

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Бортош Марія Юліївна

УДК 512.64

ДИСЕРТАЦІЯ
**Лінійно-алгебраїчні властивості
категорій мономіальних матриць
над локальними кільцями**

01.01.06 – алгебра та теорія чисел

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання
ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне
джерело _____ М. Ю. Бортош

Науковий керівник
Бондаренко Віталій Михайлович,
доктор фізико-математичних наук,
професор

Київ – 2017

АНОТАЦІЯ

Бортош М. Ю. Лінійно-алгебраїчні властивості категорій мономіальних матриць над локальними кільцями. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – “алгебра та теорія чисел”. – Інститут математики НАН України, Київ, 2017.

Дисертаційна робота присвячена вивченню мономіальних матриць над комутативними кільцями.

Матриця над комутативним кільцем K називається мономіальною, якщо кожний її рядок і кожний її стовпець містить не більше одного ненульового елемента, і строго мономіальною, якщо кожний її рядок і кожний її стовпець містить рівно один ненульовий елемент. Строго мономіальна матриця, всі ненульові елементи якої є одиничними, називається переставною. $\text{Mmat}(K)$ позначає категорію мономіальних матриць над K , об'єктами якої є квадратні мономіальні матриці, а морфізмами $X \rightarrow Y$ — матриці C такі, що $XC = CY$. $\text{Mmat}_0(K)$ позначає сильну категорію мономіальних матриць над K , яка за означенням є повною підкатегорією категорії $\text{Mmat}(K)$ з тими ж самими об'єктами і лише тими морфізмами, що є мономіальними матрицями.

Ізоморфні об'єкти категорії $\text{Mmat}(K)$ — це подібні мономіальні матриці. Ізоморфні об'єкти категорії $\text{Mmat}_0(K)$ — це переставно діагонально подібні мономіальні матриці (тобто одна з них діагонально подібна матриці, що переставно подібна іншій). Нерозкладні об'єкти категорії $\text{Mmat}(K)$ — це нерозкладні мономіальні матриці. Нерозкладні об'єкти категорії

$\text{Mmat}_0(K)$ — це переставно нерозкладні мономіальні матриці.

Якщо орієнтований граф $\Gamma(X)$ мономіальної матриці $X = (x_{ij})$ розміру $n \times n$ (з вершинами $1, 2, \dots, n$ і стрілками $i \rightarrow j$ для всіх $x_{ij} \neq 0$) є ланцюгом, то (переставно нерозкладна) мономіальна матриця X називається ланцюговою, а якщо циклом, то циклічною.

У випадку, коли довільний ненульовий елемент мономіальної матриці X має вигляд $t^{s_{ij}}$, де t — фіксований елемент кільця, вживаються терміни t -мономіальна матриця, t -ланцюгова матриця, t -циклічна матриця.

Нехай K — комутативне локальне кільце головних ідеалів, що не є полем. Тоді єдиний максимальний ідеал (радикал) R кільця K дорівнює $tK \neq 0$, де t визначається однозначно з точністю до оборотного множника, і будь-який елемент $x \in K$ має вигляд εt^s , де ε належить групі K^* оборотних елементів кільця K і $s \geq 0$. Число s (яке не залежить від вибору t) називаємо вагою елемента x і позначаємо через $w(x)$.

Циклічна матриця розміру $n \times n$ називається канонічно циклічною, якщо вона має вигляд

$$A = M(\bar{a}) = M(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_n \\ a_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Послідовність $\bar{a} = (a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)$ називається визначальною послідовністю матриці A .

Послідовність ваг $\bar{w}(\bar{a}) = (w(a_1), \dots, w(a_{n-1}), w(a_n))$ членів визначальної послідовності $\bar{a}$ називається ваговою послідовністю матриці A і позначається $\bar{w}(A)$, а сума членів вагової послідовності — вагою матриці A , яка позначається $w(A)$.

Доведено, що канонічно циклічна матриця з неперіодичною ваговою послідовністю нерозкладна. Доведено, що канонічно циклічна матриця з періодичною ваговою послідовністю розкладна, якщо розкладна її визна-

чальна клітина Фробеніуса, і нерозкладна, якщо її визначальна клітина Фробеніуса нерозкладна за модулем R .

Доведено, що канонічно циклічні матриці ізоморфні в категорії мономіальних матриць тоді і лише тоді, коли вони ізоморфні в сильній категорії мономіальних матриць.

Доведена необхідна умова незвідності канонічно t -циклічної матриці A розміру $n \times n$ довільної ваги (над комутативним локальним кільцем), в якій основну роль відіграє зв'язок між n та $w(A)$. Ця умова узагальнена на деякий клас канонічно $(t, *)$ -циклічних матриць.

Ронглянуто також випадок канонічно ланцюгових матриць (як вироджений випадок канонічно циклічних матриць).

Отримано критерій незвідності канонічно t -циклічної матриці над кільцем з однозначним розкладом та критерій спадкової незвідності канонічно t -циклічної матриці малої ваги над комутативним кільцем головних ідеалів. Ці критерії узагальнено на деякий клас канонічно $(t, *)$ -циклічних матриць.

Вивчаються необхідні умови незвідності та достатні умови звідності (різних типів) канонічно циклічних матриць великої ваги над комутативним локальним кільцем відносно зв'язних підпоследовностей спеціального вигляду вагової последовності.

Зокрема, при $t^m = 0$, $t^{m-1} \neq 0$ для канонічно $(t, *)$ -циклічної матриці порядку n доведена її

$(n - 2, 2)$ -звідність, якщо $n \geq 8$ і визначальна последовність містить підпоследовність $(t^j, t^p, t^q, 1, t^i, 1, 1, 1)$, де $i \leq q$, $j + p \geq m$;

$(n - 2, 2)$ -звідність, якщо $n \geq 8$ і визначальна последовність містить підпоследовність $(t^j, t^p, t^q, 1, 1, t^i, 1, 1)$, де $i \leq q$, $3q - i \geq m$;

$(n - 3, 3)$ -звідність, якщо $n \geq 9$ і визначальна последовність містить підпоследовність $(t^k, t^p, t^q, t^r, 1, t^i, 1, t^j, 1)$, де $q \geq i$, $r \geq j$, $i + j \geq m$, $k + p \geq m$;

$(n - 3, 3)$ -звідність, якщо $n \geq 9$ і визначальна послідовність містить підпослідовність $(1, 1, 1, 1, 1, t^k, 1, t^j, t^i)$, де $i + j \geq m$, $2k \geq m$;

2-спадкова звідність, якщо $n \geq 6$ і визначальна послідовність містить підпослідовності $(1, 1)$ і (t^i, t^j, t^k, t^p) , де $i + j \geq m$, $k + p \geq m$;

2-спадкова звідність, якщо $n \geq 8$ і визначальна послідовність містить підпослідовності $(1, 1, 1)$ і $(t^i, t^j, 1, t^k, t^p)$, де $i + j \geq m$, $k + p \geq m$.

В усіх випадках $0 < i, j, k, p, q, r < m$.

Ключові слова: категорія, комутативне кільце, мономіальна матриця, канонічно циклічна матриця, визначальна послідовність, вагова послідовність, нерозкладність, спадкова незвідність.

Список публікацій за темою дисертації

1. Bondarenko V. M. Reducibility and irreducibility of monomial matrices over commutative rings / V. M. Bondarenko, M. Yu. Bortos, R. F. Dinis, A. A. Tylyshchak // Algebra Discrete Math. – 2013. – **16**, no 2. – P. 171–187.
2. Бортош М. Ю. Приводимость некоторых мономиальных матриц над коммутативными локальными кольцами / М. Ю. Бортош, О. А. Тилищак // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2013. – № **14**. – P. 68–78.
3. Бортош М. Ю. Про один клас звідних мономіальних матриць над комутативними кільцями / М. Ю. Бортош // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2014. – Вип. **25**, №1. – С. 15–20.
4. Бондаренко В. М. Опис деяких категорій незвідних матриць малих порядків над локальними кільцями / В. М. Бондаренко, М. Ю. Бортош // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2016. – Вип. **28**, №2. – С. 18–34.

5. Бондаренко В. М. Про $(*, 2)$ -звідні мономіальні матриці над комутативними кільцями / В. М. Бондаренко, М. Ю. Бортош // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2016. – Вип. **29**, №2. – С. 22–30.
6. Bondarenko V. M. Indecomposable and irreducible t -monomial matrices over commutative rings / V. M. Bondarenko, M. Yu. Bortos, R. F. Dinis, A. A. Tylyshchak // Algebra Discrete Math. – 2016. – **22**, no 1. – P. 11–20.
7. Бондаренко В. М. Достатні умови звідності в категорії мономіальних матриць над комутативним локальним кільцем / В. М. Бондаренко, М. Ю. Бортош // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2017. – Вип. **30**, №1. – С. 11–24.
8. Бондаренко В. М. Нерозкладні та ізоморфні об'єкти в категорії мономіальних матриць над локальним кільцем / В. М. Бондаренко, М. Ю. Бортош // Укр. мат. журн. – 2017. – **69**, №7. – С. 889–904.
9. Бортош М. Ю. Незвідність матриць деякого вигляду над комутативними кільцями / М. Ю. Бортош // Студентська наукова конференція математичного факультету УжНУ: Ужгород, квітень 2013: Збірник праць. Серія “Математика і прикладна математика”. – Ужгород, 2013. – С. 8.
10. Tylyshchak A. On Reducibility of Monomial Matrices over Commutative Local Rings / A. Tylyshchak, M. Bortos // 9th International Algebraic Conference in Ukraine: L'viv, July 8-13, 2013: Book of Abstracts. – L'viv, 2013. – P. 201.
11. Бортош М. Ю. Поліноміальні матриці спеціального вигляду над комутативними локальними кільцями / М. Ю. Бортош // П'ятнадцята

- Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука: Київ, 15-17 травня 2014р.: Матеріали конференції II (Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз). – Київ, 2014. – С. 54.
12. Bortos M. Yu. On Monomial Matrices over Principal Ideal Domains / M. Yu. Bortos, R. F. Dinis // International Algebraic Conference dedicated to 100th anniversary of L. A. Kaluzhnin: Kyiv, July 7-12, 2014: Book of Abstracts. – Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, 2014. – P. 21.
 13. Бортош М. Ю. Про подібність мономіальних матриць над комутативними кільцями / М. Ю. Бортош // Міжнародна конференція молодих математиків: Київ, 3-6 червня 2015р.: Тези доповідей – Київ, 2015. – С. 28.
 14. Bortos M. Yu. On a sufficient condition for reducibility of monomial matrices / M. Yu. Bortos // X International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd: Odessa, August 20-27, 2015: Abstracts. – Odessa, 2015. – P. 26.
 15. Bortos M. Yu. On indecomposable objects of the category of monomial matrices over a commutative local ring / M. Yu. Bortos // International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100th anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu. O. Mitropolskiy (1917-2008): Kyiv, June 7-10, 2017: Abstracts. – Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2017. – P. 9.
 16. Bondarenko V. M. On isomorphic objects of the category of monomial matrices over a commutative local ring / V. M. Bondarenko, M. Yu. Bortos // 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko: Kyiv, July 3-7, 2017: Abstracts. – Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2017. – P. 27.

ABSTRACT

Bortos M. Yu. Linear-algebraic properties of categories of monomial matrices over local rings. – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.06 — “algebra and number theory”.
– Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2017.

The thesis is devoted to the study of monomial matrices over commutative rings.

A matrix over a commutative ring K is called monomial if each of its row and column contains not more than one non-zero entry, and strictly monomial if each of its row and column contains exactly one non-zero entry. A strictly monomial matrix, all non-zero entries of which are equal to 1, is called permutation. $\text{Mmat}(K)$ denotes the category of monomial matrices over K whose objects are square monomial matrices and morphisms $X \rightarrow Y$ the matrices C such that $XC = CY$; $\text{Mmat}_0(K)$ denotes a strong category of monomial matrices over K , which by definition is the complete subcategory of the category $\text{Mmat}K$ with the same objects and only those morphisms that are monomial matrices.

Isomorphic objects of the category $\text{Mmat}K$ are similar monomial matrices. Isomorphic objects of the category $\text{Mmat}_0(K)$ are permutably diagonally similar monomial matrices (that is, one of them is diagonally similar to a matrix that is permutably similar to another). Indecomposable objects of the category $\text{Mmat}(K)$ are indecomposable monomial matrices. Indecomposable objects of the category $\text{Mmat}_0(K)$ are permutably indecomposable monomial matrices.

If the directed graph $\Gamma(X)$ of a monomial matrix $X = (x_{ij})$ of size $n \times n$ (with vertices $1, 2, \dots, n$ and the arrows $i \rightarrow j$ for all $x_{ij} \neq 0$) is a chain, then (a permutable indecomposable) the monomial matrix X is called chained, and if a cycle, then cyclic.

In the case when an arbitrary non-zero entry of a monomial matrix X has the form $t^{s_{ij}}$, where t is a fixed element of the ring, the terms t -monomial matrix, t -chained matrix, t -cyclic matrix are used.

Let K be a commutative local ring of principal ideals that is not a field. Then the only maximal ideal (radical) of R of the ring K is $tK \neq 0$, where t is uniquely determined up to the invertible multiplier, and any element $x \in K$ has the form εt^s , where ε belongs to the group K^* of the invertible elements of the ring K and $s \geq 0$. The number s (which does not depend on the choice of t) is called the weight of the element x and is denoted by $w(x)$.

A cyclic matrix of size $n \times n$ is called canonically cyclic if it has the form

$$A = M(\bar{a}) = M(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_n \\ a_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

The sequence $\bar{a} = (a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)$ is called the defining sequence of the matrix A .

The sequence of the weights $\bar{w}(\bar{a}) = (w(a_1), \dots, w(a_{n-1}), w(a_n))$ of the members of the defining sequence $\bar{a}$ is called the weighted sequence of the matrix A and denoted by $\bar{w}(A)$, and the sum of the members of the weighted sequence is called the weight of the matrix A , which are denoted by $w(A)$.

It is proved that a canonically cyclic matrix with nonperiodic weight sequences is indecomposable. It is proved that a canonically cyclic matrix with periodic weight sequence is composable if its defining Frobenius cell is composable, and indecomposable if its defining Frobenius cell is indecomposable modulo R .

It is proved that canonically cyclic matrices are isomorphic in the category of monomial matrices if and only if they are isomorphic in the strong category of monomial matrices.

We prove a necessary condition for the irreducibility of a canonically t -cyclic matrix A of size $n \times n$ with arbitrary weight (over a commutative local ring), in which a relation between n and $w(A)$ plays a major role. This condition is generalized to a certain class canonically $(t, *)$ -cyclic matrices.

We also consider the case of canonical chained matrices (as a degenerate case of the case of canonical cyclic matrices).

We obtain a criterion for the irreducibility of a canonically t -cyclic matrix over a ring with unique decomposition and the criterion for the hereditary irreducibility of a canonically t -cyclic matrix of small weight over a commutative ring of principal ideals. These criteria are generalized to a certain class of canonically $(t, *)$ -cyclic matrices.

We study necessary conditions of irreducibility and sufficient conditions of reducibility (of various types) of canonically cyclic matrices of large weight over a commutative local ring with respect to the connected sequences of the special form of the weight sequence.

In particular, if $t^m = 0$, $t^{m-1} \neq 0$, for a canonical $(t, *)$ -cyclic matrix of order n is proved its

$(n - 2, 2)$ -irreducibility if $n \geq 8$ and the defining sequence contains the subsequence $(t^j, t^p, t^q, 1, t^i, 1, 1, 1)$, where $i \leq q$, $j + p \geq m$;

$(n - 2, 2)$ -irreducibility if $n \geq 8$ and the defining sequence contains the subsequence $(t^j, t^p, t^q, 1, 1, t^i, 1, 1)$, where $i \leq q$, $3q - i \geq m$;

$(n - 3, 3)$ -irreducibility if $n \geq 9$ and the defining sequence contains the subsequence $(t^k, t^p, t^q, t^r, 1, t^i, 1, t^j, 1)$, where $q \geq i$, $r \geq j$, $i + j \geq m$, $k + p \geq m$;

$(n - 3, 3)$ -irreducibility if $n \geq 9$ and the defining sequence contains the subsequence $(1, 1, 1, 1, 1, t^k, 1, t^j, t^i)$, where $i + j \geq m$, $2k \geq m$;

2-hereditary irreducibility if $n \geq 6$ and the defining sequence contains the subsequences $(1, 1)$ and (t^i, t^j, t^k, t^p) , where $i + j \geq m$, $k + p \geq m$;

2-hereditary irreducibility if $n \geq 8$ and the defining sequence contains the subsequences $(1, 1, 1)$ and $(t^i, t^j, 1, t^k, t^p)$, where $i + j \geq m$, $k + p \geq m$.

In all the cases $0 < i, j, k, p, q, r < m$.

Keywords: category, commutative ring, monomial matrix, canonically cyclic matrix, determining sequence, weight sequence, indecomposability, hereditary irreducibility.

List of publications on the topic of the thesis

1. Bondarenko V. M. Reducibility and irreducibility of monomial matrices over commutative rings / V. M. Bondarenko, M. Yu. Bortos, R. F. Dinis, A. A. Tylyshchak // Algebra Discrete Math. – 2013. – **16**, no 2. – P. 171–187.
2. Bortos M. Yu. Reducibility of some monomial matrices over commutative local rings / M. Yu. Bortos, O. A. Tylyshchak // Scientific journal of NPU named after M. P. Drahomanov. Series 1. Physics and Mathematics. – 2013. – № **14**. – P. 68–78.
3. Bortos M. Yu. On one class of reducible monomial matrices over commutative rings / M. Yu. Bortos // Nauk. Visn. Uzhgorod Univ. Ser. Mat. Inform. – 2014. – Vol. **25**, №1. – P. 15–20.
4. Bondarenko V. M. Description of some categories of irreducible matrices of small orders over local rings / V. M. Bondarenko, M. Yu. Bortos // Nauk. Visn. Uzhgorod Univ. Ser. Mat. Inform. – 2016. – Vol. **28**, №1. – P. 18–34.
5. Bondarenko V. M. On $(*, 2)$ -reducible monomial matrices over commutative rings / V. M. Bondarenko, M. Yu. Bortos // Nauk. Visn. Uzhgorod Univ. Ser. Mat. Inform. – 2016. – Вип. **29**, №2. – P. 22–30.

6. Bondarenko V. M. Indecomposable and irreducible t-monomial matrices over commutative rings / V. M. Bondarenko, M. Yu. Bortos, R. F. Dinis, A. A. Tylyshchak // Algebra Discrete Math. – 2016. – **22**, no 1. – P. 11–20.
7. Bondarenko V. M. Sufficient conditions of reducibility in the category of monomial matrices over a commutative local ring / V. M. Bondarenko, M. Yu. Bortos // Nauk. Visn. Uzhgorod Univ. Ser. Mat. Inform. – 2017. – Vol. **30**, №1. – P. 11–24.
8. Bondarenko V. M. Indecomposable and isomorphic objects in the category of monomial matrices over a local ring / V. M. Bondarenko, M. Yu. Bortos // Ukr. math. journal. – 2017. – **69**, №7. – P. 889–904.
9. Bortos M. Yu. Irreducibility of matrices of some form over commutative rings / M. Yu. Bortos // Student Scientific Conference of Faculty of Mathematics of UzhNU: Uzhgorod, April 2013: Collection of works. Series “Mathematics and Applied Mathematics”. – Uzhgorod, 2013. – P. 8.
10. Tylyshchak A. On Reducibility of Monomial Matrices over Commutative Local Rings / A. Tylyshchak, M. Bortos // 9th International Algebraic Conference in Ukraine: L’viv, July 8-13, 2013: Book of Abstracts. – L’viv, 2013. – P. 201.
11. Bortos M. Yu. Polynomial matrices of a special form over commutative local rings / М. Ю. Бортос // XV International scientific Mykhailo Kravchuk conference: Kyiv, 15-17 May, 2014: Conference materials II (Algebra. Geometry. Analysis). – Kyiv, 2014. – P. 54.
12. Bortos M. Yu. On Monomial Matrices over Principal Ideal Domains / M. Yu. Bortos, R. F. Dinis // International Algebraic Conference dedicated to 100th anniversary of L. A. Kaluzhnin: Kyiv, July 7-12,

- 2014: Book of Abstracts. – Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, 2014. – P. 21.
13. Bortos M. Yu. On similarity of monomial matrices over commutative rings / M. Ю. Бортос // International Conference of Young Mathematicians: Kyiv, June 3-6, 2015: Abstracts – Kyiv, 2015. – P. 28.
 14. Bortos M. Yu. On a sufficient condition for reducibility of monomial matrices / M. Yu. Bortos // X International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd: Odessa, August 20-27, 2015: Abstracts. – Odessa, 2015. – P. 26.
 15. Bortos M. Yu. On indecomposable objects of the category of monomial matrices over a commutative local ring / M. Yu. Bortos // International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100th anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu. O. Mitropolskiy (1917-2008): Kyiv, June 7-10, 2017: Abstracts. – Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2017. – P. 9.
 16. Bondarenko V. M. On isomorphic objects of the category of monomial matrices over a commutative local ring / V. M. Bondarenko, M. Yu. Bortos // 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko: Kyiv, July 3-7, 2017: Abstracts. – Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2017. – P. 27.

Зміст

Анотація	2
Перелік умовних позначень	18
ВСТУП	19
1 ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ	25
1.1. Категорії	25
1.1.1. Поняття категорії. Приклади.	25
1.1.2. Основні типи морфізмів.	28
1.2. Категорії Круля-Шмідта	31
1.3. Елементарні перетворення матриць	34
1.4. Висновки до розділу	38
2 ІЗОМОРФІЗМ ТА НЕРОЗКЛАДНІСТЬ ОБ'ЄКТІВ В КАТЕГОРІЯХ МОНОМІАЛЬНИХ МАТРИЦЬ	39
2.1. Означення і позначення, пов'язані з кільцем	39
2.2. Означення категорій мономіальних матриць	40
2.3. Приклади обчислення морфізмів в категорії мономіальних матриць	40
2.4. Ізоморфізм та нерозкладність об'єктів в сильній категорії мо- номіальних матриць	44
2.4.1. Критерій ізоморфізму об'єктів	44
2.4.2. Нерозкладні об'єкти.	44

	15
2.4.3. Канонічно циклічні матриці.	46
2.4.4. Канонічно ланцюгові матриці.	48
2.5. Нерозкладні об'єкти категорії мономіальних матриць	49
2.5.1. Критерій розкладності в термінах ідемпотентних матриць.	50
2.5.2. Частинний випадок (для канонічно циклічних матриць).	51
2.5.3. Частковий порядок на послідовностях.	53
2.5.4. Випадок неперіодичної вагової послідовності.	54
2.5.5. d -Зведені канонічно циклічні матриці.	56
2.5.6. Випадок періодичної вагової послідовності.	57
2.5.7. Нерозкладність канонічно ланцюгових матриць. . . .	59
2.6. Ізоморфізм канонічно циклічних матриць в категорії мономіальних матриць	60
2.6.1. Частковий порядок на послідовностях (продовження).	60
2.6.2. Критерій подібності.	61
2.7. Ізоморфізм канонічно ланцюгових матриць в категорії мономіальних матриць	65
2.8. Загальна теорема про ізоморфізм об'єктів в категорії мономіальних матриць	66
2.9. Зауваження	66
2.10. Висновки до розділу	67
3 ЗАГАЛЬНІ ТВЕРДЖЕННЯ ПРО НЕЗВІДНІ ТА ЗВІДНІ	
МОНОМІАЛЬНІ МАТРИЦІ ДОВІЛЬНОЇ ВАГИ	68
3.1. Додаткові означення і позначення	68
3.2. Критерії незвідності для канонічно циклічних матриць малих порядків	70
3.2.1. Формулювання критеріїв.	70
3.2.2. Доведення критерія 3.1.	71

3.2.3.	Доведення критерія 3.2.	75
3.2.4.	Контрприклад.	84
3.3.	Загальна необхідна умова незвідності канонічно циклічних матриць	85
3.3.1.	Формулювання теореми.	85
3.3.2.	Доведення теореми 3.12.	85
3.4.	Висновки до розділу	93

4 ЗАГАЛЬНІ ТВЕРДЖЕННЯ ПРО НЕЗВІДНІ ТА ЗВІДНІ МОНОМІАЛЬНІ МАТРИЦІ МАЛОЇ ВАГИ

94

4.1.	Критерій Ейзенштейна-Дюма і незвідність матриць	94
4.1.1.	Області з однозначним розкладом.	94
4.1.2.	Критерій Ейзенштейна	96
4.1.3.	Багатокутники Ньютона і узагальнення критерія Ейзенштейна.	96
4.2.	Критерій незвідності для областей з однозначним розкладом	98
4.3.	Спадкова звідність канонічно циклічних матриць	98
4.3.1.	Критерій спадкової звідності для комутативних локальних кілець головних ідеалів.	98
4.3.2.	Слабко спадкова звідність канонічно циклічних матриць.	101
4.4.	Висновки до розділу	103

5 НЕЗВІДНІСТЬ ТА ЗВІДНІСТЬ МОНОМІАЛЬНИХ МАТРИЦЬ ВЕЛИКОЇ ВАГИ

104

5.1.	Необхідні умови незвідності, пов'язані із заданою підпоследовністю довжини 6 визначальної послідовності	105
5.1.1.	Випадок $t^2 = 0$	105
5.1.2.	Загальний випадок.	111
5.2.	Достатні умови $(*, 2)$ -звідності	117
5.2.1.	Випадок $t^2 = 0$	117

5.2.2.	Випадок $t^m = 0$	125
5.3.	Достатні умови $(*, 3)$ -звідності	134
5.3.1.	Випадок $t^2 = 0$	134
5.3.2.	Випадок $t^m = 0$	143
5.4.	Теореми про 2-спадкову звідність	151
5.4.1.	Випадок $t^2 = 0$	151
5.4.2.	Випадок $t^m = 0$	158
5.5.	Висновки до розділу	164
ВИСНОВКИ		165
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ		166
ДОДАТКИ		176

Перелік умовних позначень

K	комутативне кільце;
K^*	група оборотних елементів кільця K ;
R	радикал кільця K ;
$w(x)$	вага елемента $x = \varepsilon t^s \in R$;
$l(x)$	ступінь нільпотентності елемента x ;
m	ступінь нільпотентності елемента $t \in R$;
$\prec_{\bar{v}}$	частковий порядок для послідовності $\bar{v}$;
$Mmat(K)$	категорія мономіальних матриць над K ;
$Mmat_0(K)$	сильна категорія мономіальних матриць над K ;
$M(\bar{a}) =$ $M(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)$	канонічно циклічна матриця з визначальною послідовністю $\bar{a} = (a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)$;
$N(\bar{a}) =$ $= N(a_1, \dots, a_{n-1})$	канонічно ланцюгова матриця з визначальною послідовністю $\bar{a} = (a_1, \dots, a_{n-1})$;
$M_t(\bar{a}) =$ $= M_t(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)$	канонічно циклічна матриця при фіксованому t ;
$M_t(\bar{w}, \varepsilon)$	зведена канонічно циклічна матриця;
$\Phi_{n_d}(\varepsilon)$	d -визначальна клітина Фробеніуса;
$M_{dt}(\bar{w}_d, \varepsilon)$	d -зведена канонічно циклічна матриця;
$P_{ij}(a)$	додавання i -го рядка матриці, помноженого на елемент $a \in K$, до її j -го рядка;
$Q_{ij}(a)$	додавання i -го стовпця матриці, помноженого на елемент $a \in K$, до її j -го стовпця;
$[m \xrightarrow{a} s]^+$	композиція перетворень $P_{ms}(a)$ і $Q_{sm}(-a)$;
$[m \xrightarrow{a} s]^-$	композиція перетворень $Q_{ms}(a)$ і $P_{sm}(-a)$.

ВСТУП

Актуальність теми. Дисертаційна робота присвячена вивченню матриць над комутативними кільцями.

Лінійна алгебра над комутативними кільцями розвинута не в такій мірі, як над полями. Окрім технічних труднощів, тут виникають і принципові. В першу чергу мова йде про подібність матриць: задача про опис, з точністю до подібності, матриць над комутативним кільцем, що не є полем, містить в собі класичну нерозв’язну задачу лінійної алгебри про пару матриць над полем вже для локальних кілець головних ідеалів; для областей цілісності це вперше доведено в 1974 р. П. М. Гудивком [1], а для кілець з нільпотентним радикалом — в 1976 р. В. М. Бондаренком [2] (доведення, проведене в статті для кілець класів лишків, автоматично поширюється на загальний випадок). В сучасній термінології такі задачі називаються дикими [3] – [5]. І тому є актуальним вивчення загальних властивостей (в першу чергу близьких до випадку полів), розгляд матриць спеціального вигляду чи матриць над конкретними кільцями, тощо.

Вивченню різних властивостей матриць над кільцями присвячено багато робіт. Дослідження проводилися як для локальних, так і не локальних кілець.

Д. А. Супруненко [6] показав, що дві оборотні матриці розміру $n \times n$ над кільцем класів лишків за модулем числа $m > 1$, взаємно простого з n , подібні тоді і лише тоді, коли вони подібні за модулем кожного простого дільника числа m .

Р. В. Девіс [7] довів, що задача про подібність матриць над кільцем класів лишків $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ (p — просте число) зводиться до аналогічної задачі над полем $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, якщо матриці задовольняють фіксований поліном, який

за модулем p не має кратних коренів.

В. Х. Густафсон [8] показав, що дві матриці розміру $n \times n$ над комутативним регулярним (в сенсі Неймана) кільцем подібні тоді і лише тоді, коли вони мають однаковий характеристичний поліном і матриці $A \otimes E_n - E_n \otimes A$, $B \otimes E_n - E_n \otimes B$, $A \otimes E_n - E_n \otimes B$ мають однаковий ранг (E_n — одинична матриця розміру $n \times n$); цей результат узагальнює аналогічний (раніше отриманий) результат для полів [9].

Р. М. Гуральнік [10] довів, що матриці A і N розміру $n \times n$ над редукованим комутативним кільцем, кожний скінченно породжений проективний модуль над яким є вільним, подібні, якщо вони подібні за модулем довільного простого ідеалу і N — нільпотентна матриця, що має вигляд канонічної форми Жордана.

У роботах [11] – [16] розглядається задача про опис (з точністю до подібності) матриць розміру 2×2 , 3×3 і 4×4 над деякими комутативними кільцями.

Окрім вказаних робіт, див., наприклад, роботи [17] – [30], а також відомі монографії Б. Р. Макдоналда [31] і В. К. Брауна [32].

Нерозкладність та подібність матриць вивчалися, як правило, лише у зв'язку з матричними зображеннями скінченних груп і в основному циклічних груп (тобто у випадках, коли матриці задовольняють відповідні поліноміальні співвідношення); див. у зв'язку з цим (окрім [1] і [2]) роботи [33] – [49].

У дисертації вивчаються мономіальні матриці над комутативними кільцями. При цьому розглядаються дві природні категорії мономіальних матриць.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тематика дисертаційної роботи пов'язана з науковими дослідженнями кафедри алгебри і топології Інституту математики НАН України — тема "Розробка й застосування нових методів у теорії зображень, аб-

страктній алгебрі та алгебраїчній геометрії" (номер державної реєстрації 0116U003125).

Мета і задачі дослідження. *Метою* дослідження є опис нерозкладних та ізоморфних об'єктів сильної та звичайної категорій мономіальних матриць над комутативними локальними кільцями головних ідеалів, а також отримання необхідних і достатніх умов звідності мономіальних матриць над комутативними локальними кільцями.

Об'єктом дослідження є матриці над локальними кільцями та категорії таких матриць.

Предмет дослідження — залежність нерозкладності, звідності і подібності мономіальних матриць над комутативними локальними кільцями від їх визначальних і вагових послідовностей.

Методи дослідження. *Основними методами*, що використовуються при дослідженнях, є методи теорії зображень та матричних задач, а також стандартні комбінаторні методи.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертації отримано нові теоретичні результати, основними із яких є наступні результати для квадратних мономіальних матриць над довільним комутативним локальним кільцем головних ідеалів:

- Доведена нерозкладність довільної циклічної матриці з неперіодичною ваговою послідовністю та довільної ланцюгової матриці.
- Введено поняття визначальної клітини Фробеніуса циклічної матриці і доведена нерозкладність циклічної матриці з періодичною ваговою послідовністю при умові нерозкладності за модулем радикала визначальної клітини Фробеніуса.
- Отримано критерій ізоморфізму нерозкладних об'єктів сильної категорії мономіальних матриць $\text{Mmat}_0(K)$ як всередині цієї категорії, так і в (більш широкій) категорії мономіальних матриць $\text{Mmat}(K)$.

- Отримано критерії звідності t -циклічних матриць малих розмірів при $t^m = 0, m < 4$.
- Досліджено залежність звідності циклічної матриці від властивостей її ваги і $*$ -коефіцієнта (незалежно від того, мала вага чи велика).
- Отримано критерій спадкової незвідності t -циклічної матриці розміру $n \times n$ з малою вагою (а також довільної циклічної матриці при умові існування кореня n -го степеня із $*$ -коефіцієнта матриці); у випадку не нільпотентного радикала отримано критерій загальної незвідності.
- Установлено зв'язок між спадковою та слабо спадковою звідністю.
- Встановлено низку необхідних і достатніх умов (окремо) звідності циклічної матриці з великою вагою.
- Доведено теореми про спадкову звідність циклічної матриці з великою вагою, вагова послідовність якої містить конкретні зв'язні підпослідовності.

При цьому достатні умови звідності справедливі (після відповідних уточнень) і у випадку довільного комутативного локального кільця.

Результати, що стосуються безпосередньо нерозкладності чи звідності циклічних матриць, узагальнюють результати Р. Ф. Динис для матриць з 2-однорідними визначальними чи ваговими послідовностями (у тих випадках, коли 2-однорідні послідовності допускаються умовами тверджень як частинні випадки).

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер. Отримані в ній результати, а також відповідні методи, можуть бути використані в теорії матричних зображень і лінійній алгебрі над комутативними кільцями та в тих областях математики чи інших наук, в яких виникають матриці над кільцями.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертаційної роботи отримано здобувачем самостійно. У статті [51] з О. А. Тилищак та статтях [53], [54], [56] і [57] з науковим керівником останнім належать пос-

тановки задач і загальні ідеї щодо методів їх розв'язання, а практична реалізація та ряд конкретних ідей належать здобувачеві. У статті [50] здобувачу належать твердження 1 і теореми 1, 2, а у статті [55] — всі результати пп. 2.2 і 2.3, що стосуються найзагальніших випадків; формулювання і доведення цих результатів (обох статей) в частинному випадку, коли послідовність, яка задає мономіальну матрицю, є 2-однорідною, належать Р. Ф. Динис. Зі статей, виконаних у співавторстві, у дисертацію включені лише результати, які належать здобувачу.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи оприлюднено на наукових конференціях та наукових семінарах:

- Студентській науковій конференції математичного факультету УжНУ (Ужгород, квітень 2013);
- IX Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні (м. Львів, 8-13 липня 2013 р.);
- П'ятнадцятій Міжнародній науковій конференції імені академіка Михайла Кравчука (м. Київ, 15-17 травня 2014 р.);
- Міжнародній алгебраїчній конференції, присвяченій 100-річчю від дня народження Л. А. Калужніна (м. Київ, 7-12 липня 2014 р.);
- Міжнародній конференції молодих математиків (м. Київ, 3-6 червня 2015 р.);
- X Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні, присвяченій 70-річчю Ю. А. Дрозда (м. Одеса, 20-27 серпня 2015 р.);
- Міжнародній конференції молодих математиків, присвяченій 100-річчю Ю. О. Митропольському (м. Київ, 7-10 червня 2017 р.);
- XI Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні, присвяченій 75-річчю В. В. Кириченка (м. Київ, 3-7 липня 2017 р.);
- семінарі кафедри алгебри Ужгородського національного університету (м. Ужгород, керівник — кандидат фіз-мат наук, доцент І. В. Шапочка, 12 травня 2016 р.);

— алгебраїчному семінарі Інституту математики НАН України (м. Київ, керівник — доктор фіз-мат. наук, член-кореспондент НАН України Ю. А. Дрозд, 2016 – 2017 рр.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 16 наукових працях, із них 5 — у фахових виданнях із Переліку, затвердженого Міністерством освіти і науки України ([51] – [54], [56]), 3 — в наукових фахових виданнях, що відображаються в міжнародній наукометричній базі даних Scopus [50], [55], [57], 1 — в матеріалах студентської конференції [58], 7 — у матеріалах міжнародних наукових конференцій ([59] – [65]).

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається із анотації, переліку умовних позначень, вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків. Загальний обсяг дисертації — 179 сторінок. Обсяг основного тексту дисертації — 147 сторінок. Список використаних джерел займає 10 сторінок (81 найменування). Додатки займають 4 сторінки і містять список публікацій за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

Автор щиро вдячний своєму науковому керівнику професору В. М. Бондаренку за постановку задач, цінні поради та постійну увагу до роботи.

Розділ 1

ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ

1.1. Категорії

При викладенні цього підрозділу ми притримуємось книги [66].

1.1.1. Поняття категорії. Приклади. Поняття категорії та функтора були введені в математику С. Ейленбергом і С. Маклейном у 1944 році, в зв'язку з проблемою аксиматизації теорії груп гомологій і комологій топологічних просторів. Ці поняття поступово знайшли застосування і в інших областях математики.

Будемо говорити, що задана *категорія* $\mathcal{C}$, якщо задано клас $Ob\mathcal{C}$ елементів, які називаємо об'єктами, причому:

1. Для кожної пари об'єктів (A, B) із $\mathcal{C}$ задана множина $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, яку називаємо *множиною морфізмів* A в B (замість $u \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ ми будемо часто писати $u : A \rightarrow B$ або $A \xrightarrow{u} B$).
2. Для кожної трійки об'єктів (A, B, C) із $\mathcal{C}$ задано відображення

$$\mu : Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \times Hom_{\mathcal{C}}(B, C) \rightarrow Hom_{\mathcal{C}}(A, C)$$

(образ $\mu(u, v)$ пари (u, v) , де $u \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, $v \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$ позначається через $v \circ u$ або vu і називається *композицією морфізмів* u і v .)

3. Множина $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ і композиція морфізмів задовільняють наступні аксіоми:

a) композиція асоціативна: для кожної трійки морфізмів $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} D$

$$w(vu) = (wv)u;$$

b) для кожного об'єкта A із $\mathcal{C}$ існує морфізм $1_A : A \rightarrow A$ (цей морфізм називатимемо *тотожнім морфізмом* або *одиницею об'єкта* A), такий, що $1_A u = u$ і $v 1_A = v$ для будь-яких морфізмів $B \xrightarrow{u} A, A \xrightarrow{v} C$;

c) якщо пари $(A, B), (A', B')$ різні, то перетин множин $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ і $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A', B')$ порожній.

Приклади категорій

1. Категорія $\mathcal{E}ns$. Об'єкти цієї категорії — множини. Для будь-яких двох множин A, B під $\text{Hom}_{\mathcal{E}ns}(A, B)$ розуміємо множину всіх відображень A в B , а під композицією $(f, g) \rightarrow gf$ — довільну композицію відображень.
2. Категорія $\mathcal{T}op$. Об'єкти цієї категорії — топологічні простори. $\text{Hom}_{\mathcal{T}op}(X, Y)$ для будь-яких двох топологічних просторів є множина всіх неперервних відображень X в Y . Під композицією розуміємо довільну композицію відображень (композиція двох неперервних відображень також неперервна).
3. Категорія $\mathcal{G}$. Об'єкти категорії $\mathcal{G}$ — групи. $\text{Hom}_{\mathcal{G}}(A, B)$ для будь-яких двох груп A, B існує множина всіх гомоморфізмів групи A в групу B . Під композицією розуміємо довільну композицію гомоморфізмів.
4. Категорія $\mathcal{A}l$. Об'єкти цієї категорії — абелеві групи, а морфізми — гомоморфізми.

5. Категорія ${}_{\Lambda}\mathcal{C}$. Нехай Λ — кільце з одиницею. Об'єктами категорії ${}_{\Lambda}\mathcal{C}$ є унітарні ліві Λ -модулі, морфізмами — гомоморфізми Λ -модулів, а композицією — довільна композиція гомоморфізмів.

Аналогічно визначається категорія $\mathcal{C}_{\Lambda}$ правих Λ -модулів.

Для кожної категорії $\mathcal{C}$ визначається *дуальна категорія* $\mathcal{C}^{\circ}$ наступним чином:

- (I) Об'єкти категорії $\mathcal{C}^{\circ}$ — ті ж, які в категорії $\mathcal{C}$, тобто $Ob\mathcal{C} = Ob\mathcal{C}^{\circ}$.
- (II) Множина морфізмів $Hom_{\mathcal{C}^{\circ}}(A, B)$ за означенням буде $Hom_{\mathcal{C}}(B, A)$.
- (III) Композиція

$$Hom_{\mathcal{C}^{\circ}}(A, B) \times Hom_{\mathcal{C}^{\circ}}(B, C) \rightarrow Hom_{\mathcal{C}^{\circ}}(A, C)$$

визначається так: якщо

$$u \in Hom_{\mathcal{C}^{\circ}}(A, B) \text{ і } v \in Hom_{\mathcal{C}^{\circ}}(B, C),$$

то

$$v \circ_{\mathcal{C}^{\circ}} u = u \circ_{\mathcal{C}} v.$$

Зрозуміло, що $(\mathcal{C}^{\circ})^{\circ} = \mathcal{C}$.

Можливість асоціювати з кожною категорією $\mathcal{C}$ дуальну категорію $\mathcal{C}^{\circ}$ дозволяє дуалізувати кожне поняття або твердження, яке відноситься до категорії $\mathcal{C}^{\circ}$ (співставляючи їй дуальне поняття або твердження, яке відноситься до категорії $\mathcal{C}$).

Підкатегорією категорії $\mathcal{C}$ називають категорію $\mathcal{C}'$, яка задовільняє умовам:

- (I) $Ob\mathcal{C}' \subset Ob\mathcal{C}$.
- (II) $Hom_{\mathcal{C}'}(A, B) \subset Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$.
- (III) Композиція морфізмів в $\mathcal{C}'$ індукується їх композицією в $\mathcal{C}$.

(IV) Всі тотожні морфізми із $\mathcal{C}'$ — тотожні морфізми в $\mathcal{C}$.

Підкатегорія $\mathcal{C}'$ категорії $\mathcal{C}$ називається *повною*, якщо

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$$

для кожної пари (A, B) об'єктів із $\mathcal{C}'$.

1.1.2. Основні типи морфізмів. Нехай $u : A \rightarrow B$ — морфізм категорії $\mathcal{C}$. Для кожного об'єкта X категорії $\mathcal{C}$ розглянемо відображення

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, B), \quad (1.1)$$

яке співставляє будь-якому елементу $v \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A)$ елемент $uv \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, B)$.

Морфізм u називається *мономорфізмом*, якщо відображення (1.1) є ін'єктивним для будь-якого об'єкта X із $\mathcal{C}$.

Приклади.

1. Нехай $\mathcal{C}$ — одна із категорій $\mathcal{E}ns$ або ${}_{\Lambda}\mathcal{C}$ (де Λ — довільне кільце з одиницею) і $u : A \rightarrow B$ — морфізм із $\mathcal{C}$. Наступні два твердження рівносильні:

(а) u — мономорфізм;

(б) u ін'єктивний, тобто для довільних $x_1, x_2 \in A$ $x_1 \neq x_2$ випливає, що $u(x_1) \neq u(x_2)$.

2. $1_A : A \rightarrow A$ є мономорфізмом для будь-якого об'єкта A довільної категорії $\mathcal{C}$.

Твердження 1.1. *Композиція двох мономорфізмів є мономорфізмом.*

Твердження 1.2. *Якщо vi — мономорфізм, то u — мономорфізм.*

Нехай тепер $u : A \rightarrow B$ — довільний морфізм і X — довільний об'єкт категорії $\mathcal{C}$; розглянемо відображення

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X), \quad (1.2)$$

яке співставляє кожному елементу $v \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X)$ елемент $vu \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$.

Морфізм називається *епіморфізмом*, якщо відображення (1.2) ін'єктивне для будь-якого об'єкта X категорії $\mathcal{C}$.

Очевидно, u — епіморфізм тоді і лише тоді, коли, розглядаючи його як елемент із $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{\circ}}(B, A)$, є мономорфізмом. Іншими словами, поняття епіморфізма отримується дуалізацією поняття мономорфізма.

Твердження 1.3. *Композиція двох епіморфізмів є епіморфізмом.*

Твердження 1.4. *Якщо vu — епіморфізм, то v — епіморфізм.*

Приклади.

1. В категоріях $\mathcal{E}ns$ і ${}_{\Lambda}\mathcal{C}$ поняття епіморфізма і відображення на або гомоморфізма на співпадають. Розглянемо випадок для категорії ${}_{\Lambda}\mathcal{C}$. Припустимо, що $u : A \rightarrow B$, де A, B Λ -модулі, — гомоморфізм на. Якщо гомоморфізми $v, w : B \rightarrow C$ різні, то існує хоча б один елемент $x \in B$, такий, що $v(x) \neq w(x)$. Але існує хоча б один елемент $y \in A$, для якого $u(y) = x$. Тому

$$(vu)(y) = v(u(y)) = v(x) \neq w(x) = w(u(y)) = (wv)(y),$$

тобто $vu \neq wv$, отже, u — епіморфізм.

Навпаки, припустимо, що $u : A \rightarrow B$ — епіморфізм і $u(A)$ — власний підмодуль модуля. Нехай C — пряма сума двох Λ -модулів B_1 і B_2 , які ізоморфні модулю B , і $v_i : B \rightarrow C$ ($i = 1, 2$) — композиція ізоморфізма B на B_i і канонічної ін'єкції $B_i \rightarrow C$. Нехай, далі, D — фактормодуль модуля C по підмодулю, яка породжується з усіма елементами вигляду $v_1(x) - v_2(x)$, де $x \in u(A)$, і $w : C \rightarrow D$ — канонічна проекція. Тоді $wv_1 \neq wv_2$ і $(wv_1)u = (wv_2)u$ суперечать тому, що u — епіморфізм. Отже, $u(A) = B$, тобто u — гомоморфізм на.

2. Нехай $\mathcal{C}$ — категорія віддільних топологічних абелевих груп з неперервними гомоморфізмами в якості морфізмів. Для морфізма $u : A \rightarrow B$ із $\mathcal{C}$ такі твердження рівносильні:

(а) u — епіморфізм,

(б) $\overline{u(A)} = B$.

3. $1_A : A \rightarrow A$ є епіморфізмом для будь-якого об'єкта A довільної категорії $\mathcal{C}$.

Морфізм $u : A \rightarrow B$ у довільному категорії $\mathcal{C}$, який одночасно є мономорфізмом і епіморфізмом, називається *біморфізмом*.

Морфізм $u : A \rightarrow B$ називається ізоморфізмом, якщо існує такий морфізм $v : B \rightarrow A$, що

$$vu = 1_A, \quad uv = 1_B.$$

Твердження 1.5. *Кожний ізоморфізм є біморфізмом.*

Зауваження. Існують біморфізми, які не є ізоморфізмами. Наприклад, розглянемо в категорії віддільних топологічних абелевих груп морфізм $u : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$, де $\mathbb{Q}$ — адитивна топологічна група раціональних чисел, $\mathbb{R}$ — адитивна топологічна група дійсних чисел і u — тотожне вкладення $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$. Використовуючи приклад 2, легко перевірити, що u — біморфізм. З іншого боку, не будучи відображенням на, u не може бути ізоморфізмом.

Твердження 1.6. *Композиція двох ізоморфізмів є ізоморфізмом.*

Нехай A — об'єкт категорії $\mathcal{C}$. Розглянемо мономорфізми $u : U \rightarrow A$ і $v : V \rightarrow A$. Будемо говорити, що мономорфізм *мажорує* мономорфізм v , і писати $u \geq v$ (або $v \leq u$), якщо існує такий морфізм $v_1 : V \rightarrow U$, що $uv_1 = v$.

Якщо такий морфізм v_1 існує, то, оскільки v — мономорфізм, із твердження 1.2 випливає, що v_1 — мономорфізм, а оскільки u — мономорфізм, то із означення мономорфізма випливає, що v_1 однозначно визначається.

Визначене, таким чином, відношення « $\geq$ » рефлексивне і транзитивне.

Припустимо тепер, що $v \geq u$. В цьому випадку існують однозначно визначені ізоморфізми $u_1 : U \rightarrow V$ і $v_1 : V \rightarrow U$, такі, що $v = uv_1$, $u = vu_1$. Дійсно, із вище викладеного випливає, що існують мономорфізми u_1 і v_1 , які задовільняють цим співвідношенням. Але тоді $v = v(u_1v_1)$, $u = u(v_1u_1)$, і оскільки u і v — мономорфізми, то $u_1v_1 = 1_V$, $v_1u_1 = 1_U$.

Дві мономорфізми $u : U \rightarrow A$, $v : V \rightarrow A$, для яких $u \geq v$ і $v \geq u$, будемо називати *еквівалентними*.

В кожному класі еквівалентних мономорфізмів виберемо по представника (використовуючи, наприклад, аксіому вибору). Отримані, таким чином, мономорфізми будемо називати *підоб'єктами об'єкта A* . Таким чином, підоб'єкти об'єкта A — не просто об'єкти категорії $\mathcal{C}$, а деякі пари вигляду (U, u) , де $u : U \rightarrow A$ — мономорфізм; і цей мономорфізм називається *канонічним мономорфізмом U в A* . Але, щоб не ускладнити записи, будемо замість (U, u) писати просто U .

Дуальним способом визначаються поняття *фактороб'єкта* і *канонічного епіморфізма*.

Відмітимо, що відношення $\geq$ між підоб'єктами або фактороб'єктами є вже відношенням (частинного) порядку.

Приклад. Нехай A — об'єкт категорії $\mathcal{A}l$. Вибір, який входить в означення підоб'єкта, можна визначити так, що кожний підоб'єкт об'єкта A буде мати вигляд (A_1, α) , де A_1 — підмножина множини A , а $\alpha(x) = x$ для всіх $x \in A_1$. Іншими словами, підоб'єкти в $\mathcal{A}l$ ототожнюються із звичайними підгрупами.

1.2. Категорії Круля-Шмідта

Нехай $\mathcal{C}$ — категорія.

Морфізм $f : X \rightarrow X$ називається *ідемпотентом*, якщо $f^2 = f$.

Кажуть, що ідемпотент $f : X \rightarrow X$ *розщеплюється*, якщо існує об'єкт Y та морфізми $g : X \rightarrow Y$ і $h : Y \rightarrow X$ такі, що $gh = f$, $hg = id_Y$.

Кодобутком або *прямою сумою* об'єктів $\{X_i : i \in I\}$ категорії $\mathcal{C}$ називається об'єкт Y разом з морфізмами $f_i : X_i \rightarrow Y, i \in I$ такий, що для довільного набору морфізмів $g_i : X_i \rightarrow Z, i \in I$ існує єдиний морфізм $h : Y \rightarrow Z$ такий, що $f_i h = g_i$ для всіх $i \in I$, тобто, є комутативними наступні діаграми ($i \in I$):

$$\begin{array}{ccc} X_i & & \\ \downarrow f_i & \searrow g_i & \\ Y & \xrightarrow{h} & Z \end{array}$$

кодобуток позначають $Y = \coprod_{i \in I} X_i$, або $Y = X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_n$.

Категорія $\mathcal{C}$ називається *категорією над полем k* , або *k -лінійною категорією*, якщо для кожної пари об'єктів $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ на множині морфізмів $\mathcal{C}(X, Y)$ введена структура векторного простору над полем k таким чином, що

1) відображення композиції $\mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \rightarrow \mathcal{C}(X, Z)$ є k -білінійним (для кожної трійки об'єктів $X, Y, Z \in \text{Ob } \mathcal{C}$);

2) існує нульовий об'єкт 0 такий, що $\mathcal{C}(0, 0)$ є нульовим векторним простором.

3) для кожного скінченного набору об'єктів категорії $X_1, X_2, \dots, X_n$ існує кодобуток $\coprod_{i=1}^n X_i$.

Категорія $\mathcal{C}$ називається *адитивною*, якщо

1) для кожної пари об'єктів X, Y на множині $\mathcal{C}(X, Y)$ введена структура абелевої групи таким чином, що відображення композиції морфізмів

$$\mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \rightarrow \mathcal{C}(X, Z)$$

є білінійним відображенням, тобто,

$$f(g + g') = fg + fg', (f + f')g = fg + f'g;$$

2) існує нульовий об'єкт $0 \in \text{Ob } \mathcal{C}$ такий, що $\mathcal{C}(0, 0) = \{0\}$;

3) для кожного скінченного набору об'єктів категорії $X_1, X_2, \dots, X_n$ існує кодобуток $\coprod_{i=1}^n X_i$.

Нехай $\mathcal{C}$ — адитивна категорія, або категорія над полем k і $f : X \rightarrow Y$ — морфізм. *Ядром* f називається об'єкт K разом з морфізмом $i : K \rightarrow X$ такий, що

$$1) \quad if = 0;$$

2) для довільного морфізму $g : Z \rightarrow X$, такого, що $gf = 0$, існує єдиний морфізм $h : Z \rightarrow K$, для якого є комутативною наступна діаграма:

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{g} & X \xrightarrow{f} Y \\ \downarrow h & \nearrow i & \\ K & & \end{array}$$

Коядром f називається об'єкт C разом з морфізмом $j : Y \rightarrow C$ такий, що

$$1) \quad fj = 0;$$

2) для довільного морфізму $g : Y \rightarrow Z$, такого, що $fg = 0$, існує єдиний морфізм $h : C \rightarrow Z$, для якого є комутативною наступна діаграма:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{j} & C \\ & & \searrow g & & \downarrow h \\ & & & & Z \end{array}$$

Категорією Крулля-Шмідта називається категорія $\mathcal{C}$ над полем k , якщо вона адитивна і кожен її ідемпотент розщеплюється.

Об'єкт X адитивної категорії $\mathcal{C}$ називається *розкладним*, якщо існують ненульові об'єкти Y, Z такі, що $X \simeq Y \oplus Z$ і *нерозкладним* в іншому випадку.

В категорії Крулля-Шмідта справедлива однозначність розкладу об'єктів в пряму суму нерозкладних.

Сформульовані в цьому підрозділі теоретичні відомості можна прочитати в [67], [68].

1.3. Елементарні перетворення матриць

При викладенні цього підрозділу ми притримуємось монографії [69].

Одиничну матрицю (довільного розміру) позначаємо через E ; $E(d)$ позначає одиничну матрицю розміру $d \times d$. Ранг матриці M позначаємо $\text{rank}(M)$, а транспоновану до M матрицю — M^T .

Нехай M — матриця розміру $m \times n$ над полем k . *Елементарними перетвореннями рядків* називають наступні перетворення:

- i) множення i -го рядка на ненульовий елемент $x \in k$;
- ii) додавання i -го рядка, помноженого на елемент $x \in k$, до j -го рядка ($i \neq j$);
- iii) перестановка i -го та j -го рядків ($i \neq j$).

Перетворення типу i), ii) і iii) позначаємо відповідно $P_x(i)$, $P_x(i, j)$ і $P(i, j)$.

Аналогічним чином дають означення елементарних перетворень стовпців типу i), ii) і iii) (слово “рядок” потрібно замінити словом “стовпець”). Такі перетворення позначаємо відповідно $Q_x(i)$, $Q_x(i, j)$ і $Q(i, j)$.

Зауважимо, що перетворення типу iii) можна не розглядати, бо вони є композицією перетворень типу i) і ii).

Матрицю, отриману після застосування до M елементарного перетворення R , будемо позначати через M^R .

Лема 1.7. *Для кожного елементарного перетворення рядків (відповідно стовпців) R існує елементарне перетворення рядків (відповідно стовпців) R' , таке, що*

$$(M^R)^{R'} = (M^{R'})^R = M;$$

перетворення R' називають оберненим до R і позначають R^{-1} .

Дійсно,

$$\begin{aligned} [P_x(i)]^{-1} &= P_{1/x}(i), & [Q_x(i)]^{-1} &= Q_{1/x}(i), \\ [P_x(i, j)]^{-1} &= P_{-x}(i, j), & [Q_x(i, j)]^{-1} &= Q_{-x}(i, j), \\ [P(i, j)]^{-1} &= P(i, j), & [Q(i, j)]^{-1} &= Q(i, j). \end{aligned}$$

Дві матриці однакового розміру називають *еквівалентними*, якщо від однієї з них можна перейти до другої за допомогою елементарних перетворень рядків і стовпців.

Добре відоме наступне твердження.

Твердження 1.8. *Довільна матриця M над полем k еквівалентна матриці*

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де E — одинична матриця розміру $r \times r$, $r = \text{rank}(M)$. Якщо рядки (відповідно стовпці) матриці M лінійно незалежні, то достатньо застосовувати елементарні перетворення лише стовпців (відповідно рядків).

З елементарними перетвореннями рядків і стовпців пов'язані матриці спеціального вигляду, які називають елементарними.

Елементарними матрицями розміру $s \times s$ називають наступні матриці:

1) для довільного $i = 1, \dots, s$ та $x \in k$ матриця

$$\mathcal{E}_x(i) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

де x стоїть на місці (i, i) ;

2) для довільних $i, j = 1, \dots, s$, таких, що $i < j$, та $x \in k$ матриця

$$\mathcal{E}_x(i, j) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & x & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

де x стоїть на місці (i, j) ;

2') для довільних $i, j = 1, \dots, s$, таких, що $i > j$, та $x \in k$ матриця

$$\mathcal{E}_x(i, j) = [\mathcal{E}_x(j, i)]^T \quad (\text{див. 2));}$$

3) для довільних $i, j = 1, \dots, s$, таких, що $i \neq j$, матриця

$$\mathcal{E}(i, j) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

де одиничні елементи, що перебувають поза межами головної діагоналі, стоять на місцях (i, j) і (j, i) (на головній діагоналі стоїть лише два нульових елемента).

Ми говоримо, що елементарна матриця $\mathcal{E}$ відповідає елементарному перетворенню рядків P (відповідно елементарному перетворенню стовпців Q) і навпаки, якщо відповідні їм додаткові символи в позначеннях збігаються, тобто коли має місце один із наступних випадків:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \mathcal{E}_x(i), & P &= P_x(i) & (\text{відповідно } Q &= Q_x(i)); \\ \mathcal{E} &= \mathcal{E}_x(i, j), & P &= P_x(i, j) & (\text{відповідно } Q &= Q_x(i, j)); \\ \mathcal{E} &= \mathcal{E}(i, j), & P &= P(i, j) & (\text{відповідно } Q &= Q(i, j)). \end{aligned}$$

Безпосередньо з означень випливає наступна лема.

Лема 1.9. *Нехай R — елементарне перетворення матриці M і $\mathcal{E}$ — відповідна йому елементарна матриця. Тоді*

- а) якщо R — елементарне перетворення стовпців, то $M^R = M\mathcal{E}$;
- б) якщо R — елементарне перетворення рядків, то $M^R = \mathcal{E}^T M$.

Із лем 1.7, 1.9 і твердження 1.8 випливає наступна лема.

Лема 1.10. *Довільна оборотна матриця є добутком елементарних матриць.*

Із двох останніх лем і твердження 1.8 маємо наступне добре відоме твердження.

Твердження 1.11. *Матриця N еквівалентна матриці M тоді і лише тоді, коли існують оборотні матриці X і Y , такі, що $N = XMY$. При цьому у випадку, коли рядки (відповідно стовпці) матриці M лінійно незалежні, матрицю X (відповідно Y) можна вважати одиничною.*

Із леми 1.9 випливає, що взаємно оберненим елементарним перетворенням рядків (відповідно стовпців) відповідають взаємно обернені елементарні матриці. У випадку, коли M — квадратна матриця і P (відповідно Q) — елементарне перетворення її рядків (відповідно стовпців), ми називаємо перетворення P і Q *взаємно оберненими*, якщо взаємно оберненими є відповідні їм елементарні матриці. Легко побачити, що при цьому можливі такі варіанти:

$$\begin{aligned} P &= P_x(i), & Q &= Q_{1/x}(i), \\ P &= P_x(i, j), & Q &= Q_{-x}(j, i), \\ P &= P(i, j), & Q &= Q(i, j). \end{aligned}$$

1.4. Висновки до розділу

У цьому розділі викладено основні початкові відомості із теорії категорій, мова яких використовується в дисертації, та відомості про елементарні перетворення матриць, які використовуються в останньому розділі дисертації.

Розділ 2

ІЗОМОРФІЗМ ТА НЕРОЗКЛАДНІСТЬ ОБ'ЄКТІВ В КАТЕГОРІЯХ МОНОМІАЛЬНИХ МАТРИЦЬ

2.1. Означення і позначення, пов'язані з кільцем

У дисертації розглядаються лише кільця з одиницею. Протягом цього розділу K позначає комутативне локальне кільце головних ідеалів, що не є полем.

Групу оборотних елементів кільця K (відносно множення) позначатимемо через K^* . Тоді єдиний максимальний ідеал (радикал) R кільця K дорівнює $tK \neq 0$, де t визначається однозначно з точністю до оборотного множника, і будь-який елемент $x \in K$ має вигляд εt^s , де $\varepsilon \in K^*$ і $s \geq 0$. Число s (яке не залежить від вибору t) називаємо *вагою елемента x* і позначаємо через $w(x)$. Елемент ε вже залежить від t ; більш того, навіть при фіксованому t , якщо K не є областю цілісності, він визначається елементом x неоднозначно, а саме $\varepsilon t^s = \varepsilon' t^s$ тоді і лише тоді, коли ε і ε' рівні за модулем $\text{Ann}(t^s) := \{y \in K \mid yt^s = 0\}$, тобто $\varepsilon - \varepsilon' \in \text{Ann}(t^s)$. Ступінь нільпотентності елемента x позначаємо через $l(x)$; якщо x ненільпотентний, то вважаємо $l(x) = \infty$. Аналогічно вводиться позначення $l(R)$. Якщо K — область цілісності, то $l(R) = \infty$, і навпаки.

2.2. Означення категорій мономіальних матриць

Матрицю над K (не обов'язково квадратну) назвемо *мономіальною*, якщо кожний її рядок і кожний її стовпець містить не більше одного ненульового елемента. Квадратну матрицю назвемо *строго мономіальною*, якщо кожний її рядок і кожний її стовпець містить рівно один ненульовий елемент. Строго мономіальна матриця, всі ненульові елементи якої є одиничними, називається *переставною*.

Позначимо через $\text{Mat}(K)$ категорію, об'єктами якої є квадратні матриці над кільцем K , а морфізмами із матриці X в матрицю Y — матриці C такі, що $XC = CY$. Називатимемо її *категорією квадратних матриць над K* . Ізоморфні об'єкти категорії $\text{Mat}(K)$ — це подібні матриці. Повну підкатегорію категорії $\text{Mat}(K)$, множина об'єктів якої складається із мономіальних матриць, позначимо через $\text{Mmat}(K)$ і назвемо *категорією мономіальних матриць над K* . Через $\text{Mmat}_0(K)$ позначимо підкатегорію категорії $\text{Mmat}(K)$ з тими ж самими об'єктами і лише тими морфізмами, що є мономіальними матрицями; назвемо цю категорію *сильною категорією мономіальних матриць над K* .

2.3. Приклади обчислення морфізмів в категорії мономіальних матриць

Зафіксуємо твірний елемент t радикала R і вважаємо, що $R^2 = 0$ (тоді $t^2 = 0$). Множину морфізмів $A \rightarrow B$ в категорії $\text{Mmat}(K)$ позначаємо просто через $\text{Hom}(A, B)$.

Розглянемо наступні об'єкти категорії $\text{Mmat}(K)$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо множини морфізмів $\text{Hom}(A_1, A_2)$ і $\text{Hom}(A_2, A_1)$.

1. $\text{Hom}(A_1, A_2)$. Згідно означення ця множина морфізмів складається із матриць

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

таких, що $A_1 X = X A_2$.

В розгорнутому вигляді ця рівність має наступний вигляд:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \end{pmatrix},$$

Звідси

$$\begin{pmatrix} tx_{31} & tx_{32} & tx_{33} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{12}t & x_{13}t & x_{11} \\ x_{22}t & x_{23}t & x_{21} \\ x_{32}t & x_{33}t & x_{31} \end{pmatrix}.$$

Випишемо відповідні скалярні рівності, позначаючи через (i, j) рівність елементів лівої та правої матриць, що стоять на перетині i -го рядка і j -го стовпця:

$$(1, 1) : tx_{31} = x_{12}t, \quad (1, 2) : tx_{32} = x_{13}t, \quad (1, 3) : tx_{33} = x_{11};$$

$$(2, 1) : x_{11} = x_{22}t, \quad (2, 2) : x_{12} = x_{23}t, \quad (2, 3) : x_{13} = x_{21};$$

$$(3, 1) : x_{21} = x_{32}t, \quad (3, 2) : x_{22} = x_{33}t, \quad (3, 3) : x_{23} = x_{31}.$$

Отже, матриця X буде мати, як легко бачити, наступний вигляд:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_1t \\ y_1t & z_1t & x_1t \end{pmatrix}.$$

Із усіх матриць такого вигляду і складається множина морфізмів із

об'єкта A_1 в A_2 , тобто

$$\text{Hom}(A_1, A_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_1 t \\ y_1 t & z_1 t & x_1 t \end{pmatrix} \right\}.$$

2. $\text{Hom}(A_2, A_1)$. Розглянемо рівність $A_2 Y = Y A_1$ в розгорнутому вигляді:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Звідси

$$\begin{pmatrix} y_{31} & y_{32} & y_{33} \\ ty_{11} & ty_{12} & ty_{13} \\ ty_{21} & ty_{22} & ty_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{12} & y_{13} & y_{11}t \\ y_{22} & y_{23} & y_{21}t \\ y_{32} & y_{33} & y_{31}t \end{pmatrix},$$

$$(1, 1) : y_{31} = y_{12}, \quad (1, 2) : y_{32} = y_{13}, \quad (1, 3) : y_{33} = y_{11}t;$$

$$(2, 1) : ty_{11} = y_{22}, \quad (2, 2) : ty_{12} = y_{23}, \quad (2, 3) : ty_{13} = y_{21}t;$$

$$(3, 1) : ty_{21} = y_{32}, \quad (3, 2) : ty_{22} = y_{33}, \quad (3, 3) : ty_{23} = y_{31}t.$$

Отже,

$$\text{Hom}(A_2, A_1) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 t & y_1 t & 0 \\ z_1 t & 0 & 0 \\ y_1 t & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Розглянемо тепер більш складний приклад.

3. $\text{Hom}(A_3, A_3)$, де

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо рівність $A_3 Z = Z A_3$ в розгорнутому вигляді:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} & z_{15} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} & z_{25} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & z_{34} & z_{35} \\ z_{41} & z_{42} & z_{43} & z_{44} & z_{45} \\ z_{51} & z_{52} & z_{53} & z_{54} & z_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} & z_{15} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} & z_{25} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & z_{34} & z_{35} \\ z_{41} & z_{42} & z_{43} & z_{44} & z_{45} \\ z_{51} & z_{52} & z_{53} & z_{54} & z_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$\begin{pmatrix} z_{51} & z_{52} & z_{53} & z_{54} & z_{55} \\ tz_{11} & tz_{12} & tz_{13} & tz_{14} & tz_{15} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} & z_{25} \\ tz_{31} & tz_{32} & tz_{33} & tz_{34} & tz_{35} \\ tz_{41} & tz_{42} & tz_{43} & tz_{44} & tz_{45} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{12}t & z_{13} & z_{14}t & z_{15}t & z_{11} \\ z_{22}t & z_{23} & z_{24}t & z_{25}t & z_{21} \\ z_{32}t & z_{33} & z_{34}t & z_{35}t & z_{31} \\ z_{42}t & z_{43} & z_{44}t & z_{45}t & z_{41} \\ z_{52}t & z_{53} & z_{54}t & z_{55}t & z_{51} \end{pmatrix},$$

$$(1, 1) : z_{51} = z_{12}t, \quad (1, 2) : z_{52} = z_{13}, \quad (1, 3) : z_{53} = z_{14}t,$$

$$(2, 1) : tz_{11} = z_{22}t, \quad (2, 2) : tz_{12} = z_{23}, \quad (2, 3) : tz_{13} = z_{24}t,$$

$$(3, 1) : z_{21} = z_{32}t, \quad (3, 2) : z_{22} = z_{33}, \quad (3, 3) : z_{23} = z_{34}t,$$

$$(4, 1) : tz_{31} = z_{42}t, \quad (4, 2) : tz_{32} = z_{43}, \quad (4, 3) : tz_{33} = z_{44}t,$$

$$(5, 1) : tz_{41} = z_{52}t, \quad (5, 2) : tz_{42} = z_{53}, \quad (5, 3) : tz_{43} = z_{54}t,$$

$$(1, 4) : z_{54} = z_{15}t, \quad (1, 5) : z_{55} = z_{11};$$

$$(2, 4) : tz_{14} = z_{25}t, \quad (2, 5) : tz_{15} = z_{21};$$

$$(3, 4) : z_{24} = z_{35}t, \quad (3, 5) : z_{25} = z_{31};$$

$$(4, 4) : tz_{34} = z_{45}t, \quad (4, 5) : tz_{35} = z_{41};$$

$$(5, 4) : tz_{44} = z_{55}t, \quad (5, 5) : tz_{45} = z_{51}.$$

Отже,

$$\text{Hom}(A_3, A_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1t & u_1 & v_1 \\ v_1t & x_1 + x_2t & y_1t & z_2t & u_1 + u_2t \\ u_1 + u_2t & v_1 + v_2t & x_1 + x_2t & y_1 + y_2t & z_2 + z_3t \\ z_2t & u_1 + u_3t & v_1t & x_1 + x_3t & y_1 + y_3t \\ y_1t & z_1t & u_1t & v_1t & x_1 \end{pmatrix} \right\}.$$

2.4. Ізоморфізм та нерозкладність об'єктів в сильній категорії мономіальних матриць

2.4.1. Критерій ізоморфізму об'єктів . *Переставно подібними* називаються квадратні матриці, які отримуються одна із одної однаковою перестановкою рядків і стовпців; у цьому випадку подібність здійснюється за допомогою переставної матриці. Якщо говорити про сильну категорію мономіальних матриць (чи категорію мономіальних матриць), то така мономіальна матриця задає ізоморфізм між відповідними матрицями. Такі морфізми природно називають *переставними* і (якщо говорити про всі об'єкти) вони є ізоморфізмами найбільш простого вигляду.

Наступними по простоті є діагональна подібність матриць. У цьому випадку подібність матриць здійснюється за допомогою діагональної матриці і матриці називаються *діагонально подібними*.

Дві квадратні матриці назвемо *переставно діагонально подібними*, якщо одна з них діагонально подібна матриці, що переставно подібна іншій.

Має місце наступне просте твердження.

Твердження 2.1. *Дві мономіальні матриці ізоморфні в категорії $\mathbf{Mmat}_0(K)$ тоді і лише тоді, коли вони переставно діагонально подібні.*

2.4.2. Нерозкладні об'єкти. Квадратну матрицю назвемо *переставно розкладною*, якщо вона переставно подібна прямій сумі двох матриць, і *переставно нерозкладною* в протилежному випадку.

Має місце наступне просте твердження.

Твердження 2.2. *Квадратна мономіальна матриця над K нерозкладна в категорії $\mathbf{Mmat}_0(K)$ тоді і лише тоді, коли вона переставно нерозкладна.*

Розглянемо цю ситуацію більш детально.

Зіставимо мономіальній матриці $X = (x_{ij})$ розміру $n \times n$ орієнтований граф $\Gamma(X)$ з вершинами $1, 2, \dots, n$ і стрілками $i \rightarrow j$ для всіх $x_{ij} \neq 0$. Очевидно, $\Gamma(X)$ є неперетинним об'єднанням ланцюгів і циклів, кожен з яких має однаковий напрямок стрілок. З точністю до переставних морфізмів матриця X є прямою сумою мономіальних матриць, що відповідають вказаним ланцюгам і циклам. Якщо граф $\Gamma(X)$ складається лише із одного ланцюга, то мономіальну матрицю X будемо називати *ланцюговою*, а якщо із одного цикла, то *циклічною*. Очевидно, що обидва типи матриць переставно нерозкладні.

Надалі, окрім загального випадку, буде зустрічатися випадок, коли довільний ненульовий елемент a_{ij} мономіальної матриці A має вигляд $t^{s_{ij}}$, де t — фіксований елемент радикала кільця. У цьому випадку вживаються терміни *t -мономіальна матриця*, *t -ланцюгова матриця*, *t -циклічна матриця*.

Отже, в категорії $\text{Mmat}_0(K)$ кожна мономіальна матриця ізоморфна прямій сумі ланцюгових і циклічних матриць. Оскільки довільний ізоморфізм категорії $\text{Mmat}_0(K)$ є добутком переставного та діагонального ізоморфізмів (в будь-якому порядку), то ланцюгові і циклічні матриці є нерозкладними.

Зрозуміло, при дослідженні мономіальних матриць основну роль повинні відігравати ланцюгові та циклічні матриці. Їх природно розглядати з точністю до переставної подібності (або, що те саме, перенумерації рядків і стовпців) і для кожного із такого типу матриць існує природна канонічна форма відносно таких перетворень. З точки зору нашого методу основним є випадок циклічних матриць, а випадок ланцюгових матриць розглядається як “вироджений”.

Переходимо до цих канонічних форм.

2.4.3. Канонічно циклічні матриці. Очевидно, що циклічна матриця розміру $n \times n$ переставно подібна матриці вигляду

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_n \\ a_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Таку матрицю ми називаємо *канонічно циклічною*. Послідовність $\bar{a} = (a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)$ називаємо *визначальною послідовністю* матриці A і пишемо $A = M(\bar{a}) = M(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)$.

Послідовність $\bar{a}^* = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)$ називається *дуальною до послідовності $\bar{a}$* , а канонічно циклічна матриця $M(\bar{a}^*)$ — *дуальною до матриці $M(\bar{a})$* . Легко бачити, що дуальна матриця переставно подібна транспонованій.

Розглянемо питання про ізоморфізм канонічно циклічних матриць в сильній категорії мономіальних матриць.

Дві послідовності $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ і $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, члени яких належать деякій множині, назвемо *циклічно еквівалентними*, якщо $\bar{y}$ отримується із $\bar{x}$ циклічною перестановкою її членів: $\bar{y} = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_n, x_1, \dots, x_{i-1})$.

Оскільки перехід від циклічної матриці до переставно подібної їй канонічно циклічної матриці означає, що вершини графа $\Gamma(X)$ нумеруються числами $1, 2, \dots, n$ підряд і проти напрямку стрілок, то має місце наступне твердження.

Твердження 2.3. *Матриця $M(\bar{b})$ переставно подібна матриці $M(\bar{a})$ тоді і лише тоді, коли їх визначальні послідовності циклічно еквівалентні.*

Послідовність ваг $\bar{w}(\bar{a}) = (w(a_1), \dots, w(a_{n-1}), w(a_n))$ членів визначальної послідовності $\bar{a}$ називаємо *ваговою послідовністю* матриці A і

позначаємо $\bar{w}(A)$, а суму членів вагової послідовності — *вагою матриці* A . Якщо зафіксувати твірний елемент t радикала R , тоді $\bar{a} = (\varepsilon_1 t^{s_1}, \dots, \varepsilon_{n-1} t^{s_{n-1}}, \varepsilon_n t^{s_n})$, де $s_i = w(a_i)$ і ε_i — елементи із K^* (які, згідно вищесказаного, визначаються послідовністю $\bar{a}$ неоднозначно, якщо K не є областю цілісності). В цьому випадку матрицю $M(\bar{a})$ позначаємо також через $M_t(\bar{a}) = M_t(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)$ або $M_t(\bar{w}, \bar{\varepsilon})$, де $\bar{w} = \bar{w}(\bar{a})$ і $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n)$. Якщо добуток елементів $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n$ позначити через ε , то очевидно, що матриця $M_t(\bar{w}, \bar{\varepsilon})$ діагонально подібна матриці $M_t(\bar{w}, \bar{\varepsilon}_0)$, де $\bar{\varepsilon}_0 = (1, \dots, 1, \varepsilon)$, яку позначатимемо також через $M_t(\bar{w}, \varepsilon)$. Згідно сказаного канонічно циклічну матрицю вигляду $M_t(\bar{w}, \varepsilon)$ природно називати *зведеною*.

Якщо, окрім t , зафіксовано і $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n)$, то добуток $\varepsilon = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n$ називатимемо $(t, *)$ -коефіцієнтом або $*$ -коефіцієнтом канонічно циклічної матриці $M_t(\bar{w}, \varepsilon)$.

Твердження 2.4. *Матриці $M = M_t(\bar{w}, \bar{\varepsilon})$ і $M' = M_t(\bar{w}, \bar{\varepsilon}')$ діагонально подібні тоді і лише тоді, коли їх $*$ -коефіцієнти рівні за модулем $\text{Ann}(t^s)$, де s — найбільший член вагової послідовності $\bar{w}$.*

Доведення. Нехай $\bar{w} = (s_1, \dots, s_{n-1}, s_n)$. Очевидно, можна вважати, що $M = M_t(\bar{w}, \varepsilon)$ і $M' = M_t(\bar{w}, \varepsilon')$. Окрім того, за твердженням 2.3 можна вважати, що $s = s_n$, тобто $s_n \geq s_i$ для будь-якого $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Припустимо, що матриці M і M' діагонально подібні, тобто існує оборотна діагональна матриця D така, що $MD = DM'$. Скалярну рівність $(MD)_{ij} = (DM')_{ij}$ будемо позначати через (i, j) . Якщо $(d_1, \dots, d_{n-1}, d_n)$ — головна діагональ матриці D , то вказана матрична рівність рівнозначна наступній системі скалярних рівностей:

$$(i+1, i) : d_i t^{s_i} = d_{i+1} t^{s_i}, \text{ де } i = 1, 2, \dots, n-1;$$

$$(1, n) : \varepsilon d_n t^s = \varepsilon' d_1 t^s.$$

Враховуючи нерівності $s \geq s_i$ для $i = 1, 2, \dots, n-1$, із перших рівностей

маємо, що $d_1 t^s = d_2 t^s = \dots = d_n t^s$, а тоді рівність $(1, n)$, яка вже має вигляд $\varepsilon d_1 t^s = \varepsilon' d_1 t^s$, означає, що ε і ε' рівні за модулем $\text{Ann}(t^s)$.

Обернене твердження очевидне. $\square$

Твердження 2.1, 2.3 і 2.4 дають відповідь на питання про ізоморфізм двох канонічно циклічних матриць в категорії $\text{Mmat}_0(K)$. Отже, має місце наступне твердження.

Теорема 2.5. *Нехай $M = M_t(\bar{w}, \bar{\varepsilon})$ і $M' = M_t(\bar{w}', \bar{\varepsilon}')$ — канонічно циклічні матриці і s — найбільший член вагових послідовностей $\bar{w}, \bar{w}'$. Матриці M і M' ізоморфні в категорії $\text{Mmat}_0(K)$ тоді і лише тоді, коли їх вагові послідовності циклічно еквівалентні і $*$ -коефіцієнти рівні за модулем $\text{Ann}(t^s)$.*

2.4.4. Канонічно ланцюгові матриці. Питання про нерозкладність та подібність ланцюгових матриць більш прості, ніж такі ж питання про циклічні матриці. Розглядаючи ланцюгові матриці як вироджений випадок циклічних матриць, можна досліджувати їх по тій же схемі, що і циклічні матриці.

Будь-яка ланцюгова матриця розміру $n \times n$ переставно подібна, очевидно, матриці вигляду

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Таку матрицю називатимемо *канонічно ланцюговою*.

Послідовність $\bar{a} = (a_1, \dots, a_{n-1})$ називаємо *визначальною послідовністю* матриці A і пишемо $A = N(\bar{a}) = N(a_1, \dots, a_{n-1})$. Послідовність ваг $\bar{w}(\bar{a}) = (w(a_1), \dots, w(a_{n-1}))$ членів визначальної послідовності $\bar{a}$ називаємо *ваговою послідовністю* матриці A і позначаємо $\bar{w}(A)$.

Мають місце наступні прості твердження.

Твердження 2.6. *Матриці $N(\bar{b})$ і $N(\bar{a})$ переставно подібні тоді і лише тоді, коли їх визначальні послідовності рівні, і діагонально подібні, коли рівні їх вагові послідовності.*

Отже, враховуючи твердження 2.1 маємо, що канонічно ланцюгові матриці є (як і канонічно циклічні матриці) нерозкладними об'єктами категорії $\text{Mmat}_0(K)$.

Оскільки довільний ізоморфізм категорії $\text{Mmat}_0(K)$ є добутком переставного та діагонального ізоморфізмів (в будь-якому порядку), то із твердження 2.6 маємо наступне твердження.

Теорема 2.7. *Дві канонічно ланцюгові матриці ізоморфні в категорії $\text{Mmat}_0(K)$ тоді і лише тоді, коли їх вагові послідовності рівні.*

2.5. Нерозкладні об'єкти категорії мономіальних матриць

У цьому підрозділі розглядаються питання про нерозкладність циклічних і ланцюгових матриць в категорії $\text{Mmat}(K)$. Очевидно, достатньо обмежитися випадком канонічних матриць.

Основним випадком є випадок канонічно циклічних матриць, якому присвячено всі пункти цього підрозділу, окрім останнього. В останньому пункті розглядається випадок канонічно ланцюгових матриць (як вироджений випадок канонічно циклічних матриць).

Матриця A розміру $n \times n$ над комутативним кільцем називається *розкладною*, якщо вона (в кільці матриць розміру $n \times n$ над цим кільцем) подібна прямій сумі двох матриць, які мають розміри $n_1 \times n_1$ і $n_2 \times n_2$, де $n_1, n_2 > 0$, і *нерозкладною* у протилежному випадку. Для мономіальної матриці A над кільцем K ці означення відповідають означенням розкладних і нерозкладних об'єктів категорії мономіальних матриць.

2.5.1. Критерій розкладності в термінах ідемпотентних матриць. Нам знадобиться наступне, більш відоме для полів, твердження для матриць над довільним комутативним локальним кільцем (яке має місце і для наборів матриць).

Теорема 2.8. *Квадратна матриця A над комутативним локальним кільцем розкладна тоді і лише тоді, коли існує ідемпотентна матриця X , відмінна від нульової і одиничної матриць, яка комутує з A .*

Доведення. Дійсно, всяка ідемпотентна матриця X над локальним кільцем діагоналізуєма (див., напр., [6, с. 334]) і до того ж кожен її діагональний елемент дорівнює 0 або 1. Отже, якщо X не є ні нульовою, ні одиничною матрицею, то існує оборотна матриця C така, що $X = C^{-1}(E \oplus 0)C$, де E — одинична матриця (яка є “непорожньою”, як і нульова матриця 0). Якщо ж така матриця X комутує з матрицею A , то CXC^{-1} комутує з $A' = CAC^{-1}$, звідки випливає, що матриця A' є прямою сумою двох матриць, а отже, матриця $A = C^{-1}A'C$ розкладна.

Обернене твердження очевидне: якщо матриця A є розкладною, тобто $A = C^{-1}A'C$, де A' — пряма сума двох матриць, то за ідемпотентну матрицю X можна взяти матрицю вказаного вище вигляду, тобто $X = C^{-1}(E \oplus 0)C$. $\square$

Квадратну матрицю над кільцем K назвемо *P -трикутною*, якщо вона переставно подібна нижньо-трикутній (а значить і верхньо-трикутній) матриці.

Із попередньої теореми маємо як наслідок наступну теорему.

Теорема 2.9. *Нехай A — квадратна матриця над кільцем K і нехай кожна ідемпотентна матриця X , що комутує з матрицею A ,*

- a) є P -трикутною за модулем R ;*
- b) за модулем R має рівні елементи на головній діагоналі.*

Тоді матриця A нерозкладна.

Дійсно, якщо ідемпотентна матриця Y за модулем R є верхньо-трикутною з однаковими елементами на головній діагоналі, а будь-яка така матриця над полем (в даному випадку над полем K/R) є нульовою або одиничною, то $Y = tZ$ або $E - Y = tZ$. Це означає, що матриця tZ ідемпотентна, звідки $tZ = 0$ (оскільки рівність $t^2Z^2 = tZ$ еквівалентна рівності $\alpha tZ = 0$, де $\alpha = 1 - tZ$ — оборотний елемент). Отже, $Y = 0$ або $Y = E$. Таким чином, $X = 0$ або $X = E$ для будь-якої матриці X , переставно подібної матриці Y .

При застосуванні теореми 2.9 потрібно аналізувати матричну рівність $AX = XA$, де $A = (a_{ij})$ — фіксована матриця деякого розміру $n \times n$ і X — довільна матриця такого ж розміру. Ця рівність еквівалентна системі скалярних рівностей $(AX)_{ij} = (XA)_{ij}$, де i, j пробігають числа від 1 до n ; таку рівність будемо позначати через $[i, j]_A$. Якщо розглядати рівність $MX = XM$ для канонічно циклічної матриці $M_t(\bar{a})$ з визначальною послідовністю $\bar{a} = (\varepsilon_1 t^{s_1}, \dots, \varepsilon_{n-1} t^{s_{n-1}}, \varepsilon_n t^{s_n})$, де $\varepsilon_i \in K^*$, то відповідні скалярні рівності мають вигляд

$$[i, j]_M : \varepsilon_{i-1} t^{s_{i-1}} x_{i-1, j} = \varepsilon_j t^{s_j} x_{i, j+1}$$

або, в еквівалентній формі (після заміни $i - 1$ на i),

$$[i + 1, j]_M : \varepsilon_i t^{s_i} x_{ij} = \varepsilon_j t^{s_j} x_{i+1, j+1}; \quad (2.1)$$

при цьому індекси 0 і $n + 1$ треба замінити відповідно на індекси n і 1 (тобто індекси розглядаються за модулем n).

2.5.2. Частинний випадок (для канонічно циклічних матриць). Розглянемо випадок канонічно циклічної матриці $M = M(\bar{a})$, вагова послідовність $\bar{w}(\bar{a}) = (s_1, \dots, s_{n-1}, s_n)$ якої не має однакових членів. Задамо на числах $1, 2, \dots, n$ лінійну впорядкованість $\prec$, вважаючи, що $i \prec j$ тоді і лише тоді, коли $s_i < s_j$. Розташуємо числа $1, 2, \dots, n$ в порядку зростання відносно $\prec$: $p_1 \prec p_2 \prec \dots \prec p_n$.

Зафіксуємо твірний елемент t радикала R . Тоді $\bar{a} = (\varepsilon_1 t^{s_1}, \dots, \varepsilon_{n-1} t^{s_{n-1}}, \varepsilon_n t^{s_n})$, де $\varepsilon_i \in K^*$.

Розглянемо матричну рівність $MX = XM$, де $X = (x_{ij})$ — довільна матриця. Із рівностей (2.1) випливає, що $x_{ij} \in R$, якщо $s_i < s_j$. Тоді матриця, отримана з матриці X розташуванням її рядків і стовпців в порядку $p_1, p_2, \dots, p_n$, є нижньо-трикутною за модулем R , а це означає, що матриця X є P -трикутною. Далі, із рівностей (2.1) при $i = j$ випливає, що матриця X має за модулем R рівні елементи на головній діагоналі. Отже, за теоремою 2.9 матриця M нерозкладна.

Таким чином, доведено наступне твердження.

Твердження 2.10. *Канонічно циклічна матриця з різними вагами її ненульових елементів є нерозкладною в категорії $\text{Mmat}(K)$.*

У деякому сенсі протилежний випадок розглянуто Р. Ф. Динис в роботі [55]. А саме, (доведена нею) теорема 1 стверджує, що канонічно циклічна матриця нерозкладна, якщо її визначальна послідовність має вигляд $(t^{s_1}, t^{s_1}, \dots, t^{s_1}, t^{s_2}, t^{s_2}, \dots, t^{s_2})$, де $s_1 \neq s_2$ і обидва числа s_1, s_2 реально зустрічаються (такі послідовності називаються 2-однорідними); вказане доведення цієї теореми автоматично поширюється на випадок, коли 2-однорідною є вагова послідовність (тобто визначальна послідовність має вигляд $(\varepsilon_1 t^{s_1}, \varepsilon_2 t^{s_1}, \dots, \varepsilon_i t^{s_1}, \varepsilon_{i+1} t^{s_2}, \varepsilon_{i+2} t^{s_2}, \dots, \varepsilon_n t^{s_2})$).

Як легко побачити, в обох випадках вагова послідовність неперіодична. Нижче буде доведено, що теорема залишається вірною у випадку довільної неперіодичної вагової послідовності.

У загальному випадку подібна теорема не виконується. Наприклад, якщо $t^2 \neq 0$ і характеристика кільця K не дорівнює двом, то канонічно циклічна матриця $M_t(1, t, 1, t)$ (з періодичною ваговою послідовністю)

розкладна:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & t & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Щоб зробити висновок із системи рівностей (2.1) про справедливість теореми для неперіодичних вагових послідовностей, треба мати зручний критерій неперіодичності вагової послідовності. Це питання розглядається в наступному пункті.

2.5.3. Частковий порядок на послідовностях. Нехай $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup 0$ ($\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел). Лексикографічний порядок на множині $\mathbb{N}_0^n = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \times \dots \times \mathbb{N}_0$ (n раз) позначаємо через $<_n$. Іншими словами, якщо $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, то $\bar{x} <_n \bar{y}$ тоді і лише тоді, коли існує число $1 \leq i \leq n$ таке, що $x_1 = y_1, \dots, x_{i-1} = y_{i-1}$, $x_i < y_i$. Число i будемо позначати через $l(\bar{x}, \bar{y})$.

Зафіксуємо деяку послідовність $\bar{v} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{N}_0^n$ і введемо для її циклічних перестановок наступне позначення:

$$\bar{v}_i = (a_i, a_{i+1}, \dots, a_{i+n-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

(індекси розглядаються за модулем n). Задамо на множині $[1, n] := \{1, 2, \dots, n\}$ відношення строгого часткового порядку $\prec_{\bar{v}}$ наступним чином:

$$i \prec_{\bar{v}} j \iff \bar{v}_i <_n \bar{v}_j.$$

Послідовність $\bar{v}$ називається періодичною, якщо $\bar{v}_j = \bar{v}$ для деякого $j > 1$.

Твердження 2.11. *Наступні умови еквівалентні:*

a) *послідовність $\bar{v}$ періодична;*

b) існує $j \in \{2, \dots, n\}$ таке, що $a_{1+s} = a_{j+s}$ для будь-якого $s \in \mathbb{Z}$ (індекси розглядаються за модулем n);

c) існує натуральне число $q \neq n$ таке, що $q|n$ і $a_{i+pq} = a_i$ для довільних $i = 1, 2, \dots, q$, $p = 1, 2, \dots, n/q$.

Доведення. Імплікації $a) \Leftrightarrow b)$ і $c) \Rightarrow a)$ очевидні. Доведемо імплікацію $b) \Rightarrow c)$. Позначимо через V множину всіх $j \in \mathbb{N}$, які задовольняють умову b), і покладемо $V_0 = \{j - 1 \mid j \in V\} \setminus 0$. Враховуючи співвідношення Безу, маємо, що найбільший спільний дільник двох чисел $a, b \in V_0$ також належить V_0 . І для доведення умови c) залишилося лише врахувати, що $\{1, 2, \dots, n - 1\} \cap V_0 \neq \emptyset$ (згідно умови b)) і $n \in V_0$. $\square$

У випадку періодичності послідовності $\bar{v}$ всяке число q , вказане в умові c), називається її *періодом*. Легко показати (замінивши в приведених вище міркуваннях співвідношення Безу на співвідношення $a = yb + r$, де $0 \leq r < b$), що найменший період ділить всі інші.

Безпосередньо із вищесказаного випливає таке твердження.

Твердження 2.12. *Наступні умови еквівалентні:*

- a) послідовність $\bar{v} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ періодична;
- b) частковий порядок $\prec_{\bar{v}}$ не є лінійним;
- c) послідовності $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ утворюють мультимножину, що не є множиною.

2.5.4. Випадок неперіодичної вагової послідовності. У цьому пункті буде доведена наступна теорема для канонічно циклічних матриць над кільцем K .

Теорема 2.13. *Канонічно циклічна матриця з неперіодичною ваговою послідовністю нерозкладна в категорії $\text{Mmat}(K)$.*

Розглядаємо канонічно циклічну матрицю з неперіодичною ваговою

послідовністю

$$M = M_t(\bar{a}) = M_t(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n) = M_t(\varepsilon_1 t^{s_1}, \dots, \varepsilon_{n-1} t^{s_{n-1}}, \varepsilon_n t^{s_n}),$$

де t — фіксований твірний радикала, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n$ — оборотні елементи. Члени вагової послідовності $\bar{w} = (s_1, \dots, s_{n-1}, s_n)$ належать множині $[0, m-1] := \{0, 1, \dots, m-1\}$, де $m = l(R)$ — ступінь нільпотентності R (при $m = \infty$ вважаємо, що $m-1 = m$). Згідно попереднього пункту матриці M відповідає часткова впорядкованість $\prec_{\bar{w}}$ множини $[1, n] = \{1, 2, \dots, n\}$, а саме

$$i \prec_{\bar{w}} j \iff \bar{w}_i <_n \bar{w}_j \text{ (в } [0, m-1]^n \subseteq \mathbb{N}_0^n),$$

де $\bar{w}_i$ та $\bar{w}_j$ — циклічні перестановки послідовності $\bar{w}$ відповідно з першим членом i та j . За твердженням 2.12 цей порядок є лінійним.

Розглянемо матричну рівність $MX = XM$, де $X = (x_{ij})$ — довільна матриця.

Лема 2.14. *Якщо $i \prec_{\bar{w}} j$, то $x_{ij} \in R$.*

Доведення. Доведення проводимо індукцією по $l(\bar{w}_i, \bar{w}_j)$ (див. п. 2.5.2.). Відносно бази індукції див. п. 2.5.1. Отже, нехай $i \prec_{\bar{w}} j$ і при цьому $l(\bar{w}_i, \bar{w}_j) > 1$. Тоді а) $s_i = s_j$ і б) $\bar{w}_{i+1} <_n \bar{w}_{j+1}$. Із нерівності б) маємо, що $(i+1) \prec_{\bar{w}} (j+1)$, причому, очевидно, $l(\bar{w}_{i+1}, \bar{w}_{j+1}) = l(\bar{w}_i, \bar{w}_j) - 1$. За індукційним припущенням маємо, що $x_{i+1, j+1} \in R$. Далі, із рівностей а) і $\varepsilon_i t^{s_i} x_{ij} = \varepsilon_j t^{s_j} x_{i+1, j+1}$ (див. (2.1)) випливає, що $\varepsilon_i t^{s_i} (x_{ij} - \varepsilon_i^{-1} \varepsilon_j x_{i+1, j+1}) = 0$, звідки $x_{ij} - \varepsilon_i^{-1} \varepsilon_j x_{i+1, j+1} \in R$. І оскільки $x_{i+1, j+1} \in R$, то і $x_{ij} \in R$. $\square$

Із цієї леми і лінійності порядку $\prec_{\bar{w}}$ випливає, що X — P -трикутна матриця (див. доведення твердження 2.10), а із рівностей (2.1) при $i = j$ — що матриця X має за модулем R рівні елементи на головній діагоналі. Отже, за теоремою 2.9 матриця M нерозкладна.

2.5.5. d -Зведені канонічно циклічні матриці. Нехай $M = M_t(\bar{a})$ — зведена канонічно циклічна матриця з визначальною послідовністю $\bar{a} = (t^{s_1}, \dots, t^{s_{n-1}}, \varepsilon t^{s_n})$. Вважаємо, що вагова послідовність $\bar{w} = (s_1, \dots, s_{n-1}, s_n)$ періодична, і нехай d — деякий її період (не обов'язково найменший). Покладемо $n_d = \frac{n}{d}$.

Розташувавши рядки і стовпці матриці M в порядку $1, 1 + d, 1 + 2d, \dots, 1 + (n_d - 1)d, 2, 2 + d, 2 + 2d, \dots, 2 + (n_d - 1)d, \dots, d, 2d, \dots, n_d d$, отримаємо наступну (переставно подібну до M) блокову матрицю:

$$M_d = M_{dt}(\bar{a}) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & t^{s_d} \Phi \\ t^{s_1} E_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & t^{s_{d-1}} E_{d-1} & 0 \end{pmatrix},$$

де

$$\Phi = \Phi_{n_d}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \varepsilon \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

— клітина Фробеніуса з характеристичним поліномом $f(x) = x^{n_d} - \varepsilon$ і $E_1 = \dots = E_{d-1} = E$ — одинична матриця розміру $n_d \times n_d$.

Послідовність $\bar{w}_d = (s_1, \dots, s_{d-1}, s_d)$ назвемо d -ваговою послідовністю блокової матриці $M_d = M_{dt}(\bar{a})$, а саму матрицю M_d , яку будемо позначати також через $M_{dt}(\bar{w}_d, \varepsilon)$, назвемо d -зведеною канонічно циклічною матрицею. Клітину Фробеніуса $\Phi = \Phi_{n_d}(\varepsilon)$ назвемо d -визначальною клітиною Фробеніуса матриці M .

Отже, кожній зведеній канонічно циклічній матриці $M = M(\bar{w}, \varepsilon)$ з періодичною ваговою послідовністю $\bar{w}$ і фіксованому періоду d цієї послідовності відповідає (переставно подібна до неї) d -зведена канонічно циклічна матриця. Оскільки перестановка рядків і стовпців по суті не змінює структуру матриці, то можна сказати, що d -зведені канонічно цикліч-

ні матриці — це одна із форм існування зведених канонічно циклічних матриць, а в узагальненому сенсі і взагалі канонічно циклічних матриць (оскільки вони діагонально подібні до зведених).

Зауважимо, що формально в цю схему входить і випадок неперіодичних послідовностей. Дійсно, якщо покласти $d = n$, вже не обов'язково вважаючи, що вагова послідовність $\bar{w}$ періодична (число n не є періодом, але є “квазіперіодом” у тому сенсі, що $w_{i+n} = w_i$ для довільного натурального числа n), то d -зведена матриця M_d вводиться аналогічним чином і дорівнює вона початковій матриці M . Але в дисертації випадки періодичних і неперіодичних вагових послідовностей розглядаються окремо.

2.5.6. Випадок періодичної вагової послідовності. Нехай $M = M_t(\bar{a})$ — канонічно циклічна матриця над K розміру $n \times n$ з визначальною послідовністю $\bar{a} = (\varepsilon_1 t^{s_1}, \varepsilon_2 t^{s_2}, \dots, \varepsilon_{n-1} t^{s_{n-1}}, \varepsilon_n t^{s_n})$ і періодичною ваговою послідовністю $\bar{w}$ і нехай d_0 — найменший період вагової послідовності. Нехай, далі, $n_0 = \frac{n}{d_0}$ і $\varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n$ (*-коефіцієнт матриці M). Клітину Фробеніуса $\Phi = \Phi_{n_0}(\varepsilon)$ з характеристичним поліномом $f(x) = x^{n_0} - \varepsilon$ назовемо *визначальною клітиною Фробеніуса матриці M* (див. попередній пункт).

Як було показано в п. 2.5.2, у випадку періодичної вагової послідовності канонічно циклічна матриця може бути розкладною. У наступній теоремі питання про нерозкладні і розкладні канонічно циклічні матриці розглядається (в цій ситуації) більш детально.

Теорема 2.15. *Канонічно циклічна матриця $M = M_t(\bar{a})$ з періодичною ваговою послідовністю розкладна, якщо розкладна її визначальна клітина Фробеніуса, і нерозкладна, якщо її визначальна клітина Фробеніуса нерозкладна за модулем R .*

Доведення. Очевидно, можна вважати, що $\bar{a} = (t^{s_1}, t^{s_2}, \dots, t^{s_{n-1}}, \varepsilon t^{s_n})$, тобто M є зведеною. Більш того, замість матриці M можна розглядати від-

повідну d_0 -зведену канонічно циклічну матрицю $M_0 := M_{d_0t}(\bar{w}_0, \varepsilon)$, де $\bar{w}_0$ позначає послідовність $\bar{w}_{d_0}$.

Легко бачити, що матриця M_0 розкладна, якщо розкладна матриця Φ (якщо $P^{-1}\Phi P = A \oplus B$ і Q — пряма сума d екземплярів матриці P , то матриця $Q^{-1}M_0Q$ переставно подібна прямій сумі двох матриць).

Покажемо тепер, що матриця M_0 нерозкладна, якщо матриця Φ нерозкладна за модулем R .

Оскільки період d найменший, то d_0 -вагова послідовність $\bar{w}_0$ (блокової) матриці M_0 неперіодична, а отже, матриці M_0 можна зіставити лінійну впорядкованість $\prec_{\bar{w}_0}$ множини $[1, d]$, яку будемо позначати просто через $\prec_0$ (див. пп. 2.5.3, 2.5.4).

Розглянемо матричну рівність $M_0X = XM_0$, де $X = (X_{ij})$ — довільна блокова матриця з блоками розміру $n_0 \times n_0$; матриці M_0 і X будемо перемножувати поблоково. Ця рівність еквівалентна системі матричних рівностей

$$\langle i, j \rangle_0 : (M_0X)_{ij} = (XM_0)_{ij},$$

де i, j пробігають числа від 1 до d_0 (тут в обох частинах рівностей вказані блоки, які стоять на перетині i -ої горизонтальної смуги та j -ої вертикальної смуги відповідних матриць). Легко бачити, що ці рівності мають наступний вигляд:

$$\langle i, j \rangle_0 = \begin{cases} t^{s_{i-1}}X_{i-1,j} = t^{s_j}X_{i,j+1}, & \text{якщо } i \neq 1, j \neq d; \\ t^{s_d}\Phi X_{dj} = t^{s_j}X_{1,j+1}, & \text{якщо } i = 1, j \neq d; \\ t^{s_{i-1}}X_{i-1,d} = t^{s_d}X_{i1}\Phi, & \text{якщо } i \neq 1, j = d; \\ t^{s_d}\Phi X_{dd} = t^{s_d}X_{11}\Phi, & \text{якщо } i = 1, j = d. \end{cases} \quad (2.2)$$

Лема 2.16. *Якщо $i \prec_0 j$, то $X_{ij} = 0$ за модулем R .*

Доведення леми аналогічне доведенню леми 2.14.

Оскільки порядок $\prec_0$ лінійний, то із леми випливає, що за допомогою однакової перестановки горизонтальних і вертикальних смуг матрицю X можна привести до нижньо-блоково-трикутного вигляду (див. доведення твердження 2.10). Далі, із рівностей (2.2) при $i = j$ випливає, що діагональні блоки X_{ii} матриці X рівні між собою за модулем R (при цьому слід враховувати, що матриця Φ оборотна). Тоді із рівності $\langle 1, d \rangle_0$ випливає, що за модулем R матриця X_{11} комутує з матрицею Φ , а оскільки Φ нерозкладна за модулем R , то знову ж таки за модулем R виконуються рівності $X_{11} = \dots = X_{dd} = 0$ або рівності $X_{11} = \dots = X_{dd} = E$ (за теоремою 2.8 для поля $k = K/R$). Із сказаного випливає, що виконуються обидві умови теореми 2.9 і, отже, матриця M_0 нерозкладна. $\square$

2.5.7. Нерозкладність канонічно ланцюгових матриць. Має місце наступна теорема.

Теорема 2.17. *Канонічно ланцюгова матриця нерозкладна в категорії $\text{Mmat}(K)$.*

Доведення цієї теореми проводиться аналогічно доведенню теореми 2.13.

Вкажимо лише, як у цьому випадку дається означення строгого часткового порядку $\prec_{\bar{w}}$, який у випадку канонічно циклічних матриць введено в п. 2.5.4 (див. додатково п. 2.5.3).

У цьому випадку $<_n$ буде позначати лексикографічний порядок на множині $\bar{\mathbb{N}}_0^n$, де $\bar{\mathbb{N}}_0 = 0 \cup \mathbb{N} \cup \infty$ (в якій $n < \infty$ для будь-якого $n \neq \infty$).

Нехай $\bar{w} = (s_1, \dots, s_{n-1})$ — вагова послідовність матриці $N = N_t(\bar{a})$. Її члени належать множині $[0, m - 1]$, де $m = l(R)$. Частковий порядок $\prec_{\bar{w}}$ на множині $[1, n]$ вводиться таким же чином, як у випадку канонічно циклічних матриць, але $\bar{w}_i$ вже позначають не циклічні перестановки послідовності $\bar{w}$, а наступні послідовності довжини n :

$\bar{w}_i = (w_i, \dots, w_{n-1}, w_n, w_1, \dots, w_{i-1})$, де $w_n = w_1 = \dots = w_{i-1} = m$, $i = 1, 2, \dots, n$; зокрема, всі члени послідовності $\bar{w}_n$ дорівнюють m .

Отже, з урахуванням даних позначень, $i \prec_{\bar{w}} j \iff \bar{w}_i <_n \bar{w}_j$. Очевидно, що цей порядок є лінійним.

2.6. Ізоморфізм канонічно циклічних матриць в категорії мономіальних матриць

У цьому підрозділі розглядається питання про ізоморфізм циклічних матриць в категорії $\text{Mmat}(K)$. Очевидно, достатньо обмежитися випадком канонічно циклічних матриць.

2.6.1. Частковий порядок на послідовностях (продовження).

Продовжуючи дослідження, розпочаті в п. 2.5.3, розглянемо випадок двох послідовностей.

На множині всіх скінченних послідовностей з членами, що належать $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup 0$, введемо наступний частковий порядок $<_\infty$: для $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ і $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k)$, $\bar{x} <_\infty \bar{y}$ тоді і лише тоді, коли існує число $i \in \mathbb{N}$ таке, що $x_1 = y_1, \dots, x_{i-1} = y_{i-1}$, $x_i < y_i$. При цьому індекси $j > n$ у виразах x_j і $j > k$ у виразах y_j розглядаються відповідно за модулем n і k . Число i позначається через $l(\bar{x}, \bar{y})$. Очевидно, що на множині послідовностей довжини n відношення $<_\infty$ дорівнює відношенню $<_n$.

Зафіксуємо деякі послідовності $\bar{v} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{N}_0^n$, $\bar{v}' = (a'_1, a'_2, \dots, a'_k) \in \mathbb{N}_0^k$ і покладемо $[1, k]' = \{i' \mid i \in [1, k]\} = \{1', 2', \dots, k'\}$. Користуючись позначенням для циклічних перестановок послідовностей, введених в п. 2.5.3, задамо на множині $[1, n] \cup [1, k]'$ відношення строгого часткового порядку $\prec_{\bar{v}\bar{v}'} \equiv \prec_{\bar{v}'\bar{v}}$ наступним чином:

$$\begin{aligned} i \prec_{\bar{v}\bar{v}'} j &\iff \bar{v}_i <_\infty \bar{v}_j, \text{ якщо } i, j \in [1, n]; \\ i' \prec_{\bar{v}\bar{v}'} j' &\iff \bar{v}'_{i'} <_\infty \bar{v}'_{j'}, \text{ якщо } i', j' \in [1, k]'; \\ i \prec_{\bar{v}\bar{v}'} j' &\iff \bar{v}_i <_\infty \bar{v}'_{j'}, \text{ якщо } i \in [1, n], j' \in [1, k]'; \end{aligned}$$

$i' \prec_{\bar{v}\bar{v}'} j \iff \bar{v}'_i <_{\infty} \bar{v}_j$, якщо $i' \in [1, k]'$, $j \in [1, n]$.

Послідовності $\bar{v}$ і $\bar{v}'$ назвемо *циклічно залежними*, якщо існують i та j такі, що $a_{i+s} = a'_{j+s}$ для довільного $s \in \mathbb{N}$, і *циклічно незалежними* у протилежному випадку. Із означення випливають два наступні факти:

- 1) послідовності однакової довжини циклічно залежні тоді і лише тоді, коли вони циклічно еквівалентні;
- 2) неперіодична послідовність не може бути циклічно залежною з послідовністю меншої довжини.

Безпосередньо із вищесказаного випливає таке твердження.

Твердження 2.18. *Наступні умови еквівалентні:*

- a) послідовності $\bar{v} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ і $\bar{v}' = (a'_1, a'_2, \dots, a'_k)$ неперіодичні і циклічно незалежні;
- b) частковий порядок $\prec_{\bar{v}\bar{v}'}$ є лінійним.

2.6.2. Критерій подібності. Має місце наступна теорема.

Теорема 2.19. *Канонічно циклічні матриці $M_t(\bar{a})$ і $M_t(\bar{a}')$ ізоморфні в категорії $\text{Mmat}(K)$ тоді і лише тоді, коли вони ізоморфні в категорії $\text{Mmat}_0(K)$.*

Доведення. Достатність очевидна.

Необхідність. Нехай $\bar{a} = (\varepsilon_1 t^{s_1}, \dots, \varepsilon_{n-1} t^{s_{n-1}}, \varepsilon_n t^{s_n})$, $\bar{a}' = (\varepsilon'_1 t^{s'_1}, \dots, \varepsilon'_{n-1} t^{s'_{n-1}}, \varepsilon'_n t^{s'_n})$, де $\varepsilon_i, \varepsilon'_i \in K^*$, $\bar{w} = (s_1, \dots, s_{n-1}, s_n)$, $\bar{w}' = (s'_1, \dots, s'_{n-1}, s'_n)$.

Розглянемо спочатку випадок, коли обидві вагові послідовності матриць $M = M_t(\bar{a})$ і $M' = M_t(\bar{a}')$ неперіодичні.

Нам знадобиться одне допоміжне твердження.

Нехай X — деяка матриця така, що $MX = XM'$. Ця рівність еквівалентна системі скалярних рівностей $(MX)_{ij} = (XM')_{ij}$, де i, j пробігають

числа від 1 до n ; таку рівність будемо позначати через $[i, j] = [i, j]_{MM'}$. Легко бачити (див. у зв'язку з цим п. 2.5.1), що ці рівності мають вигляд

$$[i + 1, j]_{MM'} : \varepsilon_i t^{s_i} x_{ij} = \varepsilon'_j t^{s'_j} x_{i+1, j+1} \quad (2.3)$$

(індекси розглядаються за модулем n). Згідно попереднього пункту на множині $[1, n] \cup [1, n]'$ задано частковий порядок $\prec_{\overline{w}\overline{w}'}$.

Лема 2.20. *Нехай $i, j \in [1, n]$. Якщо $i \prec_{\overline{w}\overline{w}'} j'$, то $x_{ij} \in R$, а якщо $i' \prec_{\overline{w}\overline{w}'} j$, то $x_{j+1, i+1} \in R$.*

Лема доводиться аналогічно лемі 2.14.

Нехай тепер матриці $M = M_t(\overline{a})$ і $M' = M_t(\overline{a}')$ ізоморфні в категорії $\text{Mmat}(K)$, тобто існує оборотна матриця X над K така, що $MX = XM'$. Покажемо спочатку, що послідовності $\overline{w}$ і $\overline{w}'$ циклічно еквівалентні.

Припустимо протилежне. Тоді вони циклічно незалежні (див. виділений факт 1) в п. 2.6.1) і за твердженням 2.18 частковий порядок $\prec_{\overline{w}\overline{w}'}$, заданий в даному випадку на множині $[1, n] \cup [1, n]'$, є лінійним; позначимо єдиний максимальний елемент через m_0 . Якщо $m_0 = k \in [1, n]$, то $s' \prec_{\overline{w}\overline{w}'} k$ для довільного $s' \in [1, n]'$, а якщо $m_0 = k' \in [1, n]'$, то $s \prec_{\overline{w}\overline{w}'} k'$ для довільного $s \in [1, n]$. Тоді за лемою 2.20 в першому випадку $x_{k+1, s+1} \in R$ всіх $s = 0, 1, \dots, n-1$, а в другому — $x_{sk} \in R$ для всіх $s = 1, 2, \dots, n$. Отже, матриця X має за модулем R нульовий рядок або нульовий стовпець, і тому не може бути оборотною над K . Прийшли до протиріччя.

Отже, вагові послідовності $\overline{w}$ і $\overline{w}'$ циклічно еквівалентні, а тоді за твердженнями 2.3 можна вважати, що вони рівні. Із твердження 2.1 (частина b)) випливає, що залишилося показати діагональну подібність матриць $M_t(\overline{a})$ і $M_t(\overline{a}')$.

Частковий порядок $\prec_{\overline{w}\overline{w}}$, який будемо позначати через $\prec_{2\overline{w}}$, вже не є лінійним: j і j' будуть непорівняльними для довільного $j \in [1, n]$. Із неперіодичності послідовності $\overline{w}$, очевидно, випливає, що інших пар непорів-

няльних елементів в $[1, n] \cup [1, n]'$ немає. Отже, існують рівно два максимальних елементи, які позначимо через m_0 і m'_0 ($m_0 \in [1, n]$). Оскільки $i \prec_{2\bar{w}} m'_0$ для будь-якого $i \neq m_0$ із $[1, n]$, то за лемою 2.20 всі елементи m_0 -го стовпця матриці X , за виключенням x_{m_0, m_0} , є нульовими за модулем R . Отже, елемент $x_{m_0, m_0} \in K$ є оборотним (бо оборотна матриця X). Із рівностей (2.3) при $i = j$ випливає, що $\varepsilon x_{m_0, m_0} = \varepsilon' x_{m_0, m_0}$, де $\varepsilon = \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n$ і $\varepsilon' = \varepsilon'_1 \cdots \varepsilon'_{n-1} \varepsilon'_n$. Звідси маємо, що $\varepsilon = \varepsilon'$, а отже, за твердженням 2.4 матриці $M_t(\bar{a})$ і $M_t(\bar{a}')$ діагонально подібні.

Нехай тепер вагові послідовності $\bar{w}$ і $\bar{w}'$ матриць $M = M_t(\bar{a})$ і $M' = M_t(\bar{a}')$ періодичні. Найменші їх періоди позначимо через p і q ; покладемо $n_p = \frac{n}{p}$, $n_q = \frac{n}{q}$. Оскільки матриця M діагонально-перестановочно подібна відповідній їй p -зведеній канонічно циклічній матриці $M_0 = M_{pt}(\bar{w}_0, \varepsilon)$, де $\bar{w}_0$ позначає послідовність $\bar{w}_p$, а матриця M' — матриці $M'_0 = M_{qt}(\bar{w}'_0, \varepsilon)$, де $\bar{w}'_0$ позначає послідовність $\bar{w}'_q$, то замість M і M' можна розглядати відповідно M_0 і M'_0 . Оскільки p і q — найменші періоди послідовностей $\bar{w}$ і $\bar{w}'$, то послідовності $\bar{w}_0$ і $\bar{w}'_0$ неперіодичні. Визначальні клітини Фробеніуса матриць M і M' позначимо відповідно через Φ і Φ' .

Доведення в цьому випадку проводиться за схемою, аналогічною схемі доведення у випадку неперіодичних послідовностей (але проведеною не для всіх матриць, як у доведенні, а лише для зведених), з використанням міркувань із доведення теореми 2.15. Тому доведення буде викладено в дещо скороченому вигляді.

Нехай матриці M_0 і M'_0 ізоморфні в категорії $M_t(\bar{a}')$ і нехай X — оборотна матриця така, що $M_0 X = X M'_0$. Будемо розглядати X як блокову матрицю $X = (X_{ij})$ з блоками X_{ij} розміру $n_0 \times n'_0$; матриці в указаній рівності будемо перемножувати поблоково. Тоді ця матрична рівність еквівалентна системі матричних рівностей

$$\langle i, j \rangle_{00'} : (M_0 X)_{ij} = (X M'_0)_{ij},$$

де i пробігає числа від 1 до p , а j від 1 до q . Ці рівності мають такий же вигляд, як і рівності (2.2), але з двома відмінностями: d треба замінити на q і в правих частинах рівностей Φ замінити на Φ' .

Покажемо спочатку, що послідовності $\bar{w}_0$ і $\bar{w}'_0$ мають однакову довжину і циклічно еквівалентні.

Припустимо, що хоча б одна із цих умов не виконується. Покладемо $\alpha = \bar{w}_0$, $\alpha' = \bar{w}'_0$. Тоді вони циклічно незалежні (див. виділені в п. 2.5.1 факти 1) і 2)) і за твердженням 2.18 частковий порядок $\prec_{\alpha\alpha'}$, заданий в даному випадку на множині $[1, p] \cup [1, q]'$, є лінійним. Отже (див. доведення у випадку неперіодичних вагових послідовностей матриць M і M'), матриця X має за модулем R нульову горизонтальну або вертикальну смугу, і тому не може бути оборотною. Прийшли до протиріччя.

Отже, послідовності $\bar{w}_0$ і $\bar{w}'_0$ мають однакову довжину (а значить $p = q$) і циклічно еквівалентні, а тоді, очевидно, циклічно еквівалентними є і послідовності $\bar{w}$ і $\bar{w}'$.

Для завершення доведення достатньо показати, що елементи $\varepsilon = \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n$ і $\varepsilon' = \varepsilon'_1 \cdots \varepsilon'_{n-1} \varepsilon'_n$, що відповідають визначальним послідовностям матриць M і M' , дорівнюють один одному (див. твердження 2.4).

Оскільки за твердженням 2.3 можна вважати, що вагові послідовності $\bar{w}$ і $\bar{w}'$, що матриці M і M' рівні, то p -зведені канонічно циклічні матриці, які їм відповідають, мають однакові відповідні блоки, за виключенням тих, які стоять на перетині перших горизонтальних смуг з останніми вертикальними смугами, а це визначальні клітини Фробеніуса матриць M і M' . Аналогічно, як у випадку неперіодичних вагових послідовностей матриць M і M' , доводиться, що існує $m_0 \in [1, p]$ таке, що діагональний блок X_{m_0, m_0} матриці X оборотний і $\Phi X_{m_0, m_0} = X_{m_0, m_0} \Phi'$. Прирівнюючи визначники обох частин цієї рівності, маємо, що визначники фробеніусових матриць Φ і Φ' рівні, звідки $\varepsilon = \varepsilon'$, що і треба було довести.

Єдиний ще нерозглянутий випадок, коли матриця M має неперіодичну

вагову послідовність, а матриця M' періодичну, неможливий. Це випливає із міркувань, які в попередньому випадку привели до рівності найменших періодів, якщо для першої матриці за p взяти “квазіперіод” n . $\square$

2.7. Ізоморфізм канонічно ланцюгових матриць в категорії мономіальних матриць

Якщо зафіксувати твірний елемент t радикала R , тоді $\bar{a} = (\varepsilon_1 t^{s_1}, \dots, \varepsilon_{n-1} t^{s_{n-1}})$, де $s_i = w(a_i)$ і ε_i — деякі елементи із K^* . У цьому випадку матрицю $N(\bar{a})$ позначаємо також через $N_t(\bar{a}) = N_t(a_1, \dots, a_{n-1})$ або $N_t(\bar{w}, \bar{\varepsilon})$, де $\bar{w} = \bar{w}(\bar{a})$ і $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$. Очевидно, що матриця $N_t(\bar{w}, \bar{\varepsilon})$ діагонально подібна матриці $N_t(\bar{w}, \bar{1})$, де $\bar{1} = (1, \dots, 1)$. Згідно сказаного канонічно ланцюгову матрицю вигляду $N_t(\bar{w}, \bar{1})$ природно називати *зведеною*.

Має місце наступна теорема.

Теорема 2.21. *Канонічно ланцюгові матриці $N_t(\bar{a})$ і $N_t(\bar{a}')$ ізоморфні в категорії $\text{Mmat}(K)$ тоді і лише тоді, коли вони ізоморфні в категорії $\text{Mmat}_0(K)$.*

Доведення цієї теореми проводиться аналогічно доведенню теореми 2.19 (випадок двох неперіодичних вагових послідовностей).

Яким чином у випадку ланцюгових матриць дається означення строгого часткового порядку $\prec_{\bar{w}}$, вже говорилося в п. 2.5.7. Продовжуючи сказане в п. 2.5.7 дамо (у випадку ланцюгових матриць) означення строгого часткового порядку $\prec_{\bar{w}\bar{w}'}$.

Нехай $\bar{w} = (s_1, s_2, \dots, s_{n-1})$ і $\bar{w}' = (s'_1, s'_2, \dots, s'_{n-1})$ — вагові послідовності матриць $N = N_t(\bar{a})$ і $N' = N_t(\bar{a}')$. Частковий порядок $\prec_{\bar{w}\bar{w}'}$ на множині $[1, n] \cup [1, n]'$, де $[1, n]' = \{i' \mid i \in [1, n]\}$ вводиться таким же чином, як у випадку двох канонічно циклічних матриць з неперіодичними

послідовностями. А саме, з урахуванням нових позначень в п. 2.5.7,

$$i \prec_{\overline{w}\overline{w}'} j \iff \overline{w}_i <_n \overline{w}_j, \text{ якщо } i, j \in [1, n];$$

$$i' \prec_{\overline{w}\overline{w}'} j' \iff \overline{w}'_i <_n \overline{w}'_j, \text{ якщо } i', j' \in [1, n]';$$

$$i \prec_{\overline{w}\overline{w}'} j' \iff \overline{w}_i <_n \overline{w}'_j, \text{ якщо } i \in [1, n], j' \in [1, n]';$$

$$i' \prec_{\overline{w}\overline{w}'} j \iff \overline{w}'_i <_n \overline{w}_j, \text{ якщо } i' \in [1, n]', j \in [1, n].$$

Цей порядок лінійний.

2.8. Загальна теорема про ізоморфізм об'єктів в категорії мономіальних матриць

Має місце наступна теорема.

Теорема 2.22. *Два нерозкладні об'єкти категорії $\text{Mmat}_0(K)$ ізоморфні в категорії $\text{Mmat}(K)$ тоді і лише тоді, коли вони ізоморфні в $\text{Mmat}_0(K)$.*

Ця теорема випливає із теорем і наступної простої теореми, яка вказує на зв'язок (в сенсі подібності) між канонічно ланцюговими та циклічними матрицями.

Теорема 2.23. *Канонічно ланцюгова матриця N та канонічно циклічна матриця M не можуть бути ізоморфними в категорії $\text{Mmat}(K)$.*

Дійсно, нехай $CNC^{-1} = M$ і нехай $v_0 = (1, 0, \dots, 0)$. Тоді $(v_0C^{-1})M = v_0C^{-1}CNC^{-1} = (v_0N)C^{-1} = 0$. І оскільки вектор v_0C^{-1} містить оборотну координату, — скажімо, на i -му місці, — то $i - 1$ -ий стовпець матриці M буде нульовим, що неможливо для циклічної матриці ($i - 1$ при $i = 1$ ототожнюється з n).

2.9. Зауваження

Усі означення і достатні умови розкладності та ізоморфізму об'єктів залишаються вірними для довільного комутативного локального кільця K

(і довільного ненульового елемента радикала R).

2.10. Висновки до розділу

У цьому розділі вивчаються нерозкладні та ізоморфні об'єкти сильної та звичайної категорій мономіальних матриць над довільним локальним кільцем головних ідеалів. Повністю описані нерозкладні та ізоморфні об'єкти сильної категорії мономіальних матриць. Доведено, що канонічно циклічна матриця з неперіодичною ваговою послідовністю нерозкладна. Вказано необхідні і достатні умови (окремо) нерозкладності канонічно циклічної матриці з періодичною ваговою послідовністю. Доведено, що канонічно циклічні матриці ізоморфні в категорії мономіальних матриць тоді і лише тоді, коли вони ізоморфні в сильній категорії мономіальних матриць. Достатні умови розкладності та ізоморфізму об'єктів залишаються вірними для довільного комутативного локального кільця.

Результати цього розділу опубліковані в роботах [53], [57], [64], [65].

Розділ 3

ЗАГАЛЬНІ ТВЕРДЖЕННЯ ПРО НЕЗВІДНІ ТА ЗВІДНІ МОНОМІАЛЬНІ МАТРИЦІ ДОВІЛЬНОЇ ВАГИ

Протягом цього і наступного розділів вивчаються незвідні і звідні мономіальні матриці над комутативним локальним кільцем K з ненульовим радикалом. У випадках, коли K є кільцем головних ідеалів (або не обов'язково локальне), цей факт оговарюється. Під матрицею порядку n будемо розуміти матрицю розміру $n \times n$. Всі ланцюгові матриці порядку $n > 1$ звідні і тому будемо розглядати лише циклічні матриці. А оскільки при перенумерації рядків і стовпців незвідність чи звідність не змінюється, то достатньо обмежитися розглядом канонічно циклічних матриць.

3.1. Додаткові означення і позначення

Нехай K — довільне комутативне локальне кільце і t — ненульовий елемент радикала R кільця K . Всі пов'язані з мономіальними матрицями означення розділу 2 (в якому розглядаються комутативні локальні кільця головних ідеалів) автоматично переносяться на цей випадок.

Якщо K — комутативне локальне кільце (не обов'язково головних ідеалів) і t — елемент радикала кільця, то канонічно циклічну матрицю M з визначальною послідовністю $\bar{a} = (\varepsilon_1 t^{s_1}, \dots, \varepsilon_{n-1} t^{s_{n-1}}, \varepsilon_n t^{s_n})$ будемо називати *канонічно $(t, *)$ -циклічною*. Канонічно $(t, *)$ -циклічну матрицю M будемо називати *канонічно t -циклічною*, якщо $\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_{n-1} = \varepsilon_n = 1$.

У цьому випадку окрім введених в п. 2.4.3 позначень, будемо використовувати запис $M = M(t, s_1, s_2, \dots, s_n)$, тобто

$$M(\bar{a}) = M(t, s_1, \dots, s_n) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & t^{s_n} \\ t^{s_1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & t^{s_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Очевидно, можна вважати, що серед чисел s_i є хоча б одне нульове, інакше вона має вигляд $t^s M(t, s'_1, \dots, s'_n)$ з деяким нульовим s'_i . Окрім того, при цьому можна вважати, що не всі s_i дорівнюють нулю, бо інакше матимемо добре вивчений випадок клітини Фробеніуса

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

зокрема, при $n > 1$ вона завжди звідна (в загально прийнятому значенні — див. нижче).

Якщо виконано обидві ці умови, то канонічно t -циклічну матрицю називатимемо *строгою*. Надалі будуть розглядатися як строгі, так і не строгі матриці.

Нагадаємо, що за означенням (із п. 2.4.3) сума ваг ненульових елементів канонічно циклічної матриці M над комутативним кільцем головних ідеалів називається її вагою; при цьому вага не залежить від вибору елемента t . У цьому випадку вагу матриці M будемо позначати через $w(M)$. Для канонічно $(t, *)$ -циклічних матриць для довільного комутативного локального кільця вага матриці M вже залежить від t . У цьому випадку

будемо говорити про *вагу відносно t* або *t -вагу* матриці M і позначатимемо її $w_t(M)$.

Будемо говорити, що канонічно $(t, *)$ -циклічна матриця має *малу вагу*, якщо її t -вага менша ступеня нільпотентності елемента t , і *велику вагу* — в протилежному випадку. Якщо t ненільпотентний, то t -вага завжди мала. У випадку комутативного кільця головних ідеалів ступінь нільпотентності t збігається із ступенем нільпотентності радикала кільця.

У виключних випадках канонічно циклічні матриці розглядаються і відносно елемента t , що не належить радикалу (якщо це крайній випадок якогось твердження, який вписується в загальне формулювання).

На завершення цього підрозділу нагадаємо, що матриця A порядку n над комутативним кільцем K називається звідною, якщо існує оборотна (над K) матриця C така, що

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} A_1 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

де A_1 і A_2 — матриці відповідно порядків $n_1 > 0$ і $n_2 > 0$.

3.2. Критерії незвідності для канонічно циклічних матриць малих порядків

3.2.1. Формулювання критеріїв. Для матриць малих порядків отримано наступні два критерії їх незвідності.

Теорема 3.1. *Нехай K — комутативне локальне кільце з радикалом $R = tK \neq 0$. Канонічно t -циклічна матриця порядку $n < 7$, елементи вагової послідовності якої належать множині $\{0, 1\}$, незвідна тоді і лише тоді, коли її t -вага взаємно проста з n .*

Теорема 3.2. *Нехай K — комутативне локальне кільце з радикалом $R = tK$ і нехай $R^2 \neq 0$. Канонічно t -циклічна матриця порядку*

$n < 5$, елементи вагової послідовності якої належать множині $\{0, 1, 2\}$, незвідна тоді і лише тоді, коли її t -вага взаємно проста з n .

Нагадаємо, що вагова послідовність називається *2-однорідною*, якщо вона має вигляд $(a, a, \dots, a, b, b, \dots, b)$, де $a \neq b$ і обидва елементи a, b реально зустрічаються. З таким обмеженням на вагову послідовність перша теорема доведена в роботі [70]; там же вказано і контприклад при $n = 7$ (для 2-однорідних вагових послідовностей).

3.2.2. Доведення критерія 3.1. Достатність. Матрицю, отриману із матриці M над кільцем K редукцією по модулю радикала позначимо через $\overline{M}$.

Нам знадобиться декілька лем. При цьому K таке ж, як в умові критерія.

Лема 3.3 ([70]). *Нехай $s_1, \dots, s_n \in \{0, 1\}$, причому $s_i = 0$ для хоча б одного $i \in \{1, \dots, n\}$. Тоді матриця $M = M(t, s_1, \dots, s_n)$ не подібна матрицям вигляду*

$$M_1 = \begin{pmatrix} tA & D \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & tB \end{pmatrix},$$

де A — матриця розміру $r \times r$ і B — матриця розміру $(n - r) \times (n - r)$. ($0 < r < n$).

Лема 3.4 ([70]). *Нехай $s_1, \dots, s_n \geq 0$ — цілі числа, причому $s_i \neq 0$ для хоча б одного $i \in \{1, \dots, n\}$ матриця $M = M(t, s_1, \dots, s_n)$ не подібна матриці*

$$N = \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

де A — матриця розміру $r \times r$ і B — матриця розміру $(n - r) \times (n - r)$ ($0 < r < n$), A або B є оборотною.

Лема 3.5. *Матриця $M(t, 0, 0, 1, 0, 1)$ незвідна.*

Доведення. Припустимо, що матриця $M(t, 0, 0, 1, 0, 1)$ є звідною. Тоді для деякої оборотної матриці C маємо

$$M(t, 0, 0, 1, 0, 1)C = C \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & B \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

де A — матриця розміру $s \times s$ і B матриця розміру $(5 - s) \times (5 - s)$ ($0 < s < 5$).

Оскільки наша матриця подібна транспонованій (бо вагова послідовність симетрична з точністю до циклічної перестановки), можна вважати, що $s \leq 5 - s$, тобто $s = 1$ і $s = 2$. Оскільки випадок $s = 1$ є тривіальним, розглянемо тільки випадок, коли $s = 2$. Покладемо $C = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq 5}$, $c_p = (c_{p1}, c_{p2})$ ($p = 1, \dots, 5$). Тоді з рівності (3.2) отримуємо

$$tc_5 = c_1A, \quad c_1 = c_2A, \quad c_2 = c_3A, \quad tc_3 = c_4A, \quad c_4 = c_5A. \quad (3.3)$$

За лемами 3.3 і 3.4 $\text{rank}(\bar{A}) = 1$. Оскільки матриця $\bar{A}$ нільпотентна, то, не зменшуючи загальності, можемо вважати, що

$$A = \begin{pmatrix} t\alpha & 1 + t\beta \\ t\gamma & t\delta \end{pmatrix},$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$. Підставивши A у рівності (3.3), отримуємо

$$\left\{ \begin{array}{l} (tc_{51}, tc_{52}) = (c_{11}t\alpha + c_{12}t\gamma, c_{11} + c_{11}t\beta + c_{12}t\delta), \\ (c_{11}, c_{12}) = (c_{21}t\alpha + c_{22}t\gamma, c_{21} + c_{21}t\beta + c_{22}t\delta), \\ (c_{21}, c_{22}) = (c_{31}t\alpha + c_{32}t\gamma, c_{31} + c_{31}t\beta + c_{32}t\delta), \\ (tc_{31}, tc_{32}) = (c_{41}t\alpha + c_{42}t\gamma, c_{41} + c_{41}t\beta + c_{42}t\delta), \\ (c_{41}, c_{42}) = (c_{51}t\alpha + c_{52}t\gamma, c_{51} + c_{51}t\beta + c_{52}t\delta). \end{array} \right. \quad (3.4)$$

З рівностей (3.4) маємо $\bar{c}_{11} = \bar{c}_{21} = \bar{c}_{41} = 0$, і

$$\begin{aligned}
\bar{c}_{12} &= 0 \text{ (оскільки } c_{12} = c_{21} + c_{21}t\beta + c_{22}t\delta \text{ і } \bar{c}_{21} = 0), \\
\bar{c}_{51} &= 0 \text{ (оскільки } tc_{51} = c_{11}t\alpha + c_{12}t\gamma \text{ і } \bar{c}_{11} = \bar{c}_{12} = 0), \\
\bar{c}_{42} &= 0 \text{ (оскільки } c_{42} = c_{51} + c_{51}t\beta + c_{52}t\delta \text{ і } \bar{c}_{51} = 0), \\
\bar{c}_{31} &= \bar{c}_{41}\bar{\alpha} + \bar{c}_{42}\bar{\gamma} = 0 \text{ (оскільки } tc_{31} = c_{41}t\alpha + c_{42}t\gamma \\
&\text{і } \bar{c}_{41} = \bar{c}_{42} = 0).
\end{aligned}$$

Отже, $\det(\bar{C}) = 0$. Прийшли до протиріччя. $\square$

Лема 3.6. Матриця $M(t, 0, 1, 1, 0, 1)$ незвідна.

Доведення. Припустимо, що матриця $M(t, 0, 1, 1, 0, 1)$ є звідною. Тоді для деякої оборотної матриці C маємо

$$M(t, 0, 1, 1, 0, 1)C = C \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & B \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

де A матриця розміру $s \times s$ і B матриця розміру $(5-s) \times (5-s)$ ($0 < s < 5$).

Як і в доведенні попередньої леми, можна вважати, що $s \leq 5-s$, тобто $s = 1$ або $s = 2$. Оскільки випадок $s = 1$ є тривіальним, розглянемо тільки випадок, коли $s = 2$.

Покладемо $C = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq 5}$, $c_p = (c_{p1}, c_{p2})$ ($p = 1, \dots, 5$). Тоді з рівності (3.5) отримуємо

$$tc_5 = c_1A, \quad c_1 = c_2A, \quad tc_2 = c_3A, \quad tc_3 = c_4A, \quad c_4 = c_5A. \quad (3.6)$$

За лемами 3.3 і 3.4 $\text{rank}(\bar{A}) = 1$. Оскільки матриця $\bar{A}$ нільпотентна, то, не зменшуючи загальності, можемо вважати, що

$$A = \begin{pmatrix} t\alpha & 1 + t\beta \\ t\gamma & t\delta \end{pmatrix},$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$.

Підставивши A у рівності (3.6), отримуємо

$$\left\{ \begin{array}{l} (tc_{51}, tc_{52}) = (c_{11}t\alpha + c_{12}t\gamma, c_{11} + c_{11}t\beta + c_{12}t\delta), \\ (c_{11}, c_{12}) = (c_{21}t\alpha + c_{22}t\gamma, c_{21} + c_{21}t\beta + c_{22}t\delta), \\ (tc_{21}, tc_{22}) = (c_{31}t\alpha + c_{32}t\gamma, c_{31} + c_{31}t\beta + c_{32}t\delta), \\ (tc_{31}, tc_{32}) = (c_{41}t\alpha + c_{42}t\gamma, c_{41} + c_{41}t\beta + c_{42}t\delta), \\ (c_{41}, c_{42}) = (c_{51}t\alpha + c_{52}t\gamma, c_{51} + c_{51}t\beta + c_{52}t\delta). \end{array} \right. \quad (3.7)$$

З рівностей (3.7) отримуємо, що $\bar{c}_{11} = \bar{c}_{41} = 0 = \bar{c}_{31}$ і

$$\bar{c}_{12} = \bar{c}_{21} \text{ (оскільки } c_{12} = c_{21} + c_{21}t\beta + c_{22}t\delta),$$

$$\bar{c}_{51} = \bar{c}_{12}\bar{\gamma} \text{ (оскільки } tc_{51} = c_{11}t\alpha + c_{12}t\gamma \text{ і } \bar{c}_{11} = 0),$$

$$\bar{c}_{21} = \bar{c}_{32}\bar{\gamma} \text{ (оскільки } tc_{21} = c_{31}t\alpha + c_{32}t\gamma \text{ і } \bar{c}_{31} = 0)$$

$$\bar{c}_{42} = \bar{c}_{51} \text{ (оскільки } c_{42} = c_{51} + c_{51}t\beta + c_{52}t\delta),$$

$$\bar{c}_{42}\bar{\gamma} = 0 \text{ (оскільки } tc_{31} = c_{41}t\alpha + c_{42}t\gamma \text{ і } \bar{c}_{31} = \bar{c}_{41} = 0).$$

Якщо $\bar{\gamma} = 0$, то $\bar{c}_{51} = 0$ і $\bar{c}_{21} = 0$. Якщо $\bar{\gamma} \neq 0$ то $\gamma \in R^*$, $\bar{c}_{42} = 0$ і тому $\bar{c}_{51} = 0$, $\bar{c}_{12} = 0$ і $\bar{c}_{21} = 0$. Отже, $\det(\bar{C}) = 0$. Протиріччя. $\square$

Переходимо безпосередньо до доведення достатності теореми 3.1. Якщо всі елементи вагової послідовності рівні між собою, канонічно t -циклічна матриця порядку n звідна, якщо $n > 1$, і незвідна, якщо $n = 1$. З іншого боку, у цьому випадку при $n > 1$ t -вага матриці не взаємно проста з n , а при $n = 1$ — взаємно проста. Отже, можна вважати, що вагова послідовність містить як число 0, так і число 1. Оскільки теорема для 2-однорідних вагових послідовностей доведена раніше (див. вище), а вагову послідовність можна розглядати з точністю до циклічної перестановки (бо при цьому відповідні канонічно циклічні матриці будуть переставно подібними), то досить розглянути випадки канонічно t -циклічних матриць $M(t, 0, 0, 1, 0, 1)$ і $M(t, 0, 1, 1, 0, 1)$. А ці матриці незвідні за двома останніми лемами.

Необхідність. Ця частина доведення впливає із теореми 3.12, яка формулюється і доводиться нижче (якщо її переформулювати в еквіва-

лентній формі як достатню умову звідності).

3.2.3. Доведення критерія 3.2. Достатність. Напомнимо, що матриця, отримана із матриці M над кільцем K редукцією по модулю радикала, позначається через $\overline{M}$.

Доведемо спочатку потрібні леми.

Лема 3.7. *Нехай K — комутативне локальне кільце з радикалом $R = tK$, n — натуральне число, $s_i \geq 0$ — цілі числа ($i = 1, \dots, n$), серед яких є різні, $t = \max\{s_i | i = 1, \dots, n\}$. Якщо $R^m \neq 0$, то матриця $M(t, s_1, \dots, s_n)$ не подібна ні одній із матриць вигляду*

$$M_1 = \begin{pmatrix} t^m A & D \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & t^m B \end{pmatrix},$$

де A і B — матриці відповідно порядків r і $n - r$ ($0 < r < n$).

Доведення. Припустимо, що існує така оборотна матриця C , що $C^{-1}M(t, s_1, \dots, s_n)C = M_1$. Тобто

$$M(t, s_1, \dots, s_n)C = C \begin{pmatrix} t^m A & D \\ 0 & B \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Покладемо $C = (c_{ij})$ ($c_{ij} \in K$), $C_i = (c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in})$ ($i = 1, \dots, n$). Із (3.8) отримаємо, що $t^{s_n}c_n = t^m c_1 A$, $t^{s_1}c_1 = t^m c_2 A$, $\dots$, $t^{s_{n-1}}c_{n-1} = t^m c_n A$. Оскільки $t^m \neq 0$, то $\bar{c}_n = 0$ або $\bar{c}_n = \bar{c}_1 \bar{A}$ і $\bar{c}_i = 0$ або $\bar{c}_i = \bar{c}_{i+1} \bar{A}$ ($i = 1, \dots, n-1$). Ясно, що хоча б для одного l ($1 \leq l \leq n$) $s_l < m$ і $\bar{c}_l = 0$. Звідси $\bar{c}_1 = \dots = \bar{c}_{l-1} = 0$. Тоді $\bar{c}_n = 0$ і $\bar{c}_{l+1} = \dots = \bar{c}_{n-1} = 0$. Тому $\det \bar{C} = 0$, що неможливо. Аналогічно розглядається випадок $C^{-1}MC = M_2$ або (в еквівалентній формі) $C^{-1}M = M_2 C^{-1}$. $\square$

Лема 3.8. *Нехай K — комутативне локальне кільце з радикалом $R = tK \neq 0$, n — натуральне число, $s_i \geq 0$ — цілі числа ($i = 1, \dots, n$),*

серед яких є різні. Матриця $M(t, s_1, \dots, s_n)$ не подібна матриці вигляду

$$M = \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

де A і B — матриці відповідно порядків r і $n - r$ ($0 < r < n$), A або B оборотна.

Доведення. Дійсно матриця $\overline{M(t, s_1, \dots, s_n)}$ нільпотентна, тому матриці $\overline{A}$ та $\overline{B}$ нільпотентні. А, отже, матриці $\overline{A}$ і $\overline{B}$, як і матриці A та B , не можуть бути оборотними. $\square$

Найбільший спільний дільник натуральних чисел a і b позначаємо (a, b) .

Лема 3.9. Нехай K — комутативне локальне кільце з радикалом $R = tK$, $R^2 \neq 0$, $n \leq 4$, $0 \leq s_i \leq 2$, де $i = 1, 2, 3, 4$, $(n, \sum_{i=1}^n s_i) \neq n$. Матриця $M(t, s_1, \dots, s_n)$ не подібна ні одній із матриць вигляду

$$M_1 = \begin{pmatrix} tA' & D \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & tB' \end{pmatrix},$$

де A, A', B, B' — матриці відповідно порядків $r, r, n-r, n-r$ ($0 < r < n$), A' і B' оборотні.

Доведення. Припустимо, що існує така оборотна матриця C , що $C^{-1}M(t, s_1, \dots, s_n)C = M_1$. Тобто

$$M(t, s_1, \dots, s_n)C = C \begin{pmatrix} tA' & D \\ 0 & B \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Покладемо $C = (c_{ij})$ ($c_{ij} \in K$), $C_i = (c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{ir})$ ($i = 1, \dots, n$). Із (3.9) отримуємо, що $t^{s_n}c_n = tc_1A'$, $t^{s_1}c_1 = tc_2A'$, $\dots$, $t^{s_{n-1}}c_{n-1} = tc_nA'$. Нехай $m_i = \min\{k \in \mathbb{N} \cup \{0\} | c_i = t^k(\alpha_1, \dots, \alpha_r), \alpha_1, \dots, \alpha_r \in K\}$. Тоді для $1 \leq i \leq n$ $c_i = t^{m_i}c'_i$, $c'_i = (c'_{i1}, \dots, c'_{ir})$, де хоча б один

із елементів $c'_{i1}, \dots, c'_{ir} \in K$ оборотний. Звідси $t^{s_n+m_n}c'_n = t^{1+m_1}c'_1A'$, $t^{s_1+m_1}c'_1 = t^{1+m_2}c'_2A'$, $\dots$, $t^{s_{n-1}+m_{n-1}}c'_{n-1} = t^{1+m_n}c'_nA'$. Якщо $s_i + m_i \leq 2$ або $1 + m_{i+1} \leq 2$, тоді $s_i + m_i = 1 + m_{i+1}$ ($i = 1, \dots, n-1$). Крім того, якщо $s_n + m_n \leq 2$ або $1 + m_1 \leq 2$, тоді $s_n + m_n = 1 + m_1$. Нехай $\phi(i, n) \in \{1, \dots, n\}$ і $\phi(i, n) \equiv i \pmod{n}$, i — ціле число. Тоді для довільного цілого i якщо $s_{\phi(i,n)} + m_{\phi(i,n)} \leq 2$ або $1 + m_{\phi(i+1,n)} \leq 2$, а це означає, що

$$s_{\phi(i,n)} + m_{\phi(i,n)} = 1 + m_{\phi(i+1,n)}. \quad (3.10)$$

Оскільки матриця C — оборотна, то існує j ($1 \leq j \leq n$), що рядок c_j містить оборотний елемент і $m_j = 0$. Тоді $0 \leq s_j + m_j \leq 2$ і $1 + m_j = 1$. Отже,

$$s_j = s_j + m_j = 1 + m_{\phi(j+1,n)}, \quad s_{\phi(j-1,n)} + m_{\phi(j-1,n)} = 1 + m_j = 1. \quad (3.11)$$

Звідси $1 \leq 1 + m_{\phi(j+1,n)} \leq 2$, $0 \leq 1 - m_{\phi(j-1,n)} \leq 1$. Тоді $1 + m_{\phi(j-1,n)} \leq 2$ і

$$s_{\phi(j-2,n)} + m_{\phi(j-2,n)} = 1 + m_{\phi(j-1,n)}. \quad (3.12)$$

При $n \leq 3$ (3.11) і (3.12) означають, що (3.10) виконується при всіх цілих i . При $n = 4$

$$1 + m_{\phi(j-2,n)} = 2 - s_{\phi(j-2,n)} + m_{\phi(j-1,n)} = 3 - s_{\phi(j-2,n)} - s_{\phi(j-1,n)},$$

$$s_{\phi(j+1,n)} + m_{\phi(j+1,n)} = s_{\phi(j+1,n)} + s_j - 1 = s_{\phi(j+1,n)} + s_{\phi(j,n)} - 1.$$

Одне з чисел $1 + m_{\phi(j-2,n)}$ або $s_{\phi(j+1,n)} + m_{\phi(j+1,n)}$ не перевищує 2, оскільки інакше $s_{\phi(j-2,n)} = s_{\phi(j-1,n)} = 0$, $s_{\phi(j+1,n)} = s_{\phi(j,n)} = 2$ і $(4, \sum_{i=1}^4 s_i) = (4, 0 + 0 + 2 + 2) = 4$, що неможливо. Отже, $1 + m_{\phi(j-2,n)} = 1 + m_{\phi(j+2,n)} = s_{\phi(j+1,n)} + m_{\phi(j+1,n)}$ і (3.10) виконується при всіх цілих i . Додамо всі рівності (3.10):

$$\sum_{i=1}^n s_{\phi(i,n)} + \sum_{i=1}^n m_{\phi(i,n)} = n + \sum_{i=1}^n m_{\phi(i+1,n)}.$$

Звідки $(n, \sum_{i=1}^n s_i) = (n, n) = n$, що неможливо.

Аналогічно розглядається випадок $C^{-1}MC = M_2$ або (в еквівалентній формі) $C^{-1}M = M_2C^{-1}$. $\square$

Лема 3.10. *Нехай K — комутативне локальне кільце з радикалом $R = tK$, $R^2 \neq 0$, Матриці $M(t, 0, 2, 2)$ і $M(t, 0, 0, 2)$ незвідні.*

Доведення. Припустимо, що матриця $M(t, 0, i_1, 2)$ звідна $i_1 \in \{0, 2\}$. Тоді існує така оборотна матриця C , що

$$M(t, 0, i_1, 2)C = C \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & B \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

де A і B — квадратні матриці над кільцем K відповідно порядків r і $3 - r$ ($0 < r < 3$). Якщо $r = 1$, то $A \in K$. Оскільки $A \in t^2K$, $A = t\varepsilon$ ($\varepsilon \in K^*$) або $A \in K^*$, то отримуємо протиріччя з лемами 3.7, 3.9 або 3.8. Аналогічні міркування проводимо при $r = 2$, коли $B \in K$. $\square$

Лема 3.11. *Нехай K — комутативне локальне кільце з радикалом $R = tK$, $R^2 \neq 0$, Матриці $M(t, 0, 0, 1, 2)$, $M(t, 0, 0, 2, 1)$, $M(t, 0, 1, 0, 2)$, $M(t, 0, 2, 0, 1)$, $M(t, 0, 1, 2, 2)$, $M(t, 0, 2, 1, 2)$ і $M(t, 0, 2, 2, 1)$ незвідні.*

Доведення. Припустимо, що матриця $M(t, 0, 0, i_1, i_2)$, $M(t, 0, i_1, 0, i_2)$ або $M(t, 0, j_1, j_2, j_3)$ оборотна, де $\{i_1, i_2\} = \{1, 2\}$, $(j_1, j_2, j_3) \in$ деякою перестановкою елементів: 1, 2, 2. Очевидно, що $i_1 + i_2 = 3$, $j_1 + j_2 + j_3 = 5$. Тоді існує така оборотна матриця C , що

$$M(t, 0, 0, i_1, i_2)C = C \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad \text{або} \quad (3.14)$$

$$M(t, 0, i_1, 0, i_2)C = C \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

або

$$M(t, 0, j_1, j_2, j_3)C = C \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

де A і B — квадратні матриці над кільцем K відповідно порядків r і $4 - r$ ($0 < r < 4$). Оскільки матриця $M(t, 0, 0, 1, 2)$ подібна до транспонованої до $M(t, 0, 0, 2, 1)$ і навпаки, матриця $M(t, 0, 1, 0, 2)$ подібна до транспонованої до $M(t, 0, 2, 0, 1)$ і навпаки, матриця $M(t, 0, 1, 2, 2)$ подібна до транспонованої до $M(t, 0, 2, 2, 1)$ і навпаки, а $M(t, 0, 2, 1, 2)$ подібна до транспонованої до себе, тоді у вигляді (3.14) і (3.15) матриці A і B можна міняти ролями. При цьому, не зменшуючи загальності можна вважати, що $r \leq 4 - r$. Тобто $r = 1, 2$.

Розглянемо випадок, коли $r = 1$. Тоді $A \in K$. Оскільки $A \in t^2K$, $A = t\varepsilon$ ($\varepsilon \in K^*$) або $A \in K^*$, то отримуємо протиріччя з лемами 3.7, 3.9 або 3.8. Залишається розглянути випадок $r = 2$. Не зменшуючи загальності можна вважати, що A — незвідна матриця. Позначимо: $C_i = (c_{i1}, c_{i2})$ ($i = 1, \dots, 4$). Тоді з рівностей (3.14) і (3.15) отримуємо

$$\begin{cases} t^{i_2}c_4 = c_1A, \\ c_1 = c_2A, \\ c_2 = c_3A, \\ t^{i_1}c_3 = c_4A \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} t^{i_2}c_4 = c_1A, \\ c_1 = c_2A, \\ t^{i_1}c_2 = c_3A, \\ c_3 = c_4A \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} t^{j_3}c_4 = c_1A, \\ c_1 = c_2A, \\ t^{j_1}c_2 = c_3A, \\ t^{j_2}c_3 = c_4A. \end{cases} \quad (3.16)$$

Із лем 3.7, 3.8 або 3.9 випливає, що $\text{rank } \bar{A} = 1$ або $A = tF$, де F — квадратна матриця над кільцем K порядку 2, $\text{rank } \bar{F} = 1$.

Розглянемо спочатку випадок, коли $\text{rank } \bar{A} = 1$. Оскільки матриця $\overline{M(t, 0, 0, i_1, i_2)}$, $\overline{M(t, 0, i_1, 0, i_2)}$, а також, матриця $\overline{M(t, 0, j_1, j_2, j_3)}$ — нільпотентна, то матриця $\bar{A}$ також нільпотентна і можна вважати, що

$$A = \begin{pmatrix} t\alpha & 1 + t\beta \\ t\gamma & t\delta \end{pmatrix}$$

$(\alpha, \beta, \gamma, \delta \in K)$. Оскільки

$$S = \begin{pmatrix} 1 + t\beta & 0 \\ t\delta & 1 \end{pmatrix} \text{ оборотна і } S^{-1} = \begin{pmatrix} (1 + t\beta)^{-1} & 0 \\ -t\delta(1 + t\beta)^{-1} & 1 \end{pmatrix},$$

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} t\varepsilon & 1 \\ t\zeta & 0 \end{pmatrix} \quad (\varepsilon, \zeta \in K), \quad (3.17)$$

то можна вважати, що A має вигляд (3.17). Підставивши A в рівності (3.16) отримуємо:

$$\begin{cases} (t^{i_2}c_{41}, t^{i_2}c_{42}) = (c_{11}t\varepsilon + c_{12}t\zeta, c_{11}), \\ (c_{11}, c_{12}) = (c_{21}t\varepsilon + t\zeta c_{22}, c_{21}), \\ (c_{21}, c_{22}) = (c_{31}t\varepsilon + t\zeta c_{32}, c_{31}), \\ (t^{i_1}c_{31}, t^{i_1}c_{32}) = (c_{41}t\varepsilon + c_{42}t\zeta, c_{41}) \end{cases}$$

або

$$(3.18)$$

$$\begin{cases} (t^{i_2}c_{41}, t^{i_2}c_{42}) = (c_{11}t\varepsilon + c_{12}t\zeta, c_{11}), \\ (c_{11}, c_{12}) = (c_{21}t\varepsilon + c_{22}t\zeta, c_{21}), \\ (t^{i_1}c_{21}, t^{i_1}c_{22}) = (c_{31}t\varepsilon + c_{32}t\zeta, c_{31}), \\ (c_{31}, c_{32}) = (c_{41}t\varepsilon + c_{42}t\zeta, c_{41}) \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} (t^{j_3}c_{41}, t^{j_3}c_{42}) = (c_{11}t\varepsilon + c_{12}t\zeta, c_{11}), \\ (c_{11}, c_{12}) = (c_{21}t\varepsilon + c_{22}t\zeta, c_{21}), \\ (t^{j_1}c_{21}, t^{j_1}c_{22}) = (c_{31}t\varepsilon + c_{32}t\zeta, c_{31}), \\ (t^{j_2}c_{31}, t^{j_2}c_{32}) = (c_{41}t\varepsilon + c_{42}t\zeta, c_{41}). \end{cases} \quad (3.19)$$

Із першої системи (3.18) отримуємо: $\bar{c}_{11} = \bar{c}_{21} = \bar{c}_{41} = 0$. Крім того,

$$\begin{aligned} c_{31}t^2 &= c_{41}t^{2-i_1+1}\varepsilon + c_{42}t^{2-i_1+1}\zeta = c_{41}t^{i_2}\varepsilon + c_{42}t^{i_2}\zeta = c_{11}t\varepsilon^2 + c_{12}t\varepsilon\zeta + c_{11}\zeta = \\ &= c_{11}(t\varepsilon^2 + \zeta) + c_{12}t\varepsilon\zeta = c_{21}t\varepsilon(t\varepsilon^2 + \zeta) + c_{22}t\zeta(t\varepsilon^2 + \zeta) + c_{21}t\varepsilon\zeta = \\ &= c_{21}(t^2\varepsilon^3 + 2t\varepsilon\zeta) + c_{22}(t^2\varepsilon^2\zeta + t\zeta^2) = c_{31}t\varepsilon(t^2\varepsilon^3 + 2t\varepsilon\zeta) + c_{32}t\zeta(t^2\varepsilon^3 + 2t\varepsilon\zeta) + \\ &\quad + c_{31}(t^2\varepsilon^2\zeta + t\zeta^2) = c_{31}(t^3\varepsilon^4 + 3t^2\varepsilon^2\zeta + t\zeta^2) + c_{32}(t^3\varepsilon^3\zeta + 2t^2\varepsilon\zeta^2), \end{aligned}$$

причому $c_{31} \in tK$ або $\zeta \in tK$. У другому випадку $c_{31}t^2 \in t^3K$. Отже, $\bar{c}_{31} = 0$. Звідси $\det \bar{C} = 0$. Суперечність.

З другої системи (3.18) отримуємо: $\bar{c}_{11} = \bar{c}_{31} = 0$. Крім того,

$$\begin{aligned} c_{41}t^2 &= c_{11}t^{2-i_2+1}\varepsilon + c_{12}t^{2-i_2+1}\zeta = c_{11}t^{i_1}\varepsilon + c_{12}t^{i_1}\zeta = c_{21}t^{i_1+1}\varepsilon^2 + c_{22}t^{i_1+1}\varepsilon\zeta + \\ &+ c_{21}t^{i_1}\zeta = c_{21}t^{i_1}(t\varepsilon^2 + \zeta) + c_{22}t^{i_1+1}\varepsilon\zeta = c_{31}t\varepsilon(t\varepsilon^2 + \zeta) + c_{32}t\zeta(t\varepsilon^2 + \zeta) + \\ &+ c_{31}t\varepsilon\zeta = c_{31}(t^2\varepsilon^3 + 2t\varepsilon\zeta) + c_{32}(t^2\varepsilon^2\zeta + t\zeta^2) = \\ &= c_{41}t\varepsilon(t^2\varepsilon^3 + 2t\varepsilon\zeta) + c_{42}t\zeta(t^2\varepsilon^3 + 2t\varepsilon\zeta) + c_{41}(t^2\varepsilon^2\zeta + t\zeta^2) = \\ &= c_{41}(t^3\varepsilon^4 + 3t^2\varepsilon^2\zeta + t\zeta^2) + c_{42}(t^3\varepsilon^3\zeta + 2t^2\varepsilon\zeta^2), \end{aligned}$$

причому $\bar{c}_{41} = 0$. Аналогічно $\bar{c}_{21} = 0$. Отже, $\det \bar{C} = 0$. Суперечність.

Із рівностей (3.19) отримуємо: $\bar{c}_{11} = \bar{c}_{31} = \bar{c}_{41} = 0$. Крім того, $c_{41}t^{j_3} = c_{11}t\varepsilon + c_{12}t\zeta = c_{11}t\varepsilon + c_{21}t\zeta$. Якщо $\bar{\zeta} \neq 0$, тоді звідси і з умов $\bar{c}_{11} = \bar{c}_{41} = 0$, $j_3 \geq 1$ отримуємо $\bar{c}_{21} = 0$. Отже, $\det \bar{C} = 0$. Суперечність. При цьому $\bar{\zeta} = 0$, $\zeta = t\eta$ ($\eta \in K$).

Розглянемо спочатку випадок, коли $j_3 = 1$. Тоді $j_1 = j_2 = 2$, Припустимо $\bar{c}_{12} = \bar{c}_{21} \neq 0$. Тоді з рівностей (3.19) отримуємо: $c_{21}t^2 = c_{21}t^{j_1} = c_{31}t\varepsilon + c_{32}t\zeta = c_{22}t^3\varepsilon + c_{32}t^2\eta \notin t^3K$. Тоді $\bar{c}_{32}, \bar{\eta} \neq 0$. Крім того, $c_{22}t^4 = c_{22}t^{j_1}t^2 = c_{31}t^2 = c_{31}t^{j_2} = c_{41}t\varepsilon + c_{42}t\zeta = c_{32}t^3\varepsilon + c_{42}t^2\eta$ і $c_{42}t^2 = t^4c_{22}\eta^{-1} - t^3c_{32}\varepsilon\eta^{-1}$. Тоді $c_{32}t^3 = c_{32}t^{j_2}t = c_{41}t = c_{41}t^{j_3} = c_{11}t\varepsilon + c_{12}t\zeta = c_{42}t^2\varepsilon + c_{12}t^2\eta = c_{22}t^4\varepsilon\eta^{-1} - c_{32}t^3\varepsilon^2\eta^{-1} + c_{12}t^2\eta$. При цьому $\bar{c}_{12} = 0$ або $\bar{\eta} = 0$, що неможливо. Отже, $\bar{c}_{21} = 0$, що також неможливо.

Розглянемо випадок, коли $j_3 = 2$ ($j_1 + j_2 = 3$). Тоді $c_{42}t^2 = c_{42}t^{j_3} = c_{11} = c_{21}t\varepsilon + c_{22}t\zeta = c_{21}t\varepsilon + c_{22}t^2\eta$. Звідси $c_{21}t\varepsilon \in t^2K$ і, якщо $\bar{\varepsilon} \neq 0$, тоді $\bar{c}_{21} = 0$, що неможливо. Отже, $\bar{\varepsilon} = 0$, $\varepsilon = t\delta$ ($\delta \in K$). Із рівностей (3.19) отримуємо:

$$\begin{aligned} c_{21}t^2 &= c_{31}t^{2-j_1+1}\varepsilon + c_{32}^{2-j_1+1}\zeta = c_{31}t^{4-j_1}\delta + c_{32}t^{4-j_1}\eta = \\ &= c_{41}t^{6-j_1-j_2}\delta^2 + c_{42}t^{6-j_1-j_2}\eta\delta + c_{41}t^{4-j_1-j_2}\eta = c_{41}t^3\delta^2 + c_{42}t^3\eta\delta + tc_{41}\eta. \end{aligned} \tag{3.20}$$

якщо $\bar{\eta} \neq 0$, тоді $\bar{c}_{41} = 0$ і з рівності $c_{41}t^2 = c_{41}t^{j_3} = c_{11}t^2\delta + c_{12}t^2\eta$, маємо $0 = \bar{c}_{41} = \overline{c_{11}\delta} + \overline{c_{12}\eta} = \overline{c_{12}\eta} = \bar{c}_{21}\bar{\eta}$. Тоді $\bar{c}_{21} = 0$, що неможливо. Отже, $\bar{\eta} = 0$, $\eta = t\beta$, $\zeta = t^2\beta$ ($\beta \in K$). Тоді з (3.20) і (3.19) отримуємо: $c_{21}t^2 = c_{41}t^3\delta^2 + c_{42}t^3\eta\delta + t^2c_{41}\beta = c_{41}t^3\delta^2 + c_{42}t^3\eta\delta + c_{11}t^2\delta\beta + c_{12}t^3\beta^2 \in t^3K$. При цьому $\bar{c}_{21} = 0$, що неможливо.

Розглянемо тепер випадок, коли $A = tF$, $\text{rank } \bar{F} = 1$. Нехай $\bar{F}$ нільпотентна, тоді можна вважати

$$A = \begin{pmatrix} t^2\varepsilon & t \\ t^2\zeta & 0 \end{pmatrix} \quad (\varepsilon, \zeta \in K).$$

Підставивши A в рівностей (3.16), отримуємо:

$$\begin{cases} (t^{i_2}c_{41}, t^{i_2}c_{42}) = (c_{11}t^2\varepsilon + c_{12}t^2\zeta, c_{11}t), \\ (c_{11}, c_{12}) = (c_{21}t^2\varepsilon + c_{22}t^2\zeta, c_{21}t), \\ (c_{21}, c_{22}) = (c_{31}t^2\varepsilon + c_{32}t^2\zeta, c_{31}t), \\ (t^{i_1}c_{31}, t^{i_1}c_{32}) = (c_{41}t^2\varepsilon + c_{42}t^2\zeta, c_{41}t) \end{cases}$$

або (3.21)

$$\begin{cases} (t^{i_2}c_{41}, t^{i_2}c_{42}) = (c_{11}t^2\varepsilon + c_{12}t^2\zeta, c_{11}t), \\ (c_{11}, c_{12}) = (c_{21}t^2\varepsilon + c_{22}t^2\zeta, c_{21}t), \\ (t^{i_1}c_{21}, t^{i_1}c_{22}) = (c_{31}t^2\varepsilon + c_{32}t^2\zeta, c_{31}t), \\ (c_{31}, c_{32}) = (c_{41}t^2\varepsilon + c_{42}t^2\zeta, c_{41}t) \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} (t^{j_3}c_{41}, t^{j_3}c_{42}) = (c_{11}t^2\varepsilon + c_{12}t^2\zeta, c_{11}t), \\ (c_{11}, c_{12}) = (c_{21}t^2\varepsilon + c_{22}t^2\zeta, c_{21}t), \\ (t^{j_1}c_{21}, t^{j_1}c_{22}) = (c_{31}t^2\varepsilon + c_{32}t^2\zeta, c_{31}t), \\ (t^{j_2}c_{31}, t^{j_2}c_{32}) = (c_{41}t^2\varepsilon + c_{42}t^2\zeta, c_{41}t). \end{cases} \quad (3.22)$$

Із першої системи (3.21) отримуємо: $\bar{c}_{11} = \bar{c}_{21} = \bar{c}_{12} = \bar{c}_{22} = 0$ і $c_{41}t^{i_2} = c_{11}t^2\varepsilon + c_{12}t^2\zeta \in t^3K$. Звідси $\bar{c}_{41} = 0$. Із першої системи (3.21) маємо: $c_{31}t^2 = c_{41}t^{2-i_1+2}\varepsilon + c_{42}t^{2-i_1+2}\zeta = c_{41}t^{i_2+1}\varepsilon + c_{42}t^{i_2+1}\zeta = c_{11}t^3\varepsilon^2 + c_{12}t^3\zeta\varepsilon + c_{11}t^2\zeta \in t^3K$. При цьому $\bar{c}_{31} = 0$.

З другої системи (3.21): $\bar{c}_{11} = \bar{c}_{31} = \bar{c}_{12} = \bar{c}_{32} = 0$ і $c_{41}t^{i_2} = c_{11}t^2\varepsilon + c_{12}t^2\zeta \in t^3K$. Звідси $\bar{c}_{41} = 0$. З другої системи (3.21): $c_{21}t^{j_1} = c_{31}t^2\varepsilon + c_{32}t^2\zeta \in t^3K$. При цьому $\bar{c}_{21} = 0$.

Із рівностей (3.22) отримуємо: $\bar{c}_{11} = \bar{c}_{12} = 0$. $t^{j_3}c_{41} = c_{11}t^2\varepsilon + c_{12}t^2\zeta \in t^3K$, причому $\bar{c}_{41} = 0$.

Нехай $j_3 = 1$. Тоді $j_1 = j_2 = 2$. Із рівностей (3.22) отримуємо: $\bar{c}_{31} = 0$. $c_{21}t^2 = c_{31}t^2\varepsilon + c_{32}t^2\zeta = c_{31}t^2\varepsilon + c_{41}t\zeta = c_{31}t^2\varepsilon + c_{11}t^2\varepsilon\zeta + c_{12}t^2\zeta^2 \in t^3K$, причому $\bar{c}_{21} = 0$.

Нехай $j_3 = 2$. Тоді $j_1 + j_2 = 3$ і $c_{21}t^2 = c_{31}t^{2-j_1+2}\varepsilon + c_{32}t^{2-j_1+2}\zeta = c_{31}t^{j_2+1}\varepsilon + c_{32}t^{j_2+1}\zeta = c_{41}t^3\varepsilon^2 + c_{42}t^3\varepsilon\zeta + c_{41}t^2\zeta \in t^3K$, причому $\bar{c}_{21} = 0$. $c_{31}t^{j_2} = c_{41}t^2\varepsilon + c_{42}t^2\zeta = c_{11}t^2\varepsilon^2 + c_{12}t^2\varepsilon\zeta + c_{11}t\zeta = c_{11}t^2\varepsilon^2 + c_{12}t^2\varepsilon\zeta + c_{21}t^3\varepsilon\zeta + c_{22}t^3\zeta^2 \in t^3K$, причому $\bar{c}_{31} = 0$. Отже, $\det \bar{C} = 0$. Суперечність.

Нехай тепер $\bar{F}$ ненільпотентна, тоді можна вважати

$$A = \begin{pmatrix} t^2\varepsilon & 0 \\ t^2\zeta & t\eta \end{pmatrix},$$

де $(\varepsilon, \zeta \in K, \eta \in K^*)$. Тоді матриця A є звідною, що неможливо. $\square$

Переходимо безпосередньо до доведення достатності теореми 3.2.

Нехай $(n, \sum_{i=1}^n s_i) = 1$. Тоді $M(t, s_1, \dots, s_n)$ одна із матриць (вагові послідовності розглядаються з точністю до циклічних перестановок)

$$M(t, 0, 1), \quad M(t, 1, 2), \quad (3.23)$$

$$M(t, 0, 0, 1), \quad M(t, 0, 1, 1), \quad M(t, 1, 1, 2), \quad M(t, 1, 2, 2), \quad (3.24)$$

$$M(t, 0, 0, 2), \quad M(t, 0, 2, 2) \quad (3.25)$$

$$M(t, 0, 0, 0, 1), \quad M(t, 0, 1, 1, 1), \quad M(t, 1, 1, 1, 2), \quad M(t, 1, 2, 2, 2), \quad (3.26)$$

$$M(t, 0, 0, 1, 2), \quad M(t, 0, 0, 2, 1), \quad M(t, 0, 1, 0, 2), \quad M(t, 0, 2, 0, 1), \quad (3.27)$$

$$M(t, 0, 1, 2, 2), \quad M(t, 0, 2, 1, 2), \quad M(t, 0, 2, 2, 1).$$

Незвідність матриць (3.23), (3.24), (3.26) випливає із [70]. Матриці (3.25) незвідні за лемою 3.10. Матриці (3.27) незвідні за лемою 3.11.

Зауважимо, що незвідність матриць вигляду $M(t, 0, 1, 1, \dots, 1)$ доведена в роботі [71] (і цей результат використовується в [70]).

Необхідність. Ця частина доведення впливає із теореми 3.12, яка формулюється і доводиться нижче (якщо її переформулювати в еквівалентній формі як достатню умову звідності).

3.2.4. Контрприклад. Як було сказано вище, для $n \geq 7$ теорема 3.1 невірна.

Покажемо, що для $n \geq 5$ теорема 3.2 невірна.

Нехай K — комутативне локальне кільце, $RadK = tK$, $t^2 \neq 0$, $t^3 = 0$. Покажемо, що матриця

$$M(t, 0, 0, 2, 2, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^2 & 0 \end{pmatrix}$$

порядку 5 звідна.

Розглянемо оборотну матрицю

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -t & 0 \\ 0 & -t & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C^{-1}MC = C^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t^2 \\ 0 & 0 & t & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & t & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & t^2 \\ 0 & 0 & 0 & -t & 0 \end{array} \right).$$

3.3. Загальна необхідна умова незвідності канонічно циклічних матриць

У цьому підрозділі K позначає довільне комутативне кільце, а t — довільний його елемент. Всі позначення, введені вище у випадку, коли кільце K локальне, а $t \neq 0$ належить його радикалу, зберігаються.

3.3.1. Формулювання теореми.

Теорема 3.12. *Нехай K — комутативне кільце, $t \in K$. Якщо матриця*

$$M(t, s_1, \dots, s_n) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & t^{s_n} \\ t^{s_1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & t^{s_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}$$

незвідна, то її t -вага взаємно проста з її порядком.

3.3.2. Доведення теореми 3.12. Нагадаємо, що найбільший спільний дільник натуральних чисел a і b позначаємо (a, b) .

Замість матриці $M(t, s_1, \dots, s_n)$ над K будемо розглядати матрицю $M(\lambda, s_1, \dots, s_n)$ над кільцем цілочислових поліномів $\mathbb{Z}[\lambda]$. Оскільки існує гомоморфізм $f : \mathbb{Z}[\lambda] \rightarrow K$ такий, що $f(1) = 1$, $f(\lambda) = t$, то теорема 3.12 випливає із наступного твердження (яке разом з доведенням буде також використано нижче).

Твердження 3.13. *Нехай n — натуральне число, $s_i \geq 0$ — цілі числа ($i = 1, \dots, n$). Якщо $(n, \sum_{i=1}^n s_i) > 1$, тоді для довільного загального дільника $d > 1$ чисел n і $\sum_{i=1}^n s_i$ матриця $M(\lambda, s_1, \dots, s_n)$ над кільцем $\mathbb{Z}[\lambda]$ подібна матриці вигляду*

$$N = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

де A — матриця порядку $n' = \frac{n}{d}$.

Поле часток кільця $\mathbb{Z}[\lambda]$ позначимо через F . Під базисом векторного простору будемо розуміти впорядкований базис.

Щоб було більш зрозумілим доведення цього твердження в загальному випадку, розглянемо спочатку частинний випадок.

Розглянемо матрицю

$$M = M(\lambda, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тут $n = 8, s = \sum_{i=1}^n s_i = 6, d = 2$. Оскільки $n = dm, s = dk$, то $m = 4, k = 3$.

Нехай $\bar{e} = (e_1, e_2, \dots, e_8)$ є базисом векторного простору F^8 і φ — лінійний оператор, визначений матрицею M у базисі $e_1, e_2, \dots, e_8$ заданого лінійного простору. Оператор φ діє на базисних векторах наступним чином: $\varphi(e_1) = e_2, \varphi(e_2) = e_3, \varphi(e_3) = e_4, \varphi(e_4) = e_5, \varphi(e_5) = \lambda e_6, \varphi(e_6) = \lambda e_7, \varphi(e_7) = \lambda^2 e_8, \varphi(e_8) = \lambda^2 e_1$. Очевидно, $\varphi^8(e_1) = \lambda^6 e_1$.

Покладемо

$$b'_1 = \sum_{i=1}^d \lambda^{(d-i)k} \varphi^{(i-1)m}(e_1) = \lambda^3 e_1 + \varphi^4(e_1) = \lambda^3 e_1 + e_5.$$

Тоді

$$\varphi^4(b'_1) = \varphi^4(\lambda^3 e_1 + \varphi^4(e_1)) = \lambda^3 \varphi^4(e_1) + \varphi^8(e_1) = \lambda^3 e_5 + \lambda^6 e_1 = \lambda^3 b'_1.$$

Визначимо рекурентно b'_j ($j = 2, 3, 4$).

$$b'_2 = \varphi(b'_1), \quad b'_3 = \varphi(b'_2), \quad b'_4 = \varphi(b'_3).$$

Очевидно,

$$b'_1 = \lambda^3 e_1 + e_5,$$

$$b'_2 = \lambda^3 e_2 + \lambda e_6,$$

$$b'_3 = \lambda^3 e_3 + \lambda^2 e_7,$$

$$b'_4 = \lambda^3 e_4 + \lambda^4 e_8.$$

$$\varphi(b'_4) = \lambda^3 e_5 + \lambda^6 e_1 = \varphi^4(b'_1) = \lambda^3 b'_1.$$

Запишемо b'_j у вигляді

$$b'_j = \sum_{i=1}^d \lambda^{\alpha_{ij}} e_{(i-1)m+j},$$

де

$$\alpha_{11} = 3, \alpha_{12} = 3, \alpha_{13} = 3, \alpha_{14} = 3,$$

$$\alpha_{21} = 0, \alpha_{22} = 1, \alpha_{23} = 2, \alpha_{24} = 4.$$

Покладемо $\alpha_j = \min_i \alpha_{ij}$.

Тоді

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 2, \alpha_4 = 3.$$

Нехай $\beta_{ij} = \alpha_{ij} - \alpha_j$ ($i = 1, 2; j = 1, 2, 3, 4$). Звідси $\beta_{ij} \geq 0$ і існує $1 \leq \mu_j \leq 4$ таке, що $\beta_{\mu_j j} = 0$.

Тоді

$$\mu_1 = 2, \mu_2 = 2, \mu_3 = 2, \mu_4 = 1.$$

Покладемо

$$b_j = \sum_{i=1}^d \lambda^{\beta_{ij}} e_{(i-1)m+j}.$$

або більш конкретно

$$b_1 = \lambda^3 e_1 + e_5,$$

$$b_2 = \lambda^2 e_2 + e_6,$$

$$b_3 = \lambda e_3 + e_7,$$

$$b_4 = e_4 + \lambda e_8.$$

Тоді

$$\lambda^{\alpha_1} b_1 = b_1 = b'_1,$$

$$\lambda^{\alpha_2} b_2 = \lambda b_2 = b'_2,$$

$$\lambda^{\alpha_3} b_3 = \lambda^2 b_3 = b'_3,$$

$$\lambda^{\alpha_4} b_4 = \lambda^3 b_4 = b'_4.$$

Визначимо вектори $e_{(\mu_1-1)m+1}, e_{(\mu_2-1)m+2}, e_{(\mu_3-1)m+3}, e_{(\mu_4-1)m+4}$:

$$e_{(\mu_1-1)m+1} = e_5,$$

$$e_{(\mu_2-1)m+2} = e_6,$$

$$e_{(\mu_3-1)m+3} = e_7,$$

$$e_{(\mu_4-1)m+4} = e_4.$$

Розглянемо доповнення до векторів e_5, e_6, e_7, e_4 .

Базис, складений з векторів $b_1, b_2, b_3, b_4, e_1, e_2, e_3, e_8$, є базисом векторного простору F^8 .

Отримаємо матрицю переходу від базису $e_1, e_2, \dots, e_8$ до базису $e_5, e_6, e_7, e_4, e_1, e_2, e_3, e_8$.

$$P = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матриця переходу C від базиса $e_5, e_6, e_7, e_4, e_1, e_2, e_3, e_8$ до нового базиса $b_1, b_2, b_3, b_4, e_1, e_2, e_3, e_8$ буде мати вигляд:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, C — оборотна матриця над кільцем $\mathbb{Z}[\lambda]$.

Позначимо $\beta(j-1) = \alpha_j - \alpha_{j-1}$, $\beta(m) = k + \alpha_1 - \alpha_m$ ($j = 2, \dots, m$).

Покладемо $S = PC \in GL_n[\mathbb{Z}[\lambda]]$. Тоді

$$S^{-1}MS = \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

де матриця $A = A(\lambda, \beta(1), \beta(2), \beta(3), \beta(4))$ має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix},$$

а B — матриця розміру 4×4 над кільцем $\mathbb{Z}[\lambda]$.

Переходимо до доведення в загальному випадку.

Нехай $k = \sum_{i=1}^n s_i = dk'$. Нехай φ — лінійний оператор визначений матрицею $M(\lambda, s_1, \dots, s_n)$ в базисі $e_1, e_2, \dots, e_n$ деякого лінійного простору L над полем відношень F кільця $\mathbb{Z}[\lambda]$. Тоді $\varphi(e_1) = \lambda^{s_1}e_2$, $\varphi(e_2) = \lambda^{s_2}e_3$, $\dots$, $\varphi(e_{n-1}) = \lambda^{s_{n-1}}e_n$, $\varphi(e_n) = \lambda^{s_n}e_1$. Або

$$\varphi(e_i) = \begin{cases} \lambda^{s_i}e_{i+1}, & i < n, \\ \lambda^{s_1}e_1, & i = n. \end{cases} \quad (3.28)$$

Очевидно, $\varphi^n(e_1) = \lambda^{\sum_{i=1}^n s_i} e_1 = \lambda^k e_1$.

Нехай

$$b'_1 = \sum_{i=1}^d \lambda^{(d-i)k'} \varphi^{(i-1)n'}(e_1). \quad (3.29)$$

Звідси

$$\begin{aligned} \varphi^{n'}(b'_1) &= \varphi^{n'} \left(\sum_{i=1}^d \lambda^{(d-i)k'} \varphi^{(i-1)n'}(e_1) \right) = \sum_{i=1}^d \lambda^{(d-i)k'} \varphi^{in'}(e_1) = \\ &= \sum_{i=1}^{d-1} \lambda^{(d-i)k'} \varphi^{in'}(e_1) + \varphi^{dn'}(e_1) = \varphi^{dn'}(e_1) + \sum_{i=1}^{d-1} \lambda^{(d-i)k'} \varphi^{in'}(e_1) = \varphi^n(e_1) + \\ &+ \sum_{i=2}^d \lambda^{(d-i+1)k'} \varphi^{(i-1)n'}(e_1) = \lambda^k e_1 + \sum_{i=2}^d \lambda^{(d-i+1)k'} \varphi^{(i-1)n'}(e_1) = \\ &= \lambda^{dk'} e_1 + \sum_{i=2}^d \lambda^{(d-i+1)k'} \varphi^{(i-1)n'}(e_1) = \sum_{i=1}^d \lambda^{(d-i+1)k'} \varphi^{(i-1)n'}(e_1) = \\ &= \lambda^{k'} \left(\sum_{i=1}^d \lambda^{(d-i)k'} \varphi^{(i-1)n'}(e_1) \right) = \lambda^{k'} b'_1. \end{aligned}$$

Визначимо b'_j ($j = 2, \dots, n'$) рекурентно

$$b'_j = \varphi(b'_{j-1}), \quad (j = 2, \dots, n'). \quad (3.30)$$

Тоді $\varphi(b'_{n'}) = \varphi^{n'}(b'_1) = \lambda^{k'} b'_1$. Враховуючи формули (3.28), (3.29) та (3.30), одержимо

$$b'_j = \sum_{i=1}^d \lambda^{\alpha_{ij}} e_{(i-1)n'+j} \quad (j = 1, \dots, n'),$$

для деяких $\alpha_{ij} \in \mathbb{Z}$ ($i = 1, \dots, d$, $j = 1, \dots, n'$). Крім того,

$$b'_j = \varphi(b'_{j-1}) = \sum_{i=1}^d \lambda^{\alpha_{ij}-1} \varphi(e_{(i-1)n'+j-1}) = \sum_{i=1}^d \lambda^{\alpha_{ij}-1+s_{(i-1)n'+j-1}} e_{(i-1)n'+j}$$

($j = 2, \dots, n'$). Звідси випливає, що $\alpha_{ij} = \alpha_{ij-1} + s_{(i-1)n'+j-1}$ ($j = 2, \dots, n'$).

Тому $\alpha_{ij} \geq \alpha_{ij-1}$ ($i = 1, \dots, d$, $j = 2, \dots, n'$). Нехай, $m_j = \min_i \{\alpha_{ij}\}$ ($j=1, \dots, n'$). Тоді $m_j \geq m_{j-1}$ ($j = 2, \dots, n'$). Оскільки

$$\sum_{i=1}^d \lambda^{\alpha_{i1}+k'} e_{(i-1)n'+1} = \lambda^{k'} b'_1 = \varphi(b'_{n'}) = \sum_{i=1}^d \lambda^{\alpha_{in'}} \varphi(e_{(i-1)n'+n'}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^d \lambda^{\alpha_{in'}} \varphi(e_{in'}) = \sum_{i=1}^{d-1} \lambda^{\alpha_{in'}} \varphi(e_{in'}) + \lambda^{\alpha_{dn'}} \varphi(e_{dn'}) = \sum_{i=1}^{d-1} \lambda^{\alpha_{in'} + s_{in'}} (e_{in'+1}) + \\
&\quad + \lambda^{\alpha_{dn'} + s_n} e_1 = \lambda^{\alpha_{dn'} + s_n} e_1 + \sum_{i=1}^{d-1} \lambda^{\alpha_{in'} + s_{in'}} (e_{in'+1}) = \lambda^{\alpha_{dn'} + s_n} e_1 + \\
&\quad + \sum_{i=2}^d \lambda^{\alpha_{i-1n'} + s_{(i-1)n'}} (e_{(i-1)n'+1}),
\end{aligned}$$

то $\alpha_{i1} + k' \geq \alpha_{i-1n'}$ ($i = 2, \dots, d$). Крім того $\alpha_{11} + k' \geq \alpha_{dn'}$. Отже, $m_1 + k' \geq m_{n'}$.

Нехай $\beta_{ij} = \alpha_{ij} - m_j$ ($i = 1, \dots, d$, $j = 1, \dots, n'$). Тоді $\beta_{ij} \geq 0$ ($i = 1, \dots, d$, $j = 1, \dots, n'$).

Очевидно, для деякого $1 \leq \mu_j \leq d$ $\beta_{\mu_j j} = 0$ ($j = 1, \dots, n'$). Нехай

$$b_j = \sum_{i=1}^d \lambda^{\alpha_{ij} - m_j} e_{(i-1)n'+j} \quad (j = 1, \dots, n').$$

Тоді $\lambda^{m_j} b_j = \sum_{i=1}^d \lambda^{\alpha_{ij}} e_{(i-1)n'+j} = b'_j$. З формул (3.30) $\varphi(b_{j-1}) = \lambda^{m_j - m_{j-1}} b_j$ ($j = 2, \dots, n'$). Оскільки $\varphi(b'_{n'}) = \lambda^{k'} b'_1$, то $\varphi(b_{n'}) = \lambda^{k' + m_1 - m_{n'}} b_1$. Нехай $\beta(j-1) = m_j - m_{j-1}$ ($j = 2, \dots, d$), $\beta(n') = k' + m_1 - m_{n'}$. Очевидно, що $\beta(j) \geq 0$ ($j = 1, \dots, n'$). Крім того, $\varphi(b_{j-1}) = \lambda^{\beta(j-1)} b_j$ ($j = 2, \dots, n'$), $\varphi(b_{n'}) = \lambda^{\beta(n')} b_1$.

Індекси векторів $e_{(\mu_1-1)n'+1}, e_{(\mu_2-1)n'+2}, \dots, e_{(\mu_{n'}-1)n'+n'}$ різні, бо не конгруентні за модулем n' і їх можна доповнити деякими векторами $e_{i'_{n'+1}}, \dots, e_{i'_n}$ до базису $e_1, \dots, e_n$ записаному у деякому порядку. Оскільки $\beta_{\mu_j j} = 0$ ($j = 1, \dots, n'$) і $b_j = \sum_{i=1}^d \lambda^{\beta_{ij}} e_{(i-1)n'+j}$, то $b_1, \dots, b_{n'}, e_{i'_{n'+1}}, \dots, e_{i'_n}$ є базисом простору L . А матриця переходу від базису $e_{(\mu_1-1)n'+1}, e_{(\mu_2-1)n'+2}, \dots, e_{(\mu_{n'}-1)n'+n'}, e_{i'_{n'+1}}, \dots, e_{i'_n}$ до якого складається з елементів з $\mathbb{Z}[\lambda]$ і має

ВИГЛЯД

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda^{\delta_{n'+11}} & \dots & \lambda^{\delta_{n'+1n'}} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda^{\delta_{n1}} & \dots & \lambda^{\delta_{nn'}} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

для деяких $\delta_{ij} \geq 0$ ($i = n' + 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n'$). Оскільки $\det C = 1$, то C — оборотна матриця (над $\mathbb{Z}[\lambda]$). Матриця переходу P від базису $e_1, e_2, \dots, e_n$ до базису $e_{(\mu_1-1)n'+1}, e_{(\mu_2-1)n'+2}, \dots, e_{(\mu_{n'}-1)n'+n'}, e'_{n'+1}, \dots, e'_{n'}$ є переставною. Оскільки $S = PC$ — матриця переходу від базису $e_1, e_2, \dots, e_n$ до базису $b_1, \dots, b_{n'}, e'_{n'+1}, \dots, e'_{n'}$, то S — оборотна матриця (над $\mathbb{Z}[\lambda]$). Так як $\varphi(b_{j-1}) = \lambda^{\beta(j-1)}b_j$ ($j = 2, \dots, n'$), $\varphi(b_{n'}) = \lambda^{\beta(n')}b_1$, то

$$S^{-1}MS = \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

де $A = M(\lambda, \beta(1), \dots, \beta(n'))$, і B — квадратна матриця порядку $n - n'$.

Твердження 3.13 доведено.

Як наслідок отримуємо наступне твердження.

Теорема 3.14. *Нехай K — комутативне кільце, $t \in K$. Матриця*

$$M_t(\varepsilon_1 t^{s_1}, \dots, \varepsilon_{n-1} t^{s_{n-1}}, \varepsilon_n t^{s_n}) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \varepsilon_n t^{s_n} \\ \varepsilon_1 t^{s_1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \varepsilon_{n-1} t^{s_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}$$

звідна, якщо її t -вага не взаємно проста з її порядком і в K існує корінь n -го степеня із $\varepsilon = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n$.

Дійсно, у цьому випадку матриця $M_t(\varepsilon_1 t^{s_1}, \dots, \varepsilon_{n-1} t^{s_{n-1}}, \varepsilon_n t^{s_n})$ діагонально подібна матриці $\alpha M(t, s_1, \dots, s_n)$, де α — корінь n -го степеня із ε .

3.4. Висновки до розділу

У цьому розділі вивчаються необхідні умови незвідності та достатні умови звідності канонічно циклічних матриць довільної ваги над комутативним локальним кільцем.

Доведено два критерії незвідності канонічно циклічних матриць малого порядку n над кільцем K з радикалом $R = tK \neq 0$ ($n < 7$ для $R \neq 0$ і $n < 5$ для $R^2 \neq 0$ при деяких природних умовах на вагові послідовності).

Доведена необхідна умова незвідності канонічно t -циклічної матриці довільної ваги, в якій основну роль відіграє зв'язок між порядком та вагою матриці. Ця умова узагальнена на деякий клас канонічно $(t, *)$ -циклічних матриць. В обох випадках комутативне локальне кільце не обов'язково є кільцем головних ідеалів.

Результати цього розділу опубліковані в роботах [59], [58], [50], [51], [61], [60], [62], [63].

Розділ 4

ЗАГАЛЬНІ ТВЕРДЖЕННЯ ПРО НЕЗВІДНІ ТА ЗВІДНІ МОНОМІАЛЬНІ МАТРИЦІ МАЛОЇ ВАГИ

Нехай M — канонічно $(t, *)$ -циклічна матриця порядку n над комутативним локальним кільцем. Якщо визначальна послідовність матриці M дорівнює $\bar{a} = (\varepsilon_1 t^{s_1}, \dots, \varepsilon_{n-1} t^{s_{n-1}}, \varepsilon_n t^{s_n})$, то її характеристичний $f(x)$ поліном M має вигляд $x^n - \varepsilon t^w$, де $\varepsilon = \varepsilon_1 t^{s_1} \dots \varepsilon_{n-1} t^{s_{n-1}} \varepsilon_n t^{s_n}$ і $w = w_t(M)$ — вага матриці M відносно t (це легко довести, розклавши визначник матриці $x E - M$ по першому рядку). Якщо вага матриці велика, то $f(x) = x^n$. У випадку малої ваги $t^w \neq 0$ і цей факт можна використовувати при дослідженні незвідних і звідних зображень (бо якщо поліном $f(x)$ незвідний, то і матриця M незвідна).

Зауважимо, що якщо кільце є областю цілісності, то вага канонічно $(t, *)$ -циклічної матриці завжди мала.

У цьому розділі незвідні і звідні матриці досліджуються з використанням вказаної ідеї.

4.1. Критерій Ейзенштейна-Дюма і незвідність матриць

4.1.1. Області з однозначним розкладом. У цьому пункті приводяться деякі означення із теорії кілець.

Необоротний елемент $p \neq 0$ комутативного кільця називається *простим*, якщо кожний раз, коли p ділить добуток елементів a і b , p ділить a

або p ділить b .

Необоротний елемент $a \neq 0$ області цілісності (комутативного кільця без дільників нуля) називається *звідним*, якщо він є добутком двох необоротних елементів, і *незвідним* в протилежному випадку. В області цілісності кожний простий елемент є незвідним, але обернене твердження не вірне.

Область з однозначним розкладом (інша назва: *факторіальне кільце*) — це, згідно означення, область цілісності, в якій кожний необоротний елемент a може бути представлений як добуток простих елементів, причому такий розклад однозначний з точністю до перестановки елементів і оборотних множників. Більш точно, якщо $a = p_1 p_2 \cdots p_n = q_1 q_2 \cdots q_m$, де $p_1, p_2, \dots, p_n$ і $q_1, q_2, \dots, q_m$ — прості елементи, то $n = m$ і на множині $N = \{1, 2, \dots, n\}$ існує така перестановка σ , що $q_i = \varepsilon_i p_{\sigma(i)}$ для кожного $i \in N$, де $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ — оборотні елементи.

Зауважимо, що в кожній області з однозначним розкладом довільний незвідний елемент є простим.

Приклади відомих кілець з однозначним розкладом:

1) евклідові кільця, тобто області цілісності K , для яких існує функція (евклідова норма)

$$d : K \setminus 0 \rightarrow \mathbb{N} \cup 0$$

така, що для довільних a і $b \neq 0$ із K існує зображення $a = bq + r$, де $d(r) < d(b)$; або $r = 0$.

2) області головних ідеалів; зокрема, кільце цілих чисел $\mathbb{Z}$ і кільце цілих гаусових чисел

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}, \quad i^2 = -1,$$

а також повні дискретно нормовані кільця;

3) кільце поліномів $K[x]$, де K — кільце з однозначним розкладом;

4) кільце формальних степеневих рядів $k[[x, y]]$, де k — поле.

4.1.2. Критерій Ейзенштейна У 1850 р. Г. Ейзенштейн [72] довів добре відому достатню умову звідності поліномів, яка тепер називається критерієм Ейзенштейна. В сучасній науковій літературі він формулюється наступним чином.

Критерій Ейзенштейна. *Нехай R — область з однозначним розкладом і $f = f_0 + f_1x + \dots + f_nx^n \in R[x]$. Якщо існує таке просте $p \in R$, що всі коефіцієнти f , за виключенням f_n , діляться на p , а f_0 не ділиться на p^2 , то f незвідний в $R[x]$.*

4.1.3. Багатокутники Ньютона і узагальнення критерія Ейзенштейна. Протягом багатьох років цей критерій узагальнювався багатьма способами, з використанням багатокутників Ньютона, простих ідеалів і норм (див., наприклад, [73] – [75]). Декілька математиків — Г. Дюма [76], А. Г. Куршчак [77], О. Оре ([78] – [80]), Т. Релла [81] — узагальнили цей критерій за допомогою багатокутників Ньютона.

Нехай $f = f_0 + f_1x + \dots + f_nx^n \in R[x]$ — поліном над областю з однозначним розкладом. Вважаємо, що $f_0f_n \neq 0$. Можна побудувати багатокутник на Евклідовій площині наступним чином. Припустимо, що коефіцієнт f_i ділиться на p^{a_i} , але не на більш високу степінь, де $a_i \geq 0$ і a_i невизначений, якщо $f_i = 0$. Розташуємо точки $(0, a_0), (1, a_1), \dots, (n, a_n)$ на Евклідовій площині і утворимо (нижню) випуклу оболонку цих точок. Це призводить до послідовності лінійних сегментів, які починаються на вісі y і закінчуються на вісі x . Вона називається багатокутником Ньютона для f (відносно простого p).

Г. Дюма узагальнив достатню умову незвідності Г. Ейзенштейна наступним чином.

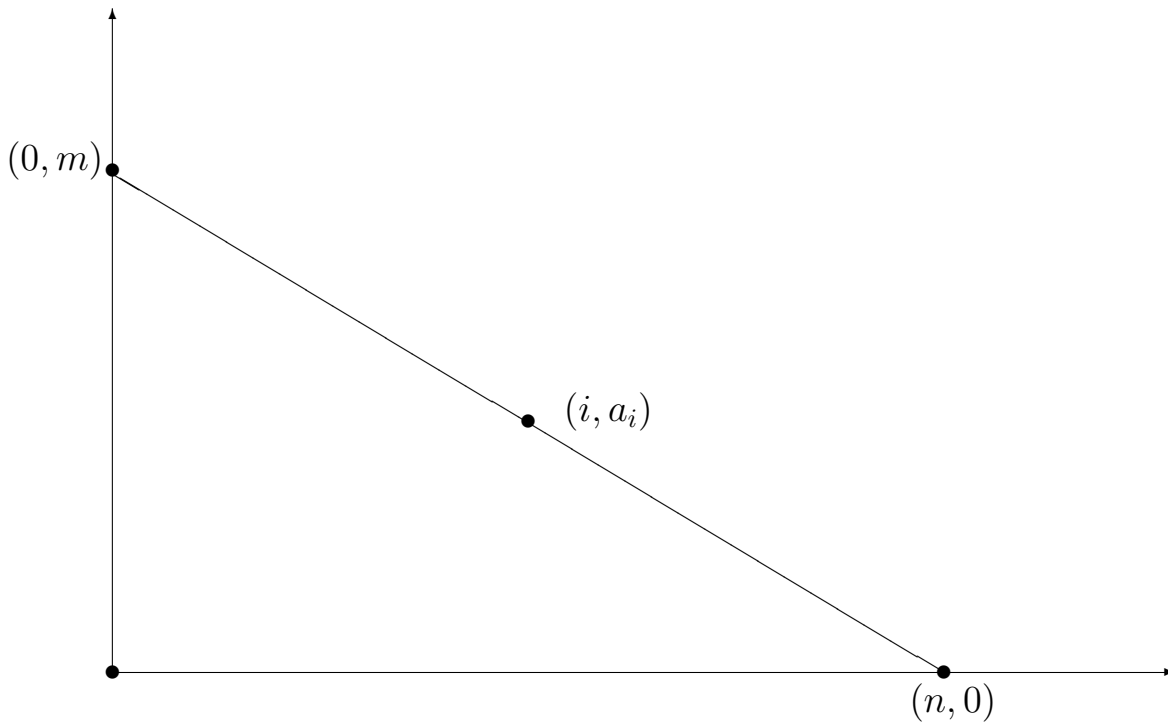
Критерій Ейзенштейна-Дюма. *Нехай R — область з однозначним розкладом і $f = f_0 + f_1x + \dots + f_nx^n \in R[x]$, де $f_0f_n \neq 0$. Припустимо, що f є примітивним, тобто $f_0, f_1, \dots, f_n$ не мають нетривіального за-*

гального дільника в R . Якщо багатокутник Ньютона для f складається із єдиного лінійного сегмента від $(0, m)$ до $(n, 0)$ і до того ж числа m і n взаємно прості, то f незвідний в $R[x]$.

У випадку, коли $m = a_0 = 1$, маємо критерій Ейзенштейна.

Для нас важливий випадок, коли $f_n = 1$. Тоді критерій Ейзенштейна-Дюма має наступну просту геометричну інтерпретацію.

Коефіцієнту f_0 відповідає пара цілих чисел $(0, m)$, де m — найбільше число таке, що p^m ділить f_0 . Розглянемо пряму на площині, що проходить через точки $(0, m)$ і $(n, 0)$. Для кожного $i \in \{1, \dots, n-1\}$ розглянемо пару чисел (i, a_i) , де a_i — найбільше число i таке, що p^{a_i} ділить f_i . Теорема Ейзенштейна-Дюма стверджує, що якщо числа m і n взаємно прості і кожна пара (i, a_i) лежить на вказаний прямій, то поліном f незвідний (над R).



4.2. Критерій незвідності для областей з однозначним розкладом

Означення канонічно циклічних матриць, а також інші означення, викладені вище, легко узагальнюються на випадок кілець з однозначним розкладом.

Доведемо наступну теорему.

Теорема 4.1. *Нехай K — кільце з однозначним розкладом і t — його простий елемент. Канонічно t -циклічна матриця M над K незвідна тоді і лише тоді, коли її порядок взаємно простий з її вагою (відносно елемента t).*

Доведення. Якщо порядок і вага матриці M не взаємно прості, то матриця M звідна за твердженням 3.13 (бо за цим твердженням вона звідна навіть над підкільцем $\mathbb{Z}[t]$). Якщо ж порядок і вага матриці M взаємно прості, то вона незвідна за критерієм Ейзенштейна-Дюма. $\square$

Ця теорема легко узагальнюється на канонічно $(t, *)$ -циклічні матриці у випадку, коли в кільці існує корінь n -го степеня із добутку всіх ε_i (n — порядок матриці). А саме із твердження 2.4 випливає, що в цьому випадку канонічно $(t, *)$ -циклічна матриця є добутком цього кореня і відповідної канонічно t -циклічної матриці.

4.3. Спадкова звідність канонічно циклічних матриць

4.3.1. Критерій спадкової звідності для комутативних локальних кілець головних ідеалів. Нехай K — комутативне локальне кільце головних ідеалів і t — твірний елемент його радикала. Якщо кільце K є областю цілісності (тобто радикал не є нільпотентним), то воно є кільцем

з однозначним розкладом, а значить для канонічних матриць над ним справедливий критерій із попереднього підрозділу.

Нехай радикал кільця K нільпотентний. Оскільки для таких кілець критерії (чи достатні умови) незвідності практично не вивчалися, то поки що не видно, як можна отримати критерій незвідності (або, що те саме, звідності) канонічно циклічних матриць.

Ми отримаємо критерії для звідності спеціального типу.

Матрицю A порядку n над комутативним кільцем K , що є канонічно t -циклічною назвемо *спадково звідною*, якщо існує оборотна (над K) матриця C така, що

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} A_1 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

де A_1 — канонічно t -циклічна матриця порядку $n_1 > 0$ і A_2 — деяка матриця порядку $n_2 > 0$. В протилежному випадку матриця A називається *спадково незвідною*.

Аналогічно дається означення спадково звідної та спадково незвідної канонічно $(t, *)$ -циклічної матриці.

Теорема 4.2. *Нехай M — канонічно t -циклічна матриця малої ваги над комутативним локальним кільцем головних ідеалів. Матриця M спадково незвідна тоді і лише тоді, коли її порядок і t -вага взаємно прості.*

Доведення. Необхідність. Уточнимо теорему 3.12, сформулювавши її у вигляді достатньої умови розкладності матриці (і обмеживши на локальне поле).

Теорема 4.3. *Нехай*

$$M = M(t, s_1, \dots, s_n) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & t^{s_n} \\ t^{s_1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & t^{s_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}$$

— канонічно t -циклічна матриця над комутативним локальним кільцем і нехай її порядок і t -вага не взаємно прості. Тоді для будь-якого їх спільного дільника $d > 1$ існує подібна до M матриця

$$N = \begin{pmatrix} M(t, s'_1, \dots, s'_n) & D \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

де $M' = M(t, s'_1, \dots, s'_n)$ — канонічно t -циклічна матриця порядку $\frac{n}{d}$.

Доведення цієї теореми випливає із доведення теореми 3.12 (див. заключну частину доведення).

Із теореми 4.3 маємо необхідність.

Достатність. Нехай порядок n і t -вага s матриці M взаємно прості. Припустимо, що матриця M спадково звідна. Тоді характеристичний поліном $x^n - t^s$ канонічно t -циклічної матриці M ділиться на характеристичний поліном $x^{n'} - t^{s'}$ канонічно t -циклічної матриці M' (див. означення спадкової звідності):

$$x^n - t^s = (x^{n'} - t^{s'}) (\alpha_{n-n'} x^{n-n'} + \alpha_{n-n'-1} x^{n-n'-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0).$$

Із цієї рівності маємо:

$$t^{s'} \alpha_0 = t^s; \tag{4.1}$$

$$\alpha_{n-n'} = 1; \tag{4.2}$$

$$\text{якщо} \quad i < n', \quad \text{то} \quad t^{s'} \alpha_i = 0, \tag{4.3}$$

$$\text{якщо} \quad n' \leq i \leq n - n', \quad \text{то} \quad t^{s'} \alpha_i = \alpha_{i-n'}, \tag{4.4}$$

$$\text{якщо } n - 2n' < i, \quad \text{то } 0 = \alpha_i, \quad (4.5)$$

де (для всіх випадків) $0 < i < n - n'$.

Із (4.1), (4.4) маємо $t^s = t^{s'}\alpha_0 = t^{s'+s'q}\alpha_{qn'}$. Нехай $n - n' = n'q + r$ для деякого $q \geq 0$, $0 \leq r < n'$. Припустимо, що $r \neq 0$. Отже, $n - 2n' = (n - n') - n' = qn' + r - n' < qn' < qn' + r = n - n'$ і з (4.5) маємо $t^s = t^{s'(1+q)}\alpha_{qn'} = 0$, що неможливо.

Отже, $r = 0$, $n - n' = n'q$, а значить $n = n'q + n' = n'(1 + q)$. Із (4.4) маємо $t^s = t^{s'(1+q)}\alpha_{qn'} = t^{s'(1+q)}\alpha_{n-n'} = t^{s'(1+q)}$, звідки $s = s'(1 + q)$. Таким чином, $1 + q > 0$ є загальним дільником чисел n і s . Прийшли до протиріччя. $\square$

Із теореми 4.2 випливає аналогічна теорема для канонічно $(t, *)$ -циклічної матриці (див. попередній пункт).

4.3.2. Слабко спадкова звідність канонічно циклічних матриць. У зв'язку з означенням спадкової звідності може виникнути питання, а що буде, коли вважати, що канонічно циклічна і матриця A_2 ? Чи буде тоді справедлива теорема 4.2? У цьому пункті буде отримана відповідь на ці запитання.

Для цього узагальнимо поняття спадкової звідності.

Матрицю A порядку n над комутативним кільцем K , що є канонічно t -циклічною назвемо *слабко спадково звідною*, якщо існує оборотна (над K) матриця C така, що

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} A_1 & * & \dots & * \\ 0 & A_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_k \end{pmatrix},$$

де $k > 1$, всі (квадратні) матриці $A_1, A_2, \dots, A_k$ мають ненульові порядки і одна із них є канонічно t -циклічною. В протилежному випадку матриця A називається *слабко спадково незвідною*.

По суті тут виникають 3 випадки. Якщо канонічно t -циклічну матрицю позначати через N , то це такі випадки (всі діагональні блоки мають ненульовий порядок):

1) (верхньо-спадкова звідність $\equiv$ спадкова звідність) матриця A подібна матриці

$$A' = \begin{pmatrix} N & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix};$$

2) (нижньо-спадкова звідність) матриця A подібна матриці

$$A' = \begin{pmatrix} A_1 & * \\ 0 & N \end{pmatrix};$$

3) (середньо-спадкова звідність) матриця A подібна матриці

$$A' = \begin{pmatrix} A_1 & * & * \\ 0 & N & * \\ 0 & 0 & A_k \end{pmatrix},$$

Теорема 4.4. *Нехай M — канонічно t -циклічна матриця малої ваги над комутативним локальним кільцем головних ідеалів. Наступні умови еквівалентні:*

- а) матриця M слабко спадково звідна;
- б) матриця M спадково звідна.

Доведення. Імплікація б) $\Rightarrow$ а) очевидна.

Доведемо імплікацію б) $\Rightarrow$ а).

Нехай M — слабко спадково звідна канонічно t -циклічна матриця. Позначимо її порядок через n , а t -вагу через s . Далі, порядок діагонального блоку, що є канонічно t -циклічною матрицею (див. означення слабко спадкової матриці), позначимо через n' , а її t -вагу — через s' . Оскільки характеристичний поліном $x^n - t^s$ матриці M ділиться на характеристичний

поліном $x^{n'} - t^{s'}$ матриці N , то згідно доведення теореми 4.2 (достатність) n і s не взаємно прості. А тоді за теоремою 4.2 матриця M спадково звідна. $\square$

Із вищесказаного випливає аналогічна теорема для канонічно $(t, *)$ -циклічної матриці.

4.4. Висновки до розділу

У цьому розділі вивчаються необхідні та достатні умови звідності канонічно циклічних матриць малої ваги над комутативними кільцями.

Отримано критерій незвідності канонічно t -циклічної матриці над кільцем з однозначним розкладом та критерій спадкової незвідності канонічно t -циклічної матриці малої ваги над комутативним кільцем головних ідеалів. Ці критерії узагальнено на деякий клас канонічно $(t, *)$ -циклічних матриць.

Розглянуто також випадок слабо спадкової звідності.

Результати цього розділу опубліковані в роботах [50], [59], [61], [62], [63].

Розділ 5

НЕЗВІДНІСТЬ ТА ЗВІДНІСТЬ МОНОМІАЛЬНИХ
МАТРИЦЬ ВЕЛИКОЇ ВАГИ

Квадратну матрицю A над кільцем K назвемо (p, q) -звідною, якщо вона подібна матриці вигляду

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

де A_{11} і A_{22} — матриці порядку $p \geq 1$ і $q \geq 1$ відповідно. Якщо при цьому порядок q матриці A_{22} малий, то матрицю A будемо також називати $(*, q)$ -звідною. Якщо ж матриці A , A_{11} і A_{22} — канонічно $(t, *)$ -циклічні, то матрицю A назвемо 2-спадково звідною.

У цьому розділі K позначає довільне комутативне локальне кільце з радикалом $R \neq 0$ і $t \neq 0$ — нільпотентний елемент. Запис $t^m = 0$ буде означати, що m — степінь нільпотентності t . Під підпоследовністю визначальної последовності завжди мається на увазі зв'язна підпоследовність (з врахуванням її циклічних перестановок).

Ще введемо деякі позначення для перетворень довільної квадратної матриці над кільцем K . $P_{ij}(a)$ позначає додавання i -го рядка, помноженого на елемент $a \in K$, до j -го рядка. $Q_{ij}(a)$ позначає аналогічне перетворення для стовпців. Через $[m \xrightarrow{a} s]^+$ позначимо перетворення подібності, яке полягає в тому, що спочатку застосовується перетворення $P_{ms}(a)$, а потім обернене до нього перетворення $Q_{sm}(-a)$, а через $[m \xrightarrow{a} s]^-$ — перетворення подібності, яке полягає в тому, що спочатку застосовується перетворення $Q_{ms}(a)$, а потім обернене до нього перетворення $P_{sm}(-a)$.

5.1. Необхідні умови незвідності, пов'язані із заданою підпослідовністю довжини 6 визначальної послідовності

5.1.1. Випадок $t^2 = 0$. У цьому пункті доводиться наступна теорема.

Теорема 5.1. *Нехай $t^2 = 0$ і канонічно $(t, *)$ -циклічна матриця незвідна. Тоді її визначальна послідовність не містить підпослідовностей вигляду $(t, t, t, 1, 1, 1)$ і $(t, t, t, t, 1, 1)$.*

Ця теорема випливає із результатів п.2 роботи [55] (випадок 2-однорідної вагової послідовності належить Р. Ф. Динис).

Доведення проводимо від протилежного.

Припустимо спочатку що визначальна послідовність канонічно $(t, *)$ -циклічної матриці містить підпослідовність $(t, t, t, 1, 1, 1)$, і покажемо її звідність.

Нехай довжина визначальної послідовності більша шести: $M = M(1, 1, 1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, t, t, t) =$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо звідну матрицю

$$N = \left(\begin{array}{ccccccc|cc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -t & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Покажемо, що матриця N подібна матриці M .

На 1-му кроці застосуємо до матриці N перетворення $[n-1 \xrightarrow{t} n-2]^-$:

$$N_1 = \left(\begin{array}{ccccccc|cc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 1 & 0 \end{array} \right).$$

На 2-му кроці застосуємо до матриці N_1 перетворення $[1 \xrightarrow{-1} n]^+$:

$$N_2 = \left(\begin{array}{cccccc|cc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ \hline t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 \end{array} \right).$$

На 3-му кроці застосуємо до матриці N_2 перетворення $[2 \xrightarrow{-t} n-1]^+$:

$$N_3 = \left(\begin{array}{cccccc|cc} 0 & t & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 \end{array} \right).$$

На 4-му кроці застосуємо до матриці N_3 перетворення $[3 \xrightarrow{-t} 1]^+$:

$$N_4 = \left(\begin{array}{cccccc|cc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Матриця N_4 однаковою перестановкою рядків і стовпців чи, іншими словами, їх перенумерацією, (що здійснювати більш зручно) може бути приведена до матриці $M(1, 1, 1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, t, t, t)$.

Припустимо тепер, що визначальна послідовність канонічно $(t, *)$ -циклічної матриці містить підпослідовність $(t, t, t, t, 1, 1)$.

Розглянемо випадок, коли довжина визначальної послідовності більша шести: $M = M(1, 1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, t, t, t, t) =$

$$= \left(\begin{array}{cccccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{array} \right).$$

Розглянемо звідну матрицю

$$N = \left(\begin{array}{cccccc|ccc} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -t & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{array} \right).$$

Покажемо, що матриця N подібна матриці M .

На 1-му кроці застосуємо до матриці N перетворення $[n-2 \xrightarrow{t} n-3]^-$:

$$N_1 = \left(\begin{array}{cccccc|ccc} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{array} \right).$$

На 2-му кроці застосуємо до матриці N_1 перетворення $[1 \xrightarrow{-1} n-1]^+$:

$$N_2 = \left(\begin{array}{cccccc|ccc} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{array} \right).$$

На 3-му кроці застосуємо до матриці N_2 перетворення $[2 \xrightarrow{-t} n]^+$:

$$N_3 = \left(\begin{array}{cccccc|ccc} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{array} \right).$$

Матриця N_3 однаковою перестановкою рядків і стовпців приводиться до матриці $M(1, 1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, t, t, t, t)$.

5.1.2. Загальний випадок. У цьому пункті теорема 5.1 узагальнюється на випадок довільного m . Сформулюємо це узагальнення окремо для кожного випадку.

Теорема 5.2. *Нехай $t^m = 0$, $t^{m-1} \neq 0$, і канонічно $(t, *)$ -циклічна матриця незвідна. Тоді її визначальна послідовність не містить підпослідовностей вигляду $(t^i, t^j, t^p, 1, 1, 1)$, де $i + j \geq m$, $2p \geq m$.*

Теорема 5.3. *Нехай $t^m = 0$, $t^{m-1} \neq 0$, і канонічно $(t, *)$ -циклічна матриця незвідна. Тоді її визначальна послідовність не містить підпослідовностей вигляду $(t^i, t^j, t^p, t^q, 1, 1)$, де $i + j \geq m$, $p + q \geq m$.*

Ці теореми випливають із результатів п.2 роботи [55] (випадки 2-однорідної вагової послідовності належать Р. Ф. Динис).

Доведемо спочатку теорему 5.2.

Маємо матрицю

$$M = M(t^i, t^j, t^p, 1, 1, 1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_s \\ t^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & t^j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{s-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо звідну матрицю

$$N = \left(\begin{array}{cccccc|cc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -t^j & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -t^p & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^i & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^p \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Покажемо, що матриця N подібна матриці M .

На 1-му кроці застосуємо до матриці N перетворення $[n-1 \xrightarrow{t^j} n-2]^-$:

$$N_1 = \left(\begin{array}{cccccc|cc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -t^p & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^i & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^p \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^j & 1 & 0 \end{array} \right).$$

На 2-му кроці застосуємо до матриці N_1 перетворення $[1 \xrightarrow{-1} n]^+$:

$$N_2 = \left(\begin{array}{cccccc|cc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -t^p & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^i & 0 & 0 & 0 \\ \hline t^p & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^p \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^j & 0 & 0 \end{array} \right).$$

На 3-му кроці застосуємо до матриці N_2 перетворення $[2 \xrightarrow{-t^p} n-1]^+$:

$$N_3 = \left(\begin{array}{cccccc|cc} 0 & t^p & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -t^p & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^i & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^p \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^j & 0 & 0 \end{array} \right).$$

На 4-му кроці застосували до матриці N_3 перетворення $[3 \xrightarrow{-t^p} 1]^+$:

$$N_4 = \left(\begin{array}{cccccc|cc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^i & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^p \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^j & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Матриця N_4 однаковою перестановкою рядків і стовпців приводиться до матриці $M(t^i, t^j, t^p, 1, 1, 1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$.

Тепер доведемо теорему 5.3.

Маємо матрицю

$$M(t^i, t^j, t^p, t^q, 1, 1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) =$$

$$= \left(\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_s \\ t^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & t^j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^q & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{s-1} & 0 \end{array} \right).$$

Розглянемо звідну матрицю

$$N = \left(\begin{array}{cccccc|ccc} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -t^j & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & t^i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^q \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^p & 0 \end{array} \right).$$

Покажемо, що матриця N подібна матриці M .

На 1-му кроці застосуємо до матриці N перетворення $[n-2 \xrightarrow{t^j} n-3]^-$:

$$N_1 = \left(\begin{array}{cccccc|ccc} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & t^i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^q \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^j & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^p & 0 \end{array} \right).$$

На 2-му кроці застосуємо до матриці N_1 перетворення $[1 \xrightarrow{-1} n-1]^+$:

$$N_2 = \left(\begin{array}{cccccc|ccc} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & t^i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^q \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^j & 0 & 0 & 0 \\ t^p & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^p & 0 \end{array} \right).$$

На 3-му кроці застосуємо до матриці N_2 перетворення $[2 \xrightarrow{-t^p} n]^+$:

$$N_3 = \left(\begin{array}{cccccc|ccc} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & t^i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^q \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^p & 0 \end{array} \right).$$

Матриця N_3 однаковою перестановкою рядків і стовпців приводиться до матриці $M(t^i, t^j, t^p, t^q, 1, 1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$.

5.2. Достатні умови $(*, 2)$ -звідності

5.2.1. Випадок $t^2 = 0$. У цьому пункті доводяться наступні теореми.

Теорема 5.4. *Нехай $t^2 = 0$. Канонічно $(t, *)$ -циклічна матриця порядку $n \geq 8$, визначальна послідовність якої містить підпослідовність $(t, t, t, 1, t, 1, 1, 1)$, є $(*, 2)$ -звідною.*

Теорема 5.5. *Нехай $t^2 = 0$. Канонічно $(t, *)$ -циклічна матриця порядку $n \geq 8$, визначальна послідовність якої містить підпослідовність $(t, t, t, 1, 1, t, 1, 1)$, є $(*, 2)$ -звідною.*

Доведемо спочатку теорему 5.4.

Маємо матрицю

$$M = M(1, t, 1, 1, 1, \alpha_1, \dots, \alpha_s, t, t, t) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо $(*, 2)$ -звідну матрицю

$$N = \left(\begin{array}{cccccc|cccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -t & 1 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Покажемо, що матриця N подібна матриці M .

На 1-му кроці застосуємо до матриці N перетворення $[n-1 \xrightarrow{t} n-2]^-$:

$$N_1 = \left(\begin{array}{cccccc|cccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

На 2-му кроці застосуємо до матриці N_1 перетворення $[1 \xrightarrow{-1} n]^+$:

$$N_2 = \left(\begin{array}{ccccccccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ \hline t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 \end{array} \right).$$

На 3-му кроці застосуємо до матриці N_2 перетворення $[2 \xrightarrow{-1} n-1]^+$:

$$N_3 = \left(\begin{array}{ccccccccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 \end{array} \right).$$

На 4-му кроці застосуємо до матриці N_3 перетворення $[3 \xrightarrow{-1} 1]^+$:

$$N_4 = \left(\begin{array}{ccccccccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 \end{array} \right).$$

На 5-му кроці застосуємо до матриці N_4 перетворення $[4 \xrightarrow{-t} 2]^+$:

$$N_5 = \left(\begin{array}{ccccccccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 \end{array} \right).$$

На 6-му кроці застосуємо до матриці N_5 перетворення $[5 \xrightarrow{-t} 3]^+$:

$$N_6 = \left(\begin{array}{cccccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Матриця N_6 однаковою перестановкою рядків і стовпців приводиться до матриці $M(1, t, 1, 1, 1, \alpha_1, \dots, \alpha_s, t, t, t)$.

Тепер доведемо теорему 5.5.

Маємо матрицю $M = M(1, 1, t, 1, 1, \alpha_1, \dots, \alpha_s, t, t, t) =$

$$= \left(\begin{array}{cccccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 \end{array} \right).$$

Розглянемо $(*, 2)$ -звідну матрицю

$$N = \left(\begin{array}{cccccc|cccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -t & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Покажемо, що матриця N подібна матриці M .

На 1-му кроці застосуємо до матриці N перетворення $[n-1 \xrightarrow{t} n-2]^-$:

$$N_1 = \left(\begin{array}{cccccc|cccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 1 & 0 \end{array} \right).$$

На 2-му кроці застосуємо до матриці N_1 перетворення $[1 \xrightarrow{-1} n]^+$:

$$N_2 = \left(\begin{array}{ccccccccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ \hline t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 \end{array} \right).$$

На 3-му кроці застосуємо до матриці N_2 перетворення $[2 \xrightarrow{-t} n-1]^+$:

$$N_3 = \left(\begin{array}{ccccccccc|cc} 0 & t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 \end{array} \right).$$

На 4-му кроці застосуємо до матриці N_3 перетворення $[3 \xrightarrow{-1} 1]^+$:

$$N_4 = \left(\begin{array}{ccccccccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 \end{array} \right).$$

На 5-му кроці застосуємо до матриці N_4 перетворення $[4 \xrightarrow{-1} 2]^+$:

$$N_5 = \left(\begin{array}{ccccccccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & t & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 \end{array} \right).$$

На 6-му кроці застосуємо до матриці N_5 перетворення $[5 \xrightarrow{-t} 3]^+$:

$$N_6 = \left(\begin{array}{ccccccccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Матриця N_6 однаковою перестановкою рядків і стовпців приводиться до матриці $M(1, 1, t, 1, 1, \alpha_1, \dots, \alpha_s, t, t, t)$.

5.2.2. Випадок $t^m = 0$. У цьому пункті теореми 5.4 і 5.5 узагальнюються на випадок довільного m .

Теорема 5.6. *Нехай $t^m = 0$, $t^{m-1} \neq 0$. Якщо $i \leq q$, $j + p \geq m$ ($0 < i, j, p, q < m$), то канонічно $(t, *)$ -циклічна матриця порядку $n \geq 8$, визначальна послідовність якої містить підпослідовність $(t^j, t^p, t^q, 1, t^i, 1, 1, 1)$, є $(*, 2)$ -звідною.*

Теорема 5.7. *Нехай $t^m = 0$, $t^{m-1} \neq 0$. Якщо $i \leq q$, $3q - i \geq m$, $j + p \geq m$ ($0 < i, j, p, q < m$), то канонічно $(t, *)$ -циклічна матриця порядку $n \geq 8$, визначальна послідовність якої містить підпослідовність $(t^j, t^p, t^q, 1, 1, t^i, 1, 1)$, є $(*, 2)$ -звідною.*

Доведемо спочатку теорему 5.6.

Візьмемо матрицю

$$M = M(1, t^i, 1, 1, 1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, t^j, t^p, t^q) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & t^q \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^i & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^p & 0 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо звідну матрицю

$$N = \left(\begin{array}{ccccccccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -t^p & 1 & 0 \\ t^i & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -t^q & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^j & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Покажемо, що матриця N подібна матриці M .

На 1-му кроці застосуємо до матриці N перетворення $[n-1 \xrightarrow{t^p} n-2]^-$:

$$N_1 = \left(\begin{array}{ccccccccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ t^i & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -t^q & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^j & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^p & 1 & 0 \end{array} \right).$$

На 2-му кроці застосуємо до матриці N_1 перетворення $[1 \xrightarrow{-1} n]^+$:

$$N_2 = \left(\begin{array}{ccccccccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ t^i & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -t^q & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^j & 0 & 0 & 0 \\ \hline t^q & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^p & 0 & 0 \end{array} \right).$$

На 3-му кроці застосуємо до матриці N_2 перетворення $[2 \xrightarrow{-t^{q-i}} n-1]^+$:

$$N_3 = \left(\begin{array}{ccccccccc|cc} 0 & t^{q-i} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ t^i & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -t^q & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^j & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^p & 0 & 0 \end{array} \right).$$

На 4-му кроці застосуємо до матриці N_3 перетворення $[3 \xrightarrow{-t^{q-i}} 1]^+$:

$$N_4 = \left(\begin{array}{ccccccccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ t^i & 0 & t^q & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -t^q & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^j & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^p & 0 & 0 \end{array} \right).$$

На 5-му кроці застосувавши до матриці N_4 перетворення $[4 \xrightarrow{-t^q} 2]^+$:

$$N_5 = \left(\begin{array}{cccccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ t^i & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t^q & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -t^q & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^j & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^p & 0 & 0 \end{array} \right).$$

На 6-му кроці застосувавши до матриці N_5 перетворення $[5 \xrightarrow{-t^q} 3]^+$:

$$N_6 = \left(\begin{array}{cccccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ t^i & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^j & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^p & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Матриця N_6 однаковою перестановкою рядків і стовпців приводиться до матриці $M(1, t^i, 1, 1, 1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, t^j, t^p, t^q)$.

Доведемо тепер теорему 5.7.

Візьмемо матрицю

$$M = M(1, 1, t^i, 1, 1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, t^j, t^p, t^q) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & t^q \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^i & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^p & 0 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо звідну матрицю

$$N = \left(\begin{array}{ccccccccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -t^p & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -t^{2q-i} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^i & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -t^q & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^j & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Покажемо, що матриця N подібна матриці M .

На 1-му кроці застосуємо до матриці N перетворення $[n-1 \xrightarrow{t^p} n-2]^-$:

$$N_1 = \left(\begin{array}{ccccccccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -t^{2q-i} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^i & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -t^q & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^j & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^p & 1 & 0 \end{array} \right).$$

На 2-му кроці застосуємо до матриці N_1 перетворення $[1 \xrightarrow{-1} n]^+$:

$$N_2 = \left(\begin{array}{ccccccccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -t^{2q-i} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^i & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -t^q & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^j & 0 & 0 & 0 \\ \hline t^q & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^p & 0 & 0 \end{array} \right).$$

На 3-му кроці застосуємо до матриці N_2 перетворення $[2 \xrightarrow{-t^q} n-1]^+$:

$$N_3 = \left(\begin{array}{ccccccccc|cc} 0 & t^q & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -t^{2q-i} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^i & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -t^q & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^j & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^p & 0 & 0 \end{array} \right).$$

На 4-му кроці застосуємо до матриці N_3 перетворення $[3 \xrightarrow{-t^{q-i}} 1]^+$:

$$N_4 = \left(\begin{array}{ccccccccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & t^{q-i} & 0 & -t^{2q-i} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^i & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -t^q & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^j & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^p & 0 & 0 \end{array} \right).$$

На 5-му кроці застосувавши до матриці N_4 перетворення $[4 \xrightarrow{-t^{q-i}} 2]^+$:

$$N_5 = \left(\begin{array}{cccccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^i & 0 & t^q & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -t^q & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^j & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^p & 0 & 0 \end{array} \right).$$

На 6-му кроці застосувавши до матриці N_5 перетворення $[5 \xrightarrow{-t^q} 3]^+$:

$$N_6 = \left(\begin{array}{cccccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^i & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^j & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^p & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Матриця N_6 однаковою перестановкою рядків і стовпців приводиться до матриці $M(1, 1, t^i, 1, 1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, t^j, t^p, t^q)$.

5.3. Достатні умови $(*, 3)$ -звідності

5.3.1. Випадок $t^2 = 0$. У цьому пункті доводяться наступні теореми.

Теорема 5.8. *Нехай $t^2 = 0$. Канонічно $(t, *)$ -циклічна матриця порядку $n \geq 9$, визначальна послідовність якої містить підпослідовність $(t, t, t, t, 1, t, 1, t, 1)$, є $(*, 3)$ -звідною.*

Теорема 5.9. *Нехай $t^2 = 0$. Канонічно $(t, *)$ -циклічна матриця порядку $n \geq 9$, визначальна послідовність якої містить підпослідовність $(1, 1, 1, 1, 1, t, 1, t, t)$, є $(*, 3)$ -звідною.*

Доведемо спочатку теорему 5.8

Візьмемо матрицю $M = M(1, t, 1, t, 1, \alpha_1, \dots, \alpha_s, t, t, t, t) =$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо $(*, 3)$ -звідну матрицю

$$N = \left(\begin{array}{cccccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -t & 1 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{array} \right).$$

Покажемо, що матриця N подібна матриці M .

На 1-му кроці застосуємо до матриці N перетворення $[n-2 \xrightarrow{t} n-3]^-$:

$$N_1 = \left(\begin{array}{cccccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{array} \right).$$

На 2-му кроці застосуємо до матриці N_1 перетворення $[1 \xrightarrow{-1} n-1]^+$:

$$N_2 = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{array} \right).$$

На 3-му кроці застосуємо до матриці N_2 перетворення $[2 \xrightarrow{-1} n]^+$:

$$N_3 = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{array} \right).$$

На 4-му кроці застосуємо до матриці N_3 перетворення $[3 \xrightarrow{-t} n-2]^+$:

$$N_4 = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc} 0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{array} \right).$$

На 5-му кроці застосуємо до матриці N_4 перетворення $[4 \xrightarrow{-1} 1]^+$:

$$N_5 = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & t & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{array} \right).$$

На 6-му кроці застосуємо до матриці N_5 перетворення $[5 \xrightarrow{-t} 2]^+$:

$$N_6 = \left(\begin{array}{cccccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{array} \right).$$

Матриця N_6 однаковою перестановкою рядків і стовпців приводиться до матриці $M(1, t, 1, t, 1, \alpha_1, \dots, \alpha_s, t, t, t, t)$.

Доведемо тепер теорему 5.9.

Нагадаємо, що якщо взяти транспоновану матрицю до канонічно циклічної матриці з визначальною послідовністю $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, то вона переставно подібна канонічно циклічній матриці з дуальною визначальною послідовністю $\bar{a}^* = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)$.

З формальних міркувань при доведенні розглядаємо дуальний випадок.

Візьмемо матрицю

$$M(1, 1, 1, 1, 1, \alpha_1, \dots, \alpha_s, t, t, 1, t) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо $(*, 3)$ -звідну матрицю

$$N = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -t & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Покажемо, що матриця N подібна матриці M .

На 1-му кроці застосуємо до матриці N перетворення $[n-2 \xrightarrow{t} n-3]^-$:

$$N_1 = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

На 2-му кроці застосуємо до матриці N_1 перетворення $[1 \xrightarrow{-1} n-1]^+$:

$$N_2 = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

На 3-му кроці застосуємо до матриці N_2 перетворення $[2 \xrightarrow{-1} n]^+$:

$$N_3 = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

На 4-му кроці застосуємо до матриці N_3 перетворення $[3 \xrightarrow{-t} n-2]^+$:

$$N_4 = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc} 0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

На 5-му кроці застосуємо до матриці N_4 перетворення $[4 \xrightarrow{-t} 1]^+$:

$$N_5 = \left(\begin{array}{cccccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & t & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

На 6-му кроці застосуємо до матриці N_5 перетворення $[5 \xrightarrow{-t} 2]^+$:

$$N_6 = \left(\begin{array}{cccccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Матриця N_6 однаковою перестановкою рядків і стовпців приводиться до матриці $M(1, 1, 1, 1, 1, \alpha_1, \dots, \alpha_s, t, t, 1, t)$.

5.3.2. Випадок $t^m = 0$. У цьому пункті теореми 5.8 і 5.9 узагальнюються на випадок довільного m .

Теорема 5.10. *Нехай $t^m = 0$, $t^{m-1} \neq 0$. Якщо $q \geq i$, $r \geq j$, $i + j \geq m$, $k + p \geq m$ ($0 < i, j, k, p, q, r < m$), то канонічно $(t, *)$ -циклічна матриця порядку $n \geq 9$, визначальна послідовність якої містить підпослідовність $(t^k, t^p, t^q, t^r, 1, t^i, 1, t^j, 1)$, є $(*, 3)$ -звідною.*

Теорема 5.11. *Нехай $t^m = 0$, $t^{m-1} \neq 0$. Якщо $i + j \geq m$, $2k \geq m$ ($0 < i, j, k < m$), то канонічно $(t, *)$ -циклічна матриця порядку $n \geq 9$, визначальна послідовність якої містить підпослідовність $(1, 1, 1, 1, 1, t^k, 1, t^j, t^i)$, є $(*, 3)$ -звідною.*

Доведемо спочатку теорему 5.10.

Візьмемо матрицю $M = M(1, t^i, 1, t^j, 1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, t^k, t^p, t^q, t^r) =$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^r \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^i & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^j & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & t^q & 0 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо $(*, 3)$ -звідну матрицю

$$N = \left(\begin{array}{cccccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -t^p & 1 & 0 & 0 \\ t^i & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -t^{q+r-j} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^j & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^q & 0 \end{array} \right).$$

Покажемо, що матриця N подібна матриці M .

На 1-му кроці застосуємо до матриці N перетворення $[n-2 \xrightarrow{t^p} n-3]^-$:

$$N_1 = \left(\begin{array}{cccccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ t^i & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -t^{q+u-j} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^j & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^u \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^p & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^q & 0 \end{array} \right).$$

На 2-му кроці застосуємо до матриці N_1 перетворення $[1 \xrightarrow{-1} n-1]^+$:

$$N_2 = \left(\begin{array}{cccccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ t^i & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -t^{q+r-j} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^j & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^p & 0 & 0 & 0 \\ t^q & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^q & 0 \end{array} \right).$$

На 3-му кроці застосуємо до матриці N_2 перетворення $[2 \xrightarrow{-t^{q-i}} n]^+$:

$$N_3 = \left(\begin{array}{cccccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ t^i & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -t^{q+r-j} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^j & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & t^{q-i+r} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^q & 0 \end{array} \right).$$

На 4-му кроці застосуємо до матриці N_3 перетворення $[3 \xrightarrow{-t^{q-i+r}} n-2]^+$:

$$N_4 = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc} 0 & 0 & t^{q-i+r} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ t^i & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -t^{q+r-j} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^j & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^q & 0 \end{array} \right).$$

На 5-му кроці застосуємо до матриці N_4 перетворення $[4 \xrightarrow{-t^{q-i+r-j}} 1]^+$:

$$N_5 = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ t^i & 0 & 0 & t^{q+r-j} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -t^{q+r-j} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^j & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^q & 0 \end{array} \right).$$

На 6-му кроці застосуємо до матриці N_5 перетворення $[5 \xrightarrow{-t^{q+r-j}} 2]^+$:

$$N_6 = \left(\begin{array}{cccccc|cccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ t^i & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^j & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^q & 0 \end{array} \right).$$

Матриця N_6 однаковою перестановкою рядків і стовпців приводиться до матриці $M(1, t^i, 1, t^j, 1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, t^k, t^p, t^q, t^r)$.

Доведемо тепер теорему 5.11.

Візьмемо матрицю $M(1, 1, 1, 1, 1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, t^i, t^j, 1, t^k) =$

$$= \left(\begin{array}{cccccc|cccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^k \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Розглянемо $(*, 3)$ -звідну матрицю

$$N = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -t^j & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -t^k & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Покажемо, що матриця N подібна матриці M .

На 1-му кроці застосуємо до матриці N перетворення $[n-2 \xrightarrow{t^j} n-3]^-$:

$$N_1 = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -t^k & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^j & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

На 2-му кроці застосуємо до матриці N_1 перетворення $[1 \xrightarrow{-1} n-1]^+$:

$$N_2 = \left(\begin{array}{cccccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -t^k & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^j & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

На 3-му кроці застосуємо до матриці N_2 перетворення $[2 \xrightarrow{-1} n]^+$:

$$N_3 = \left(\begin{array}{cccccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -t^k & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & t^k & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

На 4-му кроці застосуємо до матриці N_3 перетворення $[3 \xrightarrow{-t^k} n-2]^+$:

$$N_4 = \left(\begin{array}{cccccc|cccc} 0 & 0 & t^k & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -t^k & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

На 5-му кроці застосуємо до матриці N_4 перетворення $[4 \xrightarrow{-t^k} 1]^+$:

$$N_5 = \left(\begin{array}{cccccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & t^k & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -t^k & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

На 6-му кроці застосуємо до матриці N_5 перетворення $[5 \xrightarrow{-t^k} 2]^+$:

$$N_6 = \left(\begin{array}{cccccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Матриця N_6 однаковою перестановкою рядків і стовпців приводиться до матриці $M(1, 1, 1, 1, 1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, t^i, t^j, 1, t^k)$.

5.4. Теореми про 2-спадкову звідність

5.4.1. Випадок $t^2 = 0$. У цьому пункті доводяться наступні теореми.

Теорема 5.12. *Нехай $t^2 = 0$. Канонічно $(t, *)$ -циклічна матриця порядку $n \geq 6$ є 2-спадково звідною, якщо її визначальна послідовність містить підпослідовності $(1, 1)$ і (t, t, t, t) .*

Теорема 5.13. *Нехай $t^2 = 0$. Канонічно $(t, *)$ -циклічна матриця порядку $n \geq 8$ є 2-спадково звідною, якщо її визначальна послідовність містить підпослідовності $(1, 1, 1)$ і $(t, t, 1, t, t)$.*

Доведемо спочатку теорему 5.12, вважаючи, що порядок матриці більший за 6 (див. теорему 5.1).

Візьмемо матрицю порядку $n = s + 6 > 6$

$$M = M(1, 1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, t, t, t, t, \alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \dots, \alpha_s) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_s \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{s-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо 2-спадково звідну матрицю

$$N = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 \end{array} \right).$$

Покажемо, що матриця N подібна матриці M .

На 3-му кроці застосуємо до матриці N_2 перетворення $[n \xrightarrow{t} r+2]^-$:

$$N_3 = \left(\begin{array}{cccccc|cccccccc} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 \end{array} \right).$$

Матриця N_3 однаковою перестановкою рядків і стовпців приводиться до матриці $M(1, 1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, t, t, t, t, \alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \dots, \alpha_s)$.

Доведемо тепер теорему 5.13.

Зауважимо, що випадок, коли об'єднання двох вказаних підпоследовностей дорівнює зв'язній підпоследовності, не виключається.

Візьмемо матрицю порядку $n = s + 8 > 8$

$$M = M(1, 1, 1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, t, t, 1, t, t, \alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \dots, \alpha_s) =$$

На 3-му кроці застосуємо до матриці N_2 перетворення $[2 \xrightarrow{t} r+7]^+$:

$$N_3 = \left(\begin{array}{cccccccc|cccccccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 \end{array} \right).$$

На 4-му кроці застосуємо до матриці N_3 перетворення $[n \xrightarrow{t} r+3]^-$:

$$N_4 = \left(\begin{array}{cccccccc|cccccccc} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 \end{array} \right).$$

Матриця N_3 однаковою перестановкою рядків і стовпців приводиться до матриці $M(1, 1, 1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, t, t, 1, t, t, \alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \dots, \alpha_n)$.

5.4.2. Випадок $t^m = 0$. У цьому пункті теореми 5.12 і 5.13 узагальнюються на випадок довільного m .

Теорема 5.14. *Нехай $t^m = 0$, $t^{m-1} \neq 0$. Канонічно $(t, *)$ -циклічна матриця порядку $n \geq 6$ є 2-спадково звідною, якщо її визначальна послідовність містить підпослідовності $(1, 1)$ і (t^i, t^j, t^k, t^p) , де $i + j \geq m$, $k + p \geq m$.*

Теорема 5.15. *Нехай $t^m = 0$, $t^{m-1} \neq 0$. Канонічно $(t, *)$ -циклічна матриця порядку $n \geq 8$ є 2-спадково звідною, якщо її визначальна послідовність містить підпослідовності $(1, 1, 1)$ і $(t^i, t^j, 1, t^k, t^p)$, де $i + j \geq m$, $k + p \geq m$.*

Доведемо спочатку теорему 5.14. вважаючи, що порядок матриці більший за 6 (при $n = 6$ див. теорему 5.3).

Візьмемо матрицю розміру $n = s + 6 > 6$

$$M = M(1, 1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, t^i, t^j, t^k, t^p, \alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \dots, \alpha_s) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_s \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^i & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^j & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & t^k & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^p & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{s-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо 2-спадково звідну матрицю

$$N = \left(\begin{array}{cccccc|cccccccc} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & t^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^k & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^p & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 \end{array} \right).$$

Покажемо, що матриця N подібна матриці M .

На 1-му кроці застосуємо до матриці N перетворення $[r+4 \xrightarrow{1} r+3]^-$:

$$N_1 = \left(\begin{array}{cccccc|cccccccc} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & t^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -t^j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & t^k & t^k & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^p & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 \end{array} \right).$$

На 2-му кроці застосуємо до матриці N_1 перетворення $[1 \xrightarrow{-t^k} r+5]^+$:

$$N_2 = \left(\begin{array}{cccccc|cccccccc} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & t^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -t^j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & t^k & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^p & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 \end{array} \right).$$

На 3-му кроці застосуємо до матриці N_2 перетворення $[n \xrightarrow{t^j} r+2]^-$:

$$N_3 = \left(\begin{array}{cccccc|cccccccc} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & t^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & t^k & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^p & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 \end{array} \right).$$

Матриця N_3 однаковою перестановкою рядків і стовпців приводиться

до матриці $M(1, 1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, t^i, t^j, t^k, t^p, \alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \dots, \alpha_s)$.

Доведемо тепер теорему 5.15.

Візьмемо матрицю розміру $n = s + 8 \geq 8$

$$M = M(1, 1, 1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, t^i, t^j, 1, t^k, t^p, \alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \dots, \alpha_s) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_s \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^k & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^p & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{s-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо 2-спадково звідну матрицю

$$N = \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^k & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^p & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 \end{array} \right).$$

Матриця N_4 однаковою перестановкою рядків і стовпців приводиться до матриці $M(1, 1, 1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, t^i, t^j, 1, t^k, t^p, \alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \dots, \alpha_s)$.

5.5. Висновки до розділу

У цьому розділі вивчаються необхідні умови незвідності та достатні умови звідності канонічно циклічних матриць великої ваги над комутативним локальним кільцем. Ці умови розглядаються відносно підпоследовностей спеціального вигляду вагової послідовності.

При дослідженні канонічно $(t, *)$ -циклічних матриць порядку n розглядаються різні типи звідності: $(*, 2)$ -звідність, $(*, 3)$ -звідність, 2-спадкова звідність. Для кожного із цих звідностей для канонічно $(t, *)$ -циклічних матриць спочатку розглядається більш наглядний випадок, коли елемент t має ступінь нільпотентності 2, а потім — його узагальнення на випадок довільного ступеня нільпотентності.

Основним методом дослідження є метод елементарних перетворень матриць з комбінаторними аспектами.

Результати цього розділу опубліковані в роботах [52], [54], [55], [56].

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена вивченню матриць над комутативними кільцями.

Доведено, що канонічно циклічна матриця (над комутативним локальним кільцем головних ідеалів) з неперіодичною ваговою послідовністю нерозкладна. Вказано необхідні і достатні умови (окремо) нерозкладності канонічно циклічної матриці з періодичною ваговою послідовністю. Доведено, що канонічно циклічні матриці ізоморфні в категорії мономіальних матриць тоді і лише тоді, коли вони ізоморфні в сильній категорії мономіальних матриць.

Доведена необхідна умова незвідності канонічно t -циклічної матриці довільної ваги, в якій основну роль відіграє зв'язок між порядком та вагою матриці. Ця умова узагальнена на деякий клас канонічно $(t, *)$ -циклічних матриць (в обох випадках комутативне локальне кільце не обов'язково є кільцем головних ідеалів).

Отримано критерій незвідності канонічно t -циклічної матриці над кільцем з однозначним розкладом та критерій спадкової незвідності канонічно t -циклічної матриці малої ваги над комутативним кільцем головних ідеалів. Ці критерії узагальнено на деякий клас канонічно $(t, *)$ -циклічних матриць.

Вивчаються необхідні умови незвідності та достатні умови звідності канонічно циклічних матриць великої ваги над комутативним локальним кільцем. Ці умови розглядаються відносно підпослідовностей спеціального вигляду вагової послідовності. При дослідженні канонічно $(t, *)$ -циклічних матриць порядку n розглядаються різні типи звідності: $(*, 2)$ -звідність, $(*, 3)$ -звідність, 2-спадкова звідність.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Гудивок П. М. О модулярных и целочисленных представлениях конечных групп / П. М. Гудивок // ДАН СССР. – 1974. – **214**, №5. – С. 993–996.
2. Бондаренко В. М. О подобии матриц над кольцом классов вычетов / В. М. Бондаренко // Матем. сборник, “Наукова думка”, Киев. – 1976. – С. 275–277.
3. Donovan P. Some evidence for an extension of the Brauer-Thrall conjecture / P. Donovan, M. R. Freislich // Sonderforschungsbereich. Theor. Math. (Bonn). – 1973. – **40**. – P. 24-26.
4. Дрозд Ю. А. О ручных и диких матричных задачах / Ю. А. Дрозд // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1977. – С. 104-114.
5. Дрозд Ю. А. Ручные и дикие матричные задачи / Ю. А. Дрозд // Представления и квадратичные формы. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1979. – С. 39-74.
6. Супруненко Д. А. О сопряженности матриц над кольцом вычетов / Д. А. Супруненко // Доклады АН БССР. – 1964. – **8**. – С. 693–695.
7. Davis R. W. Certain matrix equations over rings of integers. / R. W. Davis // Duke Math. J. – 1968. – **35**. – P. 49–59.

8. Gustafson W. H. On matrix similarity over commutative rings. / W. H. Gustafson // Linear and Multilinear Algebra. – 1981. – **10**, no. 3. – P. 249–252.
9. Gauger M. A. Characteristic free, improved decidability criteria for the similarity problem. / M. A. Gauger, Ch. I. Byrnes // Linear and Multilinear Algebra. – 1977/78. – **5**, no. 3. – P. 153–158.
10. Guralnick R. M. Similarity of matrices over commutative rings. / R. M. Guralnick // Linear Algebra Appl. – 1991. – **157**. – P. 55–68.
11. Pizarro A. Similarity classes of 3×3 matrices over a discrete valuation ring / A. Pizarro // Linear Algebra Appl. – 1983. – **54**. – P. 29–51.
12. Шевченко В. Н. О подобии матриц второго порядка над кольцом целых чисел / В. Н. Шевченко, С. В. Сидоров // Известия вузов. Сер. матем. – 2006. – № 4. – С. 57–64.
13. Сидоров С. В. О подобии матриц третьего порядка над кольцом целых чисел, имеющих приводимый характеристический многочлен / С. В. Сидоров // Вест. Нижегородского ун-та им. Н. И. Лобачевского. Сер. Математ. моделирование. Опт. управление. – 2009. – № 1. – С. 119–127.
14. Avni N. Similarity classes of 3×3 matrices over a local principal ideal ring / N. Avni, U. Onn, A. Prasad, L. Vaserstein // Comm. Algebra. – 2009. – **37**, no. 8. – P. 2601–2615.
15. Prasad A. Similarity of matrices over local rings of length two / A. Prasad, P. Singla, S. Spallone // 2013. – <http://arxiv.org/pdf/1212.6157.pdf>.
16. Prasad A. Similarity of matrices over local rings of length two / P. Singla // Indiana Univ. Math. J. – 2015. – **64**, no. 2. – P. 471–514.

17. Brawley J. Jr. Similar involutory matrices (*mod* p^m) / J. Jr. Brawley // Amer. Math. Monthly. – 1966. – **73**. – P. 499–501.
18. McDonald B. R. Similarity of matrices over Artinian principal ideal rings / B. R. McDonald // Linear Algebra Appl. – 1978. – **21**, no. 2. – P. 153–162.
19. Guralnick R. M. Similarity of matrices over local rings / R. M. Guralnick // Linear Algebra Appl. – 1981. – **41**. – P. 161–174.
20. Нечаев А. А. О подобии матриц над коммутативным локальным артиновым кольцом / А. А. Нечаев // Труды сем. им. И. Г. Петровского. – 1983. – вып. **9**. – P. 81–101.
21. Tu B. X. Unitary similarity theory for square matrices over strong p -division rings / B. X. Tu // I. J. Math. Res. Exposition. – 1987. – **7**, no. 3. – P. 393–402.
22. Tu B. X. Unitary similarity theory for square matrices over strong p -division rings / B. X. Tu // II. J. Math. Res. Exposition. – 1988. – **8**, no. 1. – P. 11–21.
23. Tu B. X. Unitary similarity theory for square matrices over strong p -division rings / B. X. Tu // III. J. Math. Res. Exposition. – 1989. – **9**, no. 1. – P. 1–8.
24. Cai J. X. A note on the theory of unitary similarity of matrices over a strong p -division ring / J. X. Cai // J. Math. Res. Exposition. – 1990. – **10**, no. 3. – P. 474.
25. Dobbs D. E. The probability of invertibility for a matrix over a finite commutative ring / D. E. Dobbs, M. J. Lancaster // C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada. – 1991. – **13**, no. 5. – P. 217–222.

26. Dobbs D. E. The probability of maximal rank for a matrix over a finite commutative ring / D. E. Dobbs, M. J. Lancaster, R. M. McConnell // C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada. – 1993. – **15**, no. 5. – P. 207–212.
27. Газарян Т. Г. Подобие инволютивных матриц над локальным кольцом характеристики $2k$ / Т. Г. Газарян. // Дискрет. матем. – 1995. – **7**, no. 4. – P. 145–156.
28. Recski A. Combinatorial optimization methods to determine the rank of a matrix over a commutative ring, with engineering applications / A. Recski // Progress in combinatorial optimization, ISTE, London. – 2012. – P. 343–352.
29. Camara M. C. One sided invertibility of matrices over commutative rings, corona problems, and Toeplitz operators with matrix symbols / M. C. Camara, L. Rodman, I. M. Spitkovsky // Linear Algebra Appl. – 2014. – **459**. – P. 58–82.
30. Stasinski A. Similarity and commutators of matrices over principal ideal rings / A. Stasinski // Trans. Amer. Math. Soc. – 2016. – **368**, no. 4. – P. 2333–2354.
31. McDonald B. R. Linear algebra over commutative ring / B. R. McDonald // M. Dekker. – 1984. – 544 pp.
32. Brown W. C. Matrices over commutative rings / W. C. Brown // M. Dekker. – 1993. – 294 pp.
33. Reiner I. Integral representations of cyclic groups of prime order / I. Reiner // Proc. Am. Math. Soc. – 1957. – **8**. – P. 142–146.
34. Ройтер А.В. О представлениях циклической группы четвертого порядка целочисленными матрицами / А. В. Ройтер // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1960. – № 19. – С. 65–74.

35. Heller A. Representations of cyclic groups in rings of integers / A. Heller, I. Reiner // I. Ann. of Math. – 1962. – **76**. – P. 73–92.
36. Heller A. Representations of cyclic groups in rings of integers / A. Heller, I. Reiner // II. Ann. of Math. – 1963. – **77**. – P. 318–328.
37. Берман С. Д. Целочисленные представления циклической группы, имеющие две неприводимые рациональные компоненты / С. Д. Берман // В книге памяти Н. Г. Чеботарева. Из-во Казанского ун-та. – 1964. – С. 18–29.
38. Дроботенко В.С. Зображення циклічної групи простого порядку p над кільцем класів лишків по модулю p^2 / В. С. Дроботенко, Э. С. Дроботенко, З. П. Жилинская // Доповіді АН УССР. – 1965. – С. 703–706.
39. Дроботенко В.С. Представления циклической группы простого порядка p над кольцом классов вычетов по модулю p^s / В. С. Дроботенко, Э. С. Дроботенко, З. П. Жилинская, Е. Я. Погориляк // Укр. матем. ж. – 1965. – **17**, № 5. – С. 28–42.
40. Гудивок П.М. Про p -адичні цілочислові зображення циклічної p -групи / П. М. Гудивок, В. П. Рудько // Доповіді АН УРСР, сер. А. – 1966. – № 9. – С. 1111–1113.
41. Дроботенко В.С. Зображення циклічної групи групами автоморфізмів деякого класу модулів / В. С. Дроботенко, В. П. Рудько // Доповіді АН УССР. – 1968. – С. 302–304.
42. Donovan P. Representable functions on the category of modular representations of a finite group with cyclic Sylow subgroup / P. Donovan, M. R. Freislich // J. Algebra. – 1974. – **32**. – P. 356–364.
43. Reiner I. Integral representations of cyclic groups of order p^2 / I. Reiner // Proc. Amer. Math. Soc. – 1976. – **58**. – P. 8–12.

44. Mitsuda T. Integral representations of cyclic groups of order pq / T. Mitsuda // Proceedings of the 14th Symposium on Ring Theory, Okayama Univ., Okayama. – 1981. – P. 85–92.
45. Jones A. Integral representations of cyclic p -groups / A. Jones // An. Acad. Brasil. Cienc. – 1982. – **54**, no. 1. – P. 19–22.
46. Тилищак О. А. Про модулярні зображення циклічної 2-групи над локальною областю цілісності / О. А. Тилищак // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2005. – Вип. **10–11**. – С. 137–141.
47. Гудивок П. М. Про матричні зображення скінченних 2-груп над локальними областями цілісності характеристики нуль / П. М. Гудивок, С. П. Кіндюх // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2006. – Вип. **12–13**. – С. 59–64.
48. Kida K. On representations of cyclic groups over a ring of integers / K. Kida // Comm. Algebra. – 2012. – **40**, no. 10. – P. 3753–3758.
49. Гудивок П. М. Про дикі скінченні 2-групи над локальними областями цілісності характеристики нуль / П. М. Гудивок, С. П. Кіндюх // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2009. – Вип. **18**. – С. 54–61.
50. Bondarenko V. M. Reducibility and irreducibility of monomial matrices over commutative rings / V. M. Bondarenko, M. Yu. Bortos, R. F. Dinis, A. A. Tylyshchak // Algebra Discrete Math. – 2013. – **16**, no 2. – P. 171–187.
51. Бортош М. Ю. Приводимость некоторых мономиальных матриц над коммутативными локальными кольцами / М. Ю. Бортош, О. А. Тилищак // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2013. – № **14**. – P. 68–78.

52. Бортош М. Ю. Про один клас звідних мономіальних матриць над комутативними кільцями / М. Ю. Бортош // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2014. – Вип. **25**, №1. – С. 15–20.
53. Бондаренко В. М. Опис деяких категорій незвідних матриць малих порядків над локальними кільцями / В. М. Бондаренко, М. Ю. Бортош // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2016. – Вип. **28**, №1. – С. 18–34.
54. Бондаренко В. М. Про $(*, 2)$ -звідні мономіальні матриці над комутативними кільцями / В. М. Бондаренко, М. Ю. Бортош // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2016. – Вип. **29**, №2. – С. 22–30.
55. Bondarenko V. M. Indecomposable and irreducible t -monomial matrices over commutative rings / V. M. Bondarenko, M. Yu. Bortos, R. F. Dinis, A. A. Tylyshchak // Algebra Discrete Math. – 2016. – **22**, no 1. – P. 11–20.
56. Бондаренко В. М. Достатні умови звідності в категорії мономіальних матриць над комутативним локальним кільцем / В. М. Бондаренко, М. Ю. Бортош // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2017. – Вип. **30**, №1. – С. 11–24.
57. Бондаренко В. М. Нерозкладні та ізоморфні об'єкти в категорії мономіальних матриць над локальним кільцем / В. М. Бондаренко, М. Ю. Бортош // Укр. мат. журн. – 2017. – **69**, №7. – С. 889–904.
58. Бортош М. Ю. Незвідність матриць деякого вигляду над комутативними кільцями / М. Ю. Бортош // Студентська наукова конференція математичного факультету УжНУ: Ужгород, квітень 2013: Збірник праць. Серія “Математика і прикладна математика” – Ужгород, 2013. – С. 8.

59. Tylyshchak A. On Reducibility of Monomial Matrices over Commutative Local Rings / A. Tylyshchak, M. Bortos // 9th International Algebraic Conference in Ukraine: L'viv, July 8-13, 2013: Book of Abstracts. – L'viv, 2013. – P. 201.
60. Бортош М. Ю. Поліноміальні матриці спеціального вигляду над комутативними локальними кільцями / М. Ю. Бортош // П'ятнадцята Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука: Київ, 15-17 травня 2014р.: Матеріали конференції II (Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз). – Київ, 2014. – С. 54.
61. Bortos M. Yu. On Monomial Matrices over Principal Ideal Domains / M. Yu. Bortos, R. F. Dinis // International Algebraic Conference dedicated to 100th anniversary of L. A. Kaluzhnin: Kyiv, July 7-12, 2014: Book of Abstracts. – Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, 2014. – P. 21.
62. Бортош М. Ю. Про подібність мономіальних матриць над комутативними кільцями / М. Ю. Бортош // Міжнародна конференція молодих математиків: Київ, 3-6 червня 2015р.: Тези доповідей – Київ, 2015. – С. 28.
63. Bortos M. Yu. On a sufficient condition for reducibility of monomial matrices / M. Yu. Bortos // X International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd: Odessa, August 20-27, 2015: Abstracts. – Odessa, 2015. – P. 26.
64. Bortos M. Yu. On indecomposable objects of the category of monomial matrices over a commutative local ring / M. Yu. Bortos // International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100th anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor

- Yu. O. Mitropolskiy (1917-2008): Kyiv, June 7-10, 2017: Abstracts. – Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2017. – P. 9.
65. Bondarenko V. M. On isomorphic objects of the category of monomial matrices over a commutative local ring / V. M. Bondarenko, M. Yu. Bortos // 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko: Kyiv, July 3-7, 2017: Abstracts. – Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2017. – P. 27.
66. Букур И. Введение в теорию категорий и функторов / И. Букур, А. Деляну // Из-во “Мир”, М. – 1972. – 259 с.
67. Ленг С. Алгебра / С. Ленг // М.: Мир. – 1968. – 564 с.
68. Годаман Р. Алгебраическая топология и теория пучков / Р. Годаман // М.: Издательство иностранной литературы. – 1961. – 320 с.
69. Бондаренко В. М. Зображення гельфандових графів / В. М. Бондаренко // Видавництво Ін-ту математики НАН України. – 2005. – 228 с.
70. Динис Р. Ф. Про звідність матриць деякого вигляду над локальними областями головних ідеалів / Р. Ф. Динис, О. А. Тилищак // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2012. – Вип. **23**, №1. – С. 57–62.
71. Гудивок П. М., Тилищак О. А. Про незвідні модулярні зображення скінченних p -груп над комутативними локальними кільцями / П. М. Гудивок, О. А. Тилищак // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. – 1998. – Вип. **3**. – С. 78–83.
72. Eisenstein G. Über die Irreduzibilität und einige andere Eigenschaften der Gleichungen / G. Eisenstein // Journal für die Reine und Angew. Math. – 1850. – **39**. – P. 160–179.

73. MacLane S. The Schönemann-Eisenstein irreducibility criteria in terms of prime ideals / S. MacLane // Trans. Amer. Math Soc. – 1938. – **43**. – P. 226–239.
74. Cassels W. S. Local Fields / W. S. Cassels // London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press. – London, 1986. – vol. **3**.
75. Mott J. Eisenstein-type irreducibility criteria, in Zero-dimensional commutative rings / J. Mott // (Knoxville, TN, 1994), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., Dekker. – New York, 1995. – **171**. – P. 307–329.
76. Dumas G. Sur quelques cas d'irréductibilité des polynômes à coefficients rationnels / G. Dumas // Journal de Math. Pures et Appliquées. – 1906. – **2**, no. 2. – P. 191–258.
77. Khovanskij A. G. Fewnomials / A. G. Khovanskij // Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society. – 1991. – vol. **88**.
78. Ore O. Zur Theorie der Irreduzibilitätskriterien / O. Ore // Math. Zeit. – 1923. – **18**. – P. 278–288.
79. Ore O. Zur Theorie der Eisensteinschen Gleichungen / O. Ore // Math. Zeit. – 1924. – **20**. – P. 267–279.
80. Ore O. Zur Theorie der Algebraischen Körper / O. Ore // Acta. Math. – 1924. – **44**. – P. 219–314.
81. Rella T. Ordnungsbestimmungen in Integritätsbereichen und Newtonsche Polygone / T. Rella // Journal für die Reine und Angew. Math. – 1927. – **158**. – P. 33–48.

ДОДАТКИ

Список публікацій за темою дисертації

1. Bondarenko V. M. Reducibility and irreducibility of monomial matrices over commutative rings / V. M. Bondarenko, M. Yu. Bortos, R. F. Dinis, A. A. Tylyshchak // Algebra Discrete Math. – 2013. – **16**, no 2. – P. 171–187.
2. Бортош М. Ю. Приводимость некоторых мономиальных матриц над коммутативными локальными кольцами / М. Ю. Бортош, О. А. Тилищак // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2013. – № **14**. – P. 68–78.
3. Бортош М. Ю. Про один клас звідних мономіальних матриць над комутативними кільцями / М. Ю. Бортош // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2014. – Вип. **25**, №1. – С. 15–20.
4. Бондаренко В. М. Опис деяких категорій незвідних матриць малих порядків над локальними кільцями / В. М. Бондаренко, М. Ю. Бортош // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2016. – Вип. **28**, №1. – С. 18–34.
5. Бондаренко В. М. Про $(*, 2)$ -звідні мономіальні матриці над комутативними кільцями / В. М. Бондаренко, М. Ю. Бортош // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2016. – Вип. **29**, №2. – С. 22–30.

6. Bondarenko V. M. Indecomposable and irreducible t-monomial matrices over commutative rings / V. M. Bondarenko, M. Yu. Bortos, R. F. Dinis, A. A. Tylyshchak // Algebra Discrete Math. – 2016. – **22**, no 1. – P. 11–20.
7. Бондаренко В. М. Достатні умови звідності в категорії мономіальних матриць над комутативним локальним кільцем / В. М. Бондаренко, М. Ю. Бортош // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2017. – Вип. **30**, №1. – С. 11–24.
8. Бондаренко В. М. Нерозкладні та ізоморфні об'єкти в категорії мономіальних матриць над локальним кільцем / В. М. Бондаренко, М. Ю. Бортош // Укр. мат. журн. – 2017. – **69**, №7. – С. 889–904.
9. Tylyshchak A. On Reducibility of Monomial Matrices over Commutative Local Rings / A. Tylyshchak, M. Bortos // 9th International Algebraic Conference in Ukraine: L'viv, July 8-13, 2013: Book of Abstracts. – L'viv, 2013. – P. 201.
10. Бортош М. Ю. Незвідність матриць деякого вигляду над комутативними кільцями / М. Ю. Бортош // Студентська наукова конференція математичного факультету УжНУ: Ужгород, квітень 2013: Збірник праць. Серія “Математика і прикладна математика”. – Ужгород, 2013. – С. 8.
11. Бортош М. Ю. Поліноміальні матриці спеціального вигляду над комутативними локальними кільцями / М. Ю. Бортош // П'ятнадцята Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука: Київ, 15-17 травня 2014р.: Матеріали конференції II (Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз). – Київ, 2014. – С. 54.
12. Bortos M. Yu. On Monomial Matrices over Principal Ideal Domains / M. Yu. Bortos, R. F. Dinis // International Algebraic Conference

- dedicated to 100th anniversary of L. A. Kaluzhnin: Kyiv, July 7-12, 2014: Book of Abstracts. – Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, 2014. – P. 21.
13. Бортош М. Ю. Про подібність мономіальних матриць над комутативними кільцями / М. Ю. Бортош // Міжнародна конференція молодих математиків: Київ, 3-6 червня 2015р.: Тези доповідей – Київ, 2015. – С. 28.
 14. Bortos M. Yu. On a sufficient condition for reducibility of monomial matrices / M. Yu. Bortos // X International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd: Odessa, August 20-27, 2015: Abstracts. – Odessa, 2015. – P. 26.
 15. Bortos M. Yu. On indecomposable objects of the category of monomial matrices over a commutative local ring / M. Yu. Bortos // International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100th anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu. O. Mitropolskiy (1917-2008): Kyiv, June 7-10, 2017: Abstracts. – Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2017. – P. 9.
 16. Bondarenko V. M. On isomorphic objects of the category of monomial matrices over a commutative local ring / V. M. Bondarenko, M. Yu. Bortos // 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko: Kyiv, July 3-7, 2017: Abstracts. – Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2017. – P. 27.

Відомості про апробацію результатів дисертації

1. Студентська наукова конференція математичного факультету УжНУ (Ужгород, квітень 2013);
2. IX Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні (м. Львів, 8-13 липня 2013 р.);
3. П'ятнадцята Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука (м. Київ, 15-17 травня 2014 р.);
4. Міжнародна алгебраїчна конференція, присвячена 100-річчю від дня народження Л. А. Калужніна (м. Київ, 7-12 липня 2014 р.);
5. Міжнародна конференція молодих математиків (м. Київ, 3-6 червня 2015 р.);
6. X Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, присвячена 70-річчю Ю. А. Дрозда (м. Одеса, 20-27 серпня 2015 р.);
7. Міжнародна наукова молодих математиків, присвячена 100-річчю Ю. О. Митропольському (м. Київ, 7-10 червня 2017 р.);
8. XI Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, присвяченій 75-річчю В. В. Кириченка (м. Київ, 3-7 липня 2017 р.).
9. Семінар кафедри алгебри Ужгородського національного університету (м. Ужгород, керівник — кандидат фіз-мат наук, доцент І. В. Шапочка, 12 травня 2016 р.);
10. Алгебраїчний семінар Інституту математики НАН України (м. Київ, керівник — доктор фіз-мат. наук, член-кореспондент НАН України Ю. А. Дрозд, 2016 – 2017 рр.).