Національний педагогічний університет
імені М. П. Драгоманова
Міністерство освіти і науки України
Національна академія наук України
Інститут математики

На правах рукопису

Карвацький Дмитро Миколайович

УДК 511.72

Представлення дійсних чисел за допомогою узагальнених послідовностей Фібоначчі та їх застосування

01.01.06 — алгебра та теорія чисел

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
Працьовитий Микола Вікторович,
доктор фізико-математичних наук, професор

Київ — 2018

АНОТАЦІЯ

Карвацький Д. М. Представлення дійсних чисел за допомогою узагальнених послідовностей Фібоначчі та їх застосування. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико - математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.06 – алгебра і теорія чисел (111 – математика). – Інститут математики НАН України, Київ, 2018.

Робота виконана на кафедрі вищої математики Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова.

Дисертація присвячена вивченню властивостей чотирьохпараметричних узагальнених послідовностей Фібоначчі, а саме: послідовностей (u_n), для членів яких виконується рекурентне співвідношення

$$u_{n+2} = pu_{n+1} + su_n, \quad u_1, u_2, p, s \in R,$$

структурним властивостям їх сім'ї, використанню їх для представлення дійсних чисел і побудові їх метричної та ймовірнісної теорії, а також для задання математичних об'єктів з фрактальними властивостями. Робота виконана в галузі метричної та ймовірнісної теорії дійсних чисел, що ґрунтується на їх представленнях (та зображеннях) неповними сумами рядів, породженими узагальненими послідовностями Фібоначчі. Цей напрямок досліджень тісно пов'язаний з геометрією та метричною теорією зображень дійсних чисел, що ґрунтується на їх розкладах в інші додатні ряди спеціального виду.

Метризувавши простір узагальнених послідовностей Фібоначчі F з фіксованими параметрами p та s і ввівши поняття α-міри Гаусдорфа та фрактальної розмірності Гаусдорфа-Безиковича, описано деякий клас самоподібних фракталів.

Для множини дійсних чисел, що є підсумами додатного ряду, члени якого є елементами нескінченно малої узагальненої послідовності Фібоначчі, описано топологічні, метричні та фрактальні властивості. Вичерпно вивчено питання про кількість представлень числа підсумою такого ряду. Вивчена лебегівська структура (вміст дискретної, абсолютно неперервної та сингулярної компонент) і спектральні властивості розподілу випадкової підсуми ряду при різних розподілах доданків та поведінку на нескінченності модуля її характеристичної функції у випадку незалежності доданків.

Для послідовності Якобсталя-Люка ($J_1 = 2, J_2 = 1, J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n$) виведено формули: для загального члена послідовності, суми перших n членів послідовності, суми перших n парних (непарних) членів послідовності, обґрунтовані інші властивості цієї додатної узагальненої послідовності Фібоначчі. Для ряду, доданки якого є числа, обернені до чисел послідовності Якобсталя-Люка встановлено співвідношення між членами та залишками (доведено, що $u_{2n-1} < r_{2n-1}, u_{2n} > r_{2n}, n \in N$). Встановлено, що множина неповних сум цього ряду є ніде не щільною множиною додатної міри Лебега.

Побудована трисимвольна система зображення дійсних чисел, яка ґрунтується на їх розкладах в ряди, з базисною послідовністю членами якої є числа, обернені до членів послідовності Якобсталя-Люка. Доведено, що кожне число інтервалу $(0; 2S)$, де $S-$ сума ряду, має континуальну кількість різних зображень. В цій системі введено канонічне зображення, що має нульову надлишковість, і вказано кілька застосувань до розв'язання задач метричної та ймовірнісної теорії чисел.

Ключові слова: система зображення дійсних чисел, узагальнена послідовність Фібоначчі, послідовність Якобсталя-Люка, множина неповних сум (підсум) ряду, ніде не щільна множина, міра Лебега, фрактальна розмірність Гаусдорфа-Безиковича, випадкова величина канторівського типу, нескінченна згортка Бернуллі.

Список опублікованих праць здобувача за темою дисертації

Основні результати дисертаційної роботи опубліковані в шести статтях у фахових виданнях, одна з яких у журналі, що індексуються наукометричною базою Scopus, та тринадцятьох збірках тез конференцій, сім з яких міжнародні:

1^a. *Карвацький Д. М.* Математичні структури у просторах узагальнених послідовностей Фібоначчі / Д. М. Карвацький, Н. М. Василенко // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2012. – Т. 13, № 1. – С. 118-127.

2^a. *Карвацький Д. М.* Зображення дійсних чисел нескінченно малими знакододатними узагальненими послідовностями Фібоначчі / Д. М. Карвацький // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2013. – Т. 15, № 1. – С. 56-73.

3^a. *Працьовитий М. В.* Представлення чисел за допомогою послідовності Якобсталя-Люка / М. В. Працьовитий, Д. М. Карвацький // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2014. – Т. 16, № 2. – С. 138-149.

4^a. *Карвацький Д. М.* Властивості розподілу випадкової неповної суми збіжного знакододатного ряду, члени якого утворюють узагальнену послідовність Фібоначчі / Д. М. Карвацький // Буковинський математичний журнал. – 2015. – Т. 3, № 1. – С. 52-59.

5^a. *Карвацький Д. М.* Про один клас узагальнених послідовностей Фібоначчі та ряди, що з ними пов'язані / Д. М. Карвацький // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико - математичні науки. – 2015. – Т. 17, № 1. – С. 186-201.

6^a. *Pratsyovitiy M. V.* Jacobsthal-Lucas series and their applications / M. V. Pratsyovitiy, D. M. Karvatskiy // Algebra and discrete mathematics. – 2017. – Vol. 24, № 1. P. 169–180.

7^a. *Карвацький Д. М.* Ірраціональність рядів, члени яких є оберненими до членів узагальнених послідовностей Фібоначчі // Друга міжуніверситетська наукова конференція з математики та фізики для студентів та молодих науковців, Київ, 28-29 квітня 2011 р.: Тези доповідей. – Київ : 2011. – С. 89-90.

8^a. *Карвацький Д. М.* Критерії збіжності рядів, члени яких є оберненими до членів узагальненої послідовності Фібоначчі // Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, Київ, 19-21 квітня 2012 р.: Тези доповідей. – Київ : 2012. – С. 128.

9^a. *Карвацький Д. М.* Лінійні простори узагальнених послідовностей Фібоначчі та математичні структури в них // Міжнародна наукова конференція ”Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь”, Київ, 13-14 грудня 2012 р.: Тези доповідей. – Київ : 2012. – С. 67.

10^a. *Карвацький Д. М.* Фрактали у просторі узагальнених послідовностей Фібоначчі // Всеукраїнська наукова конференція ”Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”, Ворохта, 25 лютого - 3 березня 2013 р.: Тези доповідей. – Івано-Франківськ : 2013. – С. 54-56.

11^a. *Карвацький Д. М.* Властивості множини неповних сум одного класу знакододатних рядів, пов’язаних з узагальненими послідовностями Фібоначчі // Третя міжуніверситетська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, 25-27 квітня 2013 р.: Тези доповідей. – Київ : 2013. – С. 103-104.

12^a. *Карвацький Д. М.* Зображення дійсних чисел за допомогою нескінченно малих знакододатних узагальнених послідовностей Фібоначчі // Міжнародна математична конференція "Боголюбівські читання DIF – 2013. Диференціальні рівняння. Теорія функцій та їх застосування", Севастополь, Україна, 23 - 30 червня 2013 р.: Тези доповідей. – Київ : 2013. – С. 237.

13^a. *Карвацький Д. М.* Кодування чисел за допомогою нескінченно малих знакододатних узагальнених послідовностей Фібоначчі // Всеукраїнська науково - методична конференція «Сучасні науково - методичні проблеми математики у вищій школі», Київ, 26 - 27 червня 2013 р.: Тези доповідей. – Київ : 2013. – С. 103-105.

14^a. *Karvatsky D. M.* Representing real numbers by generalized Fibonacci sequences // The 9-th International Algebraic Conference in Ukraine, July 8 - 13, 2013, Lviv, Ukraine: Abstracts. – Lviv : 2013. – P. 81.

15^a. *Karvatsky D. M.* Topological, Metric and Fractal Properties of the Set of Incomplete Sums of Series of Fibonacci Generalized Numbers // The Fifth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations, September 16 - 20, 2013, Kyiv, Ukraine: Abstracts. – Kyiv : 2013. – P. 99.

16^a. *Карвацький Д. М.* Властивості розподілу випадкової величини, що пов'язана з рядами узагальнених чисел Фібоначчі // Четверта міжнародна Ганська конференція, Чернівці, Україна, 30 червня - 5 липня 2014 р.: Тези доповідей. – Чернівці : 2014. – С. 69.

17^a. *Карвацький Д. М.* Представлення чисел за допомогою послідовності Якобсталя-Люка // П'ята всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, Україна, 25-26 квітня 2016 р.: Тези доповідей. – Київ : 2016. – С. 32.

18^a. *Карвацький Д. М.* Кодування дійсних чисел за допомогою послідовності Якобсталя-Люка // Всеукраїнської науково-методичної конференції «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі», Київ, 7-8 жовтня 2016 р.: Тези доповідей. – Київ : 2016. – С. 46.

19^a. *Карвацький Д. М.* Система представлення дійсних чисел, твірним елементом якої є послідовність Якобсталя-Люка // International mathematical conference «Groups and Actions: Geometry and Dynamics» dedicated to the memory of professor V. Sushchanskyy, December 19-22, 2016, Kyiv, Ukraine: Abstracts. – Kyiv : 2016. – P. 58.

Karvatsky D. M. Representation of real numbers by generalized Fibonacci sequences and their applications. — Qualification scientific work in the form of manuscript.

Thesis for a Candidate Degree in Physics and Mathematics (a Doctor of Philosophy Degree). Speciality 01.01.06 — algebra and number theory (111 – Mathematics). — Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2018.

The work is prepared at the Department of Higher Mathematics of National Pedagogical Mykhailo Drahomanov University.

In the thesis, we consider the properties of four-parameter generalized Fibonacci sequences, namely the sequences (u_n) such that their terms satisfy the recurrence relation

$$u_{n+2} = pu_{n+1} + su_n, \quad u_1, u_2, p, s \in R.$$

We study structural properties of this family, use this sequences for representation of real numbers, construct a corresponding metric and probabilistic theory of numbers as well as define mathematical objects with fractal properties. The thesis belongs to metric and probabilistic theory of numbers based on their expansions (and representations) by incomplete sums of series generated by

generalized Fibonacci sequences. This field of research is closely related to geometry and metric theory of representation of real numbers based on expansions in other positive series of special form.

We define metrics in the space F of generalized Fibonacci sequences with fixed parameters p and s as well as a notion of α-dimensional Hausdorff measure and fractal Hausdorff-Besicovitch dimension. Then we describe one class of self-similar fractals.

We consider series such that its terms are elements of infinitesimal generalized Fibonacci sequence. For set of real numbers such that they are subsums of such series, we describe its topological, metric and fractal properties. The question about amount of representations of number by subsum of such series is completely studied. We study a Lebesgue structure (i.e., content of discrete, absolutely continuous and singular components) and spectral properties of distribution of random subsum of series for different distributions of addends as well as a behaviour of the absolute value of its characteristic function at infinity if addends are independent.

For Jacobsthal-Lucas sequence ($J_1 = 2, J_2 = 1, J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n$) we give formulae for general term of the sequence, sum of the first n terms of the sequence, sum of the first n even (odd) terms of the sequence. Some other properties of this positive generalized Fibonacci sequence are proved. For series such that its addends are reciprocal terms of Jacobsthal-Lucas sequence, relation between terms and remainders are found (we prove that $u_{2n-1} < r_{2n-1}, u_{2n} > r_{2n}, n \in N$). We establish that the set of incomplete sum of this series is a nowhere dense set of positive Lebesgue measure.

We construct a three-symbol system of representation for real numbers based on their expansions in series such that its basic sequence is a sequence of reciprocal terms of Jacobsthal-Lucas sequence. We prove that any number belonging to $(0; 2S)$, where S is a sum of series, has a continuum set of different representations. For this system, we introduce a canonical representation hav-

ing a zero redundancy and give some applications to problems of metric and probabilistic theory of numbers.

Keywords: system of representation of real numbers, generalized Fibonacci sequence, Jacobsthal-Lucas sequence, set of incomplete sums (subsums) of series, nowhere dense set, Lebesque measure, fractal Hausdorff-Besicovitch dimension, random variable of Cantor type, infinity Bernoulli convolution.

List of the author's publications

The main results of the thesis are published in six papers in professional publications (one of them is published in journal indexed by Scopus) and in thirteen conference proceedings (seven of them are international):

1^a. *Karvatsky D. M.* Mathematical structures in the spaces of generalized Fibonacci sequences / D. M. Karvatsky, N. M. Vasylenko // Naukovyy Chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Series 1. Physics and Mathematics. – 2012. – Vol. 13, № 1. – P.118-127. (in Ukrainian)

2^a. *Karvatsky D. M.* Representing real numbers by infinitesimal positive generalized Fibonacci sequences / D. M. Karvatsky // Naukovyy Chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Series 1. Physics and Mathematics. – 2013. – Vol. 15, № 1. – P. 56-73. (in Ukrainian)

3^a. *Karvatsky D. M.* About one family of generalized Fibonacci sequences and series, which are associated with them / D. M. Karvatsky // Nauk. Chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Series 1. Physics and Mathematics. – 2015. – Vol. 16, № 1. – P. 186-201. (in Ukrainian)

4^a. *Karvatsky D. M.* Properties of distribution of random incomplete sum of positive series whose terms form a generalized Fibonacci sequence / D. M. Karvatsky // Bukovinskiy Mathematical Journal. – 2015. – Vol. 3, № 1. – P. 52-59. (in Ukrainian)

5^a. *Pratsyovitiy M. V.* Representation of real numbers by Jacobsthal-Lucas sequence / M. V. Pratsyovitiy, D. M. Karvatsky // Naukovyy Chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Series 1. Physics and Mathematics. – 2014. – Vol. 16, №2. – P. 138-149. (in Ukrainian)

6^a. *Pratsyovitiy M. V.* Jacobsthal-Lucas series and their applications / M. V. Pratsyovitiy, D. M. Karvatskiy // Algebra and discrete mathematics. – 2017. – Vol. 24, № 1. P. 169–180.

7^a. *Karvatsky D. M.* Irrationality of series, which terms are reciprocal to generalized Fibonacci numbers // Second interuniversity scientific conference on mathematics and physics for students and young scientists, Kyiv, April 28-29, 2011. Abstracts of reports. — K.: National Pedagogical Dragomanov University, 2011. — P. 89-90. (in Ukrainian)

8^a. *Karvatsky D. M.* Criterion of convergent of series, which terms are reciprocal to generalized Fibonacci numbers // Fourteenth international scientific conference named by academic M. Kravchuk, Kyiv, April 19-21, 2012. Abstracts of reports. — K.: NTUU "KPI", 2012. — P. 128. (in Ukrainian)

9^a. *Karvatsky D. M.* Linear spaces of generalized Fibonacci sequences and mathematical structures in them // International scientific conference "Asymptotic methods in the theory of differential equations", Kyiv, December 13-14, 2012. Abstracts of reports. — K.: National Pedagogical Dragomanov University, 2012. — P. 67. (in Ukrainian)

10^a. *Karvatsky D. M.* Fractals in the space of generalized Fibonacci sequences // National scientific conference "Modern problems of probability theory and mathematical analysis", Vorohta, 25 February - 3 March, 2013. Abstracts of reports. — Ivano-Frankivsk: Prikarpatskiy National University named by V. Stefanyk, 2013. — P. 54-56. (in Ukrainian)

11^a. *Karvatsky D. M.* Properties of the set of incomplete sums of one family of positive series, which are associated with generalized Fibonacci sequences // Third Interuniversity scientific conference of young scientists in mathematics and physics, Kyiv, April 25-27, 2013. Abstracts of reports. — K.: Kyiv-Mohyla Academy, 2013. — P. 103-104. (in Ukrainian)

12^a. *Karvatsky D. M.* Representation real numbers by infinity small positive generalized Fibonacci sequence // International mathematical conference "Bogolyubov readings DIF – 2013. Differential equations, theory of functions and their applications ", Sevastopol, Ukraine, June 23 - 30, 2013. Abstracts. — P. 237. (in Ukrainian)

13^a. *Karvatsky D. M.* Coding real numbers by infinity small positive generalized Fibonacci sequences // National scientific and methodological conference «Modern scientific and methodological problems of mathematics in higher school», Kyiv, June 26 - 27, 2013. Abstracts of reports. — K.: NTUHT, 2013. — P. 103-105. (in Ukrainian)

14^a. *Karvatsky D. M.* Representing real numbers by generalized Fibonacci sequences // The 9-th International Algebraic Conference in Ukraine, Lviv, Ukraine, July 8 - 13, 2013. Abstracts of Reports. — P. 81.

15^a. *Karvatsky D. M.* Topological, Metric and Fractal Properties of the Set of Incomplete Sums of Series of Fibonacci Generalized Numbers // The Fifth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations, Kyiv, Ukraine, September 16 - 20, 2013. Abstracts. — Kyiv: National Pedagogical Dragomanov University, 2013. — P. 99.

16^a. *Karvatsky D. M.* Properties of distribution of random variable, which associated with generalized Fibonacci series // IV International Hahn conference, Chernivtsi, Ukraine, 30 June - 5 July, 2014. Abstracts of reports. – Chernivtsi: Chernovitsky National University, 2014. — P. 69. (in Ukrainian)

17^a. *Karvatsky D. M.* Representing real numbers by Jacobsthal-Lucas sequence // Fifth National scientific conference of young scientists in mathematics and physics, Kyiv, Ukraine, April 25-26, 2016. Abstracts of reports. – K.: National Pedagogical Dragomanov University, 2016. – P. 32. (in Ukrainian)

18^a. *Karvatsky D. M.* Coding real numbers by using Jacobsthal-Lucas sequence // National scientific and methodological conference «Modern scientific and methodological problems of mathematics in higher school», Kyiv, October 7-8, 2016. Abstracts of reports. – K.: National Pedagogical Dragomanov University, 2016. – P. 46. (in Ukrainian)

19^a. *Karvatsky D. M.* System of representation real numbers, which are based on Jacobsthal-Lucas sequence // International mathematical conference «Groups and Actions: Geometry and Dynamics» dedicated to the memory of professor Vitaly Sushchanskyy, Kyiv, December 19-22, 2016. Book of Abstracts. – Kyiv: Taras Shevchenko National University of Kyiv, 2016. – P. 58. (in Ukrainian)

ЗМІСТ

СПИСОК ОСНОВНИХ УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

N — множина натуральних чисел;

N_0 — множина натуральних чисел в об'єднанні з нулем,

тобто $N_0 = \{0, 1, 2, ..., n, ...\}$;

R — множина дійсних чисел;

R^+ — множина додатних дійсних чисел, тобто $R^+ = (0, +\infty]$;

Q — множина раціональних чисел;

I — множина ірраціональних чисел;

A^2 — декартовий добуток множини A;

$\overrightarrow{e_1}$ — вектор з координатами $(1, 0, s, ps, p^2s + s^2, ...)$;

$\overrightarrow{e_2}$ — вектор з координатами $(0, 1, p, p^2 + s, p^3s + 2ps, ...)$;

$\langle \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2} \rangle$ — базис утворений векторами $\overrightarrow{e_1}$ та $\overrightarrow{e_2}$;

$|A|$ — потужність множини A;

$\lambda(A)$ — міра Лебега множини A;

$H_\alpha(A)$ — α-мірна міра Гаусдорфа множини A;

$\alpha_0(A)$ — розмірність Гаусдорфа-Безиковича множини A;

$\Delta_{c_1c_2...c_k}$ — циліндричний відрізок k-ого рангу, що відповідає певному представленню чисел, відомого з контексту;

$\nabla_{c_1c_2...c_k}$ — інтервал k-ого рангу, що є внутрішністю $\Delta_{c_1c_2...c_k}$;

$|\Delta_{c_1c_2...c_k}|$ — довжина відрізка $\Delta_{c_1c_2...c_k}$;

$\Phi = \frac{p+\sqrt{p^2+4s}}{2}$ — більший за модулем корінь рівняння $x^2 - px - s = 0$;

$\Psi = \frac{p-\sqrt{p^2+4s}}{2}$ — менший за модулем корінь рівняння $x^2 - px - s = 0$;

F_n — класична послідовність Фібоначчі;

J_n — послідовність чисел Якобсталя-Люка;

f_ξ — характеристична функція випадкової величини ξ;

$L_\xi \equiv \lim\limits_{|t|\to\infty} \sup |f_\xi(t)|$ — поведінка модуля характеристичної функції на нескінченності;

F — простір узагальнених послідовностей Фібоначчі;

S — підпростір нескінченно малих узагальнених послідовностей Фібоначчі;

$||p_{ij}||$ — стохастична матриця;

$\|x\|$ — норма x;

$\|x\|_s$ — s-норма x;

$O^k(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k, \beta_1\beta_2\ldots\beta_k)$ — перекриття циліндрів $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}$ та $\Delta_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k}$;

$O^{m+k}_{c_1\ldots c_m}(\alpha_1\ldots\alpha_k, \beta_1\ldots\beta_k)$ — перекриття циліндрів $\Delta_{c_1\ldots c_m\alpha_1\ldots\alpha_k}$ та $\Delta_{c_1\ldots c_m\beta_1\ldots\beta_k}$;

$G^{m+k}_{c_1\ldots c_m}(\alpha_1\ldots\alpha_k, \beta_1\ldots\beta_k) = \Delta_{c_1\ldots c_m}\backslash(\Delta_{c_1\ldots c_m\alpha_1\ldots\alpha_k}\bigcup\Delta_{c_1\ldots c_m\beta_1\ldots\beta_k})$;

$\square$ — кінець доведення.

ВСТУП

Дисертаційна робота присвячена дослідженню властивостей узагальнених послідовностей Фібоначчі та їх застосуванням для представлення дійсних чисел, побудови відповідної метричної та ймовірнісної теорій, а також дослідження об'єктів зі складною локальною будовою (фрактальних множин, сингулярних функцій, розподілів випадкових величин).

Актуальність теми. У сучасній математиці для розвитку теорії фракталів (фрактальної геометрії та фрактального аналізу), конструктивної теорії неперервних функцій зі складною локальною тополого - метричною структурою і фрактальними властивостями (сингулярних, ніде не монотонних, ніде не диференційовних), сингулярних розподілів випадкових величин, зокрема, нескінченних згорток Бернуллі, широко використовуються різні системи числення та системи зображення чисел, послідовності та ряди з певними умовами однорідності. Останні включають послідовності Фібоначчі та їх узагальнення, а також представлення чисел, в базисних послідовностях яких вони фігурують.

Кодування (зображення) дійсних чисел засобами двосимвольного алфавіту через їх представлення підсумами (неповними сумами) збіжних рядів є самостійним напрямом досліджень в теорії чисел. На їх основі розвиваються окремі вітки метричної та ймовірнісної теорії чисел. В цій галузі працювало багато дослідників і велика кількість робіт присвячена задачам і проблемам, пов'язаним з нескінченними згортками Бернуллі.

Тополого-метричні та фрактальні властивості множин неповних сум рядів вивчались у роботах Т. О. Банаха, О. М. Барановського, А. Бартошевіча, Я. Ф. Виннишина, С. Гломба, Я. В. Гончаренко, Р. Джонса, Р. Keньйона, В. М. Коваленка, Н. О. Корсунь, М. Купера, М. Морана, Ю. Переса, М. В. Працьовитого, Ф. Прус-Вішньовського, І. О. Савченка, Б. Солом'яка, Г. М. Торбіна, Е. Шимоніка.

Серед робіт, в яких розглядались ряди і зображення, пов'язані з числами Фібоначчі, варто відзначити роботи О. П. Стахова, О. Ю. Фещенка та Н. М. Василенко. В дисертаційній роботі останньої вивчались два розклади чисел: 1) у ряд, члени якого є елементами нескінченно малої послідовності Фібоначчі; 2) у ряд, членами якого є числа, обернені до елементів класичної послідовності Фібоначчі. У дисертаційній роботі О. Ю. Фещенка використовувалися двосторонні нескінченно малі послідовності Фібоначчі для побудови метричної та ймовірнісної теорії відповідних зображень. Представлення, які використовували ці автори, виявилися ефективним засобом для кодування чисел та вивчення розподілів випадкових величин з неоднорідними спектральними властивостями.

У даній роботі для подібних цілей ми використовуємо узагальнені послідовності Фібоначчі. Зазначимо, що різними видами узагальнених послідовностей Фібоначчі займалися П. Бундшуш, Д. Калман, М. Міллер, М. Муліне, В. Остін, М. Рашиді.

Одним із цікавих і, на наш погляд, перспективних узагальнень послідовності Фібоначчі є чотирьохпараметрична послідовність (u_n), для якої виконується наступне рекурентне співвідношення:

$$u_{n+2} = pu_{n+1} + su_n,$$

де u_1, u_2, p, s – фіксовані дійсні числа. Таке розширення класу послідовностей Фібоначчі включає:

— класичну послідовність Фібоначчі $(p = s = 1 = u_1 = u_2)$;

— всі геометричні прогресії $(p = q, s = 0, u_1 = b_1, u_2 = u_1q)$;

— послідовність Люка $(p = s = 1 = u_2, u_1 = 2)$;

— послідовність Пелля $(p = 2, s = 1 = u_1 = u_2)$;

— послідовність Якобсталя ($p = 1 = u_1 = u_2, s = 2$).

Актуальність даного дослідження ми вбачаємо в тому, що воно стосується несамоподібних систем кодувань дійсних чисел, метричної теорії чисел, геометрії числових рядів і сингулярних розподілів випадкових величин, інтерес до яких в останній період підвищився.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана у рамках досліджень математичних об'єктів зі складною локальною будовою, що проводяться на кафедрі вищої математики Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова та у відділі фрактального аналізу Інституту математики НАН України. Дослідження проводилось у рамках наступних науково-дослідних тем:

— двійкове кодування дійсних чисел і фрактали (номер державної реєстрації 0110U001279);

— фрактальний аналіз математичних об'єктів зі складною локальною будовою (номер державної реєстрації 0107U000583);

— дослідження еволюційних детермінованих та стохастичних систем складної тополого-метричної структури. Фрактальні властивості, керованість (номер державної реєстрації 0115U000557).

Об'єкт дослідження. Простір узагальнених послідовностей Фібоначчі і системи зображення дійсних чисел, з ними пов'язані, а також їм відповідні множини, функції та розподіли ймовірностей.

Предмет дослідження. Локальні та глобальні властивості узагальнених чотирьохпараметричних послідовностей Фібоначчі та структурні властивості їх сім'ї. Геометрія зображень дійсних чисел за допомогою узагальнених послідовностей Фібоначчі, її топологічна, метрична, фрактальна та ймовірнісна складові.

Мета і завдання дослідження. Мета роботи – розробити систему зображення чисел, твірним елементом якої є узагальнена послідовність Фібоначчі, і на її основі створення відповідної метричної теорії дійсних чисел; її застосування у теорії розподілів випадкових величин. Основними завданнями дослідження є такі:

— вивчити локальні та глобальні властивості узагальнених послідовностей Фібоначчі та структурні властивості їх сім'ї;

— побудувати систему зображення чисел, твірним елементом якої є нескінченно мала додатна узагальнена послідовність Фібоначчі та дослідити її геометрію;

— створити систему представлення дійсних чисел за допомогою ряду, члени якого є оберненими до елементів послідовності Якобсталя-Люка;

— знайти застосування вказаним зображенням у фрактальній геометрії та теорії розподілів ймовірностей.

Методи дослідження. У роботі використовувались методи метричної теорії чисел, фрактального аналізу та фрактальної геометрії, математичного аналізу, теорії функцій та теорії ймовірностей.

У дисертації застосовувалася методологія, запропоновану у роботах М. В. Працьовитого та його учнів при дослідженні різних систем кодування дійсних чисел, зокрема двосимвольних, а також зі сталим чи змінним, скінченним або нескінченним алфавітами.

Наукова новизна одержаних результатів. Основними науковими результатами, що виносяться на захист, є такі:

— досліджені локальні та глобальні властивості узагальнених послідовностей Фібоначчі, структурні властивості їх сім'ї;

— у просторі узагальнених послідовностей Фібоначчі введно скалярний добуток, норму та метрику, розглянуті різні математичні структури, описаний клас самоподібних фракталів;

— для множини дійсних чисел, що є підсумами додатного ряду, члени якого є елементами нескінченно малої додатної узагальненої послідовності Фібоначчі, описано топологічні, метричні та фрактальні властивості;

- вивчена лебегівська структура (вміст дискретної, абсолютно неперервної та сингулярної компонент) і спектральні властивості розподілу випадкової підсуми ряду при різних розподілах доданків та поведінку на нескінченності модуля її характеристичної функції у випадку незалежності доданків;
- для послідовності Якобсталя-Люка виведено формули: для загального члена, суми перших n членів, суми перших n парних (непарних) членів, обґрунтовані інші її властивості;
- доведено, що множина неповних сум ряду з обернених чисел Якобсталя-Люка є ніде не щільною множиною додатної міри Лебега;
- побудована трисимвольна система зображення дійсних чисел, яка ґрунтується на їх розкладах в ряди з базисною послідовністю, членами якої є числа, обернені до членів послідовності Якобсталя-Люка;
- доведено, що кожне число інтервалу $(0; 2S)$, де S - сума ряду, має континуальну кількість різних зображень. В цій системі введено канонічне зображення, що має нульову надлишковість, і вказано кілька його застосувань.

Практичне значення одержаних результатів. Робота має теоретичний характер. Отримані результати є певним внеском у метричну теорію чисел, теорію міри, теорію функцій дійсної змінної та теорію сингулярних розподілів ймовірностей. Крім того запропоновані в дисертації засоби представлення дійсних чисел можуть бути використані для кодування інформації, дослідження математичних об’єктів зі складною локальною будовою.

Особистий внесок здобувача. Основні результати, що виносяться на захист, отримані автором самостійно. Зі статей, опублікованих у співавторстві, до дисертації включені лише ті результати, що належать автору.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційного дослідження доповідались на наукових конференціях різного рівня та наукових семінарах. Це такі конференції:

- Друга міжуніверситетська конференція молодих вчених, Київ, 28-29 квітня 2011 року;
- Чотирнадцята Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, Київ, 13-15 травня 2012 року;
- Міжнародна наукова конференція «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь», присвячена 80-річчю Шкіля М.І., Київ, 13-14 грудня 2012 року;
- Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу», Ворохта, 25 лютого - 3 березня 2013 року;
- Третя міжуніверситетська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, 25-27 квітня 2013 року;
- Міжнародна математична конференція з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка «Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування», Севастополь, 23-30 червня 2013 року;
- Всеукраїнська науково-методична конференція «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі», Київ, 26-27 червня 2013 року;
- The 9-th International Algebraic Conference in Ukraine, Lviv, July 06-13, 2013;
- The Fifth International Conference on Analytic Number Theory and

Spatial Tessellations, Kyiv, September 16-20, 2013;

- Четверта міжнародна Ганська конференція, присвячена 135-ій річниці від народження Ганса Гана, Чернівці, 30 червня - 5 липня 2014 року;
- П'ята Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики ти фізики "Актуальні проблеми сучасної математики та фізики та методики їх навчання", Київ, 25-26 квітня 2016 року;
- Всеукраїнська науково-методична конференція «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі», Київ, 7-8 жовтня 2016 року;
- International mathematical conference "Groups and Actions: Geometry and Dynamics" dedicated to the memory of professor Vitaly Sushchanskyy, Kyiv, December 19-22, 2016.

Результати дослідження були оприлюднені на засіданнях наступних наукових семінарів:

- семінар з фрактального аналізу Інституту математики НАН України та НПУ імені М. П. Драгоманова (керівник: доктор фіз.-мат. наук, проф. М. В. Працьовитий);
- семінар кафедри геометрії, топології та динамічних систем Київського Національного університету імені Т. Г. Шевченка (керівник: доктор фіз.-мат. наук, проф. О. О. Пришляк);
- семінар лабораторії топології Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук С. І. Максименко).

Публікації. Основні результати роботи викладено у 19-и наукових публікаціях, серед яких 6 статей у фахових виданнях $[1^a, 2^a, 3^a, 4^a, 5^a, 6^a]$, та 13 тез доповідей на конференціях різного рівня $[7^a, 8^a, 9^a, 10^a, 11^a, 12^a, 13^a, 14^a, 15^a, 16^a, 17^a, 18^a, 19^a]$. Одна стаття $[6^a]$ опублікована у журналі, що індексується міжнародною наукометричною базою Scopus.

Структура дисертації. Робота складається з анотації, списку основних умовних позначень, вступу, трьох розділів, розбитих на підрозділи, загальних висновків та висновків до кожного розділу, списку використаних джерел, який містить 83 джерела, списку публікацій автора. Повний обсяг роботи складає 128 сторінок.

Основний зміст роботи. **Розділ 1** носить вступний характер. Він присвячений ключовому поняттю дослідження – узагальненій чотирьохпараметричній послідовності Фібоначчі і розгляду математичних структур у просторі таких послідовностей.

Означення 1.1. *Послідовність дійсних чисел* $(u_n) \equiv (u_n)_{n=1}^{\infty}$, *яка має властивість*

$$u_{n+2} = pu_{n+1} + su_n, \tag{1}$$

де u_1, u_2, p, s *— фіксовані дійсні числа, називається узагальненою послідовністю Фібоначчі.*

Встановлюються властивості такої послідовності, зокрема, асимптотичні. Виводяться формули: загального члена послідовності

$$u_n = \left[\begin{array}{ll} \dfrac{\Phi^{n-1}\left(u_2 - u_1\Psi\right) - \Psi^{n-1}\left(u_2 - u_1\Phi\right)}{\Phi - \Psi} & \text{при} \quad \Phi \neq \Psi, \\ \Phi^{n-1}\left(u_1 + (n-1)\left(\dfrac{u_2}{\Phi} - u_1\right)\right) & \text{при} \quad \Phi = \Psi, \end{array} \right.$$

$$\text{де} \quad \Phi = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4s}}{2} \quad \text{та} \quad \Psi = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4s}}{2},$$

наслідком якої є рівність

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \Phi, \text{якщо } |\Phi| \geqslant |\Psi|, \\ \Psi, \text{якщо } |\Phi| < |\Psi|; \end{cases}$$

суми перших n членів, суми перших n членів з парними (непарними) номерами місць

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{u_1(1-p) + u_2 - u_{n+1} - su_n}{1 - p - s},$$

$$\sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} u_{2k-1} = \frac{(1-p^2-s)u_1 + pu_2 - u_{n+1} + s^2 u_{n-1}}{1 - p\sqrt{p^2+4s} - s^2},$$

$$\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} u_{2k} = \frac{(1+s)u_2 - psu_1 - u_{n+1} + s^2 u_{n-1}}{1 - p\sqrt{p^2+4s} - s^2}.$$

Доведено критерій нескінченної малості послідовності.

Теорема 1.6. Для того щоб узагальнена послідовність Фібоначчі (u_n) була нескінченно малою, необхідно і достатньо, щоб виконувалась хоча б одна із систем:

$$\begin{cases} |\Phi| < 1, \\ |\Psi| < 1, \end{cases} \quad \begin{cases} |\Phi| < 1, \\ u_2 = u_1\Phi, \end{cases} \quad \begin{cases} |\Psi| < 1, \\ u_2 = u_1\Psi. \end{cases}$$

Встановлено, що множина

$$F = \{(u_n) : \ u_1, u_2 \in \mathbb{R}, \ u_n = pu_{n-1} + su_{n-2}, \ n \geqslant 3\}$$

узагальнених послідовностей Фібоначчі з фіксованими параметрами p та s утворює двовимірний лінійний простір, в якому існує підпростір нескінченно малих послідовностей, природним чином вводяться скалярний добуток, норма, метрика.

Метризація лінійного простору F з допомогою $q-$метрики

$$\rho_q(\overline{x}, \overline{y}) = \rho_q = \|\overline{x} - \overline{y}\|_q = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x_n - y_n)^2}{q^{2n}}},$$

де $max\{|\Phi|, |\Psi|\} < q$ – фіксоване натуральне число, дозволило ввести базові поняття теорії фракталів: міру Гаусдорфа, розмірність Гаусдорфа-Безиковича і описати деякий клас самоподібних фракталів.

Теорема 1.13. Якщо $\overline{0} \neq \overline{\alpha} = (\alpha_n)$ – фіксований елемент простору F, r і m – натуральні числа, причому $1 < m < r$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$, $v_i < v_{i+1}$, $i = \overline{1, m-1}$,

$$C[r, V] = \left\{\lambda : \lambda = \frac{\alpha_1}{r} + \frac{\alpha_2}{r^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{r^n} + \ldots, \alpha_n \in V\right\},$$

то множина

$$H = \{\overline{x}\ : \overline{x} = \lambda \overline{\alpha},\ \lambda \in C\,[r, V]\}$$

в метричному просторі (F, ρ_q) є самоподібною і її самоподібна розмірність

$$\alpha_0 = \log_r |V|$$

співпадає з розмірністю Гаусдорфа-Безиковича $\alpha_{\rho_q}(H)$.

Теорема 1.14. Якщо $\overline{\alpha} = (\alpha_n)\,,\ \overline{b} = (b_n) \in F$, причому $\overline{\alpha}$ і $\overline{b}$ неколінеарні, то множина

$$H = \left\{\overline{x} : \overline{x} = \lambda_1 \overline{\alpha} + \lambda_2 \overline{b},\ \ \lambda_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{2^k}, \lambda_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{2^k}, \alpha_k + \beta_k \leqslant 1\right\}$$

є самоподібною досконалою множиною, самоподібна розмірність якої співпадає з розмірністю Гаусдорфа-Безиковича і дорівнює $\log_2 3$.

У **розділі 2** розглядається представлення дійсних чисел за допомогою неповних сум ряду, члени якого є елементами нескінченно малої додатної узагальненої послідовності Фібоначчі, вивчається його геометрія (властивості циліндричних множин).

У параграфі 2.1 досліджується додатний ряд

$$u_1 + u_2 + \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+2},\ u_{n+2} = p u_{n+1} + s u_n, n \in N, u_1, u_2, p, s \in R^+, \qquad (2)$$

члени якого утворюють узагальнену послідовність Фібоначчі з додатними початковими параметрами u_1, u_2, p, s. Для членів такого ряду має місце рівність

$$u_n = \frac{\Phi^{n-1}\,(u_2 - u_1 \Psi) - \Psi^{n-1}\,(u_2 - u_1 \Phi)}{\Phi - \Psi}. \qquad (3)$$

Теорема 2.2. *Для збіжності ряду* (2) *необхідно і достатньо, щоб виконувалася система нерівностей*

$$\begin{cases} 0 < p < 1, \\ 0 < s < 1 - p. \end{cases} \qquad (4)$$

Також досліджуються властивості членів та залишків ряду (2), встановлюються співвідношення між ними.

У параграфі 2.2 досліджуються тополого-метричні та фрактальні властивості множини неповних сум ряду (2) в залежності від початкових параметрів p та s.

Теорема 2.4. *Якщо для ряду* (2) *виконується система нерівностей*

$$\begin{cases} 0 < p < 1, \\ \max\{0, \frac{1}{4} - \frac{p}{2}\} \leqslant s < 1 - p, \end{cases} \tag{5}$$

то ряд збігається, а множина його неповних сум являє собою скінченне об'єднання відрізків.

Теорема 2.6. *Якщо для ряду* (2) *виконується система нерівностей*

$$\begin{cases} 0 < p < \frac{1}{2}, \\ 0 < s < \frac{1}{4} - \frac{p}{2}, \end{cases} \tag{6}$$

то ряд збігається, а множина його неповних сум є досконалою ніде не щільною множиною нульової міри Лебега, розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої рівна $\alpha_0 = -\log_\Phi 2$.

У параграфі 2.3 доводиться, що довільне дійсне число $x \in \left[0\,, \frac{u_1(1-p)+u_2}{1-p-s}\right]$, може бути представленим у вигляді

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n, \text{ де } \alpha_n \in \{0, 1\}. \tag{7}$$

Описаний алгоритм розкладу числа у ряд (7).

У параграфі 2.4 обґрунтовано, що система представлення чисел у вигляді (7) є суттєво надлишковою, а саме: кожне дійсне число має континуальну множину різних представлень.

У параграфі 2.5 досліджується випадкова величина

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k u_k, \tag{8}$$

де ξ_k — послідовність незалежних випадкових величин з розподілами: $P\{\xi_k = 0\} = p_{0k} \geqslant 0, P\{\xi_k = 1\} = p_{1k} \geqslant 0, p_{0k} + p_{1k} = 1$, яка має чисто дискретний розподіл тоді і тільки тоді, коли

$$M = \prod_{k=1}^{\infty} \max\{p_{0k}, p_{1k}\} > 0.$$

Теорема 2.9. *Якщо $M = 0$ і для послідовності (u_n) виконується умова (6), то випадкова величина ξ має чисто сингулярний розподіл канторівського типу.*

Якщо $f_\xi(t)$ – характеристична функція розподілу випадкової величини ξ при $u_k = 3^{-k} + (-1)^k 3^{-2k}$, то

$$L_\xi = \lim_{|t|\to\infty} \sup |f_\xi(t)| > 0,3909693738 > 0,$$

що в силу неперервності розподілу ξ обґрунтовує його сингулярність.

Параграф 2.6 присвячений випадку: $s = -\frac{p^2}{4}$, для якого

$$u_n = \left(\frac{p}{2}\right)^{n-1} \left(u_1 + (n-1)\left(\frac{2u_2}{p} - u_1\right)\right).$$

У **розділі 3** досліджується трисимвольна система представлення дійсних чисел, яка базується на послідовності Якобсталя-Люка, а також об’єкти зі складною локальною будовою з нею пов’язані.

Параграф 3.1 присвячений вивченню локальних та глобальних властивостей послідовності Якобсталя-Люка, а саме: послідовності (J_n) для членів якої виконується рівність

$$J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n, \ J_1 = 2, J_2 = 1.$$

У параграфі 3.2 досліджується ряд, члени якого є оберненими до елементів послідовності Якобсталя-Люка

$$\sum_{n=1}^{\infty} J_n^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + ... + \frac{1}{J_n} + \dots. \tag{9}$$

Розглянутий ряд є збіжним, знакододатним, члени його (починаючи з другого номеру) утворюють монотонно спадну послідовність. Більше того, з робіт M. Prevost і T. Matala-aho відомо, що нескінченна сума виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{A\alpha^n + B\beta^n},$$

при цілих параметрах α, β та умовах $A \cdot B \neq 0, |\alpha| > |t|, |A \cdot B \cdot t^2| < |\alpha|$ є ірраціональним числом. Звідси сума ряду (9) також є ірраціональним числом.

Лема 3.1. *Для ряду* (9) *справедливі наступні нерівності*

$$\begin{cases} u_n > r_n, \text{ якщо } n - \text{парне}, \\ u_n < r_n, \text{ якщо } n - \text{непарне}. \end{cases} \tag{10}$$

Теорема 3.7. *Множина неповних сум ряду* (9) *є досконалою ніде не щільною множиною додатної міри Лебега.*

У параграфі 3.3 розглядаються розклади чисел в ряд (9).

Теорема 3.8. *Для довільного дійсного числа x з відрізка $[0, S]$, де $S = \sum_{n=1}^{\infty} 2u_{n+2}$, існує послідовність $(\alpha_n), \alpha_n \in \{0, 1, 2\}$, така, що*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_{n+2} \equiv \Delta^J_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}. \tag{11}$$

Таке представлення називатимемо *$J-$представленням числа.*

Ця трисимвольна система зображення чисел – суттєво надлишкова, а саме: кожне число інтервала $(0, S)$ має континуальну множину різних зображень. В роботі вивчається геометрія цієї системи кодування чисел, описуються властивості циліндричних множин, специфіка їх перекриттів.

У параграфі 3.4 розглядаються множини, які мають нетривіальні властивості, а саме: є ніде не щільними множинами додатної міри Лебега або мають дробову розмірність Гаусдорфа-Безиковича тощо.

Теорема 3.10. *Множина усіх чисел з відрізка* $[0,S]$, $J-$ *зображення яких має вигляд* $\Delta_{\alpha_1\alpha_1\alpha_2\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha_n\ldots}$, *де* $\alpha_n\in\{0,1\}$, *є досконалою, ніде не щільною множиною нульової міри Лебега, розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої рівна* $\frac{1}{2}$.

Теорема 3.11. *Множина усіх чисел з відрізка* $[0,S]$, $J-$ *зображення яких має вигляд* $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}$, *де* $\alpha_n\in\{0,1\}$ $(\alpha_n\in\{0,2\})$, *є досконалою ніде не щільною множиною додатної міри Лебега.*

Параграф 3.5 присвячений вивченню канонічного J-представлення.

Означення 3.4. $J-$*представлення* $\Delta^J_{f_1(x)f_2(x)\ldots f_n(x)\ldots}$ *називається канонічним, якщо*

$$f_1(x)=\begin{cases}2, & \text{якщо}\quad 2u_3\leqslant x,\\ 1, & \text{якщо}\quad u_3\leqslant x<2u_3,\\ 0, & \text{якщо}\quad u_3>x,\end{cases}$$

$$f_i(x)=\begin{cases}2,\text{якщо}\sum\limits_{n=1}^{i-1}f_n(x)u_{n+2}+2u_{i+2}\leqslant x,\\ 1,\text{якщо}\sum\limits_{n=1}^{i-1}f_n(x)u_{n+2}+u_{i+2}\leqslant x<\sum\limits_{n=1}^{i-1}f_n(x)u_{n+2}+2u_{i+2},\\ 0,\text{якщо}\sum\limits_{n=1}^{i-1}f_n(x)u_{n+2}+u_{i+2}>x.\end{cases}$$

Кожне число з відрізка $[0,S]$ має єдине канонічне зображення, що дозволяє легко порівнювати два дійсних чисел a та b, які задані своїми канонічними $J-$розкладами (досить порівняти їх перші не співпадаючі символи зображення). Більше того, числа a та b будуть рівними тоді і тільки тоді, коли їх відповідні $J-$символи співпадатимуть.

Теорема 3.13. Якщо $\Delta^{J*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ — канонічне зображення деякого числа x з відрізка $[0,S]$, то для довільного натурального k:

1. $\alpha_{2k-1}\alpha_{2k}\neq 02$,
2. $021\neq\alpha_{2k}\alpha_{2k+1}\alpha_{2k+2}\neq 022$,

3. $\alpha_{2k-1}\alpha_{2k}\alpha_{2k+1}\alpha_{2k+2}\ldots\alpha_{4k-2} \neq 0\beta_1\beta_2\beta_3\ldots\beta_{2k-1}$, $\beta_i \in \{1,2\}$, $i=\overline{1,2k-1}$.

Параграф 3.6 присвячений дослідженні об'єктів зі складною локальною будовою, зокрема, сингулярних розподілів випадкових неповних сум ряду з обернених чисел Якобсталя-Люка.

Подяка. Автор висловлює подяку науковому керівнику професору Миколі Вікторовичу Працьовитому за постановку задач, постійну увагу до даної роботи, підтримку та допомогу. Також дякую батькам за допомогу та терпіння.

РОЗДІЛ 1

МАТЕМАТИЧНІ СТРУКТУРИ У ПРОСТОРІ УЗАГАЛЬНЕНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ФІБОНАЧЧІ

Розділ 1 носить вступний характер. Він присвячений ключовому поняттю дослідження – узагальненій чотирьохпараметричній послідовності Фібоначчі і розгляду різноманітних математичних структур у просторі таких послідовностей.

1.1. Узагальнені послідовності Фібоначчі.

Означення 1.1. Послідовність дійсних чисел $(u_n) \equiv (u_n)_{n=1}^{\infty}$, яка має властивість

$$u_{n+2} = pu_{n+1} + su_n, \tag{1.1}$$

де u_1, u_2, p, s — фіксовані дійсні числа, називатимемо *узагальненою послідовністю Фібоначчі.*

Узагальнена послідовність Фібоначчі є чотирьохпараметричним об'єктом, оскільки з (1.1) зрозуміло, що вираз її загального члена залежить від параметрів u_1, u_2, p, s. Тривіальним прикладом узагальненої послідовності Фібоначчі є $(0) = (0, 0, 0, \ldots)$ — нуль-послідовність. Очевидно, що коли $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ — узагальнена послідовність Фібоначчі, то $(u_n)_{n=m}^{\infty}$ — теж узагальнена послідовність Фібоначчі. Прикладами узагальнених послідовностей Фібоначчі є:

1. класична послідовність Фібоначчі ($u_1 = 0, u_2 = p = s = 1$);
2. довільна геометрична прогресія ($s = 0$);
3. послідовність чисел Люка ($u_1 = 2, u_2 = p = s = 1$);
4. послідовність чисел Якобсталя ($u_1 = s = 2, u_2 = p = 1$);

5. послідовність чисел Пелля ($u_1 = u_2 = p = 1, s = 2$).

Теорема 1.1. *Для загального члена узагальненої послідовності Фібоначчі має місце рівність*

$$u_n = \left[\begin{array}{ll} \dfrac{\Phi^{n-1}\left(u_2 - u_1\Psi\right) - \Psi^{n-1}\left(u_2 - u_1\Phi\right)}{\Phi - \Psi} & \textit{при} \;\; \Phi \neq \Psi, \\ \Phi^{n-1}\left(u_1 + (n-1)\left(\dfrac{u_2}{\Phi} - u_1\right)\right) & \textit{при} \;\; \Phi = \Psi, \end{array} \right.$$

де

$$\Phi = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4s}}{2} \quad \textit{та} \quad \Psi = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4s}}{2}.$$

Доведення. Задача знаходження загального члена числової послідовності, що задовольняє умову (1.1), рівносильна задачі розв'язання однорідного різницевого рівняння другого порядку [78]

$$y\left(x+2\right) - py\left(x+1\right) - sy\left(x\right) = 0. \tag{1.2}$$

Характеристичне рівняння даного різницевого рівняння має вигляд

$$\lambda^2 - p\lambda - s = 0. \tag{1.3}$$

Вигляд загального розв'язку рівняння (1.2) залежатиме від розв'язків характеристичного рівняння (1.3). Можливі наступні випадки:

Випадок 1: $p^2 + 4s \neq 0$. Розв'язками рівняння (1.3), будуть числа $\Phi = \frac{p+\sqrt{p^2+4s}}{2}$ та $\Psi = \frac{p-\sqrt{p^2+4s}}{2}$ (дійсні або комплексні). Корені характеристичного рівняння задають два розв'язки рівняння (1.2): $y_1\left(x\right) = \Phi^x$ та $y_2\left(x\right) = \Psi^x$. Отже, загальний розв'язок рівняння (1.2) можна записати як функцію

$$y(x) = c_1\Phi^{x-1} + c_2\Psi^{x-1},$$

а враховуючи початкові умови

$$\begin{cases} c_1y_1\left(1\right) + c_2y_2\left(1\right) = u_1, \\ c_1y_1\left(2\right) + c_2y_2\left(2\right) = u_2, \end{cases}$$

можна знайти сталі c_1 та c_2. Матимемо

$$c_1 = \frac{u_2 - u_1\Psi}{\Phi - \Psi}, \quad c_2 = -\frac{u_2 - u_1\Phi}{\Phi - \Psi}.$$

Таким чином, загальний член узагальненої послідовності Фібоначчі буде мати вигляд

$$u_n = \frac{\Phi^{n-1}\left(u_2 - u_1\Psi\right) - \Psi^{n-1}\left(u_2 - u_1\Phi\right)}{\Phi - \Psi}, n \in N.$$

Випадок 2: $p^2 + 4s = 0$. Число $\Phi = \frac{p}{2}$ є кратним коренем характеристичного рівняння (1.3). Функції $y_1(x) = \Phi^x$ та $y_2(x) = x\Phi^x$ є розв'язками рівняння (1.2). Отже, загальний розв'язок можна записати як функцію

$$y\left(x\right) = \Phi^{x-1}\left(c_1(x-1) + c_2\right),$$

а враховуючи початкові умови

$$\begin{cases} c_1 y_1\left(1\right) + c_2 y_2\left(1\right) = u_1, \\ c_1 y_1\left(2\right) + c_2 y_2\left(2\right) = u_2, \end{cases}$$

можна знайти сталі c_1 та c_2. Матимемо

$$c_1 = u_1, \; c_2 = \frac{u_2}{\Phi} - u_1.$$

Таким чином, загальний член послідовності матиме вигляд

$$u_n = \Phi^{n-1}\left(u_1 + (n-1)\left(\frac{u_2}{\Phi} - u_1\right)\right), n \in N.$$

□

Наслідок 1.1. *Справедлива наступна рівність*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \Phi, \text{ якщо } |\Phi| \geqslant |\Psi|, \\ \Psi, \text{ якщо } |\Phi| < |\Psi|. \end{cases}$$

Для узагальнених послідовностей Фібоначчі можна розглянути ряд задач, які розв'язувалися для класичної послідовності Фібоначчі (див. [54]).

Теорема 1.2. *Сума перших n членів узагальненої послідовності Фібоначчі обчислюється за наступною формулою:*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{u_1(1-p) + u_2 - u_{n+1} - su_n}{1-p-s}.$$

Доведення. Розглянемо два випадки. **Випадок 1:** $\Phi \neq \Psi$. Використовуючи теорему 1.1, можна записати наступне

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{u_2 - u_1\Psi}{\Phi - \Psi}\sum_{k=1}^{n}\Phi^{k-1} - \frac{u_2 - u_1\Phi}{\Phi - \Psi}\sum_{k=1}^{n}\Psi^{k-1} =$$

$$= \frac{(u_2 - u_1\Psi)(1-\Phi^k)}{(\Phi - \Psi)(1-\Phi)} - \frac{(u_2 - u_1\Phi)(1-\Psi^k)}{(\Phi-\Psi)(1-\Psi)} =$$

$$= \frac{u_2 - u_1\Psi - u_2\Phi^k + u_1\Phi^k\Psi - u_2\Psi + u_1\Psi^2 + u_2\Phi^k\Psi - u_1\Phi^k\Psi^2}{(\Phi-\Psi)(1-\Phi)(1-\Psi)} -$$

$$- \frac{u_2 - u_1\Phi - u_2\Psi^k + u_1\Phi\Psi^k - u_2\Phi + u_1\Phi^2 + u_2\Phi\Psi^k - u_1\Phi^2\Psi^k}{(\Phi-\Psi)(1-\Phi)(1-\Psi)} =$$

$$= \frac{u_1(1-\Phi-\Psi) + u_2 - u_{n+1} - \Phi\Psi u_n}{(1-\Phi)(1-\Psi)}.$$

Врахувавши, що $\Phi \cdot \Psi = -s$ та $\Phi + \Psi = p$, останню рівність можна записати наступним чином

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{u_1(1-\Phi-\Psi) + u_2 - u_{n+1} - \Phi\Psi u_n}{(1-\Phi)(1-\Psi)} = \frac{u_1(1-p) + u_2 - u_{n+1} - su_n}{1-p-s}.$$

Випадок 2: $\Phi = \Psi$. Використовуючи теорему 1.1, можна записати наступне

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = u_1\sum_{k=1}^{n}\Phi^{k-1} + \left(\frac{u_2}{\Phi} - u_1\right)\sum_{k=1}^{n}(k-1)\Phi^{k-1} =$$

$$= u_1\frac{1-\Phi^n}{1-\Phi} + \left(\frac{u_2}{\Phi} - u_1\right)\frac{\Phi - n\Phi^n + (n-1)\Phi^{n+1}}{(1-\Phi)^2} =$$

$$= \frac{u_1 - u_1\Phi^n - u_1\Phi + u_1\Phi^{n+1} + u_2 - nu_2\Phi^{n-1} + (n-1)u_2\Phi^n}{(1-\Phi)^2} -$$

$$-\frac{u_1\Phi - nu_1\Phi^n + (n-1)u_1\Phi^{n+1}}{(1-\Phi)^2} = \frac{u_1(1-2\Phi) + u_2 + \Phi^2 u_n - u_{n+1}}{(1-\Phi)^2}.$$

Врахувавши, що у другому випадку $\Phi = \Psi = \frac{p}{2}$, останню рівність можна записати наступним чином

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{u_1(1-p) + u_2 + \frac{p^2}{4}u_n - u_{n+1}}{(1-\frac{p}{2})^2}.$$

Взявши до уваги отримані результати для першого та другого випадку справедливою буде рівність

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{u_1(1-p) + u_2 - u_{n+1} - su_n}{1-p-s}.$$

□

Теорема 1.3. *Для суми перших непарних n членів узагальненої послідовності Фібоначчі має місце наступна рівність:*

$$\sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} u_{2k-1} = u_1 + u_3 + \cdots + u_n = \frac{(1-p^2-s)u_1 + pu_2 - u_{n+1} + s^2 u_{n-1}}{1 - p\sqrt{p^2+4s} - s^2}.$$

Доведення. Використовуючи теорему 1.1, можна записати наступне

$$\sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} u_{2k-1} = \frac{u_2 - u_1\Psi}{\Phi - \Psi}\sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} \Phi^{2k-2} - \frac{u_2 - u_1\Phi}{\Phi - \Psi}\sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} \Psi^{2k-2} =$$

$$= \frac{u_2 - u_1\Psi}{\Phi - \Psi}\cdot\frac{1-\Phi^n}{1-\Phi^2} - \frac{u_2 - u_1\Phi}{\Phi - \Psi}\cdot\frac{1-\Psi^n}{1-\Psi^2} =$$

$$= \frac{u_1 - u_{n+1} + u_{n-1}\Phi^2\Psi^2 + u_2(\Phi+\Psi) - u_1(\Phi^2 + \Phi\Psi + \Psi^2)}{(1-\Phi^2)(1-\Psi^2)}.$$

Врахувавши, що $\Phi\cdot\Psi = -s$ та $\Phi + \Psi = p$, останню рівність можна записати наступним чином

$$\sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} u_{2k-1} = \frac{(1-p^2-s)u_1 + pu_2 - u_{n+1} + s^2 u_{n-1}}{1 - p\sqrt{p^2+4s} - s^2}.$$

□

Теорема 1.4. *Для суми перших парних n членів узагальненої послідовності Фібоначчі має місце наступна рівність:*

$$\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} u_{2k} = u_2 + u_4 + \cdots + u_n = \frac{(1+s)u_2 - psu_1 - u_{n+1} + s^2 u_{n-1}}{1 - p\sqrt{p^2+4s} - s^2}.$$

Доведення. Використовуючи теорему 1.1, можна записати наступне

$$\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} u_{2k} = \frac{u_2 - u_1\Psi}{\Phi - \Psi}\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \Phi^{2k-1} - \frac{u_2 - u_1\Phi}{\Phi - \Psi}\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \Psi^{2k-1} =$$

$$= \frac{u_2 - u_1\Psi}{\Phi - \Psi} \cdot \frac{\Phi - \Phi^n}{1 - \Phi^2} - \frac{u_2 - u_1\Phi}{\Phi - \Psi} \cdot \frac{\Psi - \Psi^n}{1 - \Psi^2} =$$

$$= \frac{u_2 - u_{n+1} + u_{n-1}\Phi^2\Psi^2 + u_1\Phi\Psi(\Phi + \Psi) - u_2\Phi\Psi}{(1-\Phi^2)(1-\Psi^2)} =$$

Врахувавши, що $\Phi \cdot \Psi = -s$ та $\Phi + \Psi = p$, останню рівність можна записати наступним чином

$$\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} u_{2k} = \frac{(1+s)u_2 - psu_1 - u_{n+1} + s^2 u_{n-1}}{1 - p\sqrt{p^2+4s} - s^2}.$$

□

1.2. Простори узагальнених послідовностей Фібоначчі

Нехай

$$F = \{(u_n) : \ u_1, u_2 \in \mathbb{R}, \ u_n = pu_{n-1} + su_{n-2}, \ n \geqslant 3\}$$

множина узагальнених послідовностей Фібоначчі з **фіксованими параметрами** p та s. Для елементів множини F введемо лінійні операції (додавання та множення на скаляр) за законами:

$$(a_n) \oplus (b_n) = (a_n + b_n) \quad \text{та} \quad \lambda\,(a_n) = (\lambda a_n)\,, \ n \in \mathbb{N}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Неважко переконатися, що бінарна операція додавання є замкненою (алгебраїчною):

$$a_n + b_n = pa_{n-1} + sa_{n-2} + pb_{n-1} + sb_{n-2} = p\left[a_{n-1} + b_{n-1}\right] + s\left[a_{n-2} + b_{n-2}\right].$$

Таким чином, можна зробити висновок, що множина F разом з операцією додавання є комутативною групою, нейтральним елементом якої є нуль-послідовність (0), а симетричним (протилежним) елементом до послідовності (a_n) є послідовність $(-a_n)$.

Операція множення на скаляр є також замкненою:

$$\lambda\left(a_n\right) = \lambda\left[pa_{n-1} + sa_{n-2}\right] = \lambda pa_{n-1} + \lambda sa_{n-2}.$$

Отже, можна зробити висновок, що множина F з операціями додавання та множення на скаляр утворюють лінійний простір.

Лема 1.1. *Вектори* $\overline{e_1} = e_n^{(1)} = (1,\ 0,\ s,\ ps,\ \ldots,\ pu_{n-1}+su_{n-2},\ \ldots)$ *та* $\overline{e_2} = e_n^{(2)} = (0,\ 1,\ p,\ p^2+s,\ \ldots,\ pu_{n-1}+su_{n-2},\ \ldots)$ *є лінійно незалежними і для довільного* $\overline{x} = (x_1,\ x_2,\ px_1+sx_2,\ \ldots,\ pu_{n-1}+su_{n-2},\ \ldots) \in F$ *має місце рівність*

$$\overline{x} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2}. \tag{1.4}$$

Доведення. Легко бачити, що рівність $\alpha_1\overline{e_1} + \alpha_2\overline{e_2} = \overline{0}$ має місце тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Таким чином, вектори $\overline{e_1}$ та $\overline{e_2}$ є лінійно незалежними.

Нехай $\overline{x} = (x_n)$ — довільно вибраний елемент з F. Тоді, згідно з теоремою 1.1, має місце наступна рівність:

$$x_n = \left[\begin{array}{l} \dfrac{\Phi^{n-1}\left(x_2 - x_1\Psi\right) - \Psi^{n-1}\left(x_2 - x_1\Phi\right)}{\Phi - \Psi} \quad \text{при} \quad \Phi \neq \Psi, \\ \Phi^{n-1}\left(x_1 + (n-1)\left(\dfrac{x_2}{\Phi} - x_1\right)\right) \quad \text{при} \quad \Phi = \Psi. \end{array}\right.$$

Загальний член постідовності $\overline{e_1} = e_n^{(1)}$ має вигляд

$$e_n^{(1)} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{\Phi^{n-1}\Psi - \Psi^{n-1}\Phi}{\Phi - \Psi} \quad \text{при} \quad \Phi \neq \Psi, \\ \Phi^{n-1}\left(2 - n\right) \quad \text{при} \quad \Phi = \Psi, \end{array}\right.$$

відповідно загальний член постідовності $\overline{e_2} = e_n^{(2)}$ має вигляд

$$e_n^{(2)} = \left[\begin{array}{ll} \frac{\Phi^{n-1} - \Psi^{n-1}}{\Phi - \Psi} & \text{при} \ \ \Phi \neq \Psi, \\ \Phi^{n-2}(n-1) & \text{при} \ \ \Phi = \Psi. \end{array} \right.$$

Неважко переконатися, що $x_n = x_1 e_n^{(1)} + x_2 e_n^{(2)}$, а це рівносильно тотожності (1.4). $\square$

Наслідок 1.2. *Впорядкована пара векторів* $(\overline{e_1}, \overline{e_2})$ *утворює базис, в якому вектор* $\overline{x} = (x_n)$ *має координати* $(x_1; x_2)$ *.*

Наслідок 1.3. *Для загального члена довільної узагальненої послідовності Фібоначчі* (u_n) *з простору* F *справедлива наступна рівність*

$$u_n = u_1 e_n^{(1)} + u_2 e_n^{(2)}, \tag{1.5}$$

де $e_n^{(1)}, e_n^{(2)}$ *позначають* n*-ий член послідовності* $\overline{e_1}$ *та* $\overline{e_2}$ *відповідно.*

Теорема 1.5. *Множина* F *разом з операціями додавання та множення на скаляр, тобто математична структура* $(F, +, \lambda(\cdot))$ *, є двовимірним векторним простором.*

1.3. Підпростір нескінченно малих послідовностей

Теорема 1.6. *Для того, щоб узагальнена послідовність Фібоначчі* (u_n) *була нескінченно малою необхідно і достатньо, щоб виконувалася хоча б одна із систем:*

$$\left\{ \begin{array}{l} |\Phi| < 1, \\ |\Psi| < 1, \end{array} \right. \tag{1.6}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |\Phi| < 1, \\ u_2 = u_1 \Phi, \end{array} \right. \tag{1.7}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |\Psi| < 1, \\ u_2 = u_1 \Psi. \end{array} \right. \tag{1.8}$$

Доведення. Використовуючи теорему (1.6), можна записати наступне

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \left[\begin{array}{ll} \dfrac{u_2 - u_1\Psi}{\Phi - \Psi} \lim\limits_{n\to\infty} \Phi^{n-1} - \dfrac{u_2 - u_1\Phi}{\Phi - \Psi} \lim\limits_{n\to\infty} \Psi^{n-1} & \text{при } \Phi \neq \Psi, \\ u_1 \lim\limits_{n\to\infty} \Phi^{n-1} + \left(\dfrac{u_2}{\Phi} - u_1\right) \lim\limits_{n\to\infty} (n-1)\Phi^{n-1} & \text{при } \Phi = \Psi. \end{array}\right.$$

Неважко переконатися, що при виконанні однієї з систем (1.6), (1.7), (1.8) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. В свою чергу, якщо жодна з систем не виконується, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$, оскільки матимемо $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi^{n-1} = \infty$ або $\lim\limits_{n\to\infty} \Psi^{n-1} = \infty$. □

Зауваження 1.1. Виконання систем (1.7) та (1.8) рівносильно тому, що послідовність (u_n) являє собою збіжну геометричну прогресію зі знаменниками Φ або Ψ відповідно.

Теорема 1.7. *З простору* $(F, +, \lambda(\cdot))$ *– узагальнених послідовностей Фібоначчі, з фіксованими параметрами* p *та* s*, можна виділити підпростір* S *нескінченно малих послідовностей.*

Доведення. Нехай маємо деякий простір узагальнених послідовностей Фібоначчі F з деякими фіксованими параметрами p та s. Розглянемо декілька випадків відносно чисел $|\Phi|$ та $|\Psi|$, оскільки вони фігурують у критерії нескінченної малості послідовності.

Випадок 1: Одночасно виконуються нерівності $|\Phi| < 1$ та $|\Psi| < 1$. У такому випадку будь-яка послідовність (u_n) з простору F, згідно з теоремою 1.6 буде нескінченно малою. Звідки $S \equiv F$.

Випадок 2: Лише одне з чисел $|\Phi|$ чи $|\Psi|$ менше одиниці. Нехай, наприклад, $|\Psi| < 1$. Позначимо через S підмножину всіх нескінченно малих узагальнених послідовностей Фібоначчі, тобто

$$S = \left\{(b_n) : \ b_n = pb_{n-1} + sb_{n-2}, \ b_n \to 0 \ (n \to \infty)\right\}.$$

Оскільки послідовність $\left(\Psi^{n-1}\right)_{n=1}^{\infty} = (1, \ \Psi, \ \Psi^2, \ \ldots, \Psi^n, \ \ldots) \in S$, то S містить елементи відмінні від нуль-послідовності. Причому, нескладно переконатися, що для елементів простору S будуть виконуватися наступні властивості

1. для довільних $\left(b_n^{(1)}\right), \left(b_n^{(2)}\right) \in S \Rightarrow \left(b_n^{(1)}\right) + \left(b_n^{(2)}\right) \in S$;
2. для довільних $(b_n) \in S$ та $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda (b_n) \in S$.

Тобто S є одновимірним підпростором лінійного простору F.

Випадок 3: Жодне з чисел $|\Phi|$ та $|\Psi|$ не менше одиниці. У такому випадку будь-яка послідовність з простору F (окрім нуль-послідовності) не є нескінченно малою, оскільки не виконуватимуться умови теореми 1.6. Звідки слідує, що $S = \left\{(\overline{0})\right\}$. □

Теорема 1.8. *Підмножина F^1 множини F таких узагальнених послідовностей Фібоначчі (a_n) для яких ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, утворює лінійний простір, який співпадає з підпростором нескінченно малих узагальнених послідовностей Фібоначчі S.*

Доведення. Покажемо, що F^1 задовольняє означення підпростору. Нагадаємо, що для двох збіжних рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ та довільних дійсних чисел α та β має місце рівність

$$\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n). \qquad (1.9)$$

Тоді з рівності (1.9) випливає, що F^1 є підпростором простору F. □

1.4. Скалярний добуток, норма, метрика

Означимо скалярний добуток двох елементів з простору узагальнених послідовностей Фібоначчі. Для цього використаємо означений раніше фіксований базис $\langle \overline{e_1}, \overline{e_2} \rangle$. Тоді для довільних елементів $x, y \in F$, їх скалярний добуток може бути означеним як сума добутків однойменних координат у фіксованому базисі

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2. \qquad (1.10)$$

Неважко переконатися, що у такому випадку всі аксіоми скалярного добутку будуть виконуватися. Окрім того, за допомогою скалярного добутку в просторі $(F, +, \lambda(\cdot))$ норму можна означити наступним чином

$$\|\overline{x}\| = \sqrt{\overline{x} \cdot \overline{x}} = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}. \tag{1.11}$$

Для визначеного таким чином функціонала будуть виконуватися усі аксіоми норми:

1) $\|\overline{x}\| \geqslant 0,\ \|\overline{x}\| = 0 \ \Leftrightarrow\ \overline{x} = \overline{0}$;

2) $\|\lambda \overline{x}\| = |\lambda|\, \|\overline{x}\|,\ \lambda \in \mathbb{R}$;

3) $\|\overline{x} + \overline{y}\| \leqslant \|\overline{x}\| + \|\overline{y}\|$.

Виконання властивостей 1) і 2) випливає з властивостей скалярного добутку, а виконання властивості 3) слідує з нерівності Коші-Буняковського

$$(\overline{x} \cdot \overline{y})^2 < (\overline{x} \cdot \overline{y})\,(\overline{x} \cdot \overline{y})\,.$$

Очевидно, що в базисі $\langle \overline{e_1}, \overline{e_2} \rangle$ маємо $\overline{e_1} = (1; 0)\,, \overline{e_2} = (0; 1)\,,$ тому використовуючи рівності (1.10) та (1.11) неважко переконатися, що вибраний базис є ортонормованим. Скалярний добуток, визначений в ортонормованому базисі рівністю (1.10) будемо називати *природним.*

Будь-який скінченновимірний евклідовий простів можна метризувати, ввівши у ньому відстань між двома елементами $\overline{x}$ та $\overline{y}$ наступним чином

$$\rho\,(\overline{x}, \overline{y}) = \|\overline{x} - \overline{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}. \tag{1.12}$$

Аксіоми метричного простору виконуватимуться, оскільки виконуються аксіоми норми. Скінченновимірний нормований простір $(F, +, \lambda(\cdot), \cdot)$ автоматично є повним [53].

Теорема 1.9. *Простір* $(F, +, \lambda(\cdot), \cdot, \rho)$ *є сепарабельним метричним простором.*

Доведення. Розглянемо множину

$$A = \left\{ (u_n) :\ u_1, u_2 \in \mathbb{Q},\ u_n = p u_{n-1} + s u_{n-2},\ n \geqslant 2 \right\},$$

узагальнених послідовностей Фібоначчі з першими двома раціональними членами, яка є підмножиною F. Множина A є зліченною, оскільки вона бієктивна множині $\mathbb{Q}^2$. Крім того, підмножина A буде всюди щільною в множині F, оскільки

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\forall (u_n) \in F)\ (\exists (x_n) \in A) :\ \rho (u_n, x_n) = \sqrt{(u_1 - x_1)^2 + (u_2 - x_2)^2} < \varepsilon.$$

□

Розглянемо інший спосіб метризації простору F. Зафіксуємо деяке натуральне число q для якого виконується нерівність $q > max \left\{ |\Phi| , |\Psi| \right\}$. Визначимо скалярний добуток між двома елементами $\overline{x},\ \overline{y}\ \in F$ наступним чином

$$\gamma \left(\overline{x}, \overline{y}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n y_n}{q^{2n}}. \tag{1.13}$$

Обґрунтуємо коректність такого задання скалярного добутку. Доведемо, що ряд (1.13) збіжний. Дійсно, використовуючи теорему 1.1, можна записати наступну рівність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n y_n}{q^{2n}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x_2 - x_1\Psi)(y_2 - y_1\Psi)\Phi^{2n-2}}{(\Phi - \Psi)q^{2n}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x_2 - x_1\Psi)(y_2 - y_1\Phi)\Phi^{n-1}\Psi^{n-1}}{(\Phi - \Psi)q^{2n}} -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x_2 - x_1\Phi)(y_2 - y_1\Psi)\Phi^{n-1}\Psi^{n-1}}{(\Phi - \Psi)q^{2n}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x_2 - x_1\Phi)(y_2 - y_1\Phi)\Psi^{2n-2}}{(\Phi - \Psi)q^{2n}} < \infty,$$

оскільки $\left|\frac{\Phi}{q}\right| < 1$ та $\left|\frac{\Psi}{q}\right| < 1$.

Покажемо далі, що означена рівністю (1.13) дійснозначна функція γ задовільняє усім аксіомам скалярного добутку.

1. $\gamma(\overline{x}, \overline{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n y_n}{q^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n x_n}{q^{2n}} = \gamma(\overline{y}, \overline{x});$

2. $\gamma(\overline{x}+\overline{y},\overline{z})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x_n+y_n)z_n}{q^{2n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x_nz_n}{q^{2n}}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{y_nz_n}{q^{2n}}=\gamma(\overline{x},\overline{z})+\gamma(\overline{y},\overline{z});$
3. $\gamma(\lambda\overline{x},\overline{y})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\lambda x_ny_n}{q^{2n}}=\lambda\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x_ny_n}{q^{2n}}=\lambda\gamma(\overline{x},\overline{y});$
4. $\gamma(\overline{x},\overline{x})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x_n^2}{q^{2n}}\geqslant 0$, причому $\gamma(\overline{x},\overline{x})=0$ лише тоді і тільки тоді, коли $\overline{x}=0$.

Отже, дійснозначна функція γ є скалярним добутком, який далі називатимемо *q-добутком.* Відповідно *q-норму* в евклідовому просторі $(F,+,\lambda(\cdot),\gamma)$ визначимо як функціонал

$$\|\overline{x}\|_q=\sqrt{\overline{x}\cdot\overline{x}}=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n^2}{q^{2n}}}. \tag{1.14}$$

Оскільки всі норми в скінченновимірному векторному просторі є еквівалентними [75], то q-норма еквівалентна нормі, породженій природним скалярним добутком.

Метрику в евклідовому нормованому просторі F з q-нормою означимо за допомогою рівності

$$\rho_q(\overline{x},\overline{y})=\rho_q=\|\overline{x}-\overline{y}\|_q=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x_n-y_n)^2}{q^{2n}}}\ , \tag{1.15}$$

де $\overline{x}=(x_n)$, $\overline{y}=(y_n)\in F$. Отже, (F,ρ_q) – метричний простір. Метрику, яка визначається останньою рівністю будемо називати *q-метрикою.*

1.5. Оператор зсуву членів послідовності

У векторному просторі $(F,+,\lambda(\cdot))$ розглянемо оператор

$$L(\overline{x})=(x_2,x_3,x_4,\ \ldots),$$

де $\overline{x}=(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_k,\ldots)\in F, k\in\mathbb{N}$, який назвемо *оператором зсуву.*

Очевидно, що оператор зсуву є лінійним, тобто

$$L\left(\overline{x}+\overline{y}\right)=L\left(\overline{x}\right)+L\left(\overline{y}\right)\quad \text{і}\quad L\left(\alpha\overline{x}\right)=\alpha L\left(\overline{x}\right).$$

Нехай $L^{(k)}(\cdot)$ — k-ий степінь оператора L, тобто

$$L^{k}\left(\overline{x}\right)=L\left(L\left(\ldots L\left(\overline{x}\right)\right)\right)=\left(x_{k+1},x_{k+2},\ldots\right).$$

Одним із основних характеристик лінійного оператора L є його матриця. Знайдемо образи векторів базису $\langle\overline{e_1},\overline{e_2}\rangle$:

$$L(\overline{e_1})=L(1,0,s,ps,p^2s+s^2,\ldots)=(0,s,ps,p^2s+s^2,\ldots),$$

$$L(\overline{e_2})=L(0,1,p,p^2+s,p^3+2ps,\ldots)=(1,p,p^2+s,p^3+2ps,\ldots).$$

Таким чином, матимемо $L(\overline{e_1})=0\cdot\overline{e_1}+s\cdot\overline{e_2}$, $L(\overline{e_2})=1\cdot\overline{e_1}+p\cdot\overline{e_2}$, звідки слідує, що матриця лінійного оператора L має вигляд:

$$M(L)=\begin{pmatrix}0 & s\\ 1 & p\end{pmatrix}.$$

Аналогічним чином можна встановити, що матриця лінійного оператора L^k має вигляд

$$M(L^k)=\begin{pmatrix}\frac{\Phi\Psi^k-\Psi\Phi^k}{\Phi-\Psi} & \frac{\Phi\Psi^{k+1}-\Psi\Phi^{k+1}}{\Phi-\Psi}\\ \frac{\Phi^k-\Psi^k}{\Phi-\Psi} & \frac{\Phi^{k+1}-\Psi^{k+1}}{\Phi-\Psi}\end{pmatrix}.$$

Теорема 1.10. *При довільному натуральному числі k два вектори $\overline{a}=(a_1,a_2,a_3,\ldots)$ і $L^k\left(\overline{a}\right)=(a_{k+1},a_{k+2},\ldots)$ з F є лінійно залежними тоді і тільки тоді, коли $a_2=a_1\Phi$ або $a_2=a_1\Psi$.*

Доведення. Нехай k — фіксоване натуральне число. Векторна рівність

$$\alpha_1\overline{a}+\alpha_2L^k\left(\overline{a}\right)=\overline{0}\tag{1.16}$$

рівносильна системі рівнянь

$$\alpha_1a_n+\alpha_2a_{k+n}=0, n=1,2,\ldots.$$

Оскільки всі рівняння системи, починаючи з третього, є наслідком перших двох, то остання система рівнянь рівносильна наступному

$$\begin{cases} \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_{k+1} & = & 0, \\ \alpha_2 a_2 + \alpha_2 a_{k+2} & = & 0. \end{cases}$$

З курсу лінійної алгебри відомо, що система двох лінійних однорідних рівнянь з двома невідомими має ненульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_{k+1} \\ a_2 & a_{k+2} \end{vmatrix} = 0,$$

що рівносильно рівності $a_1 a_{k+2} - a_2 a_{k+1} = 0$.

Враховуючи вигляд загального члена послідовності (a_n) при умові $\Phi \neq \Psi$ (див. 1.1), остання рівність може бути переписана у вигляді

$$a_1 \frac{\Phi^{k+1}\left(a_2 - a_1\Psi\right) - \Psi^{k+1}\left(a_2 - a_1\Phi\right)}{\Phi - \Psi} - a_2 \frac{\Phi^{k}\left(a_2 - a_1\Psi\right) - \Psi^{k}\left(a_2 - a_1\Phi\right)}{\Phi - \Psi} = 0.$$

Звідки

$$a_1^2\left(\Phi\Psi\right) + a_2^2 - a_1 a_2\left(\Phi + \Psi\right) = 0.$$

Отримаємо два розв'язками даної квадратичної форми $a_2 = \Phi a_1$ та $a_2 = \Psi a_1$.

Враховуючи вигляд загального члена послідовності (a_n) при умові $\Phi = \Psi$ (див. 1.1), перепишемо рівність $a_1 a_{k+2} - a_2 a_{k+1} = 0$ у вигляді

$$a_1 \Phi^{k+1}\left(a_1 + (k+1)\left(\frac{a_2}{\Phi} - a_1\right)\right) - a_2 \Phi^{k}\left(a_1 + k\left(\frac{a_2}{\Phi} - a_1\right)\right) = 0.$$

Виконавши певні перетворення, отримаємо

$$a_1^2\left(\Phi^2\right) + a_2^2 - a_1 a_2\left(2\Phi\right) = 0,$$

звідки $a_2 = \Phi a_1$. □

Наслідок 1.4. *При довільному натуральному k вектори $\overline{a}$ і $L^k(\overline{a})$ є лінійно незалежними тоді і тільки тоді, коли*

$$a_2 \neq a_1 \frac{p \pm \sqrt{p^2+4s}}{2}.$$

Наслідок 1.5. *Впорядкована пара векторів $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$ і $L^k(\overline{a}) = (a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots)$, де $a_2 \neq a_1 \frac{p \pm \sqrt{p^2+4s}}{2}$, є базисом лінійного простору F.*

Теорема 1.11. *Якщо вектор $\overline{x}$ в базисі $\langle \overline{e_1}, \overline{e_2} \rangle$ має координати $(x_1; x_2)$, а в базисі $\left\langle \overline{a}, L^k(\overline{a}) \right\rangle$ — координати $(x_1'; x_2')$, то*

$$\begin{cases} x_1 &= a_1 x_1' + a_{k+2} x_2', \\ x_2 &= a_2 x_1' + a_{k+1} x_2'. \end{cases}$$

1.6. Фрактали у просторі узагальнених послідовностей Фібоначчі

Наведемо означення α-мірної міри Гаусдорфа та розмірності Гаусдорфа–Безиковича (детальніше описання в [7]), які будуть потрібні далі.

Нехай E — довільна обмежена підмножина R^1, $d(E)$ — діаметр множини E і Υ — сім'я всіх непорожніх підмножин простору R^1. Тоді для довільних $\alpha > 0$ і $\varepsilon > 0$ можна означити величину

$$m_\alpha^\varepsilon(E) = \inf_{d(E_j) \leqslant \varepsilon} \left\{ \sum_j d^\alpha(E_j) \right\},$$

де інфімум береться по всіх не більш ніж зчисленних ε-покриттях $\{E_j\}$ множини E множинами $E_j \in \Upsilon$. Величина $m_\alpha^\varepsilon(E)$ називається наближаючою мірою порядку ε.

Означення 1.2. Невід'ємне число

$$H_\alpha(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} m_\alpha^\varepsilon(E) = \sup_{\varepsilon > 0} m_\alpha^\varepsilon(E)$$

називається *α-мірою Гаусдорфа–Безиковича множини E.*

α-мірна міра Гаусдорфа в просторі R^n узагальнює зовнішню міру Лебега з цілочисельних значень α на довільні додатні. У просторі R^1 при $\alpha = 1$ вона співпадає з зовнішньою мірою Лебега, саме тому розмірність Гаусдорфа-Безиковича множини додатної міри Лебега дорівнює 1.

Якщо Υ - сім'я всіх відкритих підмножин з R^1 або сім'я всіх замкнених підмножин з R^1, то отримуємо ту ж міру Гаусдорфа $H_\alpha(E)$, хоча наближаючі міри порядку ε можуть відрізнятися одна від одної.

Означення 1.3. Невід'ємне число

$$\alpha_0(E) = \sup\{\alpha : H_\alpha(E) = +\infty\} = \inf\{\alpha : H_\alpha(E) = 0\}$$

називається *розмірністю Гаусдорфа–Безиковича множини* E.

Розмірність Гаусдорфа-Безиковича має наступні властивості:

1. $\alpha_0(E) = 0$ для довільної не більш ніж зліченної множини E;
2. $\alpha_0(E_1) \leqslant \alpha_0(E_2)$, якщо $E_1 \subset E_2$;
3. $\alpha_0(\bigcup\limits_n E_n) = \sup\limits_n \alpha_0(E_n)$;
4. Якщо E_1 та E_2 — афінно еквівалентні, зокрема, геометрично подібні, то $\alpha_0(E_1) = \alpha_0(E_2)$.

Нагадаємо, що перетворенням подібності з коефіцієнтом $k > 0$ метричного простору (M, ρ) називається бієктивне відображення g множини M на себе, при якому відстані між точками змінюються в одному і тому ж відношенні, тобто

$$\frac{\rho(g(x_1), g(x_2))}{\rho(x_1, x_2)} = k, \quad \text{для довільних } x_1, x_2 \in M.$$

Кажуть, що множина $E \subset M$ подібна множині $E' \subset M$ з коефіцієнтом подібності k, якщо існує перетворення подібності g з коефіцієнтом k, яке переводить множину E в E'. Символічно це будемо записувати наступним чином $E \sim E'$.

Означення 1.4. Непорожня обмежена множина E метричного простору (M, ρ) називається самоподібною, якщо

$$\begin{aligned} &1.\ E = E_1 \bigcup \cdots \bigcup E_n, \qquad n > 1; \\ &2.\ E \sim E_i, \qquad\qquad\quad i = \overline{1, n}; \\ &3.\ \alpha_\rho(E_i \bigcap E_j) < \alpha_\rho(E),\ \forall i \neq j. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Означення 1.5. Самоподібною розмірністю самоподібної множини E називається число $\alpha_0 = \alpha_0(E)$, яке є розв'язком рівняння

$$k_1^x + k_1^x + \cdots + k_1^x = 1.$$

Відомо, що розмірність Гаусдорфа-Безиковича досконалої самоподібної множини евклідового простору співпадає з її самоподібною розмірністю.

Теорема 1.12. *Для природної метрики ρ та означеної вище $q-$метрики справедлива наступна нерівність*

$$0 < \frac{\rho_q}{\rho} < \lambda,$$

де $\lambda = \dfrac{2|x_2| + 2|y_2| + 2\Lambda|x_1| + 2\Lambda|y_1|}{\sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (x_1 - y_1)^2}\sqrt{1 - \frac{\Lambda^2}{q^2}}}, \quad \Lambda = \max\{|\Phi|, |\Psi|\}.$

Доведення. Враховуючи означення $q-$метрики, справедливою буде наступна рівність

$$\frac{\rho_q}{\rho} = \frac{\sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x_n - y_n)^2}{q^{2n}}}}{\sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (x_1 - y_1)^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{((x_2 - x_1\Psi - y_2 + y_1\Psi)\Phi^{n-1} - (x_2 - x_1\Phi - y_2 + y_1\Phi)\Psi^{n-1})^2}{q^{2n}}}}{\sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (x_1 - y_1)^2}}.$$

Нехай $\Lambda = \max\{|\Phi|, |\Psi|\}$. Тоді справедлива наступна нерівність

$$\frac{\rho_q}{\rho} < \frac{\sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(\Lambda^{n-1}(2|x_2| + 2|y_2| + 2\Lambda|x_1| + 2\Lambda|y_1|))^2}{q^{2n}}}}{\sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (x_1 - y_1)^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{(2|x_2|+2|y_2|+2\Lambda|x_1|+2\Lambda|y_1|)^2}{1-\frac{\Lambda^2}{q^2}}}}{\sqrt{(x_2-y_2)^2+(x_1-y_1)^2}} = \frac{\frac{2|x_2|+2|y_2|+2\Lambda|x_1|+2\Lambda|y_1|}{\sqrt{1-\frac{\Lambda^2}{q^2}}}}{\sqrt{(x_2-y_2)^2+(x_1-y_1)^2}} =$$

$$= \frac{2|x_2|+2|y_2|+2\Lambda|x_1|+2\Lambda|y_1|}{\sqrt{(x_2-y_2)^2+(x_1-y_1)^2}\sqrt{1-\frac{\Lambda^2}{q^2}}}.$$

□

Лема 1.2. *Має місце рівність розмірностей $\alpha_{\rho_q}(E) = \alpha(E)$ для довільної множини E з простору F.*

Теорема 1.13. *Якщо $\overline{0} \neq \overline{\alpha} = (\alpha_n)$ – фіксований елемент простору F, r і m – натуральні числа, причому $1 < m < r$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$, $v_i < v_{i+1}$, $i = \overline{1, m-1}$,*

$$C\left[r, V\right] = \left\{\lambda : \lambda = \frac{\alpha_1}{r} + \frac{\alpha_2}{r^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{r^n} + \ldots, \alpha_n \in V\right\},$$

то множина

$$H = \{\overline{x} \ : \overline{x} = \lambda\overline{\alpha}, \ \lambda \in C\left[r, V\right]\}$$

в метричному просторі (F, ρ_q) є самоподібною і її самоподібна розмірність

$$\alpha_0 = \log_r |V|$$

співпадає з розмірністю Гаусдорфа-Безиковича $\alpha_{\rho_q}(H)$.

Доведення. Оскільки

$$\overline{x} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{r_n}\right)\overline{a} = \left(\frac{\alpha_1}{r} + \frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{r_n}\right)\overline{a} = \frac{1}{r}\left(\alpha_1\overline{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{r_n}\overline{a}\right),$$

то

$$H = \bigcup_{i=1}^{\infty} \frac{1}{r}\left(v_i\overline{a} \oplus H\right),$$

де

$$H \sim \frac{1}{r}\left(v_i\overline{a} \oplus H\right), \quad i = \overline{1, m},$$

причому множина $\frac{1}{r}\left(v_i\overline{a} \oplus H\right)$ і $\frac{1}{r}\left(v_j\overline{a} \oplus H\right)$, при $i \neq j$, мають не більше однієї спільної точки. Отже, H є самоподібною множиною. Тоді її самоподібна розмірність α_0, згідно з означенням, є розв'язком рівняння

$$m \cdot \left(\frac{1}{r}\right)^x = 1, \quad \text{тобто} \quad \alpha_0 = \log_r m.$$

Розглянемо H як множину одновимірного підпростору $F_{\overline{a}}$ з твірним вектором $\overline{a}$ і рівномірною метрикою

$$\rho(\gamma_1\overline{a}, \gamma_2\overline{a}) = |\gamma_1 - \gamma_2|.$$

У повному метричному просторі $(F_{\overline{a}}, \rho)$ множина H є досконалою множиною (замкненою і без ізольованих точок). Тому її розмірність Гаусдорфа-Безиковича співпадає з самоподібною розмірністю.

Використовуючи лему 1.2, легко довести, що відображення

$$(F_{\overline{a}}, \rho) \overset{k}{\sim} (F_{\overline{a}}, \rho_q)$$

таке, що $g(\lambda\overline{a}) = \lambda\overline{a}$, зберігає самоподібну структуру і розмірність Гаусдорфа-Безиковича, тобто $\alpha_\rho(E) = \alpha_{\rho_q}(g(E))$ для довільної множини $E \subset (F_{\overline{a}}, \rho_q)$. Отже, має місце твердження теореми 1.12. $\square$

Теорема 1.14. *Якщо* $\overline{\alpha} = (\alpha_n)$, $\overline{b} = (b_n) \in F$, *причому* $\overline{\alpha}$ *і* $\overline{b}$ *неколінеарні, то множина*

$$H = \left\{ \overline{x} : \overline{x} = \lambda_1\overline{\alpha} + \lambda_2\overline{b}, \quad \lambda_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{2^k}, \lambda_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{2^k}, \alpha_k + \beta_k \leqslant 1 \right\}$$

є самоподібною досконалою множиною, самоподібна розмірність якої співпадає з розмірністю Гаусдорфа-Безиковича і дорівнює $\log_2 3$.

Доведення. Оскільки

$$\overline{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{2^k}\overline{a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{2^k}\overline{b} = \frac{1}{2}\left(\alpha_1\overline{a} + \beta_1\overline{b}\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{k+1}}{2^k}\overline{a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_{k+1}}{2^k}\overline{b}\right),$$

то

$$H = \bigcup_{\alpha_1,\beta_1\in\{0,1\}} \frac{1}{2}\left(\alpha_1\overline{a} + \beta_1\overline{b} \oplus H\right).$$

Причому

$$H \overset{k}{\sim} \frac{1}{2}\left(\alpha_1\overline{a} + \beta_1\overline{b} \oplus H\right)$$

і множини

$$\frac{1}{2}\left(\alpha_1'\overline{a} + \beta_1'\overline{b} \oplus H\right) \quad \text{та} \quad \frac{1}{2}\left(\alpha_1''\overline{a} + \beta_1''\overline{b} \oplus H\right),$$

де $(\alpha_1', \beta_1') \neq (\alpha_1'', \beta_1'')$, мають не більше однієї спільної точки.

Згідно означення, самоподібна розмірність α_0 множини H є розв'язком рівняння

$$3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 1, \quad \text{звідки} \quad \alpha_0 = \log_2 3.$$

□

Висновки до розділу 1

У цьому розділі встановлено, що множина узагальнених послідовностей Фібоначчі, а саме: послідовностей, для членів яких (починаючи з третього) виконується рівність: $u_{n+2} = pu_{n+1} + su_n$, де p та s — фіксовані дійсні числа утворює двовимірний лінійний векторний простір в якому можна виділити підпростір нескінченно малих послідовностей. У цьому просторі досліджені різноманітні математичні структури, введено скалярний добуток, норма, метрика, оператор зсуву членів послідовності, α-міра Гаусдорфа, дробова розмірність Гаусдорфа-Безиковича, описаний клас самоподібних фракталів.

Також досліджуються властивості узагальнених послідовностей Фібоначчі, зокрема, доводиться формула загального члена (формула типу Біне), знаходиться сума перших n (парних чи непарних) членів, критерій нескінченної малості послідовності, критерій належності наперед заданого числа даній послідовності, вивчаються різноманітні співвідношення між членами послідовності.

РОЗДІЛ 2

ПРЕДСТАВЛЕННЯ ЧИСЕЛ НЕСКІНЧЕННО МАЛИМИ УЗАГАЛЬНЕНИМИ ПОСЛІДОВНОСТЯМИ ФІБОНАЧЧІ

У цьому розділі вивчається ряд, члени якого є елементами узагальненої послідовності Фібоначчі, досліджуються тополого-метричні та фрактальні властивості множини неповних сум такого ряду. Розв'язується задача про розподіл випадкової неповної суми ряду, знаходиться значення поведінки модуля характеристичної функції на нескінченності для такої випадкової величини.

Також вивчається система представлення дійсних чисел неповними сумами ряду, члени якого є елементами нескінченно малої додатної узагальненої послідовності Фібоначчі, досліджуються властивості циліндричних множин, що породжені таким представленням.

2.1. Про додатний ряд, члени якого є елементами узагальненої послідовності Фібоначчі

Розглянемо знакододатний ряд

$$u_1 + u_2 + \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+2},\ u_{n+2} = pu_{n+1} + su_n, n \in N, u_1, u_2, p, s \in R^+, \qquad (2.1)$$

тобто ряд, члени якого утворюють узагальнену послідовність Фібоначчі з додатними початковими параметрами u_1, u_2, p, s. З попередньої теореми випливає, що для загального члена ряду (2.1) справедлива наступна рівність

$$u_n = \frac{\Phi^{n-1}\left(u_2 - u_1\Psi\right) - \Psi^{n-1}\left(u_2 - u_1\Phi\right)}{\Phi - \Psi}, n \in N, \qquad (2.2)$$

де

$$\Phi = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4s}}{2} \quad \text{та} \quad \Psi = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4s}}{2} \ .$$

Теорема 2.1. *Для членів ряду* (2.1) *справедлива наступна рівність*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \Phi.$$

Доведення. Використовуючи рівність (2.2), границю можна записати наступним чином

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\Phi^n(u_2 - u_1\Psi) - \Psi^n(u_2 - u_1\Phi)}{\Phi^{n-1}(u_2 - u_1\Psi) - \Psi^{n-1}(u_2 - u_1\Phi)}.$$

Враховуючи, що для членів ряду (2.1) початкові параметри u_1, u_2, p, s є додатними дійсними числами, для Φ та Ψ будуть справедливі наступні твердження

$$\Phi = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4s}}{2} > 0 \quad , \quad \Psi = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4s}}{2} < 0,$$

$$|\Phi| > |\Psi| \quad , \quad u_2 - u_1\Psi \neq 0.$$

Взявши до уваги останні нерівності, можна зробити висновок, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \Phi.$$

□

Наслідок 2.1. *Для членів ряду* (2.1) *справедлива наступна рівність*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+k}}{u_n} = \Phi^k, \forall k \in N.$$

Теорема 2.2. *Для збіжності ряду* (2.1)*, необхідно і достатньо, щоб виконувалася система нерівностей*

$$\begin{cases} 0 < p < 1, \\ 0 < s < 1 - p. \end{cases} \tag{2.3}$$

Доведення. Оскільки довільний член ряду (2.1) має вигляд (2.2), то очевидно, що для збіжності ряду необхідно і достатньо, щоб виконувалася хоча б одна з трьох систем

$$\begin{cases} |\Phi| < 1, \\ |\Psi| < 1, \end{cases} \begin{cases} |\Phi| < 1, \\ u_2 = u_1\Phi, \end{cases} \begin{cases} |\Psi| < 1, \\ u_2 = u_1\Psi. \end{cases}$$

Врахувавши те, що при додатніх початкових параметрах

$$|\Phi| > |\Psi| \quad , \quad u_2 - u_1\Psi \neq 0,$$

умову збіжності ряду можна записати як систему нерівностей

$$\begin{cases} 0 < \Phi < 1, \\ -\Phi < \Psi < 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < \frac{p+\sqrt{p^2+4s}}{2} < 1, \\ -1 < \frac{p-\sqrt{p^2+4s}}{2} < 0. \end{cases}$$

Останню можна переписати відносно параметрів p та s у вигляді

$$\begin{cases} 0 < p < 1, \\ 0 < s < 1 - p. \end{cases}$$

□

Наслідок 2.2. *Якщо ряд* (2.1) *є збіжним, то послідовність* (u_n), *членів ряду, є монотонно спадною з деякого номера* n^*, *тобто існує такий номер* $n^* \in N$, *після якого має місце нерівність*

$$u_{n+1} < u_n, \forall n > n^*.$$

Зауваження 2.1. З того, що початкові параметри u_1, u_2, p, s для ряду (2.1) є додатними слідує, що ряд є знакододатнім, проте обернене твердження невірне. Існують знакододатні узагальнені послідовності Фібоначчі для яких початкові параметри не є одночасно додатними.

Лема 2.1. *Якщо ряд* (2.1) *збіжний, то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = r = \frac{u_1(1 - \Phi - \Psi) + u_2}{(1 - \Phi)(1 - \Psi)} = \frac{u_1(1 - p) + u_2}{1 - p - s}. \tag{2.4}$$

Доведення. Нехай виконується умова леми. Використовуючи рівність (2.2), можна записати наступне

$$r = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi^{n-1}\left(u_2 - u_1\Psi\right) - \Psi^{n-1}\left(u_2 - u_1\Phi\right)}{\Phi - \Psi}.$$

Оскільки, ряд (2.1) за умовою збіжний, то з умови (2.3) слідує, що $|\Phi| < 1$ та $|\Psi| < 1$. Таким чином, сума ряду (2.1) є сумою двох збіжних геометричних прогресій зі знаменниками Φ та Ψ відповідно, звідки отримуємо наступне

$$r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(u_2 - u_1\Psi)}{\Phi - \Psi}\Phi^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(u_2 - u_1\Phi)}{\Phi - \Psi}\Psi^{n-1} =$$

$$= \frac{u_2 - u_1\Psi}{(\Phi - \Psi)(1 - \Phi)} - \frac{u_2 - u_1\Phi}{(\Phi - \Psi)(1 - \Psi)} =$$

$$= \frac{u_2 - u_2\Psi - u_1\Psi + u_1\Psi^2 - u_2 + u_2\Phi + u_1\Phi - u_1\Phi^2}{(\Phi - \Psi)(1 - \Psi)(1 - \Phi)} = \frac{u_1 - u_1(\Phi + \Psi) + u_2}{(1 - \Psi)(1 - \Phi)}.$$

Врахувавши, що $\Phi \cdot \Psi = -s$ та $\Phi + \Psi = p$, останню рівність можна записати наступним чином

$$r = \frac{u_1 - u_1(\Phi + \Psi) + u_2}{1 - (\Psi + \Phi) + \Phi\Psi} = \frac{u_1(1 - p) + u_2}{1 - p - s}.$$

□

Лема 2.2. *Якщо ряд* (2.1) *збіжний, то*

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} u_n = r_k = \frac{u_{k+1} + \Phi\Psi u_k}{1 - (\Psi + \Phi) + \Phi\Psi}) = \frac{u_{k+1} + su_k}{1 - p - s}. \qquad (2.5)$$

Доведення. Нехай виконується умова леми. Використовуючи рівність (2.2), можна записати наступне

$$r_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} u_n = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\Phi^{n-1}\left(u_2 - u_1\Psi\right) - \Psi^{n-1}\left(u_2 - u_1\Phi\right)}{\Phi - \Psi}.$$

Оскільки, ряд за умовою збіжний, то $|\Phi| < 1$ та $|\Psi| < 1$. Число r_k є сумою залишків двох збіжних геометричних прогресій зі знаменниками Φ

та Ψ відповідно, звідки отримаємо

$$r_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(u_2 - u_1\Psi)}{\Phi - \Psi}\Phi^{n-1} - \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(u_2 - u_1\Phi)}{\Phi - \Psi}\Psi^{n-1} =$$

$$= \frac{(u_2 - u_1\Psi)\Phi^k}{(\Phi - \Psi)(1 - \Phi)} - \frac{(u_2 - u_1\Phi)\Psi^k}{(\Phi - \Psi)(1 - \Psi)} =$$

$$= \frac{u_2\Phi^k - u_2\Phi^k\Psi - u_1\Phi^k\Psi + u_1\Phi^k\Psi^2 - u_2\Psi^k + u_2\Phi\Psi^k + u_1\Phi\Psi^k - u_1\Phi^2\Psi^k}{(\Phi - \Psi)(1 - \Psi)(1 - \Phi)} =$$

$$= \frac{u_{k+1} + \Phi\Psi u_k}{(1 - \Psi)(1 - \Phi)}.$$

Врахувавши, що $\Phi \cdot \Psi = -s$ та $\Phi + \Psi = p$, останню рівність можна записати наступним чином

$$r_k = \frac{u_{k+1} + \Phi\Psi u_k}{1 - (\Psi + \Phi) + \Phi\Psi}) = \frac{u_{k+1} + su_k}{1 - p - s}.$$

□

2.2. Властивості множини неповних сум ряду

Означення 2.1. Якщо $M \in 2^N$, або іншими словами $M \subseteq N$ (N — множина натуральних чисел), то число

$$x = x(M) = \sum_{n \in M} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n u_n, \qquad (2.6)$$

де

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, \ n \in M, \\ 0, \ n \notin M, \end{cases}$$

називається *неповною сумою ряду.*

З роботи [19] відомо, що множина неповних сум довільного збіжного знакододатного ряду є однією з трьох типів: скінченним об'єднанням відрізків, множиною канторівського типу або канторвалом.

Означення 2.2. *Циліндром* k*-ого* рангу з основою $c_1c_2\dots c_k$, де $c_i \in \{0,1\}$, називається множина $\Delta'_{c_1c_2\dots c_k}$, яка містить всі неповні суми ряду (2.1) виду

$$\sum_{n=1}^{k} c_n u_n + \sum_{n=k+1}^{\infty} \varepsilon_n u_n, \text{ де } \varepsilon_n \in \{0,1\}\,.$$

Означення 2.3. *Циліндричним відрізком* рангу k з основою $c_1c_2\dots c_k$ називається відрізок

$$\Delta_{c_1c_2\dots c_k} = \left[\inf \Delta'_{c_1c_2\dots c_k}, \sup \Delta'_{c_1c_2\dots c_k}\right] =$$

$$= \left[\sum_{n=1}^{k} c_n u_n, r_k + \sum_{n=1}^{k} c_n u_n\right].$$

В залежності від (u_n) і набору $c_1c_2\dots c_k$ можливі випадки, коли $\Delta'_{c_1c_2\dots c_k}$ і $\Delta_{c_1c_2\dots c_k}$ співпадають та не співпадають, але завжди $\Delta'_{c_1c_2\dots c_k} \subset \Delta_{c_1c_2\dots c_k}$. Безпосередньо з означення випливають наступні властивості циліндричних множин:

Властивість 1.

$$\inf \Delta_{c_1c_2\dots c_k} = \inf \Delta'_{c_1c_2\dots c_k}, \ \sup \Delta_{c_1c_2\dots c_k} = \sup \Delta'_{c_1c_2\dots c_k}.$$

Властивість 2.

$$\Delta_{c_1c_2\dots c_k} \supset \Delta_{c_1c_2\dots c_k0} \bigcup \Delta_{c_1c_2\dots c_k1}, \ \Delta'_{c_1c_2\dots c_k} = \Delta'_{c_1c_2\dots c_k0} \bigcup \Delta'_{c_1c_2\dots c_k1}.$$

Властивість 3.

$$\inf \Delta_{c_1c_2\dots c_k} = \inf \Delta_{c_1c_2\dots c_k0} < \inf \Delta_{c_1c_2\dots c_k1},$$

$$\sup \Delta_{c_1c_2\dots c_k} = \sup \Delta_{c_1c_2\dots c_k1} > \sup \Delta_{c_1c_2\dots c_k0}.$$

Властивість 4.

$$|\Delta_{c_1c_2\dots c_k}| = r_k \to 0, \text{при } k \to \infty.$$

Властивість 5.

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}\Delta_{c_1c_2\ldots c_k}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\Delta'_{c_1c_2\ldots c_k}\equiv\Delta_{c_1c_2\ldots c_k\ldots}=x\subset\left[0\,,\,\frac{u_1(1-p)+u_2}{1-p-s}\right].$$

Властивість 6.

$$\frac{|\Delta_{c_1c_2\ldots c_kc_{k+1}}|}{|\Delta_{c_1c_2\ldots c_k}|}=\frac{r_{k+1}}{r_{k+1}+u_{k+1}}=\frac{1}{\delta_{k+1}+1},\text{де }\delta_{k+1}=\frac{u_{k+1}}{r_{k+1}}.$$

Властивість 7.

$$\Delta_{c_1c_2\ldots c_k}=\Delta_{s_1s_2\ldots s_k}\leftrightarrow c_i=s_i, i=\overline{1,k}.$$

Властивість 8.

$$\Delta_{c_1c_2\ldots c_k1}\bigcap\Delta_{c_1c_2\ldots c_k0}=\begin{cases}\left[\sum\limits_{n=1}^{k}c_nu_n+u_{n+1},\sum\limits_{n=1}^{k}c_nu_n+r_n\right], \text{ якщо } u_{k+1}<r_{k+1},\\ \Delta_{c_1c_2\ldots c_k10\ldots0\ldots}, \text{ якщо } u_{k+1}=r_{k+1},\\ \varnothing, \text{ якщо } u_{k+1}>r_{k+1}.\end{cases}$$

Властивість 9.

$$\left|\Delta_{c_1c_2\ldots c_k1}\bigcap\Delta_{c_1c_2\ldots c_k0}\right|=\begin{cases}r_{k+1}-u_{k+1}, \quad \text{якщо } u_{k+1}<r_{k+1},\\ 0, \text{ якщо } u_{k+1}\geqslant r_{k+1}.\end{cases}$$

Теорема 2.3 ([71]). *Множина неповних сум Δ' збіжного знакододатного ряду має наступні властивості:*

1. *вона є досконалою множиною (замкненою без ізольованих точок);*
2. $\Delta'=\bigcup\limits_{c_1c_2\ldots c_m}\triangle'_{c_1c_2\ldots c_m}$ *для довільного $m\in N$, причому всі $\triangle'_{c_1c_2\ldots c_m}$, які входять в об'єднання, є ізометричними;*
3. *вона являє собою скінченне об'єднання відрізків, якщо нерівність $r_n<u_n$ виконується лише для скінченного числа n;*

4. *вона є ніде не щільною множиною, якщо нерівність* $r_n \geqslant u_n$ *виконується лише для скінченного числа* n.

Теорема 2.4. *Якщо для ряду* (2.1) *виконується система нерівностей*

$$\begin{cases} 0 < p < 1, \\ \max\{0, \frac{1}{4} - \frac{p}{2}\} \leqslant s < 1 - p, \end{cases} \tag{2.7}$$

то ряд збігається, а множина його неповних сум являє собою скінченне об'єднання відрізків.

Доведення. Якщо виконується умова теореми, то автоматично виконується система (2.3), яка є необхідною і достатньою умовою збіжності ряду. Систему (2.23) відносно чисел Φ та Ψ можна переписати у вигляді

$$\begin{cases} \frac{1}{2} < \Phi < 1, \\ -\Phi < \Psi < 0. \end{cases}$$

Для ряду (2.1) введемо до розгляду величину

$$\delta_n = \frac{u_n}{r_n},$$

де u_n — n-ий член, а r_n — відповідно n-ий залишок ряду. Використовуючи рівності (2.2) та (2.5), можна встановити наступне

$$\delta_n = \frac{\Phi^{n-1}(u_2 - u_1\Psi) - \Psi^{n-1}(u_2 - u_1\Phi)}{\dfrac{(u_2 - u_1\Psi)\Phi^n}{1 - \Phi} - \dfrac{(u_2 - u_1\Phi)\Psi^n}{1 - \Psi}}.$$

Враховуючи, що $|\Phi| > |\Psi|$ при додатних параметрах p та s, правильною буде рівність

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \delta_n = \frac{1 - \Phi}{\Phi}.$$

Оскільки, $\frac{1}{2} < \Phi < 1$, то можна зробити висновок, що $\delta < 1$, або іншими словами нерівність $r_n < u_n$ для ряду (2.1) виконується лише скінченну кількість разів. Звідси, за теоремою 2.3, множина неповних сум ряду буде являти собою скінченне об'єднання відрізків. □

Наведемо далі означення α-мірної міри Гаусдорфа та розмірності Гаусдорфа–Безиковича (детальне описання в [7]), які будуть потрібні далі.

Нехай E — довільна обмежена підмножина R^1, $d(E)$ — діаметр множини E і Υ — сім'я всіх непорожніх підмножин простору R^1. Тоді для довільних $\alpha > 0$ і $\varepsilon > 0$ можна означити величину

$$m_\alpha^\varepsilon(E) = \inf_{d(E_j) \leqslant \varepsilon} \left\{ \sum_j d^\alpha(E_j) \right\},$$

де інфімум береться по всіх не більш ніж зчисленних ε-покриттях $\{E_j\}$ множини E множинами $E_j \in \Upsilon$. Величина $m_\alpha^\varepsilon(E)$ називається наближаючою мірою порядку ε.

Означення 2.4. Невід'ємне число

$$H_\alpha(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} m_\alpha^\varepsilon(E) = \sup_{\varepsilon > 0} m_\alpha^\varepsilon(E)$$

називається *α-мірою Гаусдорфа–Безиковича множини E.*

Якщо Υ - сім'я всіх відкритих підмножин з R^1 або сім'я всіх замкнених підмножин з R^1, то отримуємо ту ж міру Гаусдорфа $H_\alpha(E)$, хоча наближаючі міри порядку ε можуть відрізнятися одна від одної.

Означення 2.5. Невід'ємне число

$$\alpha_0(E) = \sup\{\alpha : H_\alpha(E) = +\infty\} = \inf\{\alpha : H_\alpha(E) = 0\}$$

називається *розмірністю Гаусдорфа–Безиковича множини E.*

Теорема 2.5 ([35]). *Якщо ряд* (2.1) *задовольняє умову $a_k \geqslant r_k$ для довільного $k \in N$ (це еквівалентно тому, що $\delta_k = \frac{a_k}{r_k} \geqslant 1$), тоді розмірність Гаусдорфа-Безиковича множини його неповних сум обчислюється за формулою*

$$\alpha_0\left(A\right) = \left[\varlimsup_{k \to \infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \log_2\left(\delta_i + 1\right) \right) \right]^{-1}.$$

Наслідок 2.3. *Якщо для ряду* (2.1) *виконуються умови теореми 2.5 та* $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = \delta$*, то розмірність Гаусдорфа-Безиковича множини його неповних сум обчислюється як*

$$\alpha_0 \left(A\right) = \log_2{}^{-1} \left(\delta + 1\right) \ .$$

Теорема 2.6. *Якщо для ряду* (2.1) *виконується система нерівностей*

$$\begin{cases} 0 < p < \frac{1}{2}, \\ 0 < s < \frac{1}{4} - \frac{p}{2}, \end{cases} \tag{2.8}$$

то ряд буде збігатися, а множина його неповних сум буде:

1. *досконалою;*
2. *ніде не щільною;*
3. *нульової міри Лебега;*
4. *розмірності Гаусдорфа-Безиковича*

$$\alpha_0 = -\log_\Phi 2.$$

Доведення. Якщо виконується умова теореми, то автоматично виконується система (2.3), яка є необхідною і достатньою умовою збіжності ряду. Умову (2.8) відносно чисел Φ та Ψ можна записати наступним чином

$$\begin{cases} \quad 0 < \Phi < \frac{1}{2}, \\ -\Phi < \Psi < 0. \end{cases}$$

У такому випадку

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \delta_n = \frac{1-\Phi}{\Phi} > 1.$$

Тоді, згідно теореми 2.3, множина неповних сум ряду буде досконалою та ніде не щільною, оскільки нерівність $r_n \geqslant u_n$ $(\delta > 1)$ виконується лише для скінченного числа n.

Міра Лебега множини неповних сум ряду (2.1) обчислюється за формулою (в загальному випадку не перевищує числа λ)

$$\lambda(\Delta') = \lim_{n\to\infty} 2^n r_n = \lim_{n\to\infty} 2^n \frac{u_{n+1} + s u_n}{1-p-s} =$$

$$= \frac{1}{1-p-s} \left(\lim_{n\to\infty} 2^n u_{n+1} + s \lim_{n\to\infty} 2^n u_n \right).$$

Неважко переконатися, що при виконанні умови теореми

$$2^n r_n \to 0 \quad (2^n u_{n+1} \to 0) \ \text{ при } \ n \to \infty.$$

Це і доводить нульмірність за Лебегом множини неповних сум ряду (2.1).

Згідно з наслідком 2.3, розмірність Гаусдорфа-Безиковича множини неповних сум ряду можна обчислити за формулою

$$\alpha_0\,(A) = \log_2{}^{-1}\,(\delta+1) \ = \log_2{}^{-1}\left(\frac{1}{\Phi}\right) \ = -\log_\Phi 2.$$

□

2.3. Зображення чисел нескінченно малими знакододатними узагальненими послідовностями Фібоначчі

Розглянемо знакододатний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{2.9}$$

для членів якого виконуються наступні умови:

1. $u_{n+2} = p u_{n+1} + s u_n, \ n \in N$, причому $u_1, \ u_2, \ p, \ s \in R^+$;
2. $\begin{cases} 0 < p < 1, \\ 0 < s < 1 - p; \end{cases}$
3. $u_{n+1} \geqslant (1-p-2s) u_n, \ n \in N.$

Нехай $A = \{0\,,\,1\}\,,\, L = A \times A \times A \times A \times ....$ Відповідність f між множинами L і R^1

$$L \supset (\alpha_n) \xrightarrow{f} x \in R^1,$$

яка встановлюється рівністю

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n,$$

очевидно є функціональною.

Теорема 2.7. *Для будь-якого* $x \in \left[0\,,\, \frac{u_1(1-p)+u_2}{1-p-s}\right]$, *існує* $L \subseteq N$ *таке, що має місце розклад*

$$x = \sum_{k \in L} u_k = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n, \tag{2.10}$$

де

$$\alpha_k = \begin{cases} 1, & k \in L\ , \\ 0, & n \in N \setminus L. \end{cases}$$

Доведення. Нехай $x \in \left[0\,,\, \frac{u_1(1-p)+u_2}{1-p-s}\right]$. Якщо $x = \frac{u_1(1-p)+u_2}{1-p-s}$, то $L = N$ і теорему доведено.

Якщо $0 < x < \frac{u_1(1-p)+u_2}{1-p-s}$, то очевидно, що існує $k_1 \in N$ таке, що

$$u_{k_1} \leqslant x < u_{k_1-1}$$

і буде виконуватися нерівність

$$0 \leqslant x - u_{k_1} = x_1 < u_{k_1-1} - u_{k_1}.$$

Звідки отримаємо, що

$$x = u_{k_1} + x_1, \tag{2.11}$$

де $x_1 \in [0, u_{k_1-1} - u_{k_1})$. У випадку $x_1 = 0$ матимемо, що $x = u_{k_1}$ і рівність (2.10) доведена. Якщо $x_1 > 0$, то існує $k_2 \in N$ таке, що

$$u_{k_2} \leqslant x_1 < u_{k_2-1},$$

причому, $k_2 > k_1$ (послідовність (u_n) є спадною). Таким чином,

$$0 \leqslant x_1 - u_{k_2-1} = x_2 < u_{k_2-1} - u_{k_2}.$$

Матимемо, що $x_1 = u_{k_2} + x_2$, де $x_2 \in [0, u_{k_2-1} - u_{k_2})$.

Підставивши x_1 у рівність (3.12) отримаємо наступну тотожність

$$x = u_{k_1} + u_{k_2} + x_2.$$

Якщо $x_2 = 0$, то теорему доведено, оскільки $x = u_{k_1} + u_{k_2}$. Якщо ж $x_2 > 0$, то існує $k_3 > k_2, k_3 \in N$ таке, що

$$u_{k_3} \leqslant x < u_{k_3-1}.$$

Здійснюючи аналогічні міркування, можна знайти $x_3, x_4, x_5 ....$

Якщо на деякому $n-$ому кроці

$$x_n = x_{n-1} - u_{k_n} = 0,$$

то розклад (2.10) знайдено:

$$x = u_{k_1} + u_{k_2} + ... + u_{k_n}.$$

Якщо ж такого скінченного n не знайдеться, то

$$0 < x_n = x_{n-1} - u_{k_n} < u_{k_n-1} - u_{k_n}$$

та існує $k_{n+1} > k_n, k_{n+1} \in N$ таке, що

$$u_{k_{n+1}} \leqslant x_n < u_{k_{n+1}-1}.$$

Звідки матимемо, що

$$0 \leqslant x_n - u_{k_n+1} = x_{n+1} < u_{k_{n+1}-1} - u_{k_{n+1}}$$

і

$$x = u_{k_1} + u_{k_2} + ... + u_{k_{n+1}} + x_{n+1}.$$

Врахувавши, що

$$u_{k_{n+1}-1} - u_{k_n+1} \to 0,$$

а отже, $x_{n+1} \to 0$ (при $n \to \infty$), можна зробити висновок, що розклад існуватиме, проте буде нескінченним. $\square$

Зауваження 2.2. З рівності (2.6) випливає, що множина всіх неповних сум ряду (3.10) співпадає з множиною E значень функції f, а отже, за теоремою 2.4, являє собою відрізок.

Означення 2.6. Подання числа x з відрізка $\left[0\,,\,\frac{u_1(1-p)+u_2}{1-p-s}\right]$ у вигляді (2.10) називатимемо F_g*—представленням* (F_g*—розкладом*) даного числа. Символічно це будемо записувати у вигляді

$$x = \triangle_{c_1c_2\ldots c_n\ldots}$$

і називатимемо F_g*—зображенням* цього числа. При цьому c_k називатимемо k*—ою цифрою* F_g*-зображення* числа x.

2.4. Теореми про різну кількість зображень числа

Очевидно, що кінці відрізка $\left[0, \frac{u_1(1-p)+u_2}{1-p-s}\right]$ мають єдине F_g-представлення і більше того

$$0 = \Delta_{000\ldots0\ldots} \qquad \text{та} \qquad \frac{u_1(1-p)+u_2}{1-p-s} = \Delta_{111\ldots1\ldots}.$$

Лема 2.3. *Для будь-якої точки з інтервала* $\left(0, \frac{u_1(1-p)+u_2}{1-p-s}\right)$ *існує перекриття циліндрів одного рангу, якому вона належить.*

Доведення. Нехай $x \in \left(0, \frac{u_1(1-p)+u_2}{1-p-s}\right)$. Тоді можливі наступні випадки:

1.1 $x \in \Delta_0 \bigcap \Delta_1 = O^1(0,1)$;

1.2 $x \in \Delta_0 \backslash O^1(0,1)$;

1.3 $x \in \Delta_1 \backslash O^1(0,1)$.

Якщо має місце випадок 1.1, то лему доведено.

В силу того, що циліндричні множини, які відповідають F_g-зображенню, володіють властивістю симетричності, то подальші міркування можуть бути проведені для одного з випадків 1.2 або 1.3.

Без втрати загальності будемо вважати, що має місце випадок 1.2. Тоді для циліндричних множин другого рангу будемо мати:

2.1 $x \in \Delta_{00} \bigcap \Delta_{01} = O_0^2(0,1)$;

2.2 $x \in \Delta_{00} \backslash O_0^2(0,1)$;

2.3 $x \in \Delta_{01} \backslash \left(O_0^2(0,1) \bigcup O^1(0,1)\right)$.

Якщо має місце випадок 2.1, то твердження леми, очевидно, виконується. Враховуючи, що $\triangle_{00}$ та $\triangle_{01}$ симетрічні відносно середини відрізка $\triangle_0$, подальші міркування можуть бути проведені для одного з двох наступних випадків: 2.2 або 2.3. Нехай має місце випадок 2.2. Для циліндрів третього рангу матимемо:

3.1 $x \in \Delta_{000} \bigcap \Delta_{001} = O_{00}^3(0,1)$;

3.2 $x \in \Delta_{000} \backslash O_{00}^3(0,1)$;

3.3 $x \in \Delta_{01} \backslash \left(O_0^2(0,1) \bigcup O^1(0,1)\right)$.

Таким чином, стає зрозуміло, що ми постійно будемо мати справу з трьома випадками та їх відповідними підвипадками. Оскільки,

$$\left|\Delta_{\underbrace{0...00}_{n}}\right| \to 0 \quad \text{та} \quad \left|\Delta_{\underbrace{0...01}_{n}}\right| \to 0$$

при $n \to \infty$, то лему доведено. □

Теорема 2.8. *Усі точки інтервалу* $\left(0, \frac{u_1(1-p)+u_2}{1-p-s}\right)$ *мають континуальну кількість* F_g*-зображень.*

2.5. Властивості розподілу випадкової неповної суми ряду

Розглянемо випадкову величину ξ, що задається наступним чином

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k u_k, \tag{2.12}$$

де ξ_k — послідовність незалежних випадкових величин з розподілами: $P\{\xi_k = 0\} = p_{0k} \geqslant 0, P\{\xi_k = 1\} = p_{1k} \geqslant 0, p_{0k} + p_{1k} = 1$, а $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ — збіжний знакододатній ряд (2.1), члени якого утворюють узагальнену послідовність Фібоначчі з додатними початковими параметрами.

Властивості випадкової величини ξ визначаються властивостями нескінченної стохастичної матриці $||p_{ik}||$ та властивостями членів ряду (2.1), причому не залежить від суми r ряду (вважаючи, що еквівалентні розподіли мають однакові властивості). З теореми Джессена-Вінтнера [20] випливає, що ξ має чистий розподіл (чисто дискретний, чисто абсолютно неперервний, або чисто сингулярний). Теорема П. Леві [22] дає необхідні і достатні умови дискретності: випадкова величина ξ — дискретна тоді і тільки тоді, коли

$$M = \prod_{k=1}^{\infty} \max\{p_{0k}, p_{1k}\} > 0.$$

Означення 2.7. *Спектром* S_ξ функції розподілу F_ξ випадкової величини ξ називається множина всіх точок росту функції розподілу F_ξ, тобто

$$S_\xi = \{x : F_\xi(x+\varepsilon) - F_\xi(x-\varepsilon) > 0 \ \forall\ \varepsilon > 0\}$$

$$= \{x : P\{\xi \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)\} > 0 \ \forall\ \varepsilon > 0\}.$$

Спектр розподілу випадкової величини ξ є підмножиною множини неповних сум числового ряду (2.1).

В залежності від тополого-метричних властивостей спектра, розрізняють три чисті типи сингулярних розподілів:

1. $C-$типу (канторівського типу), якщо міра Лебега спектра дорівнює нулю;
2. $S-$типу (салемівського типу), якщо

$$S_\xi \supset \bigcup_i [a_i, b_i] \quad \text{і} \quad \mu_\xi \left(S_\xi \backslash \bigcup_i [a_i, b_i] \right) = 0,$$

   де μ_ξ — міра, що відповідає розподілу випадкової величини ξ;
3. $P-$типу (квазіканторівського типу), якщо S_ξ є ніде не щільною множиною додатної міри Лебега.

Теорема 2.9. *Якщо* $M = 0$*, а для* (u_n) *виконується система нерівностей*

$$\begin{cases} 0 < p < \frac{1}{2}, \\ 0 < s < \frac{1}{4} - \frac{p}{2}, \end{cases}$$

то випадкова величина ξ *має чисто сингулярний розподіл канторівського типу.*

Доведення. При $M = 0$ випадкова величина ξ за теоремою П. Леві має неперервний розподіл, тобто він кожній одноточковій множині приписує нульову ймовірність. Множина неповних сум ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, згідно теореми 2.8, є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега. Оскільки спектр випадкової величини S_ξ є підмножиною множини неповних сум ряду (2.1), то його міра Лебега також дорівнює нулю. Отже, випадкова величина ξ має сингулярний розподіл канторівського типу. □

Функцію розподілу $F_\xi(x)$ випадкової величини ξ досить визначити в точках спектра розподілу S_ξ, оскільки в інших точках вона довизначається за неперервністю та монотонністю.

Розглянемо частковий випадок випадкової величини ξ, при наступних значеннях параметрів: $u_1 = \frac{2}{9}, u_2 = \frac{10}{81}, p = \frac{2}{9}, s = \frac{1}{27}$ та $M = 0$. Згідно теореми 2.9, випадкова величина ξ, за таких умов, матиме чисто сингулярний розподіл канторівського типу. Використовуючи рівність (2.2), можна записати наступне

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \left(\left(\frac{1}{3}\right)^k + \left(-\frac{1}{9}\right)^k \right).$$

Означення 2.8. *Характеристичною функцією* випадкової величини ξ називається математичне сподівання випадкової величини $e^{it\xi}$, тобто

$$f_\xi(t) = Me^{it\xi}.$$

З [77] відомо, що величина

$$L_\xi = \lim_{|t|\to\infty} \sup |f_\xi(t)|$$

набуває значення 1 у випадку дискретності випадкової величини ξ та значення 0 у випадку, коли ξ має абсолютно неперервний розподіл. Для сингулярних розподілів L_ξ може набувати довільного значення з відрізку $[0,1]$.

Таким чином, характеристична функція дає змогу дослідити властивості сингулярного розподілу випадкової величини ξ, порівняти його близькість за властивосями до дискретних або абсолютно неперервних.

Лема 2.4. *Характеристична функція випадкової величини ξ має вигляд*

$$f_\xi(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(p_{0k} + p_{1k} e^{\left(\left(\frac{1}{3}\right)^k + \left(-\frac{1}{9}\right)^k\right)ti} \right),$$

а її модуль записується у вигляді

$$|f_\xi(t)| = \prod_{k=1}^{\infty} |f_k(t)|,$$

де

$$|f_k(t)| = \sqrt{1 - 4p_{0k}p_{1k} \sin^2 \left(\left(\frac{1}{3}\right)^k + \left(-\frac{1}{9}\right)^k \right) \frac{t}{2}}.$$

Доведення. Використовуючи означення характеристичної функції та властивості математичного сподівання, отримуємо

$$f_\xi(t) = Me^{it\xi} = M \exp\left(it \sum_{k=1}^{\infty} u_k \xi_k \right) = M \left(e^{it\xi_1 u_1} \cdot e^{it\xi_2 u_2} \cdot \ldots \cdot e^{it\xi_k u_k} \cdot \ldots \right) =$$

$$= Me^{it\xi_1 u_1} \cdot Me^{it\xi_2 u_2} \cdot \ldots \cdot Me^{it\xi_k u_k} \cdot \ldots = \prod_{k=1}^{\infty} \left(p_{0k} + p_{1k} e^{\left(\left(\frac{1}{3}\right)^k + \left(-\frac{1}{9}\right)^k\right)ti} \right) = \prod_{k=1}^{\infty} f_k(t),$$

$$|f_k(t)| = \sqrt{p_{0k}^2 + 2p_{0k}p_{1k} \cos tu_k + p_{1k}^2} =$$

$$= \sqrt{1 - 4p_{0k}p_{1k} \sin^2 \frac{t}{2} \left(\left(\frac{1}{3}\right)^k + \left(-\frac{1}{9}\right)^k \right)}.$$

□

Теорема 2.10. *Має місце нерівність*

$$L_\xi = \lim_{|t|\to\infty} \sup |f_\xi(t)| > 0,39.$$

Доведення. Справедлива нерівність

$$|f_\xi(t)| = \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{1 - 4p_{0k}p_{1k}\sin^2\frac{t}{2}u_k} \geqslant \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{1 - \sin^2\frac{t}{2}u_k} = \prod_{k=1}^{\infty} \left|\cos\frac{t}{2}u_k\right| =$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \left|\cos\frac{t}{2}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^k + \left(-\frac{1}{9}\right)^k\right)\right|.$$

Матимемо, що

$$L_\xi \geqslant \lim_{n\to\infty} |f_\xi(t_n)| \geqslant \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{\infty} |f_k(t)| \geqslant \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{\infty} \left|\cos\frac{t}{2}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^k + \left(-\frac{1}{9}\right)^k\right)\right|.$$

Виберемо послідовність $t = t_n = 2\pi 9^n$. Виразимо

$$\left|\cos\frac{t}{2}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^k + \left(-\frac{1}{9}\right)^k\right)\right| = \left|\cos\left(3^{2n-k}\pi + (-1)^k 9^{n-k}\pi\right)\right| =$$

$$= \left[\begin{array}{l} 1 \text{ при } k \leqslant n, \\ \cos\dfrac{\pi}{9^{k-n}} \text{ при } n < k \leqslant 2n, \\ \cos\left(\dfrac{\pi}{3^{k-2n}} + \dfrac{(-1)^k\pi}{9^{k-n}}\right) \text{ при } k > 2n. \end{array}\right.$$

Таким чином,

$$\prod_{k=1}^{\infty} |f_k(t_n)| \geqslant \prod_{k=n+1}^{2n} \cos\frac{\pi}{9^{k-n}} \cdot \prod_{k=2n+1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{3^{k-2n}} + \frac{(-1)^k\pi}{9^{k-n}}\right).$$

Для $k > n$ справедлива оцінка

$$\cos\frac{\pi}{9^{k-n}} = 1 - 2\sin^2\frac{\pi}{2\cdot 9^{k-n}} > 1 - \frac{\pi^2}{2\cdot 81^{k-n}}.$$

Для $k > 2n$ справедлива оцінка

$$\cos\left(\frac{\pi}{3^{k-2n}} + \frac{(-1)^k\pi}{9^{k-n}}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2\cdot 3^{k-2n}} + \frac{(-1)^k\pi}{2\cdot 9^{k-n}}\right) >$$

$$> 1 - \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{1}{3^{k-2n}} + \frac{(-1)^k}{9^{k-n}}\right)^2 > 1 - \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{1}{3^{k-2n}} + \frac{1}{9^{k-n}}\right)^2.$$

Отже,

$$\prod_{k=1}^{\infty}|f_k(t_n)| > \prod_{k=n+1}^{2n}\left(1 - \frac{\pi^2}{2\cdot 81^{k-n}}\right)\cdot\prod_{k=2n+1}^{\infty}\left(1 - \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{1}{3^{k-2n}} + \frac{1}{9^{k-n}}\right)^2\right) >$$

$$> \prod_{i=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\pi^2}{2\cdot 81^{i}}\right)\cdot\prod_{j=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{1}{3^{j}} + \frac{1}{9^{j+2}}\right)^2\right).$$

Згідно з ознакою збіжності нескінченного добутку, останній є збіжним, оскільки ряди

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\pi^2}{2\cdot 81^{i}} \quad \text{та} \quad \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{1}{3^{j}} + \frac{1}{9^{j+2}}\right)^2$$

є збіжними.

Враховуючи отримані твердження та оцінки, буде справедливою наступна нерівність

$$L_\xi = \lim_{n\to\infty}\sup|f_\xi(t_n)| > \prod_{i=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\pi^2}{2\cdot 81^{i}}\right)\cdot\prod_{j=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{1}{3^{j}} + \frac{1}{9^{j+2}}\right)^2\right) = c.$$

Матимемо, що $L_\xi > c \approx 0,3909693738 > 0$. $\square$

Таким чином, можна зробити висновок, що ξ не є мірою Райхмана [23], бо $L_\xi \neq 0$. Розподіл випадкової величини за своїми властивостями не є близьким до абсолютно неперервних розподілів.

В загальній постановці задачі випадкова неповна сума ряду (2.1) може мати дискретний, абсолютно неперервний або сингулярний розподіл, в залежності від параметрів u_1, u_2, p, s та ймовірностей p_{0k}, p_{1k}.

2.6. Про один клас узагальнених послідовностей Фібоначчі та ряди, що з ними пов'язані

Серед усіх узагальнених послідовностей Фібоначчі варто виділити один клас послідовностей для яких формула загального члена має особливий вигляд. Це такі послідовності для яких $p^2+4s=0$. Розв'яжемо для такого класу послідовностей задачі, які розглядалися у параграфах 2.1 - 2.5.

Введемо до розгляду ряд

$$u_1+u_2+\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+2},\ \text{де}\ u_{n+2}=pu_{n+1}-\frac{p^2}{4}u_n, n\in N, \tag{2.13}$$

тобто ряд, членами якого є елементи узагальненої послідовності Фібоначчі, для якої виконується умова $p^2+4s=0$.

Теорема 2.11. *Для загального члена ряду* (2.13) *справедлива наступна рівність*

$$u_n=\left(\frac{p}{2}\right)^{n-1}\left(u_1+(n-1)\left(\frac{2u_2}{p}-u_1\right)\right), n\in N. \tag{2.14}$$

Доведення. Задача знаходження загального члена ряду (2.13) рівносильна задачі розв'язання однорідного різницевого рівняння другого порядку [78]

$$y\left(x+2\right)-py\left(x+1\right)+\frac{p^2}{4}y\left(x\right)=0. \tag{2.15}$$

Характеристичне рівняння даного різницевого рівняння має вигляд

$$\lambda^2-p\lambda+\frac{p^2}{4}=0. \tag{2.16}$$

Число $\frac{p}{2}$ є кратним коренем характеристичного рівняння. Функції $y_1(x)=\left(\frac{p}{2}\right)^x$ та $y_2(x)=x\left(\frac{p}{2}\right)^x$ є розв'язками рівняння (2.15). Отже, загальний розв'язок можна записати як функцію

$$y\left(x\right)=\left(\frac{p}{2}\right)^{x-1}\left(c_1(x-1)+c_2\right),$$

а враховуючи початкові умови

$$\begin{cases} c_1 y_1(1) + c_2 y_2(1) = u_1, \\ c_1 y_1(2) + c_2 y_2(2) = u_2, \end{cases}$$

можна знайти сталі c_1 та c_2. Матимемо

$$c_1 = u_1 \quad \text{та} \quad c_2 = \frac{2u_2 - u_1 p}{p}.$$

Таким чином, загальний член ряду (2.13) матиме вигляд

$$u_n = \left(\frac{p}{2}\right)^{n-1} \left(u_1 + (n-1)\left(\frac{2u_2}{p} - u_1\right)\right), n \in N.$$

□

Наслідок 2.4. *Для членів ряду* (2.13) *має місце рівність*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{p}{2}.$$

Доведення. Використовуючи формулу (2.14), шукану границю можна записати наступним чином

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{p}{2}\right)^n \left(u_1 + n\left(\frac{2u_2}{p} - u_1\right)\right)}{\left(\frac{p}{2}\right)^{n-1} \left(u_1 + (n-1)\left(\frac{2u_2}{p} - u_1\right)\right)} =$$

$$= \frac{p}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{u_1 + n\left(\frac{2u_2}{p} - u_1\right)}{u_1 + (n-1)\left(\frac{2u_2}{p} - u_1\right)} = \frac{p}{2}.$$

□

Наслідок 2.5. *Для членів ряду* (2.13) *має місце рівність*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+k}}{u_n} = \left(\frac{p}{2}\right)^k, \forall k \in N.$$

Теорема 2.12. *Для збіжності ряду* (2.13) *необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова*

$$-2 < p < 2 \text{ або } u_1 = u_2 = 0. \tag{2.17}$$

Доведення. Необхідність. Якщо ряд (2.13) збігається, то його n-й член, вираз якого дає рівність (2.14), прямує до нуля. Тоді

$$u_1 + (n-1)\left(\frac{2u_2}{p} - u_1\right) = 0 \quad \text{або} \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{p}{2}\right)^{n-1} = 0.$$

Перша рівність має місце тоді і тільки тоді, коли $u_1 = u_2 = 0$, а друга — коли $\left|\frac{p}{2}\right| < 1$, тобто $-2 < p < 2$.

Достатність. При умові $u_1 = u_2 = 0$ всі члени ряду є нулями. Тому ряд очевидно збігається. При умові $-2 < p < 2$ з виразу (2.14) n-ого члену ряду маємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \left|\frac{p}{2}\right| < 1,$$

Тому ряд є абсолютно збіжним, згідно з теоремою Д'Аламбера. □

Зауваження 2.3. Тривіальний випадок $u_1 = u_2 = 0$ виключимо з подальшого розгляду.

Лема 2.5. *Якщо ряд* (2.13) *збіжний, то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = r = \frac{u_1(1-p) + u_2}{\left(1 - \frac{p}{2}\right)^2}. \tag{2.18}$$

Доведення. Використовуючи рівність (2.14), можна записати наступне

$$r = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{p}{2}\right)^{n-1}\left(u_1 + (n-1)\left(\frac{2u_2}{p} - u_1\right)\right) =$$

$$= u_1\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{p}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{2u_2}{p} - u_1\right)\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\left(\frac{p}{2}\right)^{n-1} =$$

$$= \frac{u_1}{\left(1 - \frac{p}{2}\right)} + \frac{\left(\frac{2u_2}{p} - u_1\right)\frac{p}{2}}{\left(1 - \frac{p}{2}\right)^2} = \frac{u_1(1-p) + u_2}{\left(1 - \frac{p}{2}\right)^2}.$$

□

Лема 2.6. *Якщо ряд* (2.13) *збіжний, то*

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} u_n = r_k = \frac{u_{k+1} - \frac{p^2}{4}u_k}{\left(1 - \frac{p}{2}\right)^2}. \tag{2.19}$$

Доведення. Нехай виконується умова леми. Використовуючи рівність (2.14), можна записати наступне

$$r_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} u_n = u_1 \sum_{n=k+1}^{\infty} \left(\frac{p}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{2u_2}{p} - u_1\right) \sum_{n=k+1}^{\infty} (n-1) \left(\frac{p}{2}\right)^{n-1} =$$

$$= \frac{u_1 \left(\frac{p}{2}\right)^k}{1 - \frac{p}{2}} + \frac{\left(\frac{2u_2}{p} - u_1\right) \left(\left(\frac{p}{2}\right)^k k - \left(\frac{p}{2}\right)^{k+1} (k-1)\right)}{\left(1 - \frac{p}{2}\right)^2} -$$

$$- \frac{u_1 \left(\frac{p}{2}\right)^k k - u_2 \left(\frac{p}{2}\right)^k (k-1) + u_1 \left(\frac{p}{2}\right)^{k+1} (k-1)}{\left(1 - \frac{p}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{u_1 \left(\frac{p}{2}\right)^k + u_1 \left(\frac{p}{2}\right)^{k+1} - u_2 \left(\frac{p}{2}\right)^{k-1} k}{\left(1 - \frac{p}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(\frac{p}{2}\right)^k \left(u_1 + k \left(\frac{2u_2}{p} - u_1\right)\right) - \left(\frac{p}{2}\right)^2 \left(\frac{p}{2}\right)^{k-1} \left(u_1 + (k-1) \left(\frac{2u_2}{p} - u_1\right)\right)}{\left(1 - \frac{p}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{u_{k+1} - \frac{p^2}{4} u_k}{\left(1 - \frac{p}{2}\right)^2}.$$

□

Лема 2.7. *Для ряду* (2.13) *існує натуральний номер* n_0 *такий, що залишковий ряд*

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n = r_{n_0 - 1}, \tag{2.20}$$

буде знакосталим (при $p > 0$*) або знакопочереженим (при* $p < 0$*).*

Доведення. З рівності (2.14) маємо

$$u_n = v_n \cdot \left(\frac{p}{2}\right)^{n-1}, \quad \text{де} \quad v_n = \left(u_1 + (n-1) \left(\frac{2u_2}{p} - u_1\right)\right).$$

Легко бачити, що

$$\lim_{n \to \infty} v_n = \lim_{n \to \infty} \left[u_1 + (n-1) \left(\frac{2u_2}{p} - u_1\right)\right] = \begin{cases} +\infty, \text{якщо } \frac{2u_2}{p} > u_1, \\ -\infty, \text{якщо } \frac{2u_2}{p} < u_1. \end{cases}$$

Це означає, що починаючи з деякого номера члени послідовності (v_n) будуть набувати лише додатних або лише від'ємних значень. Тому послідовність (u_n) після деякого номера n_0 є знакосталою (при $p > 0$) або знакочереженою (при $p < 0$). □

Лема 2.8. *Якщо ряд* (2.13) *збіжний, то*

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1} = \frac{u_1\left(1 - \frac{3p^2}{4}\right) + pu_2}{\left(1 - \frac{p^2}{4}\right)^2}. \tag{2.21}$$

Доведення. Використавши формулу (2.14), можна записати наступне

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{p}{2}\right)^{2n-2} \left(u_1 + (2n-2)\left(\frac{2u_2}{p} - u_1\right)\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} u_1 \left(\frac{p}{2}\right)^{2n-2} + \left(\frac{2u_2}{p} - u_1\right) \sum_{n=1}^{\infty} (2n-2)\left(\frac{p}{2}\right)^{2n-2} =$$

$$= \frac{u_1}{1 - \frac{p^2}{4}} + \frac{\frac{p^2}{2}\left(\frac{2u_2}{p} - u_1\right)}{\left(1 - \frac{p^2}{4}\right)^2} = \frac{u_1 - \frac{p^2}{4}u_1 + pu_2 - \frac{p^2}{2}u_1}{\left(1 - \frac{p^2}{4}\right)^2} =$$

$$= \frac{u_1\left(1 - \frac{3p^2}{4}\right) + pu_2}{\left(1 - \frac{p^2}{4}\right)^2}.$$

□

Лема 2.9. *Якщо ряд* (2.13) *збіжний, то*

$$b = \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n} = \frac{u_1\left(-\frac{2p^3}{8}\right) + u_2\left(\frac{p^2}{4} + 1\right)}{\left(1 - \frac{p^2}{4}\right)^2}. \tag{2.22}$$

Доведення. Використавши формулу (2.14), можна записати наступне

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{p}{2}\right)^{2n-1} \left(u_1 + (2n-1)\left(\frac{2u_2}{p} - u_1\right)\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} u_1 \left(\frac{p}{2}\right)^{2n-1} + \left(\frac{2u_2}{p} - u_1\right) \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)\left(\frac{p}{2}\right)^{2n-1} =$$

$$= \frac{\left(\frac{p}{2}\right) u_1}{1-\frac{p^2}{4}} + \frac{\left(\frac{p^3}{8}+\frac{p}{2}\right)\left(\frac{2u_2}{p}-u_1\right)}{\left(1-\frac{p^2}{4}\right)^2} =$$

$$= \frac{u_1\left(\frac{p}{2}\right) - u_1\left(\frac{p^3}{8}\right) + u_2\left(\frac{p^2}{4}\right) - u_1\left(\frac{p^3}{8}\right) + u_2 - u_1\left(\frac{p}{2}\right)}{\left(1-\frac{p^2}{4}\right)^2} =$$

$$= \frac{u_1\left(-\frac{2p^3}{8}\right) + u_2\left(\frac{p^2}{4}+1\right)}{\left(1-\frac{p^2}{4}\right)^2}.$$

□

З робіт [18, 19, 24] відомо, що множина неповних сум довільного збіжного ряду є однією з чотирьох типів: зліченною множиною, об'єднанням відрізків, множиною канторівського типу або канторвалом.

У загальній постановці задача про тополого-метричні і фрактальні властивості множини неповних сум є складною. Це пов'язано, зокрема, з тим, що взагалі кажучи ряд не є знакосталим та його члени не утворюють монотонну послідовність.

Далі розглянемо властивості циліндричних множин у випадку знакопочереженості ряду ($p < 0$).

Властивість 10.

$$\inf \Delta_{c_1c_2\ldots c_k} = \inf \Delta'_{c_1c_2\ldots c_k} = \begin{cases} \sum_{n=1}^{k} c_n u_n + a_k, \text{якщо } u_{k+1} < 0, \\ \sum_{n=1}^{k} c_n u_n + b_k, \text{якщо } u_{k+1} \geqslant 0, \end{cases}$$

$$\sup \Delta_{c_1c_2\ldots c_k} = \sup \Delta'_{c_1c_2\ldots c_k} = \begin{cases} \sum_{n=1}^{k} c_n u_n + b_k, \text{якщо } u_{k+1} < 0, \\ \sum_{n=1}^{k} c_n u_n + a_k, \text{якщо } u_{k+1} \geqslant 0, \end{cases}$$

де

$$a_k = u_{k+1} + u_{k+3} + \ldots + u_{k+2n-1} + \ldots = \frac{u_{k+1}\left(1-\frac{3p^2}{4}\right) + p u_{k+2}}{\left(1-\frac{p^2}{4}\right)^2},$$

$$b_k = u_{k+2} + u_{k+4} + ... + u_{k+2n} + ... = \frac{u_{k+1}\left(-\frac{2p^3}{8}\right) + u_{k+2}\left(\frac{p^2}{4}+1\right)}{\left(1-\frac{p^2}{4}\right)^2}.$$

У такому випадку циліндричний відрізок k-ого рангу з основою $c_1c_2...c_k$ можна записати як

$$\Delta_{c_1c_2...c_k} = \begin{cases} \left[\sum\limits_{n=1}^{k} c_n u_n + a_k, \sum\limits_{n=1}^{k} c_n u_n + b_k\right], & \text{якщо} \quad u_{k+1} < 0, \\ \left[\sum\limits_{n=1}^{k} c_n u_n + b_k, \sum\limits_{n=1}^{k} c_n u_n + a_k\right], & \text{якщо} \quad u_{k+1} \geqslant 0. \end{cases}$$

Властивість 11. Довжина відрізка $\Delta_{c_1c_2...c_k}$ дорівнює

$$|\Delta_{c_1c_2...c_k}| = |a_k - b_k| = \left|\frac{u_{k+2} - u_{k+1}(p+1)}{\left(1+\frac{p}{2}\right)^2}\right|.$$

Властивість 12.

$$\Delta_{c_1c_2...c_kc_{k+1}} \subset \Delta_{c_1c_2...c_k}, c_{k+1} \in \{0,1\}.$$

Властивість 13.

$$\Delta_{c_1c_2...c_k0} \bigcap \Delta_{c_1c_2...c_k1} =$$

$$= \begin{cases} [inf\Delta_{c_1...c_k1}, sup\Delta_{c_1...c_k0}], \text{якщо } inf\Delta_{c_1...c_k1} < \sup\Delta_{c_1...c_k0} \text{ та } u_{k+1} \geqslant 0, \\ [inf\Delta_{c_1...c_k0}, sup\Delta_{c_1...c_k1}], \text{якщо } inf\Delta_{c_1...c_k0} < \sup\Delta_{c_1...c_k1} \text{ та } u_{k+1} < 0, \\ \varnothing, \text{у інших випадках.} \end{cases}$$

Властивість 14. Для будь-якої послідовності $(c_k), c_k \in \{0,1\}$ має місце рівність

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_{c_1c_2...c_k} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta'_{c_1c_2...c_k} = x = \Delta_{c_1c_2...c_k...}.$$

Властивість 15.

$$\Delta = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{c_i \in A, i=\overline{1,k}} \Delta_{c_1c_2...c_k}, A \in \{0,1\},$$

$$\Delta'_{c_1c_2...c_k} = \Delta_{c_1c_2...c_k} \cap \Delta.$$

Теорема 2.13. *Якщо для ряду* (2.13) *виконується нерівність*

$$1 \leqslant |p| < 2, \tag{2.23}$$

то ряд збігається, а множина його неповних сум являє собою скінченне об'єднання відрізків.

Доведення. Доведення проведемо для двох принципово різних випадків: $1 \leqslant p < 2$ та $-2 < p \leqslant -1$.

Випадок 1: Нехай $1 \leqslant p < 2$. Тоді, за лемою 2.7, з деякого номера n_0, ряд стає знакосталим, тобто його можна представити у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{n_0} u_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} u_n,$$

де $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n$ — збіжний знакосталий ряд.

Без втрати загальності будемо вважати, що ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n$ є знакододатним збіжним рядом. Розглянемо для такого ряду величину

$$\delta_n = \frac{u_n}{r_n}, \quad n \geqslant n_0,$$

де u_n — n-ий член, а r_n — відповідно n-ий залишок ряду. Використовуючи рівності (2.14) та (2.19), можна встановити справедливість наступного твердження

$$\delta_n = \frac{u_n}{r_n} = \frac{u_n}{\frac{u_{n+1} - \frac{p^2}{4} u_n}{\left(1 - \frac{p}{2}\right)^2}}.$$

Використовуючи наслідок 2.4 та враховуючи, що $1 \leqslant p < 2$, можна записати наступне

$$\delta = \lim_{n \to \infty} \delta_n = \frac{2 - p}{p} \leqslant 1.$$

Таким чином, нерівність $r_n \leqslant u_n$ для ряду (2.13) виконується лише для скінченного числа n. Звідси, за теоремою 2.3, множина неповних сум ряду буде являти собою скінченне об'єднання відрізків.

Випадок 2: Нехай $-2 < p < -1$. Тоді за лемою 2.7 з деякого номера n_0 ряд стає знакопочереженим, тобто його можна представити у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{n_0} u_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} u_n,$$

де $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n$ — збіжний знакопочережений ряд. Без втрати загальності будемо вважати, що $u_{n_0} > 0$. Використовуючи властивості циліндричних множин (властивості 10, 11, 13) та леми 2.21 та 2.22, можна встановити наступне

$$\left|\Delta_{c_1c_2\ldots c_k0} \bigcap \Delta_{c_1c_2\ldots c_k1}\right| =$$

$$= \begin{cases} b_{k+1} - u_{k+1} - a_{k+1}, \text{якщо } b_{k+1} > u_{k+1} + a_{k+1} \text{ та } u_{k+1} \geqslant 0, \\ a_{k+1} - u_{k+1} - b_{k+1}, \text{якщо } a_{k+1} > u_{k+1} + b_{k+1} \text{ та } u_{k+1} < 0, \\ 0, \text{ у інших випадках}, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{-u_{k+2} - u_{k+1}\left(1+p+\frac{p^2}{2}\right)}{\left(1+\frac{p}{2}\right)^2}, \text{якщо } b_{k+1} > u_{k+1} + a_{k+1} \text{ та } u_{k+1} \geqslant 0, \\ \frac{u_{k+2} + u_{k+1}\left(1+p+\frac{p^2}{2}\right)}{\left(1+\frac{p}{2}\right)^2}, \text{якщо } a_{k+1} > u_{k+1} + b_{k+1} \text{ та } u_{k+1} < 0, \\ 0, \text{ у інших випадках}. \end{cases}$$

Перейшовши в останній рівності до границі при $k \to \infty$, отримаємо

$$\lim_{k\to\infty} \left|\Delta_{c_1c_2\ldots c_k0} \bigcap \Delta_{c_1c_2\ldots c_k1}\right| = \begin{cases} \frac{-(p+1)(\frac{p}{2}+1)}{\left(1+\frac{p}{2}\right)^2} \lim\limits_{k\to\infty} u_{k+1}, \text{якщо } u_{k+1} \geqslant 0, \\ \frac{(p+1)(\frac{p}{2}+1)}{\left(1+\frac{p}{2}\right)^2} \lim\limits_{k\to\infty} u_{k+1}, \text{якщо } u_{k+1} < 0. \end{cases}$$

Таким чином, після деякого номера $\tilde{n}_0$ циліндричні множини $\Delta_{c_1c_2\ldots c_k0}$ та $\Delta_{c_1c_2\ldots c_k1}$ матимуть не нулевий перетин, що і доводить Δ' — скінченне об'єднання відрізків. □

Теорема 2.14. *Якщо для ряду* (2.13) *виконується* $0 < p < 1$, *то ряд буде збігатися, а множина його неповних сум буде:*

1. досконалою;

2. ніде не щільною;

3. нульової міри Лебега;

4. розмірності Гаусдорфа-Безиковича

$$\alpha_0 = \frac{1}{1-\log_2 p}.$$

Доведення. Нехай $0 < p < 1$. Тоді за лемою 2.7 з деякого номера n_0 ряд стає знакосталим, тобто його можна представити у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{n_0} u_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} u_n,$$

де $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n$ — збіжний знакосталий ряд.

Без втрати загальності будемо вважати, що ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n$ є знакододатним збіжним рядом. Розглянемо для такого ряду величину

$$\delta_n = \frac{u_n}{r_n}, \quad n \geqslant n_0,$$

де u_n — n-ий член, а r_n — відповідно n-ий залишок ряду. Використовуючи рівності (2.14) та (2.19), можна встановити справедливість наступного відношення

$$\delta_n = \frac{u_n}{r_n} = \frac{u_n}{\frac{u_{n+1}-\frac{p^2}{4}u_n}{\left(1-\frac{p}{2}\right)^2}}.$$

Використовуючи наслідок 2.4 та враховуючи, що $0 < p < 1$, можна записати наступне

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \delta_n = \frac{2-p}{p} > 1.$$

Таким чином, нерівність $r_n > u_n$ для ряду (2.13) виконується лише для скінченного числа n. Звідси, за теоремою 2.3, множина неповних сум ряду буде досконалою та ніде не щільною.

Згідно наслідку 2.3 розмірність Гаусдорфа-Безиковича множини неповних сум буде обчислюватися за формулою:

$$\alpha_0\left(A\right) = \log_2{}^{-1}\left(\delta+1\right) = \log_2{}^{-1}\left(\frac{2-p}{p}+1\right) = \log_2{}^{-1}\left(\frac{2}{p}\right) = \frac{1}{1-\log_2 p}.$$

□

Розв'яжемо задачу про розподіл випадкової неповної суми ряду (2.13) як це було зроблено у розділі 2.5. Отже, розглянемо випадкову величину ξ, що задається наступним чином

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k u_k, \tag{2.24}$$

де ξ_k — послідовність незалежних випадкових величин з розподілами ймовірностей: $P\{\xi_k = 0\} = p_{0k} \geqslant 0, P\{\xi_k = 1\} = p_{1k} \geqslant 0, p_{0k} + p_{1k} = 1$, а $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ — збіжний ряд (2.13).

Теорема 2.15. *Якщо* $M = 0$*, а для послідовності* (u_n) *виконується умова* $0 < p < 1$*, то випадкова величина* ξ *має чисто сингулярний розподіл канторівського типу.*

Доведення. При $M = 0$ випадкова величина ξ за теоремою П. Леві має неперервний розподіл. Множина неповних сум ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, згідно теореми 2.14, є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега. Оскільки спектр випадкової величини S_ξ є підмножиною множини неповних сум ряду (2.13), то його міра Лебега також дорівнює нулю. Отже, випадкова величина ξ має сингулярний розподіл канторівського типу. □

Висновки до розділу 2

У цьому розділі вивчається система числення, твірним елементом якої є нескінченно мала знакододатна узагальнена послідовність Фібоначчі (a_n). Доведено, що довільне дійсне число $x \in [0, r]$, де $r = \frac{u_1(1-p)+u_2}{1-p-s}$, може бути представленим неповною сумою ряду $\sum a_n$. Таку систему представлення чисел ми означили як F_g-представлення. Досліджено властивості циліндричних множин, що відповідають такому представленню, вивчено специфіку їх перекриттів. Розв'язана задача про кількість різних F_g-зображеннь дійсного числа, встановлено, що майже всі (у розумінні міри Лебега) точки відрізка мають континуальну кількість різний F_g-зображень.

Також вивчаються випадкові величини типу Джессена-Вінтнера (випадкові неповні суми), що пов'язані з F_g-зображенням. Досліджується поведінка модуля характеристичної функції однієї випадкої неповної суми на нескінченності, встановлено, що вона не є мірою Райхмана ($L_\xi \neq 0$).

РОЗДІЛ 3

ПОСЛІДОВНІСТЬ ЧИСЕЛ ЯКОБСТАЛЯ-ЛЮКА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ОБ'ЄКТІВ ЗІ СКЛАДНОЮ ЛОКАЛЬНОЮ БУДОВОЮ

У цьому розділі вивчається одна узагальнена послідовність Фібоначчі, яка має назву послідовність Якобсталя-Люка (J_n). Зокрема, розглядається ряд, члени якого є оберненими до елементів послідовності (J_n), досліджуються його властивості.

Вивчається представлення дійсних чисел за допомогою послідовності чисел Якобсталя-Люка, встановлюються його властивості, досліджується геометрія. Також вивчаються об'єкти зі складною локальною будовою, що безпосередньо пов'язані з $J-$представлення чисел.

3.1. Послідовність чисел Якобсталя-Люка

Деякі часткові випадки узагальнених послідовностей Фібоначчі вивчалися у роботах [25, 65]. Одним із цікавих випадків (при $u_1 = p = 2, u_2 = s = 1$) є послідовність чисел Якобсталя-Люка.

Означення 3.1. Послідовність дійсних чисел $(J_n) \equiv (J_n)_{n=1}^{\infty}$, яка має властивість

$$J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n, \tag{3.1}$$

де $J_1 = 2, J_2 = 1$ називатимемо *послідовністю Якобсталя-Люка.*

Враховуючи (3.1), можна записати перші члени послідовності

$$(J_n) = (2, 1, 5, 7, 17, 31, 65, ...J_n, ...) .$$

Теорема 3.1. *Для загального члена послідовності Якобсталя-Люка має місце рівність*

$$J_n = 2^{n-1} + (-1)^{n-1}. \tag{3.2}$$

Доведення. Задача знаходження загального члена послідовності (J_n) рівносильна задачі розв'язання однорідного різницевого рівняння другого порядку [78]

$$y(x+2) - y(x+1) - 2y(x) = 0. \tag{3.3}$$

Характеристичне рівняння даного різницевого рівняння має вигляд

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0. \tag{3.4}$$

Числа 2 та -1 є коренями характеристичного рівняння. Функції $y_1(x) = 2^x$ та $y_2(x) = (-1)^x$ є розв'язками рівняння (3.3). Отже, загальний розв'язок можна записати як функцію

$$y(x) = c_1 2^{x-1} + c_2(-1)^{x-1},$$

а враховуючи початкові умови

$$\begin{cases} c_1 y_1(1) + c_2 y_2(1) = 2, \\ c_1 y_1(2) + c_2 y_2(2) = 1, \end{cases}$$

можна знайти сталі c_1 та c_2. Матимемо $c_1 = c_2 = 1$.

Таким чином, загальний член послідовності Якобсталя-Люка матиме вигляд

$$J_n = 2^{n-1} + (-1)^{n-1}.$$

□

Теорема 3.2. *Для суми перших k членів послідовності Якобсталя-Люка справедлива рівність*

$$\sum_{n=1}^{k} J_n = \begin{cases} 2^k, & \textit{якщо } k - \textit{непарне}, \\ 2^k - 1, & \textit{якщо } k - \textit{парне}. \end{cases}$$

Доведення. Використовуючи рівність (3.2), шукану суму можна записати наступним чином

$$\sum_{n=1}^{k} J_n = 2^{k-1} + (-1)^{k-1} + 2^{k-2} + (-1)^{k-2} + \cdots + 2^2 - 1 + 2^1 + 1 + 2^0 - 1 =$$

$$= \left(2^{k-1} + 2^{k-2} + 2^{k-3} + \cdots + 2^2 + 2^1 + 2^0\right) + \underbrace{1 - 1 + 1 - 1 + \ldots}_{k} =$$

$$= 2^k - \underbrace{1 + 1 - 1 + 1 - \ldots}_{k+1} = \begin{cases} 2^k, \text{ якщо } k - \text{непарне}, \\ 2^k - 1, \text{ якщо } k - \text{парне}. \end{cases}$$

□

Наслідок 3.1. *Для членів послідовності* (J_n) *справедлива рівність*

$$\sum_{n=1}^{k} J_n = \begin{cases} J_{k+1} + 1, \textit{ якщо } k - \textit{непарне}, \\ J_{k+1} - 2, \textit{ якщо } k - \textit{парне}. \end{cases}$$

Теорема 3.3. *Для суми перших* k *непарних членів послідовності Якобсталя-Люка має місце рівність*

$$\sum_{n=1}^{\frac{k+1}{2}} J_{2n-1} = \frac{J_{k+2} - 2}{3} + \frac{k+1}{2}.$$

Доведення. Використовуючи рівність (3.2), можна записати

$$\sum_{n=1}^{\frac{k+1}{2}} J_{2n-1} = J_1 + J_3 + J_5 + ... + J_k = (2^0+1) + (2^2+1) + (2^4+1) + ... + (2^{k-1}+1) =$$

$$= \left(2^0 + 2^2 + 2^4 + ... + 2^{k-1}\right) + \frac{k+1}{2} = \frac{1 - 2^{k+1}}{1 - 4} + \frac{k+1}{2} = \frac{J_{k+2} - 2}{3} + \frac{k+1}{2}.$$

□

Теорема 3.4. *Для суми перших* k *парних членів послідовності* (J_n) *має місце рівність*

$$\sum_{n=1}^{\frac{k}{2}} J_{2n} = \frac{2(J_{k+1} - 2)}{3} - \frac{k}{2}.$$

Доведення. Використовуючи рівність (3.2), можна записати

$$\sum_{n=1}^{\frac{k}{2}} J_{2n} = J_2 + J_4 + J_6 + ... + J_k = (2^1 - 1) + (2^3 - 1) + (2^5 - 1) + ... + (2^{k-1} - 1) =$$

$$= \left(2^1 + 2^3 + 2^5 + ... + 2^{k-1}\right) - \frac{k}{2} = \frac{2(1-2^k)}{1-4} - \frac{k}{2} = \frac{2(J_{k+1}-2)}{3} - \frac{k}{2}.$$

□

Теорема 3.5. *Для суми квадратів перших k членів послідовності (J_n) має місце рівність*

$$\sum_{n=1}^{k} J_n^2 = \begin{cases} \dfrac{J_{2k+1} + 2J_{k+1} + 2}{3} + k, \ \textit{якщо } k - \textit{непарне}, \\ \dfrac{J_{2k+1} - 2J_{k+1} + 2}{3} + k, \ \textit{якщо } k - \textit{парне}. \end{cases}$$

Доведення. Використовуючи рівність (3.2), можна записати

$$\sum_{n=1}^{k} J_n^2 = \sum_{n=1}^{k} (2^0 + 1)^2 + (2^1 - 1)^2 + (2^2 + 1)^2 + ... + (2^{k-1} + (-1)^{k-1})^2 =$$

$$= (2^0 + 2^2 + ... + 2^{2k-2}) + 2(2^0 - 2^1 + 2^2 - 2^3 + ... + (-2)^{k-1}) + k =$$

$$= \frac{1-2^{2k}}{1-4} + 2\frac{1-(-2)^k}{1-(-2)} + k = \begin{cases} \dfrac{J_{2k+1} + 2J_{k+1} + 2}{3} + k, \ \text{якщо } k - \text{непарне}, \\ \dfrac{J_{2k+1} - 2J_{k+1} + 2}{3} + k, \ \text{якщо } k - \text{парне}. \end{cases}$$

□

Теорема 3.6. *Для членів послідовності Якобсталя-Люка має місце рівність*

$$\sum_{n=1}^{k} (-1)^{n-1} J_n = \begin{cases} \dfrac{-J_{k+1} + 2}{3} + k, \ \textit{якщо } k - \textit{парне}, \\ \dfrac{J_{k+1} + 2}{3} + k, \ \textit{якщо } k - \textit{непарне}. \end{cases}$$

Доведення. Використовуючи рівність (3.2), можна записати наступне

$$\sum_{n=1}^{k} (-1)^{n-1} J_n = J_1 - J_2 + J_3 - J_4 + ... + (-1)^{k-1} J_k =$$

$$= (2^0+1) - (2^1-1) + (2^2+1) - ... + (-1)^{k-1}(2^{k-1}+(-1)^{k-1}) =$$

$$= (2^0 - 2^1 + 2^2 - ... + (-2)^{k-1}) + k =$$

$$= \frac{1-(-2)^k}{1-(-2)} + k = \begin{cases} \dfrac{-J_{k+1}+2}{3} + k, \text{ якщо } k - \text{парне,} \\ \dfrac{J_{k+1}+2}{3} + k, \text{ якщо } k - \text{непарне.} \end{cases}$$

□

3.2. Ряд обернених чисел Якобсталя-Люка та його властивості

Розглянемо ряд обернених чисел Якобсталя-Люка

$$\sum_{n=1}^{\infty} J_n^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + ... + \frac{1}{J_n} + \ldots . \tag{3.5}$$

Формула (3.2), загального члена послідовності (J_n), дає вираз загального члена ряду обернених чисел Якобсталя-Люка

$$J_n^{-1} = \frac{1}{2^{n-1} + (-1)^{n-1}}. \tag{3.6}$$

Розглянутий ряд є збіжним, знакодатним, члени його (починаючи з другого номера) утворюють монотонно спадну послідовність. Більше того, з [36] (узагальнено в [30]) відомо, що нескінченна сума виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{A\alpha^n + B\beta^n},$$

при цілих параметрах α, β та умовах $A \cdot B \neq 0, |\alpha| > |t|, |A \cdot B \cdot t^2| < |\alpha|$ є ірраціональним числом. Звідси сума ряду (3.5) також є ірраціональним числом.

Лема 3.1. *Для ряду* (3.5) *справедливі наступні нерівності*

$$\begin{cases} u_n > r_n, \text{ якщо } n - \text{парне,} \\ u_n < r_n, \text{ якщо } n - \text{непарне.} \end{cases} \tag{3.7}$$

Доведення. Спочатку доведемо першу частину нерівності. Використовуючи рівність (3.6), для парних номерів n, можна записати наступне

$$u_n = \frac{1}{2^{n-1} - 1},$$

Оскільки,

$$\frac{1}{2^k + 1} + \frac{1}{2^{k+1} - 1} < \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}$$

для будь-якого $k \in N$, то

$$r_n = \frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^{n+1} - 1} + \frac{1}{2^{n+2} + 1} + \dots < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Оскільки, $r_n < \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{2^{n-1} - 1} = u_n$, то $u_n > r_n$ для парних номерів n.

Доведемо другу частину нерівності. Для непарних номерів n, рівність (3.2) записується у вигляді

$$u_n = \frac{1}{2^{n-1} + 1}.$$

Оскільки,

$$\frac{1}{2^k - 1} + \frac{1}{2^{k+1} + 1} > \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}$$

для будь-якого $k \in N$, то

$$r_n = \frac{1}{2^n - 1} + \frac{1}{2^{n+1} + 1} + \frac{1}{2^{n+2} - 1} + \dots > \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

В силу того, що $r_n > \frac{1}{2^{n-1}} > \frac{1}{2^{n-1} + 1} = u_n$, можна зробити висновок про справедливість нерівності $u_n < r_n$ для непарних номерів n. □

Лема 3.2. *Для залишків ряду* (3.5) *справедливі наступні оцінки*

$$\begin{cases} \frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n} < r_n < \frac{1}{2^{n-1}}, & \textit{якщо } n - \textit{парне}, \\ \frac{1}{2^{n-1}} < r_n < \frac{1}{2^n - 1} + \frac{1}{2^n}, & \textit{якщо } n - \textit{непарне}. \end{cases} \tag{3.8}$$

Доведення. Для парного номера n справедливо наступне

$$r_n = \frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^{n+1} - 1} + \dots + \frac{1}{2^{n+k} + (-1)^{n+k}} + \dots <$$

$$< \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n+k}} + \dots = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

З іншого боку

$$r_n > \frac{1}{2^n+1} + \left[\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots + \frac{1}{2^{n+k+1}} + \dots\right] = \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n}.$$

Таким чином, для парного номера n має місце оцінка

$$\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n} < r_n < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Для непарного номера n справедливо наступне

$$r_n = \frac{1}{2^n-1} + \frac{1}{2^{n+1}+1} + \dots + \frac{1}{2^{n+k}+(-1)^{n+k}} + \dots >$$

$$> \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n+k}} + \dots = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

З іншого боку

$$r_n < \frac{1}{2^n-1} + \left[\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots + \frac{1}{2^{n+k+1}} + \dots\right] = \frac{1}{2^n-1} + \frac{1}{2^n}.$$

Таким чином, для непарного номера n має місце оцінка

$$\frac{1}{2^{n-1}} < r_n < \frac{1}{2^n-1} + \frac{1}{2^n}.$$

□

Лема 3.3. *Для довільного непарного номера n, справедлива наступна нерівність:*

$$u_n < u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{2n}.$$

Доведення. Використовуючи рівність (3.2), можна записати наступне

$$u_n - u_{n+1} - \dots - u_{2n} = \frac{1}{2^{n-1}+1} - \frac{1}{2^n-1} - \dots - \frac{1}{2^{2n-1}-1} <$$

$$< \frac{1}{2^{n-1}+1} - \frac{1}{2^n} - \dots - \frac{1}{2^{2n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}+1} - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{2n-1}} =$$

$$= \frac{2^{2n-1} - 2^n(2^{n-1}+1) + (2^{n-1}+1)}{2^{2n-1}(2^{n-1}+1)} = \frac{-2^n + 2^{n-1} + 1}{2^{2n-1}(2^{n-1}+1)} < 0.$$

□

Лема 3.4. *Для довільного непарного номера n, справедлива наступна нерівність:*

$$u_n > u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{2n-2}.$$

Доведення. Використовуючи рівність (3.2), можна записати наступне

$$u_n - u_{n+1} - \cdots - u_{2n-2} = \frac{1}{2^{n-1}+1} - \frac{1}{2^n - 1} - \cdots - \frac{1}{2^{2n-3}-1} >$$

$$> \frac{1}{2^{n-1}+1} - \frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2^{n-1}} - \cdots - \frac{1}{2^{2n-3}} =$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}+1} - \frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{2n-3}} =$$

$$= \frac{-2^{2n-3} - 2^{2n-3} + 2^{2n-4} - 2^{2n-3} + 2^{n-3} + 2^{2n-1} - 2^{n-1} + 2^n - 1}{2^{2n-3}(2^{n-1}+1)(2^n - 1)} >$$

$$> \frac{2^{2n-1} - 3 \cdot 2^{2n-4}}{2^{2n-3}(2^{n-1}+1)(2^n - 1)} > 0.$$

□

У роботі [71] аналізуються множини неповних сум збіжних знакододатних рядів для яких нерівність $u_n \leqslant r_n$ $(u_n > r_n)$ виконується лише скінченну кількість разів. В свою чергу з [37] та [38] відомо, що множина неповних сум збіжного знакододатного ряду є однією з трьох типів: скінченним об'єднанням відрізків, множиною канторівського типу або канторвалом. Відомі на сьогодні результати не дають відповіді на питання про тип та властивості множини неповних сум ряду (3.5), оскільки нерівності $u_n < r_n$ та $u_n > r_n$ для такого ряду виконуються нескінченну кількість разів.

Лема 3.5. *Циліндричні множини, які породжені рядом* (3.5) *володіють наступними властивостями:*

1.$\Delta_{c_1c_2...c_k} = \left[\sum\limits_{i=1}^{k} c_i u_i, \sum\limits_{i=1}^{k} c_i u_i + r_k\right]$;

2. $|\Delta_{c_1c_2...c_k}| = r_k \to 0, for\ k \to \infty$;

3.$\Delta_{c_1c_2...c_k} \subset \Delta_{c_1c_2...c_k0} \bigcup \Delta_{c_1c_2...c_k1}$,

$\Delta'_{c_1c_2\ldots c_k} = \Delta'_{c_1c_2\ldots c_k0} \bigcup \Delta'_{c_1c_2\ldots c_k1};$

4. $\inf \Delta_{c_1c_2\ldots c_k} = \inf \Delta_{c_1c_2\ldots c_k0} < \inf \Delta_{c_1c_2\ldots c_k1},$

$\sup \Delta_{c_1c_2\ldots c_k} = \sup \Delta_{c_1c_2\ldots c_k1} > \sup \Delta_{c_1c_2\ldots c_k0};$

5. $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \Delta_{c_1c_2\ldots c_k} = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \Delta'_{c_1c_2\ldots c_k} \equiv \Delta_{c_1c_2\ldots c_k\ldots} = x \subset [0, r]\,;$

6. $\dfrac{|\Delta_{c_1c_2\ldots c_kc}|}{|\Delta_{c_1c_2\ldots c_k}|} = \dfrac{r_{k+1}}{r_{k+1}+u_{k+1}} = \dfrac{1}{\delta_{k+1}+1}$, *де* $\delta_{k+1} = \dfrac{u_{k+1}}{r_{k+1}};$

7. $\Delta_{c_1c_2\ldots c_k} = \Delta_{s_1s_2\ldots s_k} \leftrightarrow c_i = s_i, i = \overline{1,k};$

8. $O^{k+1}_{c_1\ldots c_k}(1,0) = \Delta_{c_1c_2\ldots c_k1} \bigcap \Delta_{c_1c_2\ldots c_k0} =$

$$= \begin{cases} \left[\sum\limits_{n=1}^{k} c_n u_n + u_{n+1}, \sum\limits_{n=1}^{k} c_n u_n + r_{n+1}\right], \text{ якщо } k \text{ -парне,} \\ \varnothing, \text{ якщо } k \text{ -непарне;} \end{cases}$$

9. Для довільного парного номера k справедливим є твердження

$\Delta_{c_1c_2\ldots c_k1} \bigcap \Delta_{c_1c_2\ldots c_k0} = \Delta_{c_1c_2\ldots c_k10} \bigcap \Delta_{c_1c_2\ldots c_k01};$

10. $G^{k+1}_{c_1\ldots c_k}(1,0) = \Delta_{c_1c_2\ldots c_k} \setminus \left(\Delta_{c_1c_2\ldots c_k1} \bigcup \Delta_{c_1c_2\ldots c_k0}\right) =$

$$= \begin{cases} \left(\sum\limits_{n=1}^{k} c_n u_n + r_{n+1}, \sum\limits_{n=1}^{k} c_n u_n + u_{n+1}\right), \text{ якщо } k\text{-непарне,} \\ \varnothing, \text{ якщо } k\text{-парне;} \end{cases}$$

11. Для довільного натурального $k > 2$ справедливе твердження

$G^{k+2}_{c_1\ldots c_k}(01,00) \bigcap G^{k+2}_{c_1\ldots c_k}(10,11) = \varnothing;$

12. Для довільного натурального $k > 2$ справедливе твердження

$\left(G^{k+2}_{c_1\ldots c_k}(01,00) \bigcup G^{k+2}_{c_1\ldots c_k}(10,11)\right) \bigcap O^{k+1}_{c_1\ldots c_k}(1,0) = \varnothing.$

Поведінка циліндрів 1-ого та 2-ого рангу відрізняється від поведінки циліндрів наступних рангів. Це спричинено тим, що $u_1 < u_2$, проте для $n \geqslant 2$ виконується нерівність $u_n > u_{n+1}$. Враховуючи властивості циліндричних множин, їх взаєморозміщення можна проілюструвати наступним чином:

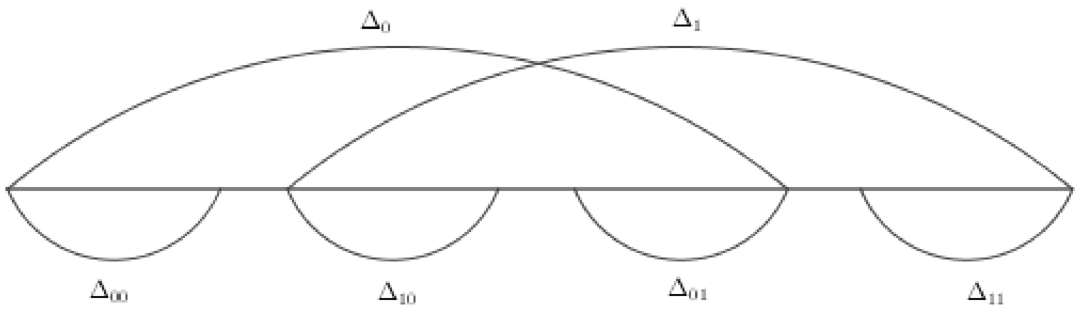

Рис. 3.1. Циліндричні відрізки 1-ого та 2-ого рангу

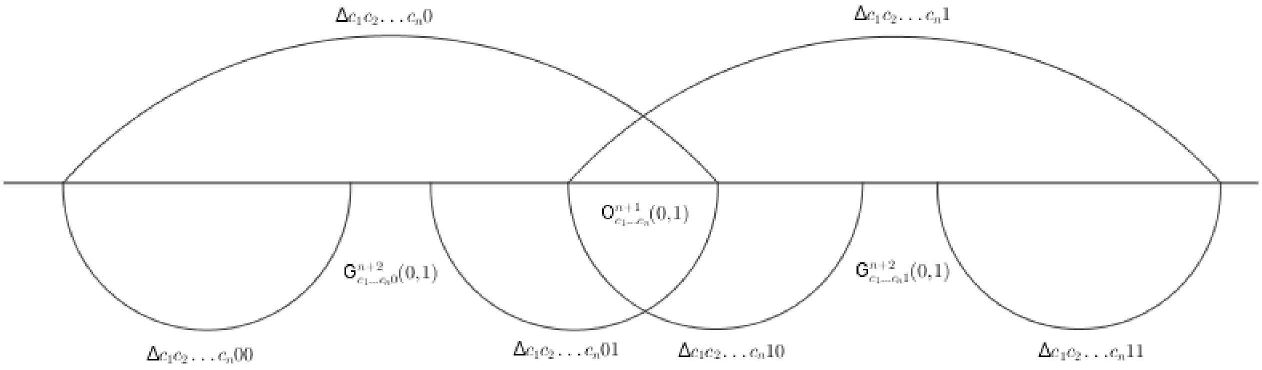

Рис. 3.2. Циліндричні відрізки вищих рангів

Лема 3.6. *Для довільного непарного n справедливі наступні твердження*

$$O^n_{c_1\ldots c_{n-1}}(0,1) = \Delta_{c_1\ldots c_{n-1}0\underbrace{1\ldots1}_{m}} \bigcap \Delta_{c_1\ldots c_{n-1}1\underbrace{0\ldots0}_{m}}, \ \textit{при } m < n-2,$$

$$O^n_{c_1\ldots c_{n-1}}(0,1) \neq \Delta_{c_1\ldots c_{n-1}0\underbrace{1\ldots1}_{m}} \bigcap \Delta_{c_1\ldots c_{n-1}1\underbrace{0\ldots0}_{m}}, \ \textit{при } m > n.$$

Доведення. Використовуючи лему 3.4 та властивості циліндричних відрізків можна легко показати, що при $m = n-2$ $(m < n-2)$

$$\max \Delta_{c_1\ldots c_{n-1}1\underbrace{0\ldots0}_{n-2}} > \max O^n_{c_1\ldots c_{n-1}}(0,1),$$

$$\min \Delta_{c_1\ldots c_{n-1}0\underbrace{1\ldots1}_{n-2}} < \min O^n_{c_1\ldots c_{n-1}}(0,1).$$

З іншого боку, враховуючи лему 3.3, при $m = n$ $(m > n)$ справедливі наступні нерівності

$$\max \Delta_{c_1 \ldots c_{n-1} 1 \underbrace{0 \ldots 0}_{n}} < \max O^n_{c_1 \ldots c_{n-1}}(0,1),$$

$$\min \Delta_{c_1 \ldots c_{n-1} 0 \underbrace{1 \ldots 1}_{n}} > \min O^n_{c_1 \ldots c_{n-1}}(0,1),$$

що рівносильно твердженню теореми. □

Лема 3.7. *Для довільного не порожнього* $O^{n+1}_{c_1 \ldots c_n}(0,1)$ *існує натуральне* m *та* $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_m$, *де* $\alpha_i \in \{0,1\}$, $\beta_i \in \{0,1\}$, $i = \overline{1,m}$ *такі, що*

$$G^{n+m+1}_{c_1 \ldots c_n 1 \alpha_1 \ldots \alpha_m}(0,1) \bigcap G^{n+m+1}_{c_1 \ldots c_n 0 \beta_1 \ldots \beta_m}(0,1) \in O^{n+1}_{c_1 \ldots c_n}(0,1).$$

Доведення. Покажемо, що існує такий натуральний номер m і такі числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1 \ldots, \beta_m$, де $\alpha_i \in \{0,1\}$ та $\beta_i \in \{0,1\}$, $i = \overline{1,m}$, що буде виконуватися нерівність

$$\min G^{n+m+1}_{c_1 \ldots c_n 0 \beta_1 \ldots \beta_m} < \min G^{n+m+1}_{c_1 \ldots c_n 1 \alpha_1 \ldots \alpha_m} < \max G^{n+m+1}_{c_1 \ldots c_n 0 \beta_1 \ldots \beta_m},$$

$$0 < u_{n+1} + \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i - \beta_i) u_{n+1+i} < u_{n+m+2} - r_{n+m+2}.$$

Врахувавши, що $u_{n+1} < r_{n+1}$ можна зробити висновок про існування такого номера $\widetilde{m}$ $(\widetilde{m} > n+1)$ для якого

$$u_{n+1} - u_{n+2} - u_{n+3} - \cdots - u_{n+\widetilde{m}} < 0.$$

В свою чергу $u_{n+m+2} - r_{n+m+2} > 0$, звідки слідує, що існуть числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, $\beta_1 \ldots, \beta_m$, де $\alpha_i \in \{0,1\}$ та $\beta_i \in \{0,1\}$, $i = \overline{1,m}$ для яких має місце нерівність

$$0 < u_{n+1} + \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i - \beta_i) u_{n+1+i} < u_{n+m+2} - r_{n+m+2}.$$

□

Наслідок 3.2. *(**Леми 5, 6**) Будь-який перетин циліндрів непарного рангу не може повністю належати множині неповних сум ряду.*

Теорема 3.7. *Множина неповних сум ряду обернених чисел Якобсталя-Люка є:*

1. *досконалою;*
2. *ніде не щільною;*
3. *додатної міри Лебега.*

Доведення. Легко довести, що множина всіх неповних сум довільного збіжного ряду є досконалою (замкненою, без ізольованих точок).

Позначимо через G суму довжин всіх щілин виду $G^{n+1}_{c_1 \ldots c_n}(0, 1)$, які утворюються між циліндрами парних рангів. Таким чином, міра Лебега множини неповних сум ряду не менше деякого числа

$$L(\Delta') \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} u_n - G.$$

Використовуючи властивості 10, 11, 12 циліндричних множин, можна записати наступне

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n - G = \sum_{n=1}^{\infty} u_n - 3[u_1 - r_2] - 8[u_4 - r_4] - \ldots - 2 \cdot 4^{n-1}[u_{2n} - r_{2n}] - \ldots =$$

$$= 4u_3 - 4u_4 + 12u_5 - 20u_6 + 44u_7 - \ldots + u_{n+2}[2^2 - 2^3 + 2^4 - \ldots + (-2)^{n+1}] + \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(u_{2n+1} \cdot \frac{4 + 2^{2n+1}}{3} + u_{2n+2} \cdot \frac{4 - 2^{2n+2}}{3} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Далі покажемо, що $A_n > 0$ для всіх $n \in N$. Дійсно, враховуючи (3.6) можна записати

$$A_n = \frac{4 + 2^{2n+1}}{3\,(2^{2n} + 1)} + \frac{4 - 2^{2n+2}}{3\,(2^{2n+1} - 1)} =$$

$$= \frac{(4 + 2^{2n+1})(2^{2n+1} - 1) + (4 - 2^{2n+2})(2^{2n} + 1)}{3(2^{2n} + 1)(2^{2n+1} - 1)} =$$

$$= \frac{4 \cdot 2^{2n+1} - 4 + 2^{4n+2} - 2^{2n+1} + 4 \cdot 2^{2n} + 4 - 2^{4n+2} - 2^{2n+2}}{3(2^{2n} + 1)(2^{2n+1} - 1)} =$$

$$= \frac{2^{2n+1}}{(2^{2n} + 1)(2^{2n+1} - 1)} > 0.$$

Використовуючи наближені обчислення можна встановити, що міра Лебега множини неповних сум ряду (3.5) не перевищує деякого додатнього числа

$$L(\Delta') > \sum_{n=1}^{100} \frac{2^{2n+1}}{(2^{2n}+1)(2^{2n+1}-1)} \approx 0,3099984859... > 0.$$

Далі доведемо ніде не щільність множини неповних сум. Припустимо, що існує деякий відрізок $[a, b] \subset \Delta'$. Очевидно, що можна підібрати такі $c_1, c_2, \ldots, c_k$, що

$$a < \sum_{n=1}^{k} c_n u_n < b, \quad \max\{u_k, r_k\} < b - \sum_{n=1}^{k} c_n u_n.$$

Таким чином, існуватиме деякий циліндричний відрізок $\Delta_{c_1 \ldots c_k}$, що належить $[a, b]$.

Якщо $k-$ непарне, то з властивостей циліндричних множин випливає, що $G^{k+1}_{c_1 \ldots c_k}(0, 1) \subset \Delta_{c_1 \ldots c_k} \subset [a, b]$. Таким чином всередині $\Delta_{c_1 \ldots c_k}$ існує деякий відрізок $G^{k+1}_{c_1 \ldots c_k}(0, 1)$, який не належить множині неповних сум (відрізку $[a, b]$).

Якщо $k-$ парне, то з властивостей циліндричних множин випливає, що $O^{k+1}_{c_1 \ldots c_k}(0, 1) \subset \Delta_{c_1 \ldots c_k} \subset [a, b]$. Згідно з лемами 4 та 5 перетин $O^{k+1}_{c_1 \ldots c_k}(0, 1)$ не може повністю міститися в множині неповних сум (відрізку $[a, b]$). Приходимо до суперечності. □

3.3. J-представлення дійсних чисел

Цікавим є питання про можливість представлення дійсних чисел за допомогою послідовності Якобсталя-Люка. Часто числа з деякого проміжку представляють неповними сумами (підсумами) ряду, члени якого володіють певною умовою однорідності. Проте представити числа з деякого проміжку за допомогою неповних сум ряду (3.5) не можливо, бо множина усіх неповних сум ряду є ніде не щільною.

Теорема 3.8. *Для довільного дійсного числа* x *з відрізка* $[0, S]$, *де* $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2u_{n+2}$, *існує послідовність* $(\alpha_n), \alpha_n \in \{0,1,2\}$ *така, що*

$$x = \Delta^J_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_n...} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_{n+2}. \tag{3.9}$$

Доведення. Очевидно, що множина всіх чисел x, для яких має місце рівність (3.9), співпадає з множиною неповних сум ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \frac{1}{J_3} + \frac{1}{J_3} + \frac{1}{J_4} + \frac{1}{J_4} + \frac{1}{J_5} + \frac{1}{J_5} + ... + \frac{1}{J_{n+2}} + \frac{1}{J_{n+2}} + ... \tag{3.10}$$

Загальний член ряду (3.10) можна виразити як

$$w_n = \begin{cases} u_{n+2} = \dfrac{1}{J_{\frac{n+1}{2}+2}}, \text{ якщо } n - \text{непарне,} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{J_{\frac{n}{2}+2}}, \text{ якщо } n - \text{парне.} \end{cases}$$

Таким чином, для непарних n матиме місце рівність членів ряду $w_n = w_{n+1}$. Оскільки, $w_n < \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} w_k$ для довільного n, то з [71] відомо, що множина неповних сум ряду (3.10) являє собою відрізок. Отже, множина чисел x, які можна представити у вигляді (3.9), співпадає з відрізком $[0, S]$.

□

Подання числа $x \in [0, S]$ у вигляді суми (3.9) будемо називатимемо $J-$*представленням* ($J-$*розкладом*) цього числа. Символічно будемо його записувати як $\Delta^J_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}$ і називатимемо $J-$*зображенням* дійсного числа x. При цьому α_k називатимемо $k-$*ою цифрою* $J-$зображення числа.

Наслідок 3.3. *Для довільного дійсного числа* $x \in [0, S]$ *існує* $L \subseteq N$ *таке, що має місце розклад*

$$x = \triangle^w_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_n...} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n w_n = \frac{\alpha_1}{J_3} + \frac{\alpha_2}{J_3} + \frac{\alpha_3}{J_4} + \frac{\alpha_4}{J_4} + \cdots + \frac{\alpha_n}{J_{\frac{n+1}{2}+2}} + \frac{\alpha_{n+1}}{J_{\frac{n}{2}+2}} + \ldots, \tag{3.11}$$

де

$$\alpha_n = \begin{cases} 1, & \text{при } k \in L, \\ 0, & \text{при } k \in N \backslash L. \end{cases}$$

Алгоритм представлення дійсного числа x у вигляді (3.11) можна задати наступним чином: Нехай $x \in [0, S]$. Якщо $x = S$, то $L = N$ і теорему доведено.

Якщо $0 < x < S$, то очевидно, що існує $k_1 \in N$ таке, що

$$\frac{1}{J_{k_1}} \leqslant x < \frac{1}{J_{k_1 - 1}}$$

і буде виконуватися нерівність

$$0 \leqslant x - \frac{1}{J_{k_1}} = x_1 < \frac{1}{J_{k_1 - 1}} - \frac{1}{J_{k_1}}.$$

Звідки отримаємо, що

$$x = \frac{1}{J_{k_1}} + x_1, \tag{3.12}$$

де $x_1 \in \left[0, \frac{1}{J_{k_1-1}} - \frac{1}{J_{k_1}}\right)$. У випадку $x_1 = 0$ матимемо, що $x = \frac{1}{J_{k_1}}$ і рівність (3.11) доведена. Якщо $x_1 > 0$, то існує $k_2 \in N$ таке, що

$$\frac{1}{J_{k_2}} \leqslant x_1 < \frac{1}{J_{k_2 - 1}},$$

причому, $k_2 > k_1$ (послідовність $(\frac{1}{J_n})$ є спадною). Таким чином,

$$0 \leqslant x_1 - \frac{1}{J_{k_2}} = x_2 < \frac{1}{J_{k_2 - 1}} - \frac{1}{J_{k_2}}.$$

Матимемо, що $x_1 = \frac{1}{J_{k_2}} + x_2$, де $x_2 \in \left[0, \frac{1}{J_{k_2-1}} - \frac{1}{J_{k_2}}\right)$.

Підставивши x_1 у рівність (3.12) отримаємо наступну тотожність

$$x = \frac{1}{J_{k_1}} + \frac{1}{J_{k_2}} + x_2.$$

Якщо $x_2 = 0$, то $x = \frac{1}{J_{k_1}} + \frac{1}{J_{k_2}}$. Якщо ж $x_2 > 0$, то існує $k_3 > k_2, k_3 \in N$ таке, що

$$\frac{1}{J_{k_3}} \leqslant x < \frac{1}{J_{k_3 - 1}}.$$

Здійснюючи аналогічні міркування, можна знайти $x_3, x_4, x_5 ....$

Якщо на деякому $n-$ому кроці

$$x_n = x_{n-1} - \frac{1}{J_{k_n}} = 0,$$

то розклад (3.11) знайдено:

$$x = \frac{1}{J_{k_1}} + \frac{1}{J_{k_2}} + ... + \frac{1}{J_{k_n}}.$$

Якщо ж такого скінченного n не знайдеться, то

$$0 < x_n = x_{n-1} - \frac{1}{J_{k_n}} < \frac{1}{J_{k_n - 1}} - \frac{1}{J_{k_n}}$$

та існує $k_{n+1} > k_n, k_{n+1} \in N$ таке, що

$$\frac{1}{J_{k_{n+1}}} \leqslant x_n < \frac{1}{J_{k_{n+1}-1}}.$$

Звідки матимемо, що

$$0 \leqslant x_n - \frac{1}{J_{k_{n+1}}} = x_{n+1} < \frac{1}{J_{k_{n+1}-1}} - \frac{1}{J_{k_{n+1}}}$$

і

$$x = \frac{1}{J_{k_1}} + \frac{1}{J_{k_2}} + ... + \frac{1}{J_{k_{n+1}}} + x_{n+1}.$$

Враховуючи, що

$$\frac{1}{J_{k_{n+1}-1}} - \frac{1}{J_{k_{n+1}}} \to 0,$$

а отже, $x_{n+1} \to 0$ (при $n \to \infty$) і розклад (3.11) буде існувати (нескінченний).

Зв'язок між цифрами представлення (3.9) та (3.11) встановлюється як

$$\Delta^w_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4...\alpha_n...} = \Delta^J_{(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_3+\alpha_4)...(\alpha_n+\alpha_{n+1})...}.$$

Означення 3.2. Циліндром k-ого рангу з основою $c_1c_2\dots c_k$, де $c_i \in \{0,1,2\}$, називається множина $\Delta'_{c_1c_2...c_k}$, яка містить всі неповні суми ряду (3.5) виду

$$\sum_{n=1}^{k} c_n u_n + \sum_{n=k+1}^{\infty} \varepsilon_n u_n, \text{ де } \ \varepsilon_n \in \{0,1,2\}\,.$$

Означення 3.3. Циліндричним відрізком рангу k з основою $c_1c_2\ldots c_k$ називається відрізок

$$\Delta_{c_1c_2\ldots c_k} = \left[\inf \Delta'_{c_1c_2\ldots c_k}, \sup \Delta'_{c_1c_2\ldots c_k}\right].$$

В залежності від (u_n) і набору $c_1c_2\ldots c_k$ можливі випадки, коли $\Delta'_{c_1c_2\ldots c_k}$ і $\Delta_{c_1c_2\ldots c_k}$ співпадають та не співпадають, але завжди $\Delta'_{c_1c_2\ldots c_k} \subset \Delta_{c_1c_2\ldots c_k}$. Безпосередньо з означення слідує, що циліндричний відрізок має наступний вигляд:

$$\Delta^J_{c_1c_2\ldots c_k} = \left[\sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{J_{n+2}}, \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{J_{n+2}} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{2}{J_{i+2}}\right].$$

Лема 3.8. *Циліндричні множини, що відповідають J-зображенню мають наступні властивості:*

1. $\left|\Delta^J_{c_1c_2\ldots c_k}\right| = \displaystyle\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{2}{J_{i+2}} \to 0,$ *при* $k \to \infty$;

2.$\Delta^J_{c_1c_2\ldots c_k} \supset \Delta^J_{c_1c_2\ldots c_k0} \bigcup \Delta^J_{c_1c_2\ldots c_k1} \bigcup \Delta^J_{c_1c_2\ldots c_k2}$,
$\Delta^{J'}_{c_1c_2\ldots c_k} = \Delta^{J'}_{c_1c_2\ldots c_k0} \bigcup \Delta^{J'}_{c_1c_2\ldots c_k1} \bigcup \Delta^{J'}_{c_1c_2\ldots c_k2}$;

3. $\inf \Delta^J_{c_1c_2\ldots c_k} = \inf \Delta^J_{c_1c_2\ldots c_k0} < \inf \Delta^J_{c_1c_2\ldots c_k1} < \inf \Delta^J_{c_1c_2\ldots c_k2}$,
$\sup \Delta^J_{c_1c_2\ldots c_k} = \sup \Delta^J_{c_1c_2\ldots c_k2} > \sup \Delta^J_{c_1c_2\ldots c_k1} > \sup \Delta^J_{c_1c_2\ldots c_k0}$;

4. $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta^J_{c_1c_2\ldots c_k} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta^{J'}_{c_1c_2\ldots c_k} \equiv \Delta^J_{c_1c_2\ldots c_k\ldots} = x \subset \left[0, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{J_{i+2}}\right]$;

5.$\dfrac{\left|\Delta^J_{c_1c_2\ldots c_kc}\right|}{\left|\Delta^J_{c_1c_2\ldots c_k}\right|} = \dfrac{2r_{k+3}}{2r_{k+3} + 2u_{k+3}} = \dfrac{1}{1+\delta_{k+3}}$, *де* $\delta_k = \dfrac{u_k}{r_k}$;

6. $\Delta^J_{c_1\ldots c_k0} \bigcap \Delta^J_{c_1\ldots c_k1} \neq \varnothing, \ \Delta^J_{c_1\ldots c_k1} \bigcap \Delta^J_{c_1\ldots c_k2} \neq \varnothing$;

7. $\Delta^J_{c_1\ldots c_k0} \bigcap \Delta^J_{c_1\ldots c_k2} \neq \varnothing, \ \left(\Delta^J_{c_1\ldots c_k0} \bigcap \Delta^J_{c_1\ldots c_k2}\right) \subset \Delta^J_{c_1\ldots c_k1}$;

8. $\Delta^J_{c_1\ldots c_{2k}0} \bigcap \Delta^J_{c_1\ldots c_{2k}2} \neq \varnothing$;

9. $\Delta^J_{c_1\ldots c_{2k-1}0} \bigcap \Delta^J_{c_1\ldots c_{2k-1}2} = \varnothing$;

Враховуючи описані вище властивості циліндричних відрізків, що породжені J-представленням дійсних чисел, їх взаєморозміщення можна проілюструвати наступним чином:

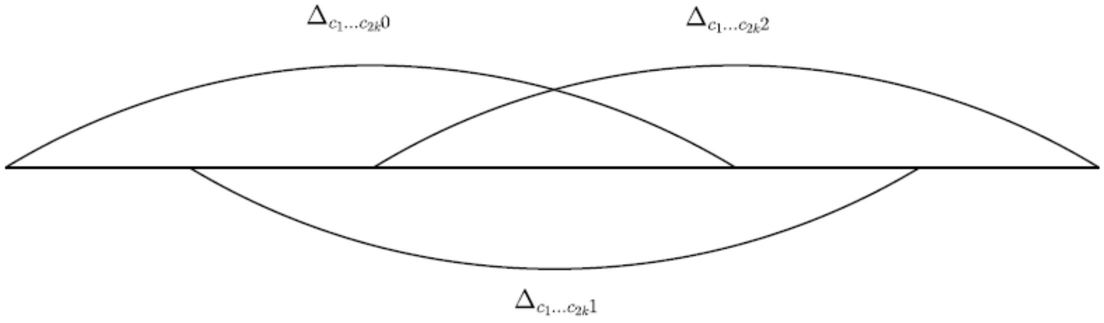

Рис. 3.3. Поведінка циліндричних відрізків непарного рангу

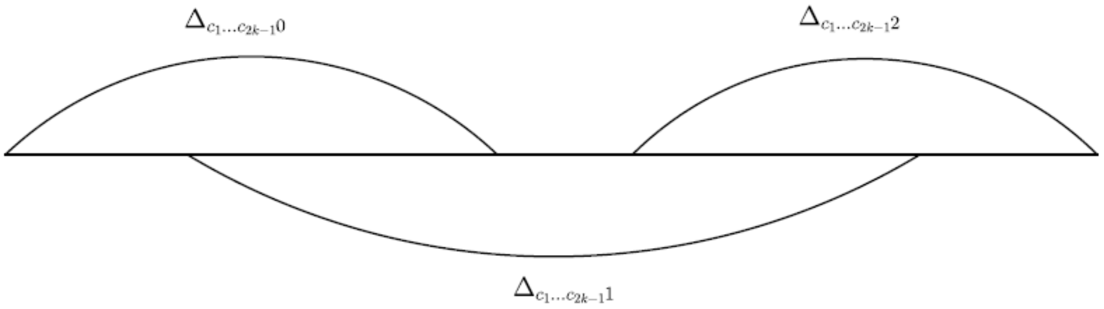

Рис. 3.4. Поведінка циліндричних відрізків парного рангу

Очевидно, що кінці відрізку $[0, S]$ мають єдине $J-$представлення, які мають вигляд $0 = \Delta^J_{00\ldots0\ldots}$ та $S = \Delta^J_{11\ldots1\ldots}$. В різних системах представлення числа можуть мати скінченну, зліченну або континуальну кількість різних зображень.

Теорема 3.9. *Кожне дійсне число x з інтервалу $(0, S)$ має континуальну кількість різних J-представлень.*

Доведення. Нехай $x \in (0, S)$. Очевидно, існує набір чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2k}$, $\alpha_i \in \{0, 1, 2\}, i = \overline{1, 2k}$ такий, що

$$\sum_{i=1}^{2k} \alpha_i a_i + a_{2k+1} \leqslant x \leqslant \sum_{i=1}^{2k} \alpha_i a_i + a_{2k+1} + 2r_{2k+1}.$$

Іншими словами, існує циліндричний відрізок непарного рангу $\Delta^J_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_{2k}1}$, який містить x. Згідно з лемою 3.8 (властивість 6, 7) $x \in \Delta^J_{c_1\ldots c_{2k}0} \bigcap \Delta^J_{c_1\ldots c_{2k}1}$ або $x \in \Delta^J_{c_1\ldots c_{2k}1} \bigcap \Delta^J_{c_1\ldots c_{2k}2}$. Без втрати загальності будемо вважати, що $x \in \Delta^J_{c_1\ldots c_{2k}0} \bigcap \Delta^J_{c_1\ldots c_{2k}1}$. Таким чином, існуватиме принайні два різних $J-$ представлення числа x.

В свою чергу існуватиме послідовність чисел $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{2m-1}$, $\beta_i \in \{0, 1, 2\}$, $i = \overline{1, 2m-1}$ така, що

$$\sum_{i=1}^{2k} \alpha_i a_i + a_{2k+1} + \sum_{i=1}^{2m-1} \beta_i a_{2k+1+i} + a_{2k+2m+1} \leqslant x,$$

$$x \leqslant \sum_{i=1}^{2k} \alpha_i a_i + a_{2k+1} + 2r_{2k+1} + \sum_{i=1}^{2m-1} \beta_i a_{2k+1+i} + a_{2k+2m+1} + 2r_{2k+2m+1}.$$

Всередині циліндра $\Delta^J_{c_1\ldots c_{2k}1}$ існує циліндр непарного рангу $\Delta^J_{c_1\ldots c_{2k}0\beta_1\ldots\beta_{2m-1}1}$, який містить x. За лемою 3.8 $x \in \Delta^J_{c_1\ldots c_{2k}0\beta_1\ldots\beta_{2m-1}0} \bigcap \Delta^J_{c_1\ldots c_{2k}0\beta_1\ldots\beta_{2m-1}1}$ або $x \in \Delta^J_{c_1\ldots c_{2k}0\beta_1\ldots\beta_{2m-1}1} \bigcap \Delta^J_{c_1\ldots c_{2k}0\beta_1\ldots\beta_{2m-1}2}$.Таким чином, існуватиме принайні 2^2 різних $J-$представлення числа x.

Повторюючи вищезгадану процедуру n разів приходимо до висновку, що існує 2^n циліндричних відрізків з різними основами, які містять x. Як наслідок, x матиме 2^n різних $J-$представлень. □

3.4. Множин чисел з обмеженнями на вживання символів

Кожна система представлення дійсних чисел має свою геометрію та властивості, що породжують складні математичні об'єкти. $J-$представлення можна використати для конструювання множин, які володіють цікавими і нетривіальними властивостями.

Теорема 3.10. *Множина усіх чисел з відрізка* $[0, S]$, *$J-$зображення яких має вигляд* $\Delta_{\alpha_1\alpha_1\alpha_2\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha_n\ldots}$, *де* $\alpha_n \in \{0, 1\}$, *є множиною:*

1. *досконалою;*

2. *ніде не щільною;*
3. *нульової міри Лебега;*
4. *розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої рівна* $\frac{1}{2}$.

Доведення. Числа $J-$зображення яких має вигляд $\Delta_{\alpha_1\alpha_1\alpha_2\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha_n\ldots}$, де $\alpha_n \in \{0,1\}$, можна записати як

$$x = \alpha_1\left(\frac{1}{J_3}+\frac{1}{J_4}\right)+\alpha_2\left(\frac{1}{J_5}+\frac{1}{J_6}\right)+\cdots+\alpha_n\left(\frac{1}{J_{2n+1}}+\frac{1}{J_{2n+2}}\right)+\ldots,$$

Приходимо до висновку, що множина таких чисел співпадає з множиною неповних сум підряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n+1}+u_{2n+2}) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{J_{2n+1}}+\frac{1}{J_{2n+2}}\right). \qquad (3.13)$$

Оскільки, $u_k > \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} u_n$ для парних номерів k, то $v_k > \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} v_n$ для довільних k. З [71] відомо, що множина неповних сум такого ряду є замкненою, ніде не щільною множиною. Крім того, вона є підмножиною множини неповних сум ряду (3.5). Залишається відкритим питання про міру Лебега (розмірність Гаусдорфа-Безиковича) множини неповних сум підряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$.

Використовуючи рівність (3.2), можна записати наступне

$$v_n = u_{2n+1}+u_{2n+2} = \frac{1}{2^{2n}+1}+\frac{1}{2^{2n+1}-1} = \frac{2^{2n}+2^{2n+1}}{(2^{2n}+1)(2^{2n+1}-1)}.$$

Міру Лебега множини неповних сум можна обчислити за формулою

$$\lambda(\Delta'_v) = \lim_{n\to\infty} 2^n r_n^v,$$

де $r_n^v = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} v_k$. Враховуючи, що $r_n^v = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} v_k = \sum\limits_{k=2n+3}^{\infty} u_k = r_{2n+2} < \frac{1}{2^{2n+1}}$ (лема 3.8) справедливо записати наступне

$$\lambda(\Delta'_v) < \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^{2n+1}} = 0.$$

Таким чином, приходимо до висновку про нульмірність за Лебегом множини неповних сум ряду (3.16). Знайдемо розмірність Гаусдорфа - Безиковича множини. Відомо, що

$$H^{\alpha}(E) = \lim_{k\to\infty} 2^k (r_k^v)^{\alpha} = \lim_{k\to\infty} 2^k (r_{2k+2})^{\alpha} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} (2r_{2k+2}^{\frac{\alpha}{k}})^k = \begin{cases} 0, \text{ якщо } 2r_{2k+2}^{\frac{\alpha}{k}} < 1, \\ 1, \text{ якщо } 2r_{2k+2}^{\frac{\alpha}{k}} = 1, \\ \infty, \text{ якщо } 2r_{2k+2}^{\frac{\alpha}{k}} > 1. \end{cases}$$

Розглянемо випадок $2r_{2k+2}^{\frac{\alpha}{k}} = 1$. Матимемо

$$\alpha(k) = \frac{-k\ln 2}{\ln r_{2k+2}}.$$

Оскільки, в останній рівності маємо залежність від k, то зрозуміло, що

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} \alpha(k) = \lim_{k\to\infty} \frac{-k\ln 2}{\ln r_{2k+2}}.$$

Згідно з лемою 3.8

$$\frac{1}{2^{2k+2}+1} + \frac{1}{2^{2k+2}} < r_{2k+2} < \frac{1}{2^{2k+1}},$$

звідки правильними є наступні нерівності

$$\ln\left(\frac{1}{2^{2k+2}}\right) < \ln r_{2k+2} < \ln\left(\frac{1}{2^{2k+1}}\right),$$

$$\frac{\ln 2}{\ln\left(\frac{1}{2^{2k+1}}\right)} < \frac{\ln 2}{\ln r_{2k+2}} < \frac{\ln 2}{\ln\left(\frac{1}{2^{2k+2}}\right)},$$

$$\frac{-k\cdot\ln 2}{\ln\left(\frac{1}{2^{2k+2}}\right)} < \frac{-k\cdot\ln 2}{\ln r_{2k+2}} < \frac{-k\cdot\ln 2}{\ln\left(\frac{1}{2^{2k+1}}\right)},$$

$$\frac{-k\cdot\ln 2}{-(2k+1)\ln 2} < \frac{-k\cdot\ln 2}{\ln r_{2k+2}} < \frac{-k\cdot\ln 2}{-(2k+2)\ln 2}.$$

Обчислимо границі лівої та правої частини нерівності. Матимемо

$$\lim_{k\to\infty} \frac{-k\cdot\ln 2}{-(2k+1)\ln 2} = \frac{1}{2} \quad \text{та} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{-k\cdot\ln 2}{-(2k+2)\ln 2} = \frac{1}{2}.$$

Тоді, за теоремою про границю проміжної послідовності, справедливою буде наступна рівність

$$\lim_{k\to\infty} \alpha(k) = \lim_{k\to\infty} \frac{-k \cdot \ln 2}{\ln r_{2k+2}} = \frac{1}{2}.$$

Отже, розмірність Гаусдорфа-Безиковича множини неповних сум ряду (3.16) і як наслідок множина тих чисел, яка фігурує в формулюванні теореми рівна $\frac{1}{2}$. $\square$

Теорема 3.11. *Множина усіх чисел з відрізка* $[0, S]$, $J-$*зображення яких має вигляд* $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}$, *де* $\alpha_n \in \{0, 1\}$ $(\alpha_n \in \{0, 2\})$, *є множиною:*

1. *досконалою;*
2. *ніде не щільною;*
3. *додатної міри Лебега.*

Доведення. Множина усіх чисел, $J-$зображення яких має вигляд $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}$, де $\alpha_n \in \{0, 1\}$, співпадає з множиною неповних сум ряду обернених чисел Якобсталя-Люка (3.5). Відомо, що така множина є досконалою, ніде не щільною, додатньої міри Лебега.

Числа, $J-$зображення яких має вигляд $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}$, де $\alpha_n \in \{0, 2\}$, співпадає з множиною неповних сум ряду

$$x = \frac{2}{J_3} + \frac{2}{J_4} + \frac{2}{J_5} + \cdots + \frac{2}{J_{n+2}} + \ldots,$$

Така множина за своїми тополого-метричними властивостями є подібною (утворюється розтягом) до множини неповних сум ряду (3.5). $\square$

Теорема 3.12. *Множина усіх чисел з відрізка* $[0, S]$, $J-$*зображення яких має вигляд* $\Delta_{\alpha_1 0\alpha_2 0\alpha_3\ldots 0\alpha_n 0\ldots}$, *де* $\alpha_n \in \{0, 1\}$ $(\alpha_n \in \{0, 2\})$, *є множиною:*

1. *досконалою;*
2. *ніде не щільною;*
3. *нульової міри Лебега;*
4. *розмірності Гаусдорфа-Безиковича рівній* $\frac{1}{2}$.

3.5. Канонічне $J-$зображення числа

В попередніх розділах встановлено, що кожне дійсне число з інтервала $(0, S)$ має континуальну кількість різних $J-$представлень. Виникає питання: "Які обмеження досить накласти на вживання символів алфавіту, щоб кожне дійсне число з відрізка $[0, S]$ мало єдине $J-$представлення ?"

Означення 3.4. $J-$представлення $\Delta^J_{f_1(x)f_2(x)\ldots f_n(x)\ldots}$ називається *канонічним*, якщо

$$f_1(x) = \begin{cases} 2, & \text{якщо} \quad 2u_3 \leqslant x, \\ 1, & \text{якщо} \quad u_3 \leqslant x < 2u_3, \\ 0, & \text{якщо} \quad u_3 > x, \end{cases}$$

$$f_i(x) = \begin{cases} 2, & \text{якщо} \quad \sum\limits_{n=1}^{i-1} f_n(x)u_{n+2} + 2u_{i+2} \leqslant x, \\ 1, & \text{якщо} \quad \sum\limits_{n=1}^{i-1} f_n(x)u_{n+2} + u_{i+2} \leqslant x < \sum\limits_{n=1}^{i-1} f_n(x)u_{n+2} + 2u_{i+2}, \\ 0, & \text{якщо} \quad \sum\limits_{n=1}^{i-1} f_n(x)u_{n+2} + u_{i+2} > x, \end{cases}$$

$2 \leqslant i, i \in N.$

Кожна точка x з відрізка $[0, S]$ має єдиний канонічний $J-$розклад, що безпосередньо випливає з його означення (алгоритму представлення). Символічно канонічне зображення будемо позначати $x = \Delta^{J*}_{f_1(x)f_2(x)\ldots f_k(x)\ldots}$.

Теорема 3.13. *Якщо* $\Delta^{J*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ *— канонічне зображення деякого числа* x *з відрізка* $[0, S]$, *то для довільного натурального* k*:*

1. $\alpha_{2k-1}\alpha_{2k} \neq 02$*,*
2. $021 \neq \alpha_{2k}\alpha_{2k+1}\alpha_{2k+2} \neq 022$*,*
3. $\alpha_{2k-1}\alpha_{2k}\alpha_{2k+1}\alpha_{2k+2}\ldots\alpha_{4k-2} \neq 0\beta_1\beta_2\beta_3\ldots\beta_{2k-1}$, $\beta_i \in \{1, 2\}$, $i = \overline{1, 2k-1}$.

Необхідні умови канонічності, які фігурують в теоремі, безпосередньо випливають з нерівностей (див. Лему 3.4), що виконуються для ряду (3.5)

$$u_{2k-1} < 2u_{2k},\ u_{2k} < 2u_{2k+1} + u_{2k+2},\ u_{2k-1} < u_{2k} + u_{2k+1} + \cdots + u_{4k-2}.$$

Для порівняння двох дійсних чисел a та b з відрізка $[0, S]$, які задані своїми канонічними $J-$розкладами, досить порівняти їх перші не співпадаючі символи зображення. Більше того, числа a та b будуть рівними тоді і тільки тоді, коли їх відповідні $J-$символи співпадатимуть.

Варто зауважити, що якщо $J-$зображення деякого числа має період (0), то воно є раціональним. Якщо ж зображення числа має період (1) або (2), то воно є ірраціональним, що беспосередньо випливає з ірраціональності сум виду $\sum\limits_{n=m}^{\infty} J_n^{-1}$, де m – довільне натуральне число (детальніше див. [30]).

Враховуючи Лему 3.8 та означення канонічного розкладу, можна встановити наступні базові властивості циліндричних відрізків, що відповідають канонічному $J-$представленню:

1. $\Delta^{J*}_{c_1 \ldots c_n 0} \bigcup \Delta^{J*}_{c_1 \ldots c_n 1} \bigcup \Delta^{J*}_{c_1 \ldots c_n 2} = \Delta^{J*}_{c_1 \ldots c_n} = \Delta^{J}_{c_1 \ldots c_n};$
2. $\Delta^{J*}_{c_1 \ldots c_n \alpha} \bigcap \Delta^{J*}_{c_1 \ldots c_n \beta} = \varnothing,$ де $\alpha, \beta \in \{0, 1, 2\}, \alpha \neq \beta;$
3. $\inf \Delta^{J*}_{c_1 c_2 \ldots c_k} = \inf \Delta^{J*}_{c_1 c_2 \ldots c_k 0} < \inf \Delta^{J*}_{c_1 c_2 \ldots c_k 1} < \inf \Delta^{J*}_{c_1 c_2 \ldots c_k 2},$
   $\sup \Delta^{J*}_{c_1 c_2 \ldots c_k} = \sup \Delta^{J*}_{c_1 c_2 \ldots c_k 2} > \sup \Delta^{J*}_{c_1 c_2 \ldots c_k 1} > \sup \Delta^{J*}_{c_1 c_2 \ldots c_k 0};$
4. $|\Delta^{J*}_{c_1 c_2 \ldots c_{k-1} 2}| = 2r_{k+2},\ |\Delta^{J*}_{c_1 c_2 \ldots c_{k-1} 0}| = |\Delta^{J*}_{c_1 c_2 \ldots c_{k-1} 1}| = u_{k+2}.$
5. $\dfrac{|\Delta^{J*}_{c_1 c_2 \ldots c_k 2}|}{\left|\Delta^{J*}_{c_1 c_2 \ldots c_{k-1} 2}\right|} = \dfrac{r_{k+3}}{r_{k+2}} = \dfrac{2r_{k+3}}{2r_{k+3} + 2u_{k+3}} = \dfrac{1}{1 + \delta_{k+3}},$ де $\delta_k = \dfrac{u_k}{r_k},$
   $\dfrac{|\Delta^{J*}_{c_1 c_2 \ldots c_k \alpha}|}{\left|\Delta^{J*}_{c_1 c_2 \ldots c_{k-1} \beta}\right|} = \dfrac{u_{k+3}}{u_{k+2}} = \dfrac{J_{k+2}}{J_{k+3}},$ де $\alpha, \beta \in \{0, 1\}.$

3.6. Деякі застосування J-представлення дійсних чисел

Розглянемо випадкову величину ξ, що задається наступним чином

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{J_k}, \tag{3.14}$$

де ξ_k — послідовність незалежних випадкових величин з розподілами: $P\{\xi_k = 0\} = p_{0k} \geqslant 0, P\{\xi_k = 1\} = p_{1k} \geqslant 0, p_{0k} + p_{1k} = 1$, а (J_n) — послідовність чисел Якобсталя-Люка.

Властивості випадкової величини ξ визначаються властивостями нескінченної стохастичної матриці $||p_{ik}||$ та властивостями членів ряду (3.5), причому не залежить від суми r ряду (вважаючи, що еквівалентні розподіли мають однакові властивості). З теореми Джессена-Вінтнера [20] випливає, що ξ має чистий розподіл (чисто дискретний, чисто абсолютно неперервний, або чисто сингулярний). Теорема Поля Леві [22] дає необхідні і достатні умови дискретності: випадкова величина ξ — дискретна тоді і тільки тоді, коли

$$M = \prod_{k=1}^{\infty} \max\{p_{0k}, p_{1k}\} > 0.$$

Розв'язання задачі про розподіл випадкової величини ξ пов'язане з дослідженням властивостей спектра (мінімального замкненого носія) розподілу. Спектр розподілу випадкової величини ξ є підмножиною множини неповних сум числового ряду (3.5).

Теорема 3.14. *Якщо*

$$\begin{cases} p_{0(2m)} \cdot p_{1(2m)} = 0, \\ p_{0(2m-1)} \cdot p_{1(2m-1)} \neq 0, \end{cases} \quad \textit{або} \quad \begin{cases} p_{0(2m)} \cdot p_{1(2m)} \neq 0, \\ p_{0(2m-1)} \cdot p_{1(2m-1)} = 0, \end{cases}$$

то випадкова величина ξ має сингулярний розподіл канторівського типу, розмірність Гаусдорфа-Безиковича спектра якого дорівнює $\frac{1}{2}$.

Доведення. Доведення проведемо для першого випадку. Якщо виконується $p_{0(2m)} \cdot p_{1(2m)} = 0$, $p_{0(2m-1)} \cdot p_{1(2m-1)} \neq 0$, то спектр випадкової величини ξ співпадає з множиною неповних сум підряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n = \frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_3} + \cdots + \frac{1}{J_{2n-1}} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1}. \tag{3.15}$$

Неважко переконатися, що $t_k > r_k^t = \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} t_n$ для довільних номерів k. Тоді згідно [71] множина неповних сум ряду (3.15) є замкненою, ніде не щільною множиною. Використовуючи рівність (3.2), можна записати наступне

$$t_n = \frac{1}{4^{n-1} + 1}.$$

Міру Лебега множини неповних сум можна обчислити за формулою

$$\lambda(\Delta_t') = \lim_{n \to \infty} 2^n r_n^t,$$

Враховуючи, що $r_n^t = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} t_k < \frac{1}{4^n} + \frac{1}{4^{n+1}} + \cdots = \frac{1}{3 \cdot 4^{n-1}} < \frac{1}{4^{n-1}}$ справедлива наступна рівність

$$\lambda(\Delta_t') < \lim_{n \to \infty} \frac{2^n}{4^{n-1}} = 0.$$

Таким чином, приходимо до висновку про нульмірність за Лебегом множини неповних сум ряду (3.15). Залишається відкритим питання про розмірність Гаусдорфа-Безиковича множини спектра. Відомо, що

$$H^{\alpha}(E) = \lim_{k \to \infty} 2^k (r_k^t)^{\alpha} = \lim_{k \to \infty} (2(r_k^t)^{\frac{\alpha}{k}})^k = \begin{cases} 0, \text{ якщо } 2(r_k^t)^{\frac{\alpha}{k}} < 1, \\ 1, \text{ якщо } 2(r_k^t)^{\frac{\alpha}{k}} = 1, \\ \infty, \text{ якщо } 2(r_k^t)^{\frac{\alpha}{k}} > 1. \end{cases}$$

Розглянемо випадок $2(r_k^t)^{\frac{\alpha}{k}} = 1$. Матимемо

$$\alpha(k) = \frac{-k \ln 2}{\ln r_k^t}.$$

Оскільки, в останній рівності маємо залежність від k, то зрозуміло, що

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} \alpha(k) = \lim_{k\to\infty} \frac{-k\ln 2}{\ln r_k^t}.$$

Справедлива нерівність

$$\frac{1}{4^{k+1}} < r_k^t < \frac{1}{4^{k-1}},$$

звідки правильними є наступне

$$\ln\left(\frac{1}{4^{k+1}}\right) < \ln r_k^t < \ln\left(\frac{1}{4^{k-1}}\right),$$

$$\frac{\ln 2}{\ln\left(\frac{1}{4^{k-1}}\right)} < \frac{\ln 2}{\ln r_k^t} < \frac{\ln 2}{\ln\left(\frac{1}{4^{k+1}}\right)},$$

$$\frac{-k\cdot\ln 2}{-(k-1)\cdot\ln 4} < \frac{-k\cdot\ln 2}{\ln r_k^t} < \frac{-k\cdot\ln 2}{-(k+1)\cdot\ln 4}.$$

Обчислимо границі лівої та правої частини нерівності. Матимемо

$$\lim_{k\to\infty} \frac{-k\cdot\ln 2}{-(k-1)\cdot\ln 4} = \frac{1}{2} \quad \text{та} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{-k\cdot\ln 2}{-(k+1)\cdot\ln 4} = \frac{1}{2}.$$

Тоді, за теоремою про границю проміжної послідовності, справедливою буде наступна рівність

$$\lim_{k\to\infty} \alpha(k) = \lim_{k\to\infty} \frac{-k\cdot\ln 2}{\ln r_k^t} = \frac{1}{2}.$$

Таким чином, розмірність Гаусдорфа-Безиковича множини неповних сум ряду (3.15) рівна $\frac{1}{2}$. □

Теорема 3.15. *Якщо пари послідовних незалежних випадкових величин* $(\xi_{2k-1}\xi_{2k})$ *набувають значення з множини* $\{(0,0),(1,1)\}$ *з ймовірностями* $p_{0k} \geqslant 0$ *та* $p_{1k} \geqslant 0$ *відповідно і* $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\{p_{0k}, p_{1k}\} = 0$, *то розподіл випадкової величини* ξ *є сингулярним канторівського типу, спектр якого має розмірність Хаусдорфа-Безиковича* $\frac{1}{2}$ *при умові, що матриця* $\|p_{ik}\|$ *містить скінченну кількість нулів.*

Доведення. При виконанні умови теореми випадкову величину ξ можна записати як

$$\xi = \eta_1\left(\frac{1}{J_1}+\frac{1}{J_2}\right)+\eta_2\left(\frac{1}{J_3}+\frac{1}{J_4}\right)+\dots+\eta_n\left(\frac{1}{J_{2n-1}}+\frac{1}{J_{2n}}\right)+\dots,$$

де η_k — послідовність незалежних випадкових величин з розподілами: $P\{\eta_k = 0\} = p_{0k} \geqslant 0, P\{\eta_k = 1\} = p_{1k} \geqslant 0$. Спектр такої випадкової величини співпадає (включається) з множиною неповних сум підряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n}) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{J_{2n-1}}+\frac{1}{J_{2n}}\right). \qquad (3.16)$$

Оскільки, $u_k > \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} u_n$ для парних номерів k, то $v_k > \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} v_n$ для довільних k. З [71] відомо, що множина неповних сум такого підряду є замкненою, ніде не щільною множиною. Залишається відкритим питання про міру Лебега (розмірність Гаусдорфа-Безиковича) множини неповних сум підряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$.

Використовуючи рівність (3.2), можна записати наступне

$$v_n = u_{2n-1}+u_{2n} = \frac{1}{2^{2n-2}+1}+\frac{1}{2^{2n-1}-1} = \frac{2^{2n-1}+2^{2n-2}}{(2^{2n-2}+1)(2^{2n-1}-1)}.$$

Міру Лебега множини неповних сум можна обчислити за формулою

$$\lambda(\Delta'_v) = \lim_{n\to\infty} 2^n r_n^v,$$

де $r_n^v = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} v_k$. Враховуючи, що

$$r_n^v = \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k = \sum_{k=2n+1}^{\infty} u_k < \frac{1}{2^{2n-1}}$$

(див. лему 3.8) справедливо записати наступне

$$\lambda(\Delta'_v) < \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^{2n-1}} = 0.$$

Таким чином, приходимо до висновку про нульмірність за Лебегом множини неповних сум ряду (3.16). Відомо, що

$$H^{\alpha}(E) = \lim_{k\to\infty} 2^k (r_k^v)^{\alpha} = \begin{cases} 0, \text{ якщо } (r_k^v)^{\frac{\alpha}{k}} < 1, \\ 1, \text{ якщо } (r_k^v)^{\frac{\alpha}{k}} = 1, \\ \infty, \text{ якщо } (r_k^v)^{\frac{\alpha}{k}} > 1. \end{cases}$$

Розглянемо випадок $(r_k^v)^{\frac{\alpha}{k}} = 1$. Матимемо

$$\alpha(k) = \frac{-k\ln 2}{\ln r_k^v}.$$

Оскільки, в останній рівності маємо залежність від k, то зрозуміло, що

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} \alpha(k) = \lim_{k\to\infty} \frac{-k\ln 2}{\ln r_{r_k^v}}.$$

Згідно з лемою 3.8

$$\frac{1}{2^{2k+2}+1} + \frac{1}{2^{2k+2}} < r_k^v < \frac{1}{2^{2k-1}},$$

звідки правильними є наступні нерівності

$$\ln\left(\frac{1}{2^{2k+2}}\right) < \ln r_k^v < \ln\left(\frac{1}{2^{2k-1}}\right),$$

$$\frac{\ln 2}{\ln\left(\frac{1}{2^{2k-1}}\right)} < \frac{\ln 2}{\ln r_k^v} < \frac{\ln 2}{\ln\left(\frac{1}{2^{2k+2}}\right)},$$

$$\frac{-k\cdot\ln 2}{-(2k-1)\ln 2} < \frac{-k\cdot\ln 2}{\ln r_k^v} < \frac{-k\cdot\ln 2}{-(2k+2)\ln 2}.$$

Обчислимо границі лівої та правої частини нерівності. Матимемо

$$\lim_{k\to\infty} \frac{-k\cdot\ln 2}{-(2k-1)\ln 2} = \frac{1}{2} \quad \text{та} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{-k\cdot\ln 2}{-(2k+2)\ln 2} = \frac{1}{2}.$$

Тоді, за теоремою про границю проміжної послідовності, справедливою буде наступна рівність

$$\lim_{k\to\infty} \alpha(k) = \lim_{k\to\infty} \frac{-k\cdot\ln 2}{\ln r_k^v} = \frac{1}{2}.$$

Отже, розмірність Гаусдорфа-Безиковича множини неповних сум ряду (3.16) рівна $\frac{1}{2}$. □

Висновки до розділу 3

У розділі вивчається одна знакододатна узагальнена послідовність Фібоначчі, а саме, послідовність чисел Якобсталя-Люка. Виводиться формула загального члена послідовності, розв'язуюються задачі про суму перших n членів послідовності, суму перших парних та непарних n членів послідовності, встановлюються властивості членів такої послідовності.

Також вивчається ряд, члени якого є оберненими до елементів послідовності Якобсталя-Люка, досліджуються співвідношення між членами та залишками такого ряду. Встановлено, що множина неповних сум (підсум) ряду обернених чисел Якобсталя-Люка є досконалою, ніде не щільною множиною додатньої міри Лебега.

Доведено, що кожне дійсне число x з відрізка $[0, S]$, де $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} J_{n+2}^{-1}$, можна представити у вигляді

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{J_{n+2}} = \Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots},$$

де $\alpha_n \in \{0, 1, 2\}$. Ця трисимвольна система зображення чисел – суттєво надлишкова, а саме: кожне число інтервала $(0, S)$ має континуальну множину різних зображень. Крім того, у цьому розіділі досліджуються об'єкти зі складною локальною будовою, зокрема, ніде не щільні множини додатньої міри Лебега або нульової міри Лебега і дробової розмірності Гаусдорфа-Безиковича, які безпосередньо пов'язані з послідовністю Якоюсталя-Люка.

ВИСНОВКИ

Числові послідовності і ряди, які володіють певними умовами однорідності, сьогодні широко використовуються як засоби кодування дійсних чисел. Це забезпечує своєрідні форми існування дійсного числа і ґрунтовний тополого-метричний та фрактальний аналіз математичних об'єктів з іррегулярною локальною структурою.

Послідовності Фібоначчі та їх узагальнення, будучи зворотніми послідовностями, здатні виконувати роль базисних послідовностей у різних системах зображення чисел, а отже, бути основою для побудови та розвитку метричної та ймовірнісної теорій чисел.

У роботі розглядається два представлення дійсних чисел за допомогою чотирьохпараметричної узагальненої послідовності Фібоначчі: 1) за допомогою нескінченно малої додатної узагальненої послідовності Фібоначчі; 2) трисимвольна система представлення чисел, в основі якої лежить ряд з обернених чисел Якобсталя-Люка. Обидва ці представлення мають ненульову надлишковість та скінченний алфавіт, вони володіють складною геометрією (циліндричні множини перекриваються).

Загалом у дисертаційній роботі отримані наступні результати:

- встановлені локальні та глобальні властивості узагальнених послідовностей Фібоначчі, а також структурні властивості їх сім'ї;
- у просторі узагальнених послідовностей Фібоначчі досліджені різноманітні математичні структури, описаний клас самоподібних фракталів;

- для множини дійсних чисел, що є підсумами додатного ряду, члени якого є елементами нескінченно малої додатної узагальненої послідовності Фібоначчі, описано топологічні, метричні та фрактальні властивості;
- вивчена лебегівська структура (вміст дискретної, абсолютно неперервної та сингулярної компонент) і спектральні властивості розподілу випадкової підсуми ряду при різних розподілах доданків та поведінку на нескінченності модуля її характеристичної функції у випадку незалежності доданків;
- для послідовності Якобсталя-Люка виведено формули: для загального члена послідовності, суми перших n членів послідовності, суми перших n парних (непарних) членів послідовності, обґрунтовані інші властивості цієї додатної узагальненої послідовності Фібоначчі;
- доведено, що множина неповних сум (підсум) ряду з обернених чисел Якобсталя-Люка є ніде не щільною множиною додатної міри Лебега;
- побудована трисимвольна система зображення дійсних чисел, яка ґрунтується на їх розкладах в ряди з базисною послідовністю, членами якої є числа, обернені до членів послідовності Якобсталя-Люка;
- доведено, що кожне число інтервалу $(0; 2S)$, де S – сума ряду, має континуальну кількість різних зображень. В цій системі введено канонічне зображення, що має нульову надлишковість, і вказано кілька застосувань до розв'язання задач метричної та ймовірнісної теорії чисел.

Проведені дослідження лежать в руслі сучасних математичних досліджень об'єктів зі складною локальною поведінкою, зокрема пов'язаних з сингулярними розподілами ймовірностей, використанням різних систем представлення дійсних чисел з надлишковим набором цифр, інтерес до яких в останні роки значно підвищився.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Albeverio S.* Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorf-Besicovitch dimension / S. Albeverio, M. Pratsiovytyi, G. Torbin // Ergodic Theory and Dynamical Systems. – 2004, – Vol. 24, № 1. – P. 1-16.
2. *André-Jeannin R.* Irrationalite de la somme des inverses de certaines suites recurrentes / R. André-Jeannin // C. R. Acad. Sci. Paris. — Ser. I Math. — 1989. — Vol. 308. — P. 539-541.
3. *Badea C.* The irrationality of certain infinite series / C. Badea // Glasgow Math. J. – 1987. – Vol. 29. – P. 221-228.
4. *Badea C.* A theorem on irrationality of infinite series and applications / C. Badea // Acta arithmetica. – 1993. – Vol. 63, – № 4. – P. 313-323.
5. *Banakh T.* Algebraic and topological properties of some sets in l_1 / T.Banakh, A. Bartoszewitcz, S. Glab, E. Szymonik // Colloq. Math. – 2012. – Vol. 129, № 1. – P. 75-85.
6. *Bundschuh P.* On the Distribution of a Certain Family of Fibonacci Type Sequences / P. Bundschuh, Gy. Darvasi // Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis. – 1998. – Vol. 14, № 1. – P. 41-47.
7. *Bundschuh P.* Arithmetical investigations of a certain infinite product / P. Bundschuh, K. Väänänanen // Compositio Math. – 1994. – Vol. 91, № 2. – P. 175-199.
8. *Carlitz L.* Reduction formula for Fibonacci summations / L. Carlitz // Fibonacci Quarterly. – 1971. – Vol. 9, № 5. – P. 449-466.
9. *Duverney D.* Irrationalite de la somme des inverses de la suite de Fibonacci / D. Duverney // Elem. Math. – 1997. – Vol. 52, № 1. — P. 31-36.

10. *Duverney D.* Irrationality of fast converging series of rational numbers / D. Duverney // Journal Math. Sci. Univ. Tokyo. – 2001. – Vol. 8, № 2. – P. 275-316.
11. *Erdös P.* On a family of symmetric Bernoulli convolutions / P. Erdös // Amer. J. Math. – 1939. – Vol. 61, № 4. – P. 974-976.
12. *Erdös P.* Some problems and results on the irrationality of the sum of infinite series / P. Erdös // J. Math. Sci. – 1975. – Vol. 10, № 1. – P. 1-7.
13. *Erdös P.* Old and new problems and results in combinatorial number theory / P. Erdös, R. Graham. – Geneve: Monographies de l'Enseignement Math, 1980. – № 28. – 128 p.
14. *Falconer K. J.* Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications / K. J. Falconer. – Chichester: Wiley, 1990. – 290 p.
15. *Fisher P. S.* A Generalized Fibonacci Sequence / P. S. Fisher, E. E. Kohlbecker // Fibonacci Quarterly. – 1972. – Vol. 10, № 4. – P. 337-344.
16. *Galambos J.* Representations of Real Numbers by Infinite Series / J. Galambos. – Berlin and New York: Springer-Verlag, 1976. – Vol. 502 of Lecture Notes in Mathematics. – VI, 146 p.
17. *Gerdes W.* Generalized Tribonacci Numbers and Their Convergent Sequences / W. Gerdes / Fibonacci Quarterly. – 1978. – Vol. 16, № 3. P. 269-275.
18. *Guthrie J. A.* The topological structure of the set of subsums of an infinite series / J. A. Guthrie , J. E. Nymann // Colloq. Math. – 1988. – Vol. 55, № 2. – P. 323-327.
19. *Guthrie J. A.* On the paper of Guthrie and Nymann on subsums of an infinite series / J. A. Guthrie , J. E. Nymann // Colloq. Math. – 2000. – Vol. 83, № 1. – P. 1-4.
20. *Jessen B.* Distribution functions and Rieman Zeta-function / B. Jessen, A. Wintner // Trans. Amer. Math. Soc. – 1935. – Vol. 38, № 1. – P. 48-88.

21. *Jones R.* Achievement Sets of Sequences / R. Jones // Amer. Math. Monthly. – 2011. – Vol. 118, – P. 508–521.
22. *Levy P.* Sur les series dont les termes sont des variables independantes / P. Levy // Studia math. – 1931. – Vol. 3, № 1. – P. 119-155.
23. *Lyons R.* Seventy years of Rajchmann measures / R. Lyons // J. Fourier Anal. Appl. – 1995. – Vol. 2, Spesial issue. — P. 363-377.
24. *Mendes P.* On the topological structure of arithmetic sum of two Cantor sets / P. Mendes, F. Oliveira // Nonlinearity. – 1994. – Vol. 7, № 2. – P. 329-343.
25. *Miller M. D.* On generalized Fibonacci numbers / M. D. Miller // Amer. Math. Monthly. – 1971. – Vol. 78, № 10. – P. 1108-1109.
26. *Munarini E.* Generalized $q-$Fibonacci Numbers / E. Munarini // Fibonacci Quarterly. – 2005. – Vol. 43, № 3. – P. 234-242.
27. *Kakeya S.* On the partial sums of an infinite series / S. Kakeya // Science Reports Tohoku Imp. Univ. – 1914. – Vol. 3, № 1. – P. 159-163.
28. *Kenyon R.* Projecting the one-dimensional Serpinski gasker / R. Kenyon // Israel. J. Math. – 1997. – Vol. 97, – P. 221–238.
29. *Schweiger F.* Ergodic Theory of Fibred Systems and Metric Number Theory / F. Schweiger. Oxford science publications. – Oxford and New York: Clanerdon press and Oxford University press, – 1995. – XIII, 295 p.
30. *Matala-aho T.* Irrationality measures for the series of reciprocals from recurrence sequences / T. Matala-aho, M. Prevost // Journal of Number Theory. – 2002. – Vol. 96, № 2. – P. 275–292.
31. *Oliynyk B.* The diagonal limits of Hamming spaces / B. Oliynyk // Algebra and Discrete Math.— 2013. – Vol. 15, № 2. — P. 229–236.
32. *Oliynyk B.* Isometry groups of non standard metric products / B. Oliynyk // Cent. Eur. J. Math. — 2013. — Vol. 11, № 2. — P. 264–273.

33. *Oliynyk B. V.* Imprimitivity systems and lattices of normal subgroups in D-hyperoctahedral groups / B.V. Oliynyk, V.I. Sushchanski // Siberian Mathematical Journal. — 2014. — Vol. 55, № 1. — P. 132–141.
34. *Pratsiovytyi, M. V.* Fractal Approach to Investigations of Singular Probability Distributions, Dragomanov National Pedagogical University, Kyiv, (1998).
35. *Pratsiovytyi M.V.* Topological, metric and fractal properties of probability distributions on the set of incomplete sums of positive series / M.V. Pratsiovytyi, O.Yu. Feshchenko // Theory of Stochastic Processes. — 2007. — T. 13, № 1-2. — C. 205-224.
36. *Prevost M.* On the irrationality of $\sum \frac{t^n}{A\alpha^n+B\beta^n}$ / M. Prevost // J. Number Theory. – 1998. – Vol. 73, № 2. – P. 139–161.
37. *Nyman I.E.* On a paper of Guthrie and Nyman on subsums of infinite series / I. E. Nyman, R. A. Saenz // Colloquium matematicum. – 2000. – Vol. 10, № 1. P. 1-4.
38. *Prus-Wisniowski F.* Beyond the sets of subsums / F. Prus-Wisniowski. – 2013, — 37p. (avaible in http://atom.math.uni.lodz.pl)
39. *Rachidi M.* Extending generalized Fibonacci sequences and their Binet-type formula / M. Rachidi, O. Saeki // Advances in Difference Equations. – 2006. – Vol. 2006, № 1. — P. 1-11.
40. *Lytvynuk A. A.* On types of distributions of sums of one class of random power series with independent identically distributed coefficient / A. A. Lytvynuk // Ukr. Math. J. – 1999. – Vol. 51, № 1. – P. 140–145.
41. *Varbanets P.* Divisors of the Gaussian Integers in an Arithmetic Progression / P. Varbanets, P. Zarzycki // Jour. Number Theory. – 1989. – Vol. 33, № 2. – P. 152-169.
42. *Varbanets P.* Divisors of integer in arithmetic progression / P. Varbanets, P. Zarzycki // Canad. Math. Bull. – 1990. – Vol. 33, № 2. – P. 129-134.

43. *Varbanets P.* On the distribution if natural numbers with divisors from an arithmetic progression / P. Varbanets // Acta Arith. – 1991. – Vol. 57, № 3. – P. 245-256.
44. *Varbanets P.* Trigonometric sums and their applications / P. Varbanets // Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp. – 1994. – Vol. 14, № 1. – P. 219-240.
45. *Varbanets P.* On the number of primitive integer points on elliptic cones / P. Varbanets // Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. – 2006. – Vol. 26, № 1. – P. 146-160.
46. *Varbanets P.* On divisor function over Z[i] / P. Varbanets // Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp. – 2007. – Vol. 27, № 1. – P. 75-90.
47. *Zeckendorf E.* A Generalized Fibonacci Numeration / E. Zeckendorf // Fibonacci Quarterly. – 1972. – Vol. 10, № 4. – P. 365-372.
48. *Барановський О. М.* Ряди Остроградського як засіб аналітичного задання множин і випадкових величин / О. М. Барановський // Фрактальний аналіз та суміжні питання. – 1998. – Т. 1. – С. 91–102.
49. *Барановський О. М.* Деякі задачі метричної теорії чисел, представлених рядами Остроградського 1-го виду / О. М. Барановський // Наукові записки НПУ імені М. П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. – 2002. – № 3. – С. 391–402.
50. *Березанський Ю.М.* Функциональный анализ / Ю.М. Березанський, Г.Ф. Ус, З.Г. Шефтель. – К., Вища школа, 1990, – 600 с.
51. *Василенко Н. М.* Фібоначчієві подання дійсних чисел / Н. М. Василенко // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2006, – Т. 9.– С. 190-203.
52. *Василенко Н. М.* Деякі метричні співвідношення, породжені Ф-зображенням дійсних чисел / Н. М. Василенко // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2006. – Т. 7. – С. 190-203.

53. *Воеводин В. В.* Линейная алгебра / В. В. Воеводин. — М.: Наука, 1980. – 400 с.
54. *Воробьев Н.Н.* Числа Фибоначчи / Н.Н. Воробьев. — М.: Наука, 1969. – 112 с.
55. *Гельфонд А. О.* Об одном общем свойстве систем счисления / А. О. Гельфонд // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1959, – Т. 23, № 6. – С. 809–814.
56. *Гончаренко Я.В.* Тополого-метричні і фрактальні властивості множини неповних сум знакододатного ряду та розподілів на них / Я. В. Гончаренко, М. В. Працьовитий, Г.М. Торбін // Наукові записки НПУ імені М. П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. – 2005, – Т. 6, № 1. – С. 210-224.
57. *Гончаренко Я. В.* Представлення дійсних чисел в системах з надлишковим набором цифр та їх використання / Я. В. Гончаренко, І. О. Микитюк // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2004. – Т. 5, № 1. – С. 242–254.
58. *Ефимов Н. В.* Линейная алгебра и многомерная геометрия / Н. В. Ефимов, Э. Р. Розендорн. – М.: Наука, 1969. – 528 с.
59. *Касаткин В. Н.* Новое о системах счисления: методический материал / В. Н. Касаткин. — К.: Вища школа, 1982. – 96 с.
60. *Кац М.* Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел / М. Кац. — М.: Издательство иностранной литературы, — 1963. – 156 с.
61. *Коваленко В.М.* Множина неповних сум абсолютно збіжного комплексного ряду / В.М. Коваленко // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. – 2009. – Т. 10, № 1. – С. 150–162.
62. *Колмогоров А. Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1972. – 496 с.

63. *Корсунь Н.О.* Про множину неповних сум знакододатних рядів з однією умовою однорідності та узагальнення двійкового зображення чисел / Н.О. Корсунь, М.В. Працьовитий // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. – 2009. – Т. 10, № 1. – С. 28–39.
64. *Кострикин А. И.* Линейная алгебра и геометрия / А.И. Кострикин, Ю.И. Манин. – М.: Наука, 1986. – 304 с.
65. *Маркушевич А. И.* Возвратные последовательности. — Гос. Издательство Технико-Теоретической Литературы, 1950. — Т. 1. — (Популярные лекции по математике).
66. *Олійник Б. В.* Реализуемость прямых произведений групп преобразований изометриями метрических пространств / Б. В. Олійник // Доповіді НАН України. – 2011. – № 9. – С. 20-25.
67. *Постников А. Г.* Арифметическое моделирование случайных процессов / А. Г. Постников // Тр. МИАН СССР. – 1960, – Т. 57, – С. 3–84.
68. *Працьовитий М. В.* Про означення фрактала та фрактальний підхід в дослідженнях розподілів ймовірностей / М. В. Працьовитий // Фрактальний аналіз та суміжні питання. – 1998. – № 1. – С. 5–26.
69. *Працьовитий М. В.* Розподіл сум випадкових степеневих рядів / М. В. Працьовитий // Теорія випадкових процесів. – 1996, – Т. 5. – С. 32–37.
70. *Працьовитий М. В.* Структура досконалих обмежених множин і сингулярних розподілів в R_n / М. В. Працьовитий // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2009. – Т. 10, № 1. – С. 179-190.
71. *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженні сингулярних розподілів. — К.: Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. – 296с.

72. *Працьовита І. М.* Про розклади чисел в знакозмінні s-адичні ряди і ряди Остроградського 1-го та 2-го виду / І. М. Працьовита // Український математичний журнал. – 2009. – Т. 61, № 7. – С. 958-968.
73. *Торбін Г. М.* Топологічні властивості спектра випадкової величини, заданої за допомогою збіжного знакододатного ряду / Г. М. Торбін // Фрактальний аналіз та суміжні питання: Зб. наук. пр. НАН Міністерство освіти України. – 1998. – № 1. – С. 45-52.
74. *Турбин А. Ф.* Фрактальные множества, функции, распределения / А.Ф. Турбин, Н.В. Працевитый. — К.: Наук. думка, 1992. – 208 с.
75. *Тыртышников Е. Е.* Матричный анализ и линейная алгебра / Е.Е. Тыртышников. — М., 2005. – 372 с.
76. *Ленг С.* Алгебра / С. Ленг. – М.: Мир, 1968. – 575 с.
77. *Лукач Е.* Характеристические функции / Е. Лукач. – М.: Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит., 1979. – 424 с.
78. *Романко В.К.* Разностные уравнения. — М.: БИНОМ, 2006. – 112 с.
79. *Савченко І. О.* Тополого-метричні та фрактальні властивості множини неповних сум (підсум) одного класу збіжних рядів з суттєвими перекриттями / І. О. Савченко // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2013. – Т. 15, № 1. – С. 119–133.
80. *Стахов А. П.* Компьютеры Фибоначчи и новая теория кодирования: история, теория, перспективы / А. П. Стахов // Перспективные информационные технологии и интеллектуальные системы. – 2004. – Т. 18, № 2. – С. 17-30.
81. *Федер Е.* Фракталы / Е. Федер. – М.: Мир, 1991. – 260 с.
82. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби / А.Я. Хинчин. — М.: Физматлит, 1960. – 112 с.
83. *Шалат Т.* О мере Хаусдорфа линейных множеств / Т. Шалат // Чехословацкий мат. журн., Прага. – 1961. – Vol. 11, № 1. – С. 24-56.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ АВТОРА

1^a. *Карвацький Д. М.* Математичні структури у просторах узагальнених послідовностей Фібоначчі / Д. М. Карвацький, Н. М. Василенко // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2012. – Т. 13, № 1. – С. 118-127.

2^a. *Карвацький Д. М.* Зображення дійсних чисел нескінченно малими знакододатними узагальненими послідовностями Фібоначчі / Д. М. Карвацький // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2013. – Т. 15, № 1. – С. 56-73.

3^a. *Працьовитий М. В.* Представлення чисел за допомогою послідовності Якобсталя-Люка / М. В. Працьовитий, Д. М. Карвацький // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2014. – Т. 16, № 2. – С. 138-149.

4^a. *Карвацький Д. М.* Властивості розподілу випадкової неповної суми збіжного знакододатного ряду, члени якого утворюють узагальнену послідовність Фібоначчі / Д. М. Карвацький // Буковинський математичний журнал. – 2015. – Т. 3, № 1. – С. 52-59.

5^a. *Карвацький Д. М.* Про один клас узагальнених послідовностей Фібоначчі та ряди, що з ними пов'язані / Д. М. Карвацький // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2015. – Т. 17, № 1. – С. 186-201.

6^a. *Pratsyovitiy M. V.* Jacobsthal-Lucas series and their applications / M. V. Pratsyovitiy, D. M. Karvatskiy // Algebra and discrete mathematics. – 2017. – Vol. 24, № 1. P. 169–180.

7^a. *Карвацький Д. М.* Ірраціональність рядів, члени яких є оберненими до членів узагальнених послідовностей Фібоначчі // Друга міжуніверситетська наукова конференція з математики та фізики для студентів та молодих науковців, Київ, 28-29 квітня 2011 р.: Тези доповідей. – Київ : 2011. – С. 89-90.

8^a. *Карвацький Д. М.* Критерії збіжності рядів, члени яких є оберненими до членів узагальненої послідовності Фібоначчі // Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, Київ, 19-21 квітня 2012 р.: Тези доповідей. – Київ : 2012. – С. 128.

9^a. *Карвацький Д. М.* Лінійні простори узагальнених послідовностей Фібоначчі та математичні структури в них // Міжнародна наукова конференція ”Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь”, Київ, 13-14 грудня 2012 р.: Тези доповідей. – Київ : 2012. – С. 67.

10^a. *Карвацький Д. М.* Фрактали у просторі узагальнених послідовностей Фібоначчі // Всеукраїнська наукова конференція ”Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”, Ворохта, 25 лютого - 3 березня 2013 р.: Тези доповідей. – Івано-Франківськ : 2013. – С. 54-56.

11^a. *Карвацький Д. М.* Властивості множини неповних сум одного класу знакододатних рядів, пов’язаних з узагальненими послідовностями Фібоначчі // Третя міжуніверситетська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, 25-27 квітня 2013 р.: Тези доповідей. – Київ : 2013. – С. 103-104.

12^a. *Карвацький Д. М.* Зображення дійсних чисел за допомогою нескінченно малих знакододатних узагальнених послідовностей Фібоначчі // Міжнародна математична конференція ”Боголюбівські читання DIF – 2013. Диференціальні рівняння. Теорія функцій та їх застосування”, Севастополь, Україна, 23 - 30 червня 2013 р.: Тези доповідей. – Київ : 2013. – С. 237.

13^{a}. *Карвацький Д. М.* Кодування чисел за допомогою нескінченно малих знакододатних узагальнених послідовностей Фібоначчі // Всеукраїнська науково-методична конференція «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі», Київ, 26 - 27 червня 2013 р.: Тези доповідей. – Київ : 2013. – С. 103-105.

14^{a}. *Karvatsky D. M.* Representing real numbers by generalized Fibonacci sequences // The 9-th International Algebraic Conference in Ukraine, July 8 - 13, 2013, Lviv, Ukraine: Abstracts. – Lviv : 2013. – P. 81.

15^{a}. *Karvatsky D. M.* Topological, Metric and Fractal Properties of the Set of Incomplete Sums of Series of Fibonacci Generalized Numbers // The Fifth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations, Sept. 16 - 20, 2013, Kyiv, Ukraine: Abstracts. – Kyiv : 2013. – P. 99.

16^{a}. *Карвацький Д. М.* Властивості розподілу випадкової величини, що пов'язана з рядами узагальнених чисел Фібоначчі // Четверта міжнародна Ганська конференція, Чернівці, Україна, 30 червня - 5 липня 2014 р.: Тези доповідей. – Чернівці : 2014. – С. 69.

17^{a}. *Карвацький Д. М.* Представлення чисел за допомогою послідовності Якобсталя-Люка // П'ята всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, Україна, 25-26 квітня 2016 р.: Тези доповідей. – Київ : 2016. – С. 32.

18^{a}. *Карвацький Д. М.* Кодування дійсних чисел за допомогою послідовності Якобсталя-Люка // Всеукраїнської науково-методичної конференції «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі», Київ, 7-8 жовтня 2016 р.: Тези доповідей. – Київ : 2016. – С. 46.

19^{a}. *Карвацький Д. М.* Система представлення дійсних чисел, твірним елементом якої є послідовність Якобсталя-Люка // International mathematical conference «Groups and Actions: Geometry and Dynamics» dedicated to the memory of professor Vitaly Sushchanskyy, December 19-22, 2016, Kyiv, Ukraine: Abstracts. – Kyiv : 2016. – P. 58.