ВІДГУК

офіційного опонента, доктора фізико-математичних наук
Парасюка Ігоря Остаповича
на дисертаційну роботу Бойка В'ячеслава Миколайовича
«Узагальнені оператори Казіміра, сингулярні модулі редукції
та симетрії диференціальних рівнянь»,
представлену на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-маематичних наук
за спеціальністю 01.01.03 – математична фізика

Дисертація В. М. Бойка «Узагальнені оператори Казіміра, сингулярні модулі редукції та симетрії диференціальних рівнянь» присвячена розробленню нових сучасних засобів групового аналізу диференціальних рівнянь.

1. Актуальність теми дисертації. Розвиток математичної та теоретичної фізики переконливо засвідчив, що саме симетрійні властивості диференціальних рівнянь слугують важливим мірилом того, наскільки адекватно ці рівняння, виступаючи в ролі математичних моделей, описують реальні процеси і явища довкілля. З іншого боку, з суто математичного погляду інваріантність диференціальних рівнянь відносно достатньо широких груп симетрій сприяє повнішому розумінню природи їхніх розв'язків і, більше того, нерідко дає змогу знаходити окремі з останніх в явному вигляді. Зазначені обставини сприяли тому, що впродовж останніх кількох десятиліть теорія, основи якої були закладені ще в працях Софуса Лі, переживає бурхливий розвиток. Відповідні дослідження проводяться в низці відомих наукових центрів США, Канади, Росії... Варто відзначити, що вагомий внесок у розвиток зазначеної галузі був зроблений українською школою групового аналізу — В. І. Фущичем, А. Г. Нікітіним та їхніми численними учнями. З огляду на викладене актуальність тематики дисертації не викликає сумніву.

2. Наукова новизна та значимість отриманих результатів.

2.1. Якщо алгебру інваріантності досліджуваного диференціального рівняння вже побудовано, природним наступним кроком є відшукання максимально повного набору інваріантів цієї алгебри. Стандартний інфінітезимальний підхід до побудови інваріантів коприєднаного представлення групи Лі G потребує інтегрування певної перевизначеної системи диференціальних рівнянь в частинних похідних першого порядку і супроводжується громіздкими обчисленнями. Натомість, автором запропоновано суто алгебраїчний підхід обчислення інваріантів (узагальнених операторів Казіміра) на основі картанівського методу рухомих реперів у версії Фелса – Олвера. Це дало змогу вперше отримати вичерпні описи базисів інваріантів серій розв'язних алгебр Лі довільної розмірності з фіксованими структурами нільрадикалів, зокрема для майже абелевих алгебр Лі (§ 1.5), розв'язних алгебр Лі, нільрадикали яких є ниткоподібними майже абелевими алгебрами (§ 1.6), для нільпотентної алгебри строго верхньотрикутних матриць (§ 1.6) та серій розв'язних алгебр Лі з трикутними нільрадикалами й діагональними нільнезалежними елементами (§ 1.7). До цього в літературі існували лише часткові результати або гіпотези щодо інваріантів таких алгебр. Крім того, автору вдалося виявити і виправити ряд неточностей допущених раніше іншими авторами при обчисленні інваріантів низькорозмірних алгебр.

2.2. Інший важливий напрямок дослідження дисертації В. М. Бойка стосується теорії умовних (некласичних) симетрій диференціальних рівнянь. Такі симетрії широко використовуються при побудові анзаців, які редукують вихідні рівняння до рівнянь з меншою кількістю незалежних змінних. Природним чином виникла потреба підвести строгу теоретичну базу під розрізнені прийоми і підходи, які використовувалися на початкових стадіях розвитку «умовного» групового аналізу. Необхідно було також розробити адекватну змістовну термінологію, уніфікувати відповідні поняття, визначити основні об'єкти, вивчити їхні властивості й встановити зав'язки між ними. Зосередившись над цими завданнями, дисертант досяг, на наш погляд, помітних успіхів. В процесі аналізу і глибокого осмислення природи некласичних симетрій, перегляду основних понять і тверджень відповідної теорії автором було запропоновано строгі означення модулів редукції диференціальних рівнянь (§ 2.1, означення 2.1, теорема 2.2), проведено їхню класифікацію на основі запровадження понять сингулярних, ультрасингулярних і метасингулярних модулів векторних полів для диференціальних функцій (означення 2.8 та 2.11), детально описано властивості таких модулів.

Особливо відзначимо результати § 2.5, § 2.6. Тут, зокрема, доведено теорему, яка характеризує диференціальні рівняння, що допускають слабо метасингулярні модулі, досліджено зв'язок між копорядком слабкої сингулярності операторів редукції, суттєвим порядком відповідних редукованих рівнянь, а у випадку редукції до звичайних диференціальних рівнянь, — кількістю параметрів у відповідних сім'ях інваріантних розв'язків. У § 2.6 розглянуто особливий випадок модулів редукції, розмірність яких співпадає з кількістю незалежних змінних. Такі модулі дозволяють здійснити редукції до алгебраїчних рівнянь.

У подальших параграфах розділу 2 запропонований автором підхід дозволив проаналізувати природу так званих «no-go» випадків при вивченні модулів редукції.

2.3. У розділі 3 автору вдалося отримати низку цікавих результатів на шляху поглибленого вивчення такого класичного об'єкту як лієвські симетрії звичайних диференціальних рівнянь. Звернемо увагу лише на два з таких результатів.

Як відомо, відповідно до класичного підходу відшукання диференціальних інваріантів першого порядку пов'язане з необхідність прямого інтегрування системи рівнянь типу Ріккаті. На противагу цьому, запропонований автором спосіб знаходження диференціальних інваріантів строго першого порядку дозволяє уникнути такого прямого інтегрування, натомість розв'язання зазначеної задачі можна досягти за допомогою лише однієї квадратури й диференціювання.

Далі, для нас достатньо несподіваним, виявився той факт, що ще у цьому десятирічччі фахівцями з групового аналізу активно проводилися дослідження ліївських симетрій такого, на перший погляд, простого об'єкту, як лінійні системи другого порядку зі сталими коефіцієнтами. На цьому шляху дисертанту вдалося з вичерпною повнотою здійснити відповідний аналіз стосовно систем вигляду

$$\ddot{\mathbf{x}} = A\dot{\mathbf{x}} + B\mathbf{x} + C(t),$$

зокрема визначити розмірності алгебр ліївської інваріантності, однак, на жаль, лише за умови, що матриці A та B комутують.

Дотримуючись ідеології максимальної алгебраїзації техніки групового аналізу автор у § 3.3 здійснює детальну групову класифікацію рівнянь з класу скалярних лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків на основі повного попереднього опису множини допустимих перетворень між рівняннями цього класу (групоїда еквівалентості). У такий спосіб вдалося запропонувати нове елегантне доведення відомого твердження про те, що множиною значень розмірності максимальної алгебри ліївської інваріантності лінійного звичайного диференціального рівняння r-го порядку є $\{r+1, r+2, r+4\}$.

Ще один цікавий результат групового аналізу звичайних диференціальних рівнянь стосується опису інтегровних випадків рівняння першого порядку з кубічною нелінійністю (рівняння Абеля). При цьому автором використано ідею підвищення порядку рівняння на одиницю з подальшим описом нееквівалентних рівнянь другого порядку, інваріантних відносно двовимірних алгебр векторних полів на площині.

2.4. У заключному розділі дисертації викладено результати автора, присвячені різноманітним аспектам симетрійного аналізу диференціальних рівнянь з частинними похідними, включно з низкою відомих рівнянь математичної фізики. Зокрема: здійснено групову класифікацію важливого класу галілей-інваріантних рівнянь вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right) \qquad (*)$$

при різних припущеннях щодо структури функції F; показано, що з точністю до перетворень еквівалентності цей клас рівнянь допускає лише чотири випадки розширення максимальної алгебри ліївської інваріантності, доведено теорему, яка описує лінійні оператори редукції загальних лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними; описано множини сингулярних та окремі випадки регулярних операторів редукції лінійного рівняння стрижня $u_{tt} + u_{xxxx} = 0$, описано сумісні з принципом Галілея нелінійні рівняння типу Шрьодінгера, розв'язки яких задовольняють рівняння неперервності

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \mathbf{j} = 0.$$

3. Зауваження та пропозиції..

3.1. Доведення багатьох важливих тверджень та теорем базуються на техніці локального аналізу. Наприклад, використовується локальний варінт теореми про неявну функцію, вводяться зручні для дослідження локальні координати, в яких ті чи інші векторі поля набувають максимально простого вигляду. При цьому практично нічого не говориться про те, чи мають отримані результати нелокальний зміст.

3.2. В дисертації наведено низку об'ємних класифікаційних таблиць, які стосуються опису певних типів алгебр Лі, їх інваріантів, та реалізацій. Наразі для створення, або принаймні для паралельної перевірки правильності таких таблиць зазвичай використовують програми символьних обчислень. На жаль, ми не знайшли в дисертації жодних пояснень з приводу того, якою мірою, і взагалі, чи використовував автор такі програми в своїй роботі.

3.3. Вимога комутування матриць A та B, які фігурують у виписаній кількома абзацами вище лінійній системі другого порядку достатньо суттєво знижує значимість результатів групового аналізу таких систем. У зв'язку з цим хотілося б побажати, щоб автор у подальших своїх дослідженнях зняв зазначені обмеження, а в перспективі розглянув випадок певних типів змінних матриць, наприклад, періодично чи автоморфно залежних від часу.

3.4. Для полегшення читання дисертації варто було б конкретизувати по відношенню до лінійних рівнянь і навести чіткі означення таких понять, як класи еквівалентності, нормалізовні та напівнормалізовані класи тощо, а не відсилати читача за ними до журнальних статей.

3.5. Викликає сумнів доцільність присвоювати ім'я Арнольда елементарним замінам змінних в лінійних рівняннях (§ 3.3), відомих зі стандартних курсів звичайних диференціальних рівнянь.

3.6. Позначення u_i в різних розділах дисертації використовується в різних сенсах: і як $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, і як $\frac{\partial^i u}{\partial x^i}$. Іноді ця обставина вимагає від читача зайвих витрат часу для правильного розуміння матеріалу.

3.7. На наш погляд, у дисертації недостатньо уваги приділено обґрунтуванню практичного значення отриманих результатів, а також висвітлення перспектив отримання конкретних висновків про фізично важливі властивості розв'язків диференціальних рівнянь, які моделюють складні нелінійні процеси і явища довкілля.

Вказані зауваження не мають істотного впливу на загальне позитивне враження від роботи і не зменшують цінності отриманих у ній результатів.

4. Загальна оцінка роботи. Дисертація В. М. Бойка є завершеною науковою працею, у якій розв'язано складні актуальні задачі сучасного групового аналізу рівнянь математичної фізики. Вона відповідає паспорту спеціальності 01.01.03 — математична фізика. Отримані автором нові результати в сукупності є важливими і суттєвими для розвитку зазначеної галузі математики.

Основні твердження дисертації, винесені на захист, належним чином обґрунтовано, вони супроводжуються достатньо повними і строгими доведеннями. На підставі цього можна стверджувати, що наукові положення і висновки дисертації є достовірними.

Основні результати роботи з належною повнотою опубліковано у провідних математичних виданнях, зокрема, таких як Journal of Mathematicl Physics, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Linear Algebra and its Applications, Journal of Physics A, Reports in Mathematical Physics, Journal of Nonlinear Mathematical Physics, Нелінійні коливання. Принаймні 20, опублікованих автором статей за темою дисертації, відповідають вимогам до публікації результатів дисертаційних робіт у фахових виданнях із фізико-математичних наук.

Результати дисертації пройшли належну апробацію на багатьох міжнародних наукових конференціях, а також на провідних наукових семінарах. При цьому 6 тез конференцій надруковано у виданнях, що включені до наукометричних баз.

Автореферат дисертації адекватно і достатньо повно відображає її зміст.

5. Висновок. Викладене вище дає підстави для висновку, що розглянута дисертаційна робота «Узагальнені оператори Казіміра, сингулярні модулі редукції та симетрії диференціальних рівнянь» повною мірою задовольняє вимоги п.п. 10, 12, 13 та 14 «Порядку присудження наукових ступенів», затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 24 липня 2013 року № 567 зі змінами, внесеними згідно з постановами Кабінету Міністрів України від 19 серпня 2015 року № 656 щодо докторських дисертації. Вважаю, що автор дисертації, Бойко В'ячеслав Миколайович, заслуговує на присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.03 — математична фізика.

Офіційний опонент
завідувач кафедри геометрії, топології
і динамічних систем Київського національного
університету імені Тараса Шевченка,
доктор фізико-математичних наук І. О. Парасюк

Підпис засвідчую
Вчений секретар НДЧ
Каравульна Н.В.
28.12.2017р.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка * Україна * Ідентифікаційний код 02070944

Інститут математики Академії наук України * Канцелярія

Надійшов до спеціалізованої
вченої ради Д 26.206.01 28.12.2017р.
секретар ради (Артемиченко Ж.Д.)