентним кільцем.

Властивість 6. Із властивості 4 відомо, що праві та ліві морфічні пари в $\overline{R}$ співпадають, а тому для довільного $\overline{b} \in \overline{R}$ існує такий елемент $\overline{c} \in \overline{R}$, що $l(\overline{b}) = \overline{Rc} = \overline{cR} = r(\overline{b})$. Остання рівність свідчить про реверсивність кільця R/aR .

Властивості 7 і 8. У [55] доведено, що кільце Безу R є правим та лівим IF-кільцем тоді і лише тоді, коли воно є когерентним та Р-ін'єктивним. Згідно з [10, 108] відомо, що кожне IF-кільце має слабку глобальну розмірність рівну нулю або нескінченності. Таким чином, із властивостей 3 та 5 випливає шукане твердження.

Теорему доведено. $\square$

Введемо аналог вільного від квадратів елемента в асоціативному кільці R .

Означення 2.2.1. *Ненульовий елемент a кільця R називається майже вільним від квадратів елементом, якщо з рівності $a = xu$, де $x, u \in R$, випливає, що $xR + uR = R$ і $Rx + Ru = R$.*

Твердження 2.2.6. *Майже вільні від квадратів елементи в дуобласті Безу є адекватними.*

Доведення. Нехай $a, b \in R$ є довільними елементами, причому a є вільним від квадратів елементом. Тоді

$$aR + bR = dR, \quad a = da_0, \quad b = db_0, \quad a_0R + b_0R = R$$

для деяких елементів $d, a_0, b_0 \in R$. Оскільки a є майже вільним від квадратів елементом, то $a_0R + dR = R$. З останньої рівності випливає, що $a_0R + bR = R$ та розклад $a = sr$, $s = d$, $r = a_0$ є шуканим. Твердження доведене. $\square$

Зауважимо, що існують кільця без майже вільних від квадратів елементів. Таким є, наприклад, кільце цілих алгебраїчних чисел. Наступна теорема характеризує майже вільні від квадратів елементи дуо-областей Безу.

Теорема 2.2.7. *Нехай R дуо-область Безу та a деякий її ненульовий елемент. Тоді такі властивості є рівносильними:*

- 1) a є майже вільним від квадратів елементом;
- 2) R/aR є регулярним кільцем;
- 3) $J(R/aR) = 0$;
- 4) $w.gl.dim(R/aR) = 0$;
- 5) $w.gl.dim(R/aR)$ є скінченним числом.

Доведення. $1 \Rightarrow 2$. Припустимо, що a є майже вільним від квадратів елементом. Нехай $\bar{y} \in \bar{R} = R/aR$ є довільним елементом. Якщо $\bar{y}$ не є оборотним елементом, то за Теоремою 2.2.4 цей елемент є дільником нуля, тобто $\overline{xy} = 0$, для деякого елемента $\bar{x}$ в $\bar{R}$. Тоді $xy = ak' = ka$, для деяких елементів $k, k' \in R$. Припустимо, що $kR + xR = dR = Rd$, та $k = dk_0$, $x = x_0d$, $x_0R + k_0R = R$, для деяких $x_0, k_0 \in R$. Звідси, $dx_0y = dk_0a$. Скорочуючи на елемент d , ми отримуємо, що $x_0y = k_0a$.

Елементи x_0 та k_0 є взаємно простими, а тому k_0 є дільником y ; іншими словами, $y = k_0 y_0$ для деякого $y_0 \in R$. Оскільки R є дуо-областю, то існує $x_1 \in R$, такий, що $x_0 k_0 y_0 = k_0 x_1 y_0 = k_0 a$, а звідси $a = x_1 y_0$. Із того, що a є майже вільним від квадратів елементом робимо висновок, що $x_1 R + y_0 R = R$. Із останньої рівності ми отримуємо, що існують елементи $p, q, u, v \in R$ із властивостями

$$x_1 u + y_0 v = 1, \quad x_0 p + k_0 q = 1.$$

Домножуючи на k_0 ми отримуємо, що

$$k_0 x_1 u + k_0 y_0 v = k_0, \quad x_0 p + (x_0 k_0 u + y_0 v) q = 1.$$

Таким чином, $x_0 R + y R = R$. Оскільки $x_0 y = k_0 a$ то $\overline{x_0 y} = \bar{0}$. Елементи x_0, y є взаємно простими елементами в R , а тому вони є такими і в $\bar{R}$. Отже, існують такі елементи $\bar{m}, \bar{n} \in \bar{R}$, що $\overline{x_0 m} + \overline{y n} = \bar{1}$. Кільце R/aR є реверсивним, згідно з Теоремою 2.2.4, а тому $\overline{y x_0} = \bar{0}$. В результаті, із $\overline{y x_0 m} + \overline{y^2 n} = \bar{y}$ випливає, що $\overline{y^2 n} = \bar{y}$, а тому кільце R/aR є регулярним.

2 $\Rightarrow$ 3. Доведення є очевидним, і випливає з властивостей регулярного кільця.

3 $\Rightarrow$ 1. Припустимо, що $a = bc$, причому найбільший спільний дільник елементів b та c рівний $d \notin U(R)$. Звідси, $\bar{x} \in J(R/aR)$ тоді і лише тоді, коли для довільних $r, s \in R$ виконується рівність $(1 - rxs)R + aR = R$. Проте, згідно з умовою, радикал Джекобсона є нульовим. Отже, $x \in aR = Ra$. Із рівності $bR + cR = dR$ ми отримуємо, що $b = db_0$, $c = dc_0$, де $b_0, c_0 \in R$. Нехай $(1 - b_0 dc_0)R + aR = hR$. Тоді знайдуться такі елементи $a', x \in R$, що $a = ha'$, $1 - b_0 dc_0 = hx$. Звідси, $hR + (b_0 dc_0)R = R$. Оскільки $d(b_0 dc_0) = ha'$, то $b_0 dc_0$ є дільником a' , тобто $a' = b_0 dc_0 k$, для

деякого $k \in R$. Більше того, $a = db_0dc_0 = ha' = hb_0dc_0k = hk'(b_0dc_0)$, для деякого $k' \in R$. Таким чином $d = hk'$. Оскільки R є дуо-кільцем, то $Rh + Rb_0dc_0 = R$ і існують такі елементи $u, v \in R$, що $uh + vb_0dc_0 = 1$. Домножуючи справа на k' ми отримуємо

$$d = hk' = h(vb_0dc_0k' + uhhk') = h(ud + wd) = h(u + w)d,$$

для деякого $w \in R$. Отже, із того, що $d = h(u + w)d$ випливає рівність $h(u + w) = 1$, а тому h є оборотним елементом. Внаслідок цього, елемент $a - b_0dc_0$ є взаємно простим із a , тобто, $b_0dc_0 = ta = tdb_0dc_0$, для деякого $t \in R$. На сам кінець, ми отримуємо, що $td = 1$ та d є оборотним елементом, що суперечить нашому припущенню. Отже, a є майже вільним від квадратів.

$2 \Leftrightarrow 4$. Необхідність випливає із очевидної властивості будь-якого регулярного кільця, а достатність - із того, що R/aR є IF-кільцем слабкої глобальної розмірності нуль [55].

$4 \Leftrightarrow 5$. Необхідність є очевидною, а достатність випливає із того, що слабка глобальна розмірність R/aR може бути або нульовою, або нескінченною.

Теорему доведено. $\square$

Наслідок 2.2.8. *Майже вільні від квадратів елементи дуо-області Безу є елементами майже стабільного рангу 1.*

Доведення. Довільне регулярне дуо-кільце є строго регулярним, а такі кільця є кільцями стабільного рангу 1. Тому кільце R/aR є кільцем стабільного рангу 1, якщо R є дуо-областю Безу та a є майже вільним від квадратів елементом. $\square$

2.3. Морфічні кільця, праві максимальні ідеали яких є лівими чистими ідеалами

Вивчення властивостей максимальних ідеалів кілець пов'язане із тим, що у деяких випадках достатньо мати інформацію про максимальні ідеали кільця для того, щоб цілком описати його структуру.

У 1969 році Філдхаусом [60] введено поняття чистого ідеалу комутативного кільця, яке було узагальнене і розвинуте Аль-Езехом [39] у 1989 році. Слід зазначити, що поняття чистоти ідеалу легко переноситься із комутативного на некомутативні випадки. У цьому параграфі буде досліджена структура та властивості морфічних правих МРІ-кілець, а також буде з'ясовано їх взаємозв'язок із іншими класами кілець.

Твердження 2.3.9. *Морфічне праве дуо-кілець є реверсивним.*

Доведення. Нехай елементи $x, y \in R$ є такими, що $xy = 0$. Тоді $Ry \subseteq r(x)$. Згідно з тим, що за умовою кілець R є правим морфічним, знайдеться такий елемент $z \in R$, що $Ry = r(z)$ та $Rz = r(y)$. Оскільки ліві морфічні кільця є правими Р-ін'єктивними [92] (тобто з того, що $r(a) \subseteq r(b)$ впливає рівність $Rb = Ra$). Оскільки $r(z) = Ry \subseteq r(x)$, то $Rx \subseteq Rz \subseteq zR = r(y)$, а тому $yx = 0$. Таким чином, R є реверсивним кільцем. Твердження доведено. $\square$

Пригадаємо означення правого МРІ-кіля.

Означення 2.3.2. *Кілець R називається правим МРІ-кілем, якщо усі його праві максимальні ідеали є лівими чистими.*

Найпростішим прикладом правого і лівого МРІ-кіля є кілець $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Твердження 2.3.10. *Морфічне праве дуо-кілець, яке є правим*

МРІ-кільцем, є редукованим.

Доведення. Нехай існує такий елемент $a \neq 0$ у кільці R , що $a^2 = 0$. Тоді, $a \in r(a)$ та існує такий правий максимальний ідеал M , що $r(a) \subseteq M$. Оскільки M є лівим чистим, то існує елемент $b \in M$ для якого виконується рівність $a = ba$. Звідси, $(1 - b)a = 0$, і, використовуючи попереднє твердження, ми отримуємо рівність $a(1 - b) = 0$. Більше того, $1 - b \in r(a) \subseteq M$. Оскільки $b \in M$, ми робимо висновок, що $1 = (1 - b) + b \in M$. Але це є суперечністю, тому $a = 0$. Твердження доведено. $\square$

Наступна теорема встановлює зв'язок між морфічними правими МРІ-кільцями та класами регулярних кілець.

Теорема 2.3.11. *Для морфічного правого МРІ-кільця R такі властивості є рівносильними:*

- 1) R є правим дуо-кільцем;
- 2) R є реверсивним кільцем;
- 3) R є редукованим кільцем;
- 4) Радикал Джекобсона кільця R є нульовим;
- 5) R є напівпервинним кільцем;
- 6) R є регулярним кільцем;
- 7) R є строго регулярним кільцем;
- 8) R є одинично-регулярним кільцем;
- 9) R є лівим дуо-кільцем;
- 10) R є дуо-кільцем.

Доведення. Імплікації $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$ доведені у попередніх твердженнях. Еквівалентність умов 3, 4, 5, 6 у припущенні 1 доведена у [93].

В [92] показано рівносильність 7 та 6. Крім того, у [77] встановлено, що при виконання умови 1 властивості 6 та 9 є рівносильними. Використовуючи те, що ліве морфічне редуковане кільце є лівим дуо-кільцем [92], ми отримуємо справедливості імплікації $3 \Rightarrow 9$. Оскільки $1 \Rightarrow 3 \Rightarrow 9$ то $9 \Rightarrow 10 \Rightarrow 1$. Теорему доведено. $\square$

Застосовуючи Теорему 2.3.11 до результатів 1.1.19 ми отримуємо такий наслідок.

Наслідок 2.3.12. *Морфічне праве дуо-кільце, яке є правим MPI-кільцем, є кільцем елементарних дільників.*

ВИСНОВКИ:

В цьому розділі розглянуто деякі некомутативні класи кілець Безу. Доведено еквівалентність умови двобічності усіх ідеалів для правого квазі-дуо кільця Безу з умовою канонічної діагональної редукції матриць. Встановлено дуо-аналоги властивостей скінченних гомоморфних образів комутативних областей Безу. Введено поняття майже вільного від квадратів елемента у асоціативному кільці, і охарактеризовано такі елементи у термінах фактор-кілець дуо-областей Безу. Досліджено вплив чистоти елементів максимального спектру морфічних кілець на регулярність елементів цих кілець.

Головними результатами цього розділу є:

- 1) якщо у дуо-кільці Безу стабільного рангу 1 виконується умова Капланського, то дане кільце є кільцем елементарних дільників;
- 2) скінченні гомоморфні образи дуо-областей Безу є майже Беровими, P -ін'єктивними, когерентними, реверсивними, морфічними IF-кільцями слабкої глобальної розмірності нуль або нескінченність, в

яких ліві та праві морфічні пари співпадають, а вони самі співпадають із своїми класичними кільцями дробів;

3) майже вільні від квадратів елементи дуо-областей Безу є правими та лівими адекватними елементами;

4) майже вільні від квадратів елементи дуо-областей Безу є елементами майже стабільного рангу 1;

5) елемент дуо-області Безу є майже вільним від квадратів елементом тоді і лише тоді, коли фактор-кільце по головному ідеалу, який він породжує, є регулярним кільцем;

6) морфічні праві дуо-кільця є реверсивними;

7) морфічне праве МРІ-кільце є строго-регулярним кільцем тоді і лише тоді, коли воно є правим дуо-кільцем.

Результати даного розділу опубліковані в таких роботах: [34, 35, 103, 104, 105].

РОЗДІЛ 3

Узагальнено адекватні кільця

У 1943 році Хелмер [66] започаткував вивчення кілець над яким довільна матриця володіє канонічною діагональною редукцією, причому дане кільце може бути кільцем без умов обриву зростаючих ланцюгів ідеалів (наприклад, таким є кільце цілих аналітичних функцій). В той же час, структурна будова таких кілець є недостатньо досліджена. Можна лише сказати, що кожен простий ідеал адекватного кільця міститься у єдиному максимальному ідеалі. Крім того, простежується тенденція перенесення властивостей адекватності на рівень елементів і ідеалів [123, 124, 126], та узагальнення поняття адекватного кільця [21]. Дієвим інструментом у дослідженнях пов'язаних із адекватністю є стабільний ранг. У даному розділі ми покажемо, що стабільний ранг довільного узагальнено адекватного кільця дорівнює 2, і ці кільця є кільцями елементарних дільників.

В цьому розділі під кільцем R завжди розуміємо комутативне кільце з одиницею $1 \neq 0$.

3.1. Стабільний ранг узагальнено адекватних кілець

У даному підрозділі досліджується стабільний ранг узагальнено адекватного кільця, а саме доводиться, що він дорівнює 2. Як наслідок, буде доведено, що ці кільця є кільцями Ерміта, а також, кільцями

елементарних дільників.

Теорема 3.1.1. *Стабільний ранг узагальнено адекватного кільця R не перевищує 2.*

Доведення. Нехай $a, b, c \in R$ є довільними елементами з R , такими, що $aR + bR + cR = R$. Якщо $a = 0$ тоді $bR + cR = R$ і ми маємо можливість записати рівність $(a + c \cdot 1)R + (b + c \cdot 0)R = R$. Аналогічна рівність отримується при $b = 0$. Легко бачити, що у вказаних випадках виконується умова стабільного рангу 2. Тому, припустимо, що $a \neq 0$, $b \neq 0$. У цьому випадку єдиними можливими варіантами є: елемент a є адекватним до елемента b або b є адекватним до a , згідно з означенням узагальнено адекватного кільця.

У першому випадку ми можемо знайти такі елементи $r, s \in R$, що $a = rs$, $rR + bR = R$, $s'R + bR \neq R$, для довільного $sR \subseteq s'R \neq R$.

Припустимо, що $aR + (b + cr)R = \delta R \neq R$. Тоді δ є дільником елемента $a = rs$. Якщо $\delta R + rR = tR \neq R$ тоді t ділить елемент $b + cr \in R$. Оскільки t є дільником елемента r , тоді і t є дільником елемента b . Проте, останній випадок є неможливим оскільки b та r є взаємно простими. У випадку, коли δ є дільником елемента s ми припускаємо, що $\delta R + bR = \alpha R \neq R$, для деякого необоротного елемента $\alpha \in R$. Оскільки δ є дільником елемента $b + cr$ та α є також дільником елемента d тоді α є теж дільником $b + cr$. Таким чином, α є дільником елемента c . Ми отримали суперечність, оскільки елементи a, b, c є взаємно простими. Тому, $aR + (b + cr)R = R$, або у рівносильному записі $(a + c \cdot 0)R + (b + cr)R = R$.

У протилежному випадку, знайдуться такі елементи $m, n \in R$, що

$b = mn$, $mR + aR = R$, $n'R + aR \neq R$, для довільного елемента $n' \in R$, що $nR \subseteq n'R \neq R$. Аналогічно до попереднього випадку, ми припускаємо, що $(a + ct)R + bR = \gamma R$, для деякого необоротного елемента $\gamma \in R$. Оскільки γ ділить $b = mn$ тоді можемо припустити $\gamma R + mR = hR \neq R$. Отже, h є дільником елемента $a + ct$, а тому і елемента a . Проте, це є неможливо, бо $aR + mR = R$. Якщо γ є дільником n , тоді, згідно з визначенням цього елемента, $\gamma R + aR = \beta R \neq R$, де β є певним необоротним елементом в R . Оскільки β ділить γ та γ є дільником $a + ct$, то β ділить $a + ct$ також. З іншого боку $aR + bR + cR = R$, і ми отримуємо суперечність, а тому $(a + ct)R + (b + c \cdot 0)R = R$.

В обох випадках ми отримаємо, що виконується умова стабільного рангу 2. Теорему доведено. $\square$

Теорема 3.1.2. *Кожне узагальнено адекватне кільце R є кільцем Ерміта.*

Доведення. Нехай $a, b \in R$ є довільними елементами кільця R . Оскільки узагальнено адекватні кільця R є кільцями Безу, то існує деякий елемент $d \in R$, такий, що

$$aR + bR = dR.$$

Тоді знайдуться такі елементи $a_0, b_0, u, v \in R$, що $a = da_0$, $b = db_0$ і $au + bv = d$. Тому $d(a_0u + b_0v - 1) = 0$, що рівносильно існуванню елемента $c \in R$ з властивостями $dc = 0$ та $a_0R + b_0R + cR = R$.

Оскільки R є узагальнено адекватним кільцем, то за попередньою теоремою його стабільний ранг не перевищує 2, тобто $(a_0 + cx)R + (b_0 + cy)R = R$ для деяких елементів $x, y \in R$. Більше того, із рівності

$(a_0 + cx)t + (b_0 + cy)s = 1$ впливає, що матриця

$$P = \begin{pmatrix} a_0 + cx & b_0 + cy \\ -s & t \end{pmatrix}$$

є унімодулярною, причому

$$\begin{pmatrix} d & 0 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix},$$

для деяких елементів $t, s \in R$. Звідси, оскільки

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} d & 0 \end{pmatrix}$$

то R є кільцем Ерміта. Теорему доведено. $\square$

Враховуючи попередню теорему та [21], ми можемо довести такий результат.

Теорема 3.1.3. *Узагальнено адекватне кільце R є кільцем елементарних дільників.*

Доведення. Оскільки за попередньою теоремою кільце R є кільцем Ерміта, то згідно з [75] достатньо довести твердження для матриць вигляду

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$$

де $aR + bR + cR = R$, $a \neq 0$, $c \neq 0$.

Оскільки R є узагальнено адекватним кільцем, то щонайменше один із елементів a або c може бути зображений у вигляді $c = rs$, $rR + aR = R$, $s'R + aR \neq R$, для довільного $sR \subseteq s'R \neq R$. Покажемо, що

$$(a + br)R + crR = R.$$

Доведемо від супротивного. Припустимо, що $(a + br)R + crR = hR \neq R$, для деякого необоротного елемента h . Якщо $hR + rR = \delta R$, то δ ділить

a . З іншого боку, це суперечить тому, що $rR + aR = R$. Отже, δ повинен бути дільником s , а тому із рівності $hR + aR = gR$ випливає, що g є дільником b . Проте і це є неможливим, оскільки $aR + bR + cR = R$. Тому, $(a + br)R + crR = R$. У випадку коли елемент a володіє подібним до розглянутого вище розкладом, ми отримуємо, що $arR + (br + c)R = R$.

Тому, якщо $(a + br)R + crR = R$, то ми робимо висновок, що

$$\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + br & cr \\ b & c \end{pmatrix} = B,$$

причому матриця

$$\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

є оборотною. Оскільки матриця B володіє канонічною діагональною редукцією, то і матриця A володіє нею теж. У випадку, коли $arR + (br + c)R = R$ ми можемо записати

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ar & a \\ br + c & b \end{pmatrix} = C.$$

Аналогічно показується, що матриці C та A володіють канонічною діагональною редукцією.

Отже, R є кільцем елементарних дільників. Теорему доведено. $\square$

Прикладом узагальнено адекватного кільця, яке не є адекватним є кільце формальних степеневих рядів над полем раціональних чисел із цілим вільним членом.

ВИСНОВКИ:

У даному розділі вивчаються комутативні кільця Безу, зокрема, властивості їх головних ідеалів. Головні результати цього розділу:

1) доведено, що стабільний ранг узагальнено адекватного кільця дорівнює 2;

2) показано, що узагальнено адекватні кільця є кільцями елементарних дільників.

Результати цього розділу опубліковані в роботах: [33, 102].

РОЗДІЛ 4

Структура головних ідеалів кілець Безу

Кільця Безу є природнім узагальненням кілець головних ідеалів, проте, їх суттєвою відмінністю є існування в них неголовних ідеалів. У цьому розділі вивчаються структурні властивості головних ідеалів кілець Безу, а також їх поведінка при застосуванні до них різних алгебраїчних операцій, які визначені для ідеалів. Також розглядаються морфічні кільця, як частковий випадок кілець Безу, у яких аннулятори головних ідеалів володіють додатковими властивостями. Також у цьому розділі досліджуються умови при яких ті чи інші кільця є морфічними та їх взаємозв'язки.

В цьому розділі під кільцем R завжди розуміємо комутативне кільце з одиницею $1 \neq 0$.

4.1. Арифметичні властивості морфічних кілець

У роботі [92] наводиться характеристизація морфічних кілець у термінах головних ідеалів цих кілець. Дане твердження дозволяє провести розбиття множини головних ідеалів морфічного кільця на пари: головний ідеал та його аннулятор, причому співпадіння головного ідеалу зі своїм аннулятором також є допустимим. Вказані пари ідеалів означаються як морфічні пари, причому, можливим є узагальнення цих по-

нять і на некомутативні кільця. Природньо виникає запитання: якою є поведінка морфічних пар при застосуванні класичних операцій над ідеалами до одного із компонентів пари? Важливим фактом у даних дослідженнях є те, що для визначення компонентів морфічної пари достатньо знайти один із них, а другий є його аннулятором.

Доведемо ряд арифметичних властивостей, якими володіють морфічні пари, використовуючи властивості частки ідеалів з Твердження 1.1.46.

Твердження 4.1.1. *Нехай R є морфічним кільцем та $a, b, c, d, x \in R$. Тоді*

1) *Якщо $\langle a \rangle \sim \langle b \rangle$ та $\langle c \rangle \sim \langle d \rangle$ тоді*

- $\langle a, c \rangle \sim \langle b \rangle \cap \langle d \rangle$;
- $\langle a \rangle \cap \langle c \rangle \sim \langle b, d \rangle$;
- $\langle ac \rangle \sim (b : c) = (d : a)$;
- $(a : c) \sim \langle bc \rangle$.

2) *Якщо $\langle a \rangle \sim \langle b \rangle$ тоді $\langle a, b \rangle \sim \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$, тобто НСД та НСК компонентів морфічної пари також утворюють морфічну пару та якщо $g = \text{lcm}(a, b)$ то $g^2 = 0$.*

3) *Якщо $\langle a \rangle \sim \langle b \rangle$ то*

- $\langle a^2 \rangle \sim (b : a)$;
- $\langle a^2, b^2 \rangle \sim (a : b) \cap (b : a)$;
- $\langle a^2, b \rangle = (a^3 : a) \sim a(b : a^2)$;
- $\langle a, b^2 \rangle = (b^3 : b) \sim b(a : b^2)$;

- $(a^3 : a)(b^3 : b) = \langle a^3, b^3 \rangle = \langle a, b \rangle^3$.

4) Якщо $\langle a \rangle \sim \langle b \rangle$, $\langle a' \rangle \sim \langle c \rangle$ та $\langle a, a' \rangle = \langle 1 \rangle$ то

$$a|c, a'|b, \langle b \rangle \cap \langle c \rangle = 0.$$

5) $\text{Ann}(a) \subset \langle 1-ax \rangle$, $\text{Ann}(1-ax) \subset \langle a \rangle$. Більше того, якщо $a^2x = a$ то $\langle a \rangle \sim \langle 1-ax \rangle$.

Доведення.

1) Для отримання вказаної властивості достатньо показати, що:

- $\text{Ann}(a, c) = \text{Ann}(a) \cap \text{Ann}(c) = \langle b \rangle \cap \langle d \rangle$;
- $\text{Ann}(ac) = (0 : ac) = ((0 : a) : c) = (b : c)$, $\text{Ann}(ac) = (0 : ac) = ((0 : c) : a) = (d : a)$;
- $\text{Ann}(bc) = (0 : bc) = (a : c)$.

Завершує доведення використання властивості $\text{Ann}(\text{Ann}(r)) = \langle r \rangle$.

2) Згідно з вище доведеними властивостями, нам відомо, що $\langle a, b \rangle \sim \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$. Якщо ми позначимо $\langle g \rangle = \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$ та $\langle d \rangle = \langle a, b \rangle$, то тоді $\langle g \rangle \subset \langle d \rangle$ і $\langle g \rangle \langle g \rangle \subset \langle gd \rangle = \langle 0 \rangle$, а звідси $g^2 = 0$.

3) Аналогічно до 1) ми отримуємо:

- $\text{Ann}(a^2) = (0 : a^2) = ((0 : a) : a) = (b : a)$;
- $\text{Ann}(a^2, b^2) = \text{Ann}(a^2) \cap \text{Ann}(b^2) = (a : b) \cap (b : a)$;
- $\text{Ann}(a^2, b) = \text{Ann}(a^2) \cap \text{Ann}(b) = \langle a \rangle \cap \text{Ann}(a^2) = \{ar | a^3r = 0\} = a\text{Ann}(a^3) = a(0 : a^3) = a(b : a^2)$;
- $\langle a^2, b \rangle = \text{Ann}(a\text{Ann}(a^3)) = (a^3 : a)$;

$$\bullet (a^3 : a)(b^3 : b) = \langle a^2, b \rangle \langle a, b^2 \rangle = \langle a^3, ab^2, a^2b, b^3 \rangle = \langle a^3, 0, 0, b^2 \rangle = \\ = \langle a^3, b^3 \rangle = \langle a, b \rangle^3.$$

Доведення інших властивостей є аналогічним.

4) Оскільки a, a' є взаємно простими, то їх аннулятори мають нульовий перетин: $\langle b \rangle \cap \langle c \rangle = \langle 0 \rangle$. Тоді $bc = 0$ та $b \in \text{Ann}(c) = \langle a' \rangle$. Звідси ми маємо, що $a'|b$. Аналогічно доводимо, що $a|c$.

5) Якщо $a^2x = a$, тоді $\langle 1 - ax \rangle \subset \text{Ann}(a) \subset \langle 1 - ax \rangle$ відповідно до попередньої властивості. Отже, $\text{Ann}(a) = \langle 1 - ax \rangle$.

Твердження доведено. $\square$

Твердження 4.1.2. *Класичне кільце дробів $Q(R)$ морфічного кільця R співпадає з R .*

Доведення. Припустимо, що $d \in R \setminus \{0\}$ не є дільником нуля. Тоді $\text{Ann}(d) = \langle 0 \rangle$. Проте, всі морфічні пари є визначені однозначно в термінах головних ідеалів, що їх утворюють у морфічному кільці R , отже, $\langle 0 \rangle \sim \langle 1 \rangle$ та $\langle d \rangle = \langle 1 \rangle$. Звідси отримуємо, що d є оборотним елементом та локалізація по множині усіх елементів, які не є дільниками нуля, є тривіальною. Твердження доведено. $\square$

Наступне твердження стверджує, що твірні ідеалів, які утворюють морфічну пару локально поведуть себе як звичайні цілі числа – перенесення співмножників із однієї частини морфічної пари до іншої зберігає морфічність пари.

Твердження 4.1.3. *Нехай R морфічне кільце та $\langle a \rangle \sim \langle b \rangle$. Припустимо, що $\langle d \rangle = \langle a, b \rangle$, $a = a_0d$, $b = b_0d$ і $\langle g \rangle = \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$. Тоді:*

$$1. \langle a_0b_0 \rangle \sim \langle d^2 \rangle;$$

$$2. \langle a_0 d^2 \rangle \sim \langle b_0 \rangle;$$

$$3. \langle b_0 d^2 \rangle \sim \langle a_0 \rangle;$$

$$4. \langle g \rangle = \langle a_0 b_0 d \rangle \sim \langle d \rangle.$$

Доведення. Відповідно до Твердження 4.1.1 скажемо, що $\langle a \rangle \sim \langle b \rangle$ та $\langle d \rangle \sim \langle g \rangle$, та $\langle ad \rangle \sim (b : d)$. Оскільки $b_0 d = b$, то тоді $\langle b_0 \rangle \subset (b : d)$. Візьмемо довільний елемент $x \in (b : d)$, то $xd = bt$, для деякого $t \in R$. Звідси робимо висновок, що $xd = b_0 dt$ і, крім того, $x - b_0 t \in \text{Ann}(d) = \langle g \rangle \subset \langle b \rangle \subset \langle b_0 \rangle$. Отже, $x \in \langle b_0 \rangle$ та $(b : d) \subset \langle b_0 \rangle$. Як наслідок, $\langle ad \rangle \sim \langle b_0 \rangle$. Використовуючи схожі міркування доводимо, що $\langle bd \rangle \sim \langle a_0 \rangle$.

Знову ж, використовуючи Твердження 4.1.1, отримуємо: $\langle a_0 b_0 \rangle \sim (d^2 b_0 : b_0)$. Очевидно, що $\langle d^2 \rangle \subset (d^2 b_0 : b_0)$. Як і в попередньому випадку можемо вибрати елемент $x \in (d^2 b_0 : b_0)$ і отримати, що $xb_0 = d^2 b_0 t$, для деякого $t \in R$. Таким чином, $x - d^2 t \in \text{Ann}(b_0) = \langle a_0 d^2 \rangle \subset \langle d^2 \rangle$. Отже, $x \in \langle d^2 \rangle$ і $(d^2 b_0 : b_0) = \langle d^2 \rangle$. В результаті маємо $\langle a_0 b_0 \rangle \sim \langle d^2 \rangle$, що і треба було довести.

Для того щоб отримати останню морфічну пару, використовуючи Твердження 4.1.1, зауважимо, що $\langle a_0 b_0 d \rangle \sim (d^2 : d)$, оскільки $\langle a_0 b_0 \rangle \sim \langle d^2 \rangle$ та $\langle d \rangle \sim \langle g \rangle$. Якщо $x \in (d^2 : d)$, то тоді $xd = d^2 t$, для деякого $t \in R$. Звідси $x - dt \in \text{Ann}(d) = \langle g \rangle \subset \langle d \rangle$ та $x \in \langle d \rangle$. Отже, $\langle d \rangle \subset (d^2 : d) \subset \langle d \rangle$. Як результат $\langle g \rangle = \langle a_0 b_0 d \rangle \sim \langle d \rangle$. Твердження доведено. $\square$

Теорема 4.1.4. *Нехай R – комутативне кільце, I – деякий його ідеал. Тоді кільце R/I є морфічним тоді і лише тоді, коли для кожного елемента $\bar{a} \in R/I$ існує деякий елемент $\bar{b} \in R/I$ такий, що*

$$(I : a) = I + \langle b \rangle, \quad (I : b) = I + \langle a \rangle.$$

Доведення. Припустимо, що $\overline{R} = R/I$ є морфічним кільцем. Тоді, для кожного елемента $\overline{a} \in R/I$ існує деякий елемент $\overline{b} \in R/I$ такий, що $\langle \overline{a} \rangle = \text{Ann}(\overline{b})$. Тоді

$$\langle \overline{b} \rangle = \text{Ann}(\overline{a}) = \{\overline{x} \mid \overline{x}\overline{a} = \overline{0}\} = \{\overline{x} \mid xa \in I\}.$$

Таким чином, $\overline{x} \in \langle \overline{b} \rangle$ тоді і лише тоді, коли $x \in (I : a)$. Звідси $(I : a) = I + \langle b \rangle$. Інша рівність отримується аналогічно.

Навпаки, припустимо, що для кожного елемента $\overline{a} \in R/I$ існує деякий елемент $\overline{b} \in R/I$ такий, що $(I : a) = I + \langle b \rangle$, $(I : b) = I + \langle a \rangle$. Якщо ми позначимо через $f : R \rightarrow \overline{R} = R/I$ канонічний гомоморфізм з R у кільце $\overline{R}$, то $\text{Ann}(\overline{a}) = \{\overline{x} \mid xa \in I\} = f((I : a))$. Проте,

$$f((I : a)) = f(I + \langle b \rangle) = \langle \overline{b} \rangle.$$

Аналогічно доводимо, що $\text{Ann}(\overline{b}) = \overline{a}$. Теорему доведено. $\square$

Теорема 4.1.5. *Для комутативного кільця R виконуються наведені нижче властивості:*

1. *Якщо $\overline{a}, \overline{b} \in \overline{R} = R/J(R)$ то $\text{modi } \langle \overline{a} \rangle \sim \langle \overline{b} \rangle$ тоді і лише тоді, коли*

$$\bigcap \{M \mid M \notin \text{mspec}(a)\} \subset J(R) + \langle b \rangle,$$

$$\bigcap \{M \mid M \notin \text{mspec}(b)\} \subset J(R) + \langle a \rangle.$$

2. *Якщо $\overline{a}, \overline{b} \in \overline{R} = R/\text{Nil}(R)$ то $\text{modi } \langle \overline{a} \rangle \sim \langle \overline{b} \rangle$ тоді і лише тоді, коли*

$$\bigcap \{(P : a) \mid P \in \text{spec}(R)\} \subset \text{Nil}(R) + \langle b \rangle,$$

$$\bigcap \{(P : b) \mid P \in \text{spec}(R)\} \subset \text{Nil}(R) + \langle a \rangle.$$

3. Якщо R є морфічним кільцем та $\langle a \rangle \sim \langle b \rangle$ тоді

$$\text{mspec}(R) = U(a) \sqcup U(b) \sqcup V(\langle a, b \rangle).$$

Доведення. Оскільки $J(R) = \bigcap \{M \mid M \in \text{mspec}(R)\}$, то

$$(J(R) : x) = \bigcap \{(M : x) \mid M \in \text{mspec}(R)\}.$$

У випадку коли $x \in M \in \text{mspec}(R)$ ми маємо $(M : x) = R$, а якщо $x \notin M \in \text{mspec}(R)$ тоді $(M : x) \supset M$. Згідно з максимальністю ідеалу M ми робимо висновок, що $M = (M : x)$. Відповідно до Теорема 4.1.4 ми отримаємо справедливість умови 1. Подібним чином доводиться 2.

Для того, щоб довести 3 ми зауважимо, що з рівності

$$0 = ab \in M \in \text{mspec}(R)$$

випливає, що якщо $M \in U(a)$ тоді $M \in V(b)$. Таким чином $M \notin (U(a) \sqcup U(b))$ тоді і лише тоді, коли $M \in V(a) \cap V(b) = V(\langle a, b \rangle)$. Як результат, ми отримаємо, що

$$\text{mspec}(R) = U(a) \sqcup U(b) \sqcup V(\langle a, b \rangle).$$

Теорему доведено. $\square$

Теорема 4.1.6. Якщо кільце R є морфічним і редукованим, то воно є регулярним.

Доведення. Нехай $a \in R$ є довільним елементом в R . Оскільки R є морфічним, то знайдеться такий елемент $b \in R$, що $\langle a \rangle \sim \langle b \rangle$. Згідно з Твердженням 4.1.1 ми отримуємо, що $\langle a, b \rangle \sim \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$, $\langle g \rangle = \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$ та $g^2 = 0$. Оскільки R є редукованим та $\langle 1 \rangle \sim \langle 0 \rangle$, то робимо висновок, що $\langle a, b \rangle = \langle 1 \rangle$. Домножуючи останню рівність на $\langle a \rangle$, бачимо, що $\langle a^2 \rangle = \langle a \rangle$, а це значить, що R є регулярним кільцем. $\square$

Використовуючи результати Теорема 4.1.6 зробимо такі узагальнення:

1. якщо ідемпотенти в R піднімаються по модулю радикала Джекобсона $J(R)$ то $R/J(R)$ є морфічним кільцем тоді і лише тоді, коли R є напіврегулярним кільцем;
2. стабільний ранг морфічного редукованого кільце рівний 1.

Теорема, наведена нижче, характеризує найбільший спільний дільник двох елементів, добуток яких дорівнює нулю у кільцях ідемпотентного стабільного рангу 1. Своїм формулюванням вона нагадує теорему Піфагора.

Теорема 4.1.7. *Нехай R є комутативним кільцем Безу ідемпотентного стабільного рангу 1. Якщо $ab = 0$ тоді існує $d \in R$ таке, що $a^2 + b^2 = d^2$, $\langle d \rangle = \langle a, b \rangle$.*

Доведення. Згідно з означенням кільця ідемпотентного рангу 1 та Теорема 1.1.38 існують такі ідемпотенти $e, f \in R$, та елемент $d \in R$ і $w \in U(R)$, що $a + be = d$, $af + b = dw$, $\langle a, b \rangle = \langle d \rangle$. Тоді

$$a + be = d = afw^{-1} + bw^{-1}.$$

Із останньої рівності випливає, що $a(1 - fw^{-1}) = b(w^{-1} - e)$. Здійснюючи домноження на елемент b ми отримуємо, що $b^2e = b^2w^{-1}$. Отже,

$$d^2 = (a + be)^2 = a^2 + b^2e^2 = a^2 + (b^2e)e = a^2 + b^2ew^{-1} = a^2 + b^2(w^{-1})^2.$$

З іншого боку,

$$d^2 = a^2 + b^2e^2 = a^2 + b^2e = a^2 + b^2w^{-1}.$$

Віднімаючи вирази в останніх двох рівностях, ми отримуємо

$$0 = d^2 - d^2 = a^2 + b^2(w^{-1})^2 - a^2 - b^2w^{-1}.$$

Звідси, $b^2(w^{-1})^2 = b^2w^{-1}$, а тоді $b^2w^{-1} = b^2$. В результаті,

$$d^2 = a^2 + b^2w^{-1} = a^2 + b^2.$$

Теорему доведено. $\square$

Неважко переконатись у справедливості твердження для третіх степенів: $a^3 + b^3 = d^3$. Оскільки 2 і 3 є взаємно простими цілими числами, то для будь-якого $n \geq 2$ ми також отримаємо, що $a^n + b^n = d^n$, де $ab = 0$ та $\langle a, b \rangle = \langle d \rangle$ у комутативному морфічному кільці R ідемпотентного стабільного рангу 1.

Твердження 4.1.8. *Нехай R є комутативним морфічним чистим кільцем. Нехай $\langle a \rangle \sim \langle b \rangle$ є довільною морфічною парою та $\langle d \rangle = \langle a, b \rangle$, $\langle g \rangle = \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$, $a = e + u, b = f + v$, де $e^2 = e, f^2 = f \in R$ є ідемпотентами, а елементи $u, v \in U(R)$ – оборотні. Тоді*

1. $f|a|(1 - e), e|b|(1 - f);$
2. $\langle 1 - e \rangle \cap \langle 1 - f \rangle \subset \langle g \rangle \subset \langle e \rangle \cap \langle f \rangle;$
3. $\langle d \rangle \subset \langle e, f \rangle;$
4. $\langle 1 - e, 1 - f \rangle = \langle h \rangle$, де $\langle h^2 \rangle = \langle h \rangle$, та $h \in R$ є деяким регулярним елементом.

Доведення. Згідно з Твердженням 4.1.1 з того, що

$$\langle a \rangle \sim \langle b \rangle, \langle e \rangle = \langle 1 - u^{-1}a \rangle \sim \langle 1 - e \rangle$$

випливає $e|b, a|(1 - e)$. З міркувань симетрії ми можемо отримати, що $f|a, b|(1 - f)$. Тоді $\langle 1 - e \rangle \subset \langle a \rangle \subset \langle f \rangle$ і $\langle 1 - f \rangle \subset \langle b \rangle \subset \langle e \rangle$, а тому

$\langle 1 - e \rangle \cap \langle 1 - f \rangle \subset \langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle g \rangle \subset \langle e \rangle \cap \langle f \rangle$. Використовуючи цей ланцюжок включень, ми отримаємо, що $(1 - e)(1 - f) = 0$. Припустимо, що $\langle h \rangle = \langle 1 - e, 1 - f \rangle$. Тоді $\langle h^2 \rangle = \langle h \rangle$. Згідно з Твердженням 4.1.1:

$$\text{Ann}(\langle 1 - e, 1 - f \rangle) = \text{Ann}(e) \cap \text{Ann}(f) = \langle 1 - e \rangle \cap \langle 1 - f \rangle \subset \langle g \rangle = \text{Ann}(d),$$

а тому $\langle d \rangle \subset \langle e, f \rangle$. Твердження доведено. $\square$

Як наслідок Твердження 1.1.47 ми сформулюємо властивості тензорних добутків головних ідеалів морфічних кілець.

Твердження 4.1.9. *У комутативному морфічному кільці R справедливі такі властивості:*

1. $\langle a \rangle \otimes_R \langle b \rangle \cong \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$, для всіх $a, b \in R$;
2. $\langle a \rangle \otimes_R \langle a \rangle \cong \langle a \rangle$, для довільного $a \in R$;
3. Якщо $\langle a \rangle \sim \langle b \rangle$ і $\langle c \rangle \sim \langle d \rangle$ тоді $\langle a \rangle \otimes_R \langle c \rangle \cong \langle a \rangle / \langle ad \rangle \cong \langle c \rangle / \langle cb \rangle$;
4. $\langle a \rangle \otimes_R \text{Ann}(a) \cong \langle a \rangle / \langle a^2 \rangle$ для довільного $a \in R$;
5. Якщо $\langle a \rangle \subset \langle b \rangle$ тоді $\langle a \rangle \otimes_R \langle b \rangle \cong \langle a \rangle$.
6. Якщо $\langle a, b \rangle = \langle 1 \rangle$ тоді $\langle a \rangle \otimes_R \langle b \rangle \cong \langle ab \rangle$.

Доведення. Згідно з Твердженням 1.1.47

$$\begin{aligned} \langle a \rangle \otimes_R \langle b \rangle &\cong R / \text{Ann}(a) \otimes_R R / \text{Ann}(b) \cong R / (\text{Ann}(a) + \text{Ann}(b)) \cong \\ &\cong \text{Ann}(\text{Ann}(a) + \text{Ann}(b)) \cong \langle a \rangle \cap \langle b \rangle. \end{aligned}$$

Також, якщо $\langle a \rangle \sim \langle b \rangle$ та $\langle c \rangle \sim \langle d \rangle$ тоді $\langle a \rangle \otimes_R \langle c \rangle \cong \langle a \rangle \otimes_R R / \langle d \rangle \cong \langle a \rangle / \langle ad \rangle$. Аналогічно $\langle a \rangle \otimes_R \langle c \rangle \cong \langle c \rangle / \langle cb \rangle$.

Легко переконатись у справедливості інших тверджень, використовуючи вказані властивості. Твердження доведено. $\square$

Із вказаного твердження отримуємо такий результат:

Наслідок 4.1.10. *Елемент a у морфічному кільці R є регулярним елементом тоді і лише тоді, коли $\langle a \rangle \otimes_R \text{Ann}(a) = 0$.*

Твердження 4.1.11. *Нехай R комутативне морфічне кільце із властивістю заміни, та a – його довільний елемент. Тоді існує такий ідемпотент $e \in R$ для якого справедливо:*

1. $\langle a \rangle \otimes_R \langle e \rangle \cong \langle e \rangle$;
2. $\langle 1 - a \rangle \otimes_R \langle 1 - e \rangle \cong \langle 1 - e \rangle$;
3. $R \cong \langle 1 - a \rangle / \langle (1 - a)e \rangle \oplus \langle a \rangle / \langle a(1 - e) \rangle$;
4. $\langle a \rangle \otimes_R \langle 1 - a \rangle \cong \langle a \rangle / \langle a^2 x \rangle \oplus \langle 1 - a \rangle / \langle (1 - a)^2 y \rangle$, для деяких $x, y \in R$.

Доведення. Оскільки R є кільцем із властивістю заміни, то знайдеться ідемпотент $e^2 = e \in R$, такий, що

$$e \in \langle a \rangle, \quad 1 - e \in \langle 1 - a \rangle, \quad e = ax, \quad 1 - e = (1 - a)y,$$

для деяких $x, y \in R$. Згідно з попереднім твердженням ми отримуємо:

$$\langle a \rangle \otimes_R \langle e \rangle \cong \langle e \rangle \text{ і } \langle 1 - a \rangle \otimes_R \langle 1 - e \rangle \cong \langle 1 - e \rangle. \text{ Таким чином,}$$

$$R = \langle e \rangle \oplus \langle 1 - e \rangle \cong (\langle a \rangle \otimes_R \langle e \rangle) \oplus (\langle 1 - a \rangle \otimes_R \langle 1 - e \rangle)$$

$$\cong \langle a \rangle / \langle a(1 - e) \rangle \oplus \langle 1 - a \rangle / \langle (1 - a)e \rangle.$$

$$\begin{aligned} \text{Нарешті, } \langle a \rangle \otimes_R \langle 1 - a \rangle &\cong \langle a \rangle \otimes_R \langle 1 - a \rangle \otimes_R R = \langle a \rangle \otimes_R \langle 1 - a \rangle \otimes_R \\ &(\langle e \rangle \oplus \langle 1 - e \rangle) \cong (\langle a \rangle \otimes_R \langle 1 - a \rangle \otimes_R \langle e \rangle) \oplus (\langle a \rangle \otimes_R \langle 1 - a \rangle \otimes_R \langle 1 - e \rangle) \cong \\ &(\langle 1 - a \rangle \otimes_R \langle e \rangle) \oplus (\langle a \rangle \otimes_R \langle 1 - e \rangle) \cong \langle 1 - a \rangle / \langle (1 - a)(1 - e) \rangle \oplus \langle a \rangle / \langle ae \rangle \cong \\ &\langle a \rangle / \langle a^2 x \rangle \oplus \langle 1 - a \rangle / \langle (1 - a)^2 y \rangle. \end{aligned}$$

Твердження доведене. $\square$

4.2. Властивості головних ідеалів кілець Безу

У даному підрозділі будемо використовувати такі позначення: якщо $a, b, d \in R$ є такими елементами кільця, що $\langle a, b \rangle = \langle d \rangle$, то тоді існує елементи $a_0, b_0 \in R$ які задовольняють рівності $a = a_0d$, $b = b_0d$. Елемент a_0 ми деколи будемо записувати у вигляді $a_0 = \frac{a}{(a,b)}$, розуміючи під виразом (a, b) найбільший спільний дільник елементів a, b .

Лема 4.2.12. *Нехай R є кільцем Безу та $a, b \in R$. Тоді*

$$(a : b) = \langle \frac{a}{(a,b)} \rangle + \text{Ann}(\langle a \rangle + \langle b \rangle) \text{ і } \langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle \frac{ab}{(a,b)} \rangle.$$

Доведення. Припустимо, що $\langle a, b \rangle = \langle d \rangle$, $a = a_0d$, $b = b_0d$, $au + bv = d$ для деяких елементів $a_0, b_0, d, u, v \in R$. Тоді, оскільки $a_0b = b_0a \in (a : b)$, $\text{Ann}(d) \subseteq \text{Ann}(b)$ то $\langle a_0 \rangle + \text{Ann}(d) \subseteq (a : b)$. Більше того, якщо $xb \in \langle a \rangle$, то існує деякий елемент $s \in R$ з властивістю $xb = as$. Звідси $xbv = asv$, а тому із того, що $xd(1 - a_0u) = da_0sv$ випливає співвідношення $x(1 - a_0u) - a_0sv \in \text{Ann}(d)$. Як результат ми отримали: $x \in \langle a_0 \rangle + \text{Ann}(d)$ та $(a : b) \subseteq \langle a_0 \rangle + \text{Ann}(d)$, що й треба було довести.

Для доведення другої частини леми припустимо, що ми маємо елемент $x \in \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$. Тоді, існують такі елементи $r, s \in R$, що $r \in (b : a)$, $s \in (a : b)$. Тому, $x \in a(b : a) \cap b(a : b) \subseteq \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$. Отже, $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = a(b : a) \cap b(a : b) = a(\langle b_0 \rangle + \text{Ann}(d)) \cap b(\langle a_0 \rangle + \text{Ann}(d)) = \langle ab_0 \rangle \cap \langle ba_0 \rangle = \langle a_0b_0d \rangle$. Лемі доведено. $\square$

Безпосереднім наслідком цієї леми є така властивість:

Наслідок 4.2.13. *Нехай R є кільцем Безу та $a, b \in R$. Тоді існує ізоморфізм R -модулів: $R/(a : b) \cong \langle a, b \rangle / \langle a \rangle$.*

Доведення. Для доведення достатньо зауважити, що

$$\begin{aligned} \frac{R}{(a : b)} &= \frac{R}{\langle \frac{a}{(a,b)} \rangle + \text{Ann}(\langle a, b \rangle)} \cong \frac{R}{\langle \frac{a}{(a,b)} \rangle} \otimes_R \frac{R}{\langle \text{Ann}(\langle a, b \rangle) \rangle} \cong \\ &\cong \frac{R}{\langle \frac{a}{(a,b)} \rangle} \otimes_R \langle a, b \rangle \cong \frac{\langle a, b \rangle}{\langle a, b \rangle \langle \frac{a}{(a,b)} \rangle} = \frac{\langle a, b \rangle}{\langle a \rangle}. \end{aligned}$$

Наслідок доведено. $\square$

Введемо позначення $\bar{R} = R/aR$, то $\bar{b}\bar{R} \cong R/(a : b)$ як R -модулі, тобто головні ідеали скінченних гомоморфних образів кільця Безу ізоморфні як модулі гомоморфним образам кільця Безу.

У попередній лемі ми не лише довели, що частка та перетин головних ідеалів комутативної області Безу є також головними ідеалами (що є добре відомим фактом з [80, 125]), але й знайшли їх твірні.

Наступна теорема показує, що фактор-кільце кільця Безу за головним ідеалом, який породжений елементом, що не є дільником нуля, є морфічним кільцем.

Теорема 4.2.14. *Нехай R є кільцем Безу та $a \in R \setminus \{0\}$ не є дільником нуля. Тоді R/aR є морфічним кільцем.*

Доведення. Нехай ми маємо довільний елемент $\bar{b} \in R/aR$. Припустимо, що $\langle a, b \rangle = \langle d \rangle$, $a = a_0d$, $b = b_0d$ для деяких елементів $a_0, b_0, d \in R$. Згідно з попередньою лемою $(a : b) = \langle a_0 \rangle + \text{Ann}(d) = \langle a_0 \rangle$, бо $\text{Ann}(d) \subseteq \text{Ann}(a) = 0$. Поклавши $c = a_0$, ми отримаємо, що $(a : b) = \langle c \rangle = \langle c, a \rangle$, та $(a : c) = (a : a_0) = \langle \frac{a}{(a, a_0)} \rangle + \text{Ann}(\langle a_0 \rangle + \langle a \rangle) = \langle d \rangle + \text{Ann}(a_0) = \langle d \rangle = \langle b, a \rangle$. Отже, виконуються умови Теорема 4.1.4, а тому R/aR є морфічним кільцем. Теорему доведено. $\square$

Наступна властивість відображає взаємозв'язок між НСД та НСК елементів у довільному арифметичному кільці. Ми доведемо її у кому-

тативному випадку, хоч вона справедлива і в некомутативній ситуації за певних додаткових припущень.

Твердження 4.2.15. *Нехай R – арифметичне кільце та $a, b \in R$. Тоді $\langle a, b \rangle = \langle a + tb \rangle + \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$, для довільного елемента $t \in R$, причому $\langle a, t \rangle = \langle 1 \rangle$.*

Доведення. Включення правої частини у ліву є очевидним. Розглянемо довільний елемент $x = au + bv \in \langle a, b \rangle$. Тоді $x = (a + tb)u + b(v - ut) \in \langle a + tb \rangle + \langle b \rangle$. Оскільки $\langle a, t \rangle = \langle 1 \rangle$, тоді $ap + tq = 1$, для деяких елементів $p, q \in R$. Більше того, $x = au + (ap + tq)bv = a(u + pbv - qv) + (a + tb)qv \in \langle a + tb \rangle + \langle a \rangle$. Зауваживши, що ґратка ідеалів кільця R є дистрибутивною, то

$$\langle a, b \rangle \subseteq (\langle a + tb \rangle + \langle b \rangle) \cap (\langle a + tb \rangle + \langle a \rangle) = \langle a + tb \rangle + \langle a \rangle \cap \langle b \rangle.$$

Об'єднуючи обидва включення ми отримуємо шукану властивість. Твердження доведене. $\square$

Якщо покласти $t = 1$ у твердженні вище, то ми отримаємо, що

$$GCD(a, b) = GCD(a + b, LCM(a, b)),$$

або, іншими словами, $GCD(a+b, ab) = 1$, якщо a, b є взаємно простими.

Остання властивість встановлює взаємозв'язок між двома, вказаними нижче, певним чином визначеними множинами головних ідеалів довільного майже Берового кільця Безу.

Теорема 4.2.16. *Нехай R – майже Берово кільце Безу та $a \in R$. Тоді*

$$(a : (a : \text{Ann}(a))) = \langle a \rangle + \text{Ann}(a), \quad (a : (a : (a : \text{Ann}(a)))) = (a : \text{Ann}(a)).$$

Це означає, що існує взаємно-однозначна відповідність між множинами

$$D(R) = \{(a : \text{Ann}(a)) = a_D \mid a \in R\}, \quad S(R) = \{\langle a \rangle + \text{Ann}(a) = a_S \mid a \in R\},$$

яка визначена правилом $a_D \leftrightarrow a_S$.

Доведення. Нехай $\langle b \rangle = \text{Ann}(a)$, $\langle a, b \rangle = \langle d \rangle$, $a = a_0 d$, $b = b_0 d$, $\langle a \rangle + \text{Ann}(d) = \langle g \rangle$ для деяких елементів $b, a_0, a, d, g \in R$. Тоді

$$\begin{aligned} (a : (a : b)) &= (a : \langle a_0 \rangle + \text{Ann}(d)) = (a : a_0) \cap (a : \text{Ann}(d)) = \\ &= (\langle d \rangle + \text{Ann}(a_0)) \cap (a : g) = (\langle a \rangle + \text{Ann}(a) + \text{Ann}(a_0)) \cap (\langle \frac{a}{g} \rangle + \text{Ann}(g)) = \\ &= (\langle a \rangle + \text{Ann}(a)) \cap (\langle \frac{a}{g} \rangle + \text{Ann}(g)) \subseteq \langle d \rangle = \langle a, b \rangle. \end{aligned}$$

Для доведення протилежного включення зауважимо, що $a \in (a : (a : b))$, а тому ми повинні лише довести, що $b \in (a : (a : b))$. Оскільки $\text{Ann}(g) \subseteq \text{Ann}(a) = \langle b \rangle \subseteq \langle d \rangle$, то $\text{Ann}(g) \cap \langle d \rangle = \text{Ann}(g)$. Так як $g = ar + d_0$ для деяких $r \in R, d_0 \in \text{Ann}(d)$, то $bg = bar + bd_0 = 0$ і $\langle b \rangle \subseteq \text{Ann}(g) \subseteq \langle d \rangle \cap \langle \frac{a}{g} \rangle + \text{Ann}(g) = (a : (a : b))$, що і потрібно було довести.

Доведення завершується такою рівністю: $(a : (a : (a : \text{Ann}(a)))) = (a : \langle a \rangle + \text{Ann}(a)) = (a : a) \cap (a : \text{Ann}(a)) = (a : \text{Ann}(a))$. Теорему доведено. $\square$

ВИСНОВКИ:

У даному розділі вивчаються комутативні кільця Безу, зокрема властивості їх головних ідеалів. Головні результати цього розділу є:

- 1) досліджено арифметичні властивості морфічних пар у термінах їх компонент;

2) встановлено критерій морфічності фактор-кільця довільного комутативного кільця;

3) показано, що тензорний добуток головних ідеалів морфічного кільця є ізоморфним їх перетину;

4) знайдено твірні елементи частки та перетину головних ідеалів кільця Безу;

5) доведено, що скінченні гомоморфні образи комутативного кільця Безу за неголовним ідеалом, що породжений не дільником нуля, є морфічним кільцем;

Результати цього розділу опубліковані в роботі: [106].

РОЗДІЛ 5

Слабка група Гротендіка

При побудові класичної групи Гротендіка $K_0(R)$ використовуються скінченно-породжені проективні модулі в якості базових об'єктів. Одним із недоліків $K_0(R)$ можна назвати те, що із рівності її елементів не обов'язково випливає ізоморфізм їх твірних, а має місце стабільна ізоморфність твірних. Утворимо аналог даної конструкції використовуючи процес побудови Мілнора [88], беручи в якості базових об'єктів скінченні прямі суми головних ідеалів комутативного морфічного кільця R . Дану абелеву групу будемо позначати через $K'_0(R)$ і назвемо її слабкою групою Гротендіка морфічного кільця R . Визначивши добуток елементів $K'_0(R)$ як тензорний добуток її твірних, дана абелева група перетворюється на комутативне кільце з 1. Елементи цього кільця можуть бути проінтерпретовані як класи еквівалентності канонічних діагональних форм матриць над R . Зауважимо, що із рівності елементів у $K'_0(R)$ випливає ізоморфізм твірних цих елементів, тобто має місце скорочення ізоморфних головних ідеалів із прямих сум головних ідеалів.

Шукаючи зручний спосіб обчислення суми та добутку елементів із $K'_0(R)$ ми встановлюємо взаємозв'язок із підкільцем $W'(G(R))$ кільця Вітта над глобалізацією даного кільця. Як наслідок, буде показано, що функтори K'_0 та $W'G$ є природно еквівалентними.

Розділ завершується дослідженням властивостей кільця $K'_0(R)$, та встановленням зв'язків між групами $K'_0(R)$ і $K_0(R)$ у випадку регулярних кілець та кілець елементарних дільників.

5.1. Побудова слабкої групи Гротендіка та скорочення головних ідеалів у прямих сумах

Нехай R є комутативним морфічним кільцем. Побудуємо групу $K'_0(R)$, яка буде аналогом класичної групи Гротендіка $K_0(R)$, розглядаючи класи ізоморфізмів скінченних прямих сум головних ідеалів в якості базових об'єктів. Використаємо процедуру побудови Мілнора з [88].

Позначимо через

$$\Delta(R) = \{a_1 R \oplus \dots \oplus a_n R \mid a_1, \dots, a_n \in R\}$$

множину усіх скінченних прямих сум головних ідеалів кільця R . Розглядаючи відношення еквівалентності “ $\sim$ ” на множині $\Delta(R)$ визначене за правилом

$$g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow g_1 \cong g_2$$

для $g_1, g_2 \in \Delta(R)$, ми утворимо вільну абелеву групу $F(R)$ породжену множиною $\Delta(R)/\sim$. Оскільки елементи із $\Delta(R)$ є у взаємно-однозначній відповідності із множиною усіх скінченних діагональних матриць над кільцем R , та згідно з [80] відомо, що кожна діагональна матриця D є еквівалентною деякій нормальній формі Сміта (що позначатимемо як SNF), то у кожному класі еквівалентності елементів з $\Delta(R)$ за відношенням “ $\sim$ ” ми можемо обрати деяку нормальну форму Сміта, що

є представником даного класу. Іншими словами, $F(R)$ може розглядатись, як вільна абелева група породжена класами еквівалентності усіх нормальних форм Сміта над кільцем R . Таким чином, елементи множини $\Delta(R)/\sim$ ми будемо позначати через $\text{SNF}(g)$, де $g \in \Delta(R)$.

Означення 5.1.1. Назвемо фактор-групу $K'_0(R)$ вільної абелевої групи $F(R)$ за підгрупою, яка породжена елементами

$$\text{SNF}(g) + \text{SNF}(g') - \text{SNF}(g \oplus g'),$$

слабкою групою Гротендіка морфічного кільця R . Елементи групи $K'_0(R)$ будемо позначати $[g]$.

Тобто, $K'_0(R)$ є абелевою групою, яка породжена усіма класами ізоморфізмів скінченних прямих сум головних ідеалів морфічного кільця R , із операцією додавання, що визначається наступним чином:

$$[g] + [g'] = [g \oplus g'],$$

для довільних $[g], [g'] \in K'_0(R)$.

Зауважимо, що $\text{SNF}(a_1R \oplus \dots \oplus a_nR) = \text{SNF}(b_1R \oplus \dots \oplus b_mR)$ у множині $\Delta(R)/\sim$ тоді і лише тоді, коли

$$\bigoplus_{i=1}^n a_iR \cong \bigoplus_{j=1}^m b_jR$$

та

$$\sum_{j=1}^m \text{SNF}(g_j) = \sum_{k=1}^l \text{SNF}(g'_k)$$

в $F(R)$ тоді і лише тоді, коли $m = l$ та існує підстановка $\pi \in S_m$ така, що $\forall j : g_j \cong g'_{\pi(j)}$.

Визначимо умову рівності елементів у слабкій групі Гротендіка через відповідний ізоморфізм прямих сум головних ідеалів.

Лема 5.1.1. *Два елементи $[g], [g'] \in K'_0(R)$ є рівними тоді і лише тоді, коли*

$$g \oplus X \cong g' \oplus X,$$

для деякого $X = a_1R \oplus \dots \oplus a_nR$, де $a_1, \dots, a_n \in R$.

Доведення. Припустимо, що $[g] = [g']$. Тоді

$$\begin{aligned} \text{SNF}(g) - \text{SNF}(g') &= \sum_i (\text{SNF}(x_i) + \text{SNF}(y_i) - \text{SNF}(x_i \oplus y_i)) - \\ &\quad - \sum_j (\text{SNF}(x'_j) + \text{SNF}(y'_j) - \text{SNF}(x'_j \oplus y'_j)), \end{aligned}$$

для деяких $\text{SNF}(x_i), \text{SNF}(y_i), \text{SNF}(x'_j), \text{SNF}(y'_j) \in F(R)$.

Якщо перенести доданки із від'ємним знаком у протилежний бік рівності, то згідно з вищевказаним зауваженням ми отримуємо

$$g \oplus X \cong g' \oplus X,$$

де $X = (\bigoplus_i (x_i \oplus y_i)) \oplus (\bigoplus_j (x'_j \oplus y'_j)) \in \Delta(R)$.

Навпаки, якщо $g \oplus X \cong g' \oplus X$, то тоді $\text{SNF}(g \oplus X) = \text{SNF}(g' \oplus X)$ в $\Delta(R)/\sim$. Звідси $[g \oplus X] = [g' \oplus X]$ в $K'_0(R)$, а тому $[g] + [X] = [g'] + [X]$ і $[g] = [g']$. Лему доведено. $\square$

Таким чином, будь-які обчислення у групі $K'_0(R)$ зводяться до оперування із виразами, які утворені головними ідеалами. Для глибшого вивчення даного питання нам потрібно з'ясувати: як описуються рівні у $K'_0(R)$ елементи у термінах кільця R ?

У випадку класичної групи Гротендіка $K_0(R)$ кільця R відомим є такий результат:

Лема 5.1.2. *[88] Нехай R є кільцем та дано елементи $[A], [B] \in K_0(R)$. Рівність $[A] = [B]$ можлива тоді і лише тоді, коли $A \oplus R^n \cong B \oplus R^n$.*

$B \oplus R^n$ для деякого натурального числа n . Тобто, елементи $[A], [B] \in K_0(R)$ є рівними тоді і лише тоді, коли A, B є стабільно ізоморфними.

Доведемо, що ізоморфні головні ідеали морфічного кільця можуть скорочуватись у ізоморфних прямих сумах головних ідеалів.

Лема 5.1.3. *Нехай R є морфічним кільцем та дано елементи $A, B, xR \in \Delta(R)$, причому A, B перебувають у канонічній формі. Тоді*

$$A \oplus xR \cong B \oplus xR \Leftrightarrow A = B.$$

Доведення. Припустимо, що

$$A = a_1R \oplus \dots \oplus a_nR, \quad B = b_1R \oplus \dots \oplus b_{n+m}R,$$

де $a_1R \supseteq \dots \supseteq a_nR$, $b_1R \supseteq \dots \supseteq b_{n+m}R$. Згідно з [75], якщо A_1 та B_1 є канонічними формами для $A \oplus xR$ та $B \oplus xR$, тоді $A_1 = B_1$. Обчислимо у явному вигляді A_1 і B_1 , використовуючи інваріанти Фітtingа.

Для спрощення записів у доведенні введемо такі позначення: через $a + b$ та ab будемо позначати ідеали $aR + bR$ та $aR \cap bR$ відповідно. Частковий порядок “ $\leq$ ” відповідає природньому включенню множин.

Після обчислення інваріантів Фітtingа, канонічні форми A_1 та B_1 запишуться у вигляді:

$$A_1 = (a_1 + x) \oplus (a_2 + a_1x) \oplus \dots \oplus (a_n + a_{n-1}x) \oplus (a_nx),$$

$$B_1 = (b_1 + x) \oplus (b_2 + b_1x) \oplus \dots \oplus (b_n + b_{n-1}x) \oplus (b_{n+1} + b_nx) \oplus \\ \oplus \dots \oplus (b_{n+m-1} + b_{n+m}x) \oplus (b_{n+m}x)$$

Із рівності $A_1 = B_1$ отримаємо таку систему рівнянь стосовно головних

ідеалів:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 + x = a_1 + x \\ b_2 + b_1x = a_2 + a_1x \\ \dots \\ b_n + b_{n-1}x = a_n + a_{n-1}x \\ b_{n+1} + b_nx = a_nx \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} b_{n+2} + b_{n+1}x = 0 \\ \dots \\ b_{n+m-1} + b_{n+m}x = 0 \\ b_{n+m}x = 0 \end{array} \right.$$

Із рівняння $b_{n+2} + b_{n+1}x = 0$ ми отримаємо, що $b_{n+2} = 0$, а тому $b_{n+2} = \dots = b_{n+m} = 0$. Оскільки $b_{n+1} + b_nx = a_nx$, то ми робимо висновок, що $b_{n+1} \leq x$ і $b_nx = a_nx$.

Домножуючи (а, по суті, перетинаючи) на ідеал a_n рівняння $b_n + b_{n-1}x = a_n + a_{n-1}x$ ми отримаємо, що

$$a_n + a_nx = a_nb_n + a_nb_{n-1}x = a_nb_n + b_nb_{n-1}x = a_nb_n + b_nx \leq b_n.$$

Проте $a_n = a_n + a_nx$, а тому $a_n \leq b_n$. Аналогічно, домножуючи те саме рівняння на b_n , ми отримаємо, що $b_n \leq a_n$. Отже, $a_n = b_n$.

Знову ж, з рівняння $b_{n+2} + b_{n+1}x = 0$ випливає, що $b_{n+1}x = 0$. Таким чином, домноження рівності $b_{n+1} + b_nx = a_nx$ на ідеал b_{n+1} дає нам

$$b_{n+1} = b_{n+1} + b_nb_{n+1}x = a_nb_{n+1}x = b_nb_{n+1}x = 0.$$

Отже, початкова система рівнянь головних ідеалів спрощується і ми

отримуємо

$$\begin{cases} b_1 + x = a_1 + x \\ b_2 + b_1x = a_2 + a_1x \\ \dots \\ b_{n-1} + b_{n-2}x = a_{n-1} + a_{n-2}x \\ b_n + b_{n-1}x = a_n + a_{n-1}x \\ b_nx = a_nx \end{cases}.$$

Аналогічно, домножуючи рівняння $b_{n-1} + b_{n-2}x = a_{n-1} + a_{n-2}x$ на a_{n-1} , будемо мати рівність

$$a_{n-1}b_{n-1} + a_{n-1}b_{n-2}x = a_{n-1}.$$

Якщо помножити на x обидві частини рівняння $b_n + b_{n-1}x = a_n + a_{n-1}x$, ми отримаємо

$$b_nx + b_{n-1}x = a_nx + a_{n-1}x,$$

а тому $b_{n-1}x = a_{n-1}x$. Із того, що

$$a_{n-1} = a_{n-1}b_{n-1} + a_{n-1}b_{n-2}x$$

випливає, що $a_{n-1} \leq b_{n-1}$. Аналогічно, $b_{n-1} \leq a_{n-1}$. Тому $a_{n-1} = b_{n-1}$.

Повторюючи вказані міркування скінченну кількість разів, наша система зведеться до такого вигляду:

$$\begin{cases} b_1 + x = a_1 + x \\ b_1x = a_1x \end{cases}$$

Але, домножуючи перше рівняння на a_1 ми отримуємо, що

$$a_1 = a_1 + a_1x = a_1b_1 + a_1x = a_1b_1 + b_1x \leq b_1.$$

Після подібних міркувань ми робимо висновок, що $a_1 = b_1$.

Тому, маючи канонічні форми A і B , із ізоморфізму $A \oplus xR \cong B \oplus xR$ випливає, що прямий доданок xR може бути скорочений, тобто $A = B$. Лему доведено. $\square$

Наслідком з цієї леми є теорема, яка наведена нижче.

Теорема 5.1.4. *Нехай R є морфічним кільцем та $[A], [B] \in K'_0(R)$. Тоді $[A] = [B]$ тоді і лише тоді, коли $A = B$, у випадку канонічних форм A, B та $A \cong B$ у всіх інших випадках.*

Доведення. Припустимо, що $[A] = [B]$. Тоді $A \oplus X \cong B \oplus X$, для деякого $X = x_1R \oplus \dots \oplus x_nR$ згідно з Лемою 5.1.1. Нехай A' та B' є канонічними формами

$$A \oplus (x_1R \oplus \dots \oplus x_{n-1}R), \quad B \oplus (x_1R \oplus \dots \oplus x_{n-1}R)$$

відповідно. Тоді із Леми 5.1.3 $A' \oplus x_nR \cong B' \oplus x_nR$ випливає, що $A' = B'$, а звідси

$$A \oplus (x_1R \oplus \dots \oplus x_{n-1}R) \cong B \oplus (x_1R \oplus \dots \oplus x_{n-1}R).$$

Продовжуючи цей процес, в результаті ми отримаємо, що $A \cong B$. Якщо A та B вже перебувають у канонічній формі, то $A = B$. Теорему доведено. $\square$

Таким чином, із рівності елементів $K'_0(R)$ випливає ізоморфізм їх твірних.

У випадку комутативного кільця R класична група Гротендіка $K_0(R)$ перетворюється на кільце, визначаючи добуток за правилом:

$$[P] \cdot [Q] = [P \otimes_R Q]$$

для довільних скінченно-породжених проективних R -модулів P та Q над комутативним кільцем R . Аналогічно, використовуючи Твердження 4.1.9 ми отримуємо наступну теорему.

Теорема 5.1.5. *Нехай R є комутативним морфічним кільцем. Адитивна абелева група $K'_0(R)$ перетворюється на комутативне кільце з одиницею, якщо визначити добуток за правилом:*

$$[aR][bR] = [aR \otimes_R bR]$$

для довільних $a, b \in R$, і поширити, за лінійністю, дану властивість на довільні елементи з $K'_0(R)$.

Зауважимо, що кожен елемент із $K'_0(R)$ може бути записаний єдиним чином у вигляді $[A] - [B]$, де $A, B \in \Delta(R)$ перебувають у канонічній формі та жодна пара $a_i R, b_j R$ не може бути скорочена у виразі $[A] - [B]$.

Розглянемо поведінку слабкої групи Гротендіка $K'_0(R)$ при переході від кільця R до іншого кільця, і визначимо її структуру у найпростіших випадках.

Твердження 5.1.6. K'_0 є функтором із категорії морфічних кілець ***MorphicRings*** у категорію усіх кілець.

Доведення. Нехай $f : R \rightarrow R'$ є гомоморфізмом між морфічними кільцями. Для кожного елемента

$$M = m_1 R \oplus \dots \oplus m_n R \in \Delta(R)$$

визначимо елемент $M' = f_{\#}(M)$ у такий спосіб:

$$f_{\#}(M) = R' \otimes_R M \cong \bigoplus_{i=1}^n (R' \otimes_R m_i R) \cong \bigoplus_{i=1}^n (R' \otimes_R R / \mu_i R) \cong$$

$$\cong \bigoplus_{i=1}^n (R'/f(\mu_i)R') \in \Delta(R').$$

Таким чином, гомоморфізм кілець $f : R \rightarrow R'$ породжує гомоморфізм

$$f_* : \begin{cases} K'_0(R) & \rightarrow K'_0(R') \\ [A] - [B] & \mapsto [f_\#(A)] - [f_\#(B)] \end{cases}$$

абелевих груп $K'_0(R)$ і $K'_0(R')$. Більше того, якщо $[aR], [bR] \in K'_0(R)$ та ми додатково покладемо $gR = aR \cap bR$, $gR \sim \gamma R$, $aR \sim \alpha R$, $bR \sim \beta R$ тоді

$$\begin{aligned} f_*([aR \otimes_R bR]) &= f_*([aR \cap bR]) = [R' \otimes_R (aR \cap bR)] = \\ &= [R' \otimes_R (gR)] = [R' \otimes_R R/\gamma R] = [R'/f(\gamma)R'] = [\text{Ann}(f(\gamma))] \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned} f_*([\text{Ann}(a)]) \cdot f_*([\text{Ann}(b)]) &= [R'/f(\alpha)R'] \cdot [R'/f(\beta)R'] = \\ &= [R'/f(\alpha)R' \otimes_R R'/f(\beta)R'] = [R'/(f(\alpha)R' + f(\beta)R')] = \\ &= [\text{Ann}(f(\alpha)R' + f(\beta)R')] = [\text{Ann}(f(\alpha R' + \beta R'))] = [\text{Ann}(f(\gamma))]. \end{aligned}$$

Отже, f_* є гомоморфізмом кілець, і

$$K'_0 : \mathbf{MorphicRings} \rightsquigarrow \mathbf{Rings}$$

є відображенням із категорії усіх морфічних кілець **MorphicRings** та їх гомоморфізмів у категорію **Rings**, якщо визначити

$$K'_0 : \begin{cases} R & \mapsto K'_0(R) \\ R \xrightarrow{f} R' & \mapsto K'_0(R) \xrightarrow{f_*} K'_0(R'). \end{cases}$$

Перевіримо, що це функтор. Справді, якщо $f = 1_R : R \rightarrow R$ тоді для довільних $[A] - [B] \in K'_0(R)$ ми отримуємо

$$f_*([A] - [B]) = [f_\#(A)] - [f_\#(B)] = [R \otimes_R A] - [R \otimes_R B] = [A] - [B],$$

а звідси $K'_0(1_R) = 1_{K'_0(R)}$. Якщо $R \xrightarrow{f} R' \xrightarrow{g} R''$ є гомоморфізмами морфічних кілець, то переконаємось, що

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

Не зменшуючи загальності, візьмемо довільний елемент $[aR] \in K'_0(R)$, і припустимо, що $aR \sim \alpha R$. Тоді

$$(g \circ f)_*([aR]) = [R'' \otimes_R aR] = [R''/g(f(\alpha))R'']$$

і

$$\begin{aligned} g_*(f_*(aR)) &= g_*([R' \otimes_R aR]) = g_*(R'/f(\alpha)R') = \\ &= [R'' \otimes_{R'} R'/f(\alpha)R'] = [R''/g(f(\alpha))R'']. \end{aligned}$$

Отже, K'_0 є функтором. Твердження доведено. $\square$

Як наслідок, можна показати, що K'_0 зберігає прямі добутки морфічних кілець:

$$K'_0\left(\prod_i R_i\right) \cong \prod_i K'_0(R_i).$$

Теорема 5.1.7. *Нехай R є морфічним кільцем. Тоді з $K'_0(R)$ виділяється прямий доданок ізоморфний кільцю цілих чисел $\mathbb{Z}$.*

Доведення. Розглянемо довільний максимальний ідеал M кільця R , та визначимо природний гомоморфізм

$$f : R \rightarrow F = R/M$$

кільця R у поле F . Тоді K'_0 індукує гомоморфізм

$$f_* : K'_0(R) \rightarrow \mathbb{Z} \cong K'_0(F).$$

Відображення

$$i_* : \begin{cases} \mathbb{Z} & \rightarrow K'_0(R) \\ n & \mapsto n[R] \end{cases}$$

є мономорфізмом, причому $f_* i_* = 1_{\mathbb{Z}}$ та коротка точна послідовність

$$0 \rightarrow \ker f_* \rightarrow K'_0(R) \xrightarrow{f_*} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

є розщеплюваною:

$$K'_0(R) \cong \mathbb{Z} \oplus \ker f_*.$$

Із останнього ізоморфізму випливає твердження теореми. $\square$

Теорема 5.1.8. *Нехай R – морфічне кільце. Якщо $K'_0(R) \cong \mathbb{Z}$, то R є полем, і навпаки.*

Доведення. Згідно з попередньою теоремою, ізоморфізм $K'_0(R) \cong \mathbb{Z}$ є можливим тоді і лише тоді, коли для кожного максимального ідеалу M кільця R

$$\ker f_* = 0$$

де $f : R \rightarrow F = R/M$ є природнім гомоморфізмом.

Припустимо, що $\ker f_* = \{[A] - [B] \mid f_*([A]) = f_*([B])\} = 0$. Останній вираз означає, що якщо $f_*([A]) = f_*([B])$, то $[A] = [B]$. Оскільки R є морфічним кільцем, то елемент $A \in \Delta(R)$ зображується у вигляді

$$A = R/a_1R \oplus \dots \oplus R/a_nR,$$

де $a_1R \subseteq \dots \subseteq a_nR$. Тоді

$$f_{\sharp}(R/a_iR) = R/M \otimes_R R/a_iR \cong R/(M + a_iR) = \begin{cases} F, & a_i \in M; \\ 0, & a_i \notin M. \end{cases}$$

Звідси отримуємо, що $f_*([A]) = k$, де число $k \in \{1, \dots, n\}$ є таким, що $a_1, a_2, \dots, a_k \in M$, $a_{k+1}, \dots, a_n \notin M$. Оскільки, із рівності $f_*([A]) = f_*([B])$ випливає, що ланцюги ідеалів $a_1R \subseteq \dots \subseteq a_nR$ та $b_1R \subseteq \dots \subseteq b_mR$ мають однакову кількість елементів в ідеалі M . Таким чином, умова $\ker f_* = 0$ означає, що існує щонайбільше один ланцюг вигляду $a_1R \subseteq \dots \subseteq a_kR$ довжини k всередині ідеалу M , для кожного $k \geq 0$. Але, якщо ми розглянемо єдиний ланцюг ідеалів довжини $k \geq 2$ в M , то кожен його член є ланцюгом довжини 1 в M . Проте, усі ланцюги довжини 1 є рівними, а тому, існує щонайбільше 1 головний ідеал aR у ідеалі M . Якщо $M \neq aR$, тоді існує $b \in M \setminus aR$, таке, що $aR \neq bR$. Але це неможливо, бо aR є єдиним ланцюгом довжини 1, а тому $M = aR$.

Більше того, якщо розглянути елементи $[A] = [R \oplus R \oplus aR]$ і $[B] = [R \oplus aR]$ тоді $f_*([A]) = f_*([B]) = 1$, і звідси $[A] = [B]$. Тоді

$$[R \oplus R \oplus aR] = [R \oplus aR],$$

і ми переконуємося, що $[R] = [0]$. Згідно з Теоремою 5.1.4 ми отримуємо, що $R = 0$. Дана суперечність свідчить про те, що такого максимального ідеалу M не існує. Повторюючи дану процедуру для кожного максимального ідеалу, ми отримуємо, що максимальних ідеалів окрім нульового не існує, а тому R є полем. Теорему доведено. $\square$

5.2. Зв'язок слабкої групи Гротендіка із кільцями Вітта

Знайдемо зручний спосіб додавання та множення елементів у $K'_0(R)$. Розпочнемо із добре відомого у К-теорії означення кільця Вітта.

Означення 5.2.2. *Кільцем Вітта (або векторами Вітта) над комутативним кільцем R називають множину*

$$W(R) = 1 + tR[[t]] = \{1 + a_1t + a_2t^2 + \dots \mid a_1, a_2, \dots \in R\},$$

яка є абелевою групою стосовно операції множення формальних степеневих рядів (ця операція відповідає додаванню у кільцях), а множення визначене за правилом згортки у такий спосіб: для довільного елемента $f(t) \in W(R)$ існує розклад вигляду

$$f(t) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + r_i t),$$

а тому для будь-якого $r \in R$ визначимо операцію

$$(1 + rt) * f(t) = f(rt),$$

яку поширюємо на нескінченні добутки. Оддиницею кільця $W(R)$ є елемент $1 + t$, а 1 є нулем.

Перед безпосереднім застосуванням вказаної конструкції введемо ще одне означення:

Означення 5.2.3. *Нехай R є комутативним кільцем Безу. Непівкільце*

$$G(R) = \{aR \mid a \in R\}$$

головних ідеалів цього кільця стосовно додавання та перетину ідеалів назвемо глобалізацією кільця R .

Оскільки $G(R)$ є лише напівкільцем, то $W(G(R))$ теж буде напівкільцем, використовуючи схожу із кільцем Вітта конструкцію. Визначимо піднапівкільце

$$W_0(G(R)) = \{1 + (a_1 R)t + (a_2 R)t^2 + \dots + (a_n R)t^n \mid a_1 R \supseteq \dots \supseteq a_n R, n \geq 0\}$$

напівкільця $W(G(R))$.

Кожен елемент $f(t) = 1 + (a_1 R)t + (a_2 R)t^2 + \dots + (a_n R)t^n \in W_0(G(R))$ може бути зображений у вигляді

$$f(t) = \prod_{i=1}^n (1 + a_i R t).$$

Одиницею напівкільця $W_0(G(R))$ є $1 + Rt$, а 1 є нульовим елементом.

Більше того, якщо

$$f(t) = 1 + \sum_{i=1}^n (a_i R)t^i, \quad g(t) = 1 + \sum_{j=1}^m (b_j R)t^j$$

є довільними елементами $W_0(G(R))$, то їх сума та добуток обчислюються за формулами

$$f(t) \cdot g(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n+m} \left(\sum_{i+j=k} (a_i R \cap b_j R) \right) t^k,$$

$$f(t) * g(t) = \prod_{j=1}^m f((b_j R)t) = \prod_{i=1}^n g((a_i R)t) = \prod_{i,j=1,1}^{n,m} (1 + (a_i R \cap b_j R)t).$$

Після безпосередніх обчислень ми робимо висновок, що сума та добуток також належать до $W_0(G(R))$.

Теорема 5.2.9. *Якщо R є морфічним кільцем то*

$$K'_0(R) \cong W'(G(R)),$$

де $W'(G(R))$ є кільцеве поповнення напівкільця $W_0(G(R))$.

Доведення. Позначимо через $\frac{f(t)}{g(t)}$ операцію віднімання у кільці $W'(G(R))$ для елементів $f(t), g(t)$ (насправді, це формальне ділення многочленів). Таким чином, кільце $W'(G(R))$ – це множина елементів вигляду

$$\frac{1 + (a_1 R)t + \dots + (a_n R)t^n}{1 + (b_1 R)t + \dots + (b_m R)t^m},$$

де $a_1 R \supseteq \dots \supseteq a_n R$, $b_1 R \supseteq \dots \supseteq b_m R$, $n, m \geq 0$, із операцією додавання

$$\frac{a(t)}{b(t)} + \frac{c(t)}{d(t)} = \frac{a(t)c(t)}{b(t)d(t)}$$

та множенням

$$\frac{a(t)}{b(t)} * \frac{c(t)}{d(t)} = \frac{(a(t) * c(t))(b(t) * d(t))}{(a(t) * d(t))(b(t) * c(t))}$$

для довільних $a(t), b(t), c(t), d(t) \in W_0(G(R))$. Визначимо відображення

$$F_R : \begin{cases} K'_0(R) & \rightarrow W'(G(R)) \\ [A] - [B] & \mapsto \frac{a(t)}{b(t)} = (1 + \sum_{i=1}^n (a_i R)t^i) / (1 + \sum_{j=1}^m (b_j R)t^j), \end{cases}$$

де $A = a_1 R \oplus \dots \oplus a_n R$, $B = b_1 R \oplus \dots \oplus b_m R$ є канонічною формою.

Відображення F_R є бієкцією, оскільки канонічна форма є визначена однозначно та $a(t)$ і $b(t)$ мають однозначні розклади

$$a(t) = \prod_{i=1}^n (1 + (a_i R)t), \quad b(t) = \prod_{j=1}^m (1 + (b_j R)t).$$

Дане відображення є гомоморфізмом, оскільки

$$\begin{aligned} F_R([A] - [B]) + F_R([C] - [D]) &= F_R([A \oplus C] - [B \oplus D]) = \frac{a(t)c(t)}{b(t)d(t)} = \\ &= F_R([A] - [B]) \cdot F_R([C] - [D]), \end{aligned}$$

а також

$$F_R([A] - [B])([C] - [D]) = F_R([A \otimes_R C] + [B \otimes_R D] - [B \otimes_R C] - [A \otimes_R D]) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\prod_{i,j}(1 + (a_i R \cap c_j R)t) \prod_{k,l}(1 + (b_k R \cap d_l R)t)}{\prod_{i,l}(1 + (a_i R \cap d_l R)t) \prod_{k,j}(1 + (b_k R \cap c_j R)t)} = \\
&= \frac{(a(t) * c(t))(b(t) * d(t))}{(a(t) * d(t))(b(t) * c(t))} = \frac{a(t)}{b(t)} * \frac{c(t)}{d(t)} = F_R([A] - [B]) * F_R([C] - [D]).
\end{aligned}$$

Тому, F_R є ізоморфізмом. Теорему доведено. $\square$

Твердження 5.2.10. *Відображення*

$$W' = W_0^{-1}W_0 : \mathbf{Rings} \rightsquigarrow \mathbf{Rings}$$

$$W_0 : \mathbf{Semirings} \rightsquigarrow \mathbf{Semirings}$$

$$G : \mathbf{BezoutRings} \rightsquigarrow \mathbf{Semirings}$$

є функторами.

Доведення. Якщо покласти

$$W'(f) : \begin{cases} W'(R) & \rightarrow W'(R') \\ \frac{1+a_1t+\dots+a_nt^n}{1+b_1t+\dots+b_mt^m} & \mapsto \frac{1+f(a_1)t+\dots+f(a_n)t^n}{1+f(b_1)t+\dots+f(b_m)t^m}, \end{cases}$$

$$W_0(f) : \begin{cases} W_0(R) & \rightarrow W_0(R') \\ 1 + a_1t + \dots + a_nt^n & \mapsto 1 + f(a_1)t + \dots + f(a_n)t^n, \end{cases}$$

$$G(f) : \begin{cases} G(R) & \rightarrow G(R') \\ aR & \mapsto f(a)R' \end{cases}$$

для гомоморфізму $f : R \rightarrow R'$ у відповідній категорії, то образами f є гомоморфізми $W'(f), W_0(f), G(f)$ у відповідних категоріях. Проста перевірка показує, що W', W_0 і G зберігають одиничні гомоморфізми та композиції гомоморфізмів. Отже, W', W_0 і G є функторами. $\square$

Теорема 5.2.11. *Функтори K'_0 та $W'G$ є природно ізоморфними:*

$$K'_0 \approx W'G.$$

Доведення. За попередньою теоремою $K'_0(R) \cong W'(G(R))$ для кожного морфічного кільця R , за допомогою ізоморфізму F_R . Так, якщо $f : R \rightarrow R'$ є довільним гомоморфізмом кілець R і R' то

$$\begin{array}{ccc} K'_0(R) & \xrightarrow{F_R} & W'(G(R)) \\ \downarrow K'_0(f) & & \downarrow W'(G(f)) \\ K'_0(R') & \xrightarrow{F_{R'}} & W'(G(R')) \end{array}$$

є комутативною діаграмою, оскільки

$$\begin{aligned} (W'(G(f)) \circ F_R)([A] - [B]) &= W'(G(f))((1 + \sum_{i=1}^n (a_i R) t^i) / (1 + \sum_{j=1}^m (b_j R) t^j)) = \\ &= (1 + \sum_{i=1}^n (f(a_i) R') t^i) / (1 + \sum_{j=1}^m (f(b_j) R') t^j) = (F_{R'} \circ K'_0(f))([A] - [B]). \end{aligned}$$

Тому, $K'_0 \approx W'G$. Теорему доведено. $\square$

Із цієї теореми випливає спосіб обчислення нормальної форми Сміта блочної суми $A \oplus B$ та Кронекерового добутку $A \otimes B$ двох заданих матриць A і B , які вже перебувають у нормальній формі Сміта. Оскільки добуток між елементами у $K'_0(R)$ може бути здійснений шляхом скінченної кількості операцій додавання (що впливає із дистрибутивності тензорного добутку стосовно скінченних прямих сум), то виникає потреба у швидкому обчисленні суми елементів у $K'_0(R)$.

Наведемо один із можливих способів. Якщо $[A] = [a_1 R \oplus \dots \oplus a_n R]$ і $[B] = [b_1 R \oplus \dots \oplus b_m R]$ є елементами з $K'_0(R)$, які перебувають у

канонічних формах, то зобразивши $[A]$ і $[B]$ у вигляді

$$[X] \mapsto \begin{pmatrix} x_n & x_{n-1} & \cdots & x_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ 0 & x_n & \cdots & x_2 & x_1 & 1 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots x_n & x_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & x_n \end{pmatrix} \in M_{n+m}(G(R)),$$

та перемножуючи їх в $M_{n+m}(G(R))$, ми отримаємо матрицю, яка буде зображенням суми $[A \oplus B]$. Іншими словами: якщо J є жордановим блоком у $M_{n+m}(G(R))$ із нульовими елементами по діагоналі, то

$$[A] \leftrightarrow a_n E + a_{n-1} J + \dots + a_1 J^{n-1} + J^n,$$

$$[B] \leftrightarrow b_n E + b_{m-1} J + \dots + b_1 J^{m-1} + J^m,$$

$$[A \oplus B] \leftrightarrow (a_n E + \dots + a_1 J^{n-1} + J^n)(b_n E + \dots + b_1 J^{m-1} + J^m),$$

і цей добуток буде зображати шуканий результат. Проте, існує простіший метод, а саме, обчислити добуток

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n+m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & 1 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ 0 & a_n & \cdots & a_2 & a_1 & 1 & \cdots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots a_n & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & a_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{m-1} \\ b_m \end{pmatrix}$$

і ми отримаємо суму $[C] = [A \oplus B]$, яка є у нормальній формі Сміта.

5.3. Структура елементів слабкої групи Гротендіка

У цьому підрозділі ми доведемо ряд властивостей кільця $K'_0(R)$, де R є морфічним кільцем.

Лема 5.3.12. *Кожен ідемпотент е кільця $K'_0(R)$ може бути зображений у вигляді*

$$e = [aR]([R] - [bR]),$$

для деяких елементів $a, b \in R$.

Доведення. Нехай $[A] - [B]$ є довільним ідемпотентом кільця $K'_0(R)$, причому він записаний скороченій формі (тобто, A, B перебувають у канонічних формах та жодна пара $a_i R, b_j R$ не може бути скорочена). Тоді $([A] - [B])^2 = [A] - [B]$, а тому

$$[A]^2 + [B]^2 + [B] = [A] + 2[A][B].$$

Припустимо, що $A' = a_2 R \oplus \dots \oplus a_n R \neq 0$. Звідси $[A]^2 = [a_1 R \oplus A'][A] = [A] + [A'][A]$ і тому

$$[A]^2 + [B]^2 + [B] = [A] + 2[A][B].$$

Оскільки старші за включенням компоненти лівої та правої частини вказаного виразу є рівними, то $a_1 R \cap a_2 R + b_1 R = a_1 R \cap b_1 R$, а звідси ми отримуємо, що $a_2 R \subseteq b_1 R$, $a_2 R = a_1 R \cap b_1 R$. Більше того, якщо $A'' = a_3 R \oplus \dots \oplus a_n R$ тоді

$$\begin{aligned} [A'][A] &= [a_2 R \oplus A''] [a_1 R \oplus a_2 R \oplus A''] = [a_2 R \oplus a_2 R \oplus 3A''] + [A'']^2 = \dots = \\ &= [2a_2 R \oplus 4a_3 R \oplus \dots \oplus (2n - 2)a_n R], \end{aligned}$$

$$[B]^2 + [B] = [2b_1 R \oplus 4b_2 R \oplus \dots \oplus (2m)(b_m R)].$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m 2k[b_k R] + \sum_{i=2}^n (2i-2)[a_i R] &= 2[a_1 R \cap b_1 R] + \\ &+ 2 \sum_{i=2}^n [a_i R \cap b_1 R] + 2 \sum_{k=2}^m [a_1 R \cap b_k R] + 2 \sum_{i,k=2}^{n,m} [a_i R \cap b_k R]. \end{aligned}$$

Але $a_i R \cap b_1 R = a_i R$, де $2 \leq i \leq n$ і $a_2 R = a_1 R \cap b_1 R$, тому, скорочуючи обидві частини рівності, ми маємо, що

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m 2k[b_k R] + \sum_{i=3}^n (2i-4)[a_i R] &= \\ &= 2 \sum_{i=2}^n [a_i R \cap b_2 R] + 2 \sum_{k=2}^m [a_1 R \cap b_k R] + 2 \sum_{i=2,k=3}^{n,m} [a_i R \cap b_k R]. \end{aligned}$$

Знову, використовуючи рівність старших компонент ми отримуємо, що $b_1 R + a_3 R = a_1 R \cap b_2 R$, а тому $b_1 R \subseteq a_1 R$, $b_1 R = b_2 R$. Використовуючи той факт, що $a_1 R \cap b_k R = b_k R$, для $1 \leq k \leq m$ ми отримуємо спрощення

$$4[b_2 R] + \sum_{k=3}^m (2k-2)[b_k R] + \sum_{i=4}^n (2i-6)[a_i R] = 2[a_2 R] + 2 \sum_{i=2,k=3}^{n,m} [a_i R \cap b_k R].$$

Із рівності старших компонент випливає, що $a_2 R = b_1 R = b_2 R$, а звідси ми отримуємо, що елемент $[A] - [B]$ не є записаним у скороченій формі. Із отриманої суперечності випливає, що $A' = 0$ і $A = aR$, для деякого $a \in R$. Тоді, із $([aR] - [B])^2 = [aR] - [B]$ випливає, що

$$[aR] + [B]^2 + [B] = [aR] + 2[aR][B],$$

і звідси

$$\sum_{k=1}^m (2k)[b_k R] = 2 \sum_{k=1}^m [aR \cap b_k R].$$

Оскільки обидві частини рівності є у канонічних формах, то $b_1R = aR \cap b_1R$. Отже, $b_1R \subseteq aR$ і тому

$$\sum_{k=1}^m (2k)[b_kR] = 2 \sum_{k=1}^m [b_kR].$$

Кількість ненульових доданків зліва є рівною $m^2 + m$, а справа – $2m$. Оскільки ми припускали, що $[B]$ є у скороченій формі, то єдиним можливим варіантом є той, коли $m^2 + m = 2m$, а тому $m = 1$.

Отже, кожен ідемпотент $[A] - [B]$ записується у вигляді $[A] - [B] = [aR] - [aR \cap bR]$, де $aR \supseteq bR$, або

$$[A] - [B] = [aR]([R] - [bR]).$$

Лему доведено. $\square$

Лема 5.3.13. $[A]$ є оборотним елементом кільця $K'_0(R)$ тоді і лише тоді, коли $[A] = [R]$.

Доведення. Нехай $[A]([C] - [D]) = [R]$ і $[C] - [D]$ є у скороченій формі. Тоді $[A][C] = [R] + [A][D]$ із рівності старших компонент випливає, що $a_1R \cap c_1R = R$. Легко бачити, що $a_1R = c_1R = R$. Припустимо, що $A = R \oplus A'$, $C = R \oplus C'$, $C' \neq 0$. Тоді із

$$[A'] + [C'] + [A'][C'] = [D] + [A'][D]$$

маємо, що $a_2R + c_2R = d_1R$. Нехай $A' = a_2R \oplus A''$, $C' = c_2R \oplus C''$, $D = (a_2R + c_2R) \oplus D'$.

Після підстановки ми отримуємо:

$$\begin{aligned} & [a_2R] + [A''] + [c_2R] + [C''] + [a_2R \cap c_2R] + [a_2R][C''] + [c_2R][A''] + \\ & + [A''] [C''] = [a_2R + c_2R] + [D'] + [a_2R + c_2R][A'] + [a_2R + c_2R][D'], \end{aligned}$$

а звідси

$$[a_2R + c_2R] + 2[a_2R \cap c_2R] + [A''] + [C''] + [a_2R][C''] + [c_2R][A''] + \\ + [A''][C''] = [a_2R + c_2R] + 2[D'] + [a_2R] + [A''].$$

Після скорочення рівних доданків по обидві сторони рівності ми отримуємо, що

$$2[a_2R \cap c_2R] + [C''] + [a_2R][C''] + [c_2R][A''] + [A''][C''] = 2[D'] + [a_2R].$$

Тоді $a_2R \cap c_2R = a_2R + d_2R$ і $d_2R \subseteq a_2R$. Більше того, $a_2R \cap c_2R = a_2R$ і $a_2R \subseteq c_2R$. Таким чином, робимо висновок, що $d_1R = a_2R + c_2R = c_2R$ і елемент $[C] - [D]$ не є записаним у скороченій формі. Із цієї суперечності випливає, що $C' = 0$ і $c_2R = 0$. Отже, $[A'] = [A'][D] + [D]$, а тому $a_2R = d_1R$. Таким чином, із рівності $[a_2R] + [A''] = ([a_2R] + [A''])([a_2R] + [D']) + [a_2R] + [D']$ випливає, що $[a_2R] + 2[D'] + [A''][D'] = 0$, і тому $a_2R = 0$. Як наслідок, $[A] = [R]$. Лему доведено. $\square$

Лема 5.3.14. *Якщо старші стосовно включення компоненти елементів $[A], [B] \in K'_0(R)$ є взаємно простими та мають нульовий перетин, то $[A] - [B] \in U(K'_0(R))$ тоді і лише тоді, коли $[A] - [B] = [R] - 2[xR]$, для деякого елемента $[xR] \in K'_0(R)$.*

Доведення. Припустимо, що $[A] - [B] \in U(K'_0(R))$. Тоді $[A]^2 + [B]^2 = ([A] - [B])^2 \in U(K'_0(R))$, а тому $[A]^2 + [B]^2 = [R]$. Першою і другою компонентою $[A]^2 + [B]^2 \in a_1R + b_1R, a_2R + a_1Rb_1R + b_2R$, і з єдиності канонічної форми випливає, що $a_1R + b_1R = R$ і $a_2R + b_2R = a_2R + a_1Rb_1R + b_2R = 0$. Тоді $a_2R = b_2R = 0$ і $[A] - [B] = [aR] - [bR]$, для деяких взаємно простих елементів $a, b \in R$. Отже, $[A] - [B] =$

$$= [aR \oplus bR] - 2[bR] = [(aR + bR) \oplus (aR \cap bR)] - 2[bR] = [R] - 2[bR].$$

Лему доведено. $\square$

Твердження 5.3.15. *Якщо R є морфічним кільцем, то $K'_0(R)$ є редукованим кільцем.*

Доведення. Припустимо, що $[A] - [B] \in K'_0(R)$ є нільпотентним елементом і

$$([A] - [B])^2 = [0].$$

Тоді $[A]^2 + [B]^2 = 2[A \otimes_R B]$. За Теоремою 5.1.4 ця рівність еквівалентна рівності канонічних форм $(A \otimes_R A) \oplus (B \otimes_R B)$ і $(A \otimes_R B) \oplus (A \otimes_R B)$. Проте, старшим членом правої частини є $a_1 R \cap b_1 R$, а $a_1 R + b_1 R$ – лівої частини. Тоді

$$a_1 R, b_1 R \subseteq a_1 R + b_1 R = a_1 R \cap b_1 R \subseteq a_1 R, b_1 R.$$

Звідси $a_1 R = b_1 R$, і ми скорочуємо ці компоненти у $[A] - [B]$. Продовжуючи цей процес, ми отримуємо, що $[A] - [B]$ – це лише $[X] = [x_1 R \oplus \dots \oplus x_k R]$, причому $[X]^2 = 0$.

Старша компонента $[X]^2$ рівна $x_1 R$ і є нульовою, а тому і $[X] = [A] - [B]$ є рівним $[0]$. Отже, $K'_0(R)$ є редукованим кільцем. Теорему доведено. $\square$

У випадку комутативного регулярного кільця R ситуація спрощується. Нехай $a \in R$. Тоді існує $x \in R$, такий, що $a^2 x = a$ і згідно з Твердженням 4.1.1

$$aR \sim (1 - ax)R.$$

Таким чином $aR + \text{Ann}(a) = R$ і

$$aR + \text{Ann}(a) = R, \quad aR \cap \text{Ann}(a) = aR \cap (1 - ax)R = aR \cdot (1 - ax)R = 0.$$

Елементи кільця $K'_0(R)$ отримують такий вигляд: якщо $[A] - [B] \in K'_0(R)$ то

$$[A] - [B] = [\bigoplus_{i=1}^n a_i R] + [\bigoplus_{j=1}^m \text{Ann}(b_j)] - \sum_{j=1}^m [b_j R \oplus \text{Ann}(b_j)] = [A'] - m[R]$$

для деяких $[A'] \in K'_0(R)$. Іншими словами, отримано результат, який можемо сформулювати за допомогою твердження нижче.

Твердження 5.3.16. *Якщо R є комутативним регулярним кільцем, тоді*

$$K'_0(R) = \{[A] - m[R] \mid m \geq 0, A = a_1 R \oplus \dots \oplus a_n R\}.$$

Відомо, що для кожного проективного модуля P над кільцем R існує деякий вільний R -модуль F та підмодуль Q модуля F , що

$$P \oplus Q = F.$$

Тому, кожен елемент в $K_0(R)$ може бути записаний у вигляді $[P_1] - [P_2]$, і, крім того,

$$[P_1] - [P_2] = [P_1 \oplus Q_2] - [P_2 \oplus Q_2] = [P_1 \oplus Q_2] - n[R],$$

де $P_2 \oplus Q_2 \cong R^n$. Таким чином, вивчення структури групи $K'_0(R)$ допоможе вивчити будови групи Гротендіка $K_0(R)$.

Наступний результат є важливим з огляду на його зв'язок із звичайною групою Гротендіка регулярного кільця R .

Теорема 5.3.17. *Якщо R є регулярним кільцем, то*

$$K_0(R) = K'_0(R).$$

Доведення. Оскільки кожне комутативне регулярне кільце є кільцем із властивістю заміни, то згідно з [114] кожен скінченно-породжений

проективний модуль є прямою сумою головних ідеалів породжених ідемпотентами. Крім того, якщо кожен головний ідеал регулярного кільця породжується деяким ідемпотентом і пряма сума головних ідеалів є проективним модулем. Отже, оскільки твірні співпадають, то $K_0(R) = K'_0(R)$. Теорему доведено. $\square$

Теорема 5.3.18. *Якщо R є комутативним морфічним кільцем елементарних дільників, то $K_0(R) \subseteq K'_0(R)$.*

Доведення. Довільний скінченно-породжений проективний модуль над кільцем R є скінченно-зображуваним, а тому, є прямою сумою циклічно-зображуваних модулів, які ізоморфні головним ідеалам даного кільця. Тому твірні групи Гротендіка $K_0(R)$ належать $K'_0(R)$, і виконується шукане включення. Теорему доведено. $\square$

ВИСНОВКИ:

У даному розділі вводиться та вивчається слабка група Гротендіка морфічного кільця. Встановлено, що:

- 1) ізоморфні головні ідеали можна скорочувати у ізоморфних прямих сумах головних ідеалів морфічних кілець;
- 2) слабка група Гротендіка ізоморфна підкільцю кільця Вітта над глобалізацією морфічного кільця;
- 3) функтор слабкої групи Гротендіка ізоморфний добутку функтора глобалізації на функтор, який відповідає певному підкільцю кільця Вітта;
- 4) слабка група Гротендіка є редукованим кільцем, а також знайдені її ідемпотенти та оборотні елементи;
- 5) слабка група Гротендіка співпадає із звичайною групою Гротен-

діка для регулярних кілець;

б) звичайна група Гротендіка є підгрупою слабкої групи Гротендіка для морфічних кілець елементарних дільників.

Результати даного розділу опубліковано в роботі [107].

Загальні висновки

Дисертація присвячена дослідженню стабільного рангу кілець, зокрема узагальнено адекватних кілець, вивченню властивостей головних ідеалів кілець Безу та морфічних кілець, введено поняття слабкої групи Гротендіка морфічного кільця. Також вивчаються некомутативні дуо-кільця елементарних дільників.

У дисертації автором отримано такі нові результати:

- 1) введено поняття слабкої групи Гротендіка морфічного кільця та досліджено властивості її елементів;
- 2) встановлено взаємозв'язок між слабкою групою Гротендіка та підкільцем кільця Вітта над глобалізацією морфічного кільця;
- 3) встановлено рівність слабкої та звичайної групи Гротендіка для регулярних кілець а також наведено необхідну умову кільця елементарних дільників у термінах груп Гротендіка;
- 4) введено поняття майже вільного від квадратів елемента та показано, що такі елементи є адекватними елементами майже стабільного рангу 1 у дуо-областях Безу;
- 5) показано, що елемент дуо-області Безу є майже вільним від квадратів тоді і лише тоді, коли фактор-кільце по головному ідеалу, який він породжує, є регулярним кільцем;
- 6) доведено, що фактор-кільце комутативного кільця Безу за головним ідеалом, який породжений не дільником нуля, є морфічним кільцем, а також наведено умови, коли фактор-кільце довільного комутативного кільця є морфічним;

7) встановлено взаємозв'язок між морфічними парами при арифметичних операціях у термінах твірних цих пар;

8) показано, що стабільний ранг узагальнено адекватного кільця рівний 2, а також, що такі кільця є кільцями елементарних дільників;

9) доведено, що морфічне праве МРІ-кільце є строго регулярним кільцем тоді і лише тоді, коли воно є дуо-кільцем.

Список використаних джерел

- [1] Андрунакиевич В. А. Радикалы алгебр и структурная теория / В. А. Андрунакиевич, Ю. М. Рябухин // М.: Наука. — 1979.
- [2] Басс Х. Алгебраическая К-теория / Х. Бас // — М. : Мир, — 1973.
- [3] Биркгоф Г. Теория структур / Г. Биркгоф // М. М: Издательство иностранной литературы. — 1952.
- [4] Білявська С. І. Стабільний ранг адекватного кільця / С. І. Білявська, Б. В. Забавський // Мат. студії. — 2008. — 33. — 2. — С.212–214.
- [5] Білявська С.І. Елементи стабільного та майже стабільного стабільного рангу 1 / С. І. Білявська // Вісник Львів.нац.ун-ту, — 2009. — 71. — С.5–12.
- [6] Білявська С. І. Зв'язок адекватних кілець з чистими кільцями / С. І. Білявська, Б. В. Забавський // Прикл. проблеми мех. і мат. — 2010. — 8. — С.28–32.
- [7] Ван дер Варден Б. Л. Алгебра / Б. Л. Ван дер Варден // М.: Наука, — 1976.
- [8] Васюник І. С. Стабільний ранг дуо-кільця Безу та його узагальнення / І. С. Васюник, Б. В. Забавський // Прикл. пробл. мех. і мат. — 2011. — 9. — С.69–73.
- [9] Васюник І. С. Кільця майже одиничного стабільного рангу 1 / І. С. Васюник, Б. В. Забавський // Укр. Мат. Журн. — 2011. — 63. — 6. — С.840–843.
- [10] Гаркуша Г. А. $\mathbb{F}P$ -инъективные и слабо квазифробениусовые кольца / Гаркуша Г. А. // Записки научных семинаров ПОМИ. — 1999. — 265. — С.110–129.

- [11] Гаталевич А. І. Некомутативні кільця елементарних дільників / А. І. Гаталевич, Б. В. Забавський // Математичні методи і фізико-механічні поля. — 1997. — 40. — 4. — С.86–90.
- [12] Гаталевич А. І. Про адекватні та узагальнено-адекватні дуо-кільця і дуо-кільця елементарних дільників / А. І. Гаталевич // Мат. студії. — 1998. — Т.9. — 2. — С.115–119.
- [13] Гаталевич А. І. Про адекватні праві дуо-кільця / А. І. Гаталевич // Вісник Львівського університету. — 1996. — 43. — С.16–19.
- [14] Джекобсон Н. Теория колец / Н. Джекобсон // М.: Издательство иностранной литературы. — 1947.
- [15] Дрозд Ю. А. Об обобщенно однорядных кольцах / Ю. А. Дрозд // Мат. заметки. — 1975. — 18. — №5. — Р.705–710.
- [16] Дубровин Н. И. О кольцах с элементарными делителями / Н. И. Дубровин // Известия вузов. Математика. — 1986. — №11. — С.14–20.
- [17] Забавский Б. В. Адекватное в нуле кольцо является кольцом со свойством замены / Забавский Б. В., Белявская С. И. // Фунд. Прикл. Мат. — 2011/2012. — 17. — 3. — С.61–66.
- [18] Забавский Б. В. О некоммутативных кольцах элементарных делителей / Б. В. Забавський // Укр. мат. журн. — 1987. — 39. — №4. — С.440–444.
- [19] Забавский Б. В. О некоммутативных кольцах с элементарными делителями / Б. В. Забавський // Укр.мат.журн. — 1990. — т.42. — №6. — С.847–850.
- [20] Забавський Б. В. Адекватні кільця елементарних дільників зі скінченним числом мінімальних простих ідеалів / Б. В. Забавський // В збірнику Алгебра і топологія. — Львів. — ЛНУ. — 1996. — С.74–79.
- [21] Забавський Б. В. Узагальнено адекватні кільця / Забавський Б. В. // Укр. Мат. Журн. — 1996. — 48. — 4. — С.554–557.

- [22] Забавський Б. В. Редукція матриць над кільцями Безу стабільного рангу не більше 2 / Забавський Б. В. // Укр. Мат. Журн. — 2003. — 55. — 4. — С.550–554.
- [23] Zabavsky B. V. Diagonalization of matrices over ring with finite stable rank / B. V. Zabavsky // Вісник Львівс. унів. — 2003. — 61. — С.206–211.
- [24] Забавський Б. В. Про РР-квазі-дуо кільця елементарних дільників / Забавський Б. В. // В збірнику Алгебра і топологія. — 1993. — С.40–49.
- [25] Забавський Б. В. Слабка глобальна розмірність скінченних гомоморфних образів комутативної області Безу / Забавський Б. В., Білявська С. І. // Прикл. Пробл. Мат. і Мех. — 2012. — 10. — С.71–73.
- [26] Забавский Б. В. Дистрибутивные области с элементарными делителями / Забавский Б. В., Комарницкий Н. Я. // Укр. Мат. Журн. — 1990. — 42. — 7. — С.1000–1004.
- [27] Забавський Б. В. Про стабільний ранг кілець матриць / Б. В. Забавський, В. М. Петричкович // Укр.мат.журн. — 2009. — 61. — №11. — С.1575–1578.
- [28] Забавський Б. В. Редукція матриць над правими кільцями Безу скінченного стабільного рангу / Б. В. Забавський // Мат. Студії. — 2001. — 16. — №2. — С.115–116.
- [29] Комарницький М. Я. Зауваження про адекватні кільця / Комарницький М. Я., Забавський Б. В. // Вісник Льв. Унів., Львів. — 1988. — 27. — С.43–45.
- [30] Забавський Б. В. Теорема Коенового типу для адекватності та кільця елементарних дільників / Забавський Б. В., Комарницький М. Я. // Мат. Мет. та фіз.-мех. поля. — 2008. — 51. — 4. — С.94–98.

- [31] Кириченко В. В. Обобщенно однорядные кольца / В. В. Кириченко // Мат. Сборник. — 1976. — 99. — №4 — С.559–581.
- [32] Кон П. Свободные кольца и их связи / Кон П. // — М.: Мир. — 1975. — 422с.
- [33] Сорокін О. С. Стабільний ранг узагальнено адекватного кільця / Сорокін О. С. // Прикл. проблеми мех. і мат. — 2012. — 10. — С.82–85.
- [34] Сорокін О. С. Морфійні праві МРІ-кільця / Сорокін О. С. // Прикл. проблеми мех. і мат. — 2013. — 11. — С.79–81.
- [35] Сорокін О. С. Скінченні гомоморфні образи дуо-областей Безу / Сорокін О. С. // Конф. молодих учених "Підстригачівські читання — 2014 Львів. — 2014.
- [36] Суслин А. А. Законы взаимности и стабильный ранг колец многочленов / А. А. Суслин // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1979. — 43. — 6. — С.1394–1429.
- [37] Туганбаев А. А. Кольца элементарных делителей и дистрибутивные кольца / Туганбаев А. А. // Успехи. Мат. Наук. — 1991. — 46. — 6. — С.219–220.
- [38] Туганбаев А. А. Теория колец. Арифметические модули и кольца / Туганбаев А. А. // МЦНМО, Москва. — 2009. — 472с.
- [39] Al-Ezeh H. Pure ideals in commutative reduced Gelfand rings with unity / Al-Ezeh H. // Arch. Math. — 1989. — 13. — P.266–269.
- [40] Amitsur S. A. Remarks of principal ideal rings / S. A. Amitsur // Osaka Math. Journ. — 1963. — 15. — P.59–69.
- [41] Ara P. Separative cancellation for projective modules over exchange rings / Ara P., Goodearl K. R., O'Meara K. C., Pardo E. // Israel J. of Math. — 1998. — 105. — 1. — P.105–137.

- [42] Asano K. Neichtkommutative Hauptidealringe / K. Asano // Act. Sci Ind, 696. — 1938. Hermann, Paris.
- [43] Bass H. K-theory and stable algebra / Bass H. // Publ.Math. — 1964. — 22. — P.5–60.
- [44] Bourbaki N. Algèbre, Ch. X /Bourbaki N. // Masson, Paris — 1980.
- [45] Brewer J. W. Lattice ordered groups and conjecture for adequate domains / Brewer J. W., Conrad P., Montgomery H. // Proc. Amer. Math. Soc. — 1974. — 43. — 1. — P.31–35.
- [46] Camiloo V. P. Exchange rings, units and idempotents / V. P. Camiloo, H. P. Yu // Comm. Algebra. — 1994. — 22. — P.4737–4749.
- [47] Cohen I. S. Commutative rings with restricted minimum conditions / Cohen I. S. // Duke Math. J. — 1950. — 15. — P.24–42.
- [48] Cohn P. M. The complement of a finitely generated direct summand of an abelian group / P. M. Cohn // Proc. Amer. Math. Soc. — 1956. — 7. — P.520–521.
- [49] Cohn P. M. A construction of simple principal right ideal domains / P. M. Cohn // Proc. Amer. Math. Soc. — 1977. — 66. — №2 — P.217–222.
- [50] Cohn P. M. On the structure of the GL_2 of a ring / P. M. Cohn // Publ.Math. I.H.E.S. — 1966. — №30. — P.5–59.
- [51] Cohn P. M. Rings with a transfinite weak algorithm /P. M. Cohn // Bull. London Math. Soc. — 1969. — 1. — P.55–59.
- [52] Cohn P. M. Some remarks on projective-free ring /P. M. Cohn // Algebra univers., — 49. — 2009. — P.159–164.
- [53] Cohn P. M. Two examples of principal ideal domains /P. M. Cohn, A. H. Schofield // Bull. London Math. Soc. — 1985. — 17. — №1. — P.26–28.

- [54] Cohn P. M. Right principal Bezout domains / P. M. Cohn // J. London Math. Soc. — 1987. — 35. — №2 — P.251–262.
- [55] Colby R.R. Rings which have flat injective modules / Colby R.R. // J. Algebra — 1975. — 35. — P.239–252.
- [56] Cooke G. A. A weakening of euclidean property for integral domains and applications to algebraic number theory // J. fur die Reine and Angw. Math. — 1976. — 283/284. — P. 71–85.
- [57] Dickson L. E. Algebras and their arithmetics / L. E. Dickson // University of Chicago. Press. — Chicago. — 1923.
- [58] Erlich G. Units and one-sided units in regular rings / G. Erlich // Trans. Amer. Math. Soc. — 1976. — 216. — P.81–90.
- [59] Estes D. Stable range in commutative rings / D. Estes, J. Ohm // J.Algebra. — 1967. — 7. — P.343–362.
- [60] Fieldhouse D. J. Pure theories / Fieldhouse D. J. // Math. Ann. — 1969. — 184. — P.1–18.
- [61] Gillman L. Some remarks about elementary divisor rings / Gillman L., Henriksen M. // Trans. Amer. Math. Soc. — 1956. — 82. — P.362–365.
- [62] Gillman L. Rings of continuous functions in which every finitely generated ideal is principal / Gillman L., Henriksen M. // Trans. Amer. Math. Soc. — 1956. — 82. — 2. — P.366–391.
- [63] Gilmer R. Multiplicative ideal theory / R. Gilmer // Queen's paper in Pure and Applied Mathematics, Queen's University, Kingston, Ontario. — 1968. — №12.
- [64] Glaz S. Commutative Coherent Rings / Glaz S. // Springer-Verlag — 1989. — P.347.
- [65] Goodearl K. R. Von Neumann regular rings / K. R. Goodearl // Piltman, London-San Francisco-Melbourne. — 1979. — 369p.

- [66] Helmer O. L. The elementary divisor for certain rings without chain condition / O. Helmer // Bull. Amer. Math. Soc. — 1943. — 49. — №2. — P.225–236.
- [67] Henriksen M. Some remarks on elementary divisor rings II / Henriksen M. // Michigan Math. J. — 1955. — 3. — 2. — P.159–163.
- [68] Henriksen M. On a class of regular rings that are elementary divisor rings / Henriksen M. // Arch. Math. — 1973. — 24. — P.133–141.
- [69] Jacobson N. Pseudo-linear transformation / N. Jacobson // Ann. of Math. — 1937. — 38. — P. 484–507.
- [70] Jain S. K. Cyclic Modules and the Structure of rings/ S. K. Jain, K. Ashish, Srivastava, A. Askar, Tuganbaev // Oxford, University press. — 2012. — P.219.
- [71] Jategaonkar A. V. Left principal ideal rings / A. V. Jategaonkar // Lectures Notes in Mathematics, 123, Springer, Berlin-New York. — 1970.
- [72] Jøndrup S. Rings in Which Pure Ideals are Generated by Idempotents / Jøndrup S. // Mathematica Scandinavica — 1972. — 30. — P.177–185.
- [73] Jonsson B. Direct Decomposition of Finite Algebraic Systems / Jonsson B., Tarski A. // Dame Mathematical Lectures, University of Notre Dame. — 1947. — 5. — P.160.
- [74] Lafon J. P. Modules de presentation finite et de type fini sur un anneau-arithmetique / Lafon J.P. // Sump. mubh. Ist. naz. alta.-mat. Conv. nov. 1971-maggio. — 1972. — 11. — P.121–141.
- [75] Kaplansky I. Elementary divisors and modules / Kaplansky I. // Trans. Amer. Math. Soc. — 1949. — 66. — P.464–491.
- [76] Kaplansky I. Infinite Abelian Groups / I. Kaplansky. — Univer. of Michigan Press. — 1965. — 91p.

- [77] Lam T. Y. Exercises in classical ring theory / Lam T. Y. // Problem Books in Mathematics. Springer, Berlin, Heidelberg, NewYork. — 2005. — 195. — P.380.
- [78] Lam T. Y. Quasi-duo rings and stable range descent / Lam T. Y., Dugas A. S. // J.Pure Appl.Alg. — 2005. — 195. — P.243–259.
- [79] Lambek J. Lectures on rings and modules / Lambek J. // Blaisdell Publishing. — 1966. — P.280.
- [80] Larsen M. Elementary divisor rings and finitely presented modules / M. Larsen, W. Lewis, T. Shores // Trans. Amer. Math. Soc. — 1974. — 187. — P.231–248.
- [81] Mahmood R. D. On GP-ideals / Mahmood R. D., Khalil S. M. // Raf. J. of Comp. Math. — 2009. — 6. — 3. — P.57–63.
- [82] Mahmood R. D. Maximal generalization of pure ideals / Mahmood R. D., Mahmood A. B. // Raf. J. of Comp. Math. — 2008. — 4. — 1. — P.21–27.
- [83] Mahmood R. D. On rings whose maximal essential ideals are pure / Mahmood R. D., Mahmood A. B. // Raf. J. of Comp. Math. — 2007. — 4. — 1. — P.57–62.
- [84] McDowell K. Commutative Coherent rings / / K. McDowell // McMaster University. — 1974. — P.106.
- [85] McGovern W. Neat ring // J. of Pure and Appl. Algebra. — 2006. — 205. — P.243–265.
- [86] Mc. Govern W. Bezout rings with almost stable range 1 are elementary divisor rings / W. Mc. Govern // J. Pure and Appl. Algebra. — 2007. — 212. — P.340–348.
- [87] Menal P. On regular rings with stable range 2 / P. Menal, J. Moncasi // J. Pure and Appl. Algebra — 1982. — 24 — P.25–40.

- [88] Milnor J. W. Introduction to algebraic K-theory / Milnor J. W. // Annals of Mathematics Studies — 1971. — 72. — P.200.
- [89] Mohammad H. Q. On rings whose principal ideals are generalized pure ideals / Mohammad H. Q. // Raf. J. of Comp. Math. — 2007. — 4. — 1. — P.63–68.
- [90] von Neumann J. On regular rings /J. von Neumann // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1936. — 22. — P.702–713.
- [91] Nicholson W. K. Lifting idempotents and exchange rings // Trans. Amer. Math. Soc. — 1977. — 229 — P.269–278.
- [92] Nicholson W. K. Rings with the dual of the isomorphism theorem / Nicholson W. K., Sanchez Campos E. // J. Algebra. — 2004. — 271. — P.391–406.
- [93] Nicholson W. K. Quasi-Frobenius rings / Nicholson W. K., Yousif M. F. // Cambridge University Press. — 2003. — 158. — P.327.
- [94] Rotman J. An introduction to homological algebra / Roitman J. // Academic Press. — 2008. — P.710.
- [95] Rubei L. A. Solution to problem 6117 / L. A. Rubei // Amer. Math. Monthly. — 1978. — 85. — P.505–506.
- [96] Rush D. E. Rings which resemble rings of entire functions / D. E. Rush // Glasgow Math. — 1983. — 24. — №1. — P.7–16.
- [97] Rush D. E. Bezout domains with stable range 1 / D. E. Rush // J. Pure and Appl. Algebra. — 2001. — 158. — P.309–324.
- [98] Shores T. Modules over semihereditary Bezout rings / Shores T. // Proc. Amer. Math. Soc. — 1974. — 46. — 2. — P.211–213.
- [99] Shores T. Decomposition of modules and matrices / T. Shores, R. Wiegand // Bull. Amer. Math. Soc. — 1973. — 79. — 6. — P.1277–1280.
- [100] Shores T. Some criteria for Hermite rings and elementary divisor rings / T. Shores, R. Wiegand // Can. J. Math. — 1974. — 6. — P.1380–1383.

- [101] Smith H. J. S. On systems of linear indeterminate equations and congruences / H. J. S. Smith // Philos. Trans. Roy. Soc., London. — 1861. — 151. — 2. — P.293–326.
- [102] Sorokin O. S. Stable range of generalized adequate ring / Sorokin O. S. // Modern Probl. of Mech. and Math., Lviv. — 2013. — 3. — P.203.
- [103] Sorokin O. S. Right MPI-morphic rings and their applications / Sorokin O. S. // 9th International Algebraic Conference in Ukraine, Lviv. — 2013. — P.251.
- [104] Sorokin O. S. Finite homomorphic images of Bezout duo-domains / Sorokin O. S. // International Algebraic Conference dedicated to 100th anniversary of L.A. Kaluzhnin, Kyiv. — 2014. — P.81.
- [105] Sorokin O. S. Finite homomorphic images of Bezout duo-domains / Sorokin O. S. // Carpathian Math. Publ. — 2014. — 6. — 2. — P.360–366.
- [106] Sorokin O. S. Arithmetical properties of principal ideals in morphic rings / Sorokin O. S. // Glob. J. of Pure and Appl. Math. — 2015. — 11. — 1. — P.377–390.
- [107] Sorokin O. S. On the weak Grothendieck group of a morphic ring and its representations / Sorokin O. S. // Math. and Stat. — 2015. — 3. — 1. — P.16–24.
- [108] Stenström B. Coherent rings and FP-injective modules / Stenström B. // J. London Math.Soc. — 1970. — 2. — P.323–329.
- [109] Teichmüller O. Der Elementarteilsatz für nichtkommutative Ringe / O. Der Teichmüller // Abh. Preuss. Acad. Wiss. Phys. Math. Kl. — 1937. — P.169–177.
- [110] Vaserstein L. N. Bass' first stable range condition / L. N. Vaserstein // J. Pure and Appl. Alg. — 1984. — 34. — P.319–330.

- [111] Vasserstein L. N. The stable rank of ring and dimensionality of topological spaces / L. N. Vasserstein // *Funct. Anal. Appl.* — 1971. — V.5. — P.102–110.
- [112] Vaserstein L. N. An answer to a question of M. Newmann on matrix completion / L. N. Vaserstein // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1997. — №2. — P.189–196.
- [113] Walker E. A. Cancellation in direct sums of groups / E. A. Walker // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1956. — 7. — P.898–902.
- [114] Warfield R. B. Exchange Rings and Decompositions of Modules / Warfield R. B. // *Math. Ann.* — 1972. — 199. — P.31–36.
- [115] Warfield R. B. Decomposibility of finitely presented modules / R. B. Warfield // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1970. — 25. — 2. — P.167–172.
- [116] Warfield R. B. Stable equivalence of matrices and resolutions / R. B. Warfield // *Comm. Algebra.* — 1978. — 17. — P.1811–1828.
- [117] Wedderburn J. H. M. On matrices whose coefficients are functions of single variable / J. H. M. Wedderburn // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1915. — 16. — №2. — P.328–332.
- [118] Wedderburn J. H. M. Non-commutative domains of integrity / J. H. M. Wedderburn // *J. Reine Andrew Math.* — 1932. — 167. — № 1. — P.129–141.
- [119] Weibel C. The K-book: an introduction to algebraic K-theory / Weibel C. // *Graduate Studies in Math.*, AMS. — 1995. — 145. — P.568.
- [120] Wiegand R. Commutative rings whose finitely generated modules are direct sums of cyclics / Wiegand R., Wiegand S. // *Lecture Notes Math.* — 1977. — 616. — P.406–423.
- [121] Yu H.-P. On quasi-duo rings / Yu H.-P. // *Glasgow Math. J.* — 1995. — 37. — P.21–31.

- [122] Zabavsky B. V. Diagonalizability theorem for matrices over ring with finite stable range / Zabavsky B. V. // Algebra and Discrete Math. — 2005. — 1. — P.134–148.
- [123] Zabavsky B. V. Diagonal reduction of matrices over rings / Zabavsky B. V. // Mathematical Studies, Monograph Series. VNTL Publishers. — 2012. — 16. — P.249.
- [124] Zabavsky B. V. Diagonal reduction of matrices over finite stable range rings / Zabavsky B. V. // Mat. Stud. — 2014. — 41. — 1. — P.101–108.
- [125] Zabavsky B. V. Fractionally regular Bezout rings / Zabavsky B. V. // Mat. Stud. — 2009. — 32. — 1. — P.76–80.
- [126] Zabavsky B. V. Questions related to the K-theoretical aspect of Bezout rings with various stable range conditions / Zabavsky B. V. // Mat. Stud. — 2014. — 42. — 1. — P.89–103.