

## ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу  
БОЙКА Вячеслава Миколайовича  
“Узагальнені оператори Казіміра, сингулярні модулі редукції  
та симетрії диференціальних рівнянь”,  
представлену на здобуття наукового ступеня  
доктора фізико-математичних наук  
за спеціальністю 01.01.03 — математична фізика

Результати, представлені у дисертації, можна розділити на дві частини. До першої частини відносяться задачі, пов'язані з алгебрами Лі, такі як узагальнені оператори Казіміра та реалізації алгебр Лі, а інша охоплює класифікаційні задачі групового аналізу диференціальних рівнянь. Зрозуміло, що таке розбиття є досить умовним, оскільки ці два напрямки в сучасній математиці, і математичній фізиці зокрема, є взаємно пов'язаними, і результати в кожному з них є важливими для іншого. Дисертаційна робота В.М. Бойка є цілком наочним прикладом такого взаємопроникного впливу. Теорія груп Лі і алгебр Лі зародилась у роботах Софуса Лі у зв'язку із застосуванням до диференціальних рівнянь, але з часом перетворилася на популярну самостійну галузь алгебри, без якої неможливо уявити сучасну математичну і теоретичну фізику, та й математику загалом. В наш час спостерігається істотний зворотній вплив, коли використання методів і результатів абстрактної теорії алгебр Лі стало вирішальним для розвитку групового аналізу диференціальних рівнянь. Зі свого боку, розвиток симетрійних методів дослідження диференціальних рівнянь продовжує породжувати нові задачі для теорії алгебр Лі.

В цьому контексті слід зазначити, що в дисертації В.М. Бойка глибоко проаналізовано сукупність наявних у літературі результатів щодо розглядуваних задач та обговорено перспективи подальших досліджень в даному напрямку, і це робить роботу цікавою також для спеціалістів із суміжних областей.

Робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку літератури із 294 найменувань. Загальний обсяг дисертації — 338 с.

У першому розділі сформульовано оригінальний алгебраїчний метод знаходження фундаментальних базисів узагальнених операторів Казіміра алгебр Лі. У рамках запропонованого підходу вдалося не лише суттєво

спростити й алгоритмізувати процедуру знаходження таких базисів, але й виправити або покращити попередні результати інших авторів та вперше вичерпно описати інваріанти для деяких серій розв'язних алгебр Лі довільної розмірності з фіксованими структурами нільрадикалів. Оскільки оператори Казіміра є важливим інструментом у теорії представлень, теоретичній фізиці, дослідженні класичних та квантових інтегровних систем тощо, розроблений метод безсумнівно має гарні перспективи для застосувань та подальшого розвитку.

Розробці теорії та ефективного застосування неklasичних симетрій диференціальних рівнянь присвячено другий розділ дисертації. Ця тематика є традиційною для кийівської школи симетрійного аналізу. З роботами В.І. Фуцича, І.М. Цифри, М.І. Серова, Р.З. Жданова, В.І. Лагна, Р.О. Поповича та інших пов'язано вагомі досягнення у вивченні неklasичних симетрій важливих рівнянь математичної фізики та деяких класів еволюційних і хвильових диференціальних рівнянь. Підсумовуючи і розвиваючи попередні результати, у дисертації автором введено строге означення (сингулярних, метасингулярних тощо) модулів редукції диференціальних рівнянь та інших пов'язаних понять, що дало змогу з нових позицій переглянути теорію неklasичних симетрій диференціальних рівнянь, причому також включно з процедурою їх пошуку. Поряд із детальною розробкою теорії, цей розділ містить цілу низку прикладів і загальних результатів щодо неklasичних симетрій певних класів диференціальних рівнянь. Особливе місце серед них займають т. зв. "пого" твердження, тобто описи випадків, коли пошук таких симетрій еквівалентний розв'язанню вихідного рівняння.

Груповий аналіз звичайних диференціальних рівнянь започатковано у роботах Софуса Лі як систематичний підхід, що спроможне пониження порядку таких рівнянь та їх інтегрування, однак низка класичних проблем залишається відкритою і активність досліджень у цьому напрямі в останні роки має тенденцію до зростання. У третьому розділі дисертації отримано цікаві результати щодо диференціальних інваріантів однопараметричних груп Лі. Зокрема, прокласифіковано ліївські симетрії систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з комутуючими сталими матрицями коефіцієнтів, досліджено групоїди еквівалентності класів лінійних звичайних диференціальних рівнянь  $r$ -го порядку. Також розв'язана задача групової класифікації таких рівнянь із

використанням алгебраїчного методу, запропоновано симетрійний підхід до опису інтегровних випадків рівнянь Абеля. Крім того, прокласифіковано реалізації низькорозмірних алгебр Лі векторними полями. Можна стверджувати, що результати § 3.2–3.3 є суттєвим необхідним кроком у дослідженні ліівських симетрій загальних систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.

У четвертому розділі розв'язано низку конкретних задач симетрійного аналізу диференціальних рівнянь з частинними похідними. Зокрема, виконано повну групову класифікацію галілей-інваріантних нелінійних узагальнень рівнянь Бюргерса і Кортевега–де Фріза довільного порядку, доведено теорему про лінійні оператори редукції загального лінійного диференціального рівняння з частинними похідними. Досліджено умовні та потенціальні симетрії лінійного рівняння стрижня, вивчено найпростіші потенціальні закони збереження (1+1)-вимірних лінійних еволюційних рівнянь, описано класи нелінійних рівнянь Шрьодінгера, сумісних з принципом відносності Галілея, і їх потенціальних симетрій.

Характерно, що майже для всіх зазначених результатів спільним у тій чи іншій мірі є використання ефективних алгебраїчних методів або технік, що дозволило щонайменше суттєво спростити обчислення та їх доведення. Більш того, у деяких випадках розв'язання відповідних проблем альтернативними техніками в рамках інфінітезимального підходу здається неможливим. Також слід наголосити, що "no-go"проблеми відіграють важливу роль не лише у другому, а й інших розділах дисертації, наприклад, при обговоренні загальної проблеми класифікацій алгебр Лі та описі потенціальних законів збереження лінійних рівнянь.

До змісту та оформлення дисертації є декілька зауважень і побажань:

1. В усіх розглянутих прикладах функціональні базиси узагальнених операторів Казіміра для алгебр Лі представлено через елементарні функції. У цьому контексті, було б варто обговорити можливість використання *спеціальних функцій* для якихось інших алгебр. Чи існують відповідні приклади для алгебр Лі, зокрема, для нерозв'язних алгебр Лі або ж можливо для нескінченновимірних алгебр Лі (таких як алгебра Вірасоро, алгебри Каца-Муді тощо)?
2. Наслідок 1.22 теореми 1.21 дає необхідну і достатню умови коли розв'язна алгебра  $\mathfrak{t}_\gamma(n)$  із певними нільрадикалом та нільнезалежними елементами допускає *раціональний* базис інваріантів. Однак,

з точки зору особливої ролі, яку відіграють у теоретичній фізиці оператори Казіміра, важливо було б отримати аналогічний результат для випадку, коли йдеться про *поліноміальний* базис інваріантів.

3. Цікавим і перспективним є застосування методу побудови узагальнених операторів Казіміра для класів нерозв'язних алгебр Лі, а також його поширення на *супералгебри Лі та квантові алгебри*.
4. Позначення не повністю уніфіковано. Зокрема, у різних розділах використано різні позначення для індексів, залежних і незалежних змінних та відповідних похідних (наприклад, на ст. 79 покладається  $p = 1, \dots, s$ , тоді як на ст. 102 і далі роль  $s$  і  $p$  протилежна).
5. Оскільки у дисертації є багато нової термінології та нових означень, які з'являються у різних розділах і параграфах, то для кращого сприйняття і розуміння матеріалу ці означення, на мій погляд, було б доцільно зібрати і розмістити в одному місці, наприклад, відразу за списком умовних позначень, який наведено на ст. 17, або ж у вигляді предметного показчика наприкінці дисертації (можливо, подібну рекомендацію варто включити як обов'язкову при оформленні дисертаційних робіт).

Однак, очевидно, що ці зауваження аж ніяк не впливають на загальну високу оцінку дисертаційної роботи.

Робота має теоретичний характер. Отримані результати і запропоновані методи можна використати у подальших дослідженнях симетрійних властивостей рівнянь математичної фізики, а також при розв'язанні прикладних задач, що описують реальні явища і процеси різної природи.

Усі результати, включені в дисертацію, одержано автором самостійно. Вони є новими і достовірними та пройшли достатню апробацію на наукових семінарах та конференціях. Основні результати роботи опубліковано у провідних журналах з математичної фізики та прикладної математики. Їх добре цитують науковці, які працюють у цих галузях. Автореферат вірно і повно відображає зміст дисертації.

Вважаю, що дисертація “Узагальнені оператори Казіміра, сингулярні модулі редукції та симетрії диференціальних рівнянь” містить важливі наукові результати з групового аналізу диференціальних рівнянь, задовольняє вимогам пп. 9, 10, 12, 13, 14 “Порядку присудження наукових ступенів” (Постанова Кабінету Міністрів України № 567 від 24.07.2013)

щодо докторських дисертацій, а її автор Вячеслав Миколайович Бойко заслуговує на присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.03 — математична фізика.

Офіційний опонент  
завідувач відділу математичних методів  
в теоретичній фізиці  
Інституту теоретичної фізики  
ім. М.М. Боголюбова НАН України, м. Київ  
доктор фіз.-мат. наук, професор

 О.М. Гаврилик

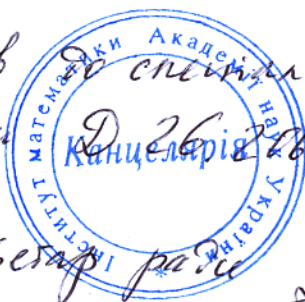
Підпис доктора фіз.-мат. наук О.М. Гаврилика  
засвідчую:

вчений секретар Інституту теоретичної фізики  
ім. М.М. Боголюбова НАН України  
кандидат фіз.-мат. наук



 С.М. Перенелія


Надійшов до спеціалізованої  
вченої ради



Канцелярія 26.01

11.01.2018

Вчений секретар ради

 /А.С.Романенко/