НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Сорокін Олексій Сергійович

УДК 512.552.13

КІЛЬЦЯ ПОВ'ЯЗАНІ З УМОВАМИ СТАБІЛЬНОГО РАНГУ

01.01.06 – алгебра та теорія чисел

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

дисертації на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2015

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі алгебри і логіки Львівського національного університету імені Івана Франка Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Забавський Богдан Володимирович,
Львівський національний університет
імені Івана Франка,
професор кафедри алгебри і логіки.

Офіційні опоненти**:** доктор фізико-математичних наук, професор
Петравчук Анатолій Петрович,
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка,
завідувач кафедри алгебри та математичної логіки;

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Щедрик Володимир Пантелеймонович,
Інститут прикладних проблем механіки і
математики ім. Я.С. Підстригача НАН України,
провідний науковий співробітник відділу алгебри.

Захист відбудеться 27 жовтня 2015 р. о 15 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.03 Інституті математики НАН України за адресою: 01601, м. Київ, вул. Терещенківська,3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституті математики НАН України.

Автореферат розісланий 15 вересня 2015 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Максименко С.І.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Поняття стабільного рангу кільця відіграє фундаментальну роль при вивченні структурних властивостей кілець. Впродовж останніх десятиліть такі автори як Амітцур, Ара, Менал, Монказі, Гудьорл, Капланський, Кон, Хенріксен, Лем, Забавський[1], Чен, Ніколсон, МакГоверн, Кушо, Хурана, Срівастава, Ройтман, Вассерштейн[2], Суслін та багато інших досліджували питання впливу стабільного рангу кільця на його властивості та поведінку при розв'язанні різноманітних теоретико-кільцевих задач. Таким чином прослідковується тісний взаємозв'язок між стабільним рангом та іншими властивостями кілець. Зокрема, дане поняття виявилося дуже дієвим у задачах діагоналізації матриць.

У дисертаційній роботі встановлюються принципові зв’язки методів теорії матриць над кільцями з сучасними досягненнями алгебраїчної K-теорії. При дослідженні проблем алгебри матриць над кільцями неможливо обійтись без застосування результатів K-теорії.

Поняття стабільного рангу кільця було введено у 1964році Х.Басом[3] і сучасні дослідження з теорії матриць над кільцями лише підтверджують важливість цього поняття в теорії кілець та модулів. Такого роду дослідженнями займались Ларсен, Левіс, Шорес, Вігант, МакГоверн, Кашу, Менал, Монказі, Ара, Гудьорл, Забавський, Петричкович, Гаталевич, О.Романів. Отже, ці дослідження об’єднують давно відомі результати з сучасними досягненнями теорії кілець.

Це стало мотивацією для більш глибокого дослідження стабільного рангу різних класів кілець, зокрема: адекватних кілець, всюди адекватних кілець, кілець матриць над регулярним кільцем та їх узагальнень. Крім того, в різний час різними авторами (Менал[4], Монказі[4], Камілло[5], Чен[6], МакГоверн[7]) вводяться різні узагальнення поняття стабільного рангу.

---

[1] Zabavsky B. V. *Diagonal reduction of matrices over rings* / B. V. Zabavsky // Math. Stud, Monograph Series. VNTL Publishers. – 2012. – 16. – 249 p.

[2] Vasserstein L. N. *The stable rank of ring and dimentionality of topological spaces* / L. N. Vasserstein // Funct. Anal.Appl. – 1971. – 5. – P.102–110.

[3] Bass H. *K-theory and stable algebra.* / H. Bass // Inst. Hautes. Edutes. Sci. Publ. Math. – 1964. –22, №1. – P.5–60.

[4] Menal P., *On regular rings with stable range 2.* / P. Menal, J. Moncasi // J. Pure Appl. Alg. –1982. –24. – P.25–40.

[5] Camillo V. *Stable range one for rings with many idempotents.*/ V. Camillo, H.-P Yu // Trans. Amer. Math. Soc. –1995. – 37, №8. – P.3141–3147.

[6] Chen H. *Generalized exchange stable ring* / H. Chen // South East Asian. Bull. Math. – 2000. –24. – P. 19–24.

[7] McGovern W. *Bezout ring with almost stable range 1 are elementary divisor rings.* / W. McGovern // J. Pure. and Appl. Algebra. – 2007. – 212. – P.340-348.

Дослідження кілець елементарних дільників почалося ще в 1861 році Смітом[8]. Він довів, що довільну матрицю з цілочисельними елементами можна звести до діагонального вигляду за допомогою елементарних перетворень рядків та стовпців, причому кожен діагональний елемент є дільником наступного (у зв'язку з цим, таку діагональну форму матриці з умовою подільності діагональних елементів часто називають формою Сміта). Згодом, теорема Сміта була поширена на різні класи кілець. Діксон[9], Ведербарн[10], Ван дер Варден[11] і Джекобсон[12] поширили цю теорему на різні класи комутативних та некомутативних кілець Евкліда, а також на комутативні області головних ідеалів. Варто виділити результати Капланського[13], Кона[14], Аміцура[15], Гілмана[16] та Хенріксена[16], які стосуються кілець елементарних дільників.

Для довільного кільця головних ідеалів теорема про можливу діагональну редукцію матриць була доведена Леві[17] та Робсоном[18]. Ці результати в найбільш повному обсязі викладено у монографії Джекобсона.

Глибокий зв'язок кілець елементарних дільників та теорії модулів прослідковується у результаті Капланського[19] (який ввів поняття кільця елементарних дільників): над кільцем елементарних дільників довільний скінченно-зображуваний модуль ізоморфний прямій сумі циклічних модулів. Ларсен, Левіс і Шорес[20] довели і обернене твердження у випадку комутативних кілець. Тобто, комутативні кільця елементарних дільників є кільцями над якими довільний скінченно-зображуваний модуль є прямою сумою циклічних модулів, що є відповіддю

---

[8]Smith H. *On systems of linear indeterminate equation and congruences* / H. Smith // Philos. Trans. Roy. Soc. London. – 1861. – 151, №2. – P.293–326.

[9]Dickson L. *Algebras and their arithmetics* / L. Dickson // Bull. Amer. Math. Soc. – 1924. – 30, №5–6. – P. 247 –257.

[10]Wedderburn J. H. M. *On matrices whose coefficient are functions of a single variable* / J. H. M. Wedderburn // Trans. Amer. Math. Soc. – 1915. – 16, №3. – P.328–332.

[11]Van der Warden B. *Modern Algebra* / B. Van der Warden // Berlin, New York, Springer. – 1931. – 274 p.

[12]Джекобсон Н. *Теория колец* / Н. Джекобсон // М.:Издательство иностранной л-ри. – 1947. – 287 с.

[13]Kaplansky I. *Commutative rings* / I. Kaplansky //The University of Chicago Press, Chicago and London. – 1974. – 182p.

[14]Cohn P. *Right principal Bezout domains* / P. Cohn // J. London. Math. Soc. – 1987. – 35, №2. – P.251–262.

[15]Amitsur S. *Remark of principal ideal ring* / S. Amitsur // Osaka Math. J. – 1963. – 15. – P.59 –69.

[16]Gilman L. *Some remarks about elementary divisor ring.* / L. Gilman, M. Henriksen // Trans. Amer. Math. Soc. – 1965. – 82. – P.362 –365.

[17]Levy L. S. *Sometimes only square matrices can be diagonalized* / L. S. Levy // Proc. Amer. Math. Soc. – 1975. – 52. – P.18–22.

[18]Robson J. *Rings in which finitely generated right ideals are principal* / J. Robson // Proc. London Math. Soc. – 1967. – 317, №4. – P.617–628.

[19]Kaplansky I. *Elementary divisors and modules* / I. Kaplansky // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – 66. – P.464 –491.

[20]Larsen M. *Elementary divisor rings and finitely presented modules* / M. Larsen, W. Lewis, T. Shores // Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. – 187. – P.231–248.

на питання Капланського[19], Кона[21], Хенріксена про описання класу кілець елементарних дільників. Також вказане твердження є частковою відповіддю до проблеми Уорфілда[22]: описати кільця над якими кожен скінченно-зображуваний модуль є прямою сумою циклічних модулів. У некомутативному випадку дана проблема розв'язана лише частково. Наприклад, розв'язання цієї проблеми для класу узагальнено однорядних кілець отримане Дроздом[23]; також слід відмітити результати у цьому напрямку Кириченка[24], Капланського[19] і Лафона[25]. Зауважимо, що некомутативні кільця елементарних дільників мало досліджені та описані лише частково.

Враховуючи те, що кільце елементарних дільників є кільцем Безу, тоді виникає запитання: чи довільне кільце Безу є кільцем елементарних дільників? У роботі Гілмана та Хенріксена[26] у класі кілець функцій C(X) визначеним над певним топологічним простором X було побудовано приклад комутативного кільця Безу (з дільниками нуля), яке не є кільцем елементарних дільників, а це дозволило звузити дане питання про кільця елементарних дільників до класу областей Безу.

Більшість відомих класів кілець елементарних дільників суттєво залежить від умов обриву зростаючих ланцюгів ідеалів. Перший приклад кільця елементарних дільників без умов на ланцюги ідеалів був вказаний Ведербарн[20] ще в 1915 році, а саме таким є кільце аналітичних функцій. В більш абстрактній формі, цей приклад дозволив Хелмеру[27] ввести новий клас кілець елементарних дільників, який отримав назву класу адекватних кілець. З вивченням адекватних кілець пов'язані дослідження таких математиків, як Капланський, Ведерберн, Ларсен, Гілман, Хенріксен. В той же час, структурна будова таких кілець мало досліджена. Відомо, що в адекватному кільці довільний ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі[26].

Алгебраїчна К-теорія, а зокрема дослідження К-функторів, започатковані у 1957 році у працях А. Гротендіка, пов'язаних із алгебраїчною геометрією. З теорії кілець зображень відомо, що кільця Вітта квадратичних форм і інші подібні конструкції мають зв'язок із К-функтором. Також серед витоків даної теорії можна назвати роботи Хігмана, Дьєдоне, Серра, Ріма, Суона, Басса. Функтор К згодом знайшов широке застосування у топології, зокрема у роботах Атьї, Хірцербруха, Адамса

---

[21] Кон П. *Свободные кольца и их связи* / Кон П. // М.: Мир. – 1975. – 422с.
[22] Warfield R. B. *Stable equivalence of matrices and resolutions* / R. B. Warfield // Comm. Algebra. – 1978. – 17. – P.1811–1828.
[23] Дрозд Ю. А. *Об обобщенно однорядных кольцах* / Ю. А. Дрозд // Мат. заметки. – 1975. – 18, №5. – C.705–710.
[24] Кириченко В. В. *Обобщенно однорядные кольца* / В. В. Кириченко // Мат. Сборник. – 1976. – 99, №4 – C.559–581.
[25] Lafon J. P. *Modules de presentation finite et de type fini sur un anneau-arithmetique* / J. P. Lafon // Sump. mubh. Ist. naz. alta.-mat. Conv. nov. 1971-maggio. – 1972. – 11. – P.121–141.
[26] Gilman L. *Rings of continuous functions in which every finitely generated ideal is principal.* / L.Gilman, M. Henriksen // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – 82. – P.366–391.
[27]Helmer O. *The elementary divisor for certain rings without chain condition.* / O. Helmer // Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – 49, №4. – P.225–236.

та інших. Алгебраїчна K-теорія є частиною загальної лінійної алгебри, вона розробляє структурну будову проективних модулів та їх груп. Іншою мовою, вона узагальнює теореми існування і єдиності бази лінійного простору над полем, а також загальні теоретико-групові результати про лінійні групи над полями. Розвиток алгебраїчної K-теорії дає можливість прослідкувати вдосконалення формулювань цих теорем при переході до загальних алгебраїчних понять, аніж поля. Наприклад, групи Гротендіка та Уайтхеда можна розглядати як ступінь відхилень цих результатів від класичної теорії. Важливим моментом у згаданих дослідженнях є теорія «стабільності», яка полягає у тому, що загальні закономірності поведінки досліджуваних об'єктів проявляються при переході до границі у розмірностях об'єктів, які розглядаються.

Відомим є те, що скінченно-породжений проективний модуль над комутативним кільцем є скінченно-зображуваним, циклічні модулі над кільцем Безу є ізоморфні як модулі скінченним гомоморфним образам даного кільця. Тобто, кожен скінченно-породжений проективний модуль над комутативним кільцем елементарних дільників R зображується у вигляді скінченної прямої суми циклічних модулів вигляду R/aR, де $a \in R$, причому дане зображення є однозначним, якщо розглядати канонічну форму модуля[19]. Таким чином, вивчення групи Гротендіка комутативного кільця Безу пов'язане із проблемою Уорфілда, яка, як було вже зазначено, є еквівалентна описанню кілець елементарних дільників.

Одним із застосувань теорії стабільності є властивість скорочуваності модулів. Наприклад, якщо кільце має скінченний стабільний ранг, то кожна база скінченно-породженого вільного модуля над цим кільцем має однакову кількість елементів[28]. Питання про скорочуваність виникає природним чином у довільній алгебраїчній системі де визначене поняття прямої суми: чи з того, що $A \oplus C \cong B \oplus C$ у заданій системі випливає, що $A \cong B$? Однією із перших робіт з даної тематики можна назвати роботу 1947 року Джонсона і Тарського[29].

У загальному випадку відповідь на вказане питання суттєво залежить від класу об'єктів, які розглядаються, а також від того, які об'єкти потрібно вміти скорочувати. Наприклад, із основної теореми про скінченно-породжені абелеві групи випливає, що категорія скінченно-породжених абелевих груп володіє властивістю скорочуваності. Також, якщо A та B є довільними абелевими групами, а C є скінченно-породженою, то із того, що $A \oplus C \cong B \oplus C$ випливає, що $A \cong B$ (це незалежно доведене Коном[30] і Уолкером[31]). Переходячи від цілих чисел в якості базового кільця

[28] Weibel C. *The K-book: an introduction to algebraic K-theory* / C. Weibel // Graduate Studies in Math., AMS. – 2013. – 618 p.
[29] Jonsson B. *Direct Decomposition of Finite Algebraic Systems* / B. Jonsson, A. Tarski // Dame Mathematical Lectures, University of Notre Dame. – 1947. – 5. – 160 p.
[30] Cohn P. M. *The complement of a finitely generated direct summand of an abelian group* / P. M. Cohn // Proc. Amer. Math. Soc. – 1956. – 7. – P.520–521.
[31] Walker E. A. *Cancellation in direct sums of groups* / E. A. Walker // Proc. Amer. Math. Soc. – 1956. – 7. – P.898 –902.

до довільного кільця, і розглядаючи категорію скінченно-породжених проективних модулів, виникає задача: чи з рівності елементів [A] = [B] у групі Гротедіка $K_0(R)$ вказаного кільця R випливає ізоморфізм елементів $A \cong B$? В загальному випадку відома лише стабільна ізоморфність їх представників: $A \oplus R^n \cong B \oplus R^n$, тобто дані модулі стають ізоморфними, якщо додати до кожного із них деякий скінченно-породжений вільний модуль[32]. Проте, переходячи до більш широкого класу твірних, можуть бути отримані кращі результати, що і доведено у даній роботі.

Шоресом[33] показано, що напівспадкове кільце Безу є кільцем елементарних дільників тоді і лише тоді, коли кожен скінченний гомоморфний образ цього кільця стосовно головного ідеалу, який породжений не дільником нуля, є кільцем елементарних дільників. Тобто задача визначення того, чи є комутативна область Безу кільцем елементарних дільників еквівалентна дослідженню канонічної діагональної редукції матриць над її скінченними гомоморфними образами. Протягом останніх років різними авторами було показано, що скінченні гомоморфні образи комутативної області Безу є IF-кільцями[34], P-ін'єктивними[35], когерентними[35], псевдо-нетеровими[36], морфічними[37], слабкої глобальної розмірності 0 або нескінченість[38], які співпадають із своїми класичними кільцями дробів[39]. Ці дослідження належать до загальної концепції визначення властивостей кільця із заданими умовами скінченності або певними гомологічними обмеженнями на його фактор-кільця або фактор-модулі. Детально даному питанню присвячена монографія[40]. В зв'язку із цим цікавим є вивчення гомоморфних образів некомутативних кілець, що і відображено у цій дисертаційній роботі.

Особливу роль в усіх вказаних дослідженнях відіграють головні ідеали кілець, а також фактор-кільця стосовно головних ідеалів. Більшість результатів та понять, які пов'язані із діагоналізацією матриць можуть бути охарактеризовані у цих термінах (Забавський, Чен, Фаччіні, Джейн,

---

[32] Milnor J. W. *Introduction to algebraic K-theory* / J. W. Milnor // Ann. of Math. Stud. – 1971. – 72. – P.200.
[33] Shores T. *Modules over semihereditary Bezout rings* / T. Shores // Proc. Amer. Math. Soc. – 1974. – 46. – 2. – P.211 –213.
[34] Colby R.R. *Rings which have flat injective modules* / R. R. Colby // J. Algebra – 1975. – 35. – P.239 –252.
[35] Nicholson W. K. *Quasi-Frobenius rings* / W. K. Nicholson, M. F. Yousif // Cambridge Univ. Press. – 2003. – 158. – P.327.
[36] McDowell K. *Commutative Coherent rings* / K. McDowell // McMaster Univ. – 1974. – 106 p.
[37] Zabavsky B. V. *Diagonal reduction of matrices over finite stable range rings* / B. V. Zabavsky // Mat. Stud. – 2014. – 41, №1. – P.101–108.
[38] Забавський Б. В. *Слабка глобальна розмірність скінченних гомоморфних образів комутативної області Безу* / Б. В. Забавський, С. І. Білявська // Прикл. Пробл. Мат. і Мех. – 2012. – 10. – С.71–73.
[39] Васюник І. С. *Кільця майже одиничного стабільного рангу 1* / І. С. Васюник, Б. В. Забавський // Укр. Мат. Журн. – 2011. – 63, №6. – С.840–843.
[40] Jain S. K. *Cyclic Modules and the Structure of rings*/ S. K. Jain, A. Srivastava, A. Tuganbaev // Oxford, University press. – 2012. – 219 p.

Срівастава, Туганбаєв, Ніколсон, Камілло, Санчез Кампос). Все це підкреслює актуальність дослідження структури головних ідеалів кілець та їх взаємодії у різноманітних алгебраїчних конструкціях.

Відома теорема Ерліх[41] стверджує, що ендоморфізм f R-модуля M є одинично-регулярним тоді і лише тоді, коли f є регулярним ендоморфізмом та M / $im(f) \cong ker(f)$ як R-модулі. Остання властивість отримала назву дуальної теореми про ізоморфізм, і у випадку лівого регулярного модуля кожен ендоморфізм є домноженням справа на деякий елемент а кільця R, дуальний аналог теореми про ізоморфізм може бути записаний як $R/Ra \cong l(a)$, де $l(a)$ є лівим аннулятором елемента a. Ця конструкція фрагментарно виникала у різни час у дослідженнях пов'язаних із одинично-регулярними кільцями, проте систематичне вивчення кілець із вказаною властивістю розпочалось із роботи Ніколсона і Санчез Кампоса 2004 року, в якій такі кільця отримали назву лівих та правих морфічних кілець. Ці кільця цікаві тим, що вони є правими (лівими) P-ін'єктивними лівими (правими) кільцями Безу, і кожен їх елемент є або оборотним або є лівим чи правим дільником нуля. Крім цього, кожен скінченний гомоморфний образ комутативної області Безу є морфічним кільцем, що може бути використане для побудови різноманітних прикладів та контрприкладів. У вказаній роботі також доведено критерій морфічності кільця: кільце R є лівим (правим) морфічним тоді і лише тоді, коли для кожного елемента $a \in R$ існує такий елемент $b \in R$, що $l(a)=Rb$, $l(b)=R(a)$ ($r(a)=bR$, $r(b)=aR$). Таким чином, множина головних ідеалів лівого (правого) морфічного кільця розпадається на пари головних лівих (правих) ідеалів, які є відповідними аннуляторами одне одного, враховуючи те, що деякий ідеал може бути власним аннулятором. Слід додати, що регулярний елемент кільця є одинично-регулярним тоді і лише тоді, коли він є лівим (або правим) морфічним елементом (тобто для нього виконується дуальний аналог теореми про ізоморфізм). Крім цього, комутативне морфічне кільце є кільцем елементарних дільників тоді і лише тоді, коли кожен скінченно-зображуваний модуль ізоморфний прямій сумі головних ідеалів цього кільця. Все це вплинуло на вибір морфічних кілець та їх властивостей в якості об'єктів дослідження цієї дисертаційної роботи.

У багатьох задачах теорії кілець спектр кільця відіграє вирішальну роль у визначенні його структури. Наприклад, згідно з результатами Коена[42], якщо кожен простий ідеал комутативного кільця є скінченно-породженим, то всі ідеали цього кільця є скінченно-породженими (тобто це нетерове кільце). Проте, у деяких випадках достатньо інформації лише про максимальні ідеали,

---

[41] Erlich G. *Units and one-sided units in regular rings* / G. Erlich // Trans. Amer. Math. Soc. – 1976. – 216. – P.81–90.

[42] Cohen I. S. *Commutative rings with restricted minimum conditions* / I. S. Cohen // Duke Math. J. – 1950. – 15. – P.24–42.

для визначення властивостей даного кільця. Туганбаєвим[43] доведено, що у випадку кільця Безу двобічність його правих максимальних ідеалів, лівих максимальних ідеалів, дистрибутивність гратки правих ідеалів, та дистрибутивність гратки лівих ідеалів є еквівалентними. Лемом та Дугасом[44] показано, що двобічність правих максимальних ідеалів еквівалентна тому, що із лівої взаємної простоти елементів даного кільця випливає їх права взаємна простота. У 1990 році Забавським і Комарницьким[45] показано, що права дистрибутивна область елементарних дільників є дуо-областю, а тому, при вивченні питання - чи некомутативна область Безу є кільцем елементарних дільників, у дистрибутивному випадку достатньо обмежитись дуо-кільцями. Таким чином, дослідження спектру кільця тісно пов'язані із діагоналізацією матриць над такими кільцями. Вищевказані результати спонукали до вивчення ситуації в припущенні про можливість існування дільників нуля у правому дистрибутивному кільці стабільного рангу 1.

Підсумовуючи зауважимо, що тематика дисертаційної роботи відноситься до тих розділів математики, які перебувають у стадії розвитку і мають багато теоретичних та прикладних застосувань.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тематика пов'язана із основними досліджениями кафедри алгебри та логіки механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка. Матеріал дисертацій є складовою частиною досліджень держбюджетної теми (номер державної реєстрації: № ДР0113U003052), яка виконувались на кафедрі алгебри і логіки.

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є вивчення теоретико-структурних властивостей матриць та модулів над кільцями Безу. Зокрема, обчислити стабільний ранг узагальнено адекватних кілець, описати скінченно-зображувані модулі над морфічними кільцями елементарних дільників, а також вивчити будову скінченно-породжених проективних модулів над морфічними кільцями елементарних дільників, тобто, встановити умови на групу Гротендіка для випадку, коли вихідне кільце є кільцем елементарних дільників, вивчити властивість скорочення відповідних модулів над досліджуваними класами кілець.

---

[43] Туганбаев А. А. *Кольца элементарных делителей и дистрибутивные кольца* / А. А. Туганбаев // Успехи. Мат. Наук. – 1991. – 46, №6. – С. 219 –220.

[44] Lam T. Y. *Quasi-duo rings and stable range descent* / T. Y. Lam, A. S. Dugas // J. Pure Appl. Alg. – 2005. – 195. – P.243 –259.

[45] Забавский Б. В. *Дистрибутивные области с элементарными делителями* / Б. В. Забавский, Н. Я. Комарницкий // Укр. Мат. Журн. – 1990. – 42, № 7. – С. 1000–1004.

Об'єктом дослідження є кільця Безу скінченного стабільного рангу.

Предметом дослідження є стабільний ранг та пов'язані з ним властивості елементів кілець і матриць над ними.

Завданнями дослідження є:

– дослідити властивості дуо-областей Безу та їх скінченних гомоморфних образів;
– встановити умови, за яких скінченні гомоморфні образи дуо-областей Безу є регулярними (в сенсі фон Неймана) кільцями;
– обчислити стабільний ранг узагальнено адекватних кілець, а також визначити чи вони є кільцями елементарних дільників;
– описати взаємодію головних ідеалів та скінченні гомоморфні образи різних класів кілець при алгебраїчних операціях, зокрема, визначити їх зв’язок із канонічними діагональними формами матриць і канонічними формами модулів;
– описати нові класи як комутативних так і некомутативних кілець елементарних дільників.

Методи дослідження: у дисертаційній роботі використано методи, які використовуються у теорії кілець та модулів, алгебраїчній K–теорії та лінійній алгебрі.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертаційній роботі вперше:

- введено поняття слабкої групи Гротендіка морфічного кільця, та досліджено властивості її елементів;
- встановлено взаємозв'язок між слабкою групою Гротендіка та підкільцем кільця Вітта над глобалізацією морфічного кільця;
- встановлено рівність слабкої та звичайної групи Гротендіка для регулярних кілець, а також знайдено необхідну умову кільця елементарних дільників у термінах груп Гротендіка;
- введено аналог поняття вільного від квадратів елемента та показано, що такі елементи є адекватними елементами майже стабільного рангу 1 у дуо-областях Безу;
- показано, що елемент дуо-області Безу є майже вільним від квадратів тоді і лише тоді, коли фактор-кільце стосовно головного ідеалу, який він породжує, є регулярним кільцем;
- доведено, що фактор-кільце комутативного кільця Безу стосовно головного ідеалу, який породжений не дільником нуля, є морфічним кільцем, а також наведено умови, коли фактор-кільце довільного комутативного кільця є морфічним;
- встановлено взаємозв'язок між морфічними парами при арифметичних операціях у термінах твірних цих пар;
- показано, що стабільний ранг узагальнено адекватного кільця рівний 2, а також, що такі кільця є кільцями елементарних дільників;

- доведено, що морфічне праве MPI-кільце є строго регулярним кільцем тоді і лише тоді, коли воно є дуо-кільцем.
-

Практичне значення отриманих результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Розроблені методи та одержані результати можуть бути використані у подальших К-теоретичних дослідженнях та у задачах теорії кілець і модулів, які пов'язані з поняттями стабільного рангу та кільцями елементарних дільників.

Особистий внесок здобувача. Усі основні наведені у роботі результати отримані здобувачем самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на:

– міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми механіки і математики", присвяченій 85-річчю від дня народження академіка НАНУ Я. С. Підстригача та 40-річчю заснованого ним ІППММ, м. Львів (21–25 травня 2013 р.);
– IX міжнародній алгебраїчній конференції в Україні, м. Львів (8–13 серпня 2013р.);
– наукова конференція «Підстригачівські читання – 2014» в інституті прикладних проблем механіки і матем. ім. Я.С.Підстригача, м. Львів (28–30 травня 2014р.);
– міжнародна алгебраїчна конференція, присвячена 100-річчю від дня народження Л. А. Калужіна, м. Київ (7–12 липня 2014 р.);

та на наукових семінарах:

– Алгебраїчному семінарі Інституту математики НАН України (Інститут математики НАН України, керівник – член-кореспондент НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор Ю. А. Дрозд, 2015 р.);
– Алгебраїчному семінарі Київського національного університету ім. Т. Г. Шевченка (Київський національний університет імені Тараса Шевченка, керівники: член-кореспондент НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор Ю. А. Дрозд, доктор фіз.-мат. наук, професор В. В. Кириченко, доктор фіз.-мат. наук, професор А. П. Петравчук, 2014 р.);
– Алгебраїчному семінарі «Problems of elementary divisor rings» (Львівський національний університет імені Івана Франка, керівник – доктор фіз.-мат. наук, професор Б. В. Забавський, 2013–2015 рр.);
– Львівському міському алгебраїчному семінарі (Львівський національний університет ім. І. Франка, керівник – доктор фіз.-мат. наук, професор М. Я. Комарницький, 2015 р.).

Публікації. Результати дисертації опубліковано у 5 статтях [1–5] у фахових виданнях з переліку затвердженого МОН України, з них дві праці [4,5] опубліковані у виданнях, що включені до міжнародних наукометричних баз та в 4 тезах доповідей на наукових конференціях.

Структура та об'єм дисертації. Дисертація складається зі вступу та п'яти розділів: «Попередні відомості та допоміжні факти», «Некомутативні кільця Безу скінченного стабільного рангу», «Узагальнено адекватні кільця», «Структура головних ідеалів кілець Безу», «Слабка група Гротендіка», які розділені на підрозділи, висновків та списку використаних джерел. Загальний обсяг роботи становить 131 сторінку. Список використаних джерел налічує 126 найменувань та займає 12 сторінок. Для її оформлення використано видавничу систему LaTeX.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано її мету, завдання та основні задачі, які розв'язуються в цій роботі, вказано наукову новизну отриманих результатів та їх застосування.

У **першому розділі,** який має допоміжний характер, зібрані необхідні означення та факти, пов'язані з тематикою досліджень, що використовуються у дисертації, перелічено необхідні позначення та термінологію, наведені посилання на першоджерела досліджень. Крім того, у даному розділі сформульовано уже відомі результати, які є необхідними для подальшого викладу матеріалу.

У **другому розділі** розглядаються дистрибутивні кільця Безу, досліджено властивості скінченних гомоморфних образів дуо-областей Безу, введено аналог поняття вільного від квадратів елемента кільця, дано відповідь на питання про те, коли скінченний гомоморфний образ дуо-області Безу є регулярним кільцем.

Означення 1.1.7. *Лівим (правим) дуо-кільцем називається кільце, в якому довільний елемент кільця є лівим (правим) дуо-елементом. В свою чергу під дуо-кільцем розуміємо кільце, яке є лівим і правим дуо-кільцем одночасно.*

В першому підрозділі даного розділу доведена наступна теорема:

Теорема 2.1.3. *Праве дистрибутивне кільце Безу стабільного рангу 1 є кільцем елементарних дільників тоді і лише тоді, коли воно є дуо-кільцем.*

В другому підрозділі досліджуються скінченні гомоморфні образи дуо-областей Безу та вводиться аналог поняття вільного від квадратів елемента. Встановлено критерій існування таких елементів в термінах регулярності фактор-кілець стосовно головних ідеалів породжених такими елементами. Показано, що такі елементи є елементами майже стабільного рангу 1.

Теорема 2.2.4. *Якщо R є дуо-областю Безу та a є деяким її ненульовим елементом, то*

(1) класичне кільце дробів $Q(R/aR)$ та кільце R/aR співпадають: $Q(R/aR)=R/aR$.

(2) R/aR є майже Беровим кільцем.

(3) R/aR є P-ін'єктивним кільцем.

(4) R/aR є морфійним кільцем, в якому ліві і праві морфічні пари співпадають.

(5) R/aR є когерентним кільцем.

(6) R/aR є реверсивним кільцем.

(7) R/aR є IF-кільцем.

(8) слабка глобальна розмірність R/aR рівна нулю або є нескінченною.

Означення 2.2.1. *Ненульовий елемент a кільця R називається майже вільним від квадратів* *елементом, якщо із рівності $a=xy$, де x,y належать R, випливає, що $xR+yR=R$ і $Rx+Ry=R$.*

Вказані елементи дуо-областей Безу є адекватними:

Твердження 2.2.6. *Майже вільні від квадратів елементи в дуо-області Безу є адекватними.*

Наступну теорему можна розглядати як відповідь на питання про властивості елементів, фактор-кільця стосовно головних ідеалів, які ними породжені, є регулярними.

Теорема 2.2.7. *Якщо R є дуо-областю Безу та a є деяким її ненульовим елементом, то наступні властивості є рівносильними:*

(1) a є майже вільним від квадратів елементом;

(2) R/aR є регулярним кільцем;

(3) R/aR є кільцем з нульовим радикалом Джекобсона;

(4) слабка глобальна розмірність кільця R/aR є рівна нулю;

(5) слабка глобальна розмірність кільця R/aR є рівна нулю;

Наслідок 2.2.8. *Майже вільні від квадратів елементи дуо-області Безу є елементами майже стабільного рангу 1.*

У третьому підрозділі показано, що морфічне кільце праві максимальні ідеали якого є лівими чистими є строго регулярним тоді і лише тоді, коли це праве (ліве) дуо-кільце.

Означення 1.1.44. *Кільце R називається правим MPI-кільцем, якщо усі його праві максимальні ідеали є лівими чистими.*

У теоремі 2.3.11 доведено, що морфічне праве MPI-кільце є строго регулярним тоді і лише тоді, коли це кільце є правим дуо-кільцем.

Третій розділ дисертації присвячений дослідженню узагальнено адекватних кілець.

Означення 1.1.12. *Елемент a комутативного кільця Безу R називається адекватним до елемента b кільця R, якщо елемент a можна зобразити у вигляді $a=rs$, де $rR+bR=R$ та для довільного необоротного дільника s' елемента s ідеал $s'R+bR$ відмінний від усього кільця.*

Означення 1.1.21. *Скажемо, що комутативне кільце Безу є узагальнено адекватним кільцем, якщо для довільної пари його ненульових елементів хоча б один із них є адекватним до іншого.*

Основними результатами першого підрозділу третього розділу є такі теореми:

Теорема 3.1.1. *Стабільний ранг узагальнено адекватного кільця R не перевищує 2.*

Теорема 3.1.3. *Узагальнено адекватне кільце R є кільцем елементарних дільників.*

У **четвертому розділі** дисертації досліджується структура головних ідеалів морфічних кілець та кілець Безу.

Перший підрозділ присвячений вивченню арифметичних властивостей головних ідеалів та морфічних пар морфічних кілець. Вказані нижче результати є основними у першому підрозділі четвертого розділу:

Теорема 4.1.4. *Нехай R комутативне кільце, а I деякий його ідеал. Тоді кільце R/I є морфічним кільцем тоді і лише тоді, коли для кожного елемента $a+I$ кільця R/I існує деякий елемент $b+I$ кільця R/I такий, що $(I:a)=I+bR$, $(I:b)=I+aR$.*

Наступна теорема є аналогом теореми Піфагора для морфічних чистих кілець.

Теорема 4.1.7. *Нехай R є комутативним кільцем Безу ідемпотентного стабільного рангу 1. Якщо $ab=0$ тоді існує елемент d у кільці R такий, що $a^2+b^2=d^2$, $dR=aR+bR$.*

У твердженні 4.1.9 показано, що тензорний добуток головних ідеалів морфічного кільця володіє такою властивістю:

Твердження 4.1.9. *Тензорний добуток головних ідеалів aR і bR морфічного кільця R та їх перетин є ізоморфні як R-модулі .*

В другому підрозділі обчислюються твірні частки і перетину головних ідеалів комутативного кільця Безу, показано коли скінченний гомоморфний образ кільця Безу є морфічним кільцем.

Теорема 4.2.14. *Нехай R є кільцем Безу та a його ненульовий елемент, який не є дільником нуля. Тоді R/aR є морфічним кільцем.*

П'ятий розділ дисертації присвячений введенню та вивченню слабкої групи Гротендіка морфічного кільця.

Означення 5.1.1. *Фактор-групу вільної абелевої групи $F(R)$, яка породжена класами ізоморфізмів скінченних прямих сум R-модулів $a_1R \oplus a_2R \oplus \ldots \oplus a_nR$, де $a_1R, a_2R, \ldots, a_nR$ є головними ідеалами морфічного кільця R, за підгрупою, яка породжена елементами вигляду $\{g\}+\{h\}-\{g\oplus h\}$, де $\{g\},\{h\}$ є елементами з $F(R)$, назвемо слабкою групою Гротендіка $K'_0(R)$ морфічного кільця R, а її елементи будемо позначати $[A]$.*

У першому підрозділі детально описано побудову слабкої групи Гротендіка $K'_0(R)$ та дослідженно питання про однозначність твірних її елементів. Наступні результати є основними у першому підрозділі п'ятого розділу:

Лема 5.1.3. *Нехай R є морфічним кільцем та $a_1R \supseteq a_2R \supseteq \ldots \supseteq a_nR$, $b_1R \supseteq b_2R \supseteq \ldots \supseteq b_mR$ є ідеалами цього кільця. R-модулі $a_1R \oplus a_2R \oplus \ldots \oplus a_nR \oplus xR$ та $b_1R \oplus b_2R \oplus \ldots \oplus b_mR \oplus xR$ є ізоморфні тоді і лише тоді, коли R-модулі $a_1R \oplus a_2R \oplus \ldots \oplus a_nR$ та $b_1R \oplus b_2R \oplus \ldots \oplus b_mR$ є ізоморфними.*

Теорема 5.1.4. *Нехай R є морфічним кільцем та $[A],[B]$ є елементами $K'_0(R)$. Тоді $[A]=[B]$ тоді і лише тоді, коли A та B ізоморфні.*

На підставі властивості тензорного добутку головних ідеалів морфічного кільця отримано таку теорему:

Теорема 5.1.5. *Нехай R є комутативним морфічним кільцем. Адитивна абелева група $K'_0(R)$ перетворюється на комутативне кільце з одиницею, якщо визначити добуток елементів [aR] та [bR] як клас їх тензорного добутку у $K'_0(R)$, для довільних a,b з кільця R, і поширити за лінійністю дану властивість на довільні елементи з $K'_0(R)$*

Також у першому підрозділі показано, що K'_0 є функтором із категорії морфічних кілець у категорію комутативних кілець.

Теорема 5.1.8. *Слабка група Гротендіка кільця R ізоморфна кільцю цілих чисел тоді і лише тоді, коли R є полем.*

В другому підрозділі встановлюється зв'язок слабкої групи Гротендіка морфічного кільця із векторами Вітта, та наведено спосіб обчислення канонічної форми суми та добутку її елементів.

Означення 5.2.3. *Напівкільце G(R) головних ідеалів комутативного кільця Безу R стосовно операцій суми та перетину ідеалів назвемо глобалізацією цього кільця.*

Теорема 5.2.9. *Якщо R є морфійним кільцем то кільце $K'_0(R)$ ізоморфне підкільцю кільця Вітта W'(G(R)), елементами якого є формальні частки поліномів над глобалізацією кільця R, із одиничним вільним членом, коефіцієнти яких утворюють зростаючі ланцюги головних ідеалів.*

Теорема 5.2.11. *Функтори K'_0 та W'G є природно ізоморфними.*

Підрозділ завершується матричним методом обчислення суми елементів слабкої групи Гротендіка.

В третьому підрозділі досліджено базові властивості елементів слабкої групи Гротендіка морфічного кільця, показано, що вона є редукованим кільцем, визначено загальний вигляд її ідемпотентів. Розділ завершується такими теоремами.

Теорема 5.3.17. *Якщо R є регулярним кільцем, то група Гротендіка $K_0(R)$ та слабка група Гротендіка $K'_0(R)$ співпадають.*

Теорема 5.3.18. *Якщо R є комутативним морфічним кільцем елементарних дільників, то група Гротендіка $K_0(R)$ є підгрупою слабкої групи Гротендіка $K'_0(R)$.*

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню стабільного рангу різних класів кілець Безу, та вивченню скінченно-зображуваних модулів над морфічними кільцями елементарних дільників, встановленню зв'язку між К-теорією та цими типами кілець. За допомогою розвинутої техніки арифметичних операцій над головними ідеалами морфічних кілець вдалось побудувати аналог групи Гротендіка для морфічних кілець. Також вивчаються некомутативні дуо-кільця елементарних дільників.

У дисертації автором отримано такі нові результати:

1) введено поняття слабкої групи Гротендіка морфічного кільця, та досліджено властивості її елементів;
2) встановлено взаємозв'язок між слабкою групою Гротендіка та підкільцем кільця Вітта над глобалізацією морфічного кільця;
3) встановлено рівність слабкої та звичайної групи Гротендіка для регулярних кілець, а також наведено необхідну умову кільця елементарних дільників у термінах груп Гротендіка;
4) введено поняття майже вільного від квадратів елемента та показано, що такі елементи є адекватними елементами майже стабільного рангу 1 у дуо-областях Безу;
5) показано, що елемент дуо-області Безу є майже вільним від квадратів тоді і лише тоді, коли фактор-кільце по головному ідеалу, який він породжує, є регулярним кільцем;
6) доведено, що фактор-кільце комутативного кільця Безу за головним ідеалом, який породжений не дільником нуля, є морфічним кільцем, а також наведено умови, коли фактор-кільце довільного комутативного кільця є морфічним;
7) встановлено взаємозв'язок між морфічними парами при арифметичних операціях у термінах твірних цих пар;
8) показано, що стабільний ранг узагальнено адекватного кільця рівний 2, а також, що такі кільця є кільцями елементарних дільників;
9) доведено, що морфічне праве МРІ-кільце є строго регулярним кільцем тоді і лише тоді, коли воно є дуо-кільцем.

Автор вдячний своєму науковому керівникові доктору фізико-математичних наук, професору Забавському Богдану Володимировичу за підтримку в процесі виконання кандидатської роботи, цінні поради і допомогу.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Сорокін О. С. Стабільний ранг узагальнено адекватного кільця / О. С. Сорокін // Прикл. пробл. мех. та мат. – 2012. – **10**. – С. 82 – 85.
2. Сорокін О. С. Морфійні праві MPI-кільця / О. С. Сорокін // Прикл. пробл. мех. та мат. – 2013. – **11**. – С. 79 – 81.
3. Sorokin O. S. Finite homomorphic images of Bezout duo-domains / O. S. Sorokin // Carpathian Math. Publ. – 2014. – **6**, №2 – P. 360 – 366.
4. Sorokin O. S. Arithmetical properties of principal ideals in morphic rings / O. S. Sorokin // Glob. J. of Pure and Appl. Math. – 2015. – **11**, №1 – P. 377 – 390.
5. Sorokin O. S. On the weak Grothendieck group of a morphic ring and its representations / O. S. Sorokin // Math. and Stat. – 2015. – **3**, №1 – P. 16 – 24.
6. Sorokin O. S. Stable range of generalized adequate ring / O. S. Sorokin // Modern Probl. of Mech. and Math. – 2013. – 3. – P. 203.
7. Sorokin O. S. Right MPI-morphic rings and their applications / O. S. Sorokin // 9^{th} International Algebraic Conference in Ukraine, 8 – 13 July 2013: Abstract of talks. – Lviv, 2013. – P. 251.
8. Сорокін О. С. Скінченні гомоморфні образи до-областей Безу / О. С. Сорокін // Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2014», 28–30 травня 2014 р., Львів. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: (http://iapmm.lviv.ua/chyt2014/theses/Sorokin.pdf).
9. Sorokin O. S. Finite homomorphic images of Bezout duo-domains / O. S. Sorokin // International Algebraic Conference dedicated to 100^{th} anniversary of L. A. Kaluzhnin, 7 – 12 July 2014: Abstract of talks. – Kyiv, 2014. – P. 81.

АНОТАЦІЯ

Сорокіна О. С *Кільця пов'язані з умовами стабільного рангу.* –Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – алгебра та теорія чисел. – Інститут математики Національної академії наук України, Київ, 2015.

Дисертація присвячена обчисленню стабільного рангу узагальнено адекватних кілець, описанню скінченно-зображуваних модулів над морфічними кільцями елементарних дільників, а також вивченню будови скінченно-породжених проективних модулів над морфічними кільцями елементарних дільників, тобто встановленню умов на групу Гротендіка для випадку, коли вихідне кільце є кільцем елементарних дільників, вивченню властивостей скорочення відповідних модулів над досліджуваними класами кілець. Введено поняття майже вільного від квадратів елемента, показано, що такі елементи є адекватними елементами майже стабільного рангу 1 в дуо-областях Безу. Знайдено умови, при яких скінченні гомоморфні образи дуо-області Безу є регулярними кільцями в термінах їх гомологічних характеристик, зокрема, ці скінченні гомоморфні образи відповідають майже вільним від квадратів елементам вихідного кільця і навпаки. Встановлено ряд властивостей якими володіють скінченні гомоморфні образи дуо-областей Безу. Також показано, що морфічні кільця праві максимальні ідеали яких є лівими чистими є строго регулярними кільцями тоді і лише тоді, коли вихідне кільце є правим (лівим) дуо-кільцем. Показано, що узагальнено адекватні кільця є кільцями стабільного рангу 2 і вони є кільцями елементарних дільників. Крім цього, вивчається структура головних ідеалів комутативних кілець Безу та морфічних кілець, з'ясовано взаємозв'язки між морфічними парами при різноманітних алгебраїчних операціях. На основі вказаних властивостей побудовано аналог групи Гротендіка морфічного кільця – слабку групу Гротендіка, знайдено функторіальний зв'язок даної конструкції із певними підкільцями кілець Вітта. Показано спосіб, як перетворити слабку групу Гротендіка на комутативне кільце з 1, досліджено властивості її елементів. Доведено, що у випадку регулярних кілець класичне означення групи Гротендіка співпадає із введеною слабкою групою Гротендіка, а у випадку кілець елементарних дільників звичайна група Гротендіка є підгрупою слабкої групи Гротендіка.

Ключові слова: *стабільний ранг, узагальнено адекватне кільце, кільце Безу, кільце елементарних дільників, морфічне кільце, регулярне кільце, дуо-кільце, майже вільні від квадратів елементи, слабка група Гротендіка, кільця Вітта.*

АННОТАЦИЯ

Сорокин О. С. Кольца связанные с условиями стабильного ранга. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – алгебра и теория чисел. – Институт математики Национальной академии наук Украины, Киев, 2015.

Диссертация посвящена вычислению стабильного ранга обобщенно адекватных колец, описанию конечно-представимых модулей над морфическими кольцами элементарных делителей, а также изучению строения конечно-порожденных проективных модулей над морфическими кольцами элементарных делителей, то есть установлению условий на группу Гротендика в случае, когда исходное кольцо является кольцом элементарных делителей, изучению свойств сокращения соответствующих модулей над исследуемыми классами колец. Введено понятие почти свободного от квадратов элемента, показано, что такие элементы являются адекватными элементами почти стабильного ранга 1 в дуо-областях Безу. Найдены условия, при которых конечные гомоморфные образы дуо-области Безу являются регулярными кольцами в терминах их гомологических характеристик, в частности, эти конечные гомоморфные образы соответствуют почти свободным от квадратов элементам исходного кольца и наоборот. Установлен ряд свойств, которыми обладают конечные гомоморфные образы дуо-областей Безу. Также показано, что морфические кольца, правые максимальные идеалы которых являются левыми чистыми, являются строго регулярными кольцами тогда и только тогда, когда исходное кольцо является правым (левым) дуо-кольцом. Показано, что обобщенно адекватные кольца являются кольцами стабильного ранга 2, и что они являются кольцами элементарных делителей. Кроме этого, изучается структура главных идеалов коммутативных колец Безу и морфических колец, установлены взаимосвязи между морфическими парами при различных алгебраических операциях. Используя указанные свойства построено аналог группы Гротендика морфического кольца – слабую группу Гротендика, найдена функториальная связь данной конструкции с определенным подкольцом кольца Витта. Приведен способ превращения слабой группы Гротендика в коммутативное кольцо с 1, исследованы свойства ее элементов. В заключение, показано, что в случае регулярных колец классическое определение группы Гротендика совпадает с введенной слабой группой Гротендика, а в случае колец элементарных делителей обычная группа Гротендика является подгруппой слабой группы Гротендика.

Ключевые слова: *стабильный ранг, обобщенно адекватное кольцо, кольцо Безу, кольцо элементарных делителей, морфическое кольцо, регулярное кольцо, дуо-кольцо, почти свободные от квадратов элементы, слабая группа Гротендика, кольца Витта.*

ABSTRACT

Sorokin O. S. *Rings related to stable range conditions.* –Manuscript.

The thesis for obtaining the candidate of physical and mathematical sciences degree on the speciality 01.01.06 – algebra and number theory. – Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2015.

The thesis is devoted to the stable range calculations of the generalized adequate rings, the description of finitely presented modules over morphic elementary divisor rings, and the study of the structure of finitely generated projective modules over morphic elementary divisor rings, that is, the establishing the conditions on the Grothendieck group in a case when basic ring is an elementary divisor ring, the studying the cancellation properties of the corresponding modules over the studied classes of rings. We introduce a notion of almost square-free elements, and show that such elements are adequate elements of almost stable rank 1 in the of Bezout duo-domains. Also we investigate the conditions under which the finite homomorphic images of Bezout duo-domains are von Neumann regular rings in terms of their homologous characteristics, in particular these finite homomorphic images are in correspondence with almost square-free elements of the original ring and vice versa. Moreover, some properties of the finite homomorphic images of Bezout duo-domains are described. Also it is shown that morphic ring, whose right maximal ideals are left pure, is a strongly regular ring if and only if the original ring is right (left) duo-ring. It is shown that generalized adequate rings have stable range 2 and they are elementary divisor rings. In addition, we study the structure of principal ideals of commutative rings and morphic Bezout rings, determining the relationship between the morphic pairs under various algebraic operations. Using these properties we construct an analogue of the Grothendieck group of a morphic ring - weak Grothendieck group, found its functorial connection with a certain subring of the Witt ring. Moreover, a weak Grothendieck group is commutative ring with 1, and we study the properties of its elements. In conclusion, it is shown that in the case of regular rings classic definition of the Grothendieck group coincides with the introduced weak Grothendieck group, and in the case of the elementary divisor rings classic Grothendieck group is a subgroup of the weak Grothendieck group.

Keywords: *stable range, generalized adequate ring, Bezout ring, elementary divisor ring, morphic ring, von Neumann regular ring, duo-ring, almost square-free elements, weak Grothendieck group, Witt ring.*

Формат 60x84 1/16. Папір офсетний № 1. Умовн. друк. арк. 1,38.
Зам. №08/11. Тираж 100 прим.

Видавництво і друкарня «Ліра»
79020, Львів, вул.. Варшавська, 26
Тел.(032)252 35 44

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
суб’єктів видавничої справи ДК № 784 від 04.04.2012р.