

Відгук

офіційного опонента на дисертаційну роботу

Лося Валерія Миколайовича

“Параболічні крайові задачі у просторах Хермандера”,

подану на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук

за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння

Дисертаційна робота Лося В.М. присвячена побудові теорії лінійних параболічних початково-крайових задач у класах гільбертових просторів Хермандера. Теорія крайових задач для лінійних диференціальних рівнянь, параболічних за Петровським, а також наступних їх узагальнень у просторах Соболева і Гельдера широко представлена в працях М.Аграновича і М.Вішика, С.Ейдельмана, О.Ладиженської, В.Солонникова, Н.Уральцевої, А.Фрідмана, Ж.Ліонса і Е.Мадженеса, С.Івасишена, М.Житарашу та ін. Основним методом досліджень дисертаційної роботи є метод інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів, за допомогою якого встановлюється зв'язок між просторами Соболева і просторами Хермандера.

Інтерполяційна техніка дослідження абстрактних параболічних задач розвинена в працях Ф.Клеманта, Х.Хейманса, С.Ангенента, К. ван Дуйна, Б. де Пахтера, Х. Аманна, Д. Хенрі, А. Лунарді, П. Гривара і Г. де Прато та ін. Застосування інтерполяційних методів до диференціальних параболічних крайових задач базується на апіорних оцінках розв'язків відповідних еліптичних задач, встановлених у працях С. Агмона, А. Дугліса, Л. Ніренберга, Ж. Ліонса і Е.Мадженеса, Ю. Березанського, П. Гривара і Г. Геймонта та інших. Інтерполяційна техніка дослідження еліптичних операторів та проблема максимальної регулярності розв'язків еліптичних крайових задач розвинена в працях В. Михайлеця та О. Мурача.

У 1963 році Л. Хермандер вводить та досліджує нормовані функціональні простори, для яких індексом регулярності функцій або розподілів є функціональний параметр, а не число, дає застосування цих просторів при дослідженні регулярності розв'язків гіпоеліптичних рівнянь з частинними похідними, до яких належать і параболічні рівняння. Найбільш

важливими серед просторів Хермандера є гільбертові простори, теорію яких розвинули В. Михайлець та О. Мурач. Зазначимо, що метод інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів був введений К.Фойашем і Ж. Ліонсом. Ця інтерполяція є природним узагальненням класичного методу інтерполяції С. Крейна і Ж. Ліонса зі сталим параметром інтерполяції. За допомогою методу інтерполяції з функціональним параметром В. Михайлець і О. Мурач перенесли класичну теорію еліптичних рівнянь та еліптичних крайових задач з просторів Соболева на широкий клас гільбертових просторів Хермандера. Використання просторів Хермандера дозволяє точніше охарактеризувати: а) регулярність належних до них розподілів, ніж це можливо у рамках класичних просторів Соболева і Гельдера, параметризованих числом, б) характер розв'язності загальних еліптичних крайових задач. У зв'язку з цим природно постає питання про побудову теорії параболічних задач у просторах Хермандера. Отже, питання дослідження розв'язності і властивостей розв'язків параболічних початково-крайових задач у класах гільбертових просторів Хермандера, яке вивчається в дисертаційній роботі В. М. Лося, є актуальним і має значний науковий інтерес.

Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків і списку використаних джерел. У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету й задачі дослідження, відзначено наукову новизну та практичне значення отриманих результатів, наведено відомості про апробацію результатів роботи та публікації за темою дисертації.

У першому розділі наведено огляд літератури за темою дисертації та дано короткий опис результатів дисертаційної роботи.

У розділі 2, що складається з семи підрозділів, розглядаються різні класи гільбертових просторів Хермандера, які використовуються при дослідженні параболічних початково-крайових задач. Виділяються гільбертові простори Хермандера з показниками параболічності, які задовольняють певні умови, виконання яких дозволяє у класі таких просторів отримати більш тонкі умови класичності узагальнених розв'язків параболічних задач, ніж це можливо в шкалі просторів Соболева (підрозділ 2.2). У підрозділі 2.2 введено також анізотропні простори Хермандера на гладкому компактному многовиді, який є

бічною поверхнею циліндра. У подальшому в таких просторах розглядаються розв'язки початково-крайових задач та праві частини параболічних рівнянь. У підрозділі 2.3 описуються простори Хермандера, які використовуються при дослідженні початково-крайових задач з нульовими початковими даними. У підрозділі 2.4 наведено три важливі властивості інтерполяції, перша з яких дозволяє звести інтерполяцію підпросторів до інтерполяції вихідних просторів, друга – звести інтерполяцію прямих сум гільбертових просторів до інтерполяції їх доданків; третя властивість показує, що повторне застосування інтерполяції з функціональним параметром дає знову інтерполяцію з деяким функціональним параметром.

У підрозділі 2.5 досліджуються інтерполяційні властивості просторів Хермандера, зокрема, доводяться інтерполяційні формули для просторів $H^{s,s/\varphi}(\mathbb{R}^k)$, $H_+^{s,s/\varphi}(\mathbb{R}^k)$, $H^{s,s/\varphi}(\Omega)$, $H_+^{s,s/\varphi}(\Omega)$, $H^{s,s/\varphi}(S)$, $H_+^{s,s/\varphi}(S)$ (теореми 2.4 – 2.6). На підставі цих тверджень доводяться теореми про повноту та сепарабельність просторів $H^{s,s/\varphi}(S)$, $H_+^{s,s/\varphi}(S)$ (теореми 2.1, 2.2), які не залежать від вибору локальних карт на многовиді. Одержані результати представляють самостійний науковий інтерес і можуть знайти застосування у теорії інтерполяції.

У підрозділі 2.6 досліджуються властивості оператора, який довільній функції з гільбертових просторів Хермандера, для яких показником регулярності служить пара дійсних чисел s і $s/(2b)$ та додатний функціональний параметр, повільно змінний за Караматою, ставить у відповідність її дані задачі Коші.

У підрозділі 2.7 вивчається версія теореми вкладення Хермандера, виділена інтегральна умова на функцію φ , при виконанні якої кожна функція $u \in H^{s,s/(2b);\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$ має неперервні частинні похідні $D_x^\alpha \partial_t^\beta u(t, x)$, $0 \leq |\alpha| + 2b\beta \leq p$, на $\mathbb{R}^{n+1}$.

Третій розділ, який складається з 11 підрозділів, присвячений дослідженню загальних лінійних параболічних початково-крайових задач з нульовими початковими даними задачі Коші в анізотропних просторах Хермандера $H_+^{s,s/(2b),\varphi}(\cdot)$. Основний результат полягає у встановленні того, що

оператор $u \rightarrow (Au, Bu)$, пов'язаний з параболічною задачею $Au = f, Bu|_S = g \in$ ізоморфізмом між відповідними парами функціональних просторів Хермандера (теорема 3.1). Як наслідок, встановлено теореми про локальне підвищення регулярності узагальнених розв'язків досліджуваних задач. Отримані також нові достатні умови, при виконанні яких узагальнені похідні заданого порядку розв'язків є неперервними (теореми 3.2, 3.3; підрозділ 3.3).

У підрозділі 3.4 розглядається теорема про ізоморфізм для параболічної задачі у випадку просторів Соболева ($\varphi \equiv 1$). Основний результат полягає у встановленні того, що основна теорема про ізоморфізм з підрозділу 3.2 (теорема 3.1) у цьому випадку впливає з результату М. Аграновича і М.Вішика, який стосується загальних параболічних задач із, взагалі кажучи, неоднорідними даними задачі Коші. Окремо розглянуто випадки двовимірного і багатовимірного параболічних рівнянь (підрозділи 3.6 – 3.8), а також систем рівнянь, параболічних за Петровським (підрозділи 3.9 – 3.11). Сформульовані та доведені теореми про ізоморфізми та локальну регулярність узагальнених розв'язків відповідних параболічних задач. Відзначимо також, що доведення основних теорем винесено в окремі підрозділи (3.5, 3.8, 3.11).

У розділі 4, який складається з 14 підрозділів, досліджується загальна лінійна неоднорідна параболічна початково-крайова задача $Au = f, Bu|_S = g, \partial_t^k u|_{t=0} = h_k$ в анізотропних просторах Хермандера. Основний результат полягає в тому, що лінійне відображення $u \rightarrow \Lambda u := (Au, B_1 u, \dots, B_m u, u \upharpoonright \bar{G}, \dots, (\partial_t^{k-1} u) \upharpoonright \bar{G})$, пов'язане з вказаною параболічною задачею, продовжується єдиним чином за неперервністю до ізоморфізму між відповідними парами функціональних просторів Хермандера. Досліджена також властивість регулярності узагальнених розв'язків та знайдено нові достатні умови, за яких узагальнений розв'язок загальної мішаної параболічної задачі є класичним (підрозділи 4.1–4.5). Ці умови сформульовані в термінах приналежності правих частин задачі відповідним просторам Хермандера. Застосування просторів Хермандера дало можливість отримати більш тонкі достатні умови, ніж це можливо у межах класичних функціональних просторів Гельдера і Соболева.

Окремо досліджується загальна початково-крайова задача для

двовимірного та багатовимірного параболічних рівнянь (підрозділи 4.6–4.8). Для таких задач конкретизовані достатні умови регулярності розв’язків (підрозділи 4.9–4.11). У підрозділах 4.12–4.14 у випадку параболічних рівнянь другого порядку конкретизовані умови, при виконанні яких узагальнений розв’язок загальної параболічної задачі є класичним. Знайдені достатні умови існування як класичних, так і сильно класичних розв’язків. Ці умови (умови узгодження) сформульовані в термінах належності правих частин задачі гільбертовим функціональним простором Хермандера. У підрозділі 4.13 уточнено теореми про ізоморфізми у випадку мішаних задач для двовимірного рівняння теплопровідності.

Широке і грамотне використання математичних понять і підходів забезпечує високий науковий рівень проведених досліджень. Всі основні результати дисертаційної роботи є новими та строго доведеними. Вони в достатньому обсязі викладені в 31 праці: у 21 статті у фахових періодичних виданнях, зокрема, у 11 статтях у журналах, що входять до міжнародних наукометричних баз даних Scopus, Web of Science, Math.Sci.Net Reference List, та у 10 тезах міжнародних математичних конференцій; 13 статей одноосібні.

Зміст автореферату правильно і повністю відображає основні положення дисертації.

Дисертаційна робота оформлена акуратно і згідно з вимогами, які ставляться до оформлення дисертацій. Викладення матеріалу чітке, логічне і послідовне, хоча робота містить деякі описки (наприклад, на стор. 30, 62, 125, 147, 165). Крім того, у першому розділі дисертації, де наведено огляд літератури за темою досліджень, бажано було б проаналізувати праці Лопушанського А. О., в яких за допомогою методу комплексної інтерполяції банахових просторів вивчається питання максимальної регулярності розв’язків параболічних крайових задач. Суттєвих зауважень до змісту роботи немає.

Дисертація повністю відповідає паспорту спеціальності 01.01.02 - диференціальні рівняння і є завершеною науковою роботою. В ній вперше побудовано теорію параболічних крайових задач у шкалах гільбертових анізотропних функціональних просторів Хермандера та застосовано метод інтерполяції з функціональним параметром пар анізотропних функціональних

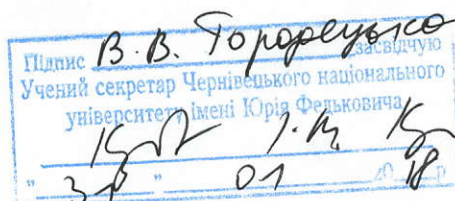
просторів в теорії параболічних задач. Отримані нові обґрунтовані результати є вагомим внеском у теорію крайових задач для рівнянь з частинними похідними. Результати роботи та методи їх одержання можуть знайти застосування в теорії рівнянь з частинними похідними параболічного та еліптичного типів, теорії функціональних просторів, теорії операторів у гільбертових просторах.

На підставі вищесказаного вважаю, що дисертаційна робота Лося Валерія Миколайовича “Параболічні крайові задачі у просторах Хермандера” відповідає всім вимогам щодо докторських дисертацій зі спеціальності 01.01.02-диференціальні рівняння, зокрема, вимогам постанови Кабінету Міністрів України за № 567 від 24 липня 2013 року “Про затвердження Порядку присудження наукових ступенів” зі змінами і доповненнями, внесеними постановами Кабінету Міністрів України від 19 серпня 2015 року за № 656, від 30 грудня 2015 року за № 1159, від 27 липня 2016 року за № 567 і наказом № 40 МОН України від 12 січня 2017 року, а її автор Лось В.М. заслуговує присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння.

Офіційний опонент –

доктор фізико-математичних наук,
професор, завідувач кафедри алгебри
та інформатики Чернівецького
національного університету
імені Юрія Федьковича

В.В.Городецький



Надійшов до спеціалізованої
вченої ради Канцелярія
06.02.2018р.
секретар ради /Артемченко М.В./