Відгук

офіційного опонента
на дисертаційну роботу Лося Валерія Миколайовича
"Параболічні крайові задачі у просторах Хермандера",
подану на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.02 — диференціальні рівняння

У дисертаційній роботі вперше побудована теорія параболічних крайових задач у просторах Хермандера, а саме, в уточнених шкалах анізотропних гільбертових просторів Соболєва.

Уточнені шкали ізотропних гільбертових просторів Соболєва введені та вивчені у працях В. А. Михайлеця і О. О. Мурача. Функціональний показник регулярності у просторах Хермандера більш повно, ніж у класичних просторах Соболєва, характеризує регулярність розподілів за поведінкою на нескінченості їх перетворень Фур'є. У таких просторах деякі властивості розв'язків вдається отримати більш точними, ніж у просторах Соболєва.

Простори Хермандера знаходять застосування у різних важливих математичних задачах. У працях В. А. Михайлеця, О. О. Мурача і їхніх учнів у гільбертових просторах Хермандера систематично досліджені регулярні еліптичні крайові задачі.

Дисертація В. М. Лося є важливим і складним продовженням цих досліджень на випадок параболічних задач. Складність досліджень зумовлена, зокрема, анізотропністю просторів, які використовуються при вивченні параболічних задач.

Отож, дисертаційна робота В. М. Лося відноситься до актуального розділу сучасної математики.

Дисертаційна робота складається з анотацій, вступу, чотирьох розділів, висновків і списку використаних джерел, що містить 114 найменувань.

Як звичайно, вступ і перший розділ присвячено огляду літератури за тематикою дисертації та короткому викладу основних результатів, одержаних у роботі.

У другому розділі дисертації введені анізотропні гільбертові простори Хермандера, зокрема, $2b$-анізотропні гільбертові простори

$$H^{s,\frac{s}{2b};\varphi}(\Omega), \qquad H^{s,\frac{s}{2b};\varphi}(S),$$

де $\Omega = G \times (0,\tau)$, G – обмежена область в R^n, $n \in N$, із межею Γ класу C^∞, $S = \Gamma \times (0,\tau)$. Показниками регулярності в них є пара дійсних чисел $(s, s/2b)$ і додатний функціональний параметр φ, який є повільно змінною на нескінченності за Й. Караматою функцією. При $\varphi(\cdot) \equiv 1$ такі простори є анізотропними просторами Соболєва, відповідно $H^{s,\frac{s}{2b}}(\Omega)$ і $H^{s,\frac{s}{2b}}(S)$.

Описано метод інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів, за допомогою якого одержано основні результати дисертації. Показано, що введені простори одержуються у результаті такої інтерполяції пар відповідних анізотропних гільбертових просторів Соболєва.

Це дуже важливий розділ. Тут детально вивчені інтерполяційні властивості введених просторів щодо анізотропних просторів Соболєва, зокрема і вперше, на гладкому многовиді S – бічній поверхні циліндричної області Ω.

У третьому розділі доведена теорема 3.1 про ізоморфізми в просторах Хермандера для операторів, породжених $2b$-параболічними за Петровським лінійними початково-крайовими задачами з нульовими початковими даними і нескінченно диференційовними коефіцієнтами. Наслідком теореми є коректна узагальнена розв'язність таких задач.

Одержано теорему 3.2 про підвищену регулярність узагальненого розв'язку.

Знайдено (теорема 3.3) точну (на відміну від випадку класичних просторів Соболєва) інтегральну умову неперервності узагальненого розв'язку задачі та його узагальнених похідних до заданого порядку.

Одержані результати уточнено у випадку $n = 1$, а у підрозділах 3.9-3.11 поширено на випадок рівномірно параболічних систем диференціальних рівнянь.

У четвертому розділі встановлено коректну розв'язність у просторах $H^{s,\frac{s}{2b};\varphi}(\Omega)$ загальної лінійної параболічної початково-крайової задачі

$$\sum_{|\alpha|+2b\beta\leq 2m} a^{\alpha,\beta}(x,t)D_x^\alpha \tfrac{\partial^\beta}{\partial t^\beta}u(x,t) = f(x,t),\ \ (x,t)\in\Omega,$$

$$\sum_{|\alpha|+2b\beta\leq m_j} b^{\alpha,\beta}(x,t)D_x^\alpha \tfrac{\partial^\beta}{\partial t^\beta}u(x,t)|_S = g_j(x,t),\ \ (x,t)\in S,\ \ j=\overline{1,m},$$

$$\tfrac{\partial^k}{\partial t^k}u(x,t)|_{t=0} = h_k(t),\ \ x\in G,\ \ k=\overline{0,\kappa-1},\ m\geq b\geq 1,\ \ m_j\geq 0,\ \ \kappa=\tfrac{m}{b}$$

з ненульовими початковими даними. Для знаходження відповідних просторів даних і умов узгодження використано класичні анізотропні простори Соболєва.

Окремими є дослідження у випадку

$$s = \sigma_0 + r - \tfrac{1}{2},\ r \in \mathrm{N},\ \text{де } \sigma_0 = \max\{2m, m_1 + 1, \ldots, m_m + 1\},$$

коли ізоморфізми порушуються навіть у соболєвському випадку ($\varphi = 1$), якщо означити простір $Q^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$ правих частин задачі лише через умови узгодження. Тому для цих значень s вказаний простір означено за допомогою інтерполяції.

Теорема 4.2 про локальну регулярність розв'язку є новою навіть для класичного анізотропного соболєвського простору.

Знайдено достатні умови класичності узагальненого розв'язку задачі. Вони є більш точні, ніж у випадку соболєвських просторів. Тут в означенні класичності розв'язку не вимагається його неперервності на лінії з'єднання бічної поверхні і основи циліндра.

Одержані результати конкретизовано для важливого в застосуваннях випадку параболічного рівняння другого порядку.

Результати дисертації опубліковано в 31 працях, зокрема, у 21 статті з переліку фахових видань з математики, серед яких 11 опубліковано у журналах, що входять до наукометричних баз даних Scopus і Web of Science.

Основні результати опубліковано повністю та своєчасно. Всі доведення правильні та повні.

Автореферат правильно відображає зміст дисертації.

Результати дисертації є загальними, новими, строго сформульованими, з детальними доведеннями, які забезпечують їх достовірність.

Дисертація є завершеною працею. В ній одержано нові теоретичні результати, важливі в теорії крайових задач для лінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними.

Одержані в дисертації результати викладено чітко, в логічній послідовності. Оформлення дисертації відповідає чинним правилам, виконане дуже грамотно.

Є декілька описок, зокрема "окремвму"на сторінці 30, "єдидиним"(стор. 62), "нажелить"(стор. 109), "$||w||$"замість "$||w||^2$"на стор. 106.

Суттєвих зауважень до дисертаційної роботи у мене нема.

Вважаю, що дисертаційна робота "Параболічні крайові задачі у просторах Хермандера" за актуальністю і одержаними науковими результатами відповідає сучасному рівню розвитку математики і задовольняє вимоги пп. 9, 10, 12, 13, 14 "Порядку присудження наукових ступенів", затвердженого постановою Кабінету Міністрів України за № 567 від 24 липня 2013 року зі змінами і доповненнями, внесеними постановами Кабінету Міністрів України за № 656 від 19 серпня 2015 року, за № 1159 від 30 грудня 2015 року, за № 567 від 27 липня 2016 року і наказу № 40 МОН України від 12 січня 2017 року, що висуваються до докторських дисертацій, а її автор Лось Валерій Миколайович заслуговує на присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння.

Офіційний опонент
доктор фізико-математичних наук, професор,
професор кафедри диференціальних рівнянь
Львівського національного університету
імені Івана Франка

Г. П. Лопушанська

30.01.2018

Підпис Лопушанської Г.П.
ПІДТВЕРДЖУЮ
ВЧЕНИЙ СЕКРЕТАР
ЛЬВІВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ імені ІВАНА ФРАНКА

Надійшов до спеціалізованої
вченої ради Д26.206.02 06.02.2018р.
секретар ради (Артемичешко Ж.Я.)