Національна академія наук України
Інститут математики

Карвацький Дмитро Миколайович

УДК 511.72

Представлення дійсних чисел за допомогою узагальнених послідовностей Фібоначчі та їх застосування

01.01.06 — алгебра та теорія чисел

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2018

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі вищої математики Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник:	доктор фізико-математичних наук, професор **Працьовитий Микола Вікторович**, Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, декан фізико-математичного факультету.
Офіційні опоненти:	доктор фізико-математичних наук, професор **Варбанець Павло Дмитрович**, Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, завідувач кафедри комп'ютерної алгебри та дискретної математики;
	доктор фізико-математичних наук, доцент **Олійник Богдана Віталіївна**, Національний університет «Києво-могилянська академія», завідувач кафедри математики.

Захист відбудеться «13» березня 2018 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.03 Інституту математики НАН України за адресою: 01004 м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий «9» лютого 2018 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради   Максименко С. І.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню властивостей узагальнених послідовностей Фібоначчі та їх застосуванням для представлення дійсних чисел, побудови відповідної метричної та ймовірнісної теорій, а також дослідження об'єктів зі складною локальною будовою (фрактальних множин, сингулярних функцій, розподілів випадкових величин).

Актуальність теми. У сучасній математиці для розвитку теорії фракталів (фрактальної геометрії та фрактального аналізу), конструктивної теорії неперервних функцій зі складною локальною тополого - метричною структурою і фрактальними властивостями (сингулярних, ніде не монотонних, ніде не диференційовних), сингулярних розподілів випадкових величин, зокрема, нескінченних згорток Бернуллі, широко використовуються різні системи числення та системи зображення чисел, послідовності та ряди з певними умовами однорідності. Останні включають послідовності Фібоначчі та їх узагальнення, а також представлення чисел, в базисних послідовностях яких вони фігурують.

Кодування (зображення) дійсних чисел засобами двосимвольного алфавіту через їх представлення підсумами (неповними сумами) збіжних рядів є самостійним напрямом досліджень в теорії чисел. На їх основі розвиваються окремі вітки метричної та ймовірнісної теорії чисел. В цій галузі працювало багато дослідників і велика кількість робіт присвячена задачам і проблемам, пов'язаним з нескінченними згортками Бернуллі.

Тополого-метричні та фрактальні властивості множин неповних сум рядів вивчались у роботах Т. О. Банаха, О. М. Барановського, А. Бартошевіча, Я. Ф. Виннишина, С. Гломба, Я. В. Гончаренко, Р. Джонса, Р. Кеньйона, В. М. Коваленка, Н. О. Корсунь, М. Купера, М. Морана, Ю. Переса, М. В. Працьовитого, Ф. Прус-Вішньовського, І. О. Савченка, Б. Солом'яка, Г. М. Торбіна, Е. Шимоніка.

Серед робіт, в яких розглядались ряди і зображення, пов'язані з числами Фібоначчі, варто відзначити роботи О. П. Стахова, О. Ю. Фещенка та Н. М. Василенко. В дисертаційній роботі останньої вивчались два розклади чисел: 1) у ряд, члени якого є елементами нескінченно малої послідовності Фібоначчі; 2) у ряд, членами якого є числа, обернені до елементів класичної послідовності Фібоначчі. У дисертаційній роботі О. Ю. Фещенка використовувалися двосторонні нескінченно малі послідовності Фібоначчі для побудови метричної та ймовірнісної теорії відповідних зображень. Представлення, які використовували ці автори, виявилися ефективним засобом для кодування чисел та вивчення розподілів випадкових величин з неоднорідними спектральними властивостями.

У даній роботі для подібних цілей ми використовуємо узагальнені послідовності Фібоначчі. Зазначимо, що різними видами узагальнених послідовностей Фібоначчі займалися П. Бундшуш, Д. Калман, М. Міллер, М. Муліне, В. Остін, М. Рашиді.

Одним із цікавих і, на наш погляд, перспективних узагальнень послідовності Фібоначчі є чотирьохпараметрична послідовність (u_n), для якої виконується наступне рекурентне співвідношення:

$$u_{n+2} = pu_{n+1} + su_n,$$

де u_1, u_2, p, s – фіксовані дійсні числа. Таке розширення класу послідовностей Фібоначчі включає:

— класичну послідовність Фібоначчі $(p = s = 1 = u_1 = u_2)$;
— всі геометричні прогресії $(p = q, s = 0, u_1 = b_1, u_2 = u_1 q)$;
— послідовність Люка $(p = s = 1 = u_2, u_1 = 2)$;
— послідовність Пелля $(p = 2, s = 1 = u_1 = u_2)$;
— послідовність Якобсталя $(p = 1 = u_1 = u_2, s = 2)$.

Актуальність даного дослідження ми вбачаємо в тому, що воно стосується несамоподібних систем кодувань дійсних чисел, метричної теорії чисел, геометрії числових рядів і сингулярних розподілів випадкових величин, інтерес до яких в останній період підвищився.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана у рамках досліджень математичних об'єктів зі складною локальною будовою, що проводяться на кафедрі вищої математики Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова та у відділі фрактального аналізу Інституту математики НАН України. Дослідження проводилось у рамках наступних науково-дослідних тем:

— двійкове кодування дійсних чисел і фрактали (номер державної реєстрації 0110U001279);

— фрактальний аналіз математичних об'єктів зі складною локальною будовою (номер державної реєстрації 0107U000583);
— дослідження еволюційних детермінованих та стохастичних систем складної тополого-метричної структури. Фрактальні властивості, керованість (номер держ. реєстрації 0115U000557).

Об'єкт дослідження. Простір узагальнених послідовностей Фібоначчі і системи зображення дійсних чисел, з ними пов'язані, а також їм відповідні множини, функції та розподіли ймовірностей.

Предмет дослідження. Локальні та глобальні властивості узагальнених чотирьохпараметричних послідовностей Фібоначчі та структурні властивості їх сім'ї. Геометрія зображень дійсних чисел за допомогою узагальнених послідовностей Фібоначчі, її топологічна, метрична, фрактальна та ймовірнісна складові.

Мета і завдання дослідження. Мета роботи – розробити систему зображення чисел, твірним елементом якої є узагальнена послідовність Фібоначчі, і на її основі створення відповідної метричної теорії дійсних чисел; її застосування у теорії розподілів випадкових величин. Основними завданнями дослідження є такі:
— вивчити локальні та глобальні властивості узагальнених послідовностей Фібоначчі та структурні властивості їх сім'ї;
— побудувати систему зображення чисел, твірним елементом якої є нескінченно мала додатна узагальнена послідовність Фібоначчі та дослідити її геометрію;
— створити систему представлення дійсних чисел за допомогою ряду, члени якого є оберненими до елементів послідовності Якобсталя-Люка;
— знайти застосування вказаним зображенням у фрактальній геометрії та теорії розподілів ймовірностей.

Методи дослідження. У роботі використовувались методи метричної теорії чисел, фрактального аналізу та фрактальної геометрії, математичного аналізу, теорії функцій та теорії ймовірностей.

У дисертації застосовувалася методологія, запропоновану у роботах М. В. Працьовитого та його учнів при дослідженні різних систем кодування дійсних чисел, зокрема двосимвольних, а також зі сталим чи змінним, скінченним або нескінченним алфавітами.

Наукова новизна одержаних результатів. Основними науковими результатами, що виносяться на захист, є такі:

— досліджені локальні та глобальні властивості узагальнених послідовностей Фібоначчі, структурні властивості їх сім'ї;

— у просторі узагальнених послідовностей Фібоначчі введно скалярний добуток, норму та метрику, розглянуті різні математичні структури, описаний клас самоподібних фракталів;

— для множини дійсних чисел, що є підсумами додатного ряду, члени якого є елементами нескінченно малої додатної узагальненої послідовності Фібоначчі, описано топологічні, метричні та фрактальні властивості;

— вивчена лебегівська структура (вміст дискретної, абсолютно неперервної та сингулярної компонент) і спектральні властивості розподілу випадкової підсуми ряду при різних розподілах доданків та поведінку на нескінченності модуля її характеристичної функції у випадку незалежності доданків;

— для послідовності Якобсталя-Люка виведено формули: для загального члена, суми перших n членів, суми перших n парних (непарних) членів, обґрунтовані інші її властивості;

— доведено, що множина неповних сум ряду з обернених чисел Якобсталя-Люка є ніде не щільною множиною додатної міри Лебега;

— побудована трисимвольна система зображення дійсних чисел, яка ґрунтується на їх розкладах в ряди з базисною послідовністю, членами якої є числа, обернені до членів послідовності Якобсталя-Люка;

— доведено, що кожне число інтервалу $(0; 2S)$, де S - сума ряду, має континуальну кількість різних зображень. В цій системі введено канонічне зображення, що має нульову надлишковість, і вказано кілька його застосувань.

Практичне значення одержаних результатів. Робота має теоретичний характер. Отримані результати є певним внеском у метричну теорію чисел, теорію міри, теорію функцій дійсної змінної та теорію сингулярних розподілів ймовірностей. Крім того запропоновані в дисертації засоби представлення дійсних чисел можуть бути використані для кодування інформації, дослідження математичних об'єктів зі складною локальною будовою.

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертації отримані автором самостійно. Зі статтей, опублікованих у співавторстві, до дисертації включені лише ті, що належать автору.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційного дослідження доповідались на наукових конференціях різного рівня та наукових семінарах. Це такі конференції:

— Друга міжуніверситетська конференція молодих вчених, Київ, 28-29 квітня 2011 року;
— Чотирнадцята Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, Київ, 13-15 травня 2012 року;
— Міжнародна наукова конференція «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь», присвячена 80-річчю Шкіля М.І., Київ, 13-14 грудня 2012 року;
— Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу», Ворохта, 25 лютого - 3 березня 2013 року;
— Третя міжуніверситетська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, 25-27 квітня 2013 року;
— Міжнародна математична конференція з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка «Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування», Севастополь, 23-30 червня 2013 року;
— Всеукраїнська науково-методична конференція «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі», Київ, 26-27 червня 2013 року;
— The 9-th International Algebraic Conference in Ukraine, Lviv, July 06-13, 2013;
— The Fifth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations, Kyiv, September 16-20, 2013;
— Четверта міжнародна Ганська конференція, присвячена 135-ій річниці від народження Ганса Гана, Чернівці, 30 червня - 5 липня 2014 року;

— П'ята Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики ти фізики "Актуальні проблеми сучасної математики та фізики та методики їх навчання", Київ, 25-26 квітня 2016 року;
— Всеукраїнська науково-методична конференція «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі», Київ, 7-8 жовтня 2016 року;
— International mathematical conference "Groups and Actions: Geometry and Dynamics" dedicated to the memory of professor Vitaly Sushchanskyy, Kyiv, December 19-22, 2016.

Результати дослідження були оприлюднені на засіданнях наступних наукових семінарів:
— семінар з фрактального аналізу Інституту математики НАН України та НПУ імені М. П. Драгоманова (керівник: доктор фіз.-мат. наук, проф. М. В. Працьовитий);
— семінар кафедри геометрії, топології та динамічних систем Київського Національного університету імені Т. Г. Шевченка (керівник: доктор фіз.-мат. наук, проф. О. О. Пришляк);
— семінар лабораторії топології Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук С. І. Максименко).

Публікації. Основні результати роботи викладено у 19-и наукових публікаціях, серед яких 6 статей у фахових виданнях [$1^a, 2^a, 3^a, 4^a, 5^a, 6^a$], та 13 тез доповідей на конференціях різного рівня [$7^a, 8^a, 9^a, 10^a, 11^a, 12^a, 13^a, 14^a, 15^a, 16^a, 17^a, 18^a, 19^a$]. Одна стаття [$6^a$] опублікована у журналі, що індексується міжнародною наукометричною базою Scopus.

Структура дисертації. Робота складається з анотації, списку основних умовних позначень, вступу, трьох розділів, розбитих на підрозділи, загальних висновків та висновків до кожного розділу, списку використаних джерел, який містить 83 джерела, списку публікацій автора. Повний обсяг роботи складає 128 сторінок.

Подяка. Автор висловлює щиру подяку науковому керівнику Працьовитому Миколі Вікторовичу за постановку задач, допомогу та підтримку.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

Розділ 1 носить вступний характер. Він присвячений ключовому поняттю дослідження – узагальненій чотирьохпараметричній послідовності Фібоначчі і розгляду математичних структур у просторі таких послідовностей.

Означення 1.1. *Послідовність дійсних чисел* $(u_n) \equiv (u_n)_{n=1}^{\infty}$, *яка має властивість*

$$u_{n+2} = pu_{n+1} + su_n, \tag{1}$$

де u_1, u_2, p, s — *фіксовані дійсні числа, називається узагальненою послідовністю Фібоначчі.*

Встановлюються властивості такої послідовності, зокрема, асимптотичні. Виводяться формули: загального члена послідовності

$$u_n = \left[\begin{array}{ll} \dfrac{\Phi^{n-1}(u_2 - u_1\Psi) - \Psi^{n-1}(u_2 - u_1\Phi)}{\Phi - \Psi} & \text{при} \;\; \Phi \neq \Psi, \\ \Phi^{n-1}\left(u_1 + (n-1)\left(\dfrac{u_2}{\Phi} - u_1\right)\right) & \text{при} \;\; \Phi = \Psi, \end{array} \right.$$

$$\text{де} \quad \Phi = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4s}}{2} \quad \text{та} \quad \Psi = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4s}}{2},$$

наслідком якої є рівність

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \Phi, \text{якщо } |\Phi| \geqslant |\Psi|, \\ \Psi, \text{якщо } |\Phi| < |\Psi|; \end{cases}$$

суми перших n членів, суми перших n членів з парними (непарними) номерами місць

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{u_1(1-p) + u_2 - u_{n+1} - su_n}{1 - p - s},$$

$$\sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} u_{2k-1} = \frac{(1 - p^2 - s)u_1 + pu_2 - u_{n+1} + s^2 u_{n-1}}{1 - p\sqrt{p^2 + 4s} - s^2},$$

$$\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} u_{2k} = \frac{(1 + s)u_2 - psu_1 - u_{n+1} + s^2 u_{n-1}}{1 - p\sqrt{p^2 + 4s} - s^2}.$$

Доведено критерій нескінченної малості послідовності.

Теорема 1.6. Для того щоб узагальнена послідовність Фібоначчі (u_n) була нескінченно малою, необхідно і достатньо, щоб виконувалась хоча б одна із систем:

$$\begin{cases} |\Phi| < 1, \\ |\Psi| < 1, \end{cases} \quad \begin{cases} |\Phi| < 1, \\ u_2 = u_1\Phi, \end{cases} \quad \begin{cases} |\Psi| < 1, \\ u_2 = u_1\Psi. \end{cases}$$

Встановлено, що множина

$$F = \{(u_n): \ u_1, u_2 \in \mathbb{R}, \ u_n = pu_{n-1} + su_{n-2}, \ n \geqslant 3\}$$

узагальнених послідовностей Фібоначчі з фіксованими параметрами p та s утворює двовимірний лінійний простір, в якому існує підпростір нескінченно малих послідовностей, природним чином вводяться скалярний добуток, норма, метрика.

Метризація лінійного простору F з допомогою $q-$метрики

$$\rho_q(\overline{x}, \overline{y}) = \rho_q = \|\overline{x} - \overline{y}\|_q = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x_n - y_n)^2}{q^{2n}}},$$

де $max\{|\Phi|, |\Psi|\} < q$ – фіксоване натуральне число, дозволило ввести базові поняття теорії фракталів: міру Гаусдорфа, розмірність Гаусдорфа-Безиковича і описати деякий клас самоподібних фракталів.

Теорема 1.13. Якщо $\overline{0} \neq \overline{\alpha} = (\alpha_n)$ – фіксований елемент простору F, r і m – натуральні числа, причому $1 < m < r$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \in \{0, 1, \ldots, r-1\}, \ v_i < v_{i+1}, \ \ i = \overline{1, m-1}$,

$$C[r, V] = \left\{\lambda : \lambda = \frac{\alpha_1}{r} + \frac{\alpha_2}{r^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{r^n} + \ldots, \alpha_n \in V\right\},$$

то множина

$$H = \{\overline{x} \ : \overline{x} = \lambda\overline{\alpha}, \ \lambda \in C[r, V]\}$$

в метричному просторі (F, ρ_q) є самоподібною і її самоподібна розмірність

$$\alpha_0 = \log_r |V|$$

співпадає з розмірністю Гаусдорфа-Безиковича $\alpha_{\rho_q}(H)$.

Теорема 1.14. Якщо $\overline{\alpha} = (\alpha_n)$, $\overline{b} = (b_n) \in F$, причому $\overline{\alpha}$ і $\overline{b}$ неколінеарні, то множина

$$H = \left\{ \overline{x} : \overline{x} = \lambda_1 \overline{\alpha} + \lambda_2 \overline{b}, \quad \lambda_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{2^k}, \lambda_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{2^k}, \alpha_k + \beta_k \leqslant 1 \right\}$$

є самоподібною досконалою множиною, самоподібна розмірність якої співпадає з розмірністю Гаусдорфа-Безиковича і дорівнює $\log_2 3$.

У **розділі 2** розглядається представлення дійсних чисел за допомогою неповних сум ряду, члени якого є елементами нескінченно малої додатної узагальненої послідовності Фібоначчі, вивчається його геометрія (властивості циліндричних множин).

У параграфі 2.1 досліджується додатний ряд

$$u_1 + u_2 + \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+2}, \; u_{n+2} = pu_{n+1} + su_n, n \in N, u_1, u_2, p, s \in R^+, \quad (2)$$

члени якого утворюють узагальнену послідовність Фібоначчі з додатними початковими параметрами u_1, u_2, p, s. Для членів такого ряду має місце рівність

$$u_n = \frac{\Phi^{n-1}(u_2 - u_1\Psi) - \Psi^{n-1}(u_2 - u_1\Phi)}{\Phi - \Psi}. \quad (3)$$

Теорема 2.2. *Для збіжності ряду* (2) *необхідно і достатньо, щоб виконувалася система нерівностей*

$$\begin{cases} 0 < p < 1, \\ 0 < s < 1 - p. \end{cases} \quad (4)$$

Також досліджуються властивості членів та залишків ряду (2), встановлюються співвідношення між ними.

У параграфі 2.2 досліджуються тополого-метричні та фрактальні властивості множини неповних сум ряду (2) в залежності від початкових параметрів p та s.

Теорема 2.4. *Якщо для ряду* (2) *виконується система нерівностей*

$$\begin{cases} 0 < p < 1, \\ \max\{0, \frac{1}{4} - \frac{p}{2}\} \leqslant s < 1 - p, \end{cases} \quad (5)$$

то ряд збігається, а множина його неповних сум являє собою скінченне об'єднання відрізків.

Теорема 2.6. *Якщо для ряду (2) виконується система нерівностей*

$$\begin{cases} 0 < p < \frac{1}{2}, \\ 0 < s < \frac{1}{4} - \frac{p}{2}, \end{cases} \tag{6}$$

то ряд збігається, а множина його неповних сум є досконалою ніде не щільною множиною нульової міри Лебега, розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої рівна $\alpha_0 = -\log_\Phi 2$.

У параграфі 2.3 доводиться, що довільне дійсне число $x \in \left[0\,,\,\frac{u_1(1-p)+u_2}{1-p-s}\right]$, може бути представленим у вигляді

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n, \text{ де } \alpha_n \in \{0, 1\}. \tag{7}$$

Описаний алгоритм розкладу числа у ряд (7).

У параграфі 2.4 обґрунтовано, що система представлення чисел у вигляді (7) є суттєво надлишковою, а саме: кожне дійсне число має континуальну множину різних представлень.

У параграфі 2.5 досліджується випадкова величина

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k u_k, \tag{8}$$

де ξ_k — послідовність незалежних випадкових величин з розподілами: $P\{\xi_k = 0\} = p_{0k} \geqslant 0, P\{\xi_k = 1\} = p_{1k} \geqslant 0, p_{0k} + p_{1k} = 1$, яка має чисто дискретний розподіл тоді і тільки тоді, коли

$$M = \prod_{k=1}^{\infty} \max\{p_{0k}, p_{1k}\} > 0.$$

Теорема 2.9. *Якщо* $M = 0$ *і для послідовності* (u_n) *виконується умова (6), то випадкова величина* ξ *має чисто сингулярний розподіл канторівського типу.*

Якщо $f_\xi(t)$ – характеристична функція розподілу випадкової величини ξ при $u_k = 3^{-k} + (-1)^k 3^{-2k}$, то

$$L_\xi = \lim_{|t|\to\infty} \sup |f_\xi(t)| > 0,3909693738 > 0,$$

що в силу неперервності розподілу ξ обґрунтовує його сингулярність.

Параграф 2.6 присвячений випадку: $s = -\frac{p^2}{4}$, для якого

$$u_n = \left(\frac{p}{2}\right)^{n-1} \left(u_1 + (n-1)\left(\frac{2u_2}{p} - u_1\right)\right).$$

У **розділі 3** досліджується трисимвольна система представлення дійсних чисел, яка базується на послідовності Якобсталя-Люка, а також об'єкти зі складною локальною будовою з нею пов'язані.

Параграф 3.1 присвячений вивченню локальних та глобальних властивостей послідовності Якобсталя-Люка, а саме: послідовності (J_n) для членів якої виконується рівність

$$J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n,\ J_1 = 2, J_2 = 1.$$

У параграфі 3.2 досліджується ряд, члени якого є оберненими до елементів послідовності Якобсталя-Люка

$$\sum_{n=1}^{\infty} J_n^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + ... + \frac{1}{J_n} + \dots. \tag{9}$$

Розглянутий ряд є збіжним, знакододатним, члени його (починаючи з другого номеру) утворюють монотонно спадну послідовність. Більше того, з робіт M. Prevost і T. Matala-aho відомо, що нескінченна сума виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{A\alpha^n + B\beta^n},$$

при цілих параметрах α, β та умовах $A \cdot B \neq 0, |\alpha| > |t|, |A \cdot B \cdot t^2| < |\alpha|$ є ірраціональним числом. Звідси сума ряду (9) також є ірраціональним числом.

Лема 3.1. *Для ряду* (9) *справедливі наступні нерівності*

$$\begin{cases} u_n > r_n, \text{ якщо } n - \text{парне}, \\ u_n < r_n, \text{ якщо } n - \text{непарне}. \end{cases} \tag{10}$$

Теорема 3.7. *Множина неповних сум ряду* (9) *є досконалою ніде не щільною множиною додатної міри Лебега.*

У параграфі 3.3 розглядаються розклади чисел в ряд (9).

Теорема 3.8. *Для довільного дійсного числа x з відрізка $[0, S]$, де $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2u_{n+2}$, існує послідовність $(\alpha_n), \alpha_n \in \{0, 1, 2\}$, така, що*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_{n+2} \equiv \Delta^J_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}. \qquad (11)$$

Таке представлення називатимемо *$J-$представленням числа.*

Ця трисимвольна система зображення чисел – суттєво надлишкова, а саме: кожне число інтервала $(0, S)$ має континуальну множину різних зображень. В роботі вивчається геометрія цієї системи кодування чисел, описуються властивості циліндричних множин, специфіка їх перекриттів.

У параграфі 3.4 розглядаються множини, які мають нетривіальні властивості, а саме: є ніде не щільними множинами додатної міри Лебега або мають дробову розмірність Гаусдорфа-Безиковича тощо.

Теорема 3.10. *Множина усіх чисел з відрізка $[0, S]$, $J-$ зображення яких має вигляд $\Delta_{\alpha_1\alpha_1\alpha_2\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha_n\ldots}$, де $\alpha_n \in \{0, 1\}$, є досконалою, ніде не щільною множиною нульової міри Лебега, розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої рівна $\frac{1}{2}$.*

Теорема 3.11. *Множина усіх чисел з відрізка $[0, S]$, $J-$ зображення яких має вигляд $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}$, де $\alpha_n \in \{0, 1\}$ $(\alpha_n \in \{0, 2\})$, є досконалою ніде не щільною множиною додатної міри Лебега.*

Параграф 3.5 присвячений вивченню канонічного J-представлення.

Означення 3.4. *$J-$представлення $\Delta^J_{f_1(x)f_2(x)\ldots f_n(x)\ldots}$ називається канонічним, якщо*

$$f_1(x) = \begin{cases} 2, & \text{якщо} \quad 2u_3 \leqslant x, \\ 1, & \text{якщо} \quad u_3 \leqslant x < 2u_3, \\ 0, & \text{якщо} \quad u_3 > x, \end{cases}$$

$$f_i(x) = \begin{cases} 2, \text{якщо} \sum\limits_{n=1}^{i-1} f_n(x)u_{n+2} + 2u_{i+2} \leqslant x, \\ 1, \text{якщо} \sum\limits_{n=1}^{i-1} f_n(x)u_{n+2} + u_{i+2} \leqslant x < \sum\limits_{n=1}^{i-1} f_n(x)u_{n+2} + 2u_{i+2}, \\ 0, \text{якщо} \sum\limits_{n=1}^{i-1} f_n(x)u_{n+2} + u_{i+2} > x. \end{cases}$$

Кожне число з відрізка $[0, S]$ має єдине канонічне зображення, що дозволяє легко порівнювати два дійсних чисел a та b, які задані своїми канонічними $J-$розкладами (досить порівняти їх перші не співпадаючі символи зображення). Більше того, числа a та b будуть рівними тоді і тільки тоді, коли їх відповідні $J-$символи співпадатимуть.

Теорема 3.13. Якщо $\Delta^{J*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ — канонічне зображення деякого числа x з відрізка $[0, S]$, то для довільного натурального k:

1. $\alpha_{2k-1}\alpha_{2k} \neq 02$,
2. $021 \neq \alpha_{2k}\alpha_{2k+1}\alpha_{2k+2} \neq 022$,
3. $\alpha_{2k-1}\alpha_{2k}\alpha_{2k+1}\alpha_{2k+2}\ldots\alpha_{4k-2} \neq 0\beta_1\beta_2\beta_3\ldots\beta_{2k-1},\ \beta_i \in \{1, 2\}$, $i = \overline{1, 2k-1}$.

Параграф 3.6 присвячений дослідженні об'єктів зі складною локальною будовою, зокрема, сингулярних розподілів випадкових неповних сум ряду з обернених чисел Якобсталя-Люка.

ВИСНОВКИ

Числові послідовності і ряди, які володіють певними умовами однорідності, сьогодні широко використовуються як засоби кодування дійсних чисел. Це забезпечує своєрідні форми існування дійсного числа і ґрунтовний тополого-метричний та фрактальний аналіз математичних об'єктів з іррегулярною локальною структурою.

Послідовності Фібоначчі та їх узагальнення, будучи зворотніми послідовностями, здатні виконувати роль базисних послідовностей у різних системах зображення чисел, а отже, бути основою для побудови та розвитку метричної та ймовірнісної теорій чисел.

У роботі розглядається два представлення дійсних чисел за допомогою чотирьохпараметричної узагальненої послідовності Фібоначчі: 1) за допомогою нескінченно малої додатної узагальненої послідовності Фібоначчі; 2) трисимвольна система представлення чисел, в основі якої лежить ряд з обернених чисел Якобсталя-Люка. Обидва ці представлення мають ненульову надлишковість та скінченний алфавіт, вони володіють складною геометрією (циліндричні множини перекриваються).

Загалом у дисертаційній роботі отримані наступні результати:

— встановлені локальні та глобальні властивості узагальнених послідовностей Фібоначчі, а також структурні властивості їх сім'ї;
— у просторі узагальнених послідовностей Фібоначчі досліджені різноманітні математичні структури, описаний клас самоподібних фракталів;
— для множини дійсних чисел, що є підсумами додатного ряду, члени якого є елементами нескінченно малої додатної узагальненої послідовності Фібоначчі, описано топологічні, метричні та фрактальні властивості;
— вивчена лебегівська структура (вміст дискретної, абсолютно неперервної та сингулярної компонент) і спектральні властивості розподілу випадкової підсуми ряду при різних розподілах доданків та поведінку на нескінченності модуля її характеристичної функції у випадку незалежності доданків;
— для послідовності Якобсталя-Люка виведено формули: для загального члена послідовності, суми перших n членів послідовності, суми перших n парних (непарних) членів послідовності, обґрунтовані інші властивості цієї додатної узагальненої послідовності Фібоначчі;
— доведено, що множина неповних сум ряду з обернених чисел Якобсталя-Люка є ніде не щільною множиною додатної міри Лебега;
— побудована трисимвольна система зображення дійсних чисел, яка ґрунтується на їх розкладах в ряди з базисною послідовністю, членами якої є числа, обернені до членів послідовності Якобсталя-Люка;

— доведено, що кожне число інтервалу $(0; 2S)$, де S – сума ряду, має континуальну кількість різних зображень. В цій системі введено канонічне зображення, що має нульову надлишковість, і вказано кілька застосувань до розв'язання задач метричної та ймовірнісної теорії чисел.

Проведені дослідження лежать в руслі сучасних математичних досліджень об'єктів зі складною локальною поведінкою, зокрема пов'язаних з сингулярними розподілами ймовірностей, використанням різних систем представлення дійсних чисел з надлишковим набором цифр, інтерес до яких в останні роки значно підвищився.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Карвацький Д. М.* Математичні структури у просторах узагальнених послідовностей Фібоначчі / Д. М. Карвацький, Н. М. Василенко // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2012. – Т. 13, № 1. – С. 118-127.
2. *Карвацький Д. М.* Зображення дійсних чисел нескінченно малими знакододатними узагальненими послідовностями Фібоначчі / Д. М. Карвацький // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2013. – Т. 15, № 1. – С. 56-73.
3. *Працьовитий М. В.* Представлення чисел за допомогою послідовності Якобсталя-Люка / М. В. Працьовитий, Д. М. Карвацький // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз. - мат. науки. – 2014. – Т. 16, № 2. – С. 138-149.
4. *Карвацький Д. М.* Властивості розподілу випадкової неповної суми збіжного знакододатного ряду, члени якого утворюють узагальнену послідовність Фібоначчі / Д. М. Карвацький // Буковинський математичний журнал. – 2015. – Т. 3, № 1. – С. 52-59.
5. *Карвацький Д. М.* Про один клас узагальнених послідовностей Фібоначчі та ряди, що з ними пов'язані / Д. М. Карвацький // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2015. – Т. 17, № 1. – С. 186-201.

6. *Pratsyovitiy M. V.* Jacobsthal-Lucas series and their applications / M. V. Pratsyovitiy, D. M. Karvatskiy // Algebra and discrete mathematics. – 2017. – Vol. 24, № 1. P. 169–180.
7. *Карвацький Д. М.* Ірраціональність рядів, члени яких є оберненими до членів узагальнених послідовностей Фібоначчі // Друга міжуніверситетська наукова конференція з математики та фізики для студентів та молодих науковців, Київ, 28-29 квітня 2011 р.: Тези доповідей. – Київ : 2011. – С. 89-90.
8. *Карвацький Д. М.* Критерії збіжності рядів, члени яких є оберненими до членів узагальненої послідовності Фібоначчі // Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, Київ, 19-21 квітня 2012 р.: Тези доповідей. – Київ : 2012. – С. 128.
9. *Карвацький Д. М.* Лінійні простори узагальнених послідовностей Фібоначчі та математичні структури в них // Міжнародна наукова конференція "Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь", Київ, 13-14 грудня 2012 р.: Тези доповідей. – Київ : 2012. – С. 67.
10. *Карвацький Д. М.* Фрактали у просторі узагальнених послідовностей Фібоначчі // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", Ворохта, 25 лютого - 3 березня 2013 р.: Тези доповідей. – Івано-Франківськ : 2013. – С. 54-56.
11. *Карвацький Д. М.* Властивості множини неповних сум одного класу знакододатних рядів, пов'язаних з узагальненими послідовностями Фібоначчі // Третя міжуніверситетська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, 25-27 квітня 2013 р.: Тези доповідей. – Київ : 2013. – С. 103-104.
12. *Карвацький Д. М.* Зображення дійсних чисел за допомогою нескінченно малих знакододатних узагальнених послідовностей Фібоначчі // Міжнародна математична конференція "Боголюбівські читання DIF – 2013. Диференціальні рівняння. Теорія функцій та їх застосування", Севастополь, Україна, 23 - 30 червня 2013 р.: Тези доповідей. – Київ : 2013. – С. 237.

13. *Карвацький Д. М.* Кодування чисел за допомогою нескінченно малих знакододатних узагальнених послідовностей Фібоначчі // Всеукраїнська науково-методична конференція «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі», Київ, 26 - 27 червня 2013 р.: Тези доповідей. – Київ : 2013. – С. 103-105.
14. *Karvatsky D. M.* Representing real numbers by generalized Fibonacci sequences // The 9-th International Algebraic Conference in Ukraine, July 8 - 13, 2013, Lviv, Ukraine: Abstracts. – Lviv : 2013. – P. 81.
15. *Karvatsky D. M.* Topological, Metric and Fractal Properties of the Set of Incomplete Sums of Series of Fibonacci Generalized Numbers // The Fifth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations, September 16 - 20, 2013, Kyiv, Ukraine: Abstracts. – Kyiv : 2013. – P. 99.
16. *Карвацький Д. М.* Властивості розподілу випадкової величини, що пов'язана з рядами узагальнених чисел Фібоначчі // Четверта міжнародна Ганська конференція, Чернівці, Україна, 30 червня - 5 липня 2014 р.: Тези доповідей. – Чернівці : 2014. – С. 69.
17. *Карвацький Д. М.* Представлення чисел за допомогою послідовності Якобсталя-Люка // П'ята всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, Україна, 25-26 квітня 2016 р.: Тези доповідей. – Київ : 2016. – С. 32.
18. *Карвацький Д. М.* Кодування дійсних чисел за допомогою послідовності Якобсталя-Люка // Всеукраїнської науково-методичної конференції «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі», Київ, 7-8 жовтня 2016 р.: Тези доповідей. – Київ : 2016. – С. 46.
19. *Карвацький Д. М.* Система представлення дійсних чисел, твірним елементом якої є послідовність Якобсталя-Люка // International mathematical conference «Groups and Actions: Geometry and Dynamics» dedicated to the memory of professor Vitaly Sushchanskyy, December 19-22, 2016, Kyiv, Ukraine: Abstracts. – Kyiv : 2016. – P. 58.

АНОТАЦІЯ

Карвацький Д. М. Представлення дійсних чисел за допомогою узагальнених послідовностей Фібоначчі та їх застосування. — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 — алгебра та теорія чисел. – Інститут математики НАН України, Київ, 2018.

Дисертація присвячена вивченню локальних та глобальних властивостей узагальненої послідовності Фібоначчі, а саме: послідовності (u_n), для членів якої виконується рівність

$$u_{n+2} = pu_{n+1} + su_n, \quad u_1, u_2, p, s \in R,$$

її використанню для представлення дійсних чисел додатними рядами, задання та дослідження об'єктів з фрактальними властивостями.

У роботі вивчаються дві аналітичні системи кодування дійсних чисел з використанням двосимвольного та трисимвольного алфавітів. Перша ґрунтується на представленні дійсного числа підсумою (неповною сумою) заданого ряду, членами якого є елементи нескінченно малої додатної узагальненої послідовності Фібоначчі (u_n) : $[0; r] \ni x = \varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2 + \cdots + \varepsilon_n u_n + \cdots \equiv \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n \ldots}, \varepsilon_n \in \{0, 1\} \equiv A_2$. Друга система використовує послідовність чисел Якобсталя-Люка $(J_1 = 2, J_2 = 1, J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n)$ та алфавіт $A_3 \equiv \{0, 1, 2\}$: $[0; R] \ni x = \alpha_1 {J_1}^{-1} + \alpha_2 {J_2}^{-1} + \cdots + \alpha_n {J_n}^{-1} + \cdots \equiv \Delta^J_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots}$.

Обидві системи зображення чисел мають ненульову надлишковість та непросту геометрію (циліндричні множини перекриваються). У роботі дані зображення використовуються для задання фрактальних множин (ніде не щільних множин додатної та нульової міри Лебега, цілої та дробової розмірності Гаусдорфа-Безиковича) та розподілів випадкових величин, зокрема нескінченних згорток Бернуллі, розподіли яких мають канторівський тип.

Ключові слова: система зображення дійсних чисел, узагальнена послідовність Фібоначчі, послідовність Якобсталя-Люка, множина неповних сум (підсум) ряду, ніде не щільна множина, міра Лебега, фрактальна розмірність Гаусдорфа-Безиковича, випадкова величина канторівського типу, нескінченна згортка Бернуллі.

ABSTRACT

Karvatsky D. M. Representation of real numbers by generalized Fibonacci sequences and their applications. — Manuscript.

Thesis for a Candidate Degree in Physics and Mathematics. Speciality 01.01.06 — algebra and number theory. – Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2018.

In the thesis, we study local and global properties of generalized Fibonacci sequence, namely the sequence (u_n) such that

$$u_{n+2} = pu_{n+1} + su_n, \quad u_1, u_2, p, s \in R.$$

We use it for representation of real numbers, definition and investigation of objects with fractal properties.

We consider two analytic systems of encoding of real numbers with two-symbol and three-symbol alphabet. First system is based on representation of real number by subsum (incomplete sum) of a given series which terms are elements of infinitesimal positive generalized Fibonacci sequence (u_n):
$[0, r] \ni x = \varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2 + \cdots + \varepsilon_n u_n + \cdots \equiv \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n \ldots}, \varepsilon_n \in \{0, 1\} \equiv A_2$.
Second system uses Jacobsthal-Lucas sequence of numbers ($J_1 = 2$, $J_2 = 1$, $J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n$) and alphabet $A_3 \equiv \{0, 1, 2\}$:
$[0, R] \ni x = \alpha_1 {J_1}^{-1} + \alpha_2 {J_2}^{-1} + \cdots + \alpha_n {J_n}^{-1} + \cdots \equiv \Delta^J_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots}$.

Both systems of representation for numbers have non-zero redundancy and non-simple geometry (cylindrical sets are overlapped). In the work, we use these representations for definition of fractal sets (nowhere dense sets of positive and zero Lebesgue measure and of integer and fractional Hausdorff-Besicovitch dimension) as well as distributions of random variables, in particular, infinite Bernoulli convolutions with Cantor type probability distribution.

Keywords: system of representation of real numbers, generalized Fibonacci sequence, Jacobsthal-Lucas sequence, set of incomplete sums (subsums) of series, nowhere dense set, Lebesgue measure, fractal Hausdorff-Besicovitch dimension, random variable of Cantor type, infinite Bernoulli convolution.

АННОТАЦИЯ

Карвацкий Д. М. Представление действительных чисел с помощью обобщенных последовательностей Фибоначчи и их приложения. — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико- математических наук по специальности 01.01.06 — алгебра и теория чисел. – Институт математики НАН Украины, Киев, 2018.

Диссертация посвященная изучению локальных и глобальных свойств обобщенной последовательности Фибоначчи, а именно: последовательности (u_n), для членов которой имеет место равенство

$$u_{n+2} = pu_{n+1} + su_n, \quad u_1, u_2, p, s \in R,$$

её применению к представлениям действительных чисел рядами, исследованию и заданию объектов с фрактальными свойствами.

В роботе изучаются две аналитические системы кодирования действительных чисел с использованием двухсимвольного и трехсимвольного алфавитов. Первая основана на представлении действительного числа подсумой (неполной сумой) данного ряда, членами которого являются элементы бесконечно малой положительной обобщенной последовательности Фибоначчи (u_n) :
$[0; r] \ni x = \varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2 + \dots + \varepsilon_n u_n + \dots = \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n \dots}, \varepsilon_n \in \{0, 1\} \equiv A_2$. Вторая система использует последовательность чисел Якобсталя-Люка ($J_1 = 2, J_2 = 1, J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n$) и алфавит $A_3 \equiv \{0, 1, 2\}$:
$[0; R] \ni x = \alpha_1 {J_1}^{-1} + \alpha_2 {J_2}^{-1} + \dots + \alpha_n {J_n}^{-1} + \dots \equiv \Delta^J_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}$.

Обе системы изображения чисел имеют ненулевую избыточность и непростую геометрию (цилиндрические множества перекрываются). В роботе эти изображения используются для задания фрактальных множеств и распределений случайных величин, в том числе бесконечных сверток Бернулли, распределения которых имеют канторовский тип.

Ключевые слова: система изображения действительных чисел, обобщенная последовательность Фибоначчи, множество неполных сум ряда, последовательность Якобсталя-Люка, нигде не плотное множество, мера Лебега, фрактальная размерность Хаусдорфа-Безиковича, случайная величина канторовского типа, бесконечная свертка Бернулли.

Офсет. друк. Фіз. друк. арк. 1,25. Умовн. друк. арк. 1,16.
Тираж 100 примірників.

Видавництво Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова, 01004, м. Київ, вул. Пирогова, 9
Свідоцтво про реєстрацію №1101 від 29.10.2002.
Телефон:(044)239-30-26.