НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Бойко Вячеслав Миколайович

УДК 517.958

Узагальнені оператори Казіміра, сингулярні модулі редукції та симетрії диференціальних рівнянь

01.01.03 — математична фізика
111 — математика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ — 2017

Дисертацією є рукопис.
Роботу виконано в Інституті математики НАН України.

Науковий консультант:

доктор фізико-математичних наук, професор
Попович Роман Омелянович
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник відділу математичної фізики.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
Білоколос Євген Дмитрович,
Інститут магнетизму НАН та МОН України, м. Київ,
головний науковий співробітник відділу теорії магнітних явищ та магнітної динаміки конденсованих середовищ;

доктор фізико-математичних наук, професор
Гаврилик Олександр Михайлович,
Інститут теоретичної фізики
ім. М.М. Боголюбова НАН України, м. Київ,
завідувач відділу математичних методів в теоретичній фізиці;

доктор фізико-математичних наук, професор
Парасюк Ігор Остапович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
завідувач кафедри геометрії, топології і динамічних систем.

Захист відбудеться *23 січня 2018 р. о 15 годині* на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий *21 грудня 2017 р.*

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради **А.С. Романюк**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Одне з можливих пояснень "незбагненної ефективності математики у природничих науках" полягає в тому, що одні й ті самі математичні моделі можуть успішно описувати досить широке коло явищ, інколи зовсім різної природи. Саме такі моделі є найцікавішими об'єктами математичних досліджень. Характерною рисою, що виокремлює їх серед нескінченної множини потенційних моделей, є наявність широких симетрій, тобто інваріантність відносно широких груп перетворень. Симетрії відіграють визначну роль у формулюванні та дослідженні сучасних моделей математичної фізики. Галузь математики на стику загальної теорії симетрій, теорії груп і алгебр Лі, математичної фізики і теорії диференціальних рівнянь називають груповим аналізом диференціальних рівнянь.

Підвищений інтерес до групового аналізу пов'язаний з його дієвістю у застосуваннях до проблем теоретичної та математичної фізики, математичної біології, метеорології тощо. Зокрема, він надає ефективні інструменти для побудови точних та наближених розв'язків складних нелінійних моделей. Дослідження щодо симетрій диференціальних рівнянь та суміжних проблем активно виконують у провідних наукових центрах світу, таких як Центр математичних досліджень Монреальського університету (м. Монреаль, Канада), Міннесотський університет (м. Міннеаполіс, США), Інститут гідродинаміки ім. М.А. Лаврентьєва Сибірського відділення РАН (м. Новосибірськ, Росія) та багатьох інших. Значну увагу зосереджено на розширенні різноманіття розглядуваних симетрій, які зараз включають точкові, контактні, узагальнені, неперервні, дискретні, умовні, потенціальні, приховані, наближені симетрії, супер- та парасуперсиметрії, перетворення Беклунда тощо. Розгляд складніших багатовимірних моделей і постановка нових типів задач призводить до потреби розробки нових, потужніших методів групового аналізу, що в свою чергу вимагає розвитку теорії. При цьому низка його класичних проблем залишається нерозв'язаними. Українська школа групового аналізу диференціальних рівнянь займає провідні позиції з досліджень у цій галузі. Зокрема, у роботах В.І. Фущича, А.Г. Нікітіна, М.І. Сєрова, Р.М. Цифри, Р.З. Жданова, В.І. Лагна, Р.О. Поповича та їхніх учнів отримано низку вагомих результатів щодо умовної інваріантності диференціальних рівнянь, їх групової класифікації та класифікації законів збереження, диференціальних інваріантів тощо.

Зв'язок теорії груп і алгебр Лі з груповим аналізом диференціальних рівнянь інтенсивно поглиблюється через розвиток алгебраїчних методів у груповому аналізі. І навпаки, задачі групового аналізу стимулюють розвиток нових методів у різних областях теорії груп і алгебр Лі, включаючи пов'язані з інваріантами, узагальненими операторами Казіміра, реалізаціями та контракціями алгебр Лі. Зокрема, класифікація реалізацій алгебр Лі векторними полями є основним кроком у процедурі групової класифікації диференціальних рівнянь алгебраїчним методом. Узагальнені оператори Казіміра напівпростих і неоднорідних алгебр Лі, а також низькорозмірних та фізично важливих алгебр Лі фіксованих розмірностей добре відомі, але для розв'язних алгебр Лі настільки повних результатів немає. Окрім того, традиційно для побудови узагальнених операторів Казіміра розв'язних алгебр використовували інфінітезимальний метод, що призводило до необхідності інтегрування надзвичайно громіздких перевизначених систем квазілінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку. У першому розділі дисертації запропоновано набагато ефективніший алгебраїчний метод обчислення таких операторів. Переваги методу продемонстровано на дійсних низькорозмірних алгебрах Лі та вперше вичерпно описано узагальнені оператори Казіміра для низки серій розв'язних алгебр Лі довільної розмірності з фіксованими нільрадикалами.

Так званий некласичний метод знаходження точних розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними запропоновано Дж. Блуменом і Дж. Коулом. Згодом цей підхід у різних термінах (метод некласичної, умовної або Q-умовної симетрії, прямий метод, метод редукції та ін.) розвинуто у роботах І.М. Цифри, В.І. Фущича, М.І. Сєрова, П. Вінтерніца, П. Кларксона, Е. Менсфілд, Є.М. Воробйова, П. Олвера, Р.З. Жданова, В.І. Лагна, Р.О. Поповича та інших. Він дозволяє отримати точні розв'язки диференціальних рівнянь з частинними похідними, які неможливо побудувати в рамках методу Лі. Водночас задача відшукання некласичних симетрій деякого диференціального рівняння й, тим більше, їх класифікації в класах диференціальних рівнянь технічно та теоретично є значно складнішою, ніж аналогічна задача для ліївських симетрій. Це пояснює, чому існує мало прикладів вичерпного опису таких симетрій і не було отримано глибоких теоретичних результатів щодо них. На деякі базові питання теорії некласичних симетрій лише нещодавно знайдено відповіді, але більшість із них залишається відкритими. Тому в дисертації значну увагу приділено перебудові, впорядкуванню та подальшому розвитку цієї теорії, починаючи зі строгого означення модулів редукції диференціальних рівнянь як її фундаменту. На основі нового поняття сингулярних модулів редукції диференціальних рівнянь, зокрема, удосконалено процедуру пошуку некласичних симетрій та узагальнено всі раніше відомі "no-go" результати щодо них.

Значну частину задач групового аналізу диференціальних рівнянь складають класифікації — з точністю до певної еквівалентності — деяких об'єктів, пов'язаних з диференціальними рівняннями (як то ліївських симетрій, модулів редукції, законів збереження чи потенціальних симетрій). Водночас класичні методи групового аналізу вже вичерпали свій потенціал; їх застосування у прикладних багатовимірних задачах призводить до занадто громіздких обчислень. Запропоновані останнім часом підходи, включаючи різноманітні алгебраїчні методи, дозволили подолати цей бар'єр. Завдяки ним вдалося розв'язати класифікаційні задачі раніше недосяжної складності, спростити обчислення, уточнити та виправити недоліки або навіть помилки в існуючих класифікаціях, виконаних на основі класичних технік. Саме за допомогою сучасних підходів у дисертації розв'язано класифікаційні задачі для класів як звичайних диференціальних рівнянь, так і рівнянь з частинними похідними.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано у відділі математичної фізики Інституту математики НАН України в рамках тем "Аналітичні та симетрійні методи дослідження диференціальних моделей математичної фізики" (номер держреєстрації 0198U001993), "Теоретико-груповий аналіз нелінійних проблем математичної фізики, хімії, біології та економіки" (номер держреєстрації 0101U000098), "Симетрія та інтегровність нелінійних моделей" (номер держреєстрації 0106U000436), "Симетрія, суперсиметрія та інтегровність диференціальних рівнянь" (номер держреєстрації 0110U008615), "Симетрія, суперсиметрія та суперінтегровність рівнянь математичної фізики" (номер держреєстрації 0116U003059).

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є розробка нових методів та алгоритмів групового аналізу диференціальних рівнянь, а також дослідження деяких проблем із суміжних областей теорії алгебр Лі. Основну увагу в дисертації зосереджено на задачах, пов'язаних з узагальненими операторами Казіміра та реалізаціями алгебр Лі, ліївськими симетріями та модулями редукції диференціальних рівнянь.

Об'єктом дослідження є низькорозмірні алгебри Лі, серії розв'язних алгебр Лі довільної розмірності з фіксованими структурами нільрадикалів, загальні класи диференціальних рівнянь, еволюційні рівняння та їх спеціальні класи, квазілінійні диференціальні рівняння другого порядку, звичайні диференціальні рівняння та системи таких рівнянь.

Предметом дослідження є узагальнені оператори Казіміра та реалізації алгебр Лі векторними полями, сингулярні модулі диференціальних функцій та диференціальних рівнянь, диференціальні інваріанти, групи та групоїди еквівалентності класів диференціальних рівнянь, а також ліївські симетрії, модулі редукції, закони збереження та точні розв'язки диференціальних рівнянь.

Методи дослідження. Оригінальний алгебраїчний метод обчислення узагальнених операторів Казіміра на основі картанівського методу рухомих реперів, класичний інфінітезимальний метод Лі–Овсяннікова, модифікація методу некласичних симетрій з використанням поняття сингулярних модулів диференціальних рівнянь, різноманітні версії алгебраїчного методу групової класифікації диференціальних рівнянь, прямий метод обчислення перетворень еквівалентності.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну та виносяться на захист, такі:

1. Запропоновано алгебраїчний метод обчислення узагальнених операторів Казіміра алгебр Лі, що використовує картанівський метод рухомих реперів у версії Фелса–Олвера. З метою тестування методу та демонстрації його переваг обчислено інваріанти дійсних низькорозмірних алгебр Лі.
2. Уперше побудовано базиси узагальнених операторів Казіміра серій розв'язних алгебр Лі довільної розмірності з фіксованими структурами нільрадикалів, зокрема майже абелевих алгебр Лі, розв'язних алгебр Лі, нільрадикали яких є ниткоподібними майже абелевими алгебрами, нільпотентних алгебр строго верхньотрикутних матриць та розв'язних алгебр Лі з трикутними нільрадикалами й діагональними нільнезалежними елементами.

3. Введено строге означення модулів редукції диференціальних рівнянь. На його основі переглянуто та наново побудовано теорію “некласичних симетрій” диференціальних рівнянь. Запропоновано поняття сингулярних модулів редукції диференціальних рівнянь та досліджено властивості таких модулів.
4. Детально вивчено сингулярні модулі редукції еволюційних рівнянь і квазілінійних рівнянь другого порядку, а також редукції диференціальних рівнянь до алгебраїчних рівнянь та звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, що впорядкувало й узагальнило всі раніше відомі “no-go” результати щодо “некласичних симетрій” диференціальних рівнянь.
5. Узагальнено теорему Лі про диференціальні інваріанти однопараметричної групи локальних перетворень, а саме доведено, що за відомого універсального інваріанта повний набір функціонально незалежних диференціальних інваріантів будь-якого порядку такої групи можна побудувати за допомогою однієї квадратури та диференціювання. Проаналізовано зв’язок між диференціальними інваріантами першого порядку та інтегруванням систем рівнянь типу Ріккаті.
6. Прокласифіковано ліївські симетрії систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з комутуючими сталими матрицями коефіцієнтів. Отримано точні нижні та верхні оцінки розмірностей максимальних алгебр ліївської інваріантності цих систем.
7. Досліджено групоїди еквівалентності класу лінійних звичайних диференціальних рівнянь довільного порядку та його підкласів, пов’язаних з раціональною формою, формою Лагера–Форсайта, першою та другою формами Арнольда. Це дозволило провести повну групову класифікацію таких рівнянь алгебраїчним методом трьома різними способами.
8. Проведено повну групову класифікацію нелінійних галілей-інваріантних узагальнень рівнянь Бюргерса й Кортевега–де Фріза довільного порядку.
9. Доведено теорему про лінійні оператори редукції загального лінійного диференціального рівняння з частинними похідними. Досліджено умовні та потенціальні симетрії лінійного рівняння стрижня.

10. Доведено, що кожен найпростіший потенціальний закон збереження будь-якого (1+1)-вимірного лінійного еволюційного рівняння парного порядку індуковано локальним законом збереження цього рівняння. Запропоновано ефективний критерій перевірки, коли квадратичний закон збереження найпростішої лінійної потенціальної системи є чисто потенціальним законом збереження відповідного (1+1)-вимірного лінійного еволюційного рівняння непарного порядку.
11. Описано нелінійні рівняння типу Шрьодінгера, які сумісні з принципом відносності Галілея та розв'язки яких задовольняють рівняння неперервності.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Отримані результати та розвинуті методи можна використати у подальших дослідженнях нелінійних диференціальних рівнянь, алгебр Лі, а також моделей сучасної математичної та теоретичної фізики.

Особистий внесок здобувача. Усі результати, що виносяться на захист, одержано здобувачем самостійно. У роботах, які опубліковано разом з іншими авторами, розподіл особистих внесків такий.

У циклі статей [7–11, 25, 26] щодо інваріантів алгебр Лі дисертанту належать загальний план дослідження, розробка основного варіанту алгоритму, що базується на методі рухомих реперів, та виконання основного об'єму обчислень, особливо при побудові інваріантів алгебр Лі низької розмірності, Р.О. Поповичу — модифікація алгоритму з залученням процедури нормалізації, спеціальна модифікація алгоритму для розв'язних алгебр Лі з нільрадикалом ізоморфним алгебрі строго трикутних матриць. І. Патера брав участь у обговоренні результатів.

У статті [29] М.О. Нестеренко належить побудова реалізацій розглянутих алгебр, дисертанту — визначення плану дослідження та перевірка обрахунків. У роботі [13] Р.О. Поповичу належать загальний план дослідження, вдосконалення техніки класифікації реалізацій на основі поняття мегаідеалу та класифікація реалізацій простих алгебр Лі, дисертанту — перевірка класифікації алгебр Лі, порівняння одержаних результатів з результатами інших авторів, М.О. Нестеренко виконала класифікацію реалізацій алгебр Лі в просторах з чотирма змінними, а М.В. Лутфуллін — класифікацію реалізацій розв'язних алгебр у просторах з довільною скінченною кількістю змінних.

У препринті [27], який є суттєво розширеним варіантом статті [13], дисертанту додатково належать впорядкування та обчислення алгебраїчних та інваріантних характеристик низькорозмірних алгебр Лі, решту результатів розподілено як у [13].

У статтях [14, 15, 17, 18, 30] про диференціальні інваріанти однопараметричних груп Лі та їхній зв'язок із системами рівнянь типу Ріккаті, внесок Р.О. Поповича і дисертанта у постановку задач рівноцінний, усі основі результати отримано дисертантом самостійно.

У роботах [2, 4, 21, 24] дисертанту та Р.О. Поповичу належать загальний план дослідження, Н.М. Шаповал — перевірка доведень та обчислень у прикладах, дисертанту — огляд попередніх результатів, розробка нових методів та доведення всіх основних результатів.

У статтях [1, 5, 6, 22, 23] всі основні результати та їх доведення отримано дисертантом самостійно, Р.О. Поповичу належить загальний план дослідження, у роботі [1] М. Кунцінгер брав участь у обговоренні результатів та перевірці доведень.

У роботі [16] дисертанту належить доведення основного результату, В.О. Поповичу — перевірка результатів роботи.

У статтях [19, 20] В.І. Фущичу належать постановки задач, всі результати та їх доведення отримано дисертантом самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідалися на Міжнародних конференціях "Symmetry in nonlinear mathematical physics" (Київ, 1997, 1999, 2001, 2003, 2005, 2007, 2009), Українському математичному конгресі (Київ, 2001), Міжнародних симпозіумах "Group analysis of differential equations and integrable systems" (Протарас, Кіпр, 2008, 2012; Ларнака, Кіпр, 2014, 2016), на Міжнародних конференціях "Classical and quantum integrable systems" (Дубна, Росія, 2004, 2007), на Міжнародних семінарах "Симетрія та інтегровність рівнянь математичної фізики" (Київ, 2011, 2013, 2015, 2016).

Результати дисертаційної роботи неодноразово доповідалися й обговорювалися на науковому семінарі відділу математичної фізики Інституту математики НАН України (керівник семінару — член-кореспондент НАН України, професор А.Г. Нікітін, 1996–2017). Також результати дисертації були предметом доповідей на Вченій раді Інституту математики НАН України (2013), Київському семінарі з функціонального аналізу (керівники семінару — академік НАН України, професор Ю.М. Березанський, член-кореспондент НАН

України А.Н. Кочубей, академік НАН України, професор Ю.С. Самойленко, 2017), науковому семінарі кафедри математичної фізики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівники семінару — професор Т.А. Мельник, професор В.Г. Самойленко, 2017); наукових семінарах Центру математичних досліджень Монреальського університету (Канада, 2005–2007), науковому семінарі математичного факультету Віденського університету (Австрія, 2010), науковому семінарі математичного факультету університету м. Білосток (Польща, 2004), науковому семінарі математичного факультету технологічного університету м. Лулеа (Швеція, 2000).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в роботах [1–46], 9 з них опубліковано без співавторів, роботи [1–20] відповідають вимогам до публікації результатів дисертаційних робіт у фахових виданнях із фізико-математичних наук, [21–32] — публікації у працях конференцій або збірниках та препринти, [33–46] — тези конференцій, [1–20, 22–24, 26, 28–32] надруковано у виданнях, що включені до міжнародних наукометричних баз (Web of Science, Scopus, MathSciNet та Zentralblatt MATH).

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі змісту, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 294 найменування. Повний обсяг дисертації становить 338 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність теми, проаналізовано сучасний стан розглянутих у дисертації проблем, сформульовано задачі дослідження та коротко викладено результати роботи.

Основну частину роботи складають чотири розділи. На початку кожного розділу подано огляд літератури, стан проблеми та результати інших авторів, а також стисло описано результати розділу.

Перший розділ дисертації присвячено узагальненим операторам Казіміра алгебр Лі (інша назва — інваріанти алгебр Лі).

Розглянемо алгебру Лі $\mathfrak{g}$ розмірності $\dim\mathfrak{g} = n < \infty$ над комплексним або дійсним полем і відповідну зв'язну групу Лі G. Нехай $\mathfrak{g}^*$ — дуальний простір для векторного простору $\mathfrak{g}$. Відображення $\mathrm{Ad}^*\colon G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}^*)$, визначене для будь-якого $g \in G$, називають *коприєднаним представленням* групи Лі G. Тут $\mathrm{Ad}\colon G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ — звичайне приєднане представлення для G. Образ Ad_G групи G при Ad є групою внутрішніх автоморфізмів $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$, а образ Ad^*_G групи G при Ad^* — підгрупою групи $\mathrm{GL}(\mathfrak{g}^*)$.

Функцію $F \in C^\infty(\Omega)$, де Ω — область у $\mathfrak{g}^*$, називають (глобальним в Ω) *інваріантом* групи Ad^*_G, якщо

$$F(\mathrm{Ad}^*_g x) = F(x) \text{ для всіх } g \in G \text{ та } x \in \Omega \text{ таких, що } \mathrm{Ad}^*_g x \in \Omega.$$

Множину інваріантів групи Ad^*_G на Ω позначаємо як $\mathrm{Inv}(\mathrm{Ad}^*_G)$ без явного зазначення області Ω.

Функціонально незалежні інваріанти $F^l(x_1, \ldots, x_n)$, $l = 1, \ldots, N_\mathfrak{g}$, утворюють *функціональний базис* (*фундаментальний інваріант*) групи $\mathrm{Inv}(\mathrm{Ad}^*_G)$, якщо будь-який елемент з $\mathrm{Inv}(\mathrm{Ad}^*_G)$ можна (єдиним чином) представити як функцію цих інваріантів. Відповідну множину симетризованих виразів $\mathrm{Sym}\, F^l(e_1, \ldots, e_n)$, $l = 1, \ldots, N_\mathfrak{g}$, називають базисом для $\mathrm{Inv}(\mathfrak{g})$.

Нехай $\mathcal{G} = \mathrm{Ad}^*_G \times \mathfrak{g}^*$ — тривіальне ліве головне Ad^*_G-розшарування над $\mathfrak{g}^*$. Будь-який *піднятий інваріант* групи Ad^*_G є (локально визначеною) функцією з $\mathcal{G}$ на деякий многовид, інваріантною відносно піднятої коприєднаної дії групи G. Функція $\mathcal{I}\colon \mathcal{G} \to \mathfrak{g}^*$, визначена співвідношенням $\mathcal{I} = \mathcal{I}(\mathrm{Ad}^*_g, x) = \mathrm{Ad}^*_g x$, є *фундаментальним піднятим інваріантом* групи Ad^*_G, тобто $\mathcal{I}$ — піднятий інваріант, і будь-який піднятий інваріант локально єдиним чином можна представити як функцію від $\mathcal{I}$. Звичайні інваріанти є частинними випадками піднятих інваріантів, які визначають будь-який інваріант як деяку їх композицію зі стандартною проекцією $\pi_{\mathfrak{g}^*}$.

Нормалізаційна процедура Фелса–Олвера для групи Ad^*_G ґрунтується на такому твердженні.

Твердження 1.1. *Нехай $\mathcal{I} = (\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_n)$ — фундаментальний піднятий інваріант групи Ad^*_G, для піднятих інваріантів $\mathcal{I}_{j_1}, \ldots, \mathcal{I}_{j_\rho}$ і деяких сталих $c_1, \ldots, c_\rho$ система $\mathcal{I}_{j_1} = c_1, \ldots, \mathcal{I}_{j_\rho} = c_\rho$ є розв'язною відносно групових параметрів $\theta_{k_1}, \ldots, \theta_{k_\rho}$, а підстановка знайдених значень параметрів у решту піднятих інваріантів призводить до $m = n - \rho$ виразів $\hat{\mathcal{I}}_l$, $l = 1, \ldots, m$, які залежать лише від x. Тоді $\rho = \mathrm{rank}\, \mathrm{Ad}^*_G$, $m = N_\mathfrak{g}$, а $\hat{\mathcal{I}}_1, \ldots, \hat{\mathcal{I}}_m$ утворюють базис для $\mathrm{Inv}(\mathrm{Ad}^*_G)$.*

Алгебраїчний алгоритм знаходження інваріантів алгебри Лі $\mathfrak{g}$ формують такі чотири кроки.

1. *Побудова генеруючої матриці $B(\theta)$ групи Ad^*_G.* $B(\theta)$ — загальна матриця внутрішніх автоморфізмів алгебри Лі $\mathfrak{g}$ у заданому базисі $e_1, \ldots, e_n$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_r)$ — повний набір параметрів (координат) групи $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$, і $r = \dim \mathrm{Ad}^*_G = \dim \mathrm{Int}(\mathfrak{g}) = n - \dim \mathrm{Z}(\mathfrak{g})$, де $\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ — центр алгебри $\mathfrak{g}$.
2. *Представлення фундаментального піднятого інваріанта.* Фундаментальний піднятий інваріант $\mathcal{I} = (\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_n)$ групи Ad^*_G у вибраних координатах $(\theta, \check{x})$ в $\mathrm{Ad}^*_G \times \mathfrak{g}^*$ має явний вигляд $(\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_n) = (x_1, \ldots, x_n) \cdot B(\theta_1, \ldots, \theta_r)$.
3. *Виключення параметрів за допомогою процедури нормалізації.* Вибираємо максимально можливу кількість ρ піднятих інваріантів $\mathcal{I}_{j_1}, \ldots, \mathcal{I}_{j_\rho}$, сталі $c_1, \ldots, c_\rho$ та групові параметри $\theta_{k_1}, \ldots, \theta_{k_\rho}$ такі, що рівняння $\mathcal{I}_{j_1} = c_1, \ldots, \mathcal{I}_{j_\rho} = c_\rho$ є розв'язними відносно $\theta_{k_1}, \ldots, \theta_{k_\rho}$. Після підстановки знайдених значень параметрів $\theta_{k_1}, \ldots, \theta_{k_\rho}$ до незадіяних піднятих інваріантів отримаємо $N_\mathfrak{g} = n - \rho$ виразів $F^l(x_1, \ldots, x_n)$, які не залежать від θ.
4. *Симетризація.* Функції $F^l(x_1, \ldots, x_n)$ утворюють базис множини $\mathrm{Inv}(\mathrm{Ad}^*_G)$. Їхні симетризації $\mathrm{Sym}\, F^l(e_1, \ldots, e_n)$ дають базис для множини $\mathrm{Inv}(\mathfrak{g})$.

Ілюстративні приклади, що демонструють переваги запропонованого методу, наведено в § 1.3. З цією ж метою в § 1.4 заново обчислено інваріанти алгебр Лі розмірностей не вище шести. Хоча раніше ці інваріанти побудовано іншими авторами за допомогою інфінітезимального підходу, існуючі списки алгебр та їхніх інваріантів містили ряд неточностей та помилок, які виправлено. Окрім того, у багатьох випадках відповідні базиси інваріантів вдалося представити у компактнішій формі.

У наступних параграфах цього розділу отримано вичерпні описи базисів інваріантів серій розв'язних алгебр Лі довільної розмірності з фіксованими структурами нільрадикалів. У літературі наведено лише часткові результати або гіпотези щодо таких базисів, і лише в рамках запропонованого алгебраїчного підходу їх вдалося повністю описати.

У § 1.5 розглянуто майже абелеві алгебри Лі, тобто алгебри з абелевими ідеалами корозмірності 1. Для кожної з таких алгебр знайдено потужність базису її інваріантів та описано їх вигляд залежно від базового поля та жорданової форми матриці, що визначає дію неабелевого елемента на абелевому ідеалі корозмірності 1.

У § 1.6 побудовано узагальнені оператори Казіміра комплексних розв'язних алгебр Лі з майже абелевими нільрадикалами корозмірності 1 і максимального нільіндексу. Всі можливі типи таких алгебр прокласифіковано П. Вітерніцом і Л. Снοблом. Вони ж розглянули інваріанти таких алгебр у рамках інфінітезимального підходу. Використання алгебраїчного методу суттєво спростило опис цих інваріантів.

У § 1.7 розглянуто нільпотентну алгебру Лі $\mathfrak{t}_0(n)$, ізоморфну алгебрі строго верхньотрикутних матриць розмірності $n\times n$. Її базисні елементи e_{ij}, $i<j$, задовольняють комутаційні співвідношення $[e_{ij},e_{kl}]=\delta_{jk}e_{il}-\delta_{li}e_{kj}$. Тут і надалі δ_{ij} — символ Кронекера, $\mathcal{E}^{i_1,i_2}_{j_1,j_2}=(e_{ij})^{i=i_1,\dots,i_2}_{j=j_1,\dots,j_2}$, $i_1\leqslant i_2$, $j_1\leqslant j_2$, $\varkappa=n-k+1$.

Теорема 1.13. *Базис для* $\mathrm{Inv}(\mathfrak{t}_0(n))$ *утворюють оператори Казіміра* $|\mathcal{E}^{1,k}_{\varkappa,n}|$, $k=1,\dots,\left[\frac{n}{2}\right]$.

У § 1.8 побудовано інваріанти розв'язної алгебри Лі $\mathfrak{t}_\gamma(n)$ з нільрадикалом, ізоморфним $\mathfrak{t}_0(n)$, і s нільнезалежними елементами f_p, $p=1,\dots,s$. Базисні елементи цієї алгебри задовольняють комутаційні співвідношення $[e_{ij},e_{i'j'}]=\delta_{i'j}e_{ij'}-\delta_{ij'}e_{i'j}$, $[f_p,e_{ij}]=(\gamma_{pi}-\gamma_{pj})e_{ij}$. Вважаємо, що параметричну матрицю γ задано у *зведеній формі*, тобто $\exists\, s'\in\{0,\dots,\min(s,[n/2])\}$, $\exists\, k_q$, $q=1,\dots,s'$, $1\leqslant k_1<k_2<\dots<k_{s'}\leqslant[n/2]$:

$$\gamma_{qk}=\gamma_{q\varkappa},\ k<k_q,\quad \gamma_{p\varkappa_q}-\gamma_{pk_q}=\delta_{pq},\ q=1,\dots,s',$$
$$\gamma_{pk}=\gamma_{p\varkappa},\ p>s',\ k=1,\dots,[n/2],\ \varkappa_q=n-k_q+1.$$

Теорема 1.21. *Базис для* $\mathrm{Inv}(\mathfrak{t}_\gamma(n))$ *утворюють вирази*

$$|\mathcal{E}^{1,k}_{\varkappa,n}|\prod_{q=1}^{s'}|\mathcal{E}^{1,k_q}_{\varkappa_q,n}|^{\beta_{qk}},\quad k\in\{1,\dots,[n/2]\}\setminus\{k_1,\dots,k_{s'}\},$$

$$f_p+\sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^{k+1}}{|\mathcal{E}^{1,k}_{\varkappa,n}|}(\gamma_{pk}-\gamma_{p,k+1})\sum_{k<i<\varkappa}\begin{vmatrix}\mathcal{E}^{1,k}_{i,i} & \mathcal{E}^{1,k}_{\varkappa,n}\\ 0 & \mathcal{E}^{i,i}_{\varkappa,n}\end{vmatrix},\ p=s'+1,\dots,s,$$

де $\beta_{qk}=-\Delta_{qk}/\Delta$, $\Delta=\det(\alpha_{q'k_{q''}})_{q',q''=1,\dots,s'}$, Δ_{qk} *— визначник, отриманий з* Δ *заміною стовпчика* $(\alpha_{q'k_q})_{q'=1,\dots,s'}$ *на стовпчик* $(\alpha_{q'k})_{q'=1,\dots,s'}$, *а* $\alpha_{qj}=-\sum_{k=1}^{j}(\gamma_{q\varkappa}-\gamma_{qk})$.

Теорема 1.21 включає як частинні випадки результати щодо інваріантів нільпотентної алгебри строго верхньотрикутних матриць $\mathfrak{t}_0(n)$, розв'язної алгебри $\mathfrak{st}(n)$ спеціальних верхньотрикутних матриць і розв'язних алгебр з нільрадикалом, ізоморфним $\mathfrak{t}_0(n)$, і одним нільнезалежним елементом.

У **другому** розділі після аналізу основних понять і тверджень щодо некласичних симетрій у § 2.1 введено строге означення модулів редукції диференціальних рівнянь, що дало змогу переглянути та наново побудувати теорію некласичних симетрій диференціальних рівнянь.

Нехай задано розшарований простір n незалежних змінних $x = (x_1, \dots, x_n)$ і однієї залежної змінної u. Розглянемо p-вимірний інволютивний модуль $Q = \langle Q_1,\ \dots,\ Q_p\rangle$ векторних полів, визначений у деякій області цього простору, і припустимо, що розмірність p модуля Q (над кільцем гладких функцій змінних (x, u)) не перевищує n, $0 < p \leqslant n$. Додатково вважаємо, що модуль Q задовольняє *умову на ранг*, тобто для кожного фіксованого значення (x, u) проекція на простір змінних x є p-вимірною.

Не обмежуючи загальності, вважаємо, що $F_{I^0} \neq 0$ у представленні $F(I^0, \dots, I^{n-p}) = 0$ загального розв'язку характеристичної системи $\mathcal{Q}$: $Q[u] = 0$, і розв'язуємо рівняння $F(I^0, \dots, I^{n-p}) = 0$ відносно I^0: $I^0 = \varphi(I^1, \dots, I^{n-p})$. Внаслідок умови на ранг отримаємо представлення (у загальному випадку неявне)

$$\mathcal{A}: \quad I^0(x, u) = \varphi(\omega), \quad \omega_\sigma = I^\sigma(x, u)$$

для розв'язків характеристичної системи $\mathcal{Q}$, де $\varphi = \varphi(\omega)$ — довільна гладка функція своїх аргументів, яке називають *анзацом* для функції u, що відповідає модулю Q. Для кожного фіксованого s розглянемо розв'язок системи $Q_{s'}J^s = \delta_{ss'}$, де $\delta_{ss'}$ — символ Кронекера. Оскільки функції I^0, …, I^{n-p}, J^1, …, J^p змінних (x, u) функціонально незалежні, то можна зробити заміну змінних

$$\varphi = I^0(x, u), \quad \omega_\sigma = I^\sigma(x, u), \quad \omega'_s = J^s(x, u),$$

де $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{n-p})$ та $\omega' = (\omega'_1, \dots, \omega'_p)$ — нові незалежні змінні, а φ — нова залежна змінна. Змінні ω та φ називатимемо Q-інваріантними, а змінні ω' — параметричними для модуля Q.

Означення 2.1. Анзац $\mathcal{A}$, побудований за модулем Q, *редукує* диференціальне рівняння $\mathcal{L}$: $L[u] := L(x, u_{(r)}) = 0$ порядку r, якщо існують гладкі функції $\check\lambda = \check\lambda(\omega, \omega', \varphi_{(r)})$ та $\check L = \check L(\omega, \varphi_{(r)})$ такі, що функція $\check\lambda$ є ненульовою та

$$L|_{\mathcal{A}} = \check\lambda(\omega, \omega', \varphi_{(r)})\check L(\omega, \varphi_{(r)}).$$

Тоді модуль Q називають *модулем редукції* рівняння $\mathcal{L}$, а рівняння $\check L(\omega, \varphi_{(r)}) = 0$ — *редукованим рівнянням*, пов'язаним з анзацом $\mathcal{A}$.

Розглянемо умови на диференціальне рівняння $\mathcal{L}$ (r-го порядку) та інволютивний модуль Q, що задовольняє умову на ранг:

(C1) Q є модулем редукції рівняння $\mathcal{L}$;

(C2) $V_{(r)}L[u] \in \langle L[u], D^\alpha Q_s[u] = 0, |\alpha| < r\rangle$ для всіх $V \in Q$;

(C3) $V_{(r)}L[u]\big|_{\mathcal{L}\cap\mathcal{Q}_{(r)}} = 0$ для всіх $V \in Q$.

Тут $\mathcal{Q}_{(r)}$ — многовид, визначений всіма диференціальними наслідками характеристичної системи $\mathcal{Q}$ до порядку r включно, тобто

$$\mathcal{Q}_{(r)} = \{(x, u_{(r)}) \in \mathrm{J}^r \mid D^\alpha Q_s[u] = 0,\ |\alpha| < r\}.$$

$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$, $D_i = \partial_{x_i} + u_{\alpha+\delta_i}\partial_{u_\alpha}$ — оператор повної похідної за змінною x_i, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — довільний мультиіндекс, $\alpha_i \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, δ_i — мультиіндекс, i-та компонента якого дорівнює 1, а всі інші компоненти нульові. Змінна u_α відповідає похідній. Через $V_{(r)}$ позначено стандартне r-е продовження векторного поля V.

В умовах (C2) та (C3) достатньо вимагати, щоб векторне поле V пробігало базис $(Q_1, \dots, Q_p)$ модуля Q. Вибір базису для представлення характеристичної системи $\mathcal{Q}$ і перевірки умов (C2) та (C3) не є суттєвим. Усі ці умови зберігаються при точкових перетвореннях змінних (x, u).

Теорема 2.2. *Умови* (C1) *та* (C2) *є еквівалентними й із них випливає умова* (C3)*. Якщо набір диференціальних функцій* $(L[u], D^\alpha Q_s[u] = 0, |\alpha| < r)$ *має максимальний ранг на* $\mathcal{L}\cap\mathcal{Q}_{(r)}$*, то з умови* (C3) *випливає умова* (C2) *(а отже, і умова* (C1)*).*

У § 2.2 і § 2.3 введено поняття сингулярних і метасингулярних модулів векторних полів для диференціальних функцій.

Означення 2.8. Модуль Q назвемо *сингулярним* для диференціальної функції L, якщо існує диференціальна функція $\tilde L = \tilde L[u]$ порядку, меншого за r, така, що $L|_{\mathcal{Q}_{(r)}} = \tilde L|_{\mathcal{Q}_{(r)}}$. В іншому випадку Q

назвемо *регулярним* модулем для диференціальної функції $L = L[u]$. Якщо мінімальний порядок диференціальних функцій, обмеження яких на $\mathcal{Q}_{(r)}$ співпадає з $L|_{\mathcal{Q}_{(r)}}$, дорівнює $k \in \{-\infty, 0, 1, \ldots, r\}$, то модуль Q назвемо *сингулярним копорядку* k для диференціальної функції L. Модуль Q назвемо *ультрасингулярним* для диференціальної функції L, якщо $L|_{\mathcal{Q}_{(r)}} \equiv 0$.

Зокрема, якщо модуль є регулярним для диференціальної функції L, то його копорядок сингулярності дорівнює $r = \operatorname{ord} L$. Копорядок сингулярності модуля Q для диференціальної функції L позначатимемо через $\operatorname{sco}_L Q$.

Означення 2.11. $(p{+}1)$-вимірний $(0 < p < n)$ модуль M назвемо *метасингулярним* для диференціальної функції L, якщо будь-який p-вимірний інволютивний підмодуль модуля M, що задовольняє умову на ранг, є сингулярним для L і модуль M містить сім'ю $\mathfrak{M} = \{Q^\Phi\}$ таких підмодулів, параметризовану довільною функцією $\Phi = \Phi(x, u)$ усіх незалежних і залежних змінних. *Копорядок сингулярності* $\operatorname{sco}_L M$ метасингулярного модуля M визначимо як максимум копорядків сингулярності його інволютивних p-вимірних підмодулів, що задовольняють умову на ранг.

Означення 2.12. $(p{+}1)$-вимірний $(0 < p < n)$ модуль M назвемо *метарегулярним* для диференціальної функції L, якщо він містить сім'ю $\mathfrak{M} = \{Q^\Phi\}$ p-вимірних інволютивних підмодулів, регулярних для L, яку параметризовано довільною функцією $\Phi = \Phi(x, u)$ всіх незалежних і залежних змінних. Отже, $\operatorname{sco}_L M = \operatorname{ord} L$.

Під параметризацією довільною функцією розуміємо параметризацію по модулю розв'язків деякої системи диференціальних рівнянь на цю функції.

Твердження 2.14. $(p{+}1)$*-вимірний модуль M, $p \geqslant 2$, містить сім'ю p-вимірних інволютивних підмодулів, параметризованих довільною функцією всіх незалежних і залежних змінних, тоді й лише тоді, коли модуль M є інволютивним.*

Твердження 2.17. $(p{+}1)$*-вимірний модуль M з $p \geqslant 2$ є метасингулярним (або відповідно метарегулярним) для диференціальної функції L тоді й лише тоді, коли з точністю до точкових перетворень у просторі змінних (x, u) він містить сім'ю $\mathfrak{M}$ p-вимірних інволютивних підмодулів, сингулярних (або відповідно регулярних) для L, вигляду $Q^\Phi = \langle \partial_s - (\Phi_s/\Phi_u)\partial_u,\ s = 1, \ldots, p\rangle$, що параметризовані* *довільною гладкою функцією $\Phi = \Phi(x, u)$ усіх незалежних і залежних змінних, $\Phi_u \neq 0$, причому копорядок сингулярності сім'ї $\mathfrak{M}$ для диференціальної функції L співпадає з копорядком сингулярності всього модуля M, $\mathrm{sco}_L\,\mathfrak{M} = \mathrm{sco}_L\,M$.*

З точністю до точкових перетворень можна описати загальний вигляд диференціальних функцій, що допускають метасингулярні модулі векторних полів.

Теорема 2.19. *Диференціальна функція L r-го порядку однієї залежної та n незалежних змінних допускає $(p{+}1)$-вимірний метасингулярний модуль векторних полів копорядку сингулярності k $(0 \leqslant k < r,\ 0 < p < n)$ тоді й лише тоді, коли з точністю до точкових перетворень її можна представити у вигляді $L = \bar{L}(x, \Omega_{r,k,p})$, де $\Omega_{r,k,p} = \big(\omega_\alpha,\ |\alpha| \leqslant r,\ \alpha_{p+1} + \cdots + \alpha_n \leqslant k\big)$, функція $\bar{L}$ суттєво залежить від деякого ω_α з $\alpha_{p+1} + \cdots + \alpha_n = k$. Тут $\omega_\alpha = u_\alpha$ або, лише у випадку $p = 1$, $\omega_\alpha = D_2^{\alpha_2} \cdots D_n^{\alpha_n}(D_1 + uD_2 + \xi^3 D_3 + \cdots + \xi^n D_n)^{\alpha_1} u$ для деяких фіксованих гладких функцій $\xi^i = \xi^i(x, u)$, $i = 3, \ldots, n$.*

Аналогічні поняття слабо сингулярних і метасингулярних модулів диференціальних рівнянь введено у § 2.4.

Означення 2.23. p-вимірний $(0 < p < n)$ інволютивний модуль Q, що задовольняє умову на ранг, назвемо *слабо сингулярним* для диференціального рівняння $\mathcal{L}$: $L[u] = 0$ суттєвого порядку $r > 0$, якщо існують диференціальна функція $\tilde{L} = \tilde{L}[u]$ порядку, нижчого за r, і ненульова диференціальна функція $\lambda = \lambda[u]$ порядку, не вищого за r, такі, що $L|_{\mathcal{Q}_{(r)}} = (\lambda\tilde{L})|_{\mathcal{Q}_{(r)}}$. В іншому випадку назвемо Q *слабо регулярним* модулем для диференціального рівняння $\mathcal{L}$. Якщо мінімальний порядок диференціальної функції, обмеження якої на $\mathcal{Q}_{(r)}$ співпадає з точністю до ненульових функціональних множників з $L|_{\mathcal{Q}_{(r)}}$, дорівнює $k \in \{-\infty, 0, 1, \ldots, r\}$, то модуль Q назвемо *слабо сингулярним копорядку k* для диференціального рівняння $\mathcal{L}$.

Доведено теорему, яка характеризує диференціальні рівняння, що допускають слабо метасингулярні модулі. З неї випливає, що замість таких модулів достатньо досліджувати метасингулярні модулі відповідних диференціальних функцій.

Зв'язок між копорядком слабкої сингулярності операторів редукції, суттєвим порядком відповідних редукованих рівнянь і, у випадку редукції до звичайних диференціальних рівнянь, кількістю параметрів у відповідних сім'ях інваріантних розв'язків отримано в § 2.5.

Теорема 2.34. *Нехай Q — p-вимірний модуль редукції ($0 < p \leqslant n$) рівняння $\mathcal{L}$. Тоді копорядок слабкої сингулярності модуля Q для рівняння $\mathcal{L}$ співпадає з суттєвим порядком відповідного редукованого диференціального рівняння.*

Показано, що зв'язок між редукцією диференціального рівняння $\mathcal{L}$ за допомогою інволютивного модуля Q і формальною сумісністю об'єднаної системи, яка складається з рівняння $\mathcal{L}$ і характеристичної системи, асоційованої з Q, суттєво залежить від копорядку слабкої сингулярності модуля Q для диференціального рівняння $\mathcal{L}$.

З використанням сингулярних модулів редукції у § 2.6 розглянуто особливий випадок модулів редукції розмірності, що співпадає з кількістю незалежних змінних. Такі модулі відповідають редукції до алгебраїчних рівнянь.

У § 2.7 розширено попередні "no-go" результати на n-вимірні модулі, що редукують $(1{+}n)$-вимірні еволюційні рівняння загального вигляду $u_t = H(t, x, u_{(r,x)})$ до звичайних диференціальних рівнянь з єдиною незалежною часовою змінною.

Це мотивує розгляд модулів редукції з копорядком сингулярності 1 у § 2.8. За припущення, що диференціальне рівняння $\mathcal{L}$ допускає n-вимірний метасингулярний модуль M з копорядком сингулярності 1, де n — кількість незалежних змінних у рівнянні $\mathcal{L}$, доведено "no-go" твердження, що встановлюють зв'язок між $(n{-}1)$-вимірними модулями редукції рівняння $\mathcal{L}$, що містяться в M, і розв'язками рівняння $\mathcal{L}$. Зокрема показано, що визначальні рівняння для таких модулів зводяться до початкового рівняння за допомогою композиції диференціальних підстановок і перетворення годографа.

Твердження 2.51. *Нехай будь-який $(n{-}1)$-вимірний інволютивний модуль у зведеній формі $Q = \langle \partial_s + \eta^s \partial_u \rangle$ є модулем копорядку сингулярності 1 для рівняння $\mathcal{L}$. Тоді систему визначальних рівнянь на значення η^s, які відповідають модулям редукції рівняння $\mathcal{L}$, за допомогою композиції нелокальної підстановки $\eta^s = -\Phi_s/\Phi_u$, де Φ — гладка функція від (x, u) з $\Phi_u \neq 0$, і перетворення годографа*

нові незалежні змінні: $\quad \tilde{x}_i = x_i, \quad \varkappa = \Phi,$

нова залежна змінна: $\quad \tilde{u} = u$

можна звести до початкового рівняння $\mathcal{L}$ на функцію $\tilde{u} = \tilde{u}(\tilde{x}, \varkappa)$, де $\varkappa$ відіграє роль параметра.

Заключний § 2.9 присвячено сингулярним модулям квазілінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку, причому розмірність модулів вважається меншою за кількість незалежних змінних. Показано, що еліптичні рівняння не допускають сингулярних модулів. Будь-яке еволюційне рівняння другого порядку з невиродженою матрицею коефіцієнтів при других похідних допускає лише сингулярні модулі, розглянуті в § 2.7 для загальних еволюційних рівнянь. Узагальнені хвильові рівняння є більш складними з цієї точки зору. Зокрема, вони можуть допускати сім'ї сингулярних модулів, які не мають інтерпретації в термінах метасингулярних модулів.

Третій розділ дисертації присвячено задачам, пов'язаним із ліївськими симетріями звичайних диференціальних рівнянь. Зокрема, у § 3.1 досліджено диференціальні інваріанти однопараметричних груп локальних перетворень у просторі n незалежних та m залежних змінних: $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $u=(u^1,u^2,\dots,u^m)$.

Теорема 3.1. *Нехай $I(x,u)=(I^1(x,u),I^2(x,u),\dots,I^{m+n-1}(x,u))$ — універсальний інваріант оператора $Q=\xi^a(x,u)\partial_{x_a}+\eta^i(x,u)\partial_{u^i}$, а $J(x,u)$ — частинний розв'язок рівняння $QJ=1$. Тоді функції*

$$I^c(x,u),\quad D_{y_1}^{\alpha_1}D_{y_2}^{\alpha_2}\cdots D_{y_n}^{\alpha_n}I^{i+n-1}(x,u),\quad c=1,\dots,n-1,$$

утворюють повний набір функціонально незалежних диференціальних інваріантів (або універсальний диференціальний інваріант) r-го порядку оператора Q. Тут $\alpha_a\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $\alpha_1+\dots+\alpha_n\le r$, оператори D_{y_a} мають вигляд

$$D_{y_c}=\frac{(-1)^{c+a}}{\Delta}\frac{D(I^d,{\scriptstyle d=1,\dots,n-1,\,d\neq c},J)}{D(x_b,{\scriptstyle b=1,\dots,n,\,b\neq a})}D_{x_a},\quad c=1,\dots,n-1,$$
$$D_{y_n}=\frac{(-1)^{n+a}}{\Delta}\frac{D(I^d,{\scriptstyle d=1,\dots,n-1})}{D(x_b,{\scriptstyle b=1,\dots,n,\,b\neq a})}D_{x_a}.$$

Вираз $D(I\text{'s})/D(x\text{'s})$ позначає відповідний якобіан у повних похідних, а D_{x_a} — оператор повної похідної за змінною x_a.

Теорема 3.4. *Якщо знайдено універсальний інваріант оператора Q, то повний набір його функціонально незалежних диференціальних інваріантів будь-якого порядку можна побудувати за допомогою однієї квадратури та диференціювання.*

У рамках стандартного підходу диференціальні інваріанти строго першого порядку знаходять як інваріанти першого продовження оператора Q, тобто як перші інтеграли відповідної характеристичної системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{\mathrm{d}x_a}{\xi^a} = \frac{\mathrm{d}u^i}{\eta^i} = \frac{\mathrm{d}u^k_c}{\eta^k_c + \eta^k_{u^j} u^j_c - \xi^b_{x_c} u^k_b - \xi^b_{u^j} u^j_c u^k_b},$$

що залежать не тільки від x та u, а й від інших змінних простору J^1. За відомого універсального інваріанта $I(x,u)$ оператора Q задача побудови диференціальних інваріантів першого порядку еквівалентна інтегруванню системи рівнянь типу Ріккаті. Запропонований метод знаходження диференціальних інваріантів строго першого порядку на відміну від стандартного дозволяє уникнути прямого інтегрування систем рівнянь типу Ріккаті та знайти розв'язок задачі за допомогою однієї квадратури та диференціювання. Тому цей метод можна також використовувати для інтегрування таких систем.

У § 3.2 виконано вичерпний аналіз ліївських симетрій систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з комутуючими сталими матрицями коефіцієнтів. На основі оригінального алгебраїчного підходу суттєво розширено й узагальнено результати інших авторів. Зокрема, описано в явному вигляді максимальні алгебри ліївської інваріантності таких систем без обмежень щодо кількості рівнянь і вигляду матриць коефіцієнтів.

Теорема 3.21. *Нехай J — матриця в жордановій формі, не пропорційна одиничній матриці, причому $k_1, \dots, k_s$ — розмірності її жорданових клітинок. Максимальною алгеброю ліївської інваріантності системи $\ddot{\boldsymbol{x}} = J\boldsymbol{x}$ є*

$$\langle \mathcal{X}^m,\, m = 1, \dots, 2n,\, \mathcal{H}^\ell,\, \ell = 1, \dots, N,\, \mathcal{T} \rangle \quad \textit{або}$$
$$\langle \mathcal{X}^m,\, m = 1, \dots, 2n,\, \mathcal{H}^\ell,\, \ell = 1, \dots, N,\, \mathcal{T},\, \mathcal{D} \rangle,$$

якщо матриця J є ненільпотентною або нільпотентною відповідно. Тут $\mathcal{X}^m = \varphi^{ma}(t)\partial_{x^a}$, $\mathcal{H}^\ell = (H^\ell)^{ba} x^a \partial_{x^b}$, вектор-функції $\boldsymbol{\varphi}^m = (\varphi^{m1}(t), \dots, \varphi^{mn}(t))^{\mathrm{T}}$, $m = 1, \dots, 2n$, утворюють фундаментальну систему розв'язків системи $\ddot{\boldsymbol{x}} = J\boldsymbol{x}$, а H^ℓ, $\ell = 1, \dots, N$, вичерпують усі лінійно незалежні матриці, що комутують із J, $\mathcal{T} = \partial_t$, $\mathcal{D} = t\partial_t - 2\gamma^{ab} x^b \partial_{x^a}$, $(\gamma^{ab}) = \mathrm{diag}(1, 2, \dots, k_1, 1, 2, \dots, k_2, \dots, 1, 2, \dots, k_s)$.

Як наслідки цієї теореми отримано також точні нижні та верхні оцінки для можливих розмірностей цих алгебр.

У § 3.3 вичерпно описано групоїди еквівалентності класу лінійних звичайних диференціальних рівнянь r-го порядку ($r \geqslant 2$)

$$x^{(r)} + a_{r-1}(t)x^{(r-1)} + \cdots + a_1(t)x^{(1)} + a_0(t)x = b(t),$$

а також його підкласів, пов'язаних з раціональною формою ($a_{r-1} = 0$), формою Лагера–Форсайта ($a_{r-1} = a_{r-2} = 0$), першою та другою формами Арнольда (відповідно $a_0 = 0$ та $a_0 = a_1 = 0$). Підкласи однорідних рівнянь, асоційовані з загального формою, раціональною формою та формою Лагера–Форсайта, при $r \geqslant 3$ є однорідно напівнормалізованими відносно груп точкових симетрій, пов'язаних з лінійною суперпозицією розв'язків. Це дало можливість описати ліївські симетрії лінійних звичайних диференціальних рівнянь алгебраїчним методом трьома різними способами. Зокрема, класифікацію на основі форми Лагера–Форсайта, асоційованої з максимальним калібруванням довільних елементів, зведено до класифікації підалгебр алгебри $\mathfrak{sl}(n+2,\mathbb{C})$ (або $\mathfrak{sl}(n+2,\mathbb{R})$). Спосіб на основі раціональної форми потребує використання класифікації всіх можливих реалізацій скінченновимірних алгебр Лі на прямій. Якщо не застосовувати калібрування довільних елементів і розглядати лінійні звичайні диференціальні рівняння загального вигляду, то виникає необхідність у використанні класифікації реалізацій специфічних алгебр Лі в просторі двох змінних. Класи, пов'язані з формами Арнольда, при $r \geqslant 3$ не є нормалізованими, а тому непридатні для групової класифікації. Але нормалізаційні властивості таких класів можна покращити через їх репараметризацію, що дає змогу побудувати приклади розширених узагальнених груп еквівалентності.

У § 3.4 запропоновано симетрійний підхід до опису нових інтегровних випадків рівняння Абеля, який використовує зв'язок між рівняннями Абеля та звичайними диференціальними рівняннями другого порядку, а також перетворення еквівалентності у класах таких рівнянь.

У § 3.5 проведено детальний порівняльний аналіз результатів щодо реалізацій низькорозмірних алгебр Лі векторними полями з результатами С. Вафо Соха та Ф.М. Махомеда.

Різноманітні задачі симетрійного аналізу диференціальних рівнянь з частинними похідними, що виникають у математичній фізиці, розглянуто у **четвертому** розділі дисертації.

У § 4.1 розглянуто нелінійні узагальнення рівнянь Бюргерса і Кортевега–де Фріза вигляду $u_t + uu_1 = F(u_n)$, де $F_{u_n} \neq 0$, $n \geqslant 2$, $u_t = \partial u/\partial t$, $u_n = \partial^n u/\partial x^n$. Будь-яке таке рівняння інваріантне відносно алгебри Галілея $\langle \partial_t, \partial_x, t\partial_x + \partial_u \rangle$. Показано, що з точністю до перетворень еквівалентності цей клас рівнянь допускає лише чотири випадки розширення максимальної алгебри ліївської інваріантності: $F = (u_n)^k$, $k \neq 0, \frac{3}{n+1}$; $F = \ln u_n$; $F = (u_n)^{\frac{3}{n+1}}$; $F = (u_2)^{\frac{1}{3}}$ при $n = 2$ — відповідно два одновимірні, одне двовимірне та одне чотиривимірне розширення.

У § 4.2 основним результатом є теорема про лінійні оператори редукції загального лінійного диференціального рівняння $\mathcal{L}$ r-го порядку $L[u] := \sum_{|\alpha|\leqslant r} a^\alpha(x)u_\alpha = 0$ відносно невідомої функції u незалежних змінних $x = (x_1, \dots, x_n)$, де один із коефіцієнтів a^α з $|\alpha| = r$ є ненульовим.

Теорема 4.9. *Нехай лінійне диференціальне рівняння $\mathcal{L}$ має оператор редукції $Q = \xi^i(x)\partial_i + (\eta^1(x)u + \eta^0(x))\partial_u$. Тоді коефіцієнт η^0 допускає представлення $\eta^0 = \xi^i\zeta^0_i - \eta^1\zeta^0$, де $\zeta^0 = \zeta^0(x)$ — розв'язок рівняння $\mathcal{L}$. Отже, з точністю до еквівалентності, породженої дією групи ліївських симетрій рівняння $\mathcal{L}$ на множині його операторів редукції, коефіцієнт η^0 можна покласти рівним нулю. Будь-яке векторне поле вигляду $\xi^i\partial_i + (\eta^1 u + \xi^i\zeta_i - \eta^1\zeta)\partial_u$, де $\zeta = \zeta(x)$ — довільний розв'язок рівняння $\mathcal{L}$, є оператором редукції рівняння $\mathcal{L}$.*

Як приклад, що ілюструє цю теорему, в § 4.3 досліджено умовні симетрії (сингулярні та регулярні оператори редукції) лінійного рівняння стрижня $u_{tt} + u_{xxxx} = 0$.

Твердження 4.10. *З точністю до еквівалентності відносно перетворень точкової симетрії, пов'язаних з лінійним принципом суперпозиції, множину сингулярних операторів редукції лінійного рівняння стрижня вичерпують векторні поля вигляду $Q_\mathrm{s} = \partial_x + \frac{\theta_x}{\theta}u\partial_u$, де функція $\theta = \theta(t,x)$ задовольняє звичайне диференціальне рівняння $\theta_{xxxx} = \kappa\theta$ для деякої сталої κ.*

Анзац, побудований за оператором редукції Q, має вигляд $u = \theta(x)\varphi(\omega)$, де $\omega = t$ — інваріантна незалежна змінна, φ — інваріантна залежна змінна. Цей анзац редукує рівняння стрижня до рівняння $\varphi_{\omega\omega} + \kappa\varphi = 0$. Зазначимо, що оператор редукції Q_s пов'язаний з розділенням змінних у лінійному рівнянні стрижня. Аналогічні результати отримано для регулярних операторів редукції. Завдяки зв'язку певної потенціальної системи для рівняння стрижня з (1+1)-вимірним вільним рівнянням Шрьодінгера побудовано потенціальні симетрії рівняння стрижня.

Найпростіші потенціальні закони збереження (1+1)-вимірних лінійних еволюційних рівнянь, пов'язані з введенням одного потенціалу за лінійними законами збереження, вивчено у § 4.4. Використовуючи дуальне перетворення Дарбу, доведено теорему.

Теорема 4.17. *Кожен найпростіший потенціальний закон збереження будь-якого* (1+1)*-вимірного лінійного еволюційного рівняння парного порядку індуковано локальним законом збереження цього рівняння.*

Це твердження також справедливе для лінійних найпростіших потенціальних законів збереження (1+1)-вимірних лінійних еволюційних рівнянь непарного порядку, пов'язаних з лінійними потенціальними системами. Запропоновано ефективний критерій перевірки, коли квадратичний закон збереження найпростішої лінійної потенціальної системи є чисто потенціальним законом збереження відповідного (1+1)-вимірного лінійного еволюційного рівняння непарного порядку.

У § 4.5 для відбору фізично релевантних моделей серед нелінійних узагальнень рівнянь Шрьодінгера використано два критерії: інваріантність відносно групи Галілея та її розширень, зокрема групи Шрьодінгера, та вимога, щоб розв'язки задовольняли рівняння неперервності.

Наприкінці дисертації наведено основні результати та висновки.

ВИСНОВКИ

Основну увагу в дисертації зосереджено на проблемах, пов'язаних з узагальненими операторами Казіміра та реалізаціями алгебр Лі, ліївськими симетріями та модулями редукції диференціальних рівнянь. Основні результати дисертації можна сформулювати таким чином:

- Розроблено оригінальний метод знаходження фундаментального базису інваріантів (узагальнених операторів Казіміра) алгебр Лі, що використовує картанівський метод рухомих реперів у версії Фелса–Олвера. З метою тестування методу, демонстрації його переваг і пояснення процедури нормалізації заново обчислено інваріанти дійсних низькорозмірних алгебр Лі. При цьому виправлено ряд неточностей та помилок у попередніх результатах, наведених у літературі. Крім того, у багатьох випадках відповідні базиси інваріантів вдалося побудувати у компактнішій формі.

• Уперше отримано вичерпні описи базисів інваріантів серій розв'язних алгебр Лі довільної розмірності з фіксованими структурами нільрадикалів, зокрема майже абелевих алгебр Лі, розв'язних алгебр Лі, нільрадикали яких є ниткоподібними майже абелевими алгебрами, нільпотентних алгебр строго верхньотрикутних матриць та розв'язних алгебр Лі з трикутними нільрадикалами й діагональними нільнезалежними елементами. У літературі наведено лише часткові результати або гіпотези щодо таких базисів, і лише в рамках запропонованого алгебраїчного підходу їх вдалося повністю описати.

• Введено строге означення модулів редукції диференціальних рівнянь, що дало змогу переглянути та наново побудувати теорію некласичних симетрій диференціальних рівнянь. Запропоновано поняття сингулярних модулів редукції диференціальних рівнянь та проведено детальне дослідження властивостей таких модулів.

• Досліджено сингулярні модулі редукції еволюційних рівнянь і квазілінійних рівнянь другого порядку. Також вивчено редукції диференціальних рівнянь до алгебраїчних рівнянь та звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. Це дозволило впорядкувати й узагальнити всі раніше відомі "no-go" результати щодо некласичних симетрій диференціальних рівнянь.

• Доведено узагальнення теореми Лі про диференціальні інваріанти однопараметричної групи локальних перетворень без обмеження щодо кількості незалежних і залежних змінних. А саме, показано, що за відомого універсального інваріанта повний набір функціонально незалежних диференціальних інваріантів будь-якого порядку такої групи можна побудувати за допомогою однієї квадратури та диференціювання. Детально проаналізовано зв'язок між знаходженням диференціальних інваріантів першого порядку для однопараметричних груп та інтегруванням систем рівнянь типу Ріккаті.

• Прокласифіковано максимальні алгебри ліївської інваріантності систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з комутуючими сталими матрицями коефіцієнтів без обмежень щодо кількості рівнянь і вигляду цих матриць. Отримано точні нижні та верхні оцінки розмірностей таких алгебр.

• Досліджено групоїд еквівалентності класу лінійних звичайних диференціальних рівнянь довільного порядку, а також групоїди еквівалентності його підкласів, пов'язаних з раціональною формою, формою Лагера–Форсайта, першою та другою формами Арнольда. Це дозволило прокласифікувати ліївські симетрії лінійних звичайних диференціальних рівнянь алгебраїчним методом у три різні способи. Нормалізаційні властивості ненормалізованих класів таких рівнянь покращено через їх репараметризацію. У результаті вперше побудовано приклади розширених узагальнених груп еквівалентності.

- Проведено повну групову класифікацію нелінійних галілей-інваріантних узагальнень рівнянь Бюргерса і Кортевега–де Фріза довільного порядку.
- Доведено теорему про лінійні оператори редукції загального лінійного диференціального рівняння з частинними похідними. Як приклад, що ілюструє цю теорему, досліджено сингулярні та регулярні оператори редукції лінійного рівняння стрижня. Додатково вивчено зв'язок між цим рівнянням та (1+1)-вимірним вільним рівнянням Шрьодінгера, що дозволило побудувати потенціальні симетрії рівняння стрижня.
- Вивчено найпростіші потенціальні закони збереження (1+1)-вимірних лінійних еволюційних рівнянь, пов'язані з введенням одного потенціалу за лінійними законами збереження. Завдяки використанню дуального перетворення Дарбу доведено, що всі найпростіші потенціальні закони збереження будь-якого (1+1)-вимірного лінійного еволюційного рівняння парного порядку індуковано локальними законами збереження цього рівняння. Одержано ефективний критерій, який дозволяє легко перевірити, коли квадратичний закон збереження найпростішого потенціального рівняння є чисто потенціальним законом збереження відповідного (1+1)-вимірного лінійного еволюційного рівняння непарного порядку.
- Описано класи нелінійних рівнянь Шрьодінгера, які інваріантні відносно суттєвої частини максимальної алгебри ліївської симетрії вільного рівняння Шрьодінгера і розв'язки яких задовольняють рівняння неперервності.

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. Boyko V.M., Kunzinger M., Popovych R.O., Singular reduction modules of differential equations, *J. Math. Phys.* **57** (2016), no. 10, 101503, 34 pp.; arXiv:1201.3223.
2. Boyko V.M., Popovych R.O., Shapoval N.M., Equivalence groupoids of classes of linear ordinary differential equations and their

group classification, *J. Phys. Conf. Ser.* **621** (2015), 012002, 17 pp.; arXiv:1403.6062v1.

3. Бойко В.М., Редукція диференціальних рівнянь до алгебраїчних, *Допов. НАН України* (2014), № 3, 7–12.
4. Boyko V.M., Popovych R.O., Shapoval N.M., Lie symmetries of systems of second-order linear ordinary differential equations with constant coefficients, *J. Math. Anal. Appl.* **397** (2013), no. 1, 434–440; arXiv:1203.0387.
5. Бойко В.М., Попович Р.О., Умовні симетрії лінійного рівняння стрижня, *Допов. НАН України* (2013), № 9, 7–15.
6. Бойко В.М., Попович Р.О., Потенціальні закони збереження лінійних еволюційних рівнянь з одним потенціалом, *Допов. НАН України* (2012), № 4, 7–14.
7. Boyko V.M., Patera J., Popovych R.O., Invariants of solvable Lie algebras with triangular nilradicals and diagonal nilindependent elements, *Linear Algebra Appl.* **428** (2008), no. 4, 834–854; arXiv:0706.2465.
8. Boyko V.M., Patera J., Popovych R.O., Invariants of triangular Lie algebras with one nilindependent diagonal element, *J. Phys. A: Math. Gen.* **40** (2007), no. 32, 9783–9792; arXiv:0705.2394.
9. Boyko V.M., Patera J., Popovych R.O., Invariants of triangular Lie algebras, *J. Phys. A: Math. Gen.* **40** (2007), no. 27, 7557–7572; arXiv:0704.0937.
10. Boyko V.O., Patera J., Popovych R.O., Invariants of Lie algebras with fixed structure of nilradicals, *J. Phys. A: Math. Theor.* **40** (2007), no. 1, 113–130; arXiv:math-ph/0606045.
11. Boyko V.M., Patera J., Popovych R.O., Computation of invariants of Lie algebras by means of moving frames, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** (2006), no. 20, 5749–5762; arXiv:math-ph/0602046v2.
12. Boyko V.M., Symmetry, equivalence and integrable classes of Abel equations, *Збірник праць Інституту математики НАН України* **3** (2006), № 2, 39–48; arXiv:nlin.SI/0404020.
13. Popovych R.O., Boyko V.M., Nesterenko M.O., Lutfullin M.W., Realizations of real low-dimensional Lie algebras, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** (2003), no. 26, 7337–7360.

14. Popovych R.O., Boyko V.M., Differential invariants and application to Riccati-type systems, *Праці Інституту математики НАН України* **43** (2002), ч. 1, 184–193; arXiv:math-ph/0112057.

15. Попович Р.О., Бойко В.М., Диференціальні інваріанти однопараметричної групи локальних перетворень: одна незалежна змінна, *Нелінійні коливання* **5** (2002), № 2, 218–223.

16. Бойко В.М., Попович В.О., Групова класифікація галілей-інваріантних рівнянь, *Праці Інституту математики НАН України* **36** (2001), 45–50.

17. Бойко В.М., Попович Р.О., Про диференціальні інваріанти в просторі двох змінних, *Допов. НАН України* (2001), № 5, С. 7–10.

18. Попович Р.Е., Бойко В.Н., Дифференциальные инварианты однопараметрической группы локальных преобразований и интегрируемые уравнения Риккати, *Вест. Самар. гос. ун-та.* **18** (2000), № 4, 49–56.

19. Boyko V.M., Fushchych W.I., Lowering of order and general solutions of some classes of PDEs, *Reports Math. Phys.* **42** (1998), no. 3, 311–318.

20. Fushchych W.I., Boyko V.M., Continuity equation in nonlinear quantum mechanics and the Galilei relativity principle, *J. Nonlinear Math. Phys.* **4** (1997), no. 1–2, 124–128; arXiv:math-ph/0208016.

21. Boyko V.M., Popovych R.O., Shapoval N.M., Equivalence groupoids of classes of linear ordinary differential equations and their group classification, 2015, arXiv:1403.6062v2, 22 pp.

22. Boyko V.M., Popovych R.O., Reduction operators of the linear rod equation, in *Proceedings of the Sixth International Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (Protaras, Cyprus, June 17–21, 2012)*, University of Cyprus, Nicosia, 2013, 17–29.

23. Boyko V.M., Popovych R.O., Simplest potential conservation laws of linear evolution equations, in *Proceedings of 5th Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (June 6–10, 2010, Protaras, Cyprus)*, University of Cyprus, Nicosia, 2011, 28–39; arXiv:1008.4851.

24. Boyko V.M., Shapoval N.M., Extended symmetry analysis of a "non-conservative Fokker–Plank equation", in *Proceedings of 5th Workshop*

"Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (June 6–10, 2010, Protaras, Cyprus), University of Cyprus, Nicosia, 2011, 40–46; arXiv:1008.1405.

25. Boyko V.M., Patera J., Popovych R.O., Computation of invariants of Lie algebras by means of moving frames, 2010, arXiv:math-ph/0602046v3, 17 pp.
26. Boyko V.M., Patera J., Popovych R.O., Invariants of Lie algebras via moving frames, in *Proceedings of 4th Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (October 26–30, 2008, Protaras, Cyprus)*, University of Cyprus, Nicosia, 2009, 36–44; arXiv:0904.4462.
27. Popovych R.O., Boyko V.M., Nesterenko M.O., Lutfullin M.W., Realizations of real low-dimensional Lie algebras, 2005, arXiv:math-ph/0301029v7, 39 pp.
28. Boyko V.M., Nonlocal symmetry and integrable classes of Abel equation, *Праці Інституту математики НАН України* **50** (2004), ч. 1, 47–51.
29. Nesterenko M.O., Boyko V.M., Realizations of indecomposable solvable 4-dimensional real Lie algebras, *Праці Інституту математики НАН України* **43** (2002), ч. 1, 474–477.
30. Бойко В.М., Попович Р.О., Диференціальні інваріанти однопараметричних груп Лі, *Праці Інституту математики НАН України* **36** (2001), 51–62.
31. Boyko V.M., On Galilei invariance of the continuity equation, *Праці Інституту математики НАН України* **30** (2000), ч. 1, 99–102.
32. Boyko V.M., On new generalizations of the Burgers and Korteweg–de Vries equations, in *Proceedings of the Second International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics. Memorial Prof. W. Fushchych Conference"*, Kyiv, Institute of Mathematics, 1997, Vol. 1, 122–129.
33. Boyko V.M., Popovych R.O., Algebraic approach and group classification of classes of linear ordinary differential equations, Eighth International Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (Larnaca, Cyprus, June 12–17, 2016), Abstract, Nicosia, University of Cyprus, 2016, p. 18, `http://www.mas.ucy.ac.cy/~symmetry/Abs2016/Boyko.html`.

34. Boyko V.M., Kunzinger M., Popovych R.O., Singular reduction modules of differential equations, International workshop in honor of Wilhelm Fushchych "Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics" (Kyiv, December 17–20, 2016), Abstract, Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2016, https://www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2016/Boyko_Kunzinger_Popovych.html.

35. Boyko V.M., Popovych R.O., Equivalence groupoids of classes of linear ordinary differential equations and their group classification, International workshop in honor of 70th birthday of Anatoly Nikitin "Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics" (Kyiv, December 27–28, 2015), Abstract, Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2015, https://www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2015/BoykoPopovych.html.

36. Boyko V.M., Popovych R.O., Shapoval N.M., Equivalence groupoids and group classification of classes of linear ordinary differential equations, Seventh International Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (Larnaca, Cyprus, June 15–19, 2014), Abstract, Nicosia, University of Cyprus, 2014, p. 15, http://www.mas.ucy.ac.cy/~symmetry/Abs2014/Boyko.html.

37. Boyko V.M., Shapoval N.M., Symmetries of linear ordinary differential equations, International workshop in honor of Prof. Wilhelm Fushchych "Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics" (Kyiv, December 22–23, 2013), Abstract, Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2013, https://www.imath.kiev.ua/~appmath/AbstractsWIF/BoykoShapoval2013.html.

38. Boyko V.M., Lie symmetries of systems of second-order linear ordinary differential equations with constant coefficients, Sixth International Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (Larnaca, Cyprus, June 17–21, 2012), Abstract, Nicosia, University of Cyprus, 2012, p. 14, http://www.mas.ucy.ac.cy/~symmetry/Abstracts2012/Boyko.pdf.

39. Boyko V.M., Popovych R.O., Shapoval N.M., Symmetries of system of second-order linear ordinary differential equations with constant coefficients, International workshop in honor of Prof. Wilhelm Fushchych "Symmetry and Integrability of Equations of Mathemati-

cal Physics” (Kyiv, December 18–19, 2011), Abstract, Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2011, `https://www.imath.kiev.ua/~appmath/AbstractsWIF/Boyko.html`.

40. Boyko V.M., Patera J., Popovych R.O., Invariants of Lie algebras via moving frames, Eighth International Conference “Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics” (Kyiv, June 21–27, 2009), Abstract, Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2009, `https://www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2009/Boyko.html`.
41. Boyko V.M., Computation of invariants of Lie algebras by means of moving frames, Fourth International Workshop “Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems” (Protaras, Cyprus, October 26–30, 2008), Abstract, Nicosia, University of Cyprus, 2008, p. 11, `http://www.mas.ucy.ac.cy/~symmetry/Talks08/Boyko.pdf`.
42. Boyko V.M., Computation of invariants of Lie algebras by means of moving frames, Seventh International Conference Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics (Kyiv, June 24–30, 2007), Abstract, Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2007, `https://www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2007/Boyko.html`.
43. Boyko V.M., Symmetry, equivalence and integrable classes of Abel equations, Sixth International Conference Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics (Kyiv, June 20–26, 2005), Abstract, Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2005, `https://www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2005/Boyko.html`.
44. Popovych R.O., Boyko V.M., Nesterenko M.O., Lutfullin M.W., Realizations of low-dimensional Lie algebras, Fifth International Conference “Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics” (Kyiv, June 23–29, 2003), Abstract, Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2003, `https://www.imath.kiev.ua/~snmp2003/abstract2003/Popovych-Boyko.html`.
45. Попович Р.О., Бойко В.М., Про групову класифікацію галілей-інваріантних еволюційних рівнянь другого порядку, Український математичний конгрес–2001. Тези доповідей. Секція № 5 (математична фізика), Київ, Інститут математики НАН України, 2001, 25–26.

46. Boyko V.M., Popovych R.O., Differential invariants and integration of Riccati-type systems, Fourth International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (Kyiv, July 9–15, 2001), Abstract, Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2001, `https://www.imath.kiev.ua/~appmath/abstracts/Boyko.html`.

АНОТАЦІЇ

Бойко В.М. Узагальнені оператори Казіміра, сингулярні модулі редукції та симетрії диференціальних рівнянь. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.03 "математична фізика" (111 — математика). — Інститут математики НАН України, Київ, 2017.

Основну увагу в дисертації зосереджено на проблемах, пов'язаних з узагальненими операторами Казіміра та реалізаціями алгебр Лі, а також ліївськими симетріями та модулями редукції диференціальних рівнянь. Розроблено оригінальний метод знаходження фундаментальних базисів інваріантів (узагальнених операторів Казіміра) алгебр Лі, що використовує картанівський метод рухомих реперів у версії Фелса–Олвера. З метою апробації методу, демонстрації його переваг і пояснення процедури нормалізації заново обчислено інваріанти дійсних низькорозмірних алгебр Лі. Вперше вичерпно описано базиси інваріантів серій розв'язних алгебр Лі довільної розмірності з фіксованими структурами нільрадикалів. Введено строге означення модулів редукції диференціальних рівнянь, що дало змогу переглянути та наново побудувати теорію некласичних симетрій диференціальних рівнянь. Запропоновано поняття сингулярних модулів редукції диференціальних рівнянь та проведено детальне дослідження властивостей таких модулів. Це дозволило впорядкувати й узагальнити всі раніше відомі "no-go" результати щодо некласичних симетрій диференціальних рівнянь. Доведено узагальнення теореми Лі про диференціальні інваріанти однопараметричної групи локальних перетворень. Проаналізовано зв'язок між побудовою таких інваріантів та інтегруванням систем рівнянь типу Ріккаті. Прокласифіковано ліївські симетрії систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з комутуючими сталими матрицями коефіцієнтів. Досліджено групоїди

еквівалентності класу лінійних звичайних диференціальних рівнянь довільного порядку та його підкласів. Виконано групову класифікацію таких рівнянь алгебраїчним методом у три різні способи. Вичерпно прокласифіковано ліївські симетрії нелінійних галілей-інваріантних узагальнень рівнянь Бюргерса і Кортевега–де Фріза довільного порядку. Доведено теорему про лінійні оператори редукції загального лінійного диференціального рівняння з частинними похідними. Вивчено найпростіші потенціальні закони збереження (1+1)-вимірних лінійних еволюційних рівнянь, пов'язаних із введенням одного потенціалу за лінійними законами збереження.

Ключові слова: груповий аналіз диференціальних рівнянь, алгебра Лі, узагальнений оператор Казіміра, ліївська симетрія, оператор редукції, модуль редукції, сингулярний модуль редукції, інваріант, диференціальний інваріант, група еквівалентності, групоїд еквівалентності, закон збереження.

Бойко В.Н. Обобщенные операторы Казимира, сингулярные модули редукции и симметрии дифференциальных уравнений. — Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.03 “математическая физика” (111 — математика). — Институт математики НАН Украины, Киев, 2017.

Основное внимание в диссертации сосредоточено на проблемах, связанных с обобщенными операторами Казимира и реализациями алгебр Ли, а также лиевскими симметриями и модулями редукции дифференциальных уравнений. Разработан оригинальный метод поиска фундаментальных базисов инвариантов (обобщенных операторов Казимира) алгебр Ли, использующий картановский метод подвижных реперов в версии Фелса–Олвера. С целью апробации метода, демонстрации его преимуществ и пояснения процедуры нормализации пересчитаны инварианты действительных низкоразмерных алгебр Ли. Впервые исчерпывающе описаны базисы инвариантов серий разрешимых алгебр Ли произвольной размерности с фиксированными структурами нильрадикалов. Введено строгое определение модулей редукции дифференциальных уравнений, что позволило пересмотреть и заново построить теорию неклассических симметрий дифференциальных уравнений. Предложено поня-

тие сингулярных модулей редукции дифференциальных уравнений и проведено детальное исследование свойств таких модулей. Это позволило упорядочить и обобщить все ранее известные “no-go” результаты относительно неклассических симметрий дифференциальных уравнений. Доказано обобщение теоремы Ли о дифференциальных инвариантах однопараметрической группы локальных преобразований. Проанализирована связь между построением таких инвариантов и интегрированием систем уравнений типа Риккати. Проклассифицированы лиевские симметрии систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с коммутирующими постоянными матрицами коэффициентов. Исследованы группоиды эквивалентности класса линейных обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка и его подклассов. Групповая классификация таких уравнений алгебраическим методом выполнена тремя разными способами. Исчерпывающе проклассифицированы лиевские симметрии нелинейных галилей-инвариантных обобщений уравнений Бюргерса и Кортевега–де Фриза произвольного порядка. Доказана теорема о линейных операторах редукции общего линейного дифференциального уравнения в частных производных. Изучены простейшие потенциальные законы сохранения (1+1)-мерных линейных эволюционных уравнений, связанные с введением одного потенциала по линейным законам сохранения.

Ключевые слова: групповой анализ дифференциальных уравнений, алгебра Ли, обобщенный оператор Казимира, лиевская симметрия, оператор редукции, модуль редукции, сингулярный модуль редукции, инвариант, дифференциальный инвариант, группа эквивалентности, группоид эквивалентности, закон сохранения.

Boyko V.M. Generalized Casimir operators, singular reduction modules and symmetries of differential equations. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences, speciality 01.01.03 “Mathematical Physics” (111 — Mathematics). — Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2017.

In the thesis, the main attention is paid to problems related to generalized Casimir operators and realizations of Lie algebras as well as Lie symmetries and reduction modules of differential equations.

An original algorithm for finding fundamental bases of invariants (generalized Casimir operators) of Lie algebras is developed, which uses

the Cartan method of moving frames in the Fels–Olver version. In order to test the method, demonstrate its advantages and explain the normalization procedure, invariants of real low-dimensional Lie algebras are re-computed. We completely describe for the first time invariant bases for series of solvable Lie algebras of arbitrary dimension with fixed structures of nilradicals, in particular, for almost Abelian Lie algebras, for solvable Lie algebras, whose nilradicals are filiform almost Abelian algebras, for nilpotent algebras of strictly upper triangular matrices and for solvable Lie algebras with triangular nilradicals and diagonal nilindependent elements.

A rigorous definition of reduction modules of differential equations is introduced, which allows us to revisit the theory of nonclassical symmetries of differential equations. The concept of singular reduction modules of differential equations is proposed, and the properties of such modules are studied in detail. It is shown that the derivation of nonclassical symmetries for differential equations can be improved by an in-depth prior study of the associated singular modules of vector fields. The form of differential functions and differential equations possessing parameterized families of singular modules is described up to point transformations. Singular cases of finding reduction modules are related to lowering the order of the corresponding reduced equations. As examples, the singular reduction modules of evolution equations and second-order quasi-linear equations are investigated. We also consider reductions of differential equations to algebraic equations and to ordinary first-order differential equations. As a result, we arrange and generalize all previously known "no-go" results for nonclassical symmetries of differential equations.

The generalization of Lie's theorem on differential invariants of a one-parameter group of local transformations is proved without the restriction on the number of independent and dependent variables. Namely, it is shown that if a universal invariant of such a group is known, then its complete set of functionally independent differential invariants of any order can be constructed using single quadrature and differentiations. We also analyze the relation between finding first-order differential invariants for one-parameter groups and integrating Riccati-type systems. The maximal Lie invariance algebras of systems of second-order linear ordinary differential equations with commuting constant matrices of coefficients are classified without restrictions on the number of equations and the form of these matrices. The exact lower and upper bounds for the dimensions of such algebras are derived. The equivalence groupoids of the class of linear ordinary differential equations of an arbitrary order as well as of its subclasses associated with the rational form, the Laguerre–Forsyth form, and the first and second Arnold forms are constructed. This allows us to classify Lie symmetries of linear ordinary differential equations within the algebraic method in three different ways. Normalization properties of non-normalized classes of such equations are improved by their reparameterization. As a result, examples of generalized extended equivalence groups are constructed for the first time ever. A symmetry approach for describing new integrable cases of Abel equations is proposed.

We carry out the complete group classification of nonlinear Galilean-invariant generalizations of the Burgers and Korteweg–de Vries equations, which are of an arbitrary order. The theorem on linear reduction operators of a general linear partial differential equation is proved. As an example illustrating this theorem, singular and regular reduction operators of the linear rod equation are constructed. We study simplest potential conservation laws of (1+1)-dimensional linear evolution equations that are associated with introducing single potentials using linear conservation laws. We prove that all simplest potential conservation laws of any (1+1)-dimensional of even-order linear evolution equation are induced by local conservation laws of this equation. We also derive an effective criterion for checking whether a quadratic conservation law of a linear potential system is a purely potential conservation law of the corresponding $(1 + 1)$-dimensional odd-order linear evolution equation. We construct classes of nonlinear Schrödinger equations that are invariant with respect to the essential Lie symmetry algebra of the free Schrödinger equation and whose solutions satisfy the continuity equation.

Key words: group analysis of differential equations, Lie algebra, generalized Casimir operator, Lie symmetry, reduction operator, reduction module, singular reduction module, invariant, differential invariant, equivalence group, equivalence groupoid, conservation law.

Підписано до друку 18.12.2017. Формат 60×84/16. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 2,61. Умов. друк. арк. 2,43.
Наклад 120 пр. Зам. 64. Безкоштовно.

Інститут математики НАН України,
01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.