НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ВАСИЛИК Віталій Богданович

УДК 519.6

Методи без насичення точності для диференціальних рівнянь в банаховому просторі з необмеженими операторними коефіцієнтами

01.01.07 — обчислювальна математика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ - 2018

Дисертацією є рукопис.
Робота виконана в Інституті математики НАН України
Науковий консультант:

доктор фізико-математичних наук, професор,
академік НАН України
Макаров Володимир Леонідович,
Інститут математики НАН України, завідувач
відділу обчислювальної математики

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор,
член-кореспондент НАН України
Хіміч Олександр Миколайович,
Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова
НАН України, заступник директора

доктор фізико-математичних наук, професор
Хапко Роман Степанович,
Львівський національний університет ім. І. Франка,
завідувач кафедри обчислювальної математики

доктор фізико-математичних наук, професор
Кутнів Мирослав Володимирович,
пров. н. с. Інститут прикладних проблем механіки і
математики ім. Я. С. Підстригача, відділ числових
методів математичної фізики

Захист відбудеться 15 березня 2018 року о 15 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.02 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий 10 лютого 2018 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради ПЕЛЮХ Г. П.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Розробці наближених методів розв'язування задач для рівнянь математичної фізики, що виникають при математичному моделюванні різноманітних процесів та явищ, присвячена значна кількість робіт. Це зумовлено тим, що для більшої частини таких задач відшукати розв'язок у явному вигляді не вдається або його вигляд є занадто складний для подальшого аналізу. Значним фактором також виступає швидкий розвиток обчислювальної техніки, що вимагає оновлення відомих методів та дає можливість реалізації нових.

Особливе місце серед наближених методів посідають методи без насичення точності (МБНТ) або спектральні методи. Вони дозволяють автоматично підлаштовуватись під гладкість вхідних даних. Тобто, чим більша гладкість, тим більша швидкість методу. На явище насичення точності та підходи до його подолання звернув увагу К. І. Бабенко в 1970-х роках. Ним було показано, що методи, які автоматично підлаштовуються під вхідні дані є оптимальними за точністю для заданої кількості даних на соболєвських та аналітичних класах функцій. Порядок швидкості збіжності МБНТ для функцій з простору Соболєва пропорційний показнику гладкості, а для функцій, що аналітичні, швидкість — експоненціальна. Хоча деякі ідеї та прийоми побудови МБНТ можна знайти в досить старих роботах К. Лацоша (C. Lanczos), Кленшоу (Clenshaw) та інших, по-справжньому вони почали розвиватися в 1970–1980-х рр. Одними з перших робіт, що стосувались МБНТ, були роботи В. Л. Макарова та І. П. Гаврилюка в 70-х роках для побудови різницевих схем з точниим спектром. У західній літературі МБНТ більш відомі як спектральні методи (СМ). Великий вклад в розробку та пропагування СМ внесли С. А. Орсзаг (S. A. Orszag), Д. Готліб (D. Gottlieb), К. Кануто (C. Canuto), М. Ю. Хуссаіні (M. Y. Hussaini), А. Куартероні (A. Quarteroni), Т. А. Занг (T. A. Zang), Б. Мерсьє (B. Mercier), Дж. П. Бойд (J. P. Boyd), Л. Н. Трефетен (L. N. Trefethen), Дж. Шен (J. Shen), Т. Танг (T. Tang), Л.-Л. Ванг (L.-L. Wang) та інші.

Початково-крайові задачі математичної фізики часто вивчаються виходячи з їхніх узагальнень у вигляді диференціальних рівнянь з необмеженими операторними коефіцієнтами в деякому банаховому просторі. Такий підхід дає можливість розглядати значно ширший круг задач ніж дають класичні постановки. У цьому випадку постановка задачі в банаховому просторі може розглядатися як деяка метамодель. Теорія операторно-диференціальних рівнянь виникла на межі двох математичних напрямів: теорії диференціальних рівнянь та теорії напівгруп. Вперше такі задачі з'явились в працях І. М. Гельфанда та Г. Є. Шилова з диференціально-операторним рівнянням з оператором у вигляді матриці, елементи якої є диференціальні оператори. Теорія напівгруп в банахових просторах побудована Е. Хілле, Р. С. Філіпсом, К. Іосідою та ін. Ними отримані результати щодо існування розв'язків таких рівнянь в термінах операторів. У цьому випадку їх розв'язки легко записати, використовуючи функції від операторів. Зокрема, для рівнянь, що є узагальненнями параболічних, еліптичних та гіперболічних, розв'язки записуються через операторну експоненту, нормалізований операторний гіперболічний синус та операторний косинус, відповідно.

Для обчислення операторної експоненти (а, отже, і розв'язку відповідної задачі) спочатку використовувалися розвинення її в ряди. Перші результати отримані в 1984 році А. В. Бабіним (для напіваналітичних початкових умов), М. Л. Горбачуком та В .В. Городецьким (для аналітичних початкових умов але при довільних значеннях змінного параметра $t > 0$). Пізніше, в середині 1990-х, зображення на основі перетворення Келлі, отримане в роботах Д. З. Арова, І. П. Гаврилюка та В. Л. Макарова, дало можливість знаходження операторної експоненти для початкових умов скінченної гладкості зі швидкістю без насичення точності. Наближеннями операторних експонент займались також О. І. Кашпіровський і Ю. В. Митник, які побудували наближення операторної експоненти з експоненціальною швидкістю збіжності, використовуючи ряди Фур'є-Чебишева, але їх метод є складним в реалізації, бо вимагає знаходження поліномів від операторів. Дослідженнями для таких операторних функцій також присвячені роботи М. Ф. Городнього.

Суттєвим кроком у побудові методів для наближення операторних експонент став запропонований В. Л. Макаровим та І. П. Гаврилюком підхід, що поєднує зображення операторних функцій за допомогою інтеграла Данфорда-Коші та експоненціально збіжні квадратурні формули. Це дало змогу побудувати методи для наближення операторних експонент, що мають експоненціальну швидкість збіжності для скінченної гладкості початкових умов відносно операторного коефіцієнта. Крім того, побудовані методи дають змогу природнім чином розпаралелювати обчислення за рахунок незалежного знаходження послідовності резольвент та наближення в різних точках. Використовуючи цю ідею, свої методи знаходження операторних експонент побудували Ц. Паленсія (C. Palencia), М. Лопес-Фернандес (M. Lopez-Fernandez), В. Томе (V. Thomee), Дж. А. Ц. Вайдеман (J. A. C. Weideman), Л. Н. Трефетен (L. N. Trefethen), Д. Шин (D. Sheen). Необхідно відмітити також спосіб регуляризації резольвенти, запропонований В. Л. Макаровим, що дозволило побудувати метод з рівномірною по часу експоненціальною швидкістю збіжності й дає можливість розв'язувати неоднорідні задачі при слабких припущеннях на гладкість вхідних даних.

Для рівнянь другого порядку з необмеженими операторними коефіцієнтами І. П. Гаврилюком та В. Л. Макаровим розвинуто теорію на основі перетворення Келлі й побудовано методи без насичення точності відносно гладкості вхідних даних. Вони розроблені для знаходження операторних тригонометричних та гіперболічних функцій а також для операторної функції Бесселя.

Задачі з нелокальними умовами є одним з важливих об'єктів дослідження в теорії диференціальних рівнянь. Пов'язано це як з важливими прикладними застосуваннями таких задач при моделюванні різних явищ, так і з цікавими теоретичними проблемами. Нелокальними прийнято називати такі задачі, в яких замість або разом з граничною умовою ставляться умови, що пов'язують значення розв'язку (і, можливо, його похідних) у внутрішніх точках області. Нелокальні задачі для різних класів рівнянь розглядались О. О. Дезіним, О. А. Самарським, А. В. Біцадзе, В. Л. Макаровим, В. О. Ільїним, Є. І. Моісєєвим, О. Л. Скубачевським, А. М. Нахушевим, М. І. Іонкіним, Д. Г. Гордезіані, Г. А. Авалішвілі. В Україні теорією задач з нелокальними умовами займалися Б. Й. Пташник, В. С. Ільків, І. Я. Кміть, В. М. Поліщук. Нелокальні крайові задачі мають особливості, яких нема у звичайних локальних крайових задачах. Так, наприклад, в нелокальних крайових задачах для параболічних рівнянь з умовами Біцадзе-Самарского виникає ефект зниження гладкості (подібний ефект для класичних локальних задач відсутній), нелокальні інтегральні умови можуть істотно змінити швидкість спадання розв'язків параболічних рівнянь. Нелокальні задачі у вигляді рівнянь з операторними коефіцієнтами досліджували О. О. Дезін, Л. Бижевський (L. Byszewski), В. Лакшмікантам (V. Lakshmikantham), С. Нтояс (S. Ntouyas), О. Л. Скубачевський. Чисельні методи для задач такого виду розглядалися в роботах А. В. Біцадзе, О. А. Самарського, Д. Г. Гордезіані, М. Сапоговаса, П. М. Вабіщевича, Г. Берікелашвілі та ін.

Разом з тим, методи, що мали б швидкість збіжності без насичення точності для нелокальних задач для рівнянь з необмеженими операторними коефіцієнтами в Банаховому просторі донедавна були невідомі. Тому побудова таких методів є актуальною задачею як з теоретичної, так і з практичної точок зору.

Зв'язок роботи з науковими програмами. Результати дисертаційної роботи отримано при виконанні наукових досліджень згідно з планом відділу обчислювальної математики Інституту математики НАН України на 2001-2017 рр. в рамках держбюджетної теми «Чисельно-аналітичні методи розв'язування диференціальних рівнянь з необмеженими операторними коефіцієнтами та обробка інформаційних даних» (номер держреєстрації 0101U000371), «Високоточні методи розв'язування еволюційних задач та розробка швидкодіючих алгоритмів» (номер держреєстрації 0106U000579), «Високоточні методи розв'язування задач для операторних рівнянь у некласичній постановці» (номер держреєстрації 0111U000020). Частина результатів була отримана під час роботи над DFG-проектом «Чисельно-аналітичні моделі і методи для дослідження динаміки рідини в резервуарах» (GZ: 436 UKR 113/33/0-4) в Лейпцизькому університеті та університеті Ф. Шиллера м. Єна (2003–2010 рр.)

Метою дисертаційної роботи є побудова методів без насичення точності для розв'язування диференціальних рівнянь з необмеженими операторними коефіцієнтами в банаховому просторі.

Завдання дисертаційної роботи:

- побудувати методи без насичення точності для наближеного знаходження розв'язків неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку з необмеженими операторними коефіцієнтами;
- побудувати метод без насичення точності для наближеного знаходження розв'язку диференціального рівняння першого порядку з необмеженими операторним коефіцієнтам зі змінною областю визначення;
- побудувати методи без насичення точності для наближеного знаходження розв'язків диференціальних рівнянь першого порядку з необмеженими операторними коефіцієнтами і нелокальними багатоточковими та інтегральними умовами;
- побудувати експоненціально збіжні методи для наближеного знаходження розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку з необмеженими операторними коефіцієнтами еліптичного та гіперболічного (сильно демпфованого) типів;
- побудувати методи без насичення точності для наближеного знаходження розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку з необмеженими операторними коефіцієнтами еліптичного типу і нелокальними багатоточковими та інтегральними умовами;

Об'єктом дослідження є диференціальні рівняння першого і другого порядків з необмеженими операторними коефіцієнтами в банаховому просторі.

Предметом дослідження є методи без насичення точності для початкових крайових та нелокальних задач для диференціальних рівнянь першого та другого порядків з необмеженими операторними коефіцієнтами в банаховому просторі.

Методи дослідження. При виконанні дисертаційного дослідження використано методи функціонального аналізу, SINC-наближень та теорію спектральних і псевдоспектральних методів.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в наступному:

- Досліджено швидкість збіжності Sinc-квадратурної формули для обчислення операторної експоненти, використовуючи інтеграл Данфорда-Коші з контуром інтегрування по параболі. Розроблено та обґрунтовано методи без насичення точності для знаходження наближеного розв'язку задачі Коші для неоднорідного рівняння першого порядку з необмеженим операторним коефіцієнтом.

- Досліджено задачу Коші для диференціального рівняння першого порядку з необмеженим операторним коефіцієнтом, область визначення якого є змінною та розроблено методи без насичення точності знаходження наближеного розв'язку.

- Досліджено m-точкову нелокальну задачу для диференціального рівняння першого порядку з необмеженим операторним коефіцієнтом, побудовано та обґрунтовано експоненціально збіжний метод знаходження наближеного розв'язку. Знайдено необхідні та достатні умови існування розв'язку нелокальної задачі для випадку $m = 2$. Побудовано експоненціально збіжний метод знаходження наближеного розв'язку математичної моделі поширення аерозольного забруднення в атмосфері з періодичними умовами по часу, яка є частинним випадком двоточкової нелокальної задачі.

- Досліджено нелокальні задачі для диференціального рівняння першого порядку з умовами, що містять обмежений або необмежений операторний коефіцієнт в нелокальній умові, з інтегральними лінійними або нелінійними умовами. Знайдено достатні умови існування розв'язків та побудовано експоненціально збіжні наближені методи розв'язування.

- Для диференціальних рівнянь другого порядку з необмеженими операторними коефіцієнтами досліджено задачу Коші для демпфованого рівняння гіперболічного типу та крайову задачу для випадку еліптичного рівняння, побудовано експоненціально збіжні наближені методи.

- Досліджено нелокальні задачі з m-точковою та інтегральною умовами для еліптичного диференціального рівняння другого порядку з необмеженим операторним коефіцієнтом. Для них знайдено зображення розв'язків, встановлено достатні умови їх існування та побудовано експоненціально збіжні методи знаходження наближеного розв'язку.

Практичне значення одержаних результатів полягає в розробці ефективних нових методів наближеного розв'язання задач, що мають важливе значення при математичному моделюванні різноманітних явищ. Матеріали дисертації використовуються в курсі «Додаткові розділи методів обчислень», що викладається магістрам зі спеціальності «прикладна математика» Національного авіаційного університету.

Публікації та особистий внесок здобувача. Всі результати дисертації, які виносяться на захист, одержані автором самостійно. Результати дисертації опубліковані в роботах [1–21] і тезах та працях конференцій [22–32]. З результатів робіт, що виконані у співавторстві, на захист виносяться лише положення, що одержані автором дисертації. У статтях [1,9,11] внесок співавторів є рівноцінним. У статтях [4,5] співавторам належить постановка задачі та участь в обговоренні результатів. У статтях [6–8, 18, 21] співавторам належить участь в обговоренні результатів. У статті [16] співавторам належать чисельні розрахунки та участь в обговоренні результатів. У статті [17] здобувачеві належить частина, присвячена двоточковим умовам та участь в обговоренні результатів щодо узагальнених умов.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, 5 розділів, висновків та списку використаних джерел. Повний обсяг роботи складає 286 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету і завдання дослідження, виділено основні наукові результати та їх практичне значення.

У **першому розділі** проведено огляд наукових робіт, тематика яких тісно пов'язана з дисертаційною роботою, викладено теоретичні відомості, які використовуються для отримання основних результатів.

Другий розділ присвячено розробці та дослідженню методів без насичення точності для розв'язування задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку з необмеженими операторним коефіцієнтом в банаховому просторі. Спочатку розглядається задача:

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \quad t \in (0, T] \tag{1}$$

$$u(0) = u_0, \tag{2}$$

де A – секторіальний оператор, що діє в банаховому просторі X.

Означення 1 *Нехай A – щільно визначений оператор. Тоді він називається секторіальним, якщо його спектр $\Sigma(A)$ розміщений в секторі*

$$\Sigma = \{z = \rho + re^{i\theta} : \ \rho > 0, \ r \in [0, \infty), \ |\theta| < \varphi < \frac{\pi}{2}\}, \tag{3}$$

а на його границі Γ_Σ та поза ним виконується оцінка для резольвенти

$$\|(zI-A)^{-1}\| \le \frac{M}{1+|z|}, \tag{4}$$

з деякою сталою $M>0$. φ називається спектральним кутом оператора A.

Формально розв'язок задачі (1), (2) можна записати, використовуючи операторну експоненту, у вигляді

$$u(t) = \mathrm{e}^{-At}u_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{-A(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau = u_h(t) + u_p(t). \tag{5}$$

Тому для побудови наближеного методу для задачі (1), (2) потрібно вміти обчислювати операторну експоненту e^{-At}.

У підрозділі 2.1 розглянуто випадок, коли рівняння (1) є однорідним, а операторний коефіцієнт A є самоспряженим додатно визначеним. У роботах В. Л. Макарова та І. П. Гаврилюка було показано, що тоді розв'язок можна розкласти в ряд за поліномами Лагерра. За наближення береться сума перших N доданків:

$$u^N(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}\sum_{p=0}^{N}(-1)^p L_p^{(0)}(2\gamma t)(y_{\gamma,k}+y_{\gamma,k+1}), \tag{6}$$

де $L_p^{(0)}(t)$– многочлени Лагерра, $\gamma>0$, $y_{\gamma,k+1}=T_\gamma y_{\gamma,k}$, $k=0,1,\ldots$, $y_{\gamma,0}=u_0$, $T_\gamma=(\gamma I+A)(\gamma I-A)^{-1}$– перетворення Келлі оператора A. Справедлива теорема:

Теорема 1 *(Теорема 2.1[1]) Нехай $u_0\in D^\sigma\equiv D(A^\sigma)$, A– щільно визначений, самоспряжений, додатно визначений оператор. Тоді точність методу перетворення Келлі* (6) *характеризується оцінкою*

$$z_N = \left(\int_0^\infty \left\|u^N(t)-u(t)\right\|^2 dt\right)^{1/2} \le c\|A^\sigma u_0\|N^{-\sigma-1/2}, \tag{7}$$

де стала $c>0$ не залежить від N та u_0.

Показано, що оцінка (7) є непокращуваною за порядком.

Теорема 2 *(Теорема 2.2) Нехай оператор $A=A^*\ge\gamma I$, $\gamma>0$, $\overline{D(A)}=H$, має дискретний спектр $\lambda_0\le\lambda_1\le\ldots$, $\lambda_0=\gamma\le 1$ і виконується умова $\frac{2\gamma}{1+\sigma}\le 1$. Тоді оцінка швидкості збіжності* (7) *метода перетворення Келлі* (6) *майже непокращувана за порядком (з точністю до логарифма).*

Для випадку $u_0\in\mathcal{R}(A,(1),\lambda_0)$ – простору Рум'є доведено теорему:

[1]Тут і далі нумерація теорем в дужках відповідає нумерації в дисертації.

Теорема 3 *(Теорема 2.3) Нехай оператор* $A = A^* \geq \gamma I$, $\gamma > 0$, $\overline{D(A)} = H$, *має дискретний спектр* $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \ldots$, $\lambda_0 = \gamma(1+\sqrt{2})$. *Тоді метод перетворення Келлі* (6) *при* $u_0 \in \mathcal{R}(A,(1),\lambda_0)$ *має експоненціальну швидкість збіжності*

$$z_N \leq \frac{\|u_0\|_{\mathcal{R}(A,(1),\lambda_0)}}{\left[\gamma\sqrt{2}(2+\sqrt{2})\right]^{1/2}} \exp\left\{-(N+1)\ln(1+\sqrt{2})\right\}, \tag{8}$$

яка є непокращуваною за порядком.

У підрозділі 2.2 викладено дослідження, що стосуються швидкості збіжності Sinc– квадратурної формули, розробленої В. Л. Макаровим та І. П. Гаврилюком для $u(t) = \mathrm{e}^{-At}u_0$ у випадку, коли змінна t є малою, а оператор A– самоспряжений додатно визначений. Встановлено, що при $t = 0$ похибка наближення матиме порядок

$$\|u(t) - u_N(t)\| = \|\eta_N\| = O(N^{(2\alpha-1)/3}), \quad \alpha > \frac{1}{2}.$$

Це означає, що втрачається експоненціальна швидкість збіжності, а тому його не можна використати для побудови експоненціально збіжного наближення для розв'язку (5) задачі (1), (2).

У підрозділі 2.3 викладено результати, що стосуються розробки експоненціально збіжного методу для однорідної задачі (1), (2) з секторіальним оператором A з припущенням, що $u_0 \in D(A^n)$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді розв'язок $u(t) = u_h(t)$ можна записати за допомогою інтеграла Данфорда-Коші у вигляді:

$$u(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_I} \mathrm{e}^{-zt}\frac{R_A(z)}{z^n+\alpha}u^* dz, \tag{9}$$

де $u^* = (A^n + \alpha)\, u_0$, а контур інтегрування Γ_I такий, що обходить зліва спектр оператора A.
$\Gamma_I = \left\{z = \cosh(s) - 1 + \gamma_1 - ia_1\sinh(s) : -\sqrt[n]{\alpha} < \gamma_1 < \rho,\ a_1 \geqslant \mathrm{tg}(\varphi),\ s \in \mathbb{R}\right\}$.
Справедлива наступна теорема:

Теорема 4 *(Теорема 2.5) Нехай в умовах задачі* (1), (2) A *– секторіальний оператор в банаховому просторі* X, *спектр якого знаходиться в області, обмеженій* Γ_Σ, $u_0 \in D(A^n)$, $n \in \mathbb{N}$. *Тоді при* $t > 0$ *існує розв'язок однорідної задачі* (1), (2), *який можна зобразити за допомогою інтеграла* (9). *Якщо* $1 > n > 0$, *то* $u(t)$ *є слабким розв'язком* $t \in [0,T]$, *якщо ж* $n \geqslant 1$, *то - сильним.*

Для побудови наближення використовується наступний алгоритм:

1) задано a, γ_0, n, φ. Вибираємо довільні $a_1 \geqslant \mathrm{tg}(\varphi)$, $\alpha > 0$, $-\sqrt[n]{\alpha} < \gamma_1 < \rho$, N.

2) для $k = \overline{-N,N}$ знаходимо $h = \sqrt{\frac{\pi}{nN}}$, $z_k = \cosh(kh) - 1 + \gamma_1 - ia_1\sinh(kh)$, $\alpha_k = -\frac{\sinh(kh) - ia_1\cosh(kh)}{2\pi i\left(z_k^n + \alpha\right)}$.

3) розв'язуємо рівняння $(A - z_k)\,\hat{u}(z_k) = u^*$, $k = \overline{-N, N}$, де $u^* = (A^n + \alpha)\,u_0$.

4) знаходимо наближення u_N до розв'язку задачі Коші (1), (2) у вигляді $u_N(t) = h \sum\limits_{k=-N}^{N} \alpha_k \mathrm{e}^{-z_k t} \hat{u}\,(z_k) = h \sum\limits_{k=-N}^{N} \alpha_k e_k \hat{u}\,(z_k)$.

Теорема 5 *(Теорема 2.6) Нехай виконані умови теореми 4. Тоді для наближення $u_N(t)$ розв'язку однорідної задачі* (1), (2), *за допомогою алгоритму 1, справедлива оцінка похибки*

$$\|u(t) - u_N(t)\| = \|\eta_N\,(F, h)\| \leqslant \frac{2c}{n}\left[\frac{2\mathrm{e}^{-2\sqrt{\pi n N}d}}{1 - \mathrm{e}^{-2\sqrt{\pi n N}d}} + \mathrm{e}^{-\sqrt{\pi n N}}\right], \qquad (10)$$

де стала $c > 0$, не залежить від d, h.

У підрозділі 2.4 представлено експоненціально збіжний метод для неоднорідної задачі (1), (2) з секторіальним оператором A. Крива

$$\Gamma_0 = \{z(\xi) = a_0 \cosh \xi - i b_0 \sinh \xi :\ \xi \in (-\infty, \infty),\ b_0 = a_0 \tan \varphi\}, \qquad (11)$$

називається спектральною гіперболою. Вона охоплює спектральний сектор (3) За контур інтегрування в зображенні за допомогою інтеграла Данфорда-Коші вибрано гіперболу

$$\Gamma_I = \{z(\xi) = a_I \cosh \xi - i b_I \sinh \xi :\ \xi \in (-\infty, \infty)\}, \qquad (12)$$

з

$$a_I = a_0 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos \varphi},\ b_I = a_0 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos \varphi}, \qquad (13)$$

$$\cos \varphi = \frac{a_0}{\sqrt{a_0^2 + b_0^2}},\ \sin \varphi = \frac{b_0}{\sqrt{a_0^2 + b_0^2}}.$$

Такий вибір параметрів гарантує аналітичність підінтегрального виразу у смузі й існування даного інтегралу.

Наближення до розв'язку однорідної задачі $u_h(t)$ має вигляд:

$$u_N(t) = \frac{h}{2\pi i} \sum_{k=-N}^{N} \mathcal{F}(t, z(kh)), \qquad (14)$$

де

$$\mathcal{F}(t, \xi) = \mathrm{e}^{-z(\xi)t} z'(\xi) \left[(z(\xi)I - A)^{-1} - \frac{1}{z(\xi)} I\right] u_0.$$

Тут замість резольвенти $(zI - A)^{-1}$ взято $\left((zI - A)^{-1} - \frac{1}{z}\right)$. Така заміна, що забезпечує стійкість обчислення при малих значеннях t, була вперше запропонована В. Л. Макаровим. Ним доведено, що такий вибір наближення має рівномірну експоненціальну швидкість збіжності.

Для неоднорідного розв'язку побудовано 2 наближення. Перше з них використовує відображення на відрізок $[-1, 1]$ та інтерполяцію по вузлах Чебишева.

$$y(\tau) = u_p\left(\frac{T}{2}(\tau+1)\right), \quad \tau \in [-1,1].$$

Наближення побудовано у вигляді:

$$y(\tau) \approx y_N(\tau) = \frac{h}{2\pi i}\sum_{j=-N}^{N} \mathcal{F}_1(\tau, jh), \tag{15}$$

$$\mathcal{F}_1(\tau, jh) = \sum_{k=1}^{n}\int_{-1}^{\tau} e^{-z(jh)\frac{T}{2}(\tau-\xi)} L_{k,n-1}(\xi)d\xi z'(jh)R_A(z(jh))f_k,$$

де $L_{k,n-1}(\xi)$– фундаментальні поліноми Лагранжа по вузлах Чебишева,

$$h = \sqrt{\frac{\pi d}{\alpha(N+1)}}. \tag{16}$$

Теорема 6 *(Теорема 2.10) Нехай A— щільно визначений сильно позитивний оператор. Тоді $y_N(\tau)$ наближає $u_p\left(\frac{T}{2}(\tau+1)\right)$— розв'язок неоднорідної задачі Коші з похибкою*

$$\left\| u_p\left(\frac{T}{2}(\tau+1)\right) - y_N(\tau)\right\| \le c\ln n E_n(f) + \frac{C|||A^\alpha f|||}{\alpha} \mathrm{e}^{-\sqrt{\alpha\pi d(N+1)}}, \tag{17}$$

де h визначається в (16), сталі c, C є невід'ємними і не залежать від N і t, $E_n(f)$— оцінка найкращого наближення f поліномами в просторі X. У випадку, коли функція $f\left(\frac{T}{2}(\tau+1)\right)$ має аналітичне продовження з відрізка $[-1,1]$ в область $\mathcal{D}_\rho$, що знаходиться в середині еліпсу регулярності Бернштейна, оцінка (17) має експоненціальну швидкість збіжності.

Другий метод наближення використовує відоме $F(z)$– зображення Лапласа функції $f(t)$, що є секторіальним (за В.Томе)

$$u_{p,N}(t) = \frac{h}{2\pi i}\sum_{k=-N}^{N} \mathcal{F}(t, kh), \tag{18}$$

Теорема 7 *(Теорема 2.11) Нехай A— щільно визначений сильно позитивний оператор, $F(z)$— перетворення Лапласа функції $f(t)$ є секторіальна функція. Тоді наближення $u_{p,N}(t)$ до розв'язку неоднорідної задачі Коші має експоненціальний порядок збіжності $O(\exp\{-cN/\ln N\})$, при $h = \ln N/N$. $c > 0$ не залежить від N.*

В підрозділі 2.5 викладено результати для задачі Коші:

$$\frac{du(t)}{dt} + A(t)u(t) = f(t), \quad u(0) = u_0.$$

Тут t – дійсна змінна, невідома функція $u(t)$ і задана функція $f(t)$ приймають значення в банаховому просторі X, $A(t)$ – задана операторнозначна функція, чиї значення є щільно визначені, замкнуті лінійні оператори в X з областю визначення $D(A,t)$, що залежить від параметра t. Розглядається випадок, коли залежність від часу визначається додатковою умовою в задачі:

$$\begin{aligned} &\frac{du(t)}{dt} + A(t)u(t) = f(t),\\ &\partial_1 u(t) + \partial_0(t)u(t) = g(t),\\ &u(0) = u_0, \end{aligned} \tag{19}$$

де $u(t)$ – невідома функція $u : (0,T) \to D(A) \subset X$ зі значеннями в банаховому просторі X, $f(t)$ є заданою вимірною функцією $f : (0,T) \to X$ з $L_q(0,T;X)$ з нормою $\|f\| = \{\int_0^T \|f\|_X^q dt\}^{1/q}$, $A(t) : D(A) \to X$ є щільно заданим, замкнутим оператором в X з областю визначення $D(A)$, що не залежить від t, $g : (0,T) \to Y$ – задана функція з $L_q(0,T;Y)$ зі значеннями в деякому іншому банаховому просторі Y. $\partial_1 : D(A) \to Y$ (не залежить від t), $\partial_0(t) : D(A) \to Y$ (може залежати від t) –лінійні оператори. У прикладних застосуваннях друге рівняння – просто крайова умова, залежна від часу, з відповідними операторами ∂_1, ∂_0.

Припускається, що виконуються наступні умови:

(B1) Оператор $A^{(2)}(t)$ є сильно позитивним. Отже, існує додатна стала c і фіксоване κ такі, що

$$\|[A^{(2)}(t)]^{\kappa} \mathrm{e}^{-sA^{(2)}(t)}\| \le cs^{-\kappa}, \quad s > 0, \quad \kappa > 0.$$

(B2) $\exists\ \omega > 0$ таке, що

$$\|\mathrm{e}^{-sA^{(2)}(t)}\| \le \mathrm{e}^{-\omega s} \quad \forall s,t \in [0,T].$$

(B3) $\exists c > 0 :$

$$\|[A^{(2)}(t) - A^{(2)}(s)][A^{(2)}(t)]^{-\gamma}\| \le c|t-s| \quad \forall t,s,\ 0 \le \gamma \le 1;$$

(B4) $\exists c > 0 :$

$$\|[A^{(2)}(t)]^{\beta}[A^{(2)}(s)]^{-\beta} - I\| \le c|t-s| \quad \forall t,s \in [0,T], \quad \beta \in (0,1).$$

(B5) Оператор $\partial_0(t) = \mu(t)\partial_0$ і задовольняє наступні умови:

$$\begin{aligned} &\|\mu(t) - \mu(t')\|_{Y\to Y} \le M|t-t'|,\\ &\|\partial_0\|_{X\to Y} \le c, \end{aligned}$$

зі сталими M, $c > 0$.

(B6) Для деякого $p \ge 1$ і $\gamma \ge 0$ виконується

$$\left[\int_0^t \|[A^{(2)}(\eta)]^{1+\gamma} \mathrm{e}^{-A^{(2)}(\eta)(t-\lambda)} B^{(1)}(\eta)\|_{Y\to X}^p d\lambda\right]^{1/p} \le c \quad \forall t,\ \eta \in [0,T],$$

де оператор $B^{(1)}(\eta) : Y \to D(A)$ є проекційним оператором.

Доведено, що при виконанні **(B1)**–**(B6)**, задачу (19) можна записати у вигляді еквівалентної системи інтегральних рівнянь

$$\mathcal{U}(t) = \mathcal{D}\int_0^t \mathcal{K}(t,\tau)\mathcal{U}(\tau)d\tau + \mathcal{F}(t), \tag{20}$$

де $\mathcal{U}(t)$, $\mathcal{K}(t,\tau)$, $\mathcal{F}(t)$, $\mathcal{D}$– векторно-значні функції, що виражаються через параметри задачі (19).

Теорема 8 *(Теорема 2.14) Нехай виконуються умови* **(B1)–(B6)**. *Тоді система рівнянь (20) має єдиний розв'язок $\mathcal{U}_\gamma^*(t)$ в $\mathcal{Y}$. Цей розв'язок може бути знайдений методом послідовних наближень, який має факторіальну швидкість збіжності. Для $\mathcal{U}_\gamma^*(t)$ виконується оцінка стійкості*

$$\int_0^t \|\mathcal{U}_\gamma^*(\tau)\|_{\mathcal{Y}}^q d\tau \le 2^{q/p} \int_0^t \|\mathcal{F}(\tau)\|_{\mathcal{Y}}^q \mathrm{e}^{2^{q/p} c^{2q}(t-\tau)} d\tau.$$

Наближення до розв'язку задачі (19) шукається у вигляді $x_k \approx u(t_k)$, $y_k \approx \partial_0 u(t_k)$, t_k– узагальнені вузли полінома Чебишева першого роду:

$$\begin{aligned} x_k &= \mathrm{e}^{-A_k^{(2)}\tau_k} x_{k-1} + \sum_{j=1}^n \alpha_{kj} x_j + \sum_{j=1}^n \beta_{kj} y_j + \phi_k, \\ y_k &= \partial_0 \mathrm{e}^{-A_k^{(2)}\tau_k} x_{k-1} + \partial_0 \sum_{j=1}^n \alpha_{kj} x_j + \partial_0 \sum_{j=1}^n \beta_{kj} y_j + \partial_0 \phi_k, \\ k &= 1, \dots, n, \quad x_0 = u_0, \quad y_0 = \partial_0 u_0, \end{aligned} \tag{21}$$

де

$$\alpha_{kj} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathrm{e}^{-A_k^{(2)}(t_k-\eta)} [A_k - A(\eta)] L_{j,n-1}(\eta) d\eta,$$

$$\beta_{kj} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} A_k^{(2)} \mathrm{e}^{-A_k^{(2)}(t_k-\lambda)} B_k^{(1)} [\mu(\lambda) - \mu_k] L_{j,n-1}(\lambda) d\lambda,$$

$$\phi_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathrm{e}^{-A_k^{(2)}(t_k-\eta)} f(\eta) d\eta + \int_{t_{k-1}}^{t_k} A_k^{(2)} \mathrm{e}^{-A_k^{(2)}(t_k-\lambda)} B_k^{(1)} g(\lambda) d\lambda,$$

$L_{j,n-1}(\eta)$– фундаментальні поліноми Лагранжа по заданій системі вузлів, $B_k^{(1)}$– проекційний оператор, де індекс k означає, що значення шукається у вузлі t_k. Для похибок $z_{x,k} = u_k - x_k$ $z_{y,k} = \partial_0 u_k - y_k$ справедлива теорема:

Теорема 9 *(Теорема 2.15) Нехай існує розв'язок задачі* (19). *Тоді* $\exists$ $c > 0$*:*

1. *Для n достатньо великого виконується*
$$\begin{aligned} \|\!|z_x|\!\| &= \max_k \|z_{x,k}\| \le c_1 n^{-1/q} \cdot \ln n \cdot E_n(\partial_0 u), \\ \|\!|z_y|\!\| &= \max_k \|z_{y,k}\| \le c_2 n^{-1/q} \cdot \ln n \cdot E_n(\partial_0 u), \end{aligned} \tag{22}$$
де u – розв'язок (19) $c_1, c_2 > 0$;

2. *Система рівнянь* (21) *зводиться до системи*
$$x = G_1 x + S^{-1} Q(f_x + \tilde{f}_x)$$

з матрицями G_1, S, Q, що виражаються через параметри системи (21) *і яка може бути наближено розв'язана за допомогою методу послідовних наближень зі швидкістю геометричної прогресії зі знаменником $q \le c\frac{\ln n}{n^{1/q}} < 1$ для n достатньо великого.*

Зауваження 1 *У оцінках* (22) *$E_n(\partial_0 u)$– похибка найкращого наближення поліномами. Припускаючи що векторно-значна функція $\partial_0 u(t)$ має аналітичне продовження з відрізка $[-1, 1]$ в область $\mathcal{D}_\rho$, обмежену еліпсом Бернштейна $\mathcal{E}_\rho$ з сумою півосей $\rho > 1$, отримаємо, що швидкість збіжності буде експоненціальною*

У розділі 3 викладено дослідження та побудови методів без насичення точності для нелокальних задач для диференціальних рівнянь першого порядку з необмеженими операторними коефіцієнтами. У підрозділі 3.1 подано результати розробки експоненціально збіжного метода наближення розв'язку m-точкової нелокальної задачі. Розглядається рівняння (1) з нелокальною умовою:

$$u(0) + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k u(t_k) = u_0, \quad 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m \le T, \tag{23}$$

де $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1, m}$, $f(t)$– задана векторно-значна функція в банаховому просторі X, $u_0 \in X$. Для цієї задачі знайдено зображення розв'язку у вигляді: $u(t) = u_h(t) + u_{ih}(t)$, де $u_h(t) = \mathrm{e}^{-At} B^{-1}(A) u_0$ – розв'язок однорідної задачі,

$$u_{ih}(t) = -\mathrm{e}^{-At} B^{-1}(A) \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \int_0^{t_i} \mathrm{e}^{-A(t_i - \tau)} f(\tau) d\tau + \int_0^t e^{-A(t-\tau)} f(\tau) d\tau,$$

$$B(A) = I + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathrm{e}^{-At_i}.$$

Для розв'язку однорідного рівняння, використовуючи інтеграл Данфорда-Коші отримано зображення:

$$u_h(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_I} \mathrm{e}^{-zt} B^{-1}(z) R_A(z) u_0 dz,$$

після параметризації якого маємо

$$u_h(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(t, \xi) d\xi, \tag{24}$$

де

$$\mathcal{F}(t, \xi) = F_A(t, \xi) u_0,$$

$$F_A(t, \xi) = \frac{\mathrm{e}^{-z(\xi)t} z'(\xi)}{1 + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{e}^{-z(\xi)t_i}} \left[(z(\xi) I - A)^{-1} - \frac{1}{z(\xi)} I \right],$$

$$z(\xi) = a_I \cosh \xi - i b_I \sinh \xi, \; z'(\xi) = a_I \sinh \xi - i b_I \cosh \xi.$$

Наближення будується за допомогою Sinc-квадратури:

$$u_{h,N}(t) = \frac{h}{2\pi i} \sum_{k=-N}^{N} \mathcal{F}(t, z(kh)). \tag{25}$$

Теорема 10 *(Теорема 3.1) Нехай A – секторіальний оператор, $u_0 \in D(A^{\alpha})$, $\alpha \in (0,1)$. Тоді для наближеного розв'язку (25) однорідної нелокальної задачі* (1), (23) *справедлива експоненціальна оцінка похибки рівномірно по $t \geq 0$ порядку $\mathcal{O}(\mathrm{e}^{-c\sqrt{N}})$ за умови, що $h = 1/\sqrt{N}$ і порядку $\mathcal{O}\left(\max\left\{\mathrm{e}^{-\pi dN/(c_1 \ln N)}, \quad \mathrm{e}^{-c_1 a_I tN/2 - c_1 \alpha \ln N}\right\}\right)$, $\forall t > 0$ за умови, що $h = \ln N/N$, $c, c1 > 0$, не залежать від N.*

Для наближення неоднорідної частини, розіб'ємо її на дві частини

$$u_{ih}(t) = u_{1,ih}(t) + u_{2,ih}(t),$$

де

$$u_{1,ih}(t) = \int_0^t e^{-A(t-\tau)} f(\tau) d\tau, \quad u_{2,ih}(t) = -\sum_{j=1}^{m} \alpha_j u_{2,ih,j}(t),$$

$$u_{2,ih,j}(t) = \int_0^{t_i} B^{-1} \mathrm{e}^{-A(t+t_i-\tau)} f(\tau) d\tau.$$

$u_{1,ih}(t)$ наблизимо за допомогою

$$\begin{aligned} u_{1,ih}(t) \approx u_{1,N}(t) = & \frac{h}{2\pi i} \sum_{k=-N}^{N} z'(kh)[(z(kh)I - A)^{-1} - \frac{1}{z(kh)} I] \times \\ & \times h \sum_{p=-N}^{N} \mu_{k,p}(t) f(\omega_p(t)), \end{aligned} \tag{26}$$

де

$$\mu_{k,p}(t) = \frac{t}{2} \exp\{-\frac{t}{2} z(kh)[1 - \tanh(ph)]\} / \cosh^2(ph),$$

$$\omega_p(t) = \frac{t}{2}[1 + \tanh(ph)].$$

$$\begin{aligned} u_{2,ih,j}(t) \approx & u_{2,j,N}(t) = \frac{h}{2\pi i} \sum_{k=-N}^{N} \mathrm{e}^{-z(kh)t} z'(kh) B^{-1}(z(kh)) \times \\ & \times \left[(z(kh)I - A)^{-1} - \frac{1}{z(kh)} I \right] h \sum_{p=-N}^{N} \mu_{k,p,j} f(\omega_{p,j}). \end{aligned} \tag{27}$$

Теорема 11 *(Теорема 3.3) Нехай A– секторіальний оператор, $f(t) \in D(A^{\alpha})$, $\alpha > 0$ для $t \in [0, \infty]$ можна аналітично продовжити в $\Sigma_f = \{\rho \mathrm{e}^{i\theta_1} : \rho \in [0, \infty], |\theta_1| < \varphi\}$ де виконується оцінка*

$$\|A^{\alpha} f(w)\| \leq c_{\alpha} e^{-\delta_{\alpha} |Re\, w|}, \; w \in \Sigma_f \tag{28}$$

з $\delta_\alpha \in (0, \sqrt{2}\rho_0]$, *тоді для наближення неоднорідного розв'язку при* $h = 1/\sqrt{N}$ *справедлива оцінка похибки*

$$\|u_{ih}(t) - (u_{1,N}(t) + u_{2,N}(t))\| = \|\mathcal{E}_N(t)\| \le c\mathrm{e}^{-c_1\sqrt{N}} \qquad (29)$$

зі сталими $c, c_1 > 0$, *що залежать від* α, φ, ρ_0 *і не залежать від* N, t.

У підрозділі 3.2 досліджено необхідні та достатні умови існування розв'язку нелокальної задачі (1), (23)

Теорема 12 *(Теорема 3.4) Нехай* A *– сильно-позитивний оператор з спектральними параметрами* (ρ, φ), *а функція* $f(t) \in L((0;T), X)$. *Тоді для існування слабкого розв'язку задачі* (1), (23) *необхідно і достатньо щоб множина нулів* $Ker(B(z)) \equiv \{z : B(z) = 0, z \in C\}$, *функції* $B(z)$ *асоційованої з нелокальною умовою* (23), *задовольняла*

$$Ker(B(z)) \subset \mathbb{C}\backslash\Sigma \qquad (30)$$

Підрозділ 3.3 присвячений застосуванню методу з підрозділу 3.1 для побудови наближеного розв'язку математичної моделі поширення аерозольного забруднення в атмосфері. Дана модель складається з рівняння переносу-дифузії, відповідних крайових умов та періодичної умови по часу. В операторному вигляді її можна записати як частинний випадок задачі (1), (23) при $m = 2$, $\alpha_1 = -1$. Наближений метод з підрозділу 3.1 адаптовано до умов математичної моделі, знайдено оцінки швидкості збіжності та проведено чисельні розрахунки.

У підрозділі 3.4 розглядається задача для рівняння (1) з умовою

$$u(0) + Bu(T) = u_0, \quad 0 < T, \qquad (31)$$

де $B : X \to X$ – обмежений оператор, $f(t)$ – задана векторно-значна функція зі значеннями в банаховому просторі X, $u_0 \in X$. Оператор A з областю визначення $D(A)$ є секторіальним. За допомогою заміни задача (1), (32) зводиться до задачі з однорідним рівнянням. Тоді її розв'язок при виконанні умови

$$\|B\| < 1, \qquad (32)$$

можна записати у вигляді інтеграла Данфорда-Коші

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_I} \mathrm{e}^{-zt}\left[I + \mathrm{e}^{-zT}B\right]^{-1}\left[(zI - A)^{-1} - \frac{1}{z}I\right]u_0 dz,$$

або після параметризації контуру інтегрування (12) отримаємо зображення аналогічне (24). Для наближення використовується Sinc-квадратура (25), для якого знайдено апріорні оцінки похибок.

Теорема 13 *(Теорема 3.5) Нехай* A *– секторіальний оператор,* $u_0 \in D(A^\alpha)$, $\alpha \in (0, 1)$. *Тоді наближення розв'язку однорідної нелокальної задачі* (1), (31) *має експоненціальну швидкість збіжності рівномірну по* $t \ge 0$ *порядку* $\mathcal{O}(\mathrm{e}^{-c\sqrt{N}})$ *при* $h = (1/\sqrt{N})$. *Для* $h = \ln N/N$ *і кожного фіксованого* $t > 0$ *наближення має порядок* $\mathcal{O}\left(max\left\{\mathrm{e}^{-\pi dN/(c_1 \ln N)}, \mathrm{e}^{-c_1 a_I tN/2 - c_1\alpha \ln N}\right\}\right)$. *Сталі* $c, c_1 > 0$ *не залежать від* t, N.

Підрозділ 3.5 присвячено побудові наближеного методу розв'язування нелокальної двоточкової задачі для еволюційного рівняння першого порядку

$$\begin{aligned} &\frac{du(t)}{dt} + A_1(t)u(t) = f_1(t), \\ &u(0) + \alpha u(1) = \varphi, \end{aligned} \tag{33}$$

де $A_1(t)$– секторіальний оператор з областю визначення $D(A_1)$, що не залежить від t в банаховому просторі X, φ– заданий вектор, а $f_1(t)$– задана векторно-значна функція, $\alpha \in \mathbb{R}$. Припускається також, що для A_1 виконуються умови

$$\|[A_1(t) - A_1(s)]A_1^{-\gamma}(t)\| \leq L_{1,\gamma}|t-s| \quad \forall t,\ s,\ 0 \leq \gamma < 1, \tag{34}$$

$$\|A_1^{\gamma}(t)A_1^{-\gamma}(s) - I\| \leq L_{\gamma}|t-s| \quad \forall t,\ s \in [0,1]. \tag{35}$$

Векторно-значна функція $f_1(t) \in C(0,1;X)$.

Спершу, за допомогою заміни змінної $t \to \frac{1+t}{2}$ задача (33) зводиться до задачі на $[-1,1]$ і для $v(t) = u\left(\frac{1+t}{2}\right)$ маємо

$$\begin{aligned} &\frac{dv(t)}{dt} + A(t)v(t) = f(t), \\ &v(-1) + \alpha v(1) = \varphi, \end{aligned} \tag{36}$$

де $A(t) = \frac{1}{2}A_1\left(\frac{1+t}{2}\right)$, $f(t) = \frac{1}{2}f_1\left(\frac{1+t}{2}\right)$. Наближення будується на сітці $\omega_n = \{t_k,\ k = 0, ..., n\}$ з $n+1$ точки на $[-1,1]$ що є вузлами Чебишева-Гауса-Лобато $t_k = \cos\left(\frac{n-k}{n}\pi\right)$. Для $x_k \approx v(t_k)$ отримано систему рівнянь

$$\begin{aligned} &x_0 + \alpha x_n = \varphi, \\ &x_k = \mathrm{e}^{-A_k\tau_k}x_{k-1} + \sum_{j=0}^{n}\alpha_{kj}x_j + \phi_k, \quad k = \overline{1,n}, \end{aligned} \tag{37}$$

з

$$\alpha_{kj} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathrm{e}^{-A_k(t_k-s)}[A_k - A(s)]L_{j,n}(s)ds,$$

$$\phi_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathrm{e}^{-A_k(t_k-s)}f(s)ds, \quad k = \overline{1,n}, \quad j = \overline{0,n},$$

де $L_{j,n}(s)$ є фундаментальними поліномами Лагранжа по системі ω_n, $\tilde{z}_k = A_k^{\gamma}(v(t_k) - x_k)$ справедлива теорема:

Теорема 14 *(Теорема 3.6) Нехай $A_1(t)$– секторіальний і виконуються умови* (34), (35), *тоді існує додатна стала c така, що*

1) *для n достатньо великого*

$$|||\tilde{z}||| = \max_k \|\tilde{z}_k\| \leq cn^{\gamma-1} \cdot \ln n \cdot E_n(A_0^{\gamma}v),$$

де v– розв'язок (36)*;*

2) система (37) *приводиться до вигляду*

$$\tilde{x} = S^{-1}B\tilde{x} + S^{-1}\phi,$$

з матрицями S^{-1}, B, *що залежать від параметрів* (37) *і яку можна розв'язувати методом послідовних наближень*

$$\tilde{x}^{(k+1)} = S^{-1}B\tilde{x}^{(k)} + S^{-1}\phi,\ k = 0, 1, ...;\ \tilde{x}^{(0)} - \text{довільне},$$

з швидкістю збіжності геометричної прогресії зі знаменником $q \leq cn^{\gamma-1}\ln(n) < 1$ *для достатньо великого* n.

Як і раніше, $E_n(w)$– похибка найкращого наближення w поліномами степеня не більше n. Тому оцінка похибки не має насичення точності.

У підрозділі 3.6 наведено дослідження задачі для рівняння (1) з умовою

$$u(0) + aA^{\beta}u(T) = u_0, \tag{38}$$

де a, $\beta > 0$– задані сталі, $u_0 \in X$. Оператор A з областю визначення $D(A)$ в банаховому просторі X є секторіальним. За допомогою заміни задача (1), (38) зводиться до задачі з однорідним рівнянням. Наближення шукається за допомогою Sinc-квадратурної формули:

$$u_N(t) = h \sum_{k=-N}^{N} \mathcal{F}(t, z(kh)), \tag{39}$$

$$\mathcal{F}(t, z) = \frac{1}{2\pi i} \mathrm{e}^{-zt} \left[1 + \alpha z^{\beta} \mathrm{e}^{-zT}\right]^{-1} z' \left(R_A - I/z\right) u_0,$$

де z– точки на контурі (12), z'– точки на продиференційованому контурі (12) з параметрами визначеними в (13). Виконується теорема:

Теорема 15 *(Теорема 3.7) Нехай A – секторіальний оператор, $u_0 \in D(A^{\alpha})$, $\alpha \in (0, 1)$ і виконується умова*

$$C_1 = |\alpha| \left(1 + \left(\frac{b_I}{a_I}\right)^2\right)^{\beta/2} \left(\frac{\beta}{T}\right)^{\beta} \mathrm{e}^{-\beta} < 1.$$

Тоді Sinc-квадратура (39) *апроксимує $u(t)$ з експоненціальною швидкістю збіжності порядку $\mathcal{O}(e^{-c\sqrt{N}})$ при $h = (1/\sqrt{N})$. Для $h = \ln N/N$ і кожного фіксованого $t > 0$ наближення має порядок $\mathcal{O}\left(max\left\{\mathrm{e}^{-\pi dN/(c_1 \ln N)},\quad \mathrm{e}^{-c_1 a_I tN/2 - c_1 \alpha \ln N}\right\}\right)$. Сталі $c, c_1 > 0$ не залежать від t, N.*

У підрозділі 3.7 наведено дослідження задачі для рівняння (1) з умовою

$$u(0) + \int_0^T w(s)u(s)ds = u_0, \tag{40}$$

де $w(s) \geq 0$– задана функція, $u_0 \in X$. Як і раніше, за допомогою заміни ця задача зводиться до задачі з однорідним рівнянням. Достатньою умовою існування розв'язку є $\|w(s)\|_{C[0,T]} < \frac{1}{T}$. Наближення шукається у вигляді (39), де

$$\mathcal{F}(t,z)=\frac{1}{2\pi i}\mathrm{e}^{-zt}\left[1+\int_0^T w(s)\mathrm{e}^{-zs}ds\right]^{-1} z'\left(R_A-I/z\right)u_0,$$

де z– точки на контурі (12), з параметрами визначеними в (13). Інтеграл в знаменнику обчислюється за допомогою квадратурної формули типу Гауса:

$$\mathcal{I}=\int_0^T w(s)\mathrm{e}^{-z(\zeta)s}ds\approx\sum_{j=0}^{n}\frac{T}{2}\omega_j w(\xi_j)\mathrm{e}^{-z(\zeta)\xi_j}=\mathcal{I}_n, \tag{41}$$

$\xi_j=\frac{T}{2}(\theta_j+1)$, де $\{\theta_j\}$– набір з $n+1$ кореня полінома Лежандра $P_{n+1}(x)$ і $\{\omega_j\}$ – множина ваг квадратурної формули Гауса.

Теорема 16 *(Теорема 3.9) Нехай A– секторіальний оператор, $u_0\in D(A^{\alpha})$, $\alpha\in(0,1)$ і виконуються умови існування розв'язку. Тоді наближення до $u(t)$ має експоненціальну швидкість збіжності у випадку коли $w(t)$ має аналітичне продовження в еліпс Бернштейна.*

У підрозділі 3.8 викладено побудову наближеного методу для рівняння (1) з нелінійною інтегральною умовою

$$u(-1)-\int_{-1}^{1}w(s,u(s))ds=u_0, \tag{42}$$

де $u_0\in X$– заданий вектор, $w(t,u):\ (\mathbb{R}_+\times X)\to X$ – задана функція (нелінійний оператор). Для побудови наближення використовується інтегральне нелінійне рівняння, яке є наслідком задачі (1), (42)

$$u(t)=\mathrm{e}^{-A(t+1)}u_0+\mathrm{e}^{-A(t+1)}\int_{-1}^{1}w(s,u(s))ds. \tag{43}$$

Для наближення операторної експоненти використовується експоненціально збіжний метод з підрозділу 2.3. Наближення інтеграла будується за допомогою квадратурної формули по системі вузлів Чебишева-Гауса-Лобато (квадратурна формула Кленшоу-Куртіса). Це призводить до системи нелінійних рівнянь, розв'язок якої шукається методом послідовних наближень.

$$\vec{y}^{(k)}=\mathcal{A}\vec{w}(\vec{y}^{(k-1)})+\vec{p},\quad \vec{y}^{(0)}=\vec{p}. \tag{44}$$

Припускається, що виконуються умови:

$$\|A^{\alpha}\left(w\left(t,u\right)-w\left(t,v\right)\right)\|\le L\left\|u-v\right\|,\quad \forall t\in[-1,1], \tag{45}$$

$$\|\mathrm{e}^{-A(t+1)}A^{-\alpha}\|\le\frac{c}{\alpha},\quad c>0,$$

з деякими сталими $0<L<\infty$ та $\alpha>0$. Доведено, що при виконанні умови

$$q\equiv\frac{2Lc}{\alpha}<1. \tag{46}$$

метод послідовних наближень (44) є збіжним.

Теорема 17 *(Теорема 3.11) Нехай $A : X \to X$ – лінійний секторіальний оператор, а функція $w(t,u) : (\mathbb{R}_+ \times X) \to D(A^\alpha) \subseteq X$ має аналітичне продовження в еліпс Бернштейна $\mathcal{E}_\rho$ та задовольняє умову Ліпшиця (45) з константами L, α і виконується умова (46). Тоді похибка наближення розв'язку нелінійного інтегрального рівняння (43) вектором $\vec{y}^k$ має вигляд*

$$|||\vec{u} - \vec{y}^k||| \le |||\vec{z}||| + \frac{q^{k+1}}{1-q}|||\vec{p}|||,$$

$$|||z||| \le \frac{c\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\pi d \alpha (N+1)}}}{(1-q)\alpha}\left(\|A^\alpha u_0\| + \int_{-1}^{1}\|A^\alpha w(s,u(s))\|ds\right) + \\ + \frac{c_1 \ln n\, E_n\left(A^\alpha w(\cdot, u(\cdot))\right)}{1-q}.$$

У розділі 4 викладено дослідження присвячені задачам для диференціальних рівнянь другого порядку з необмеженими операторними коефіцієнтами. У підрозділі 4.1 розглядається задача для строго демпфованого диференціального рівняння другого порядку в банаховому просторі

$$\begin{aligned} &\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \alpha A \frac{du(t)}{dt} + Au = 0, \qquad t > 0 \\ &u(0) = \varphi, \\ &\frac{du(0)}{dt} = \psi, \end{aligned} \tag{47}$$

де A– оператор зі спектром на $[\gamma_0, \infty)$ дійсної осі і оцінкою резольвенти (4) $\forall z \notin \Sigma_\epsilon = \{z : |\arg(z) < \epsilon|\}$. Задача (47) може бути записана у вигляді

$$\begin{aligned} &\frac{dw(t)}{dt} + Bw = 0, \\ &w(0) = w_0, \end{aligned} \tag{48}$$

де

$$w_0 = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ A & \alpha A \end{pmatrix}.$$

Якщо ввести норму $|||v||| = \max\{\|v_1\|, \|v_2\|\}$ для простору векторів $v = (v_1, v_2)^T$ та відповідну матричну норму, то

$$(zI - B)^{-1} = (\alpha z - 1)^{-1}\mathcal{R}(z)\begin{pmatrix} zI - \alpha A & -I \\ A & zI \end{pmatrix}, \tag{49}$$

де

$$\mathcal{R}(z) = (z^2(\alpha z - 1)^{-1}I - A)^{-1}.$$

$$|||(zI - B)^{-1}||| \le \frac{C}{1+|z|}, \qquad z \notin \Sigma_\theta,$$

а сектор Σ_θ містить множину

$$\Psi = \left\{ z : |z-\alpha| = \alpha^{-1},\ \mathrm{Re}z \geq \frac{1}{2}\alpha\gamma_0 \right\} \bigcup \left\{ z : \mathrm{Im}z = 0,\ \mathrm{Re}z \geq \alpha^{-1} \right\}.$$

$$\theta = \arccos \frac{\alpha\sqrt{\gamma_0}}{2}.$$

Спектральні властивості оператора B гарантують існування операторної експоненти e^{-Bt} та розв'язок задачі (48) може бути записаний у вигляді

$$w(t) = \mathrm{e}^{-Bt} w_0,$$

для якого використовуємо наближення

$$w(t) \approx w_N(t) = \frac{h}{2\pi\mathrm{i}} \sum_{k=-N}^{N} f_1(t, z(kh)), \tag{50}$$

$$f_1(t,s) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \mathrm{e}^{-tz(s)} z'(s) \left[(z(s)I - B)^{-1} - \frac{1}{z(s)+1} \right] w_0.$$

Теорема 18 *(Теорема 4.1) Нехай* $\varphi,\ \psi \in D(A^\sigma)$ *і* A *– оператор має спектр* $\Sigma(A)$*, що знаходиться на* $[\gamma_0, \infty)$*. Тоді формула* (50) *задає наближений розв'язок початкової задачі* (48) *з оцінкою порядку* $\mathcal{O}(\mathrm{e}^{-c\sqrt{N}})$ *при* $t \geq 0$, $h = \sqrt{\frac{\pi d}{\sigma(N+1)}}$ *і оцінкою порядку* $\mathcal{O}(\mathrm{e}^{-cN/\ln N})$ *при* $t > 0$, $h = \ln N/N$.

У підрозділі 4.2 розглядається крайова задача для диференціального рівняння другого порядку еліптичного типу

$$\frac{d^2u}{dx^2} - Au = -f(x), \quad u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1, \tag{51}$$

з невідомою $u(x)$, відомими граничними умовами u_0, u_1 і заданою правою частиною $f(x)$, оператор A– секторіальний. Розв'язок цієї задачі може бути записаний у вигляді:

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x), \tag{52}$$

де

$$u_h(x) = E(x; \sqrt{A})u_1 + E(1-x; \sqrt{A})u_0, \tag{53}$$

є розв'язком однорідної задачі, $E(x;\sqrt{A}) = \sinh^{-1}(\sqrt{A}) \sinh(x\sqrt{A})$ а

$$u_p(x) = \int_0^1 G(x,s;A) f(s) ds, \tag{54}$$

розв'язок неоднорідної задачі з нульовими крайовими умовами,

$$G(x,s;A) \equiv G(x,s) =$$

$$= [\sqrt{A} \sinh \sqrt{A}]^{-1} \begin{cases} \sinh(x\sqrt{A}) \sinh((1-s)\sqrt{A}) & x \leq s, \\ \sinh(s\sqrt{A}) \sinh((1-x)\sqrt{A}) & x \geq s \end{cases}. \tag{55}$$

Якщо $u_0 = 0$, то розв'язок однорідної задачі можна записати у вигляді:

$$u(x) = u_{hl}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_I} E(x;\sqrt{z})(zI-A)^{-1}u_1 dz, \qquad (56)$$

Γ_I– гіпербола (12) з параметрами, визначеними в (13). Наближення шукається у вигляді

$$u_N(t) = u_{hl,N}(x) = \frac{h}{2\pi i}\sum_{k=-N}^{N}\mathcal{F}(t, z(kh)), \qquad (57)$$

$$\mathcal{F}(x,\xi) = E(x;\sqrt{z(\xi)})z'(\xi)\left[(z(\xi)I-A)^{-1} - \frac{1}{z(\xi)}I\right]u_1.$$

Теорема 19 *(Теорема 4.2) Нехай A – секторіальний оператор, $u_1 \in D(A^\alpha)$, $\alpha \in (0,1)$. Тоді Sinc- наближення (57) розв'язку однорідної задачі $u_{hl}(x)$ має рівномірну відносно $x \in [0,1]$ експоненціальну швидкість збіжності, яка має порядок $\mathcal{O}(\mathrm{e}^{-c\sqrt{N}})$ рівномірно по $x \in [0,1]$ при $h = (1/\sqrt{N})$ і порядок $\mathcal{O}\left(\max\left\{\mathrm{e}^{-\pi dN/(c_1 \ln N)},\ \mathrm{e}^{-c_1(x-1)\tilde{a}N/2 - c_1\alpha\ln N}\right\}\right)$ для кожного фіксованого $x \in [0,1)$ при $h = \ln N/N$, де сталі $c, c_1 > 0$ не залежать від t, N.*

Для побудови розв'язку неоднорідного рівняння використовується формула

$$u_{pa,N}(t) = \frac{h^2}{2\pi i}\sum_{k,j=-N}^{N} z'(kh)[(z(kh)I-A)^{-1} - \frac{1}{z(kh)}I]\times \qquad (58)$$
$$\times\left[\mu_{k,1,j}(x)f(\omega_{1,j}(x)) + \mu_{k,2,j}(x)f(\omega_{2,j}(x))\right],$$

де

$$\mu_{k,1,j}(x) = \frac{x\sinh((1-x)\sqrt{z(kh)})\sinh\left(0.5x\sqrt{z(kh)}(1+\tanh jh)\right)}{2\sqrt{z(kh)}\sinh\sqrt{z(kh)}\cosh^2 jh},$$

$$\omega_{1,j}(x) = 0.5x[1+\tanh(jh)],$$

$$\mu_{k,2,j}(x) = \frac{(1-x)\sinh(x\sqrt{z(kh)})\sinh\left(0.5(1-x)\sqrt{z(kh)}\,(1-\tanh(jh))\right)}{2\sqrt{z(kh)}\sinh\sqrt{z(kh)}\cosh^2 jh},$$

$$\omega_{2,j}(x) = 0.5x[1-\tanh(jh)] + 0.5[1+\tanh(jh)],$$

$$h = 1/\sqrt{N}.$$

Теорема 20 *(Теорема 4.3) Нехай A – секторіальний оператор, $f(x) \in D(A^\alpha)$, $\alpha > 0$, яка має аналітичне продовження в область $\mathcal{A}_\nu(1)$, що є відображенням $w = [1+\tanh z]/2$ смуги шириною 2ν навколо дійсної вісі D_ν. Тоді наближення (58) є збіжним з оцінкою швидкості збіжності:*

$$\|\mathcal{E}_N(x)\| = \|u_p(x) - u_{ap,N}(x)\| \le \frac{c}{\alpha}\mathrm{e}^{-c_1\sqrt{N}}\max_{w\in\mathcal{A}_\nu(1)}\|A^\alpha f(w)\|, \qquad (59)$$

рівномірно по $x \in [0,1]$ з додатними сталими c, c_1, що залежать від спектральних властивостей A, але незалежними від N, x.

У розділі 5 викладено результати, що стосуються задач для рівняння другого порядку еліптичного типу з необмеженим операторним коефіцієнтом та нелокальними умовами. У підрозділі 5.1 розглядається задача:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2u}{dx^2} - Au = 0, \quad x \in (0,1) \\ &u(0) = 0, \\ &u(1) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k u(\xi_k) + u_1, \end{aligned} \tag{60}$$

де $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1,m}$, $0 < \xi_1, \xi_2, \cdots < \xi_m < 1$, $u_1 \in X$. Оператор A з областю визначення $D(A)$ в банаховому просторі X є секторіальним. Розв'язок (60) можна формально записати у вигляді

$$u(x) = \sinh(\sqrt{A}x)\sinh^{-1}(\sqrt{A})B^{-1}u_1, \tag{61}$$

якщо існує оператор B^{-1}, де

$$B = I - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \sinh(\sqrt{A}\xi_k)\sinh^{-1}(\sqrt{A}).$$

Лема 1 *(Лема 5.1) Нехай A– секторіальний оператор. Якщо виконується умова*

$$\sum_{k=1}^{m} |\alpha_k| \frac{\cosh\left(\xi_k\sqrt{a_I}\right)}{\sinh\sqrt{a_I}} < 1, \tag{62}$$

тоді існує єдиний розв'язок задачі (60)*, який має зображення*

$$u(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_I} \frac{\sinh(\sqrt{z}x)}{\sinh(\sqrt{z})\left[1 - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \frac{\sinh(\sqrt{z}\xi_k)}{\sinh(\sqrt{z})}\right]} R_A^1(z)u_1 dz, \tag{63}$$

де Γ_I– гіпербола (12) *з параметрами*

$$\begin{aligned} &a_I = \sqrt{\rho_0^2 + b_0^2}\cos\left(\frac{d_1}{2} + \varphi\right), \; b_I = \sqrt{\rho_0^2 + b_0^2}\sin\left(\frac{d_1}{2} + \varphi\right), \\ &d_1 = \arccos\left(\frac{\rho_1}{\sqrt{a_0^2 + b_0^2}}\right) - \varphi. \end{aligned} \tag{64}$$

Інтеграл (63) наближаємо за допомогою Sinc-квадратурної формули:

$$u_N(x) = \frac{h}{2\pi i}\sum_{k=-N}^{N} \mathcal{F}(x, z(kh)), \tag{65}$$

$$\mathcal{F}(x,z) = \frac{1}{2\pi i}\frac{\sinh(\sqrt{z}x)}{\sinh(\sqrt{z})\left[1 - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \frac{\sinh(\sqrt{z}\xi_k)}{\sinh(\sqrt{z})}\right]} z' R_A^1(z)u_1,$$

з похибкою $\|\eta_N(\mathcal{F},h)\| = \|u(x) - u_N(x)\|$.

Теорема 21 *(Теорема 5.1) Нехай A– секторіальний оператор, $u_1 \in D(A^\alpha)$, $\alpha \in (0,1)$ і виконується умова (62). Тоді (65) визначає наближений розв'язок нелокальної задачі (60), який збігається рівномірно відносно $x \in [0,1]$ до точного з похибкою, що має експоненціальну швидкість збіжності*

$$\|\eta_N(\mathcal{F},h)\| \le \frac{c}{\alpha} exp\Big(-\sqrt{\pi d_1 \alpha (N+1)}\Big)\|A^\alpha u_1\| \tag{66}$$

для $h = \sqrt{\frac{\pi d_1}{\alpha(N+1)}}$. Наближення має похибку з оцінкою

$$\|\eta_N(\mathcal{F},h)\| \le c\left[\mathrm{e}^{-\pi d_1 N/(c_1 \ln N)} + \mathrm{e}^{-c_1(x-1)\sqrt{a_I}N/2 - c_1\alpha \ln N}\right]\|A^\alpha u_1\|, \tag{67}$$

для випадку $x \in [0,1)$ і $h = c_1 \ln N/N$, сталі $c, c_1 > 0$, не залежать від x, N.

У підрозділ 5.2 викладено результати, що стосуються дослідження і побудови наближеного методу знаходження розв'язку нелокальної задачі для еліптичного рівняння в банаховому просторі з інтегральною нелокальною умовою

$$\begin{gathered} \frac{d^2u}{dx^2} - Au = 0, \quad x \in (0,1) \\ u(0) = 0, \\ \int_0^1 w(s)u(s)ds + u(1) = u_1, \end{gathered} \tag{68}$$

де $w(s) \ge 0$– задана функція, $u_1 \in X$. Формально розв'язок задачі (68) можна записати у вигляді

$$u(x) = E(x,\sqrt{A})\left[I + \int_0^1 w(s)E(s,\sqrt{A})ds\right]^{-1} u_1, \tag{69}$$

що після використання зображення за допомогою інтеграла Данфорда-Коші приводить до

$$\begin{aligned} u(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_I} \frac{E(x,\sqrt{z})}{1+\int_0^1 w(s)E(s,\sqrt{z})ds} R_A(z)u_1 dz = \\ = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_I} F(x,z)R_A(z)u_1 dz, \end{aligned} \tag{70}$$

де Γ_I– гіпербола (12) з параметрами (64).

Лема 2 *Нехай A – всюди щільний сильно позитивний оператор. Якщо виконується умова*

$$\|w(s)\|_{C[0,1]} < \sqrt{a_I}, \tag{71}$$

тоді існує і єдиний розв'язок задачі (68), який має зображення (70).

Інтеграл в знаменнику функції $F(x,z)$ наближаємо за допомогою квадратурної формули Гауса:

$$\mathcal{I} = \int_0^1 w(s)E(s, \sqrt{z(\zeta)})ds \approx \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} \omega_j w(\xi_j)E(\xi_j, \sqrt{z(\zeta)}) = \mathcal{I}_n, \quad (72)$$

$$\xi_j = \frac{1}{2}(\theta_j + 1),$$

де $\{\theta_j\}$ – множина з $n+1$ кореня поліномів Лежандра $P_{n+1}(x)$, а $\{\omega_j\}$ – множина вузлів квадратурної формули Гауса, а інтеграл Данфорда-Коші за допомогою Sinc-квадратури

$$u(x) \approx u_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} F_n(x, z(\zeta))z'(\zeta)R_A^1(\zeta)u_1 d\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_n(x, \zeta)d\zeta, \quad (73)$$

де

$$F_n(z(\zeta), A) = \frac{E(x, \sqrt{z(\zeta)})}{1 + \mathcal{I}_n},$$

Остаточно маємо

$$u_{n,N}(x) = h\sum_{k=-N}^{N} \mathcal{F}_n(x, z(kh)). \quad (74)$$

Теорема 22 *(Теорема 5.2) Нехай A – секторіальний оператор, $u_1 \in D(A^\alpha)$, $\alpha \in (0,1)$ і виконується умова (71). Тоді (74) задає наближення $u(x)$. Воно має експоненціальну швидкість збіжності у випадку коли $w(x)$ має аналітичне продовження в еліпс Бернштейна.*

Висновки

1) Доведено непокращуваність оцінок швидкості збіжності методу перетворення Келлі для обчислення операторної експоненти для різних класів гладкості початкового вектора.

2) Досліджено швидкість збіжності Sinc-квадратурної формули для обчислення операторної експоненти з використанням зображення Данфорда-Коші по параболі і стандартної резольвенти. Показано, що такий підхід не забезпечує рівномірну швидкість збіжності відносно змінної $t \geq 0$, що робить неможливим використання цього методу для неоднорідних задач зі збереженням експоненціальної швидкості збіжності.

3) Розроблено метод без насичення точності для знаходження наближеного розв'язку задачі Коші для неоднорідного рівняння першого порядку з необмеженим операторним коефіцієнтом з використанням наближення правої частини по вузлах Чебишева або перетворення Лапласа від правої частини. Показано, що швидкість

збіжності буде експоненціальною у випадку аналітичної вектор-функції правої частини.

4) Знайдено умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку з необмеженим операторним коефіцієнтом зі змінною областю визначення та розроблено метод без насичення точності для його наближеного знаходження.

5) Досліджено m-точкову нелокальну задачу для диференціального рівняння першого порядку з необмеженим операторним коефіцієнтом в банаховому просторі. Для неї знайдено зображення розв'язку через операторні експоненти, та з припущенням про виконання достатніх умов існування розв'язку побудовано та обґрунтовано експоненціально збіжний метод знаходження наближеного розв'язку.

6) Знайдено необхідні та достатні умови існування розв'язку двоточкової нелокальної задачі для диференціального рівняння першого порядку з необмеженим операторним коефіцієнтом.

7) Для математичної моделі поширення аерозольного забруднення в атмосфері з періодичними умовами по часу адаптовано експоненціально збіжний наближений метод розв'язування m-точкової нелокальної задачі. Досліджена швидкість збіжності та створене програмне забезпечення.

8) Досліджено задачу для диференціального рівняння першого порядку з нелокальною двоточковою умовою, що містить обмежений або необмежений операторний коефіцієнт. Вперше знайдено достатні умови існування розв'язку та побудовано експоненціально збіжний наближений метод розв'язування.

9) Для еволюційного рівняння першого порядку з двоточковою нелокальною умовою побудовано метод знаходження наближеного розв'язку з швидкістю збіжності без насичення точності відносно вхідних даних.

10) Для диференціального рівняння першого порядку з необмеженим операторним коефіцієнтом та з нелокальними інтегральними лінійними та нелінійними умовами знайдено достатні умови існування розв'язків та вперше побудовано наближені методи без насичення точності відносно гладкості ядра інтегральних умов. У випадку аналітичності ядер методи забезпечують експоненціальну швидкість збіжності.

11) Досліджено задачу Коші для демпфованого диференціального рівняння другого порядку з необмеженими операторними коефіцієнтами. Для випадку гільбертового простору при умові, що оператори є самоспряженими, додатно визначеними на основі зображення Данфорда-Коші та квадратурної формули трапецій вперше побудовано експоненціально збіжний наближений метод розв'язування.

12) Для диференціального рівняння другого порядку з необмеженим операторними коефіцієнтом в банаховому просторі та крайовими умовами (еліптичний випадок) вперше побудовано експоненціально збіжний наближений метод.

13) Досліджено m-точкову нелокальну задачу для диференціального рівняння другого порядку з необмеженим операторним коефіцієнтом. Для неї знайдено зображення розв'язку, встановлено достатні умови його існування. Вперше побудовано та обґрунтовано експоненціально збіжний метод знаходження наближеного розв'язку такої задачі. Як окремий випадок з умов існування розв'язку виведено нові достатні умови для класичних багатоточкових задач для еліптичних рівнянь.

14) Для диференціального рівняння еліптичного типу з нелокальною інтегральною умовою знайдено достатні умови існування розв'язку та вперше побудовано наближений метод без насичення точності відносно гладкості ядра інтегральної умови. У випадку аналітичності ядра метод забезпечує експоненціальну швидкість збіжності.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

[1] Василик, В. Неулучшаемые по порядку оценки скорости сходимости метода преобразования Келли для приближения операторной экспоненты / В. Василик, В. Макаров, В. Рябичев // Кибернетика и системный анализ. — 2002. — Т. 4. — С. 180–185 (translated in Cybernetics and Systems Analysis.– 2002.– **38**, 4.– P. 632–636).

[2] Vasylyk, V. Uniform exponentially convergent method for the first order evolution equation with unbounded operator coefficient / V. Vasylyk // Journal of Numerical and Applied Mathematics. — 2003. — Vol. 1. — P. 99–104.

[3] Василик, В. Наближений розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння з секторіальним оператором в банаховому просторі / В. Василик // Вісник Львівського національного університету ім. І.Франка. Фізико-математичні науки. — 2004. — Т. 9. — С. 34–46.

[4] Gavrilyuk, I. P. A new estimate of the Sinc method for linear parabolic problems including the initial point / I. P. Gavrilyuk, V. L. Makarov, V. B. Vasylyk // Computational Methods in Applied Mathematics. — 2004. — Vol. 4. — P. 163– 179.

[5] Gavrilyuk, I. P. Exponentially convergent approximation to the elliptic solution operator / I. P. Gavrilyuk, V. L. Makarov, V. B. Vasylyk // Computational Methods in Applied Mathematics. — 2006. — Vol. 6, no. 4. — P. 386–404.

[6] Василик, В. Б. Експоненційно збіжний метод для апроксимації інтегралів зі змінною межею інтегрування / В. Б. Василик, Д. О. Ситник // Праці Інституту математики НАН України. — 2006. — Т. 3, № 1. — С. 54–63.

[7] Василик, В. Б. Exponentially convergent algorithm for a strongly damped differential equations of the second order with an operator coefficient in Banach space / В. Б. Василик, І. П. Гаврилюк, В. Л. Макаров // Праці Інституту математики НАН України. — 2007. — Т. 4, № 2. — С. 245–260.

[8] Exponentially convergent Duhamel-like algorithms for differential equations with an operator coefficient possessing a variable domain in a Banach space / T. J. Bohonova, I. P. Gavrilyuk, V. L. Makarov, V. B. Vasylyk // SIAM J. Numer. Anal. — 2007/08. — Vol. 46, no. 5. — P. 365–396.

[9] Exponentially convergent method for the m-point nonlocal problem for a first order differential equation in Banach space / I. P. Gavrilyuk, V. L. Makarov, D. O. Sytnyk, V. B. Vasylyk // Numer. Funct. Anal. Optim. — 2010. — Vol. 31, no. 1-3. — P. 1–21.

[10] Василик, В. Б. Експоненціальний метод розв'язування неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку з необмеженим операторним коефіцієнтом за допомогою перетворення Лапласа / В. Б. Василик // Праці Інституту математики НАН України. — 2010. — Т. 7, № 3, 5-8. — С. 78–89.

[11] Gavrilyuk, I. Exponentially convergent algorithms for abstract differential equations / Ivan Gavrilyuk, Volodymyr Makarov, Vitalii Vasylyk. Frontiers in Mathematics. — Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011. — P. viii+180.

[12] Vasylyk, V. Exponentially convergent method for the m-point nonlocal problem for an elliptic differential equation in Banach space / V. Vasylyk // Journal of Numerical and Applied Mathematics. — 2011. — Vol. 105, no. 2. — P. 124–135.

[13] Vasylyk, V. Nonlocal problem for an evolution first order equation in Banach space / V. Vasylyk // Journal of Numerical and Applied Mathematics. — 2012. — no. 3(109). — P. 139–149.

[14] Василик, В. Б. Метод без насичення точності розв'язування неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку з необмеженим операторним коефіцієнтом / В. Б. Василик // Праці Інституту математики НАН України. — 2012. — Т. 9, № 1. — С. 82–91.

[15] Vasylyk, V. Exponentially convergent method for integral nonlocal problem for the elliptic equation in Banach space / V. Vasylyk // Journal of Numerical and Applied Mathematics. — 2013. — Vol. 110, no. 3. — P. 119–130.

[16] Василик, В. Б. Швидкодіючий алгоритм для моделювання динаміки розповсюдження викидів в атмосферу від зосереджених джерел / В. Б. Василик, В. Л. Макаров, Д. О. Ситник // Праці Інституту математики НАН України. — 2014. — Т. 11, № 4. — С. 176–197.

[17] Makarov, V. L. Existence of the solution to a nonlocal-in-time evolutional problem / V. L. Makarov, D. O. Sytnyk, V. B. Vasylyk // Nonlinear Analysis. Modelling and Control. — 2014. — Vol. 19, no. 3. — P. 432—447.

[18] Василик, В. Б. Експоненціально збіжний метод для диференціального рівняння першого порядку в банаховому просторі з інтегральною нелокальною умовою / В. Б. Василик, В. Л. Макаров // Український математичний журнал. — 2014. — Т. 66, № 8. — С. 1029–1040 (translated in Ukrainian Mathematical Journal.– 2015.– **66**, 8.– P. 1152–1164).

[19] Василик, В. Б. Експоненціально збіжний метод для диференціального рівняння першого порядку в банаховому просторі з необмеженим оператором у нелокальній умові / В. Б. Василик, В. Л. Макаров, Д. О. Ситник // Праці Інституту математики НАН України. — 2015. — Т. 12, № 5. — С. 32–45.

[20] Vasylyk, V. Exponentially convergent method for differential equation in Banach space with a bounded operator in nonlocal condition / V. Vasylyk // Journal of Numerical and Applied Mathematics. — 2016. — no. 2(122). — P. 130–139.

[21] Василик, В. Б. Експоненціально збіжний метод для абстрактної нелокальної задачі з інтегральною нелінійністю / В. Б. Василик, В. Л. Макаров // Український математичний журнал. – 2016. – Т. 68, № 12. – С. 1587–1597 (translated in Ukrainian Mathematical Journal.– 2017.– **68**, 12.– P. 1837—1848).

[22] Василик, В. Б. Нові оцінки швидкості збіжності методу перетворення Келлі для абстрактного диференціального рівняння першого порядку / В. Б. Василик // Український математичний конгрес. – Секція 8. Обчислювальна математика і математичні проблеми механіки. – Інститут математики НАН України, 2001. – С. 10–11.

[23] Василик, В. Б. Наближений метод розв'язування задачі Коші для диференціального рівняння з секторіальним оператором в банаховому просторі / В. Б. Василик // 10 Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики». – Львівський національний університет ім. І.Франка, 2003. – С. 32.

[24] Vasylyk, V. B. Boundary value problem with nonlocal conditions / V. B. Vasylyk, Sytnyk D. O. // Відкриті еволюціонуючі системи. 3 міжнародна науково- практична конференція. — 2006. — P. 269–273.

[25] Василик, В. Б. Експоненційно збіжний алгоритм наближеного розв'язування абстрактних еліптичних рівнянь / В. Б. Василик // Матеріали XIV Всеукраїнської наукової конференції. – Львівський національний університет ім. І.Франка, 2007. – С. 33.

[26] Vasylyk, V. B. Exponentially convergent Duhamel-like algorithms for differential equations with an operator coefficient pos-sessing a variable domain in a Banach space / V. B. Vasylyk // Humboldt-Kolleg "Actual Sci-ence in Ukraine: Humboldt-Club Ukraine General Assem-bly", 2008. — Humboldt-Club Ukraine, 2008. — P. 9.

[27] Vasylyk, V. B. Exponentially convergent method for m-point nonlocal problem for the first order differential equation in Banach space / V. B. Vasylyk // Український математичний конгрес (до 100-річчя від дня народження Миколи М. Боголюбова). – Інститут математики НАН України, 2009. – С. 9.

[28] Василик, В. Б. Експоненціально збіжний метод для m-точкової еліптичної задачі в банаховому просторі / В. Б. Василик // Міжнародна математична конференція ім. В.Я. Скоробогатька. — Львівський національний університет ім. І.Франка, 2011. — С. 32.

[29] Vasylyk, V. B. Fast numerical methods for differential equations in abstract setting / V. B. Vasylyk // Hot Topics Workshop on Laplace Transform Methods and Their Applications. — National Institute for Mathematical Sciences, 2011. — P. 9.

[30] Vasylyk, V. B. Exponentially convergent method for the first order differential equation in Banach space with integral nonlocal condition / V. B. Vasylyk, V.L. Makarov // Міжнародна наукова конференція Сучасні проблеми механіки та математики. — Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України, 2013. — С. 77–79.

[31] Vasylyk, V. B. Exponentially convergent method for the first order differential equation in banach space with nonlocal condition / V. B. Vasylyk, V.L. Makarov // 2015 Tbilisi Internetional Conference on Computer Sciences and Applied Mathematics. — Sokhumi State University, 2015. — P. 10–20.

[32] Vasylyk, V. B. Exponentially convergent method for the first order differential equation in Banach space with nonlocal condition / V. B. Vasylyk // The international conference UCAM. — Ivan Franko National University of Lviv, 2017. — P. 110–111.

АНОТАЦІЇ

Василик В. Б. Методи без насичення точності для диференціальних рівнянь в банаховому просторі з необмеженими операторними коефіцієнтами. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису. Дисертація на здобуття наукового ступеня доктор фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.07 «Обчислювальна математика». – Інститут математики НАН України, Київ, 2017.

Робота присвячена розробці методів без насичення точності для диференціальних рівнянь з необмеженими операторними коефіцієнтами в банаховому просторі. Розглядаються як класичні постановки початково-крайових задач, так і задачі з нелокальними умовами. Робота складається зі вступу та п'яти розділів. У вступі обґрунтовано актуальність теми, мету дослідження, зв'язок з науковими програмами,

практичне значення роботи, визначено об'єкт та предмет дослідження. В першому розділі дисертації проведено огляд наукових публікацій за темою дисертаційного дослідження.

В другому розділі розглядаються задачі Коші для рівнянь першого порядку з необмеженим операторним коефіцієнтом у банаховому просторі. У ньому доведено непокращуваність оцінок швидкості збіжності зображення операторної експоненти за допомогою розвинення в ряд за поліномами Лагерра та перетворенням Келлі для початкового значення з різних класів гладкості. Далі досліджено швидкість збіжності Sinc-квадратурної формули для обчислення операторної експоненти, використовуючи інтеграл Данфорда-Коші з контуром по параболі для малого значення часової змінної. Показано, що таке наближення втрачає експоненціальну швидкість збіжності при $t = 0$, тому не може бути використаний для розв'язування неоднорідних рівнянь. Розроблено та обґрунтовано методи без насичення точності з рівномірною швидкістю збіжності для знаходження наближеного розв'язку задачі Коші для неоднорідного рівняння. Досліджено задачу Коші для диференціального рівняння першого порядку з необмеженим операторним коефіцієнтом, область визначення якого є змінною а також розроблено метод без насичення точності знаходження наближеного розв'язку.

В розділі 3 розглядаються нелокальні постановки задач для диференціальних рівнянь першого порядку. В ньому досліджено m-точкову нелокальну задачу для диференціального рівняння першого порядку з необмеженим операторним коефіцієнтом, побудовано та обґрунтовано експоненціально збіжний метод знаходження наближеного розв'язку. Знайдено необхідні та достатні умови існування розв'язку нелокальної задачі для випадку $m = 2$. Побудовано експоненціально збіжний метод знаходження наближеного розв'язку математичної моделі поширення аерозольного забруднення в атмосфері з періодичними умовами по часу, яка є частинним випадком двоточкової нелокальної задачі. Досліджено задачі для диференціального рівняння першого порядку з наступними нелокальними умовами: інтегральними лінійними та нелінійними умовами, умовами що містять обмежений оператор, умовами що містять необмежений оператор. Для цих задач встановлено достатні умови існування розв'язків та побудовано методи без насичення точності знаходження їх наближень.

Розділи 4 та 5 присвячені класичним і нелокальним задачам для диференціальних рівнянь другого порядку з необмеженими операторними коефіцієнтами. В цих розділах досліджено задачу Коші для демпфованого рівняння другого порядку гіперболічного типу та крайову задачу для рівняння еліптичного типу, побудовано експоненціально збіжні наближені методи. Досліджено нелокальні задачі з m-точковою та інтегральною умовами для диференціального рівняння другого порядку еліптичного типу з необмеженим операторним коефіцієнтом. Для них знайдено зображення розв'язків, встановлено достатні умови існування та побудовано експоненціально збіжні методи наближення розв'язку.

Усі положення дисертації, які виносяться на захист, є новими. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер. Вони можуть бути застосовані при розробці нових методів наближеного розв'язування задач, що виникають при математичному моделюванні. Матеріали дисертації частково використовуються в курсі «Додаткові розділи методів обчислень», що читається магістрам зі спеціальності «прикладна математика» Національного авіаційного університету.

Ключові слова: диференціальні рівняння в банаховому просторі, необмежені операторні коефіцієнти, інтеграл Данфорда-Коші, Sinc-наближення, методи без насичення точності, інтерполяційні поліноми, поліноми Чебишева, експоненціально збіжні методи, нелокальні задачі.

ABSTRACT

Vasylyk V. B. Methods without accuracy saturation for differential equations in a Banach space with unbounded operator coefficients. - Qualifying scientific work on the rights of manuscript. The thesis for obtaining the Doctor of Physical and Mathematical Sciences degree in the speciality 01.01.07 "Computational Mathematics". – Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2017.

The work is devoted to the development of methods without accuracy saturation for differential equations with unbounded operator coefficients in a Banach space. Classical statements of initial boundary-value problems and problems with nonlocal conditions are considered. The work consists of an introduction and five chapters. The introduction substantiates the relevance of the topic, the research purpose, the connection with scientific programs, work's practical value, its subject and object. In the first chapter of the dissertation we present a review of scientific publications on the topic of dissertation research.

The Cauchy problems for the first-order equations with unbounded operator coefficients in a Banach space are considered in the second chapter. Here we proved that estimates of convergence for the Cayley transform method for operator exponential are unimprovable for different classes of initial data. Then we obtain the convergence rate of the Sinc-quadrature formula for calculating the operator exponential using the Dunford-Cauchy integral over parabola path for a small value of the time variable. It is shown that this approximation loses the exponential convergence rate for $t = 0$, and, therefore, can not be used to solve problems for inhomogeneous equations. The methods without accuracy saturation with uniform rate of

convergence for an approximate solution to the Cauchy problem for an inhomogeneous equation are developed and justified. The problems for the differential equation of the first order with the following nonlocal conditions are investigated: integral linear and nonlinear conditions, conditions containing a bounded operator, conditions containing an unbounded operator. Sufficient conditions for the existence of solutions are found for these problems and methods are constructed without saturation of the accuracy of finding their approximations.

Chapter 3 deals with nonlocal problems for differential equations of the first order. It is investigated the m–point nonlocal problem for a differential equation of the first order with an unbounded operator coefficient and an exponentially convergent method for finding an approximate solution is constructed and substantiated. The necessary and sufficient conditions for the existence of a solution of a nonlocal problem for the case $m = 2$ are found. An exponentially convergent method for finding an approximate solution of a mathematical model for the propagation of aerosol pollution in the atmosphere with periodic conditions over time, which is a partial case of a two-point nonlocal problem, is constructed. Nonlocal problems for a differential equation of the first order with conditions containing a bounded or unbounded operator coefficient in a nonlocal condition and with integral linear and nonlinear conditions are investigated. We established sufficient conditions for the existence of solutions and constructed exponentially convergent methods of approximate solution.

Chapters 4 and 5 are devoted to some classical and nonlocal problems for the second order differential equations with unbounded operator coefficients. Here, the Cauchy problem for a strongly damped second-order equation of hyperbolic type and the boundary-value problem for an elliptic-type equation are investigated. For such problems exponentially convergent numerical methods are constructed. Nonlocal problems with m–point and integral conditions are investigated for a differential equation of the second order of elliptic type with an unbounded operator coefficient. The representation of solutions was found, sufficient conditions of existence were established and exponentially convergent methods of finding an approximate solutions were constructed.

All the results included in the thesis are new. They are of a theoretical nature and can be applied in the development of new methods for the approximate solution of problems that arise in mathematical modelling. Materials of the dissertation are partly used in the course "Advanced Topics of Numerical Methods", that is taught to the masters degree students in the speciality "Applied Mathematics" of the National Aviation University.

Keywords: differential equations in a Banach space, unbounded operator coefficients, Dunford-Cauchy integral, Sinc-approximation,

methods without accuracy saturation, interpolation polynomials, Chebyshev polynomials, exponentially convergent methods, nonlocal problems.

Підп. до друку 07.02.2018. Формат 60 x 84/16. Папір офс. Офс. друк
Фіз. друк. арк. 2,2. Ум. друк. арк. 2,05. Тираж 120 прим. Зам. 21

Інститут математики НАН України,
01004, Київ 4, вул. Терещенківська, 3