НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Бортош Марія Юліївна

УДК 512.64

ЛІНІЙНО-АЛГЕБРАЇЧНІ ВЛАСТИВОСТІ КАТЕГОРІЙ МОНОМІАЛЬНИХ МАТРИЦЬ НАД ЛОКАЛЬНИМИ КІЛЬЦЯМИ

01.01.06 – алгебра та теорія чисел

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата
фізико-математичних наук

Київ – 2017

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у відділі алгебри і топології
Інституту математики НАН України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор,
БОНДАРЕНКО Віталій Михайлович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник
відділу алгебри і топології.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник,
ЩЕДРИК Володимир Пантелеймонович,
Інститут прикладних проблем механіки і
математики імені Я. С. Підстригача НАН України,
провідний науковий співробітник відділу алгебри;

кандидат фізико-математичних наук, доцент
ТЕРТИЧНА Олена Миколаївна,
ДВНЗ "Київський національний економічний
університет імені Вадима Гетьмана",
доцент кафедри вищої математики
факультету маркетингу

Захист відбудеться 30 січня 2018 р. о 15 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.03 в Інституті математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ-4, вул. Терещенківська, 3.

Автореферат розісланий 28 грудня 2017 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради С. І. Максименко

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дисертаційна робота присвячена вивченню матриць над комутативними кільцями.

Лінійна алгебра над комутативними кільцями розвинута не в такій мірі, як над полями. Окрім технічних труднощів, тут виникають і принципові. В першу чергу мова йде про подібність матриць: задача про опис, з точністю до подібності, матриць над комутативним кільцем, що не є полем, містить в собі класичну нерозв'язну задачу лінійної алгебри про пару матриць над полем вже для локальних кілець головних ідеалів. Для областей цілісності це вперше доведено в 1974 р. П. М. Гудивком[1], а для кілець з нільпотентним радикалом — в 1976 р. В. М. Бондаренком[2]. В сучасній термінології такі задачі називаються дикими (строгі означення введено Ю. А. Дроздом[3,4]). Отже, при дослідженні матриць над кільцями актуальним є вивчення загальних властивостей, розгляд матриць спеціального вигляду чи матриць над конкретними кільцями, тощо.

Д. А. Супруненко[5] показав, що дві оборотні матриці розміру $n \times n$ над кільцем класів лишків за модулем числа $m > 1$, взаємно простого з n, подібні тоді і лише тоді, коли вони подібні за модулем кожного простого дільника числа m.

Р. В. Девіс[6] довів, що задача про подібність матриць над кільцем класів лишків $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ (p — просте число) зводиться до аналогічної задачі над полем $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, якщо матриці задовольняють фіксований поліном, який за модулем p не має кратних коренів.

В. Х. Густафсон[7] показав, що дві матриці розміру $n \times n$ над комутативним регулярним (в сенсі Неймана) кільцем подібні тоді і лише тоді, коли вони мають однаковий характеристичний поліном і матриці $A \otimes E_n - E_n \otimes A$, $B \otimes E_n - E_n \otimes B$, $A \otimes E_n - E_n \otimes B$ мають однаковий ранг, де E_n — одинична матриця розміру $n \times n$ (регулярність означає розв'язність рівняння $axa = a$ для довільного a).

---

[1] Гудивок П. М. О модулярных и целочисленных представлениях конечных групп / П. М. Гудивок // ДАН СССР. – 1974. – **214**, №5. – С. 993–996.

[2] Бондаренко В. М. О подобии матриц над кольцом классов вычетов / В. М. Бондаренко // Матем. сборник, "Наукова думка", Киев. – 1976. – С. 275–277.

[3] Дрозд Ю. А. О ручных и диких матричных задачах / Ю. А. Дрозд // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1977. – С. 104-114.

[4] Дрозд Ю. А. Ручные и дикие матричные задачи / Ю. А. Дрозд // Представления и квадратичные формы. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1979. – С. 39-74.

[5] Супруненко Д. А. О сопряженности матриц над кольцом вычетов / Д. А. Супруненко // Доклады АН БССР. – 1964. – **8**. – С. 693–695.

[6] Davis R. W. Certain matrix equations over rings of integers. / R. W. Davis // Duke Math. J. – 1968. – **35**. – P. 49–59.

[7] Gustafson W. H. On matrix similarity over commutative rings. / W. H. Gustafson // Linear and Multilinear Algebra. – 1981. – **10**, no. 3. – P. 249–252.

Р. М. Гуральнік[8] довів, що матриці A і N розміру $n \times n$ над комутативним кільцем без (ненульових) нільпотентних елементів, кожний скінченно породжений проективний модуль над яким є вільним, подібні, якщо вони подібні за модулем довільного простого ідеалу і N — нільпотентна матриця, що має вигляд канонічної форми Жордана.

В ряді робіт[9–13] розглядається задача про опис (з точністю до подібності) матриць розміру 2×2, 3×3 і 4×4 над деякими комутативними кільцями.

Виділимо ще монографії Б. Р. Макдональда[14] і В. К. Брауна[15].

Властивості матриць над комутативними кільцями вивчалися також в багатьох інших роботах.

Нерозкладність та подібність матриць тісно пов'язана з теорією зображень скінченних груп (над кільцями). В першу чергу це стосується зображень циклічних груп; в цьому напрямку добре відомі роботи С. Д. Бермана, П. М. Гудивка, П. Донована, А. Джонса, В. С. і Е. С. Дроботенків, І. Райнера, А. В. Ройтера, А. Хеллера та інших математиків.

У дисертації вивчаються мономіальні матриці над комутативними кільцями. При цьому розглядаються дві природні категорії мономіальних матриць.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тематика дисертаційної роботи пов'язана з науковими дослідженнями відділу алгебри і топології Інституту математики НАН України — тема "Розробка й застосування нових методів у теорії зображень, абстрактній алгебрі та алгебраїчній геометрії"(номер державної реєстрації 0116U003125).

Мета і задачі дослідження. *Метою* дослідження є опис нерозкладних та ізоморфних об'єктів сильної та звичайної категорій мономіальних матриць над комутативними локальними кільцями головних ідеалів, а також отримання необхідних і достатніх умов звідності мономіальних матриць над комутативними локальними кільцями.

Об'єктом дослідження є матриці над локальними кільцями та категорії таких матриць.

Предмет дослідження — залежність нерозкладності, звідності і подібнос-

[8] Guralnick R. M. Similarity of matrices over commutative rings. / R. M. Guralnick // Linear Algebra Appl. – 1991. – **157**. – P. 55–68.

[9] Pizarro A. Similarity classes of 3×3 matrices over a discrete valuation ring / A. Pizarro // Linear Algebra Appl. – 1983. – **54**. – P. 29–51.

[10] Шевченко В. Н. О подобии матриц второго порядка над кольцом целых чисел / В. Н. Шевченко, С. В. Сидоров // Известия вузов. Сер. матем. – 2006. – № 4. – С. 57–64.

[11] Сидоров С. В. О подобии матриц третьего порядка над кольцом целых чисел, имеющих приводимый характеристический многочлен / С. В. Сидоров // Вест. Нижегородского ун-та им. Н. И.Лобачевского. Сер. Математ. моделирование. Опт. управление. – 2009. – № 1. – С. 119–127.

[12] Avni N. Similarity classes of 3×3 matrices over a local principal ideal ring / N. Avni, U. Onn, A. Prasad, L. Vaserstein // Comm. Algebra. – 2009. – **37**, no. 8. – P. 2601–2615.

[13] Prasad A. Similarity of matrices over local rings of length two / P. Singla // Indiana Univ. Math. J. – 2015. – **64**, no. 2. – P. 471–514.

[14] McDonald B. R. Linear algebra over commutative ring / B. R. McDonald // M. Dekker. – 1984. – 544 pp.

[15] Brown W. C. Matrices over commutative rings / W. C. Brown // M. Dekker. – 1993. – 294 pp.

ті мономіальних матриць над комутативними локальними кільцями від їх визначальних і вагових послідовностей.

Методи дослідження. *Основними методами*, що використовуються при дослідженнях, є методи теорії зображень та матричних задач, а також стандартні комбінаторні методи.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертації отримано нові теоретичні результати, основними із яких є наступні результати для квадратних мономіальних матриць над довільним комутативним локальним кільцем головних ідеалів:

• Доведена нерозкладність довільної циклічної матриці з неперіодичною ваговою послідовністю та довільної ланцюгової матриці.

• Введено поняття визначальної клітини Фробеніуса циклічної матриці і доведена нерозкладність циклічної матриці з періодичною ваговою послідовністю при умові нерозкладності за модулем радикала визначальної клітини Фробеніуса.

• Отримано критерій ізоморфізму нерозкладних об'єктів сильної категорії мономіальних матриць $\mathrm{Mmat}_0(K)$ як всередині цієї категорії, так і в (більш широкій) категорії мономіальних матриць $\mathrm{Mmat}(K)$.

• Отримано критерії звідності t-циклічних матриць малих розмірів при $t^m = 0, m < 4$.

• Досліджено залежність звідності циклічної матриці від властивостей її ваги і $*$-коефіцієнта (незалежно від того, мала вага чи велика).

• Отримано критерій спадкової незвідності t-циклічної матриці розміру $n \times n$ з малою вагою (а також довільної циклічної матриці при умові існування кореня n-го степеня із $*$-коефіцієнта матриці); у випадку не нільпотентного радикала отримано критерій загальної незвідності.

• Встановлено зв'язок між спадковою та слабко спадковою звідністю.

• Встановлено низку необхідних і достатніх умов (окремо) звідності циклічної матриці з великою вагою.

• Доведено теореми про спадкову звідність циклічної матриці з великою вагою, вагова послідовність якої містить конкретні зв'язні підпослідовності.

При цьому достатні умови звідності справедливі (після відповідних уточнень) і у випадку довільного комутативного локального кільця.

Результати, що стосуються безпосередньо нерозкладності чи звідності циклічних матриць, узагальнюють результати Р. Ф. Динис для матриць з 2-однорідними визначальними чи ваговими послідовностями (у тих випадках, коли 2-однорідні послідовності допускаються умовами тверджень як частинні випадки).

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер. Отримані в ній результати, а також відповідні методи, можуть бути використані в теорії матричних зображень і лінійній алгебрі над комутативними кільцями та в тих областях математики чи інших наук, в яких виникають питання про матриць над кільцями.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертаційної роботи отримано здобувачем самостійно. У статті [2] з О. А. Тилищаком та статтях [4], [5], [7] і [8] з науковим керівником останнім належать постановки задач і загальні ідеї щодо методів їх розв'язання, а практична реалізація та ряд конкретних ідей належать здобувачеві. У статті [1] здобувачу належать твердження 1 і теореми 1, 2, а у статті [6] — всі результати пп. 2.2 і 2.3, що стосуються найзагальніших випадків; формулювання і доведення цих результатів (обох статей) в частинному випадку, коли послідовність, яка задає мономіальну матрицю, є 2-однорідною, належать Р. Ф. Динис. Зі статей, виконаних у співавторстві, у дисертацію включені лише результати, які належать здобувачу.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи оприлюднено на наукових конференціях та наукових семінарах:

— Студентській науковій конференції математичного факультету УжНУ (Ужгород, квітень 2013);

— IX Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні (м. Львів, 8-13 липня 2013 р.);

— П'ятнадцятій Міжнародній науковій конференції імені академіка Михайла Кравчука (м. Київ, 15-17 травня 2014 р.);

— Міжнародній алгебраїчній конференції, присвяченій 100-річчю від дня народження Л. А. Калужніна (м. Київ, 7-12 липня 2014 р.);

— Міжнародній конференції молодих математиків (м. Київ, 3-6 червня 2015 р.);

— X Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні, присвяченій 70-річчю Ю. А. Дрозда (м. Одеса, 20-27 серпня 2015 р.);

— Міжнародній конференції молодих математиків, присвяченій 100-річчю Ю. О. Митропольському (м. Київ, 7-10 червня 2017 р.);

— XI Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні, присвяченій 75-річчю В. В. Кириченка (м. Київ, 3-7 липня 2017 р.);

— семінарі кафедри алгебри Ужгородського національного університету (м. Ужгород, керівник — кандидат фіз-мат наук, доцент І. В. Шапочка, 12 травня 2016 р.);

— алгебраїчному семінарі Інституту математики НАН України (м. Київ, керівник — доктор фіз-мат. наук, член-кореспондент НАН України Ю. А. Дрозд, 2016 – 2017 рр.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 16 наукових працях , із них 5 — у фахових виданнях із Переліку, затвердженого Міністерством освіти і науки України ([2]-[5], [7]), 3 — в наукових фахових виданнях, що відображаються в міжнародній наукометричній базі даних Scopus [1], [6],

[8], 1 — в матеріалах студентської конференції [9], 7 — у матеріалах міжнародних наукових конференцій ([10]-[16]).

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається із анотації, переліку умовних позначень, вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел та (стандартних) додатків. Загальний обсяг дисертації — 179 сторінок. Обсяг основного тексту дисертації — 147 сторінок. Список використаних джерел займає 10 сторінок (81 найменування).

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** наведено загальну характеристику та мету роботи, обгрунтовано її актуальність і наукову новизну.

У **першому розділі** викладено основні початкові відомості з теорії категорій та деякі відомості з лінійної алгебри.

У **другому розділі** дисертаційної роботи досліджуються ізоморфізм та нерозкладність об'єктів в категоріях мономіальних матриць.

Перший підрозділ містить означення і позначення, пов'язані з кільцем.

Протягом цього розділу K позначає комутативне локальне кільце головних ідеалів, що не є полем. Група його оборотних елементів (відносно множення) позначається через K^*. Єдиний максимальний ідеал (радикал) R кільця K дорівнює $tK \neq 0$, де t визначається однозначно з точністю до оборотного множника, і будь-який елемент $x \in K$ має вигляд εt^s, де $\varepsilon \in K^*$ і $s \geq 0$. Число s (яке не залежить від вибору t) називається *вагою елемента* x і позначається через $w(x)$. Якщо елемент t ненільпотентний, то вважаємо, що його ступінь нільпотентності дорівнює ∞.

Другий підрозділ містить означення категорій мономіальних матриць.

Матрицю над K (не обов'язково квадратну) назвемо *мономіальною*, якщо кожний її рядок і кожний її стовпець містить не більше одного ненульового елемента. Квадратну матрицю назвемо *строго мономіальною*, якщо кожний її рядок і кожний її стовпець містить рівно один ненульовий елемент. Строго мономіальна матриця, всі ненульові елементи якої є одиничними, називається *переставною*.

Позначимо через $\mathrm{Mat}(K)$ *категорію квадратних матриць над кільцем* K, об'єктами якої є квадратні матриці над K, а морфізмами із матриці X в матрицю Y — матриці C такі, що $XC = CY$. Ізоморфні об'єкти категорії $\mathrm{Mat}(K)$ — це подібні матриці. Повну підкатегорію категорії $\mathrm{Mat}(K)$, множина об'єктів якої складається із мономіальних матриць, позначимо через $\mathrm{Mmat}(K)$ і назвемо *категорією мономіальних матриць над* K. Через $\mathrm{Mmat}_0(K)$ позначимо підкатегорію категорії $\mathrm{Mmat}(K)$ з тими ж самими об'єктами і лише тими морфізмами, що є мономіальними матрицями; назвемо цю категорію *сильною категорією мономіальних матриць над* K.

У третьому підрозділі наведено приклади обчислення морфізмів в категорії мономіальних матриць.

У четвертому підрозділі розглядаються питання про ізоморфізм та нерозкладність об'єктів в сильній категорії мономіальних матриць.

У п. 2.4.1 отримано критерій ізоморфізму об'єктів.

Переставно подібними називаються квадратні матриці, які отримуються одна із одної однаковою перестановкою рядків і стовпців; у цьому випадку подібність здійснюється за допомогою переставної матриці.

У випадку, коли подібність матриць здійснюється за допомогою діагональної матриці, матриці називаються *діагонально подібними.*

Дві квадратні матриці назвемо *переставно діагонально подібними*, якщо одна з них діагонально подібна матриці, що переставно подібна іншій.

Твердження 2.1. *Дві мономіальні матриці ізоморфні в категорії* $\mathrm{Mmat}_0(K)$ *тоді і лише тоді, коли вони переставно діагонально подібні.*

У п. 2.4.2 розглядаються питання про нерозкладні об'єкти.

Квадратна матриця називається *переставно розкладною*, якщо вона переставно подібна прямій сумі двох матриць, і *переставно нерозкладною* в протилежному випадку.

Твердження 2.2. *Квадратна мономіальна матриця над* K *нерозкладна в категорії* $\mathrm{Mmat}_0(K)$ *тоді і лише тоді, коли вона переставно нерозкладна.*

Легко бачити, що в категорії $\mathrm{Mmat}_0(K)$ нерозкладні об'єкти вичерпуються ланцюговими і циклічними матрицями (мономіальними матрицями розміру $n\times n$, природний орієнтовний граф яких — з вершинами $1, 2, \ldots, n$ і стрілками $i \to j$ для всіх $x_{ij} \neq 0$ — є відповідно ланцюгом чи циклом). Такі матриці розглядаються з точністю до переставної подібності і для кожного із такого типу матриць існує природна канонічна форма відносно таких перетворень.

З точки зору нашого методу основним є випадок циклічних матриць, а випадок ланцюгових матриць розглядається як "вироджений".

У п. 2.4.3 вивчаються канонічно циклічні матриці.

Очевидно, що циклічна матриця розміру $n \times n$ переставно подібна матриці вигляду

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_n \\ a_1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Таку матрицю називаємо *канонічно циклічною.*

Послідовність $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ називаємо *визначальною послідовністю* матриці A і пишемо $A = M(\overline{a}) = M(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)$.

Послідовність $\overline{a}^* = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1)$ називається *дуальною до послідовності* $\overline{a}$, а канонічно циклічна матриця $M(\overline{a}^*)$ — *дуальною до матриці* $M(\overline{a})$. Легко бачити, що дуальна матриця переставно подібна транспонованій.

Послідовність ваг $\overline{w}(\overline{a}) = (w(a_1), \ldots, w(a_{n-1}), w(a_n))$ членів визначальної послідовності $\overline{a}$ називаємо *ваговою послідовністю* матриці A, а суму членів вагової послідовності — *вагою матриці* A.

Якщо зафіксувати твірний елемент t радикала R, тоді визначальна послідовність має вигляд $\overline{a} = (\varepsilon_1 t^{s_1}, \ldots, \varepsilon_{n-1} t^{s_{n-1}}, \varepsilon_n t^{s_n})$, де ε_i — елементи із K^*. В цьому випадку матрицю $M(\overline{a})$ позначаємо також через $M_t(\overline{a})$ або $M_t(\overline{w}, \overline{\varepsilon})$, де $\overline{w} = \overline{w}(\overline{a})$ — вагова послідовність і $\overline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n)$. Якщо ж, окрім t, зафіксовано також і $\overline{\varepsilon}$, то (однозначно визначений) елемент ε називаємо *$(t,*)$-коефіцієнтом* або *$*$-коефіцієнтом канонічно циклічної матриці* $M_t(\overline{w}, \overline{\varepsilon})$.

Розглядається питання про ізоморфізм канонічно циклічних матриць в сильній категорії мономіальних матриць.

Дві послідовності $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, члени яких належать деякій множині, назвемо *циклічно еквівалентними*, якщо $\overline{y}$ отримується із $\overline{x}$ циклічною перестановкою її членів: $\overline{y} = (x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n, x_1 \ldots, x_{i-1})$.

Теорема 2.5. *Нехай $M = M_t(\overline{w}, \overline{\varepsilon})$ і $M' = M_t(\overline{w}', \overline{\varepsilon}')$ — канонічно циклічні матриці і s — найбільший член вагових послідовностей $\overline{w}, \overline{w}'$. Матриці M і M' ізоморфні в категорії $\mathrm{Mmat}_0(K)$ тоді і лише тоді, коли їх вагові послідовності циклічно еквівалентні і $*$-коефіцієнти рівні за модулем $Ann(t^s)$.*

Тут $Ann(t^s)$ позначає анулятор елемента t^s.

У п. 2.4.4 вивчаються канонічно ланцюгові матриці.

Ланцюгові матриці, як вироджений випадок циклічних матриць (треба покласти $a_n = 0$), досліджуються по тій же схемі, що і циклічні матриці.

Теорема 2.7. *Дві канонічно ланцюгові матриці ізоморфні в категорії $\mathrm{Mmat}_0(K)$ тоді і лише тоді, коли їх вагові послідовності рівні.*

У підрозділі 2.5 розглядається питання про нерозкладність циклічних і ланцюгових матриць в категорії мономіальних матриць $\mathrm{Mmat}(K)$.

Матриця A розміру $n \times n$ над комутативним кільцем називається *розкладною*, якщо вона подібна прямій сумі двох матриць розмірів $n_1 \times n_1$ і $n_2 \times n_2$, де $n_1, n_2 > 0$, і *нерозкладною* у протилежному випадку. Для мономіальної матриці A над кільцем K ці означення відповідають означенням розкладних і нерозкладних об'єктів категорії мономіальних матриць.

У пункті 2.5.2 доведено, що канонічно циклічна матриця $M = M(\overline{a})$, вагова послідовність $\overline{w}(\overline{a})$ якої не має однакових членів, нерозкладна. Доведення базується на дослідженні матричної рівності $MX = XM$ (X — довільна матриця), яка розглядається як система лінійних рівнянь відносно елементів матриці X. При цьому використовується наступна (доведена в п. 2.5.1) достатня умова нерозкладності.

Теорема 2.9. *Нехай A — квадратна матриця над кільцем K і нехай кожна ідемпотентна матриця X, що комутує з матрицею A,*

a) є P-трикутною за модулем R;

b) за модулем R має рівні елементи на головній діагоналі.

Тоді матриця A нерозкладна.

Під *P-трикутною матрицею* мається на увазі матриця, яка переставно подібна нижньо-трикутній (а отже, і верхньо-трикутній) матриці.

В указаному випадку вагова послідовність неперіодична. В п. 2.5.4 буде доведено нерозкладність канонічно циклічної матриці для довільної неперіодичної вагової послідовності.

У загальному випадку це не так. Наприклад, якщо $t^2 \neq 0$ і характеристика кільця K не дорівнює двом, то канонічно циклічна матриця $M_t(1, t, 1, t)$ (з періодичною ваговою послідовністю) розкладна (для кільця характеристики 2 — нерозкладна).

Щоб у загальному випадку неперіодичної вагової послідовності при дослідженні системи лінійних рівнянь $MX = XM$ можна було б також прийти до сформульованої вище достатньої умови нерозкладності, треба мати критерій неперіодичності, користуватися яким було б набагато зручніше, аніж означенням. Це питання розглядається в пункті 2.5.3.

Нехай $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup 0$ ($\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел). Лексикографічний порядок на множині $\mathbb{N}_0^n = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \times \cdots \times \mathbb{N}_0$ (n раз) позначаємо через $<_n$.

Зафіксуємо деяку послідовність $\overline{v} = (a_1, a_2 \ldots, a_n) \in \mathbb{N}_0^n$ і введемо для її циклічних перестановок наступне позначення: $\overline{v}_i = (a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i+n-1})$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (індекси розглядаються за модулем n). Задамо на множині $\{1, 2, \ldots, n\}$ відношення строгого часткового порядку $\prec_{\overline{v}}$ наступним чином: $i \prec_{\overline{v}} j \Longleftrightarrow \overline{v}_i <_n \overline{v}_j$.

Послідовність $\overline{v}$ називається періодичною, якщо $\overline{v}_j = \overline{v}$ для деякого $j > 1$. Легко показать, що в цьому випадку

1) існує натуральне число $q \neq n$ таке, що $q|n$ і $a_{i+pq} = a_i$ для довільних $i = 1, 2, \ldots, q$, $p = 1, 2, \ldots, n/q$; будь-яке таке число називається періодом;

2) найменший період ділить всі інші.

Має місце таке твердження.

Твердження 2.12. *Наступні умови еквівалентні:*

a) послідовність $\overline{v} = (a_1, a_2 \ldots, a_n)$ періодична;

b) частковий порядок $\prec_{\overline{v}}$ не є лінійним;

c) послідовності $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n$ утворюють мультимножину, що не є множиною.

Отже, неперіодичність еквівалентна лінійності порядку $\prec_{\overline{v}}$.

У пункті 2.5.4 доведена наступна теорема.

Теорема 2.13. *Канонічно циклічна матриця з неперіодичною ваговою послідовністю нерозкладна в категорії* $\mathrm{Mmat}(K)$.

Основними при доведенні цієї теореми є вказана вище достатня умова нерозкладності і лема 2.14. яка стверджує, що якщо M — канонічно циклічна матриця з неперіодичною ваговою послідовністю $\overline{w}$ і $X = (x_{ij})$ — довільна матриця така, що $MX = XM$, то x_{ij} належить радикалу кільця кожного разу, коли $i \prec_{\overline{w}} j$.

Питання про нерозкладність і розкладність канонічно циклічної матриці $M = M_t(\overline{a})$ з періодичною ваговою послідовністю $\overline{w}$ розглядається в пунктах 2.5.5, 2.5.6.

Нехай $\overline{a} = (\varepsilon_1 t^{s_1}, \varepsilon_2 t^{s_2}, \ldots, \varepsilon_{n-1} t^{s_{n-1}}, \varepsilon_n t^{s_n})$, d_0 — найменший період послідовності $\overline{w}$, $n_0 = \frac{n}{d_0}$ і $\varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n$ — $*$-коефіцієнт матриці M. Клітину Фробеніуса

$$\Phi = \Phi_{n_0}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \varepsilon \\ 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

з характеристичним поліномом $f(x) = x^{n_0} - \varepsilon$ назвемо *визначальною клітиною Фробеніуса матриці* M.

Як було показано в п. 2.5.2, у випадку періодичної вагової послідовності канонічно циклічна матриця може бути розкладною. У наступній теоремі питання про нерозкладні і розкладні канонічно циклічні матриці розглядається (в цій ситуації) більш детально.

Теорема 2.15. *Канонічно циклічна матриця* $M = M_t(\overline{a})$ *з періодичною ваговою послідовністю розкладна, якщо розкладна її визначальна клітина Фробеніуса, і нерозкладна, якщо її визначальна клітина Фробеніуса нерозкладна за модулем* R.

У пункті 2.5.7 доведено, що довільна канонічно ланцюгова матриця нерозкладна в категорії $\mathrm{Mmat}(K)$.

У підрозділах 2.6 – 2.7 розглядається питання про ізоморфізм циклічних і ланцюгових матриць в категорії $\mathrm{Mmat}(K)$.

У цих підрозділах доведено наступні теореми.

Теорема 2.19. *Канонічно циклічні матриці* $M_t(\overline{a})$ *і* $M_t(\overline{a}')$ *ізоморфні в категорії* $\mathrm{Mmat}(K)$ *тоді і лише тоді, коли вони ізоморфні в категорії* $\mathrm{Mmat}_0(K)$.

Теорема 2.21. *Канонічно ланцюгові матриці* $N_t(\overline{a})$ *і* $N_t(\overline{a}')$ *ізоморфні* *в категорії* $\mathrm{Mmat}(K)$ *тоді і лише тоді, коли вони ізоморфні в категорії* $\mathrm{Mmat}_0(K)$.

Доведення теорем, яке містить багато випадків, проводиться по тій же, але ускладненій, схемі, що застосовувалась при дослідженні нерозкладності канонічно циклічних і канонічно ланцюгових матриць. Зокрема, замість часткового порядку $\prec_{\overline{v}}$ розглядається частковий порядок $\prec_{\overline{v}\,\overline{v}'}$, залежний від двох послідовностей $\overline{v}$ і $\overline{v}'$.

У підрозділі 2.8 розглядається загальна теорема про ізоморфізм об'єктів в категорії мономіальних матриць.

У цьому підрозділі доведена (з використанням результатів двох попередніх підрозділів) наступна теорема.

Теорема 2.22. *Два нерозкладні об'єкти категорії* $\mathrm{Mmat}_0(K)$ *ізоморфні в категорії* $\mathrm{Mmat}(K)$ *тоді і лише тоді, коли вони ізоморфні в* $\mathrm{Mmat}_0(K)$.

У **третьому розділі** викладені загальні твердження про незвідні та звідні мономіальні матриці довільної ваги.

Протягом цього і наступного розділів вивчаються незвідні і звідні мономіальні матриці над комутативним локальним кільцем K з ненульовим радикалом R. У випадках, коли K є кільцем головних ідеалів (або взагалі не обов'язково локальне), цей факт оговорюється. Під матрицею порядку n будемо розуміти матрицю розміру $n \times n$. Всі ланцюгові матриці порядку $n > 1$ звідні і тому будемо розглядати лише циклічні матриці.

У першому підрозділі третього розділу наведені додаткові означення і позначення.

Нехай K — довільне комутативне локальне кільце і $t \neq 0$ — фіксований елемент радикала R кільця K. Всі пов'язані з мономіальними матрицями означення розділу 2 автоматично переносяться на цей випадок.

Канонічно циклічну матрицю M з визначальною послідовністю $\overline{a} = (\varepsilon_1 t^{s_1}, \ldots, \varepsilon_{n-1} t^{s_{n-1}}, \varepsilon_n t^{s_n})$ будемо називати *канонічно* $(t,*)$*-циклічною*, а якщо при цьому $\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_{n-1} = \varepsilon_n = 1$ — то t*-циклічною*. В останньому випадку будемо використовувати запис $M = M(t, s_1, s_2, \ldots, s_n)$, тобто

$$M(\overline{a}) = M(t, s_1, s_2, \ldots, s_n) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & t^{s_n} \\ t^{s_1} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & t^{s_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Для канонічно $(t,*)$-циклічних матриць над довільним комутативним локальним кільцем вага матриці M (сума всіх членів вагової послідовності) вже залежить від t. У цьому випадку треба говорити про *вагу відносно* t або t*-вагу* матриці M.

Будемо говорити, що канонічно $(t,*)$-циклічна матриця має *малу вагу*, якщо її t-вага менша ступеня нільпотентності елемента t, і *велику вагу* — в протилежному випадку. Якщо t ненільпотентний, то t-вага завжди мала.

У виключних випадках (які оговорюються) t може не належати радикалу (якщо це природний крайній випадок).

Матриця A порядку n над комутативним кільцем K називається звідною, якщо існує оборотна (над K) матриця C така, що

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} A_1 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

де A_1 і A_2 — матриці відповідно порядків $n_1 > 0$ і $n_2 > 0$.

У підрозділі 3.2 отримані критерії незвідності для канонічно циклічних матриць малих порядків.

Теорема 3.1. *Нехай K — комутативне локальне кільце з радикалом $R = tK \neq 0$. Канонічно t-циклічна матриця порядку $n < 7$, елементи вагової послідовності якої належать множині $\{0,1\}$, незвідна тоді і лише тоді, коли її t-вага взаємно проста з n.*

Теорема 3.2. *Нехай K — комутативне локальне кільце з радикалом $R = tK$ і нехай $R^2 \neq 0$. Канонічно t-циклічна матриця порядку $n < 5$, елементи вагової послідовності якої належать множині $\{0,1,2\}$, незвідна тоді і лише тоді, коли її t-вага взаємно проста з n.*

При $n \geq 7$ у першому випадку і $n \geq 5$ у другому випадку критерії не вірні; контрикладами є, наприклад, t-циклічні матриці з ваговими послідовностями $(0,0,0,0,1,1,1)$ (при $t^2 = 0$) і $(0,0,2,2,2)$ (при $t^3 = 0$).

Але в одну сторону обидва твердження мають місце і в загальному випадку (про що йтиме мова у наступному підрозділі).

У підрозділі 3.3 отримано загальна необхідна умова незвідності канонічно циклічних матриць.

Тут K позначає довільне комутативне кільце, а t — довільний його елемент.

Всі позначення, введені вище у випадку, коли кільце K локальне, а $t \neq 0$ належить його радикалу, зберігаються.

Теорема 3.12. *Нехай K — комутативне кільце, $t \in K$. Якщо матриця*

$$M(t, s_1, \ldots, s_n) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & t^{s_n} \\ t^{s_1} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & t^{s_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}$$

незвідна, то її t-вага взаємно проста з її порядком.

Як наслідок отримуємо наступне твердження.

Твердження 3.14. *Нехай K — комутативне кільце, $t \in K$. Матриця*

$$M_t(\varepsilon_1 t^{s_1}, \ldots, \varepsilon_{n-1} t^{s_{n-1}}, \varepsilon_n t^{s_n}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \varepsilon_n t^{s_n} \\ \varepsilon_1 t^{s_1} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & \varepsilon_{n-1} t^{s_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}$$

звідна, якщо її t-вага не взаємно проста з її порядком і в K існує корінь n-го степеня із $\varepsilon = \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n-1}\varepsilon_n$.

У **четвертому розділі** викладені загальні твердження про незвідні та звідні мономіальні матриці малої ваги.

Основним результатом цього розділу є критерій спадкової звідності.

Матрицю A порядку n над комутативним кільцем K, що є канонічно t-циклічною, назвемо *спадково звідною*, якщо існує оборотна (над K) матриця C така, що

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} A_1 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

де A_1 — канонічно t-циклічна матриця порядку $n_1 > 0$ і A_2 — деяка матриця порядку $n_2 > 0$. В протилежному випадку матриця A називається *спадково незвідною.*

Аналогічно дається означення спадково звідної та спадково незвідної канонічно $(t, *)$-циклічної матриці.

Доведено наступний критерій (з використанням модифікації теореми 3.12 про t-вагу і порядок).

Теорема 4.2. *Нехай M — канонічно t-циклічна матриця малої ваги над комутативним локальним кільцем головних ідеалів. Матриця M спадково незвідна тоді і лише тоді, коли її порядок і t-вага взаємно прості.*

У зв'язку з означенням спадкової звідності може виникнути питання, а що буде, коли вважати, що канонічно циклічною вважати не верхній, а нижній діагональний блок матриці $C^{-1}AC$? Чи буде тоді справедлива теорема 4.2?

Щоб отримати відповідь на ці запитання, узагальнимо поняття спадкової звідності. Матрицю A порядку n над комутативним кільцем K, що є канонічно t-циклічною назвемо *слабко спадково звідною*, якщо існує оборотна (над K) матриця C така, що

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} A_1 & * & \ldots & * \\ 0 & A_2 & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & A_k \end{pmatrix},$$

де $k > 1$, всі (квадратні) матриці $A_1, A_2, \ldots, A_k$ мають ненульові порядки і одна із них є канонічно t-циклічною. В протилежному випадку матриця A називається *слабко спадково незвідною.*

Теорема 4.4. *Нехай M — канонічно t-циклічна матриця малої ваги над комутативним локальним кільцем головних ідеалів. Наступні умови еквівалентні:*

а) *матриця M слабко спадково звідна;*

б) *матриця M спадково звідна.*

Поняття слабко спадкової звідності та слабко спадкової незвідності також природним чином узагальнюється на канонічно $(t, *)$-циклічні матриці.

Обидві теореми справедливі для канонічно $(t, *)$-циклічних матриць у випадку, коли існує корінь n-го степеня із $\varepsilon = \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n-1}\varepsilon_n$ (n — порядок матриці).

У **п'ятому розділі** вивчається незвідність та звідність мономіальних матриць великої ваги.

У цьому розділі K — комутативне локальне кільце і $t \neq 0$ має ступінь нільпотентності $m < \infty$. Під підпослідовністю визначальної послідовності завжди розуміємо зв'язну підпослідовність (з врахуванням її циклічних перестановок). Квадратну матрицю A над кільцем K назвемо (p, q)-*звідною*, якщо вона подібна матриці вигляду

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

де A_{11} і A_{22} — матриці порядку $p \geq 1$ і $q \geq 1$ відповідно. Якщо при цьому порядок q матриці A_{22} малий, то матрицю A будемо також називати $(*, q)$-звідною. Якщо ж матриці A, A_{11}, A_{22} — канонічно $(t, *)$-циклічні, то матрицю A назвемо 2-спадково звідною.

У підрозділі 5.1 отримано необхідні умови незвідності канонічно $(t, *)$-циклічних матриць.

У випадку $m = 2$ доведена така теорема.

Теорема 5.1. *Нехай $t^2 = 0$ і канонічно $(t, *)$-циклічна матриця незвідна. Тоді її визначальна послідовність не містить підпослідовностей вигляду $(t, t, t, 1, 1, 1)$ і $(t, t, t, t, 1, 1)$.*

У випадку довільного m маємо наступні теореми.

Теорема 5.2. *Нехай $t^m = 0$, $t^{m-1} \neq 0$, і канонічно $(t, *)$-циклічна матриця незвідна. Тоді її визначальна послідовність не містить підпослідовностей вигляду $(t^i, t^j, t^p, 1, 1, 1)$, де $i + j \geq m$, $2p \geq m$.*

Теорема 5.3. *Нехай $t^m = 0$, $t^{m-1} \neq 0$, і канонічно $(t, *)$-циклічна матриця незвідна. Тоді її визначальна послідовність не містить підпослідовностей вигляду $(t^i, t^j, t^p, t^q, 1, 1)$, де $i + j \geq m, p + q \geq m$.*

У підрозділах 5.2 – 5.4 отримано достатні умови різних типів звідності канонічно $(t, *)$-циклічних матриць.

У випадку $m = 2$ доведено такі теореми.

Теорема 5.4. *Нехай $t^2 = 0$. Канонічно $(t, *)$-циклічна матриця порядку $n \geq 8$, визначальна послідовність якої містить підпослідовність $(t, t, t, 1, t, 1, 1, 1)$, є $(n - 2, 2)$-звідною.*

Теорема 5.5. *Нехай $t^2 = 0$. Канонічно $(t, *)$-циклічна матриця порядку $n \geq 8$, визначальна послідовність якої містить підпослідовність $(t, t, t, 1, 1, t, 1, 1)$, є $(n - 2, 2)$-звідною.*

Теорема 5.8. *Нехай $t^2 = 0$. Канонічно $(t, *)$-циклічна матриця порядку $n \geq 9$, визначальна послідовність якої містить підпослідовність $(t, t, t, t, 1, t, 1, t, 1)$, є $(n - 3, 3)$-звідною.*

Теорема 5.9. *Нехай $t^2 = 0$. Канонічно $(t, *)$-циклічна матриця порядку $n \geq 9$, визначальна послідовність якої містить підпослідовність $(1, 1, 1, 1, 1, t, 1, t, t)$, є $(n - 3, 3)$-звідною.*

Теорема 5.12. *Нехай $t^2 = 0$. Канонічно $(t, *)$-циклічна матриця порядку $n \geq 6$ є 2-спадково звідною, якщо її визначальна послідовність містить підпослідовності $(1, 1)$ і (t, t, t, t).*

Теорема 5.13. *Нехай $t^2 = 0$. Канонічно $(t, *)$-циклічна матриця порядку $n \geq 8$ є 2-спадково звідною, якщо її визначальна послідовність містить підпослідовності $(1, 1, 1)$ і $(t, t, 1, t, t)$.*

У випадку довільного m маємо наступні теореми.

Теорема 5.6. *Нехай $t^m = 0$, $t^{m-1} \neq 0$. Якщо $i \leq q$, $j + p \geq m$ $(0 < i, j, p, q < m)$, то канонічно $(t, *)$-циклічна матриця порядку $n \geq 8$, визначальна послідовність якої містить підпослідовність $(t^j, t^p, t^q, 1, t^i, 1, 1, 1)$, є $(n - 2, 2)$-звідною.*

Теорема 5.7. *Нехай $t^m = 0$, $t^{m-1} \neq 0$. Якщо $i \leq q$, $3q - i \geq m$, $j + p \geq m$ $(0 < i, j, p, q < m)$, то канонічно $(t, *)$-циклічна матриця порядку $n \geq 8$, визначальна послідовність якої містить підпослідовність $(t^j, t^p, t^q, 1, 1, t^i, 1, 1)$, є $(n - 2, 2)$-звідною.*

Теорема 5.10. *Нехай $t^m = 0$, $t^{m-1} \neq 0$. Якщо $q \geq i$, $r \geq j$, $i + j \geq m$, $k + p \geq m$ $(0 < i, j, k, p, q, r < m)$, то канонічно $(t, *)$-циклічна матриця* *порядку $n \geq 9$, визначальна послідовність якої містить підпослідовність $(t^k, t^p, t^q, t^r, 1, t^i, 1, t^j, 1)$, є $(n-3, 3)$-звідною.*

Теорема 5.11. *Нехай $t^m = 0$, $t^{m-1} \neq 0$. Якщо $i + j \geq m$, $2k \geq m$ $(0 < i, j, k < m)$, то канонічно $(t, *)$-циклічна матриця порядку $n \geq 9$, визначальна послідовність якої містить підпослідовність $(1, 1, 1, 1, 1, t^k, 1, t^j, t^i)$, є $(n-3, 3)$-звідною.*

Теорема 5.14. *Нехай $t^m = 0$, $t^{m-1} \neq 0$. Канонічно $(t, *)$-циклічна матриця порядку $n \geq 6$ є 2-спадково звідною, якщо її визначальна послідовність містить підпослідовності $(1, 1)$ і (t^i, t^j, t^k, t^p), де $i + j \geq m$, $k + p \geq m$.*

Теорема 5.15. *Нехай $t^m = 0$, $t^{m-1} \neq 0$. Канонічно $(t, *)$-циклічна матриця порядку $n \geq 8$ є 2-спадково звідною, якщо її визначальна послідовність містить підпослідовності $(1, 1, 1)$ і $(t^i, t^j, 1, t^k, t^p)$, де $i + j \geq m$, $k + p \geq m$.*

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена вивченню матриць над комутативними кільцями.

Доведено, що канонічно циклічна матриця (над комутативним локальним кільцем головних ідеалів) з неперіодичною ваговою послідовністю нерозкладна. Вказано необхідні і достатні умови (окремо) нерозкладності канонічно циклічної матриці з періодичною ваговою послідовністю. Доведено, що канонічно циклічні матриці ізоморфні в категорії мономіальних матриць тоді і лише тоді, коли вони ізоморфні в сильній категорії мономіальних матриць.

Доведена необхідна умова незвідності канонічно t-циклічної матриці довільної ваги, в якій основну роль відіграє зв'язок між порядком та вагою матриці. Ця умова узагальнена на деякий клас канонічно $(t, *)$-циклічних матриць (в обох випадках комутативне локальне кільце не обов'язково є кільцем головних ідеалів).

Отримано критерій незвідності канонічно t-циклічної матриці над кільцем з однозначним розкладом та критерій спадкової незвідності канонічно t-циклічної матриці малої ваги над комутативним кільцем головних ідеалів. Ці критерії узагальнено на деякий клас канонічно $(t, *)$-циклічних матриць.

Вивчаються необхідні умови незвідності та достатні умови звідності канонічно циклічних матриць великої ваги над комутативним локальним кільцем. Ці умови розглядаються відносно підпослідовностей спеціального вигляду вагової послідовності. При дослідженні канонічно $(t, *)$-циклічних матриць порядку n розглядаються різні типи звідності: $(*, 2)$-звідність, $(*, 3)$-звідність, 2-спадкова звідність.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Bondarenko V. M. Reducibility and irreducibility of monomial matrices over commutative rings / V. M. Bondarenko, **M. Yu. Bortos**, R. F. Dinis, A. A. Tylyshchak // Algebra Discrete Math. – 2013. – **16**, no 2. – P. 171–187.

2. Бортош М. Ю. Приводимость некоторых мономиальных матриц над коммутативными локальными кольцами / **М. Ю. Бортош**, О. А. Тилищак // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2013. – № **14**. – P. 68–78.

3. Бортош М. Ю. Про один клас звідних мономіальних матриць над комутативними кільцями / **М. Ю. Бортош** // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2014. – Вип. **25**, №1. – С. 15–20.

4. Бондаренко В. М. Опис деяких категорій незвідних матриць малих порядків над локальними кільцями / В. М. Бондаренко, **М. Ю. Бортош** // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2016. – Вип. **28**, №1. – С. 18–34.

5. Бондаренко В. М. Про $(*, 2)$-звідні мономіальні матриці над комутативними кільцями / В. М. Бондаренко, **М. Ю. Бортош** // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2016. – Вип. **29**, №2. – С. 22–30.

6. Bondarenko V. M. Indecomposable and irreducible t-monomial matrices over commutative rings / V. M. Bondarenko, **M. Yu. Bortos**, R. F. Dinis, A. A. Tylyshchak // Algebra Discrete Math. – 2016. – **22**, no 1. – P. 11–20.

7. Бондаренко В. М. Достатні умови звідності в категорії мономіальних матриць над комутативним локальним кільцем / В. М. Бондаренко, **М. Ю. Бортош** // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2017. – Вип. **30**, №1. – С. 11–24.

8. Бондаренко В. М. Нерозкладні та ізоморфні об'єкти в категорії мономіальних матриць над локальним кільцем / В. М. Бондаренко, **М. Ю. Бортош** // Укр. мат. журн. – 2017. – **69**, №7. – С. 889–904.

Тези конференцій:

9. Бортош М. Ю. Незвідність матриць деякого вигляду над комутативними кільцями / **М. Ю. Бортош** // Студентська наукова конференція математичного факультету УжНУ: Ужгород, квітень 2013: Збірник праць. Серія "Математика і прикладна математика". – Ужгород, 2013. – С. 8.

10. Tylyshchak A. On Reducibility of Monomial Matrices over Commutative Local Rings / A. Tylyshchak, **M. Bortos** // 9th International Algebraic Conference in Ukraine: L'viv, July 8-13, 2013: Book of Abstracts. – L'viv, 2013. – P. 201.

11. Bortos M. Yu. On Monomial Matrices over Principal Ideal Domains / **M. Yu. Bortos**, R. F. Dinis // International Algebraic Conference dedicated to 100th anniversary of L. A. Kaluzhnin: Kyiv, July 7-12, 2014: Book of Abstracts. – Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, 2014. – P. 21.

12. Бортош М. Ю. Поліноміальні матриці спеціального вигляду над комутативними локальними кільцями /**М. Ю. Бортош** // П'ятнадцята Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука: Київ, 15-17 травня 2014р.: Матеріали конференції II (Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз). – Київ, 2014. – С. 54.

13. Бортош М. Ю. Про подібність мономіальних матриць над комутативними кільцями / **М. Ю. Бортош** // Міжнародна конференція молодих математиків: Київ, 3-6 червня 2015р.: Тези доповідей – Київ, 2015. – С. 28.

14. Bortos M. Yu. On a sufficient condition for reducibility of monomial matrices / **M. Yu. Bortos** // X International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd: Odessa, August 20-27, 2015: Abstracts. – Odessa, 2015. – P. 26.

15. Bortos M. Yu. On indecomposable objects of the category of monomial matrices over a commutative local ring / **M. Yu. Bortos** // International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100th anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu. O. Mitropolskiy (1917-2008): Kyiv, June 7-10, 2017: Abstracts. – Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2017. – P. 9.

16. Bondarenko V. M. On isomorphic objects of the category of monomial matrices over a commutative local ring / V. M. Bondarenko, **M. Yu. Bortos** // 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko: Kyiv, July 3-7, 2017: Abstracts. – Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2017. – P. 27.

АНОТАЦІЯ

Бортош М. Ю. *Лінійно-алгебраїчні властивості категорій мономіальних матриць над локальними кільцями.* – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – "алгебра та теорія чисел". – Інститут математики НАН України, Київ, 2017.

Дисертаційна робота присвячена вивченню матриць над комутативними кільцями.

Доведено, що канонічно циклічна матриця (над комутативним локальним кільцем головних ідеалів) з неперіодичною ваговою послідовністю нерозкладна. Вказано необхідні і достатні умови (окремо) нерозкладності канонічно

циклічної матриці з періодичною ваговою послідовністю. Доведено, що канонічно циклічні матриці ізоморфні в категорії мономіальних матриць тоді і лише тоді, коли вони ізоморфні в сильній категорії мономіальних матриць.

Доведена необхідна умова незвідності канонічно t-циклічної матриці довільної ваги, в якій основну роль відіграє зв'язок між порядком та вагою матриці. Ця умова узагальнена на деякий клас канонічно $(t,*)$-циклічних матриць (в обох випадках комутативне локальне кільце не обов'язково є кільцем головних ідеалів).

Отримано критерій незвідності канонічно t-циклічної матриці над кільцем з однозначним розкладом та критерій спадкової незвідності канонічно t-циклічної матриці малої ваги над комутативним кільцем головних ідеалів. Ці критерії узагальнено на деякий клас канонічно $(t,*)$-циклічних матриць.

Вивчаються необхідні умови незвідності та достатні умови звідності канонічно циклічних матриць великої ваги над комутативним локальним кільцем. Ці умови розглядаються відносно підпослідовностей спеціального вигляду вагової послідовності. При дослідженні канонічно $(t,*)$-циклічних матриць порядку n розглядаються різні типи звідності: $(*,2)$-звідність, $(*,3)$-звідність, 2-спадкова звідність.

Ключові слова: частково впорядкована множина, категорія, комутативне кільце, мономіальна матриця, канонічно циклічна матриця, визначальна послідовність, вагова послідовність, нерозкладність, спадкова незвідність.

АННОТАЦИЯ

Бортош М. Ю. *Линейно-алгебраические свойства категорий мономиальных матриц над локальными кольцами.* - Квалификационный научный труд на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – "алгебра и теория чисел". - Институт математики НАН Украины, Киев, 2017.

Диссертационная работа посвящена изучению матриц над коммутативными кольцами.

Доказано, что канонически циклическая матрица размера $n \times n$ с определяющей последовательностью $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ над коммутативным локальным кольцом главных идеалов K

$$M(\overline{a}) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_n \\ a_1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

неразложима, если ее весовая последовательность

$$\overline{w}(\overline{a}) = (w(a_1), \ldots, w(a_{n-1}), w(a_n))$$

непериодическая (весом $w(x)$ елемента $x = \varepsilon t^s$, где t — образующий елемент радикала кольца и ε — обратимый элемент, называется число s).

Для канонически циклической матрицы $M(\overline{a})$ с периодической весовой последовательностью введено понятие определяющей клетки Фробениуса Ф: если $\overline{a} = (\varepsilon_1 t^{s_1}, \varepsilon_2 t^{s_2}, \ldots, \varepsilon_{n-1} t^{s_{n-1}}, \varepsilon_n t^{s_n})$, d_0 — наименьший период весовой последовательности $\overline{w}$ и $n_0 = \frac{n}{d_0}$, то Ф — это матрица размера $n_0 \times n_0$ вида

$$\Phi_{n_0}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \varepsilon \\ 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n$.

Доказано, что канонично циклическая матрица с периодической весовой последовательностью разложима, если разложима ее определяющая клетка Фробениуса, и неразложима, если ее определяющая клетка Фробениуса неразложима по модулю R.

Показано, что две канонически циклические матрицы изоморфны в сильной категории мономиальных матриц (морфизмами которой являются также мономиальные матрицы) тогда и только тогда, когда они перестановочно диагонально подобны.

Доказано, что канонически циклические матрицы изоморфны в категории мономиальных матриц тогда и только тогда, когда они изоморфны в сильной категории мономиальных матриц.

Доказано необходимое условие неприводимости канонически t-циклической матрицы произвольного веса, в которой основную роль играет связь между порядком и весом матрицы. Это условие обобщено на некоторый класс канонически $(t, *)$-циклических матриц (в обоих случаях коммутативное локальное кольцо не обязательно есть кольцом главных идеалов).

Получен критерий неприводимости канонически t-циклической матрицы над кольцом с однозначным разложением и критерий наследственной неприводимости канонически t-циклической матрицы малого веса над коммутативным кольцом главных идеалов. Эти критерии обобщены на некоторый класс канонически $(t, *)$-циклических матриц.

Изучаются необходимые условия неприводимости и достаточные условия приводимости канонически циклических матриц большого веса над коммутативным локальным кольцом. Эти условия рассматриваются относительно подпоследовательностей специального вида весовой последовательности. При исследовании канонически $(t, *)$-циклических матриц порядка n рассматриваются различные типы приводимости: $(*, 2)$-приводимость, $(*, 3)$-приводимость, 2-наследственная приводимость.

Ключевые слова: частично упорядоченное множество, категория, коммутативное кольцо, мономиальная матрица, канонически циклическая матрица, определяющая последовательность, весовая последовательность, неразложимости, наследственная неприводимость.

ABSTRACT

Bortos M. Yu. *Linear-algebraic properties of categories of monomial matrices over local rings.* – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.06 — "algebra and number theory". – Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2017.

The thesis is devoted to the study of matrices over commutative rings.

It is proved that a canonically cyclic matrix (over a commutative local ring of principal ideals) with nonperiodic weight sequences is indecomposable. Necessary and sufficient conditions (separately) for the indecomposability of a canonically cyclic matrix with a periodic weight sequence are indicated. It is proved that canonically cyclic matrices are isomorphic in the category of monomial matrices if and only if they are isomorphic in the strong category of monomial matrices.

We prove a necessary condition for the irreducibility of a canonically t-cyclic matrix of arbitrary weight, in which a relation between the order and the weight of the matrix plays a major role. This condition is generalized to a certain class canonically $(t,*)$-cyclic matrices (in both cases, the commutative local ring is not necessarily a ring of principal ideals).

We obtain a criterion for the irreducibility of a canonically t-cyclic matrix over a ring with unique decomposition and the criterion for the hereditary irreducibility of a canonically t-cyclic matrix of small weight over a commutative ring of principal ideals. These criteria are generalized to a certain class of canonically $(t,*)$-cyclic matrices.

We study necessary conditions of irreducibility and sufficient conditions of reducibility of canonically cyclic matrices of larger weight over a commutative local ring. These conditions are considered with respect to the sequences of the special form of the weight sequence. In the study of canonical $(t,*)$-cyclic matrices we consider variuos types of the reducibilities: $(*,2)$-reducibility, $(*,3)$-reducibility, 2-hereditary reducibility.

Keywords: partially ordered set, category, commutative ring, monomial matrix, canonically cyclic matrix, determining sequence, weight sequence, indecomposability, hereditary irreducibility.