

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ  
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

ВАСИЛИК Віталій Богданович

УДК 519.6

ДИСЕРТАЦІЯ

**Методи без насичення точності для диференціальних рівнянь в  
банаховому просторі з необмеженими операторними  
коефіцієнтами**

01.01.07 — обчислювальна математика

Подається на здобуття наукового ступеня  
доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень.

Використання ідей, результатів і текстів інших авторів

мають посилання на відповідне джерело. \_\_\_\_\_ В.Б. Василик

Науковий консультант  
доктор фізико-математичних наук,  
професор, академік НАН України  
Макаров Володимир Леонідович

Київ - 2017

## АНОТАЦІЯ

Василик В. Б. Методи без насичення точності для диференціальних рівнянь в банаховому просторі з необмеженими операторними коефіцієнтами. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису. Дисертація на здобуття наукового ступеня доктор фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.07 «Обчислювальна математика». – Інститут математики НАН України, Київ, 2017.

Робота присвячена розробці методів без насичення точності для диференціальних рівнянь з необмеженими операторними коефіцієнтами в банаховому просторі. Розглядаються як класичні постановки початково-крайових задач, так і задачі з нелокальними умовами. Робота складається зі вступу та п'яти розділів. У вступі обґрунтовано актуальність теми, мету дослідження, зв'язок з науковими програмами, практичне значення роботи, визначено об'єкт та предмет дослідження. В першому розділі дисертації проведено огляд наукових публікацій за темою дисертаційного дослідження.

В другому розділі розглядаються задачі Коші для рівнянь першого порядку з необмеженим операторним коефіцієнтом у банаховому просторі. У ньому доведено непокращуваність оцінок швидкості збіжності зображення операторної експоненти за допомогою розвинення в ряд за поліномами Лагерра та перетворенням Келлі для початкового значення з різних класів гладкості. Далі досліджено швидкість збіжності Sinc-квадратурної формули для обчислення операторної експоненти, використовуючи інтеграл Данфорда-Коші з контуром по параболі для малого значення часової змінної. Показано, що таке наближення втрачає експоненціальну швидкість збіжності при  $t = 0$ , тому не може бути використаний для розв'язування неоднорідних рівнянь. Розроблено та обґрунтовано методи без насичення точності з рівномірною швидкістю збіжності для знаходження наближеного розв'язку задачі Коші для неоднорідного рівняння. Досліджено задачу Коші для диференціального рівняння

першого порядку з необмеженим операторним коефіцієнтом, область визначення якого є змінною а також розроблено метод без насичення точності знаходження наближеного розв'язку.

В розділі 3 розглядаються нелокальні постановки задач для диференціальних рівнянь першого порядку. В ньому досліджено  $m$ -точкову нелокальну задачу для диференціального рівняння першого порядку з необмеженим операторним коефіцієнтом, побудовано та обґрунтовано експоненціально збіжний метод знаходження наближеного розв'язку. Знайдено необхідні та достатні умови існування розв'язку нелокальної задачі для випадку  $m = 2$ . Побудовано експоненціально збіжний метод знаходження наближеного розв'язку математичної моделі поширення аерозольного забруднення в атмосфері з періодичними умовами по часу, яка є частинним випадком двоточної нелокальної задачі. Досліджено задачі для диференціального рівняння першого порядку з наступними нелокальними умовами: інтегральними лінійними та нелінійними умовами, умовами що містять обмежений оператор, умовами що містять необмежений оператор. Для цих задач встановлено достатні умови існування розв'язків та побудовано методи без насичення точності знаходження їх наближень.

Розділи 4 та 5 присвячені класичним і нелокальним задачам для диференціальних рівнянь другого порядку з необмеженими операторними коефіцієнтами. В цих розділах досліджено задачу Коші для демпфованого рівняння другого порядку гіперболічного типу та крайову задачу для рівняння еліптичного типу, побудовано експоненціально збіжні наближені методи. Досліджено нелокальні задачі з  $m$ -точковою та інтегральною умовами для диференціального рівняння другого порядку еліптичного типу з необмеженим операторним коефіцієнтом. Для них знайдено зображення розв'язків, встановлено достатні умови існування та побудовано експоненціально збіжні методи наближення розв'язку.

Усі положення дисертації, які виносяться на захист, є новими. Результати

дисертаційної роботи мають теоретичний характер. Вони можуть бути застосовані при розробці нових методів наближеного розв'язування задач, що виникають при математичному моделюванні. Матеріали дисертації частково використовуються в курсі «Додаткові розділи методів обчислень», що читається магістрам зі спеціальності «прикладна математика» Національного авіаційного університету.

**Ключові слова:** диференціальні рівняння в банаховому просторі, необмежені операторні коефіцієнти, інтеграл Данфорда-Коші, Sinc-наближення, методи без насичення точності, інтерполяційні поліноми, поліноми Чебишева, експоненціально збіжні методи, нелокальні задачі.

## ABSTRACT

Vasylyk V. B. Methods without accuracy saturation for differential equations in a Banach space with unbounded operator coefficients. - Qualifying scientific work on the rights of manuscript. The thesis for obtaining the Doctor of Physical and Mathematical Sciences degree in the speciality 01.01.07 "Computational Mathematics". – Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2017.

The work is devoted to the development of methods without accuracy saturation for differential equations with unbounded operator coefficients in a Banach space. Classical statements of initial boundary-value problems and problems with nonlocal conditions are considered. The work consists of an introduction and five chapters. The introduction substantiates the relevance of the topic, the research purpose, the connection with scientific programs, work's practical value, its subject and object. In the first chapter of the dissertation we present a review of scientific publications on the topic of dissertation research.

The Cauchy problems for the first-order equations with unbounded operator coefficients in a Banach space are considered in the second chapter. Here we proved that estimates of convergence for the Cayley transform method for operator

exponential are unimprovable for different classes of initial data. Then we obtain the convergence rate of the Sinc-quadrature formula for calculating the operator exponential using the Dunford-Cauchy integral over parabola path for a small value of the time variable. It is shown that this approximation loses the exponential convergence rate for  $t = 0$ , and, therefore, can not be used to solve problems for inhomogeneous equations. The methods without accuracy saturation with uniform rate of convergence for an approximate solution to the Cauchy problem for an inhomogeneous equation are developed and justified. The problems for the differential equation of the first order with the following nonlocal conditions are investigated: integral linear and nonlinear conditions, conditions containing a bounded operator, conditions containing an unbounded operator. Sufficient conditions for the existence of solutions are found for these problems and methods are constructed without saturation of the accuracy of finding their approximations.

Chapter 3 deals with nonlocal problems for differential equations of the first order. It is investigated the  $m$ -point nonlocal problem for a differential equation of the first order with an unbounded operator coefficient and an exponentially convergent method for finding an approximate solution is constructed and substantiated. The necessary and sufficient conditions for the existence of a solution of a nonlocal problem for the case  $m = 2$  are found. An exponentially convergent method for finding an approximate solution of a mathematical model for the propagation of aerosol pollution in the atmosphere with periodic conditions over time, which is a partial case of a two-point nonlocal problem, is constructed. Nonlocal problems for a differential equation of the first order with conditions containing a bounded or unbounded operator coefficient in a nonlocal condition and with integral linear and nonlinear conditions are investigated. We established sufficient conditions for the existence of solutions and constructed exponentially convergent methods of approximate solution.

Chapters 4 and 5 are devoted to some classical and nonlocal problems for the second order differential equations with unbounded operator coefficients. Here, the

Cauchy problem for a strongly damped second-order equation of hyperbolic type and the boundary-value problem for an elliptic-type equation are investigated. For such problems exponentially convergent numerical methods are constructed. Nonlocal problems with  $m$ -point and integral conditions are investigated for a differential equation of the second order of elliptic type with an unbounded operator coefficient. The representation of solutions was found, sufficient conditions of existence were established and exponentially convergent methods of finding an approximate solutions were constructed.

All the results included in the thesis are new. They are of a theoretical nature and can be applied in the development of new methods for the approximate solution of problems that arise in mathematical modelling. Materials of the dissertation are partly used in the course "Advanced Topics of Numerical Methods", that is taught to the masters degree students in the speciality "Applied Mathematics" of the National Aviation University.

**Keywords:** differential equations in a Banach space, unbounded operator coefficients, Dunford-Cauchy integral, Sinc-approximation, methods without accuracy saturation, interpolation polynomials, Chebyshev polynomials, exponentially convergent methods, nonlocal problems.

Результати дисертації опубліковані в роботах [1–21] і тезах та працях конференцій [22–32].

### Список публікацій здобувача

1. Василик, В. Неулучшаемые по порядку оценки скорости сходимости метода преобразования Келли для приближения операторной экспоненты / В. Василик, В. Макаров, В. Рябичев // Кибернетика и системный анализ. — 2002. — Т. 4. — С. 180–185 (translated in Cybernetics and Systems Analysis. — 2002. — **38**, 4. — P. 632–636).
2. Vasylyk, V. Uniform exponentially convergent method for the first order evolution equation with unbounded operator coefficient / V. Vasylyk // Journal of Numerical and Applied Mathematics. — 2003. — Vol. 1. — P. 99–104.
3. Василик, В. Наближений розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння з секторіальним оператором в банаховому просторі / В. Василик // Вісник Львівського національного університету ім. І.Франка. Фізико-математичні науки. — 2004. — Т. 9. — С. 34–46.
4. Gavrilyuk, I. P. A new estimate of the Sinc method for linear parabolic problems including the initial point / I. P. Gavrilyuk, V. L. Makarov, V. B. Vasylyk // Computational Methods in Applied Mathematics. — 2004. — Vol. 4. — P. 163–179.
5. Gavrilyuk, I. P. Exponentially convergent approximation to the elliptic solution operator / I. P. Gavrilyuk, V. L. Makarov, V. B. Vasylyk // Computational Methods in Applied Mathematics. — 2006. — Vol. 6, no. 4. — P. 386–404.
6. Василик, В. Б. Експоненційно збіжний метод для апроксимації інтегралів зі змінною межею інтегрування / В. Б. Василик, Д. О. Ситник // Праці Інституту математики НАН України. — 2006. — Т. 3, № 1. — С. 54–63.
7. Василик, В. Б. Exponentially convergent algorithm for a strongly damped differential equations of the second order with an operator coefficient in Banach space / В. Б. Василик, І. П. Гаврилюк, В. Л. Макаров // Праці Інституту математики НАН України. — 2007. — Т. 4, № 2. — С. 245–260.
8. Exponentially convergent Duhamel-like algorithms for differential equations with an operator coefficient possessing a variable domain in a Banach space / T. J. Bohonova, I. P. Gavrilyuk, V. L. Makarov, V. B. Vasylyk // SIAM J. Numer. Anal. — 2007/08. — Vol. 46, no. 5. — P. 365–396.

9. Exponentially convergent method for the  $m$ -point nonlocal problem for a first order differential equation in Banach space / I. P. Gavrilyuk, V. L. Makarov, D. O. Sytnyk, V. B. Vasylyk // Numer. Funct. Anal. Optim. — 2010. — Vol. 31, no. 1-3. — P. 1–21.
10. Василик, В. Б. Експоненціальний метод розв'язування неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку з необмеженим операторним коефіцієнтом за допомогою перетворення Лапласа / В. Б. Василик // Праці Інституту математики НАН України. — 2010. — Т. 7, № 3, 5-8. — С. 78–89.
11. Gavrilyuk, I. Exponentially convergent algorithms for abstract differential equations / Ivan Gavrilyuk, Volodymyr Makarov, Vitalii Vasylyk. Frontiers in Mathematics. — Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011. — P. viii+180.
12. Vasylyk, V. Exponentially convergent method for the  $m$ -point nonlocal problem for an elliptic differential equation in Banach space / V. Vasylyk // Journal of Numerical and Applied Mathematics. — 2011. — Vol. 105, no. 2. — P. 124–135.
13. Vasylyk, V. Nonlocal problem for an evolution first order equation in Banach space / V. Vasylyk // Journal of Numerical and Applied Mathematics. — 2012. — no. 3(109). — P. 139–149.
14. Василик, В. Б. Метод без насичення точності розв'язування неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку з необмеженим операторним коефіцієнтом / В. Б. Василик // Праці Інституту математики НАН України. — 2012. — Т. 9, № 1. — С. 82–91.
15. Vasylyk, V. Exponentially convergent method for integral nonlocal problem for the elliptic equation in Banach space / V. Vasylyk // Journal of Numerical and Applied Mathematics. — 2013. — Vol. 110, no. 3. — P. 119–130.
16. Василик, В. Б. Швидкодіючий алгоритм для моделювання динаміки розповсюдження викидів в атмосферу від зосереджених джерел / В. Б. Василик, В. Л. Макаров, Д. О. Ситник // Праці Інституту математики НАН України. — 2014. — Т. 11, № 4. — С. 176–197.
17. Makarov, V. L. Existence of the solution to a nonlocal-in-time evolutionary problem / V. L. Makarov, D. O. Sytnyk, V. B. Vasylyk // Nonlinear Analysis. Modelling and Control. — 2014. — Vol. 19, no. 3. — P. 432–447.



18. Василик, В. Б. Експоненціально збіжний метод для диференціального рівняння першого порядку в банаховому просторі з інтегральною нелокальною умовою / В. Б. Василик, В. Л. Макаров // Український математичний журнал. — 2014. — Т. 66, № 8. — С. 1029–1040 (translated in Ukrainian Mathematical Journal.— 2015.— **66**, 8.— P. 1152–1164).
19. Василик, В. Б. Експоненціально збіжний метод для диференціального рівняння першого порядку в банаховому просторі з необмеженим оператором у нелокальній умові / В. Б. Василик, В. Л. Макаров, Д. О. Ситник // Праці Інституту математики НАН України. — 2015. — Т. 12, № 5. — С. 32–45.
20. Vasylyk, V. Exponentially convergent method for differential equation in Banach space with a bounded operator in nonlocal condition / V. Vasylyk // Journal of Numerical and Applied Mathematics. — 2016. — no. 2(122). — P. 130–139.
21. Василик, В. Б. Експоненціально збіжний метод для абстрактної нелокальної задачі з інтегральною нелінійністю / В. Б. Василик, В. Л. Макаров // Український математичний журнал. — 2016. — Т. 68, № 12. — С. 1587–1597 (translated in Ukrainian Mathematical Journal.— 2017.— **68**, 12.— P. 1837—1848).
22. Василик, В. Б. Нові оцінки швидкості збіжності методу перетворення Келлі для абстрактного диференціального рівняння першого порядку / В. Б. Василик // Український математичний конгрес. — Секція 8. Обчислювальна математика і математичні проблеми механіки. — Інститут математики НАН України, 2001. — С. 10–11.
23. Василик, В. Б. Наближений метод розв'язування задачі Коші для диференціального рівняння з секторіальним оператором в банаховому просторі / В. Б. Василик // 10 Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики». — Львівський національний університет ім. І.Франка, 2003. — С. 32.
24. Vasylyk, V. B. Boundary value problem with nonlocal conditions / V. B. Vasylyk, Sytnyk D. O. // Відкриті еволюціонуючі системи. 3 міжнародна науково-практична конференція. — 2006. — P. 269–273.
25. Василик, В. Б. Експоненційно збіжний алгоритм наближеного розв'язування абстрактних еліптичних рівнянь / В. Б. Василик // Матеріали XIV Всеукраїнської наукової конференції. — Львівський національний університет ім. І.Франка, 2007. — С. 33.
26. Vasylyk, V. B. Exponentially convergent Duhamel-like algorithms for differential equations with an operator coefficient possessing a variable domain in a Banach space /

- V. B. Vasylyk // Humboldt-Kolleg "Actual Science in Ukraine: Humboldt-Club Ukraine General Assembly", 2008. — Humboldt-Club Ukraine, 2008. — P. 9.
27. Vasylyk, V. B. Exponentially convergent method for  $m$ -point nonlocal problem for the first order differential equation in Banach space / V. B. Vasylyk // Український математичний конгрес (до 100-річчя від дня народження Миколи М. Боголюбова). — Інститут математики НАН України, 2009. — С. 9.
28. Василик, В. Б. Експоненціально збіжний метод для  $m$ -точкової еліптичної задачі в банаховому просторі / В. Б. Василик // Міжнародна математична конференція ім. В.Я. Скоробогатка. — Львівський національний університет ім. І.Франка, 2011. — С. 32.
29. Vasylyk, V. B. Fast numerical methods for differential equations in abstract setting / V. B. Vasylyk // Hot Topics Workshop on Laplace Transform Methods and Their Applications. — National Institute for Mathematical Sciences, 2011. — P. 9.
30. Vasylyk, V. B. Exponentially convergent method for the first order differential equation in Banach space with integral nonlocal condition / V. B. Vasylyk, V.L. Makarov // Міжнародна наукова конференція Сучасні проблеми механіки та математики. — Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України, 2013. — С. 77–79.
31. Vasylyk, V. B. Exponentially convergent method for the first order differential equation in Banach space with nonlocal condition / V. B. Vasylyk, V.L. Makarov // 2015 Tbilisi International Conference on Computer Sciences and Applied Mathematics. — Sokhumi State University, 2015. — P. 10–20.
32. Vasylyk, V. B. Exponentially convergent method for the first order differential equation in Banach space with nonlocal condition / V. B. Vasylyk // The international conference UCAM. — Ivan Franko National University of Lviv, 2017. — P. 110–111.

## ЗМІСТ

Вступ	16
РОЗДІЛ 1. Вихідні положення та огляд літератури	24
1.1 Оптимальність за кількістю операцій обчислювальних алгоритмів .	24
1.2 Інтерполяція функцій без насичення точності . . . . .	28
1.3 Експоненціально збіжні квадратурні формули . . . . .	33
1.4 Диференціальні рівняння з необмеженими операторними коефіцієнтами в банаховому просторі . . . . .	34
1.5 Нелокальні задачі . . . . .	38
1.6 Зображення операторної експоненти за допомогою розвинення в ряди . . . . .	39
1.7 Сильно $P$ -позитивні та секторіальні оператори і зображення операторної експоненти за допомогою інтеграла Данфорда-Коші . . .	43
1.8 Методи побудови експоненціально збіжних методів для задач з необмеженими операторними коефіцієнтами . . . . .	46
1.9 Експоненціально збіжний метод для операторної експоненти з сильно $P$ -позитивним оператором . . . . .	49
1.9.1 Вибір параболи інтегрування . . . . .	49
1.9.2 Чисельний метод та похибка наближення . . . . .	50
1.10 Оцінка резольвенти оператора через його дробові степені . . . . .	52
1.11 Висновки . . . . .	53
РОЗДІЛ 2. Задача Коші для рівняння першого порядку з необмеженим операторним коефіцієнтом	55
2.1 Непокращувані за порядком оцінки швидкості збіжності методу перетворення Келлі для операторної експоненти . . . . .	55

2.1.1	Непокращувані оцінки для скінченної гладкості початкового вектора. . . . .	55
2.1.2	Непокращувані за порядком оцінки швидкості збіжності метода перетворення Келлі при $u_0$ з простору Рум'є. . . . .	58
2.2	Оцінка збіжності Sinc-квадратурної формули для обчислення операторної експоненти . . . . .	60
2.2.1	Оцінка швидкості збіжності, включно з $t = 0$ . . . . .	60
2.2.2	Чисельний приклад. . . . .	64
2.3	Експоненціально збіжний метод наближення операторної експоненти з необмеженим оператором . . . . .	65
2.3.1	Зображення розв'язку. . . . .	66
2.3.2	Наближений розв'язок. . . . .	69
2.3.3	Випадок аналітичних початкових даних. . . . .	71
2.4	Експоненціально збіжний метод розв'язування неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку з необмеженим операторним коефіцієнтом . . . . .	74
2.4.1	Вступ . . . . .	74
2.4.2	Однорідна задача. . . . .	75
2.4.3	Неоднорідна задача. Наближення за вузлами Чебишева. . . . .	78
2.4.4	Неоднорідна задача. Обернене перетворення Лапласа. . . . .	81
2.4.5	Чисельні розрахунки. . . . .	85
2.5	Рівняння з оператором зі змінною областю визначення . . . . .	88
2.5.1	Вступ. . . . .	88
2.5.2	Метод типу Дюамеля для диференціального рівняння першого порядку в банаховому просторі. . . . .	91
2.5.3	Існування та єдиність розв'язку інтегрального рівняння. . . . .	96
2.5.4	Узагальнення для випадку залежного від параметру оператора. Існування та єдиність розв'язку. . . . .	99
2.5.5	Чисельний алгоритм та оцінки точності. . . . .	106

2.5.6	Приклади. . . . .	115
2.5.7	Чисельні розрахунки. . . . .	122

РОЗДІЛ 3. Методи без насичення точності для нелокальних задач для рівняння першого порядку з необмеженими операторними коефіцієн- ентами		127
3.1	Експоненціально збіжний метод наближення розв'язку $m$ -точкової нелокальної задачі Коші . . . . .	127
3.1.1	Зведення нелокальної задачі до класичної задачі Коші . . . . .	127
3.1.2	Нелокальна задача для однорідного рівняння. . . . .	130
3.1.3	Нелокальна задача для неоднорідного рівняння. . . . .	137
3.1.4	Чисельні приклади та застосування. . . . .	143
3.2	Дослідження умов існування розв'язку нелокальної багатоточко- вої задачі для абстрактного диференціального рівняння першого порядку . . . . .	147
3.3	Модель переносу аерозольних забруднень в атмосфері . . . . .	153
3.3.1	Абстрактна постановка задачі та існування розв'язку . . . . .	155
3.3.2	Чисельні методи наближення розв'язків . . . . .	156
3.3.3	Обчислення розподілу забруднюючого аерозолю в атмосфері . . .	157
3.4	Експоненціально збіжний метод для задачі з обмеженим операто- ром в нелокальній умові . . . . .	161
3.4.1	Існування та зображення розв'язку . . . . .	161
3.4.2	Наближення . . . . .	163
3.4.3	Чисельний приклад . . . . .	165
3.5	Метод без насичення точності для нелокальної двоточнової задачі для еволюційного рівняння першого порядку . . . . .	167
3.5.1	Існування та єдиність розв'язку . . . . .	168
3.5.2	Чисельний метод . . . . .	169
3.5.3	Приклади . . . . .	176

3.6	Експоненціально збіжний метод для диференціального рівняння першого порядку з необмеженим оператором в нелокальній умові . . . . .	180
3.6.1	Постановка задачі . . . . .	180
3.6.2	Існування та зображення розв'язку . . . . .	181
3.6.3	Чисельний метод . . . . .	184
3.6.4	Чисельні приклади . . . . .	186
3.7	Експоненціально збіжний метод для диференціального рівняння першого порядку в банаховому просторі з інтегральною нелокальною умовою . . . . .	190
3.7.1	Вступ. . . . .	190
3.7.2	Існування і зображення розв'язку. . . . .	191
3.7.3	Чисельний алгоритм. . . . .	194
3.7.4	Чисельні приклади. . . . .	198
3.8	Експоненціально збіжний метод для абстрактної нелокальної задачі з інтегральною нелінійністю . . . . .	200
3.8.1	Постановка задачі . . . . .	200
3.8.2	Інтегральне зображення розв'язку . . . . .	201
3.8.3	Дискретизація . . . . .	203
3.8.4	Ров'язок дискретизованого рівняння . . . . .	204
3.8.5	Аналіз похибки наближення розв'язку вихідної задачі . . . . .	207

РОЗДІЛ 4. Методи без насичення точності для рівнянь другого порядку зі сталим необмеженим операторним коефіцієнтом		213
4.1	Експоненціально збіжний метод для строго демпфованого диференціального рівняння другого порядку в банаховому просторі . . .	213
4.1.1	Вступ . . . . .	213
4.1.2	Зображення розв'язку через операторну експоненту . . . . .	214
4.1.3	Зображення та наближення операторної експоненти. . . . .	217
4.1.4	Чисельні експерименти. . . . .	222

4.2	Експоненціально збіжний метод для еліптичного рівняння . . . . .	227
4.2.1	Еліптична задача в областях циліндричного типу. . . . .	227
4.2.2	Метод обчислення нормалізованого операторного гіперболічного сінуса. . . . .	228
4.2.3	Випадок неоднорідного рівняння . . . . .	234
РОЗДІЛ 5. Методи без насичення точності розв'язування нелокальних задач для рівнянь другого порядку з необмеженим операторним ко- ефіцієнтом		246
5.1	Експоненціально збіжний метод для $m$ -точкової нелокальної задачі для еліптичного рівняння . . . . .	246
5.1.1	Постановка задачі. . . . .	246
5.1.2	Існування та зображення розв'язку . . . . .	248
5.1.3	Чисельний метод . . . . .	254
5.1.4	Чисельні розрахунки . . . . .	257
5.2	Експоненціально збіжний метод для еліптичного рівняння в бана- ховому просторі з інтегральною нелокальною умовою . . . . .	258
5.2.1	Існування та зображення розв'язку. . . . .	260
5.2.2	Чисельний метод. . . . .	263
5.2.3	Чисельні розрахунки . . . . .	268
Висновки		270

## ВСТУП

**Актуальність теми.** Розробці наближених методів розв'язування задач для рівнянь математичної фізики, що виникають при математичному моделюванні різноманітних процесів та явищ, присвячена значна кількість робіт. Це зумовлено тим, що для більшої частини таких задач відшукати розв'язок у явному вигляді не вдається або його вигляд є занадто складний для подальшого аналізу. Значним фактором також виступає швидкий розвиток обчислювальної техніки, що вимагає оновлення відомих методів та дає можливість реалізації нових.

Особливе місце серед наближених методів посідають методи без насичення точності (МБНТ) або спектральні методи. Вони дозволяють автоматично підлаштовуватись під гладкість вхідних даних. Тобто, чим більша гладкість, тим більша швидкість методу. На явище насичення точності та підходи до його подолання звернув увагу К.І. Бабенко в 1970-х роках. Ним було показано, що методи, які автоматично підлаштовуються під вхідні дані є оптимальними за точністю для заданої кількості даних на соболевських та аналітичних класах функцій. Порядок швидкості збіжності МБНТ для функцій з простору Соболева пропорційний показнику гладкості, а для функцій, що аналітичні, швидкість — експоненціальна. Хоча деякі ідеї та прийоми побудови МБНТ можна знайти в досить старих роботах К. Лацоша (C. Lanczos), Кленшоу (Clenshaw) та інших, по справжньому вони почали розвиватися в 1970-х–1980-х роках. Одними з перших робіт, що стосувались МБНТ, були роботи В.Л. Макарова та І.П. Гаврилюка в 70-х роках для побудови різницевих схем з точним спектром. В західній літературі МБНТ більш відомі як спектральні методи (СМ). Великий вклад в розробку та пропагування СМ внесли С.А. Орсаг (S.A. Orszag), Д. Готліб (D. Gottlieb), К. Кануто (C. Canuto), М.Ю. Хуссайні (M.Y. Hussaini), А. Куартероні (A. Quarteroni), Т.А. Занг (T.A. Zang), Б. Мерсьє (B. Mercier), Дж.П. Бойд (J.P. Boyd), Л.Н. Трефетен (L.N. Trefethen),



Дж. Шен (J. Shen), Т. Танг (T. Tang), Л.-Л. Ванг (L.-L. Wang) та інші.

Початково-крайові задачі математичної фізики часто вивчаються виходячи з їхніх узагальнень у вигляді диференціальних рівнянь з необмеженими операторними коефіцієнтами в деякому банаховому просторі. Такий підхід дає можливість розглядати значно ширший круг задач ніж дають класичні постановки. В цьому випадку постановка задачі в банаховому просторі може розглядатися як деяка метамодель. Відмітимо, що теорія операторно-диференціальних рівнянь виникла на межі двох математичних напрямів: теорії диференціальних рівнянь та теорії напівгруп. Вперше такі задачі з'явилися в працях І.М. Гельфанда та Г.Е. Шилова з диференціально-операторним рівнянням з коефіцієнтом у вигляді матриці, елементами якої є диференціальні оператори. Теорія напівгруп в банахових просторах побудована Е. Хілле, Р.С. Філіпсом, К. Іосідою та інш. Ними отримані результати щодо існування розв'язків таких рівнянь в термінах операторів. Формально їхні розв'язки легко записати, використовуючи функції від операторів. Зокрема, для рівнянь, що є узагальненнями параболічних, еліптичних та гіперболічних задач, розв'язки записуються за допомогою операторної експоненти, нормалізованого операторного гіперболічного синуса та операторного косинуса, відповідно.

Для обчислення операторної експоненти (а, отже, і розв'язку відповідної задачі) спочатку використовувалися розвинення її в ряди. Перші результати тут отримані в 1984 році А.В. Бабіним (для напіваналітичних початкових умов), М.Л. Горбачуком та В.В. Городецьким (для аналітичних початкових умов але при довільних значеннях змінного параметра  $t > 0$ ). Пізніше, в середині 1990-х, зображення на основі перетворення Келлі отримане в роботах Д.З. Арова, І.П. Гаврилюка та В.Л. Макарова, яке дало можливість знаходження операторної експоненти для початкових умов скінченної гладкості зі швидкістю без насичення точності. Наближеннями операторних експонент займалися також О.І. Кашпіровський та Ю.В. Митник, які побудували наближення операторної експоненти з експоненціальною швидкістю збіжності,

використовуючи ряди Фур'є-Чебишева. Дослідженнями для таких операторних функцій також присвячені роботи М.Ф. Городнього.

Суттєвий крок у побудові методів для наближення операторних експонент став запропонований В.Л. Макаровим та І.П. Гаврилюком підхід, що поєднує зображення операторних функцій за допомогою інтеграла Данфорда-Коші та експоненціально збіжні квадратурні формули. Це дало змогу побудувати методи для наближення операторних експонент, що мають експоненціальну швидкість збіжності для скінченної гладкості відносно операторного коефіцієнта початкових умов. Крім того, побудовані методи дають змогу природнім чином розпаралелювати обчислення за рахунок незалежного знаходження послідовності резольвент та наближення в різних точках. Використовуючи цю ідею, свої методи знаходження операторних експонент побудували Ц. Паленсія (С. Palencia), М. Лопес-Фернандес (М. Lopez-Fernandez), В. Томе (V. Thomee), Дж.А.Ц. Вайдеман (J.A.C. Weideman), Л.Н. Трефеттен (L.N. Trefethen), Д. Шин (D. Sheen). Необхідно відмітити також спосіб регуляризації резольвенти, запропонований В.Л. Макаровим, що дозволило побудувати метод з рівномірною по часу експоненціальною швидкістю збіжності, який дає можливість розв'язувати неоднорідні задачі при додаткових слабких припущеннях на гладкість вхідних даних.

Для рівнянь другого порядку з необмеженими операторними коефіцієнтами І.П. Гаврилюком та В.Л. Макаровим розвинута теорія на основі перетворення Келлі та побудовано методи без насичення точності відносно гладкості вхідних даних. Зокрема вони розроблені для знаходження операторних тригонометричних та гіперболічних функцій а також для операторної функції Бесселя.

Задачі з нелокальними умовами є одним з важливих об'єктів дослідження в теорії диференціальних рівнянь. Пов'язано це як з важливими прикладними застосуваннями таких задач при моделюванні різних явищ, так і з цікавими теоретичними дослідженнями. Нелокальними прийнято називати такі задачі,

в яких замість, або разом з граничною умовою ставляться умови, що пов'язують значення розв'язку ( $i$ , можливо, його похідних) у внутрішніх точках області. Нелокальні задачі для різних класів рівнянь розглядалися А.А. Дезінім, О.А. Самарським, А.В. Біцадзе, В.Л. Макаровим, В.А. Ільїним, Є.І. Моїсєєвим, А.Л. Скубачевським, А.М. Нахушевим, Н.И. Іонкіним, Д.Г. Гордезіані, Г.А. Авалішвілі. В Україні теорією задач з нелокальними умовами займалися Б.Й. Пташник, В.С. Ільків, І.Я. Кміть, В.М. Поліщук. Нелокальні крайові задачі мають особливості, яких нема у звичайних локальних крайових задачах. Так, наприклад, в нелокальних крайових задачах для параболічних рівнянь з умовами Біцадзе-Самарського виникає ефект зниження гладкості (подібний ефект для класичних локальних задач відсутній), нелокальні інтегральні умови можуть істотно змінити швидкість спадання розв'язків параболічних рівнянь. Нелокальні задачі у вигляді рівнянь з операторними коефіцієнтами досліджували А.А. Дезін, Л. Бижевський (L. Byszewski), В. Лакшмікантам (V. Lakshmikantham), С. Нтояс (S. Ntouyas), А.Л. Скубачевський. Чисельні методи для задач такого виду розглядалися в роботах А.В. Біцадзе, О.А. Самарського, Д.Г. Гордезіані, М. Салоговаса, П.Н. Вабіщевича, Г. Берікелашвілі та інші.

Разом з тим, методи, що мали б швидкість збіжності без насичення точності для нелокальних задач для рівнянь з необмеженими операторними коефіцієнтами в Банаховому просторі донедавна були невідомі. Тому побудова таких методів є актуальною задачею як з теоретичної, так і з практичної точок зору.

**Зв'язок роботи з науковими програмами.** Результати дисертаційної роботи отримано при виконанні наукових досліджень згідно з планом відділу обчислювальної математики Інституту математики НАН України на 2001-2017 роки в рамках держбюджетної теми «Чисельно-аналітичні методи розв'язування диференціальних рівнянь з необмеженими операторними коефіцієнтами та обробка інформаційних даних» (номер держреєстрації

0101U000371), «Високоточні методи розв'язування еволюційних задач та робка швидкодіючих алгоритмів» (номер держреєстрації 0106U000579), «Високоточні методи розв'язування задач для операторних рівнянь у некласичній постановці» (номер держреєстрації 0111U000020). Частина результатів була отримана під час роботи над DFG-проектом «Чисельно-аналітичні моделі і методи для дослідження динаміки рідини в резервуарах» (GZ: 436 UKR 113/33/0-4) в Лейпцігському університеті та університеті Ф.Шиллера м. Єна (2003–2010 р.р.)

**Мета дисертаційної роботи** полягає у наступному:

- побудувати методи без насичення точності для наближеного знаходження розв'язків неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку з необмеженими операторними коефіцієнтами;
- побудувати метод без насичення точності для наближеного знаходження розв'язку диференціального рівняння першого порядку з необмеженими операторним коефіцієнтам зі змінною областю визначення;
- побудувати методи без насичення точності для наближеного знаходження розв'язків диференціальних рівнянь першого порядку з необмеженими операторними коефіцієнтами і нелокальними багатоточковими та інтегральними умовами;
- побудувати експоненціально збіжні методи для наближеного знаходження розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку з необмеженими операторними коефіцієнтами;
- побудувати методи без насичення точності для наближеного знаходження розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку з необмеженими операторними коефіцієнтами і нелокальними багатоточковими та інтегральними умовами;

**Об'єктом дослідження** є диференціальні рівняння першого і другого порядків з необмеженими операторними коефіцієнтами в банаховому просторі.

**Предметом дослідження** є методи без насичення точності для початкових крайових та нелокальних задач для диференціальних рівнянь першого та другого порядків з необмеженими операторними коефіцієнтами в банаховому просторі.

**Методи дослідження.** При виконанні дисертаційного дослідження використано методи теорії спектральних, псевдоспектральних методів, SINC-наближень, та функціонального аналізу.

**Наукова новизна одержаних результатів** полягає в наступному:

- Встановлено швидкість збіжності Sinc-квадратурної формули для обчислення операторної експоненти використовуючи інтеграл Данфорда-Коші з контуром по параболі. Розроблено та обґрунтовано методи без насичення точності для знаходження наближеного розв'язку задачі Коші для неоднорідного рівняння першого порядку з необмеженим операторним коефіцієнтом.
- Доведено непокращуваність оцінок швидкості збіжності методу перетворення Келлі для обчислення операторної експоненти для різних класів гладкості початкового вектора.
- Досліджено задачу Коші для диференціального рівняння першого порядку з необмеженим операторним коефіцієнтом, область визначення якого є змінною та розроблено методи без насичення точності знаходження наближеного розв'язку.
- Досліджено  $m$ -точкову нелокальну задачу для диференціального рівняння першого порядку з необмеженим операторним коефіцієнтом, побудовано та обґрунтовано експоненціально збіжний метод знаходження

наближеного розв'язку. Знайдено необхідні та достатні умови існування розв'язку нелокальної задачі для випадку  $m = 2$ . Побудовано експоненціально збіжний метод знаходження наближеного розв'язку математичної моделі поширення аерозольного забруднення в атмосфері з періодичними умовами по часу, яка є окремим випадком двоточкової нелокальної задачі.

- Досліджено нелокальні задачі для диференціального рівняння першого порядку з умовами, що містять обмежений або необмежений операторний коефіцієнт в нелокальній умові, з інтегральними лінійними або нелінійними умовами. Знайдено достатні умови існування розв'язків та побудовано експоненціально збіжні наближені методи розв'язування.
- Для диференціальних рівнянь другого порядку з необмеженими операторними коефіцієнтами досліджено задачу Коші для демпфованого рівняння гіперболічного типу та крайову задачу для випадку еліптичного рівняння, побудовано експоненціально збіжні наближені методи.
- Досліджено нелокальні задачі з  $m$ -точковою та інтегральною умовами для еліптичного диференціального рівняння другого порядку з необмеженим операторним коефіцієнтом. Для них знайдено зображення розв'язків, встановлено достатні умови існування та побудовано експоненціально збіжні методи знаходження наближеного розв'язку.

**Практичне значення одержаних результатів** полягає в розробці ефективних нових методів наближеного розв'язання задач, що мають важливе значення при математичному моделюванні. Матеріали дисертації використовуються при читанні курсу «Додаткові розділи методів обчислень», що читається магістрам зі спеціальності «прикладна математика» Національного авіаційного університету.

**Публікації та особистий внесок здобувача.** Всі результати дисер-

тації, які виносяться на захист, одержані автором самостійно. З результатів робіт, що виконані у співавторстві, на захист виносяться лише положення, що одержані автором дисертації. У статтях [1–3] внесок співавторів є рівноцінним. У статтях [4,5] співавторам належить постановка задачі та участь в обговоренні результатів. У статтях [6–9] співавторам належить участь в обговоренні результатів. У статті [10] співавторам належать чисельні розрахунки та участь в обговоренні результатів. У статті [11] співавторам належить частина, присвячена багатоточковим нелокальним умовам.

## РОЗДІЛ 1

### Вихідні положення та огляд літератури

#### 1.1 Оптимальність за кількістю операцій обчислювальних алгоритмів

Серед наближених методів, що застосовуються на практиці особливе місце посідають методи з властивістю ненасичення точності. Це такі методи, швидкість збіжності яких автоматично залежить від гладкості елемента, що наближається. Для обґрунтування подальшого викладу, нагадаємо деякі визначення та результати з теорії наближень [1].

При побудові наближеного методу, задача полягає, взагалі кажучи, в наближенні деякого елемента з нескінченно вимірного простору  $X$  (припустимо, що це деяка функція  $f(t)$ ,  $t \in D \subset \mathbb{R}$ ) за допомогою  $n$  чисел, тобто за допомогою елемента зі скінченновимірного простору  $\mathbb{R}^n$ . Це можна зробити багатьма способами. Так, наприклад, можна взяти перші  $n$  коефіцієнтів ряду Тейлора чи Фур'є для функції  $f(t)$  як значення  $n$  лінійно незалежних функціоналів, тощо. Однак, найбільш поширений метод наближення полягає в знаходженні  $n$  значень функції на деякій сітці. Нехай  $X \in C(\overline{D})$  – компакт в даному функціональному просторі і  $\omega = \{t_1, t_2, \dots, t_n\} \in D$  – сітка на  $D$ , тоді довільну функцію  $f(t) \in X$  можна зобразити за допомогою вектора  $\xi = (f(t_1), \dots, f(t_n))$ . Нехай  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f \rightarrow \xi = (f(t_1), \dots, f(t_n))$  – відображення, що відповідає сітці  $\omega$ . Знайдемо в  $X$  повний прообраз точки  $\xi \in \varphi\{X\}$ , який позначимо  $\varphi^{-1}(\xi)$ . Діаметр цієї множини

$$d[\varphi^{-1}(\xi)] = \sup_{g, h \in \varphi^{-1}(\xi)} |g - h|_\infty, \quad (1.1)$$

є мірою точності, з якою точка  $\xi \in \mathbb{R}^n$  визначає елемент  $f \in X$ . Точність наближення елементів компакта  $X$  визначається в найгіршому випадку ве-



личною

$$\varepsilon(X, \mathbb{R}^n; \varphi) = \sup_{f \in X} d[\varphi^{-1} \circ \varphi(f)]. \quad (1.2)$$

Величина

$$\Delta_n(X, C(\overline{D})) = \inf_{\varphi} \varepsilon(X, \mathbb{R}^n; \varphi), \quad (1.3)$$

називається сітковим  $n$ -поперечником і показує наскільки добре довільний елемент з  $X$  може бути найбільш точно представлений своїми сітковими значеннями. Асимптотика сіткових поперечників для важливих класів функцій відома. Наведемо деякі відомі оцінки.

1. Нехай  $X = W_{\infty}^r(M, I)$  – соболевський клас функцій, заданих на  $I = [0, 1]$ , які мають узагальнені похідні до порядку  $r$  включно, що обмежені константою  $M$  в нормі Чебишева. Тоді  $\exists n_0$ :

$$\Delta_n\{W_{\infty}^r(M, I)\} \leq cn^{-r}, \quad (1.4)$$

для  $n > n_0$ ,  $c = const$ . Тоді, для наближення довільної функції з цього класу з заданою точністю  $\varepsilon$  нам знадобиться  $n_{\varepsilon}^{(opt)} = c \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{r}}$  вузлів сітки.

2. Нехай  $X = W_p^r(M, I)$  – соболевський клас функцій, заданих на  $I = [0, 1]$ , які мають узагальнені похідні до порядку  $r$  включно, що обмежені константою  $M$  в нормі  $L_p(I)$ . Тоді  $\exists n_0$ :

$$\Delta_n\{W_p^r(M, I)\} \leq cn^{-\rho}, \quad (1.5)$$

для  $n > n_0$ ,  $c = const$ ,  $\rho = r - p^{-1}$ . Тоді, для наближення довільної функції з цього класу з заданою точністю  $\varepsilon$  нам знадобиться  $n_{\varepsilon}^{(opt)} = c \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\rho}}$  вузлів сітки.

3. Нехай  $I = [-1, 1]$ ,  $E_r$  – область, обмежена еліпсом з фокусами в точках  $\pm 1$  та сумою півосей рівною  $r > 1$ . Припустимо, що  $X(E_r, I; M)$  – компакт неперервних на  $I$  функцій, що мають аналітичне продовження в  $E_r$ , обмежене константою  $M$ . Тоді  $\exists n_0$ :

$$\Delta_n\{X(E_r, I; M)\} \leq Mr^{-n}, \quad (1.6)$$

для  $n > n_0$ . Тоді, для наближення довільної функції з цього класу з заданою точністю  $\varepsilon$  нам знадобиться  $n_\varepsilon^{(opt)} = c \log \varepsilon^{-1}$  вузлів сітки.

Розглянемо скільки сіткових вузлів потрібно вибрати для досягнення заданої точності  $\varepsilon$  при знаходженні наближеного розв'язку найпростішої задачі Коші

$$u'(t) = f(t), \quad t \in (0, 1), \quad u(0) = 0, \quad (1.7)$$

за допомогою скінченно-різницевого або скінченно-елементного методів у просторі Соболева  $W_2^1(0, 1)$ . Якщо вибрати рівномірну сітку  $\omega_\tau$  з  $n$  вузлами та кроком  $\tau = \frac{1}{n}$ , використати різницеву схему

$$\frac{y(t + \tau) - y(t)}{\tau} = f(t + \tau/2), \quad t \in \omega_\tau,$$

то справедлива оцінка точності [2]:

$$\|y - u\|_{C(\omega_\tau)} \leq cn^{-1} |u|_{W_2^1(0,1)}.$$

З цієї оцінки отримаємо асимптотичну кількість вузлів сітки, необхідну для досягнення заданої точності та порівняємо з оптимальною кількістю вузлів, що визначена в (1.5):

$$n_\varepsilon \asymp \left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \gg n_\varepsilon^{(opt)} \asymp \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Ці оцінки показують, що скінченно-різницевий або скінченно-елементний метод не використовує повною мірою інформацію про розв'язок задачі Коші. Крім того, якщо гладкість розв'язку буде збільшуватись, то різниця між  $n_\varepsilon$  та  $n_\varepsilon^{(opt)}$  буде зростати. Це пояснюється тим, що точність скінченно-різницевого метода з деякого моменту залишається постійною і не залежить від гладкості точного розв'язку. Таке явище називається ефектом насичення точності [1].

У випадку коли розв'язок задачі аналітичний або кусково аналітичний, що виникає в багатьох прикладних задачах, то оптимальна кількість вузлів сітки визначається (1.6). Припустимо, що алгоритм для отримання аналітичної

функції  $u(x)$ , як розв'язку прикладної задачі, видає вектор  $y$  з  $n_a$  елементами, де по деякій нормі виконується оцінка  $\|u - y\| \leq \varphi(n_a)$ . З (1.6) видно, що для досягнення заданої точності  $\varepsilon$  з асимптотично оптимальною кількістю параметрів  $n_a \asymp \log \varepsilon^{-1}$ , функція  $\varphi(n_a)$  повинна бути експонентою. Для збереження оцінки  $n_\varepsilon^{(opt)} \asymp n_a \asymp \log \varepsilon^{-1}$ , алгоритм повинен мати складність  $C(n_a)$  порядку  $n_a$  відносно кількості арифметичних операцій (лінійна складність). Таким чином, оптимальний алгоритм для аналітичних розв'язків повинен мати експоненціальну швидкість збіжності і лінійну складність. Нажаль, на практиці алгоритми з оптимальною складністю майже не зустрічаються. Пов'язано це з тим, зокрема, що в більшості випадків доводиться виконувати матрично-векторні операції: матрично-векторне та матрично-матричне множення, обертання матриці тощо. Існує гіпотеза, що для обертання загального виду матриці  $n \times n$  існує алгоритм зі складністю  $\asymp n^{2+\varepsilon}$  множень для довільного малого  $\varepsilon > 0$ . Очевидно, що для таких алгоритмів досягнути оптимальної складності неможливо. Але в багатьох випадках вдається побудувати алгоритм з майже оптимальною швидкістю збіжності. Для того, щоб формалізувати порядок експоненціальної швидкості введемо наступні означення:

**Означення 1.1** *Говорять, що послідовність  $a_n$  має експоненціальну швидкість спадання, якщо*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n * n^k = 0, \quad \forall \text{ скінченного } k.$$

Розрізняють три види експоненціальної збіжності: супергеометричну, геометричну, субгеометричну.

**Означення 1.2** *Говорять, що експоненціально спадна послідовність  $a_n$  має супергеометричну, геометричну, субгеометричну швидкість якщо*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log(|a_n|)/n = \begin{cases} \infty, & \text{супергеометричну} \\ \text{constant}, & \text{геометричну} \\ 0, & \text{субгеометричну.} \end{cases}$$

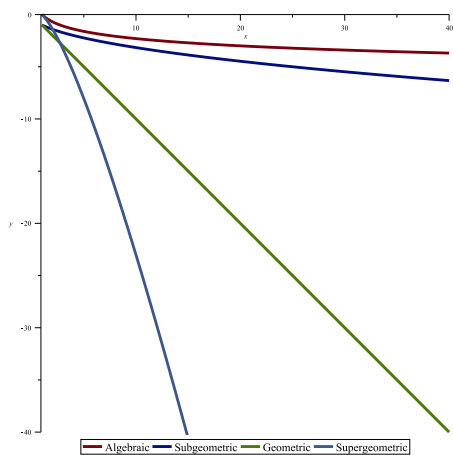


Рис. 1.1: Швидкість збіжності

Різні порядки збіжності наведені на рис. 1.1.

З наведених вище міркувань ми можемо вивести наступні вимоги до наближених методів:

1. Метод мусить мати властивість ненасичення точності.
2. Для випадку аналітичних розв'язків швидкість збіжності повинна бути експоненціальною.

В літературі такі методи називають також методами зі спектральною швидкістю збіжності. Відмітимо також, що експоненціально збіжні методи дозволяють в деяких випадках побороти «прокляття розмірності» (експоненціальне зростання кількості операцій при зростанні розмірності задачі) [3–8].

## 1.2 Інтерполяція функцій без насичення точності

Одним з прикладів методу, що не має насичення точності, а при аналітичності вхідних даних має експоненціальну швидкість збіжності є наближення функції за допомогою інтерполяційного полінома по вузлах Чебишева. Такий спосіб інтерполяції дуже часто використовується при побудові МБТ. Оскільки в подальшому буде застосовуватись ця інтерполяція, наведемо основні результати.

Інтерполяційна формула Лагранжа має вигляд:

$$P_n(u, x) = \sum_{i=0}^n u(x_i) \prod_{\substack{j=0, \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \sum_{i=0}^n u(x_i) L_{i,n}(x),$$

$L_{i,n}(x)$ , для  $i = \overline{0, n}$  називаються фундаментальними поліномами Лагранжа.

Якщо розглядається інтервал  $(a, b) \equiv (-1, 1)$ , то за інтерполяційні вузли  $x_i$  можна вибрати нулі поліномів Чебишева:

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) &= \cos((n+1) \arccos(x)), \\ x_i &= \cos \frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}, \quad i = 0, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Тоді

$$L_{i,n}(x) = \frac{T_{n+1}(x)}{T'_{n+1}(x_i)(x - x_i)}, \quad i = 0, \dots, n.$$

Для наведення оцінок похибок наближень за допомогою інтерполяційного полінома введемо вагові  $L^p$ -норми наступним чином:

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_w^p(-1,1)} &= \left( \int_{-1}^1 |u(x)|^p w(x) dx \right)^{1/p}, \quad \text{для } 1 \leq p < \infty, \\ \|u\|_{L_w^\infty(-1,1)} &= \sup_{-1 \leq x \leq 1} |u(x)|, \end{aligned}$$

і простори Соболева з вагою

$$\|u\|_{H_w^m(-1,1)} = \left( \sum_{k=0}^m \|u^{(k)}(x)\|_{L_w^2(-1,1)}^2 \right)^{1/2},$$

з півнормою

$$|u|_{H_w^{m;N}(-1,1)} = \left( \sum_{k=\min(m, N+1)}^m \|u^{(k)}(x)\|_{L_w^2(-1,1)}^2 \right)^{1/2}$$

Справедлива наступна теорема [9]:

**Теорема 1.1** *Для похибки інтерполяційного наближення справедливі оцінки*

$$\|u - P_n(u, \cdot)\|_{L_w^2(-1,1)} \leq C n^{-m} |u|_{H_w^{m;n}(-1,1)}, \quad (1.9)$$

для всіх  $u \in H_w^m(-1, 1)$  з  $m \geq 0$ .

$$\|u - P_n(u, \cdot)\|_{L_w^l(-1, 1)} \leq C n^{2l-m} |u|_{H_w^{m;n}(-1, 1)}, \quad (1.10)$$

для всіх  $u \in H_w^m(-1, 1)$  з  $m \geq 1$  і  $1 \leq l \leq m$ .

Відмітимо, що інтерполяційні вузли Чебишева (1.8) не містять кінців відрізка  $[-1, 1]$ . Для того, щоб побудувати інтерполяційну формулу замкнутого типу використовують вузли Чебишева-Гауса-Лобато:

$$x_j = \cos \frac{\pi(n-j)}{n}, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

$$L_{i,n}(\eta) = \frac{(1-\eta^2)T_n'(\eta)}{(\eta-x_i)\frac{d}{d\eta}[(1-\eta^2)T_n'(\eta)]_{\eta=x_i}}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Оцінки (1.9) та (1.10) залишаються вірними.

Для оцінки похибки наближення інтерполяційного многочлена по Чебишевським вузлам в рівномірній метриці справедлива наступна теорема [10]:

**Теорема 1.2** *Нехай для натурального  $\nu \geq 1$  функція  $f$  та її похідні до  $f^{(\nu-1)}$  є абсолютно неперервними на  $[-1, 1]$ , а  $\nu$ -та похідна  $f^{(\nu)}$  є функцією обмеженої варіації  $V$ . Тоді для довільного  $n > \nu$  інтерполяційний поліном наближає її з точністю*

$$\|f - p_n\| \leq \frac{4V}{\pi\nu(n-\nu)^\nu}. \quad (1.11)$$

Введемо до розгляду еліпс Бернштейна  $\mathcal{E}_\rho = \mathcal{E}_\rho(B)$  для відрізка  $B := [-1, 1]$  з фокусами в  $w = \pm 1$  та сумою півосей рівною  $\rho > 1$ ,

$$\mathcal{E}_\rho := \{w \in \mathbb{C} : |w-1| + |w+1| \leq \rho + \rho^{-1}\},$$

або

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\rho &= \left\{ w \in \mathbb{C} : w = \frac{1}{2} \left( \rho e^{i\phi} + \frac{1}{\rho} e^{-i\phi} \right) \right\} \\ &= \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a = \frac{1}{2} \left( \rho + \frac{1}{\rho} \right), b = \frac{1}{2} \left( \rho - \frac{1}{\rho} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Для нескінченно диференційованої функції маємо [10]:

**Теорема 1.3** Нехай функція  $f$  – аналітична на  $[-1, 1]$  має аналітичне продовження в еліпс Бернштейна  $\mathcal{E}_\rho$ , де задовольняє оцінку

$$|f(x)| \leq M,$$

для деякого  $M$ . Тоді для кожного  $n \geq 0$  її інтерполяційний поліном по вузлах Чебишева наближає  $f$  з точністю

$$\|f - p_n\| \leq \frac{4M\rho^{-n}}{\rho - 1}. \quad (1.12)$$

Для наближення функцій та побудови квадратурних формул будемо також використовувати так звані Sinc базиси. Для опису цих методів введемо наступні позначення [11]:

$$D_d = \{z \in \mathbb{C} : -\infty < \Re z < \infty, |\Im z| < d\},$$

$D_d(\epsilon)$  визначене для  $0 < \epsilon < 1$  як

$$D_d(\epsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |\Re z| < 1/\epsilon, |\Im z| < d(1 - \epsilon)\}.$$

Введемо також простір  $\mathbf{H}^p(D_d)$  функцій таких, що для кожної  $f \in \mathbf{H}^p(D_d)$  виконується  $\|f\|_{\mathbf{H}^p(D_d)} < \infty$  з

$$\|f\|_{\mathbf{H}^p(D_d)} = \begin{cases} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\partial D_d(\epsilon)} |f(z)|^p |dz| \right)^{1/p} & \text{if } 1 \leq p < \infty, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{z \in \partial D_d(\epsilon)} |f(z)| & \text{if } p = \infty. \end{cases} \quad (1.13)$$

Нехай

$$S(k, h)(x) = \frac{\sin [\pi(x - kh)/h]}{\pi(x - kh)/h} \quad (1.14)$$

буде  $k$ -ю Sinc-функцією кроку  $h$ , обчисленою в точці  $x$ . Для заданої  $f \in \mathbf{H}^p(D_d)$ ,  $h > 0$  і додатного цілого  $N$  будемо використовувати позначення

$$C(f, h) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh)S(k, h),$$

$$C_N(f, h) = \sum_{k=-N}^N f(kh)S(k, h),$$

$$E(f, h) = f - C(f, h) \quad E_N(f, h) = f - C_N(f, h).$$

В.А. Котельніков (1933), Дж. Вітакер (1935) та К. Шенон (1948) показали, що band-limited сигнали можуть бути точно відновлені з їхніх значень. Тобто, якщо область значень перетворення Фур'є  $\hat{f}(\omega)$  неперервної функції  $f(t)$  знаходиться в  $[-\pi/h, \pi/h]$  тоді

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nh)S(n, h)(t) \equiv C(f, h)(t).$$

Урізана сума  $C_N(f, h)$  є узагальненим інтерполяційним поліномом для  $f(t)$  з базисними функціями  $S(k, h)(t)$ . Тобто  $C_N(f, h)(kh) = f(kh)$ ,  $k = -N, -N + 1, \dots, N$ .

Для оцінки похибки справедлива наступна теорема [11]:

**Теорема 1.4** *Нехай  $f \in \mathbf{H}^p(D_d)$  з  $1 \leq p \leq \infty$ . Тоді для  $z \in D_d$*

$$E(f, h)(z) = f(z) - C(f, h)(z) = \frac{\sin(\pi z/h)}{2\pi i} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{f(t - id^-)}{(t - z - id) \sin[\pi(t - id)/h]} - \frac{f(t + id^-)}{(t - z + id) \sin[\pi(t + id)/h]} \right\} dt.$$

З цієї теореми випливає наступна оцінка для наближення функцій, що експоненціально спадають на безмежності.

**Теорема 1.5** *Нехай виконані умови теореми 1.4 і функція  $f$  є експоненціально спадною*

$$|f(x)| \leq ce^{-\alpha|x|}, \quad x \in (-\infty, \infty),$$

з додатними сталими  $c, \alpha$ , тоді, вибираючи

$$h = \left( \frac{\pi d}{\alpha N} \right)^{1/2},$$

існує додатне число  $C_1$ , залежне тільки від  $f, d, \alpha, i$  у, таке що для  $s = 2$  або  $s = \infty$ ,

$$\|E_N(f, h)\|_s \leq C_1 N^{(1-1/s)/2} \exp \left\{ - \left( \frac{\pi \alpha}{d} \right)^{1/2} (d - |y|) N^{1/2} \right\}.$$



### 1.3 Експоненціально збіжні квадратурні формули

Оскільки при розв'язуванні крайових та початкових задач для диференціальних рівнянь потрібно мати можливість ефективно наближати інтеграли, то одним з основних застосувань інтерполянтів є побудова квадратурних формул. Використання експоненціально збіжних інтерполяційних формул дає можливість отримати експоненціально збіжні квадратури. При наближенні операторних функцій особливо необхідні квадратури для інтегралів на нескінченних інтервалах. Розглянемо

$$I = I(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx. \quad (1.15)$$

Для заданої  $f \in \mathbf{H}^p(D_d)$ ,  $h > 0$  і додатного цілого  $N$  будемо використовувати позначення

$$I(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx, \quad T_N(f, h) = h \sum_{k=-N}^N f(kh),$$

$$T(f, h) = h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh),$$

$$\eta_N(f, h) = I(f) - T_N(f, h), \quad \eta(f, h) = I(f) - T(f, h).$$

Справедлива наступна теорема [11]:

**Теорема 1.6** *Нехай  $f \in \mathbf{H}^1(D_d)$ . Тоді*

$$\eta(f, h) = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{f(t - id^-)e^{-\pi(d+it)/h}}{\sin[\pi(t - id)/h]} - \frac{f(t + id^-)e^{-\pi(d-it)/h}}{\sin[\pi(t + id)/h]} \right\} dt.$$

Крім того,

$$|\eta(f, h)| \leq \frac{e^{-\pi d/h}}{2 \sin(\pi d/h)} \|f\|_{\mathbf{H}^1(D_d)}.$$

Якщо додатково  $f$  є експоненціально спадною на нескінченності, тобто задовольняє нерівність

$$|f(x)| \leq ce^{-\alpha|x|}, \quad x \in (-\infty, \infty),$$

з додатними константами  $c$ ,  $\alpha$ , тоді, вибираючи

$$h = \left( \frac{2\pi d}{\alpha N} \right)^{1/2},$$

отримаємо

$$|\eta_N(f, h)| \leq c_1 e^{-(2\pi d \alpha N)^{1/2}},$$

де  $c_1$  залежить тільки від  $f$ ,  $d$  та  $\alpha$ .

Цей результат може бути поширений на випадок векторно-значної функції, використовуючи інтеграл Бохнера [12, 13].

Для цього вводиться в розгляд для  $1 \leq p \leq \infty$  простір  $\mathbf{H}^p(D_d)$  всіх операторно-значних функцій, які є аналітичними в  $D_d$  і такі, що для кожної  $\mathcal{F} \in \mathbf{H}^p(D_d)$ , виконується  $\|\mathcal{F}\|_{\mathbf{H}^p(D_d)} < \infty$  з нормою

$$\|\mathcal{F}\|_{\mathbf{H}^p(D_d)} := \begin{cases} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\partial D_d(\epsilon)} \|\mathcal{F}(z)\|^p |dz| \right)^{1/p} & \text{if } 1 \leq p < \infty, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{z \in D_d(\epsilon)} \|\mathcal{F}(z)\| & \text{if } p = \infty, \end{cases} \quad (1.16)$$

замість (1.13)

Відмітимо також, що квадратурні формули, побудовані на основі інтерполяційних Формул по вузлах Чебишева, квадратурні формули Гауса на обмежених інтервалах також мають експоненціальний порядок збіжності для аналітичних підінтегральних функцій.

## 1.4 Диференціальні рівняння з необмеженими операторними коефіцієнтами в банаховому просторі

Методи без насичення точності для початково-крайових задач математичної фізики часто будуються виходячи з їхніх узагальнень у вигляді диференціальних рівнянь з необмеженими операторними коефіцієнтами в деякому банаховому просторі. Так наступні задачі:

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} + Au(t) &= f(t), \quad t \in (0, T], \\ u(0) &= u_0, \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + Au(t) = f(t), \quad t \in (0, T], \quad (1.18)$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1,$$

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} - Au(x) = -f(x), \quad x \in (0, 1), \quad (1.19)$$

$$u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1,$$

де  $A$  – необмежений оператор з деякою областю визначення  $D(A)$  в банаховому просторі  $X$ ,  $u_0, u_1$  – задані вектори а  $f(t)$  задана векторно-значна функція з простору  $X$ , можуть розглядатись у вигляді метамоделей для крайових задач параболічного, гіперболічного та еліптичного типів, якщо оператор  $A$  є еліптичним диференціальним оператором [14–18]. На практиці це може бути оператор Лапласа з деякими крайовими умовами. Наприклад, в одновимірному випадку  $A$  – це оператор другої похідної з однорідними умовами Діріхле:

$$D(A) := \{v \in H^2(0, 1) : v(0) = 0, v(1) = 0\}, \quad (1.20)$$

$$Av := -\frac{d^2v}{dy^2} \quad \text{для всіх } v \in D(A).$$

Тоді задачі (1.17)–(1.19) будуть задачами з крайовими умовами Діріхле відповідно для параболічного, гіперболічного та еліптичного рівнянь.

Відмітимо, що теорія операторно-диференціальних рівнянь виникла на межі двох математичних напрямів: теорії диференціальних рівнянь та теорії напівгруп. В працях [19–21] з'явилося диференціально-операторне рівняння виду (1.17), де  $A$  – матриця, елементи якої є диференціальні оператори по  $x$ . Теорія напівгруп в банахових просторах побудована Е.Хілле, Р.С.Філіпсом, К.Лосідою та інш. [22]. Ними отримані результати щодо існування розв'язків таких рівнянь в термінах операторів.

Нехай оператор  $A$  лінійний, щільно визначений (тобто  $\overline{D(A)} = X$ ). Наведемо деякі результати, що стосуються розв'язності задачі Коші (1.17) [14, 23–25]:

**Означення 1.3** *Функція  $u(t) \in C^1\{[0, +\infty], X\}$  називається розв'язком задачі Коші (1.17), якщо вона задовольняє рівняння і початкову умову. при*

$$f(t) \equiv 0$$

**Означення 1.4** *Задача Коші (1.17) називається коректною на  $E \in X$ ,  $\bar{E} = X$ , якщо*

- розв'язок існує для довільного  $u_0 \in E$ ;
- розв'язок єдиний і стійкий відносно  $u_0 \in E$ :  $\forall t > 0 \exists K: \|u(t) - \tilde{u}(t)\| \leq K \|u_0 - \tilde{u}_0\|$ .

Задача Коші (1.17) називається рівномірно коректною, якщо  $\forall T > 0$  стійкість рівномірна відносно  $t \in [0, T]$ .

**Означення 1.5** *Однопараметричне сімейство обмежених операторів  $T(t)$ ,  $t \geq 0$  називається сильно неперервною напівгрупою (або напівгрупою класу  $C_0$ ), якщо:*

- $T(t+h) = T(t)T(h)$ ,  $t, h > 0$ ;
- $T(0) = I$ ;
- оператор-функція  $T(t)$  сильно неперервна по  $t \geq 0$ .

**Означення 1.6** *Оператор, що визначається як*

$$Ax = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(h) - I}{h} x,$$

*визначений для тих  $x \in X$ , для яких ця границя існує, називається генератором напівгрупи  $T(t)$ .*

Справедливі наступні твердження [15, 24, 25]:

**Лема 1.1** *Нехай  $T(t)$ ,  $t \geq 0$  – сильно неперервна напівгрупа з генератором  $A$ . Тоді:*

- 1)  $T(t)$ ,  $T(h)$  комутують для всіх  $t, h \geq 0$ ;

- 2)  $\exists K > 0, \omega \geq 0: \|T(t)\| \leq K \exp(\omega t)$ ;
- 3)  $\overline{D(A)} = X$  і оператор  $A$  – замкнутий;
- 4)  $\forall u \in D(A) T'(t)u = T(t)Au = AT(t)u$ ;
- 5)  $\forall \lambda$  таких, що  $\operatorname{Re} \lambda > \omega$  існує резольвента  $R(\lambda, A)$  і для неї має місце рівність:

$$R(\lambda, A)u = (A - \lambda I)^{-1}u = - \int_0^{\infty} \exp(-\lambda t) T(t)u dt, \quad u \in X.$$

**Теорема 1.7** Нехай лінійний оператор  $A$  – замкнутий зі щільною в просторі  $X$  областю визначення. тоді наступні твердження еквівалентні:

- 1) задача Коші (1.17) рівномірно коректна на  $D(A)$ ;
- 2) оператор  $A$  є генератором сильно неперервної напівгрупи  $T(t)$  такої, що  $T'(0) = A$ ;
- 3)  $\exists K > 0, \omega \geq 0: \forall \lambda \operatorname{Re} \lambda > \omega$  справедлива оцінка

$$\frac{1}{n!} \left\| \frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A) \right\| \leq K (\operatorname{Re} \lambda - \omega)^{-(n+1)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

розв'язок має вигляд

$$u(t) = T(t)u_0, \quad u_0 \in D(A).$$

**Теорема 1.8** Нехай для резольвенти лінійного оператора  $A$  виконується умова:

$$\exists K > 0, \quad \omega \geq 0: \forall \lambda \operatorname{Re} \lambda > \omega \quad \|R(\lambda, A)\| \leq K(1 + |\lambda|)^\gamma,$$

для деякого  $\gamma \geq -1$ . Тоді для довільного  $u_0 \in D(A^{[\gamma]+3})$  функція

$$\tilde{J}(t) = \begin{cases} J(t) = v.p. \frac{-1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \exp(\lambda t) R(\lambda, A) d\lambda, & T > 0, \sigma > \omega; \\ J(+0), & t = 0, \end{cases}$$

дає зображення єдиного розв'язку задачі Коші (1.17).

Нехай  $Z$  – підмножина функцій  $f(t)$  з  $C\{[0, \infty), X\}$  таких, що  $Af(t) \in C\{[0, \infty), X\}$ . Тоді справедлива теорема:

**Теорема 1.9** *Нехай лінійний оператор  $A$  – замкнений зі щільною в просторі  $X$  областю визначення, задача Коші (1.17) рівномірно коректна на  $D(A)$  і  $T(t)$  – напівгрупа, породжена оператором  $A$ . Тоді, якщо  $u_0 \in D(A)$ ,  $f(t) \in Z$ , то функція*

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad t \geq 0,$$

є розв'язком задачі Коші (1.17).

**Зауваження 1.1** *Якщо в умовах теореми 1.8 припустити, що  $\gamma < 0$ , то умову на резольвенту можна послабити, замінивши на наступну:*

$$\|R(\lambda, A)\| \leq K(1 + \tau)^\gamma, \quad \lambda = \sigma + i\tau, \quad \sigma \geq \omega.$$

**Зауваження 1.2** *При побудові розв'язку в умовах теореми 1.8 переходять від інтегрування по прямій до інтегрування по деякому контуру  $\Gamma$ , на якому  $\exp(\lambda t)$  прямує до 0 при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ . Тоді*

$$J(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \exp(\lambda t) R(\lambda, A) u_0 d\lambda, \quad u_0 \in D(A). \quad (1.21)$$

Опису побудови операторної експоненти, використовуючи інтегрування по спеціальному контуру присвячено наступний параграф.

## 1.5 Нелокальні задачі

Задачі з нелокальними умовами є одним з важливих об'єктів дослідження в теорії диференціальних рівнянь. Пов'язано це як з важливими прикладними застосуваннями таких задач при моделюванні різних явищ, так і з цікавими теоретичними дослідженнями. Нелокальними прийнято називати такі

задачі, в яких замість, або разом з граничною умовою ставляться умови, що пов'язують значення розв'язку (і, можливо, його похідних) у внутрішніх точках області. Нелокальні задачі для різних класів рівнянь розглядалися О.А. Самарським, А.В. Біцадзе, В.Л. Макаровим, В.А. Ільїним, Є.І. Моїсєєвим, А.Л. Скубачевським, А.М. Нахушевим, Н.И. Іонкіним, Д.Г. Гордезіані, Г.А. Авалішвілі [26–33]. В Україні теорією задач з нелокальними умовами займалися В.Л. Макаров, Б.Й. Пташник, В.С. Ільків, І.Я. Кміть, В.М. Поліщук [34]. Нелокальні крайові задачі мають особливості, яких нема у звичайних локальних крайових задачах. Так, наприклад, в нелокальних крайових задачах для параболічних рівнянь з умовами Біцадзе-Самарського виникає ефект зниження гладкості (подібний ефект для класичних локальних задач відсутній), нелокальні інтегральні умови можуть істотно змінити швидкість спадання розв'язків параболічних рівнянь. Нелокальні задачі у вигляді рівнянь з операторними коефіцієнтами досліджували А.А. Дезін, Л. Бижевський (L. Byszewski), В. Лакшмікантам (V. Lakshmikantham), С. Нтояс (S. Ntouyas), А.Л. Скубачевський [35–40]. Чисельні методи для задач такого виду розглядалися в роботах А.В. Біцадзе, О.А. Самарського, Д.Г. Гордезіані, М. Сапоговаса, П.Н. Вабіщевича, Г. Берікелашвілі [27, 41–51].

Разом з тим, методи, що мали б швидкість збіжності без насичення точності для нелокальних задач для рівнянь з необмеженими операторними коефіцієнтами в Банаховому просторі донедавна були невідомі. Тому побудова таких методів є актуальною задачею як з теоретичної, так і з практичної точок зору.

## 1.6 Зображення операторної експоненти за допомогою розвинення в ряди

Для обчислення операторної експоненти (а, отже, і розв'язку задачі (1.17)) спочатку використовувалися розвинення її в ряди. Спочатку дослідження

проводилися для випадку гільбертових просторів, а потім і для банахових. Перші результати тут отримані в 1984 році А.В. Бабіним [52], який побудував наближення операторної експоненти для напіваналітичних початкових умов, а М.Л. Горбачук та В.В. Городецький [53] для аналітичних початкових умов але при довільних  $t > 0$ . Пізніше, в середині 90-х, інше представлення отримане в роботах Д.З. Арова, І.П. Гаврилюка та В.Л. Макарова [54], яке дало можливість знаходження операторної експоненти для початкових умов скінченної гладкості зі швидкістю без насичення точності. Ще трохи пізніше з'явилася робота О.І. Кашпіровського і Ю.В. Митника [55], яка базується на розвиненні в ряд за поліномами Чебишева, має експоненціальну швидкість збіжності і може бути застосована до початкових умов скінченної гладкості. Наближеннями операторних функцій займався також М.Ф. Городній із співавторами [56–61]. Наведемо деякі результати, що стосуються зображення операторної експоненти.

Нехай  $H$  – Гільбертовий простір з скалярним добутком  $(\cdot, \cdot)$  та асоційованою нормою  $\|\cdot\|$ . Під розв'язком задачі (1.17) будемо розуміти таку векторнозначну функцію (з значеннями в  $H$ )  $u(t)$ , що є неперервною при  $t \geq 0$ , і сильно неперервно диференційовною  $t > 0$ ,  $u(t) \in D(A)$ , задовольняє рівняння та початкові умови. Якщо  $A$  є генератором  $C_0$  напівгрупи  $T(t)$ , тоді абстрактна задача Коші (1.17) має єдиний розв'язок, який має зображення у вигляді  $u(t) = T(t)u_0 \quad \forall u_0 \in D(A)$ .

**Теорема 1.10** [17] *Вектор-функція  $u(t)$  неперервна на  $[0, b)$  є розв'язком на інтервалі  $(0, b)$  тоді і тільки тоді, коли зображається у вигляді  $u(t) = e^{-At}f$  ( $f = u(0) \in H$ ).*

Отже, розв'язок задачі (1.17) можна зобразити у вигляді ряду

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n u_0}{n!} \quad (1.22)$$

Наведемо декілька означень (див. [17, 62–64]).



**Означення 1.7**  $h \in H$  називається вектором класу  $C^\infty$ , якщо  $\forall n \in \mathbb{N}$   $h \in D(A^n)$ .

Припустимо, що  $\{m_n\}$ — деяка послідовність така, що  $m_n \leq m_{n+1}$ ,  $m_0 = 1$ .

**Означення 1.8** Нехай  $h \in C^\infty$ . Тоді  $h$  належить класу Жевре типу Рум'є порядку  $\beta$  ( $0 < \beta < \infty$ ), якщо  $\exists c, \alpha > 0$  постійні такі, що  $\|A^n h\| \leq c\alpha^n m_n$ . Позначається  $\mathcal{G}_{\{m_n\}}$ .

Клас  $\mathcal{G}_{\{n!\}}$  співпадає з класом аналітичних векторів. Клас  $\mathcal{G}_{\{1\}}$ — називається класом векторів експоненціального типу.  $\mathcal{G}_{\{n!\}} \subset \mathcal{G}_{\{1\}}$ .

**Теорема 1.11** [62] Нехай  $A$ — замкнений лінійний оператор в Банаховому просторі  $X$ ,  $u_0 \in X$ . Тоді формула (1.22) визначає розв'язок задачі Коші (1.17) на інтервалі  $(-h, h)$  тоді і тільки тоді, коли  $u_0 \in \mathcal{G}_{\{n!\}}$ .

Отже, як бачимо, для того, щоб користуватися зображенням (1.22) треба вимагати належність початкових даних до вузького класу, що є неприйнятним для багатьох практичних застосувань. Тому були розвинуті методи, які дозволяють знаходити операторну експоненту для більш широких класів функцій.

Розв'язок задачі (1.17) можна зобразити у вигляді (див. [54, 65–67])

$$u(t) = e^{-\gamma t} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p L_p^{(0)}(2\gamma t) (y_{\gamma,k} + y_{\gamma,k+1}), \quad (1.23)$$

де  $L_p^{(0)}(t)$ — многочлени Лагерра,  $\gamma > 0$ ,

$$y_{\gamma,k+1} = T_\gamma y_{\gamma,k}, \quad k = 0, 1, \dots, y_{\gamma,0} = u_0, \quad (1.24)$$

$T_\gamma = (\gamma I + A)(\gamma I - A)^{-1}$ — перетворення Келлі оператора  $A$ . Нехай

$$u^N(t) = e^{-\gamma t} \sum_{p=0}^N (-1)^p L_p^{(0)}(2\gamma t) (y_{\gamma,k} + y_{\gamma,k+1}), \quad (1.25)$$

наближення до  $u(t)$ . Має місце

**Теорема 1.12** [66, 67] *Нехай  $u_0 \in D^\sigma \equiv D(A^\sigma)$ ,  $A$  – щільно визначений, самоспряжений, додатно визначений оператор. Тоді вектор-функція  $u(t)$ , визначена за формулою (1.23) є єдиним розв'язком задачі (1.17). Має місце оцінка*

$$\|u(t) - u^N(t)\| \leq CN^{-\sigma} \|u_0^\sigma\|,$$

$u_0^\sigma = A^\sigma u_0$ ,  $C = \text{const}$  не залежить від  $N$ ,  $x_0$ .

Як видно з цієї теореми, чим вища гладкість початкової умови (чим більше  $\sigma$ ) тим більша швидкість збіжності метода. Тобто наближення (1.25) має властивість ненасичення точності [1]. Зауважимо, що експоненціальна швидкість збіжності у методі перетворення Келлі (1.25) може бути досягнута при  $\sigma = \infty$ , тобто на нескінченно диференційованому векторі  $u_0$ .

В роботі [55] для зображення операторної експоненти, як зазначалось вище використовується розклад в ряд Фур'є-Чебишева для

$$e^{-t/\mu} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k^*(\mu), \quad t > 0, \quad 0 \leq \mu \leq 1,$$

де  $T_k^*(\mu) = \cos(k \arccos(2\mu - 1))$  – зміщені поліноми Чебишева першого роду,  $k \in N$  (див. [68]),  $a_k$  – коефіцієнти Фур'є

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \exp\left\{-\frac{t}{\mu}\right\} T_k^*(\mu) \frac{d\mu}{(\mu(1-\mu))^{0.5}} \quad k = 1, 2, \dots$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \exp\left\{-\frac{t}{\mu}\right\} T_0^*(\mu) \frac{d\mu}{(\mu(1-\mu))^{0.5}}$$

Нехай  $P_n(\mu) = \sum_{k=0}^n a_k T_k^*(\mu)$  – часткова сума ряду. Справедлива

**Теорема 1.13** [55] *Нехай  $A$  – самоспряжений напівобмежений знизу оператор ( $A \geq I$ ), з всюди щільною областю визначення. Тоді для апроксимації розв'язку задачі (1.17)*

$$u_n(t) = P_n(-A^{-1})u_0, \quad (1.26)$$

*справедлива оцінка*

$$\|u(t) - u_n(t)\| \leq C \exp(-\delta \sqrt[3]{tn^2}) \|u_0\|,$$

де  $C, \delta$  – додатні сталі, незалежні від  $n \in N, t > 0$ .

Відмітимо, що метод розвинення операторної експоненти в ряд Фур'є-Чебишева і наближення (1.26) має експоненціальну швидкість збіжності для будь-якої гладкості початкового вектора  $u_0$ , на відміну від наближення через перетворення Келлі і розвинення в ряд по поліномам Лагерра (1.25). Але складність в реалізації методу рядів Фур'є-Чебишева (необхідність знаходження поліномів від оберненого оператора  $A$ ), відсутність збіжності при  $t = 0$  не привели до широкого застосування цього методу.

## 1.7 Сильно $P$ -позитивні та секторіальні оператори і зображення операторної експоненти за допомогою інтеграла Данфорда-Коші

Відмітимо, що для коректної постановки задач (1.17)–(1.19) необхідно правильно задати  $D(A)$ – область визначення оператора  $A$ . В цьому підрозділі розглянемо деякі види необмежених операторів, які використовуються для задач (1.17)–(1.19).

Сильно  $P$ -позитивні оператори вперше були введені до розгляду в [69] і відіграють важливу роль в теорії еволюційних диференціальних рівнянь [69, 70].

Нехай  $A : X \rightarrow X$ – лінійний щільно визначений замкнутий оператор в просторі  $X$ ,  $\Gamma_S = \{z = \xi - i\eta : \xi = a_0\eta^2 + b_0, a_0 > 0, b_0 > 0, \eta \in (-\infty, \infty)\}$ –

парабола, яка містить спектр оператора  $A$ . Позначимо  $\Omega_{\Gamma_S} = \{z = \xi + i\eta : \xi > a_0\eta^2 + b_0\}$  область всередині параболи.

**Означення 1.9** *Оператор  $A : X \rightarrow X$  є сильно  $P$ -позитивним, якщо його спектр  $sp(A)$  лежить в області  $\Omega_{\Gamma_S}$  і виконується оцінка*

$$\|(zI - A)^{-1}\|_{X \rightarrow X} \leq \frac{M}{1 + \sqrt{|z|}} \text{ for all } z \in \mathbb{C} \setminus \Omega_{\Gamma_S}, \quad (1.27)$$

з деякою позитивною сталою  $M$ .

Еліптичні оператори, задані за допомогою варіаційної рівності чи диференціального виразу є класичними представниками сильно  $P$ -позитивних операторів [71, 72].

**Означення 1.10** *Нехай  $A$  – щільно визначений оператор. Тоді він називається секторіальним, якщо його спектр  $\Sigma(A)$  розміщений в секторі*

$$\Sigma = \{z = \rho + re^{i\theta} : r \in [0, \infty), \rho \geq 0, |\theta| < \varphi < \frac{\pi}{2}\}, \quad (1.28)$$

а на його границі  $\Gamma_\Sigma$  та за межами сектору виконується оцінка для резольвенти

$$\|(zI - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{1 + |z|}, \quad (1.29)$$

з деякою додатною константою  $M$  [15, 18, 73, 74]. Кут  $\varphi$  називається спектральним кутом оператора  $A$ .

Для зображення операторних функцій в банаховому просторі використовують інтеграл Данфорда-Коші [75]. Про зображення операторної експоненти за допомогою інтеграла відмічалось в підрозділі 1.4 (див. формулу (1.21)), що є розв'язуючим оператором для (1.17). Отже, таке зображення має вигляд

$$e^{-At} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-tz} (zI - A)^{-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(t, \xi) d\xi, \quad (1.30)$$

де  $\mathcal{F}(t, \xi) = e^{-tz(\xi)} (z(\xi)I - A)^{-1} z'(\xi)$ , а  $z = z(\xi) \in \Gamma$ ,  $\xi \in (-\infty, \infty)$  – крива інтегрування, що охоплює спектр оператора  $A$ .

Покажемо, що операторна експонента з оператором, що є сильно  $P$ -позитивним може бути зображена за допомогою інтеграла Данфорда–Коші (1.30). Виберемо криву інтегрування у вигляді  $\Gamma_I = \{z = \xi - i\eta : \xi = a_I\eta^2 + b_I, a_I < a_0, b_I < b_0 = \gamma_0, \eta \in (-\infty, \infty)\}$ , що містить спектральну параболу  $\Gamma_S$ . Припустимо також, що  $A$  є сильно  $P$ -позитивним оператором і  $u_0 \in D(A^\epsilon)$  для довільного  $\epsilon > 1/2$ . Позначимо

$$u(t) = e^{-At}u_0.$$

Після параметризації кривої  $\Gamma_I$  і використання інтегралу Данфорда–Коші та властивостей сильно  $P$ -позитивного оператора  $A$ , отримаємо

$$\begin{aligned} \|u(t)\| &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_I} e^{-zt} (z - A)^{-1} u_0 dz \right\| = \\ &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 e^{-(a_I\eta^2 + b_I + i\eta)t} (a_I\eta^2 + b_I + i\eta - A)^{-1} (2a_I\eta + i) d\eta u_0 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} e^{-(a_I\eta^2 + b_I - i\eta)t} (a_I\eta^2 + b_I - i\eta - A)^{-1} (2a_I\eta - i) d\eta u_0 \right\| \leq \\ &\leq c \int_0^{\infty} \frac{e^{-(a_I\eta^2 + b_I)t} \sqrt{4a_I^2\eta^2 + 1}}{[1 + ((a_I\eta^2 + b_I)^2 + \eta^2)^{1/4}]((a_I\eta^2 + b_I)^2 + \eta^2)^{\epsilon/2}} d\eta \|A^\epsilon u_0\|. \end{aligned}$$

Видно, що останній інтеграл є збіжним для всіх  $t > 0$ , якщо  $\epsilon = 0$  і для  $t = 0$  коли  $\epsilon > 1/2$ .

Таким чином, справедлива теорема:

**Теорема 1.14** *Нехай  $\Gamma_I$  — параболу інтегрування, що містить спектральну параболу  $\Gamma_S$  сильно  $P$ -позитивного оператора  $A : E \rightarrow E$ . Тоді операторна експонента з початковим вектором  $u_0 \in D(A^\epsilon)$ ,  $\epsilon > 1/2$  може бути зображений за допомогою інтеграла (1.30).*

В параметризованому вигляді інтеграл (1.30) можна також записати як

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\eta, t) d\eta, \quad (1.31)$$

де

$$\tilde{F}(\eta, t) = e^{-(a_I\eta^2 + b_I - i\eta)t} \hat{u}(a_I\eta^2 + b_I - i\eta)(2a_I\eta - i),$$

$\hat{u}(z)$  є розв'язком стаціонарного рівняння  $(zI - A)\hat{u}(z) = u_0$ ,  $z = a_I\eta^2 + b_I - i\eta$ .

## 1.8 Методи побудови експоненціально збіжних методів для задач з необмеженими операторними коефіцієнтами

Розглянемо типові підходи до побудови експоненціально збіжних наближених методів для розв'язування задач (1.17)–(1.19). Одним з можливих є використання розв'язуючих операторів. Так для задачі Коші (1.17) ним є операторна експонента. Тоді розв'язок може бути записаний у вигляді

$$u(t) = e^{-At}u_0 + \int_0^t e^{-A(t-\tau)} f(\tau) d\tau. \quad (1.32)$$

Задачі (1.18) і (1.19) мають аналогічне зображення за допомогою операторного косинуса  $\cos(t\sqrt{A})$  чи операторного гіперболічного синусу (нормалізованого)  $\sinh^{-1} \sqrt{A} \sinh(x\sqrt{A})$  відповідно.

Більшість експоненціально збіжних методів, що базуються на цьому підході, потребують прийняттого зображення операторних функцій і подальшої їх апроксимації. Як зазначалося в попередньому підрозділі, таким зображенням є інтеграл Данфорда-Коші.

Взявши інтегральне зображення (1.30), далі його дискретизують за допомогою (можливо експоненціально збіжної) квадратурної формули, що включає в себе невелику кількість резольвент. Такий підхід вперше був використаний при розробці та обґрунтуванні наближеного методу для лінійних однорідних рівнянь в роботах [76, 77] а пізніше ця ідея використовувалась в [4, 5, 71, 78–80]. Ці методи ґрунтуються на зображенні операторної експоненти  $T(t) = e^{-At}$  за допомогою інтегралу Данфорда-Коші по кривій, що охоплює спектр оператора  $A$ . Тут за криву інтегрування  $\Gamma$  вибиралась гіпербола

(секторіальний оператор) або парабола (сильно  $P$ -позитивний оператор), що охоплювала спектр  $A$ .

Методи з [5, 72, 76, 78] використовують для дискретизації інтегралу (1.30) Sinc-квадратури [11, 81], що забезпечують експоненціальну швидкість збіжності як в теоремі 1.6. Рівномірно збіжний експоненціальний метод для  $t \geq 0$  був розроблений та обґрунтований в [78, 82] в припущенні, що початкові дані  $u_0$  належать до області визначення оператора  $D(A^\sigma)$  для деякого  $\sigma > 1$ . Відмітимо, що всі методи, які не є рівномірно експоненціально збіжними не можуть бути використаними для наближеного знаходження розв'язку неоднорідних рівнянь, оскільки втрачається порядок збіжності при  $t = 0$ . В роботах [83–85] було розроблено експоненціально збіжні методи для знаходження оберненого перетворення Лапласа з кращим порядком збіжності (до логарифмічного множника) і використано його для наближення операторної експоненти. Однак ці методи не є рівномірно збіжними для всіх  $t \geq 0$  і не мають паралельної реалізації для різних часових точок  $t$ . В роботі [78] вибрано гіперболу за контур інтегрування і використано модифікацію резольвенти, що дозволяє отримати рівномірний по  $t \geq 0$  та чисельно стійкий експоненціально збіжний метод, який не потребує попереднього обчислення  $A^\sigma u_0$ . Хоча цей метод має менший порядок збіжності в порівнянні з методами з [83–85], але має можливість паралельно обчислювати значення операторної експоненти в різні моменти часу і також паралельно обчислювати доданки інтегральної суми, що містять значення резольвенти на початкових даних. Для випадку, коли оператор  $A = A(t)$  залежить від параметру  $t$ , тобто рівняння (1.17) є еволюційним, в роботі [86] побудовано метод без насичення точності, що для аналітичних вхідних даних також забезпечує експоненціальну збіжність та дозволяє розпаралелювати алгоритм. Паралельний метод для наближеного чисельного розв'язування інтегро-диференціального рівняння з пам'яттю побудовано в роботі [87]. Робота [88] присвячена експоненціально збіжному методу для параболічних рівнянь в частинних похідних, що використовує

модифікації методу Рунге-Кутта.

Проблема побудови експоненціально збіжних методів для операторних синусів та косинусів все ще залишається відкритою. Для таких операторних функцій побудовано тільки методи без насичення точності (швидкість залежить від гладкості початкових даних відносно оператора). Такий метод для операторного косинуса полягає у використанні точного зображення, що запропоноване в [69, 89] (див.також [71]):

$$C(t) \equiv \cos \sqrt{At} = e^{-\delta t} \sum_{n=0}^{\infty} \left( L_n^{(0)}(t) - L_{n-1}^{(0)}(t) \right) \mathcal{U}_n,$$

з якого випливає зображення розв'язку задачі (1.18)

$$\begin{aligned} x(t) &\equiv x(t; A) = (\cos \sqrt{At})x_0 \\ &= e^{-\delta t} \sum_{n=0}^{\infty} \left( L_n^{(0)}(t) - L_{n-1}^{(0)}(t) \right) u_n, \end{aligned} \quad (1.33)$$

де  $\delta$  – довільне дійсне число з інтервалу  $(-1/2, \infty)$ , а  $L_n^{(0)}(t)$  – поліноми Лагерра. Послідовність векторів  $\{u_n\}$  та операторів  $\{\mathcal{U}_n\} \equiv \{\mathcal{U}_n(A)\}$  визначаються з рекурентних співвідношень

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2(A + \delta(\delta - 1)I)(A + (\delta - 1)^2I)^{-1}u_n \\ &\quad - (A + \delta^2I)(A + (\delta - 1)^2I)^{-1}u_{n-1} \quad , \quad n \geq 1, \\ u_0 &= x_0 \quad , \quad u_1 = (A + \delta(\delta - 1)I)(A + (\delta - 1)^2I)^{-1}x_0, \end{aligned} \quad (1.34)$$

та

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{n+1} &= 2(A + \delta(\delta - 1)I)(A + (\delta - 1)^2I)^{-1}\mathcal{U}_n \\ &\quad - (A + \delta^2I)(A + (\delta - 1)^2I)^{-1}\mathcal{U}_{n-1} \quad , \quad n \geq 1, \\ \mathcal{U}_0 &= I \quad , \quad \mathcal{U}_1 = (A + \delta(\delta - 1)I)(A + (\delta - 1)^2I)^{-1}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Відмітимо, що тут ніде непотрібно обчислювати  $\sqrt{A}$ . Оператор  $A$  в цих побудовах повинен бути сильно  $P$ -позитивним.

Для наближення точного розв'язку використовується відрізок ряду з перших  $N$  доданків. Ця апроксимація має властивість ненасичення точності, тобто її порядок  $\mathcal{O}(N^{-\sigma})$ ,  $\sigma > 0$  при  $N \rightarrow \infty$ , характеризується гладкістю  $\sigma$



початкових даних. Якщо вони аналітичні щодо оператора  $A$ , то швидкість збіжності експоненціальна.

## 1.9 Експоненціально збіжний метод для операторної експоненти з сильно $P$ -позитивним оператором

В цьому підрозділі покажемо як будується експоненціально збіжний метод на прикладі однорідної задачі (1.17) у випадку, коли операторний коефіцієнт є сильно  $P$ -позитивним оператором. Для цього розглянемо зображення операторної експоненти (1.31) і побудуємо експоненціально збіжне наближення.

**1.9.1 Вибір параболи інтегрування** Як зазначалося в підрозділі 1.3 для Sinc-квадратурної формули важливим є можливість аналітичного продовження підінтегральної функції в смугу навколо дійсної осі. Тому потрібно вибрати параболу інтегрування  $\Gamma_I$  з врахуванням цієї вимоги. Один з варіантів вибору цієї параболи наведено в роботі [76]. Але запропонований там метод не є оптимальним. Тому тут приведемо простіший. Нехай  $\Gamma_S$ -спектральна параболола. Замінюючи  $\eta$  на  $\eta + i\nu$  в  $\Gamma_I$ , отримаємо параметричну сім'ю парабол

$$\begin{aligned} \Gamma(\nu) &= \{z = \xi - i\eta : \xi = a_I \eta^2 + b_I - a_I \nu^2 + \nu - i\eta(1 - 2a_I \nu), \eta \in (-\infty, \infty)\} \\ &= \{z = \xi - i\tilde{\eta} : \xi = \frac{a_I}{(1 - 2a_I \nu)^2} \tilde{\eta}^2 + b_I - a_I \nu^2 + \nu - i\tilde{\eta}, \tilde{\eta} \in (-\infty, \infty)\}. \end{aligned}$$

Будемо шукати параметри так, щоб при  $|\nu| < d/2$  ця множина парабол знаходилась поза спектральною множиною  $\Omega_{\Gamma_S}$  (тільки в цьому випадку резольвента оператора  $A$  залишатиметься обмеженою в (1.31), а підінтегральний вираз має аналітичне продовження в смугу навколо дійсної осі). Відмітимо, що  $\tilde{\eta} = (1 - 2a_I \nu)$  мусить бути несингулярною для всіх  $|\nu| < d/2$ , звідки впливає  $a_I < 1/d$ . Виберемо  $d$  так, щоб вершина параболи інтегрування збігалась з вершиною спектральної параболи, а розхил був більший при

$\nu = d/2$ . Для  $\nu = -d/2$  покладемо умову, щоб інтегральна парабола лежала поза спектральною, а вершина знаходилась в початку координат. Такі умови приводять до системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{a_I}{(1 - a_I d)^2} = a_0, \\ b_I - a_I \frac{d^2}{4} + \frac{d}{2} = b_0, \\ b_I - a_I \frac{d^2}{4} - \frac{d}{2} = 0. \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є

$$d = b_0, \\ a_I = \frac{1 + 2a_0 b_0 - \sqrt{1 + 4a_0 b_0}}{2a_0 b_0} = \frac{2a_0}{1 + 2a_0 b_0 + \sqrt{1 + 4a_0 b_0}}, \quad b_I = \frac{a_I b_0^2}{4} + \frac{b_0}{2}$$

**1.9.2 Чисельний метод та похибка наближення** Для наближення інтегралу (1.31) застосуємо Sinc-квадратурну формулу  $T_N$  з підрозділу 1.3 для векторно-значної функції  $F(\eta, t) = (2a_I \eta - i)\varphi(\eta)\hat{u}(\psi(\eta))$ , де

$$\varphi(\eta) = e^{-t\psi(\eta)}, \quad \psi(\eta) = a_I \eta^2 + b_I - i\eta.$$

Тоді для розв'язку однорідної задачі Коші (1.17), який зображається за допомогою операторної експоненти будемо мати

$$u(t) = \exp(-tA)u_0 \approx u_N(t) = \exp_N(-tA)u_0 = \frac{h}{2\pi i} \sum_{k=-N}^N F(kh, t).$$

Ця квадратурна формула визначає наступний алгоритм:

**Алгоритм.**

1. Для заданих  $a_0$ ,  $b_0 = \gamma_0$ , визначаємо

$$\begin{aligned} a_I &= \frac{2a_0}{2b_0 a_0 + 1 + \sqrt{1 + 4b_0 a_0}}, \\ b_I &= \frac{a_I b_0^2}{4} + \frac{b_0}{2}, \\ d &\leq b_0, \quad h = \sqrt[3]{\frac{2\pi d}{a_I}} N^{-2/3}, \end{aligned} \tag{1.36}$$

і  $z_p = a_I(ph)^2 + b_I - iph$ ,  $\alpha_p = 2ph - i$ , ( $p = -N, \dots, N$ ).

2. Розв'язати рівняння  $(z_p I - A)\hat{u}(z) = u_0$ ,  $p = -N, \dots, N$  (може бути реалізовано паралельно).

3. Знайти наближення  $u_N$  у вигляді

$$u_N(t) = \frac{h}{2\pi i} \sum_{p=-N}^N \alpha_p e^{-z_p t} \hat{u}(z_p). \quad (1.37)$$

**Зауваження 1.3** Наведений алгоритм задає два рівні можливого розпаралелювання обчислень операторної експоненти: перший дозволяє обчислювати  $\hat{u}(z_p)$  на кроці 2 паралельно для всіх  $p$ , а другий— обчислювати операторну експоненту в різні моменти часу  $(t_1, t_2, \dots, t_M)$  незалежно одна від одної.

**Зауваження 1.4** Обчислення резольвент та експонент в різні моменти часу можна проводити, використовуючи швидкий метод, на основі тензорних добутків та  $H$ -розкладів. Це дає можливість позбутися "прокляття розмірності", і застосувати наближення операторів за допомогою матриць великої розмірності [4–8].

Аналогічно до теореми 1.6 справедлива теорема для випадку векторно-значних функцій [71]. Якщо підінтегральна функція задовольняє ще додаткові умови, то квадратурна формула має експоненціальний порядок збіжності.

**Теорема 1.15** ([5, 76]) *Нехай виконуються припущення теореми 1.14 а також  $t > 0$ . Виберемо  $a_I, b_I, h$  за формулами (1.36). Тоді виконується оцінка*

$$\begin{aligned} & \|u(t) - u_N(t)\| \equiv \|(\exp(-tA) - \exp_N(-tA))u_0\| \leq \\ & \leq Mc\sqrt{\pi} \left[ \frac{2\sqrt{k} \exp[-dN^{2/3}]}{\sqrt{at}(1 - \exp(-dN^{2/3}))} + \frac{k \exp[-tdN^{2/3}]}{\sqrt{\pi t} N^{1/3} \sqrt[3]{2\pi dka^2}} \right] \|u_0\|, \end{aligned} \quad (1.38)$$

де

$$d = b_0,$$

$$c = M_1 e^{t[ad^2/k+d-b]},$$

$$M_1 = \max_{z \in \bar{D}_d} \frac{|2a_I z - i|}{1 + \sqrt{|a_I z^2 + b_I - iz|}},$$

а  $M$  – стала з оцінки сильної  $P$ – позитивності.

**Зауваження 1.5** Теорема 1.15 підтверджує експоненціальну швидкість збіжності *Sinc*– методу при  $t > 0$ , але оцінка (1.38) потребує уточнення для  $t \rightarrow 0$  і вона досліджена в підрозділі 2.2.

## 1.10 Оцінка резольвенти оператора через його дробові степені

Практично важливим прикладом сильно позитивного оператора в просторі  $X = L_p(\Omega)$ ,  $0 < p < \infty$  є сильно еліптичний диференціальний оператор [5, 15, 67, 69, 70, 86, 90], де параметри  $a_0$ ,  $\varphi$  сектора  $\Sigma$  визначаються через його коефіцієнти.

Якщо початковий вектор  $u_0 \in D(A^{m+1})$ , то виконується рівність

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{A^{k-1} u_0}{z^k} + \frac{1}{z^{m+1}} (zI - A)^{-1} A^{m+1} u_0 = (zI - A)^{-1} u_0 \quad (1.39)$$

Ця рівність, разом з визначенням степеня оператора за допомогою інтеграла Данфорда-Коші:

$$A^{-(m+1)} v = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_I} z^{-(m+1)} (zI - A)^{-1} v dz, \quad (1.40)$$

і позначенням  $v = A^{m+1} u_0$  приводить до наступного зображення:

$$\begin{aligned} u_0 &= A^{-(m+1)} A^{m+1} u_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_I} z^{-(m+1)} (zI - A)^{-1} A^{m+1} u_0 dz \\ &= \int_{\Gamma_I} \left[ (zI - A)^{-1} - \sum_{k=1}^{m+1} \frac{A^{k-1}}{z^k} \right] u_0 dz. \end{aligned} \quad (1.41)$$

де шлях інтегрування  $\Gamma_I$  знаходиться в правій півплощині та огортає  $\Gamma_\Sigma$ .

Справедлива наступна теорема (ст. 20, [3]):

**Теорема 1.16** *Нехай  $u_0 \in D(A^{m+\alpha})$  для деякого  $m \in \mathbb{N}$  і  $\alpha \in [0, 1]$ . Тоді виконується оцінка*

$$\begin{aligned} & \left\| \left[ (zI - A)^{-1} - \sum_{k=1}^{m+1} \frac{A^{k-1}}{z^k} \right] u_0 \right\| = \left\| \frac{1}{z^{m+1}} (zI - A)^{-1} A^{m+1} u_0 \right\| = \\ & = \frac{1}{|z|^{m+1}} \|A^{1-\alpha} (zI - A)^{-1} A^{m+\alpha} u_0\| \leq \frac{1}{|z|^{m+1}} \frac{(1+M)K}{(1+|z|)^\alpha} \|A^{m+\alpha} u_0\|, \quad (1.42) \\ & \forall \alpha \in [0, 1], \quad u_0 \in D(A^{m+\alpha}), \end{aligned}$$

де константа  $K$  залежить тільки від  $\alpha$  та  $M$ .

## 1.11 Висновки

- Методи без насичення точності є оптимальними або майже оптимальними за порядком збіжності на класах гладких функцій. Для випадку аналітичних функцій оптимальними по швидкості є експоненціально збіжні. Тому побудова нових методів розв'язування задач повинна бути спрямоване саме на такі методи.
- Використання постановок задач в абстрактних просторах дає можливість розглядати широкі класи задач, що, як окремий випадок, містять класичні. Це дає змогу будувати методи розв'язування одразу для великого класу задач.
- Швидкість збіжності методу перетворення Келлі залежить від гладкості початкового вектора і отримані оцінки є непокрещуваними. Тому виникає задача побудови методів для початкових векторів довільної гладкості.
- Використання зображення розв'язку задач для диференціальних рівнянь з необмеженими операторними коефіцієнтами у банахових просторах за допомогою інтегралу Данфорда-Коші з подальшим застосуванням експоненціально збіжних квадратурних формул дає змогу будова-

ти експоненціально збіжні наближені методи знаходження наближених розв'язків.

## РОЗДІЛ 2

### Задача Коші для рівняння першого порядку з необмеженим операторним коефіцієнтом

#### 2.1 Непокращувані за порядком оцінки швидкості збіжності методу перетворення Келлі для операторної експоненти

В цьому підрозділі розглядається однорідна задача ( $f(t) \equiv 0$ ) Коші (1.17), в якій операторний коефіцієнт  $A$  – самоспряжений додатно визначений оператор, що діє в гільбертовому просторі  $H$ . Як зазначалося у підрозділі 1.6, розв'язок цієї задачі можна записати за допомогою операторної експоненти теорема 1.9, яка може бути розкладена в ряд за поліномами Лагерра (1.23), (1.24) з подальшим використанням наближення (1.25), для якого похибка наведена в теоремі 1.12. Основні завдання цього підрозділу полягають в тому, щоб знайти оцінки похибки наближення в усередненій нормі:

$$z_N = \left( \int_0^\infty \|u^N(t) - u(t)\|^2 dt \right)^{1/2},$$

для випадку різних класів гладкості початкового вектора  $u_0$  та дослідженні непокращуваності отриманих оцінок.

**2.1.1 Непокращувані оцінки для скінченної гладкості початкового вектора.** Позначимо через  $E_\lambda$  спектральний розклад одиниці, породжений оператором  $A$  (див. [91]), і скористаємось властивістю ортогональності поліномів Лагерра [92]. Отримаємо

$$\begin{aligned} z_N^2 &= \int_0^\infty \|u^N(t) - u(t)\|^2 dt = \\ &= \sum_{k,j=N+1}^\infty (-1)^{k+j} \int_0^\infty e^{-2\gamma t} L_k^{(0)}(2\gamma t) L_j^{(0)}(2\gamma t) dt (y_{\gamma,k} + y_{\gamma,k+1}, y_{\gamma,j} + y_{\gamma,j+1}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\gamma} \sum_{k=N+1}^{\infty} \|y_{\gamma,k} + y_{\gamma,k+1}\|^2 = \\
&= 2\gamma \sum_{k=N+1}^{\infty} \int_{\lambda_0}^{\infty} \left(\frac{\lambda - \gamma}{\lambda + \gamma}\right)^{2k} \frac{1}{(\lambda + \gamma)^2} \frac{1}{\lambda^{2\sigma}} d\|E_{\lambda} A^{\sigma} u_0\|^2, \tag{2.1}
\end{aligned}$$

де  $y_{\gamma,k} = T_{\gamma}^k u_0$ ,  $k = 0, 1, \dots$ ,  $\lambda_0$  – додатна стала, що обмежує знизу спектр оператора  $A$ .

Легко переконатись, що функція

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{\lambda^{2\rho}} \left(\frac{\gamma - \lambda}{\gamma + \lambda}\right)^{2k}$$

для великих значень  $k$  досягає свого максимуму в точці  $\lambda^* = \frac{\gamma}{\rho}(k + \sqrt{k^2 + \rho^2}) \cong \frac{2\gamma}{\rho}k$ , тобто

$$\varphi(\lambda) \leq \varphi(\lambda^*) \leq \frac{c(\rho)}{k^{2\rho}}.$$

Тоді з (2.1) отримаємо

$$\begin{aligned}
z_N^2 &\leq 2\gamma c(\sigma) \|A^{\sigma} u_0\|^2 \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2(1+\sigma)}} \leq \\
&\leq 2\gamma c(\sigma) \|A^{\sigma} u_0\|^2 \int_N^{\infty} \frac{ds}{s^{2(1+\sigma)}} = \frac{2\gamma c(\sigma)}{2\sigma + 1} \|A^{\sigma} u_0\|^2 N^{-2\sigma-1}.
\end{aligned}$$

Отже, справедлива

**Теорема 2.1** *Нехай виконані умови теореми 1.12. Тоді точність методу перетворення Келлі (1.25) характеризується оцінкою*

$$z_N \leq c \|A^{\sigma} u_0\| N^{-\sigma-1/2}, \tag{2.2}$$

де стала  $c$  не залежить від  $N$  та від  $u_0$ .

Покажемо, що оцінка (2.2) непокрашувана за порядком. Для цього достатньо вказати оператор  $A$  і вектор  $u_0$ , що задовольняє умови теореми 2.1, для



яких точність метода перетворення Келлі (1.23) оцінюється знизу за порядком  $N$  так само, як і в оцінці (2.2). Нехай, замість вказаних вище припущень, оператор  $A$  має дискретний спектр:

$$0 < \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$$

Тоді власні вектори  $e_i$ , що відповідають власним значенням  $\lambda_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , утворюють ортонормований базис в  $H$ :

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots,$$

де  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера. З (2.1) отримаємо

$$z_N^2 = 2\gamma \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=N+1}^{\infty} \left( \frac{\gamma - \lambda_i}{\gamma + \lambda_i} \right)^{2k} \frac{1}{(\gamma + \lambda_i)^2} \frac{1}{\lambda_i^{2\sigma}} (A^\sigma u_0, e_i)^2.$$

Нехай тепер

$$\lambda_i = i, \quad i = 1, 2, \dots, \quad 0 < \gamma \leq \lambda_0 \leq 1,$$

і

$$\frac{2\gamma}{1 + \sigma} \leq 1. \tag{2.3}$$

Тоді

$$\begin{aligned} z_N^2 &\geq 2\gamma \sum_{i=N}^{2N} \sum_{k=N+1}^{\infty} \left( \frac{\gamma - i}{\gamma + i} \right)^{2k} \frac{1}{(\gamma + i)^2} \frac{1}{i^{2\sigma}} (u_0^\sigma, e_i)^2 \geq \\ &\geq 2\gamma \sum_{i=N}^{2N} (u_0^\sigma, e_i)^2 \sum_{k=N+1}^{\infty} \left( \frac{2N - \gamma}{2N + \gamma} \right)^{2k} \frac{1}{(2N + \gamma)^{2(1+\sigma)}} = \\ &= \frac{2\gamma}{(2N + \gamma)^{2(1+\sigma)}} \left( 1 - \frac{2\gamma}{2N + \gamma} \right)^{2(N+1)} \left[ 1 - \left( \frac{2N - \gamma}{2N + \gamma} \right)^2 \right]^{-1} \sum_{i=N}^{2N} (u_0^\sigma, e_i)^2 = \\ &= \frac{1}{4N(2N + \gamma)^{2\sigma}} \left[ \left( 1 - \frac{2\gamma}{2N + \gamma} \right)^{\frac{2N+\gamma}{2\gamma}} \right]^{\frac{2\gamma 2(N+1)}{2N+\gamma}} \sum_{i=N}^{2N} (u_0^\sigma, e_i)^2 \geq \\ &\geq \frac{1}{4N(2N + \gamma)^{2\sigma}} \left( \frac{1}{4} \right)^4 \sum_{i=N}^{2N} (u_0^\sigma, e_i)^2. \end{aligned}$$

Оскільки  $\|u_0^\sigma\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} (u_0^\sigma, e_i)^2 < \infty$ , то знайдеться такий елемент  $u_0 \in D(A^\sigma)$ , що  $(u_0^\sigma, e_i) = \frac{1}{i \ln^2 i}$   $i = 0, 1, \dots$ . Тоді з вищенаведеної оцінки слідує

$$\begin{aligned} z_N^2 &\geq 4^{-5-\sigma} \frac{1}{\left(N + \frac{\gamma}{2}\right)^{2\sigma+1}} \sum_{i=N}^{2N} \frac{1}{i \ln^2 i} \geq \\ &\geq \frac{4^{-5-\sigma}}{\left(N + \frac{\gamma}{2}\right)^{2\sigma+1}} \frac{N+1}{2N \ln^2 2N} \geq \frac{4^{-11/2-\sigma}}{\left(N + \frac{\gamma}{2}\right)^{2\sigma+1}} \frac{1}{\ln^2 2N}, \end{aligned}$$

що і встановлює майже непокращуваність (з точністю до логарифма) оцінки (2.2). Таким чином, доведена теорема

**Теорема 2.2** *Нехай оператор  $A = A^* \geq \gamma I$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\overline{D(A)} = H$ , має дискретний спектр  $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots$ ,  $\lambda_0 = \gamma \leq 1$  і виконується умова (2.3). Тоді оцінка швидкості збіжності метода перетворення Келлі (1.23) майже непокращувана за порядком (з точністю до логарифма).*

**2.1.2** **Непокращувани за порядком оцінки швидкості збіжності метода перетворення Келлі при  $u_0$  з простору Рум'є.** Розглянемо тепер випадок, коли вектор  $u_0$  належить простору Рум'є (див. означення 1.8 або [17, 62–64]). Норма в просторі Рум'є  $\mathcal{R}(A, \mu, L)$  визначається як

$$\|x\|_{\mathcal{R}(A, \mu, L)} = \sup_{0 \leq n < \infty} L^{-n} M_n^{-1} \|A^n x\| < \infty,$$

де  $\mu$  послідовність  $\mu = (M_n)_{n=0}^{\infty}$ ,  $0 < L < \infty$ .

Нехай  $u_0 \in \mathcal{R}(A, (1), \lambda_0)$ , тоді з (2.1) отримаємо

$$z_N^2 = 2\gamma \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_i}\right)^{2k} \left(\frac{\lambda_i - \gamma}{\lambda_i + \gamma}\right)^{2k} \frac{1}{(\lambda_i + \gamma)^2} \left(\frac{A^k u_0}{\lambda_0^k}, e_i\right)^2. \quad (2.4)$$

Неважко бачити, що при  $\gamma(1 + \sqrt{2}) = \lambda_0 \leq \lambda$  функція

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{\lambda + \gamma} \left[ \frac{\lambda - \gamma}{\lambda(\lambda + \gamma)} \right]^k$$

МОНОТОННО СПАДАЄ, А ТОМУ

$$\begin{aligned}
z_N^2 &\leq 2\gamma \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=N+1}^{\infty} \left( \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \right)^{2k} \frac{1}{\gamma^2(2 + \sqrt{2})^2} \left( \frac{A^k u_0}{\lambda_0^k}, e_i \right)^2 \leq \\
&\leq \frac{1}{\gamma(1 + \sqrt{2})^2} \|u_0\|_{\mathcal{R}(A, (1), \lambda_0)}^2 (1 + \sqrt{2})^{-2(N+1)} \frac{1}{1 - \left( \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \right)^2} = \\
&= \frac{\|u_0\|_{\mathcal{R}(A, (1), \lambda_0)}^2}{\gamma\sqrt{2}(2 + \sqrt{2})} \exp \{ -2(N + 1) \ln(1 + \sqrt{2}) \},
\end{aligned}$$

ТОБТО

$$z_N \leq \frac{\|u_0\|_{\mathcal{R}(A, (1), \lambda_0)}}{[\gamma\sqrt{2}(2 + \sqrt{2})]^{1/2}} \exp \{ - (N + 1) \ln(1 + \sqrt{2}) \}. \quad (2.5)$$

ДАЛІ, З (2.4) СЛІДУЄ

$$z_N^2 \geq \frac{2\gamma(1 + \sqrt{2})^{-2(N+1)}}{\gamma^2(2 + \sqrt{2})^2} \left( \frac{A^{N+1} u_0}{\lambda_0^{N+1}}, e_0 \right)^2 = \frac{1}{\gamma} (1 + \sqrt{2})^{-2(N+2)} (u_0, e_0)^2,$$

ТОБТО

$$z_N \geq \frac{|(u_0, e_0)|}{\sqrt{\gamma}} \exp \{ - (N + 2) \ln(1 + \sqrt{2}) \}.$$

ТАКИМ ЧИНОМ, ДОВЕДЕНА ТЕОРЕМА

**Теорема 2.3** *Нехай оператор  $A = A^* \geq \gamma I$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\overline{D(A)} = H$ , має дискретний спектр*

$$\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots, \quad \lambda_0 = \gamma(1 + \sqrt{2}).$$

*Тоді метод перетворення Келлі (1.23) при  $u_0 \in \mathcal{R}(A, (1), \lambda_0)$  має експоненціальну швидкість збіжності і його точність оцінюється нерівністю (2.5), при цьому оцінка (2.5) є непокрашуваною за порядком.*

**Зауваження 2.1** *Оцінка (2.5) може бути отримана і без припущення про дискретність спектра оператора  $A$ . Для цього так само, як і в підрозділі 2.1.1, потрібно скористатися спектральним розкладом одиниці.*

## 2.2 Оцінка збіжності Sinc-квадратурної формули для обчислення операторної експоненти

В цьому підрозділі дослідимо оцінку швидкості збіжності Sinc-квадратурної формули (1.37) для наближеного обчислення операторної експоненти  $e^{-At}$ , за допомогою якої знаходиться розв'язок диференціального рівняння першого порядку з операторним коефіцієнтом (1.17) для випадку  $t = 0$ . Оскільки в теоремі 1.15, як зазначалось в зауваженні 1.5, досліджено тільки випадок  $t > 0$ , а розв'язок неоднорідної задачі (1.17) задається формулою (1.32), де другий доданок містить інтеграл на відрізку  $[0, t]$  то важливо дослідити похибку квадратурної формули при  $t \rightarrow 0$ .

**2.2.1 Оцінка швидкості збіжності, включно з  $t = 0$**  В цьому підрозділі одержано оцінку швидкості збіжності Sinc-квадратурної формули (1.37) для всіх  $t$ , включно з  $t = 0$  в припущенні, що оператор  $A$  є самоспряженим, додатно визначеним.

Розглянемо векторно-значну функцію  $f(x)$  та інтеграл від неї на  $\mathbb{R}$ . Доведемо лему, яка є уточненням леми 2.7 з [71, с. 322].

**Лема 2.1** *Нехай операторно-значна функція  $f \in \mathbf{H}^p(D_d)$  з нормою, визначеною в (1.16). Якщо  $f$  додатково задовольняє на  $\mathbb{R}$  умову*

$$\|f(x)\| \leq \frac{ce^{-\alpha x^2}}{(1+x^2)^\sigma} \quad 1/2 \leq \sigma \leq 1 \quad c, \alpha > 0, \quad (2.6)$$

тоді для інтеграла

$$I(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

виконується

$$\|\eta_N(f, h)\| \leq \frac{2c}{2\sigma - 1} \left\{ 2\sigma \frac{\exp(-\pi d/h)}{\sinh(\pi d/h)} + \frac{\exp(-\alpha(Nh)^2)}{(Nh)^{2\sigma-1}} \right\},$$

де  $\eta_N(f, h)$  – похибка квадратурної формули.

Доведення. Припущення (2.6) приводить до

$$\begin{aligned} \|\eta_N(f, h)\| &\leq \|\eta(f, h)\| + h \sum_{|k|>N} \|f(kh)\| \leq \\ &\leq \frac{\exp(-\pi d/h)}{2 \sinh(\pi d/h)} \|f\|_{H^1(D_d)} + ch \sum_{|k|>N} \frac{e^{-\alpha(kh)^2}}{[1 + (kh)^2]^\sigma}. \end{aligned}$$

Для останнього доданка використаємо оцінку

$$\begin{aligned} h \sum_{|k|>N} \frac{e^{-\alpha(kh)^2}}{[1 + (kh)^2]^\sigma} &= 2h \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha(kh)^2}}{[1 + (kh)^2]^\sigma} \leq \\ &\leq 2 \int_{Nh}^{\infty} \frac{e^{-\alpha\eta^2}}{\eta^{2\sigma}} d\eta = 2 \int_{\sqrt{\alpha}Nh}^{\infty} \frac{e^{-\xi^2}}{(\frac{\xi}{\sqrt{\alpha}})^{2\sigma} \sqrt{\alpha}} \frac{d\xi}{\sqrt{\alpha}} = 2\alpha^{\sigma-1/2} \int_{\sqrt{\alpha}Nh}^{\infty} \frac{e^{-\xi^2}}{\xi^{2\sigma}} d\xi \\ &\leq 2\alpha^{\sigma-1/2} \exp[-\alpha(Nh)^2] \int_{\sqrt{\alpha}Nh}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi^{2\sigma}} = \frac{2}{2\sigma-1} \frac{\exp[-\alpha(Nh)^2]}{(Nh)^{2\sigma-1}}. \end{aligned}$$

З припущення (2.6) випливає оцінка

$$\begin{aligned} \|f\|_{H^1(D_d)} &\leq 2c \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}}{(1+x^2)^\sigma} dx = 4c \left\{ \int_0^1 \frac{e^{-\alpha x^2}}{(1+x^2)^\sigma} dx + \int_1^{\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}}{(1+x^2)^\sigma} dx \right\} \leq \\ &\leq 4c \left\{ 1 + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{2\sigma}} \right\} = \frac{8c\sigma}{2\sigma-1}, \end{aligned}$$

яка разом зі знайденими вище приводить до твердження леми. ■

**Теорема 2.4** *Нехай оператор  $A$  – самоспряжений додатно визначений з дискретним спектром і повною системою власних векторів в гільбертовому просторі. Тоді, при  $u_0 \in D(A^\alpha)$ , похибка наближення (1.37) до операторної експоненти  $e^{-At}u_0$  задовольняє оцінку*

$$\begin{aligned} \|\eta_N(\mathcal{F}, h)\| &\leq \frac{c}{2\alpha-1} \left\{ \frac{\exp(-\pi b_0/h)}{\sinh(\pi b_0/h)} + \frac{\exp[-(\frac{a_I}{2}(Nh)^2 + b_I)t]}{(Nh)^{2\alpha-1}} \right\}, \\ t &\geq 0, \quad \alpha > 1/2, \quad h = \sqrt[3]{\frac{4\pi b_0}{a_I}} N^{-2/3}. \end{aligned}$$

Доведення. Оскільки власні вектори  $e_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  оператора  $A$ , які відповідають власним числам  $\lambda_k$ , утворюють базис, ми можемо зобразити початковий вектор у вигляді  $u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ , а операторну експоненту як

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_I} e^{-zt} \sum_{k=1}^{\infty} a_k (z - \lambda_k)^{-1} e_k dz = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(t, \eta) d\eta,$$

де, враховуючи, що уявна частина підінтегрального виразу є непарною функцією, маємо

$$\mathcal{F}(t, \eta) = \frac{1}{\pi} \Im \exp[-t(a_I \eta^2 + b_I - i\eta)] \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k e_k}{a_I \eta^2 + b_I - i\eta - \lambda_k},$$

де  $a_I$ ,  $b_I$  вибираються в (1.36). Роблячи спрощення, отримаємо

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t, \eta) &= \frac{\exp[-(a_I \eta^2 + b_I)t]}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \Im \left[ \frac{e^{i\eta t} (2a_I \eta - i)}{a_I \eta^2 + b_I - \lambda_k - i\eta} \right] = \\ &= \frac{\exp[-(a_I \eta^2 + b_I)t]}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \Im \frac{e^{i\eta t} (2a_I \eta - i)(a_I \eta^2 + b_I - \lambda_k + i\eta)}{(a_I \eta^2 + b_I - \lambda_k)^2 + \eta^2} = \\ &= \frac{\cos(\eta t)(a_I \eta^2 - b_I + \lambda_k) + \sin(\eta t)\eta[2a_I(a_I \eta^2 + b_I - \lambda_k) + 1]}{(a_I \eta^2 + b_I - \lambda_k)^2 + \eta^2}. \end{aligned}$$

Визначимо функцію

$$\begin{aligned} w(t, \lambda_k, \eta) &= \exp(-ta_I \eta^2) \left[ \frac{a_I \eta^2 - b_I + \lambda_k}{(a_I \eta^2 + b_I - \lambda_k)^2 + \eta^2} \cos(t\eta) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2a_I(a_I \eta^2 + b_I - \lambda_k) + 1}{(a_I \eta^2 + b_I - \lambda_k)^2 + \eta^2} \eta \sin(t\eta) \right], \end{aligned}$$

тоді, використовуючи нерівність

$$\left| \exp\left(-\frac{a_I}{2} t\eta^2\right) \eta \sin(t\eta) \right| \leq \frac{2}{a_I} \exp\left(-\frac{a_I}{2} t\eta^2\right) \frac{a_I}{2} t\eta^2 \leq 2e^{-1},$$

отримаємо

$$|w(t, \lambda_k, \eta)| \leq \frac{4}{e} \exp\left(-\frac{a_I}{2} t\eta^2\right) \left[ \frac{a_I \eta^2 - b_I + \lambda_k + |a_I \eta^2 + b_I - \lambda_k + 1/(2a_I)|}{(a_I \eta^2 + b_I - \lambda_k)^2 + \eta^2} \right].$$

Покладемо  $y = a_I \eta^2 / (\lambda_k - b_I)$  і припустимо, що

$$\lambda = \lambda_k - b_I \in [1, \infty).$$

Тоді попередня оцінка приводить до

$$\begin{aligned} \left( \frac{a_I \eta^2 + 1}{\lambda_k - b} \right)^\alpha |w(t, \lambda_k, \eta)| &\leq \frac{4}{e} (1 + y)^\alpha \frac{y + 1 + |y - 1 + 1/(2a_I \lambda)|}{\lambda(y - 1)^2 + y/a_I} \leq \\ &\leq \frac{4}{e} (1 + y)^\alpha \frac{y + 1 + |y - 1| + 1/(2a_I)}{(y - 1)^2 + y/a_I} \leq c \end{aligned}$$

з невід'ємною сталою  $c$  та  $\alpha \in [0, 1]$ . Таким чином, для  $\mathcal{F}(t, \eta)$  отримаємо

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(t, \eta)\| &\leq c \frac{\exp[-(a_I \eta^2/2 + b_I)t]}{(a_I \eta^2 + 1)^\alpha} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 (\lambda_k - b)^{2\alpha} \right]^{1/2} \leq \\ &\leq c \frac{\exp[-(a_I \eta^2/2 + b_I)t]}{(a_I \eta^2 + 1)^\alpha} \|A^\alpha u_0\|, \quad t \geq 0, \quad \eta \in (-\infty, \infty). \end{aligned}$$

Покажемо, що операторно-значна функція  $\mathcal{F}(t, z)$ ,  $z = \eta + i\nu$ ,  $|\nu| < d/2$ ,  $\eta \in (-\infty, \infty)$  належить до класу  $H^1(D_d)$ . Маємо

$$\mathcal{F}(t, z) = \frac{\exp[-(a(\nu)\eta^2 + b(\nu))t]}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \mathfrak{S} \left[ \frac{e^{i\tilde{\eta}t} (2a(\nu)\eta - i)(1 - 2a_I \nu)}{[a(\nu)\tilde{\eta}^2 + b(\nu) - \lambda_k]^2 + \tilde{\eta}} \right],$$

де

$$\begin{aligned} d &= b_0, \quad \tilde{\eta} = (1 - 2a_I \nu)\eta, \\ a(\nu) &= \frac{a_I}{(1 - 2a_I \nu)^2}, \quad b(\nu) = b_I - a_I \nu^2 + \nu, \\ a_I &= \frac{2a_0}{1 + 2a_0 b_0 + \sqrt{1 + 4a_0 b_0}}, \quad b_I = \frac{a_I b_0^2}{4} + \frac{b_0}{2}. \end{aligned}$$

Видно, що цей вираз з точністю до множника  $1 - 2a_I \nu$  і заміни  $\eta \rightarrow \tilde{\eta}$  має ту ж структуру, що й  $\mathcal{F}(t, \eta)$ . Відмітимо, що заміна  $\tilde{\eta} = (1 - 2a_I \nu)\eta$  не є сингулярною, оскільки  $|2a_I \nu| \leq a_I b_0 < 1$ , тобто  $1 - 2a_I \nu > 0$ . Таким чином, ми отримаємо

$$\|\mathcal{F}(t, \eta + i\nu)\| \leq c \frac{1 - 2a_I \nu}{(\tilde{\eta} + 1)^\alpha} \exp[-(a(\nu)\tilde{\eta}^2/2 + b(\nu))t] \|A^\alpha u_0\| \leq$$

$$\leq c \frac{1 - 2a_I \nu}{(\tilde{\eta} + 1)^\alpha} \exp[-(a(-b_0/2)\tilde{\eta}^2/2 + b(-b_0/2))t] \|A^\alpha u_0\|.$$

Ця нерівність визначає належність  $\mathcal{F}(t, z) \in H^1(D_{b_0})$  і

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(t, z)\|_{H^1(D_{b_0})} &\leq c \|A^\alpha u_0\| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-\frac{a_I t}{(1+a_I b_0)^2}] \tilde{\eta}^2}{(\tilde{\eta}^2 + 1)^\alpha} d\tilde{\eta} \leq \\ &\leq c \|A^\alpha u_0\| \left( \int_0^1 \frac{d\tilde{\eta}}{(\tilde{\eta}^2 + 1)^\alpha} + \int_1^{\infty} \frac{d\tilde{\eta}}{(\tilde{\eta}^2 + 1)^\alpha} \right) = c \frac{4\alpha}{2\alpha - 1}, \quad t \geq 0, \quad \alpha > 1/2. \end{aligned}$$

Тепер твердження теореми випливає з леми 2.1. ■

**Зауваження 2.2** Відмітимо, що з теореми 2.4 випливає, що при  $t = 0$  *Sinc*-квадратурна формула (1.37) має поліноміальний порядок збіжності

$$\|\eta_N(\mathcal{F}, h)\| = O(N^{(2\alpha-1)/3}),$$

$$\alpha > \frac{1}{2}.$$

**2.2.2 Чисельний приклад.** Розглянемо оператор визначений в (1.20). Нехай  $u_0 = x(1-x)$ . Тоді операторна експонента буде визначати розв'язок задачі:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) &= x(1-x), \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0, \\ u(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} -4 \frac{(-1)^k - 1}{\pi^3 k^3} e^{-t\pi^2 k^2} \sin(\pi k x). \end{aligned}$$

Чисельний метод реалізовувався відповідно до алгоритму з підрозділу 1.9.2 при  $(a = 1, b = 1)$ , де другий крок виконувався використовуючи точний розв'язок. Похибки  $\epsilon_N = u(x, t) - u_N(x, t)$  для  $t = 0.15$  і  $t = 0.2$  в залежності від  $N$  та  $x$  подані на рис. 2.1. З графіків видно вплив відстані від початкової точки на швидкість збіжності.

Таким чином, з теореми 2.4 і проведених чисельних експериментів видно необхідність побудови експоненціально збіжного методу, який би враховував вплив точки  $t = 0$  і забезпечував рівномірну відносно  $t$  швидкість збіжності.



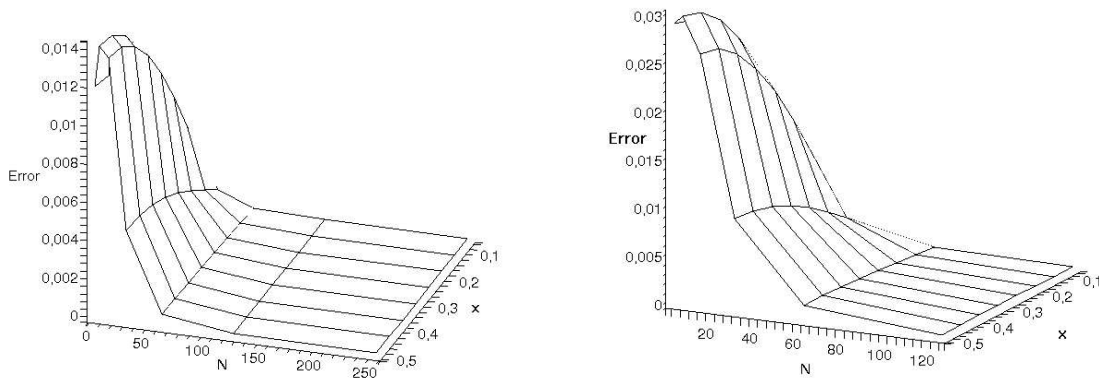


Рис. 2.1: Похибка методу для  $t = 0.2$  і  $t = 0.15$

### 2.3 Експоненціально збіжний метод наближення операторної експоненти з необмеженим оператором

В цьому підрозділі розглянемо однорідну задачу Коші (1.17), тобто  $f(t) \equiv 0$ . Припустимо, що оператор  $A$  є секторіальним зі спектром у

$$\Gamma_{\Sigma} = \{z = \xi + i\eta : \xi = a|\eta| + \gamma_0, \eta \in (-\infty, \infty)\}. \quad (2.7)$$

На границі цього сектору та за його межами виконується оцінка для резольвенти (1.29). Припустимо, що  $u_0 \in D(A^n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Тоді  $\exists u^* : u^* = (A^n + \alpha)u_0$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Як зазначалось раніше, розв'язок задачі (1.17) можна записати за допомогою (1.32), а операторну експоненту використовуючи інтеграл Данфорда-Коші (1.30), де  $\Gamma$ -крива, що охоплює спектр оператора  $A$  і обхід здійснюється в додатному напрямку.

**2.3.1 Зображення розв'язку.** Враховуючи наше припущення щодо початкових даних  $u_0$ , розв'язок можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} u(t) &= -\frac{(A^n + \alpha)^{-1}(A^n + \alpha)}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-zt} R_A(z) u_0 dz = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-zt} \frac{R_A(z)}{z^n + \alpha} u^* dz. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Виберемо криву інтегрування наступним чином:

$$\begin{aligned} \Gamma_I = \{z = \xi + i\eta : \xi = \cosh(s) - 1 + \gamma_1, \eta = -a_1 \sinh(s), \\ -\sqrt[n]{\alpha} < \gamma_1 < \gamma_0, a_1 \geq 1/a, s \in (-\infty, \infty)\}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Покажемо, що  $\Gamma_I$  не перетинає  $\Gamma_{\Sigma}$  і лежить лівіше. Дійсно, з (2.9), використовуючи формулу  $\cosh^2(s) - \sinh^2(s) = 1$ , можна записати

$$\Gamma_I = \left\{ z = \xi + i\eta : \xi = \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{a_1^2}} - 1 + \gamma_1, \eta \in (-\infty, \infty) \right\}.$$

Розглянемо гілку кривої  $\Gamma_I$ , коли  $\eta > 0$ . Якщо  $\phi_1(\eta)$ – кут нахилу дотичної до  $\Gamma_I$  в точці  $\eta$  до осі  $\xi$ , тоді

$$\cot(\phi_1) = \xi'(\eta) = \frac{\frac{2\eta}{a_1^2}}{2 \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{a_1^2}}} = \frac{\eta}{a_1 \sqrt{a_1^2 + \eta^2}}.$$

При  $\eta = 0$ ,  $\cot(\phi_1) = 0$ , тобто  $\phi_1 = \frac{\pi}{2}$ . Коли  $\eta > 0$

$$\cot(\phi_1) = \frac{1}{a_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a_1^2}{\eta^2}}} < \frac{1}{a_1}.$$

З (2.7) видно, що  $\cot(\phi) = a$ . Оскільки  $a_1 \geq \frac{1}{a}$ , то  $\cot(\phi_1) < \frac{1}{a_1} \leq a = \cot(\phi)$ . Тому  $\phi_1 > \phi$ . Аналогічні міркування справедливі для гілки  $\eta < 0$ . Таким чином, враховуючи, що  $\gamma_1 < \gamma_0$  і  $\phi_1 > \phi$ , ми приходимо до висновку, що  $\Gamma_I$  не перетинає  $\Gamma_{\Sigma}$  і лежить лівіше.

**Зауваження 2.3** Умова  $-\sqrt[n]{\alpha} < \gamma_1$  пов'язана з тим, що оператор  $(A^n + \alpha)^{-1}$  має особливість в точці  $(-\sqrt[n]{\alpha}, 0)$ .

Використовуючи параметричне зображення  $\Gamma_I$ , інтеграл (2.8) запишемо наступним чином:

$$u(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-z(s)t\} \frac{R_A(z(s))}{z^n(s) + \alpha} \phi(s) u^* ds = \int_{-\infty}^{\infty} F(s, t, n) ds, \quad (2.10)$$

де  $z(s) = \cosh(s) - 1 + \gamma_1 - a_1 \sinh(s)$ ,  $\phi(s) = \sinh(s) - ia_1 \cosh(s)$ .

Оцінимо функцію  $F(s, t, n)$ . Враховуючи (1.29), для резольвенти матимемо

$$\begin{aligned} \|R_A(z)\| &\leq \frac{M}{1 + \sqrt{(\cosh(s) - 1 + \gamma_1)^2 + a_1^2 \sinh^2(s)}} = \\ &= \frac{M}{\cosh(s) \left( \frac{1}{\cosh(s)} + \sqrt{\left(1 + \frac{-1+\gamma_1}{\cosh(s)}\right)^2 + a_1^2 \tanh^2(s)} \right)} \leq \frac{M_1}{\cosh(s)}, \end{aligned}$$

де

$$M_1 = \sup_{s \in (-\infty, \infty)} \frac{M}{\frac{1}{\cosh(s)} + \sqrt{\left(1 + \frac{-1+\gamma_1}{\cosh(s)}\right)^2 + a_1^2 \tanh^2(s)}}.$$

Тоді

$$\|\phi(s)R_A(z)u^*\| \leq M_1 \left| \frac{\sinh(s) - ia_1 \cosh(s)}{\cosh(s)} \right| \leq M_2 \|u^*\| = \text{const} < \infty. \quad (2.11)$$

Для множника, що залишився, матимемо

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{z^n(s) + \alpha} \right| &= \frac{1}{|(\cosh(s) - 1 + \gamma_1 - ia_1 \sinh(s))^n + \alpha|} = \\ &= \frac{1}{\cosh^n(s) \left| \left(1 + \frac{-1+\gamma_1}{\cosh(s)} - ia_1 \tanh(s)\right)^n + \frac{\alpha}{\cosh(s)} \right|} \leq \frac{M_3}{\cosh^n(s)}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

де

$$M_3 = \sup_{s \in (-\infty, \infty)} \frac{1}{\left| \left(1 + \frac{-1+\gamma_1}{\cosh(s)} - ia_1 \tanh(s)\right)^n + \frac{\alpha}{\cosh(s)} \right|}.$$

Враховуючи, що

$$|\exp\{-(\cosh(s) - 1 + \gamma_1 - ia_1 \sinh(s))t\}| \leq \exp\{-(\cosh(s) - 1 + \gamma_1)t\},$$

а також оцінки (2.11), (2.12), остаточно матимемо

$$\begin{aligned} \|F(s, t, n)\| &\leq \frac{M_2 M_3}{2\pi} \exp\{-(\cosh(s) - 1 + \gamma_1)t\} \frac{1}{\cosh^n(s)} \|u^*\| \leq \\ &\leq C \exp\{-(\cosh(s) - 1 + \gamma_1)t - n|s|\} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Тут ми використали нерівність  $\frac{1}{\cosh(s)} \leq 2e^{-|s|}$ . Звідси випливає, що інтеграл (2.10) збіжний  $\forall t \geq 0, n > 0$  або  $\forall t > 0, n \geq 0$ .

Розглянемо  $u'(t)$ . З (2.10) отримаємо

$$u'(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-z(s)t\} \frac{z(s)\phi(s)R_A(z(s))}{z^n(s) + \alpha} u^* ds = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(s, t, n) ds. \quad (2.14)$$

Оцінимо підінтегральну функцію  $F_1(s, t, n)$ . Як видно,

$$F_1(s, t, n) = \frac{z^n(s) + \alpha z(s)}{z^n(s) + \alpha z(s)} F(s, t, n - 1).$$

Зробимо позначення

$$M_4 = \sup_{s \in (-\infty, \infty)} \left| \frac{z^n(s) + \alpha z(s)}{z^n(s) + \alpha z(s)} \right|,$$

де очевидно, що  $M_4 < \infty$ , отримаємо з урахуванням оцінки (2.13)

$$\|F_1(s, t, n)\| \leq M_4 \|F(s, t, n - 1)\| \leq C_1 e^{-(\cosh(s) - 1 + \gamma_1)t - (n-1)|s|}. \quad (2.15)$$

Ця оцінка показує, що інтеграл (2.14) збіжний  $\forall t \geq 0, n > 1$  або  $\forall t > 0, n \geq 0$ . Враховуючи, що

$$\begin{aligned} Au(t) &= -A \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_I} e^{-zt} \frac{R_A(z)}{z^n + \alpha} u^* dz = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_I} e^{-zt} \frac{z R_A(z)}{z^n + \alpha} u^* dz = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} F_1(s, t, n) ds, \end{aligned}$$

для  $u(t)$  маємо

$$u'(t) + Au(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(s, t, n) ds - \int_{-\infty}^{\infty} F_1(s, t, n) ds = 0,$$

$$u(0) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_I} \frac{R_A(z)}{z^n + \alpha} u^* dz = (A^n + \alpha)^{-1} u^* = u_0.$$

Отже ми довели таке твердження:

**Теорема 2.5** *Нехай в умовах задачі (1.17)  $A$  – секторіальний оператор в банаховому просторі  $X$ , спектр якого знаходиться в області, обмеженій  $\Gamma_\Sigma$ ,  $u_0 \in D(A^n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Тоді при  $t > 0$  існує розв’язок однорідної задачі (1.17), який можна зобразити за допомогою інтеграла (2.10). Якщо  $0 < n < 1$ , то  $u(t)$  є слабким розв’язком  $t \in [0, T]$ , якщо ж  $n \geq 1$ , то – сильним.*

**2.3.2 Наближений розв’язок.** Далі побудуємо квадратурну формулу для наближеного обчислення інтеграла (2.10), як це описано в підрозділі 1.3, базуючись на Sinc-наближеннях функцій. Будемо використовувати наступний алгоритм:

**Алгоритм 1.**

1. Задано  $a, \gamma_0, n$ . Вибираємо  $a_1, \alpha > 0, \gamma_1$  так, щоб  $a_1 \geq \frac{1}{a}$ ,  $-\sqrt[n]{\alpha} < \gamma_1 < \gamma_0, N$ .
2. Для  $k = \overline{-N, N}$  знаходимо  $h = \sqrt{\frac{\pi}{nN}}$ ,  $z_k = \cosh(kh) - 1 + \gamma_1 - ia_1 \sinh(kh)$ ,  $\alpha_k = -\frac{\phi(kh)}{2\pi i(z_k^n + \alpha)}$ .
3. Розв’язуємо рівняння  $(A - z_k) \hat{u}_k = u^*$ ,  $k = \overline{-N, N}$ , де  $u^* = (A^n + \alpha) u_0$ .
4. Знаходимо наближення  $u_N$  до розв’язку задачі Коші (1.17) у вигляді
 
$$u_N(t) = h \sum_{k=-N}^N \alpha_k e^{-z_k t} \hat{u}(z_k) = h \sum_{k=-N}^N \alpha_k e_k \hat{u}(z_k).$$

Для обґрунтування можливості застосування Sinc-квadrатури, нам потрібно знайти ширину смуги  $D_d$ , в яку можна аналітично продовжити підінтегральну функцію  $F(s, t, n)$ . Для цього розглянемо параметричне сімейство кривих  $\Gamma(\nu)$ , яке отримується з  $\Gamma_I$  заміною  $s$  на  $s + i\nu$ . Тоді, очевидно, аналітичність  $F(s, t, n)$  буде втрачатися, коли  $\Gamma(\nu)$  перетне дійсну вісь при

$\eta > \gamma_0$ , де знаходиться спектр оператора  $A$  (в цьому випадку буде невизначена резольвента), або коли  $\Gamma(\nu)$  захопить точку  $(-\sqrt[n]{\alpha}, 0)$  (в цьому випадку в знаменнику функції  $F(s, t, n)$  з'явиться 0). Отже, матимемо

$$\begin{aligned} \Gamma(\nu) &= \{\cosh(s + i\nu) - 1 + \gamma_1 - ia_1 \sinh(s + i\nu)\} = \\ &= \{\cosh(s) \cos(\nu) + a_1 \cosh(s) \sin(\nu) - 1 + \gamma_1 + ia_1 (\sinh(s) \sin(\nu) - \\ &\quad - a_1 \sinh(s) \cos(\nu))\} \end{aligned}$$

Звідси видно, що  $\Gamma(\nu)$  перетинає дійсну вісь ( $\text{Im } z = 0$ ) при  $s = 0$ . Тоді  $\text{Re} [\Gamma(\nu)]_{s=0} = \cos(\nu) + a_1 \sin(\nu) - 1 + \gamma_1$ . Отже обмеження на ширину смуги буде мати наступний вигляд:

$$-\sqrt[n]{\alpha} < \cos(d) + a_1 \sin(d) - 1 + \gamma_1 < \gamma_0.$$

Отже, функцію  $F(s, t, n)$  можна аналітично продовжити в смугу  $D_d$ . Це означає, що ми можемо використати квадратурну формулу  $T_N$  з підрозділу 1.3 для наближення інтегралу (2.10). Беручи до уваги оцінку (2.13), можемо використати узагальнення теорема (1.6) на випадок векторно-значних функцій, замінюючи  $\alpha$  на  $n$ . Матимемо

$$\|\eta_N(F, h)\| \leq \frac{2c}{n} \left[ \frac{\exp\{-\pi d/h\}}{\sinh(\pi d/h)} + \exp\{-nhN\} \right],$$

де стала  $c > 0$ , не залежить від  $d, h$ . Виберемо  $h = \sqrt{\frac{\pi}{nN}}$ , тоді

$$\|\eta_N(F, h)\| \leq \frac{2c}{n} \left[ \frac{2e^{-2\sqrt{\pi n N} d}}{1 - e^{-2\sqrt{\pi n N} d}} + e^{-\sqrt{\pi n N}} \right]. \quad (2.16)$$

Таким чином, ми довели наступний результат:

**Теорема 2.6** *Нехай виконані умови теореми 2.5. Тоді для наближення  $u_N(t)$  розв'язку однорідної задачі (1.17), за допомогою алгоритму 1, справедлива оцінка (2.16).*

**Зауваження 2.4** В пункті 4 алгоритму 1 для знаходження наближення  $u_N(t)$  проводиться сумування по  $k = \overline{-N, N}$ . Оскільки крива  $\Gamma_I$ , по якій проводиться інтегрування, симетрична відносно дійсної вісі, то  $z_{-k} = \bar{z}_k$ . Легко перевірити, що  $\alpha_{-k} = \bar{\alpha}_k$ ,  $e_{-k} = \bar{e}_k$ ,  $u_{-k} = \bar{u}_k$ . Тоді

$$u_N(t) = h \sum_{k=-N}^N \alpha_k e_k \hat{u}(z_k) = h \left( \sum_{k=-N}^{-1} [\alpha_k e_k \hat{u}(z_k) + \bar{\alpha}_k \bar{e}_k \hat{u}(\bar{z}_k)] + \alpha_0 e_0 \hat{u}(z_0) \right).$$

Тому

$$u_N(t) = h \sum_{k=-N}^{-1} 2 \operatorname{Re} \{ \alpha_k e_k \hat{u}(z_k) \} + h \alpha_0 e_0 \hat{u}(z_0).$$

**2.3.3 Випадок аналітичних початкових даних.** Розглянемо випадок, коли  $u_0$  є аналітичним вектором оператора  $A$ . Тоді  $\exists u^* : \exists \tau > 0$ ,  $u^* = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^k}{k!} A^k u_0$ . Отже, інтегральне зображення можна записати наступним чином:

$$u(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-zt} R_A(z) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^k}{k!} A^k \right)^{-1} u^* dz = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-z(t+\tau)} R_A(z) u^* dz.$$

Після параметризації кривої  $\Gamma$  отримаємо

$$u(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z(s)(t+\tau)} R_A(z(s)) \phi(s) u^* ds = \int_{-\infty}^{\infty} F(s, t, \tau) ds, \quad (2.17)$$

де  $z(s) = \cosh(s) - 1 + \gamma_1 - a_1 \sinh(s)$ ,  $\phi(s) = \sinh(s) - ia_1 \cosh(s)$ . Тоді

$$A^p u(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z(s)(t+\tau)} z^p(s) R_A(z(s)) \phi(s) u^* ds = \int_{-\infty}^{\infty} F_p(s, t, \tau) ds.$$

Знайдемо умови збіжності цього інтегралу. Для цього оцінимо функцію  $F_p(s, t, \tau)$ .

$$\begin{aligned} & |z^p(s) \exp \{ -z(s)(t+\tau) \} | = \\ & = \left| (\cosh(s) - 1 + \gamma_1 - ia_1 \sinh(s))^p e^{-(\cosh(s)-1+\gamma_1-ia_1 \sinh(s))(t+\tau)} \right| \leq \\ & \leq \left| \cosh^p(s) \left( 1 + \frac{-1 + \gamma_1}{\cosh(s)} - ia_1 \tanh(s) \right)^p \right| e^{-\cosh(s)(t+\tau)} e^{(\gamma_1-1)(t+\tau)} \leq \end{aligned}$$

$$\leq C e^{(\gamma_1-1)(t+\tau)} e^{ps-\cosh(s)(t+\tau)}.$$

Тоді, беручи до уваги оцінку (2.11), матимемо

$$\|F_p(s, t, \tau)\| \leq C_1 e^{(\gamma_1-1)(t+\tau)} e^{ps-\cosh(s)(t+\tau)}, \quad (2.18)$$

із невід'ємною сталою  $C_1$ .

Отже, інтеграл (2.17) є збіжним для всіх  $p \geq 0$ ,  $t \geq 0$ .

**Теорема 2.7** *Нехай в умовах однорідної задачі (1.17)  $A$  – секторіальний оператор в банаховому просторі  $X$ , спектр якого знаходиться в області, обмеженій  $\Gamma_\Sigma$ ,  $u_0$  є аналітичним вектором оператора  $A$ . Тоді розв'язок однорідної задачі (1.17) можна зобразити за допомогою інтеграла (2.17)*

З оцінки (2.18) отримаємо оцінку для  $F(s, t, \tau)$ .

$$\|F(s, t, \tau)\| \leq C_2 \exp \left\{ -e^{|s|} \frac{t + \tau}{2} \right\}, \quad (2.19)$$

зі сталою  $C_2 \geq 0$ .

Далі побудуємо квадратурну формулу для наближеного обчислення інтеграла (2.17). Будемо використовувати наступний алгоритм:

### Алгоритм 2.

1. Задано  $a$ ,  $\gamma_0$ ,  $\tau$ . Вибираємо  $a_1 \geq \frac{1}{a}$ ,  $N$ .
2. Для  $k = \overline{-N, N}$  знаходимо  $h = \frac{\ln N}{N}$ ,  $z_k = \cosh(kh) - 1 + \gamma_1 - ia_1 \sinh(kh)$ ,  
 $\alpha_k = -\frac{\phi(kh)}{2\pi i}$ .
3. Розв'язуємо рівняння  $(A - z_k) \hat{u}_k = u^*$ ,  $k = \overline{-N, N}$ , де  $u^* = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^k}{k!} A^k u_0$ .
4. Знаходимо наближення  $u_N$  до розв'язку задачі Коші у вигляді

$$u_N(t) = h \sum_{k=-N}^N \alpha_k e^{-z_k(t+\tau)} \hat{u}(z_k)$$



Доведемо допоміжне твердження.

**Лема 2.2** Для довільної операторно-значної функції  $f \in H^p(D_d)$ , що задовольняє на  $\mathbb{R}$  умову

$$\|f(x)\| \leq c \exp\{-\alpha \exp\{|x|\}\}, \quad c, \alpha = \text{const} > 0 \quad (2.20)$$

справедлива оцінка

$$\|\eta_N(f, h)\| \leq \frac{2c}{\alpha} \left[ \frac{e^{-\pi d/h}}{\sinh(\pi d/h)} + e^{-hN - \alpha \exp\{Nh\}} \right]. \quad (2.21)$$

Доведення. Знайдемо оцінку  $f(x)$ . Враховуючи умову (2.20), матимемо

$$\begin{aligned} \|f\|_{H^p(D_d)} &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \|f(x)\| dx \leq 2c \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\alpha e^{|x|}\} dx = 4c \int_0^{\infty} \exp\{-\alpha e^x\} dx = \\ &= 4c \int_1^{\infty} \frac{e^{-\alpha y}}{y} dy \leq 4c \int_1^{\infty} e^{-\alpha y} dy = \frac{4c}{\alpha} e^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Тоді

$$\|\eta(f, h)\| \leq \frac{2c}{\alpha} \frac{e^{-\pi d/h}}{\sinh(\pi d/h)}. \quad (2.22)$$

Оскільки

$$\|\eta_N(f, h)\| \leq \|\eta(f, h)\| + h \sum_{|k|>N} \|f(kh)\|, \quad (2.23)$$

далі оцінимо суму

$$\begin{aligned} h \sum_{|k|>N} \|f(kh)\| &\leq hc \sum_{|k|>N} \exp\{-\alpha e^{|kh|}\} = 2hc \sum_{k=N+1}^{\infty} \exp\{-\alpha e^{kh}\} \leq \\ &\leq 2hc \int_N^{\infty} \exp\{-\alpha e^{hx}\} dx = 2hc \int_{\exp\{Nh\}}^{\infty} e^{-\alpha y} \frac{1}{hy} dy \leq \frac{2hc}{he^{Nh}} \int_{\exp\{Nh\}}^{\infty} e^{-\alpha y} dy = \\ &= \frac{2hc}{\alpha he^{Nh}} \exp\{-\alpha e^{Nh}\}. \end{aligned}$$

Підставляючи цю нерівність а також (2.22) в (2.23), отримаємо (2.21), що і треба було показати. ■

Як було показано вище, функцію  $F(s, t, \tau)$  можна аналітично продовжити в смугу  $D_d$ , тому можна використати квадратурну формулу  $T_N$  для наближення інтегралу (2.17). Враховуючи оцінку (2.19), ми можемо скористатись лемою 2.2, виконуючи відповідні заміни.

$$\|\eta_N(F, h)\| \leq \frac{4C_1 e^{(\gamma_1-1)(t+\tau)}}{t+\tau} \left[ \frac{2e^{-\pi d/h - \frac{t+\tau}{2}}}{\sinh(\pi d/h)} + \exp \left\{ -hN - e^{Nh} \frac{t+\tau}{2} \right\} \right].$$

Виберемо  $h = \frac{\ln N}{N}$ , тоді

$$\begin{aligned} \|\eta_N(F, h)\| &\leq \frac{4C_1 e^{(\gamma_1-1)(t+\tau)}}{t+\tau} \left[ \frac{2e^{-\pi d \frac{N}{\ln N} - \frac{t+\tau}{2}}}{\sinh(\pi d \frac{N}{\ln N})} + e^{-\ln N - N \frac{t+\tau}{2}} \right] \leq \\ &\leq \frac{4C_1 e^{(\gamma_1-1)(t+\tau)}}{t+\tau} \left[ \frac{2e^{-2\pi d \frac{N}{\ln N} - \frac{t+\tau}{2}}}{1 - e^{-2\pi d \frac{N}{\ln N}}} + \frac{e^{-N \frac{t+\tau}{2}}}{N} \right] \end{aligned} \quad (2.24)$$

Таким чином, ми довели наступний результат:

**Теорема 2.8** *Нехай виконані умови теореми 2.7, наближений розв'язок однорідної задачі (1.17) шукається за допомогою алгоритму 2. Тоді для наближення  $u_N(t)$  справедлива оцінка (2.24).*

**Зауваження 2.5** *Як і для алгоритму 1 в пункті 4 алгоритму 2 можна скористатись формулою з вдвічі меншою кількістю обчислень за рахунок врахування симетричності контуру інтегрування.*

## 2.4 Експоненціально збіжний метод розв'язування не-однорідних диференціальних рівнянь першого порядку з необмеженим операторним коефіцієнтом

**2.4.1 Вступ** Розглянемо наступну задачу Коші:

$$\frac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t), \quad u(0) = u_0, \quad (2.25)$$

де  $A$  є сильно позитивним секторіальним оператором в банаховому просторі  $X$ , з областю визначення  $D$ . Тобто, спектр оператора розміщений в секторі

(1.28) в правій півплощині, для резольвенти  $R_A(z)$  поза сектором і на межі виконується оцінка (1.29).  $u_0 \in X$  є заданим вектором,  $f(t)$  – задана функція з значеннями в банаховому просторі  $X$  і  $u(t)$  – невідома векторно-значна функція.

Як зазначалося в підрозділі 1.8, розв’язок задачі (2.25) формально можна записати у вигляді

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) = e^{-At}u_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)}f(s)ds, \quad (2.26)$$

При побудові методу знаходження розв’язку задачі (2.25) особливу увагу приділяють правій частині рівняння. Оскільки методи з [93, 94] забезпечують збіжність тільки для  $t > 0$ , то їх не можна безпосередньо застосувати до неоднорідної частини (2.26). Для вирішення цієї проблеми було запропоновано використовувати теорему про згортку з подальшим використанням експоненціальних методів знаходження оберненого перетворення Лапласа [94] або використання експоненціальних методів для конволюційних інтегралів [93, 95]. Недоліком даного підходу є неможливість його узагальнення на квазілінійні задачі та відсутність можливості розпаралелити обчислення для різних моментів часу. Методи розроблені в [3, 96] мають рівномірну по  $t$  експоненціальну збіжність та можливість розпаралелювання обчислень, але трохи меншу порівняно з попередніми методами швидкість збіжності.

Метою даного підрозділу є розробка методу з експоненціальною швидкістю збіжності, який, зберігаючи переваги методів з [3, 96], дає можливість швидко знаходити наближений розв’язок задачі (2.25), автоматично використовуючи гладкість функції  $f(t)$ .

**2.4.2 Однорідна задача.** Для розв’язування однорідної задачі (2.25) використаємо методику з [3]. Нехай

$$\Gamma_0 = \{z(\xi) = a_0 \cosh \xi - ib_0 \sinh \xi : \xi \in (-\infty, \infty), b_0 = a_0 \tan \varphi\}, \quad (2.27)$$

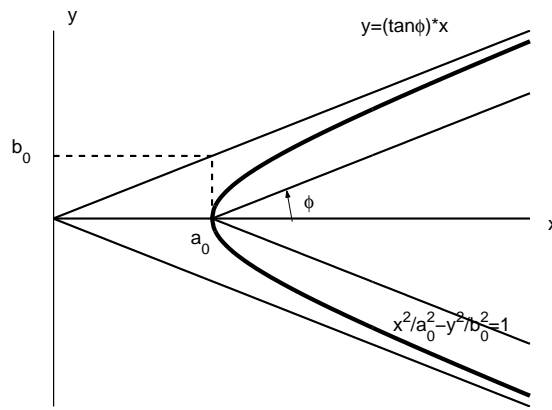


Рис. 2.2: Спектральна гіпербола

є спектральною гіперболою, що охоплює спектральний сектор (1.28) (див. рис. 2.2). Виберемо гіперболу

$$\Gamma_I = \{z(\xi) = a_I \cosh \xi - ib_I \sinh \xi : \xi \in (-\infty, \infty)\} \quad (2.28)$$

за контур інтегрування з

$$a_I = a_0 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos \varphi}, \quad b_I = a_0 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos \varphi}, \quad (2.29)$$

$$\cos \varphi = \frac{a_0}{\sqrt{a_0^2 + b_0^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b_0}{\sqrt{a_0^2 + b_0^2}}.$$

Наближення до розв'язку однорідної задачі (2.25) візьмемо наступним:

$$u_N(t) = \frac{h}{2\pi i} \sum_{k=-N}^N \mathcal{F}(t, z(kh)), \quad (2.30)$$

$$\mathcal{F}(t, \xi) = e^{-z(\xi)t} z'(\xi) \left[ (z(\xi)I - A)^{-1} - \frac{1}{z(\xi)} I \right] u_0.$$

Тут замість резольвенти  $(zI - A)^{-1}$  взято  $\left( (zI - A)^{-1} - \frac{1}{z} \right)$ . Така заміна, що забезпечує стійкість обчислення при малих значеннях  $t$  та рівномірну експоненціальну швидкість збіжності, була вперше запропонована в роботі [78].

При виборі параметрів інтегральної гіперболи у вигляді (2.29), функція  $\mathcal{F}(t, z(\xi))$  має аналітичне продовження відносно  $\xi$  у смугу ширини

$$d_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi, \quad (2.31)$$

навколо дійсної осі.

Справедлива наступна теорема (див. [3]):

**Теорема 2.9** *Нехай  $A$  щільно визначений сильно позитивний оператор і  $u_0 \in D(A^\alpha)$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ . Тоді наближення (2.30) забезпечує рівномірну по відношенню до  $t \geq 0$  експоненціальну швидкість збіжності*

$$\|u(t) - u_N(t)\| \leq \frac{c \|A^\alpha u_0\|}{\alpha} \times \left\{ \frac{e^{-\pi d/h}}{\sinh(\pi d/h)} + \exp[-a_I t \cosh((N+1)h) - \alpha(N+1)h] \right\},$$

де стала  $c \geq 0$  не залежить від  $h, N, t$ . Ця оцінка має порядок  $\mathcal{O}(e^{-c\sqrt{N}})$ , для  $t \geq 0$  при  $h = 1/\sqrt{N}$  і порядок  $\mathcal{O}(\max\{e^{-\pi d N/(c_1 \ln N)}, e^{-c_1 a_I t N/2 - c_1 \alpha \ln N}\})$ ,  $d = \pi/2 - \varphi$  для кожного фіксованого  $t > 0$  при  $h = \ln N/N$ .

**Зауваження 2.6** *Для того, щоб знайти наближення (2.30) потрібно розв'язати  $2N + 1$  еліптичну задачу*

$$(z(kh)I - A)w = u_0.$$

Але, враховуючи, що крива  $\Gamma_I$ , по якій проходить інтегрування, симетрична відносно дійсної осі, то  $z(-kh) = \overline{z(kh)}$ . Тому формулу (2.30) можна записати у вигляді

$$u_{h,N}(t) = \frac{h}{\pi} \sum_{k=1}^N \operatorname{Re}(\mathcal{F}(t, z(kh))) + \frac{h}{2\pi i} \mathcal{F}(t, z(0)).$$

В цьому випадку кількість еліптичних задач буде  $N + 1$ .

### 2.4.3 Неоднорідна задача. Наближення за вузлами Чебишева.

Далі побудуємо наближення до  $u_p(t)$ . Для цього зробимо заміну змінних

$$t = \frac{T}{2}(\tau + 1) \quad s = \frac{T}{2}(\xi + 1).$$

Тоді

$$u_p\left(\frac{T}{2}(\tau + 1)\right) = \frac{T}{2} \int_{-1}^{\tau} e^{-A\frac{T}{2}(\tau-\xi)} f\left(\frac{T}{2}(\xi + 1)\right) d\xi.$$

Оскільки функція  $f\left(\frac{T}{2}(\xi + 1)\right)$  визначена на відрізку  $\xi \in [-1, 1]$ , наблизимо її інтерполяційним поліномом Лагранжа по вузлам Чебишева. Тобто,

$$f\left(\frac{T}{2}(\xi + 1)\right) \approx \sum_{k=1}^n f\left(\frac{T}{2}(\xi_k + 1)\right) L_{k,n-1}(\xi),$$

де  $\xi_k = -\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$ ,  $L_{k,n-1}(\xi) = \frac{T_n(\xi)}{T_n'(\xi_k)(\xi-\xi_k)}$ ,  $k = 1, \dots, n$  — відповідно вузли Чебишева і фундаментальні поліноми Лагранжа. Тоді наближенням до  $u_p\left(\frac{T}{2}(\tau + 1)\right)$  буде  $y(\tau)$ , що визначається за формулою

$$y(\tau) = \sum_{k=1}^n \int_{-1}^{\tau} e^{-A\frac{T}{2}(\tau-\xi)} L_{k,n-1}(\xi) d\xi f_k,$$

з  $f_k = \frac{T}{2} f\left(\frac{T}{2}(\xi_k + 1)\right)$ . Далі використаємо зображення Данфорда-Коші для операторної експоненти

$$y(\tau) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \int_{-1}^{\tau} e^{-z\frac{T}{2}(\tau-\xi)} L_{k,n-1}(\xi) d\xi R_A(z) dz f_k,$$

де  $R_A(z) = (zI - A)^{-1} - 1/z$  (див. [3]). Після використання параметризації (2.28), (2.29), отримаємо

$$y(\tau) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-1}^{\tau} e^{-z(s)\frac{T}{2}(\tau-\xi)} L_{k,n-1}(\xi) d\xi z'(s) R_A(z(s)) ds f_k.$$

Зауважимо, що внутрішній інтеграл обчислюється в явному вигляді, оскільки підінтегральна функція є добутком експоненти на поліном  $n - 1$ -го степеня.

Далі, до зовнішнього інтегралу застосуємо Sinc-квадратурну формулу аналогічну (2.30). Отримаємо

$$y(\tau) \approx y_N(\tau) = \frac{h}{2\pi i} \sum_{j=-N}^N \mathcal{F}_1(\tau, jh), \quad (2.32)$$

$$\mathcal{F}_1(\tau, jh) = \sum_{k=1}^n \int_{-1}^{\tau} e^{-z(jh)\frac{T}{2}(\tau-\xi)} L_{k,n-1}(\xi) d\xi z'(jh) R_A(z(jh)) f_k,$$

де вибір параметру  $h$  буде описано далі.

Знайдемо похибку для такого наближення.

$$\begin{aligned} \left\| u_p \left( \frac{T}{2} (\tau + 1) \right) - y_N(\tau) \right\| &\leq \left\| u_p \left( \frac{T}{2} (\tau + 1) \right) - y(\tau) \right\| + \\ &+ \|y(\tau) - y_N(\tau)\| = z_1 + z_2. \end{aligned}$$

Тоді,

$$\begin{aligned} z_1 &= \left\| \frac{T}{2} \int_{-1}^{\tau} e^{-A\frac{T}{2}(\tau-\xi)} \left\{ f \left( \frac{T}{2} (\xi + 1) \right) - \sum_{k=1}^n L_{k,n-1}(\xi) f \left( \frac{T}{2} (\xi_k + 1) \right) \right\} d\xi \right\| \leq \\ &\leq \frac{T}{2} \int_{-1}^{\tau} e^{-\omega\frac{T}{2}(\tau-\xi)} d\xi (1 + \Lambda_n) E_n(f) \leq c \ln n E_n(f), \end{aligned}$$

де  $E_n(f)$ — похибка найкращого наближення функції  $f$  поліномами степеня не більше ніж  $n - 1$

$$E_n(f) = \inf_{p \in \Pi_{n-1}} \max_{\eta \in [-1,1]} \|f(\eta) - p(\eta)\|.$$

Для обґрунтування можливості застосування Sinc-квадратурної формули та знаходження похибки  $z_2$  спершу потрібно дослідити підінтегральну функцію  $\mathcal{F}_1(\tau, s)$ . В [3] було показано, що

$$\|z'(s) R_A(z(s)) u\| \leq c \frac{b_I}{a_I} \left( \frac{2}{a_I} \right)^\alpha e^{-\alpha|\xi|} \|A^\alpha u\|,$$

$$\sum_{k=1}^n \left| \int_{-1}^t e^{-z(jh)(t-\xi)} L_{k,n-1}(\xi) d\xi \right| \leq c \sqrt{\pi(t+1)}.$$

Тому для функції  $\mathcal{F}_1(\tau, s)$  матимемо наступне:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_1(\tau, s)\| &\leq c\sqrt{\pi(t+1)}\frac{b_I}{a_I}\left(\frac{2}{a_I}\right)^\alpha e^{-\alpha|\xi|}\|A^\alpha f_k\| \leq \\ &\leq ce^{-\alpha|\xi|}\max_{t\in[-1,1]}\left\|A^\alpha f\left(\frac{T}{2}(t+1)\right)\right\| = ce^{-\alpha|\xi|}\|A^\alpha f\|. \end{aligned}$$

Тоді, враховуючи, що функція  $\mathcal{F}_1(\tau, s)$  відносно параметра  $s$  може бути аналітично продовжена в смугу шириною  $d = \pi/2 - \varphi$ , отримаємо

$$\begin{aligned} z_2 &\leq \left\|y(\tau) - \frac{h}{2\pi i}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathcal{F}_1(t, z(kh))\right\| + \left\|\frac{h}{2\pi i}\sum_{|k|>N}\mathcal{F}_1(t, z(kh))\right\| \leq \\ &\leq \frac{e^{-\pi d/h}}{4\pi\sinh(\pi d/h)}\|\mathcal{F}_1\|_{\mathbf{H}^1(D_d)} + \frac{Ch\|A^\alpha f\|}{2\pi}\sum_{k=N+1}^{\infty}e^{-\alpha kh} \leq \\ &\leq \frac{C\|A^\alpha f\|}{\alpha}\left\{\frac{e^{-\pi d/h}}{\sinh(\pi d/h)} + e^{-\alpha(N+1)h}\right\}. \end{aligned}$$

Врівноважуючи обидві експоненти  $\frac{\pi d}{h} = \alpha(N+1)h$ , для  $h$  отримаємо вираз

$$h = \sqrt{\frac{\pi d}{\alpha(N+1)}}, \quad (2.33)$$

а для  $z_2$  оцінку

$$z_2 \leq \frac{C\|A^\alpha f\|}{\alpha}e^{-\sqrt{\alpha\pi d(N+1)}}.$$

Сформулюємо отримані оцінки у вигляді теореми.

**Теорема 2.10** *Нехай  $A$ — щільно визначений строго позитивний оператор. Тоді  $y_N(\tau)$  наближає  $u_p\left(\frac{T}{2}(\tau+1)\right)$ — розв'язок неоднорідної задачі Коші (2.25) з похибкою*

$$\left\|u_p\left(\frac{T}{2}(\tau+1)\right) - y_N(\tau)\right\| \leq c\ln(n)E_n(f) + \frac{C\|A^\alpha f\|}{\alpha}e^{-\sqrt{\alpha\pi d(N+1)}}, \quad (2.34)$$

де  $h$  визначається в (2.33), сталі  $c, C$  є невід'ємними і не залежать від  $N$  і  $t$ . У випадку, коли функція  $f\left(\frac{T}{2}(\tau+1)\right)$  має аналітичне продовження з відрізка  $[-1, 1]$  в область  $\mathcal{D}_\rho$ , що знаходиться в середині еліпсу регулярності Бернштейна, оцінка (2.34) показує експоненціальну швидкість збіжності.



**Зауваження 2.7** Як і для однорідної задачі замість формули (2.32), можна використовувати формулу з половинною кількістю вузлів

$$y_N(\tau) = \frac{h}{\pi} \sum_{k=1}^N \operatorname{Re}(\mathcal{F}_1(\tau, kh)) + \frac{h}{2\pi i} (\mathcal{F}_1(\tau, 0)).$$

**2.4.4 Неоднорідна задача. Обернене перетворення Лапласа.** В цьому підрозділі побудуємо наближення до  $u_p(t)$ , якщо відоме  $F(z)$ – зображення Лапласа функції  $f(t)$ .

**Означення 2.1** [83] Зображення  $F(z)$  є секторіальним, якщо воно є аналітичною функцією в секторі  $|\arg(z - a_0)| < \pi - \varphi$ ,  $\varphi < \frac{\pi}{2}$ . Крім того, в цьому секторі справедлива оцінка  $\|F(z)\| \leq M|z|^{-\gamma}$  для деякого дійсного додатного  $M$  і  $\gamma > 0$ .

Припустимо, що зображення Лапласа функції  $f(t)$  є секторіальним, параметр  $\varphi$  співпадає з спектральним кутом оператора  $A$ ,  $a_0$ – параметр зсуву спектру оператора  $A$ .

Потрібно відмітити, що в багатьох прикладних задачах а ргіогі відомо саме перетворення Лапласа  $F$ , а не ядро  $f$ . Це виникає, наприклад, коли рівняння, що описує модель, виводиться через частотний фундаментальний розв’язок (передаточну функцію), а не часовий фундаментальний розв’язок (імпульсний вихідний сигнал), який невідомий.

Використовуючи теорему про перетворення Лапласа від згортки двох векторно-значних функцій [12], отримаємо, що

$$\hat{u}_p(z) = (zI + A)^{-1}F(z),$$

де  $\hat{u}_p(z)$  є перетворенням Лапласа функції  $u_p(t)$ .  $\hat{u}_p(z)$  є секторіальним, оскільки  $(zI + A)^{-1}$  та  $F(z)$  є секторіальними. Отже, ми можемо знайти зображення  $u_p(t)$ , використовуючи обернене перетворення Лапласа до  $\hat{u}_p(z)$

$$u_p(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{zt} \hat{u}_p(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{zt} (zI + A)^{-1} F(z) dz, \quad (2.35)$$

де  $\Gamma$ - контур, що охоплює сектор аналітичності функції  $\hat{u}_p(z)$ . Зробимо заміну змінної  $z \rightarrow -z$ . Контур інтегрування  $\Gamma_I$  виберемо так, щоб він охоплював також полюси  $F(-z)$ .

$$\Gamma_I = \{z(s) = a(\cosh(s) - c) - ib \sinh(s) \mid s \in [-\infty, \infty]\}.$$

З (2.35) після параметризації отримаємо

$$\begin{aligned} u_p(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z(s)t} z'(s) (z(s)I - A)^{-1} F(-z(s)) ds = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(t, s) ds, \end{aligned} \quad (2.36)$$

де  $z'(s) = a \sinh s - ib \cosh s$ . Визначимо коефіцієнти  $a$ ,  $b$  і  $c$  так, щоб крива  $\Gamma_I$  охоплювала сектор, де знаходиться спектр оператора  $A$  і полюси  $F(-z)$ . Крім того потрібно, щоб  $\mathcal{F}(t, s)$  можна було продовжити аналітично в смугу ширини  $d$  відносно дійсної вісі щодо змінної  $s$ . Після заміни  $s \rightarrow s + i\nu$  отримаємо параметричне сімейство кривих

$$\Gamma(\nu) = \{z(s, \nu) = (a \cos \nu + b \sin \nu) \cosh(s) - ac - i(b \cos \nu - a \sin \nu) \sinh(s)\}.$$

Виберемо параметри  $a$  і  $b$  так, щоб при  $\nu = -d/2$  крива  $\Gamma(-d/2)$  перетворювалась в пряму, паралельну уявній вісі, а при  $\nu = d/2$  асимптоти кривої  $\Gamma(d/2)$  були паралельні асимптотам спектральної кривої і  $\Gamma(d/2)$  охоплювала спектр оператора  $A$  та особливості функції  $F(z)$ . Тоді отримаємо вирази для параметрів  $a$  і  $b$  як в (2.29). При  $\nu = d/2$  вершина гіперболи повинна знаходитись лівіше від особливостей функції  $F(-z)$ . Тому, якщо всі особливості  $F(-z)$  лежать правіше  $c_0$ , то

$$\begin{aligned} a_0 - ac &= a_0 - \sqrt{a_0^2 + b_0^2} \cos\left(\frac{d}{2} + \varphi\right) c = a_0 - \sqrt{a_0^2 + b_0^2} \cos\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) c \leq \\ &\leq a_0 - a_0 c_0, \end{aligned}$$

або

$$c \geq \frac{a_0 c_0}{\sqrt{a_0^2 + b_0^2} \cos\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\cos(\varphi)}{\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} c_0.$$

Для того, щоб отримати оцінку похибки, потрібно оцінити підінтегральну функцію в (2.36). Продовжимо її відносно змінної  $s$  в смугу  $D_d$ . Після заміни  $s = s + i\nu$ , отримаємо

$$z(s, \nu) = a(\nu) \cosh s - ac - ib(\nu) \sinh s,$$

$$z'(s, \nu) = a(\nu) \sinh s - ib(\nu) \cosh s,$$

де

$$a(\nu) = a \cos \nu + b \sin \nu = \sqrt{a_0^2 + b_0^2} \cos \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} - \nu \right),$$

$$b(\nu) = b \cos \nu - a \sin \nu = \sqrt{a_0^2 + b_0^2} \sin \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} - \nu \right),$$

$$|\nu| \leq \frac{d}{2}.$$

Далі маємо

$$\begin{aligned} & \|e^{-z(s, \nu)t} z'(s, \nu) (z(s, \nu)I - A)^{-1}\| \leq \\ & \leq \exp\{-ta(\nu) \cosh s + tac\} (a^2(\nu) \sinh^2 s + b^2(\nu) \cosh^2 s)^{1/2} \times \\ & \quad \times \|(z(s, \nu)I - A)^{-1}\| \leq \\ & \leq \exp\{-ta(\nu) \cosh s + tac\} (a^2(\nu) \sinh^2 s + b^2(\nu) \cosh^2 s)^{1/2} \times \\ & \quad \times \frac{M}{1 + |z(s, \nu)|} \leq \\ & \leq \exp\{-ta(\nu) \cosh s + tac\} \frac{M (a^2(\nu) \sinh^2 s + b^2(\nu) \cosh^2 s)^{1/2}}{1 + ((a(\nu) \cosh s - ac)^2 + b^2(\nu) \sinh^2 s)^{1/2}} \leq \\ & \leq C \exp\{-ta(\nu) \cosh s\}. \end{aligned}$$

Використовуючи припущення щодо  $F(z)$ , отримаємо

$$\begin{aligned} & \|F(-z(s, \nu))\| \leq C |z(s, \nu)|^{-\gamma} = \\ & = C ((a(\nu) \cosh s - ac)^2 + b^2(\nu) \sinh^2 s)^{-\gamma/2} \leq C_1 e^{-\gamma|s|}. \end{aligned}$$

Об'єднуючи ці оцінки, матимемо

$$\|\mathcal{F}(t, s, \nu)\| \leq C \exp\{-ta(\nu) \cosh s - \gamma|s|\}. \quad (2.37)$$

Для  $\mathcal{F}$  оцінимо норму  $H^1(D_d)$  (1.16), отримаємо

$$\|\mathcal{F}(t, \cdot, d)\|_{H^1(D_d)} \leq C \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-ta(d/2) \cosh s - \gamma|s|\} ds \leq \frac{C_2}{\gamma}.$$

Наблизимо інтеграл (2.36) за допомогою Сінс-квадратурної формули:

$$u_p(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(t, s) ds \approx \frac{h}{2\pi i} \sum_{k=-N}^N \mathcal{F}(t, kh) = u_{p,N}(t). \quad (2.38)$$

Далі знайдемо похибку цього наближення. Нехай

$$\begin{aligned} \eta(\mathcal{F}, h) &= u_p(t) - u_{p,\infty}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(t, s) ds - \frac{h}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(t, kh), \\ \eta_N(\mathcal{F}, h) &= u_p(t) - u_{p,N}(t). \end{aligned}$$

Тоді матимемо ( див. [3, 78])

$$\|\eta(\mathcal{F}, h)\| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-\pi d/h}}{2 \sinh \pi d/h} \|\mathcal{F}\|_{H^1(D_d)} \leq C_3 \frac{e^{-\pi d/h}}{\sinh \pi d/h}.$$

Використовуючи (2.37), легко отримати для  $\nu = 0$  і  $t > 0$

$$\begin{aligned} \|u_{p,\infty}(t) - u_{p,N}(t)\| &= \left\| \frac{h}{2\pi i} \sum_{|k|>N} \mathcal{F}(t, kh) \right\| \leq \frac{h}{\pi} \sum_{k=N+1}^{\infty} \|\mathcal{F}(t, kh)\| \leq \\ &\leq \frac{h}{\pi} \sum_{k=N+1}^{\infty} \exp\{-ta \cosh kh\} \leq \frac{1}{\pi} \int_{Nh}^{\infty} \exp\{-ta \cosh s\} ds = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\cosh Nh}^{\infty} \frac{\exp\{-tas\}}{\sqrt{s^2 - 1}} ds \leq \frac{1}{\pi \sqrt{\cosh^2 Nh - 1}} \int_{\cosh Nh}^{\infty} \exp\{-tas\} ds = \\ &= \frac{1}{ta\pi \sqrt{\cosh^2 Nh - 1}} \exp\{-ta \cosh Nh\}. \end{aligned}$$

З цих оцінок випливає нерівність

$$\begin{aligned} \|\eta_N(\mathcal{F}, h)\| &\leq \|\eta(\mathcal{F}, h)\| + \|u_{p,\infty}(t) - u_{p,N}(t)\| \leq \\ &\leq C_3 \frac{e^{-\pi d/h}}{\sinh \pi d/h} + \frac{1}{ta\pi \sqrt{\cosh^2 Nh - 1}} \exp\{-ta \cosh Nh\}. \end{aligned}$$

Для урівноваження експонент в обох доданках покладемо

$$h = \ln N/N, \quad (2.39)$$

ми отримаємо, що

$$\|\eta_N(\mathcal{F}, h)\| = O(\exp\{-cN/\ln N\}), \quad (2.40)$$

де  $c > 0$  і не залежить від  $N$ . Отже справедлива наступна теорема:

**Теорема 2.11** *Нехай  $A$  — щільно визначений сильно позитивний оператор,  $F(z)$  — перетворення Лапласа функції  $f(t)$  є секторіальна функція. Тоді наближення  $u_{p,N}(t)$  до розв'язку неоднорідної задачі Коші (2.25) є експоненціально збіжним (2.40) з  $h$ , визначеним в (2.39).*

**Зауваження 2.8** *Як і для однорідної задачі замість формули (2.38), можна використовувати формулу з половинною кількістю вузлів*

$$u_{p,N}(t) = \frac{h}{\pi} \sum_{k=1}^N \operatorname{Re}(\mathcal{F}(t, kh)) + \frac{h}{2\pi i} (\mathcal{F}(t, 0)).$$

#### 2.4.5 Чисельні розрахунки.

**Приклад 2.1** *Розглянемо наступну неоднорідну задачу для рівняння теплопровідності:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} &= (\pi^2 - 1) \sin(\pi x) \cos t, \\ u(0, x) &= \sin(\pi x), \\ u(t, 0) &= u(t, 1) = 0. \end{aligned}$$

*Точний розв'язок цієї задачі  $u(t, x) = \sin(\pi x) \cos t$ . Наближений розв'язок шукається на відрізку  $[0, 1]$  за допомогою (2.30) та (2.32). Результати обчислень подані в таблицях 2.1, 2.2. Похибка методу досліджується в точці  $t = 1$ . В першому стовпчику наведено кількість вузлів  $N$  квадратурної формули (2.32), в першому рядку наведено кількість вузлів Чебишева  $n$ , по яких будується інтерполяційний поліном.*

*З таблиць видно, що отримані апріорні оцінки точності підтверджуються. При цьому степінь інтерполяційного полінома достатньо вибрати не велику для отримання досить точного результату наближення.*

N \ n	4	6	8
4	0.05845377340	0.06047454820	0.06048858820
8	0.01418904650	0.01618838360	0.01620252610
16	0.00015065790	0.00185224120	0.00186636670
32	0.00195577380	0.00004722280	0.00006134360
64	0.00201667900	0.00001367650	$4.4455659932 * 10^{-7}$
128	—	0.00001417340	$5.1662654711 * 10^{-8}$
256	—	0.00001417260	$5.2193022320 * 10^{-8}$

Таблиця 2.1: Похибки обчислень до прикладу 2.1

**Приклад 2.2** Розглянемо наступну неоднорідну задачу для рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = f(t, x),$$

$$u(0, x) = 0,$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0.$$

Точний розв'язок цієї задачі  $u(t, x) = t^2 x(1-x)$ , при  $f(t, x) = 2tx(1-x) + 2t^2$ . Перетворення Лапласа від функції  $f(t, x)$  має вигляд  $F(z, x) = \frac{2}{z^2} x(1-x) + \frac{4}{z^3}$ . Наближений розв'язок шукається за допомогою формул (2.30) та (2.38). Результати обчислень подані в таблиці 2.3. В першому стовпчику наведено кількість вузлів  $N$ , в другому наведено похибки розрахунків за методом з [78], в третьому – похибка методу, розробленого в даному підрозділі.

Отже, у випадку, коли відоме перетворення Лапласа від правої частини рівняння (2.25), доцільно використовувати метод наведений в даному підрозділі, оскільки при однаковій кількості вузлів в квадратурних формулах даний алгоритм дає більш точний результат. Оскільки обидва методи приводять до послідовності еліптичних задач, це означає, що для заданої точності, потрібно менша кількість допоміжних стаціонарних задач.

N \ n	10	12	14
4	0.06048863976	0.06048863988	0.06048863988
8	0.01620257744	0.01620257756	0.01620257756
16	0.00186641821	0.00186641832	0.00186641832
32	0.00006139537	0.00006139548	0.00006139548
64	$4.966310421 * 10^{-7}$	$4.967494716 * 10^{-7}$	$4.967496553 * 10^{-7}$
128	$4.117861758 * 10^{-10}$	$5.302156347 * 10^{-10}$	$5.303993805 * 10^{-10}$
256	$1.185814354 * 10^{-10}$	$1.519765821 * 10^{-13}$	$3.176920910 * 10^{-14}$
512	$1.186134128 * 10^{-10}$	$1.839539645 * 10^{-13}$	$2.081733018 * 10^{-16}$

Таблица 2.2: Похибки обчислень до прикладу 2.1

N	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$
4	0.0885164885	0.00207393396286
8	0.0333322721	0.000049835
16	0.0014796706	$9.47188601398 * 10^{-8}$
32	0.0000872794	$2.895961054690 * 10^{-12}$
64	$3.725000177 * 10^{-7}$	$4.784073797613997 * 10^{-20}$
128	$5.1380375468 * 10^{-10}$	$5.62055083224 * 10^{-35}$

Таблица 2.3: Похибки обчислень до прикладу 2.2

## 2.5 Експоненціально збіжний метод для диференціального рівняння першого порядку з операторними коефіцієнтами, що має змінну область визначення в банаховому просторі

**2.5.1 Вступ.** В цьому розділі розглядається спеціальний клас параболічних рівнянь в частинних похідних з крайовими умовами, що залежать від часу, в абстрактній постановці, що може бути пов'язаний з диференціальним рівнянням першого порядку в банаховому просторі  $X$

$$\frac{du(t)}{dt} + A(t)u(t) = f(t), \quad u(0) = u_0. \quad (2.41)$$

Тут  $t$  – дійсна змінна, невідома функція  $u(t)$  і задана функція  $f(t)$  приймають значення в банаховому просторі  $X$ ,  $A(t)$  – задана операторно-значна функція, чії значення є щільно визначені, замкнуті лінійні оператори в  $X$  з областю визначення  $D(A, t)$ , що залежить від параметра  $t$ .

В деяких спеціальних випадках можливо перетворити задачу (2.41) до операторного диференціального рівняння, в якому операторний коефіцієнт  $\tilde{A}$  матиме область визначення  $D(\tilde{A})$ , незалежну від  $t$ . Наприклад розглянемо наступну задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \\ u_x(0, t) - \alpha(t)u(0, t) &= \phi_1(t), \quad u_x(1, t) + \beta(t)u(1, t) = \phi_2(t), \\ u(x, 0) &= u_0(x), \end{aligned} \quad (2.42)$$

де  $f$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  та  $u_0$  є заданими достатньо гладкими функціями. Ця задача відноситься до класу (2.41). Операторний коефіцієнт  $A$  має вигляд:

$$A(t)u = -u''(x) \quad \forall u \in D(A, t),$$

з областю визначення

$$D(A, t) = \{u(x) \in H^2(0, 1) : u'(0) - \alpha(t)u(0) = \phi_1(t), u'(1) + \beta(t)u(1) = \phi_2(t)\},$$



Підстановка (подібно [16])

$$u(x, t) = e^{r(x,t)}v(x, t) \quad (2.43)$$

з функцією  $r(x, t)$ , що задовольняє

$$r_x(0, t) + \alpha(t) = 0, \quad r_x(1, t) - \beta(t) = 0$$

(наприклад  $r(x, t) = -\alpha(t)x + \frac{1}{2}[\alpha(t) + \beta(t)]x^2$ ) перетворює (2.42) в

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2r_x(x, t)\frac{\partial v}{\partial x} + (r_{xx} - r_t)v + e^{-r(x,t)}f(x, t),$$

$$v_x(0, t) = e^{-r(0,t)}\phi_1(t), \quad v_x(1, t) = e^{-r(1,t)}\phi_2(t),$$

$$v(x, 0) = e^{-r(x,0)}u_0(x).$$

Новий операторний коефіцієнт  $\tilde{A}(t)$  визначається як

$$-\tilde{A}(t)u = v''(x) + 2r_x(x, t)v' + (r_{xx} - r_t)v \quad \forall v \in D(\tilde{A}, t),$$

$$D(\tilde{A}, t) = \left\{ v(x) \in H^2(0, 1) : v'(0) = e^{-r(0,t)}\phi_1(t), v'(1) = e^{-r(1,t)}\phi_2(t) \right\}.$$

Оператор  $\tilde{A}$  стає більш складним і тепер не є самоспряженим. Але у випадку однорідних крайових умов  $\phi_1(t) \equiv 0$ ,  $\phi_2(t) \equiv 0$ , згідно з підстановкою (2.43), ми отримуємо обмежений оператор  $R(t)$  у вигляді мультиплікативного оператора  $R(t) = e^{r(x,t)}$  такого що  $\tilde{A}(t) = [R(t)]^{-1}AR(t)$  має область визначення незалежну від  $t$ . При таких та деяких інших припущеннях в [16, 97] було показано, що початкова задача (2.42) має єдиний розв'язок. На жаль, нема конструктивного методу для знаходження такого оператора  $R(t)$  у загальному випадку.

Змінна область визначення оператора може бути описана додатковим рівнянням. Тоді ми отримаємо абстрактну задачу у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= A(t)u(t), \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \\ L(t)u(t) &= \Phi(t)u(t) + f(t), \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \\ u(s) &= u_0, \end{aligned} \quad (2.44)$$

замість (2.41). Тут  $L(t)$  та  $\Phi(t)$  є відповідні лінійні оператори, що визначені на границі просторової області. Друге рівняння є абстрактною моделлю залежної від часу крайової умови. Результати про існування та єдиність для цієї задачі були досліджені в [98]. Включаючи крайову умову у визначення операторного коефіцієнта першого рівняння ми отримуємо задачу (2.41).

Література, що стосується таких задач в абстрактній постановці досить нечисельна (див. напр. [99], де використовується різницева апроксимація Ейлера першого порядку точності для задачі (2.41) з областю визначення залежною від часу та літературу там цитовану).

Використання класичного інтегралу Дюамеля разом з дискретизацією високого порядку точності для двовимірного рівняння теплопровідності з крайовими умовами, що залежать від часу було розглянуто в [100]. Очевидно, що дискретизація (по  $t$ ) у випадку області визначення, що залежить від часу є більш складною чим у випадку незалежної від  $t$  області визначення  $D(A)$ , оскільки потрібно додатково перевіряти належність  $y_k = y(t_k) \in D(A, t_k)$  наближеного розв'язку  $y_k$  в кожній точці дискретизації  $t_k$ .

В цьому розділі ми розглянемо задачу

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} + A(t)u(t) &= f(t), \\ \partial_1 u(t) + \partial_0(t)u(t) &= g(t), \\ u(0) &= u_0, \end{aligned} \tag{2.45}$$

де  $u(t)$  – невідома функція  $u : (0, T) \rightarrow D(A) \subset X$  зі значеннями в банаховому просторі  $X$ ,  $f(t)$  є заданою вимірною функцією  $f : (0, T) \rightarrow X$  з  $L_q(0, T; X)$  з нормою  $\|f\| = \{\int_0^T \|f\|_X^q dt\}^{1/q}$ ,  $A(t) : D(A) \rightarrow X$  є щільно заданим, замкнутим оператором в  $X$  з областю визначення  $D(A)$ , що не залежить від  $t$ ,  $g : (0, T) \rightarrow Y$  – задана функція з  $L_q(0, T; Y)$  зі значеннями в деякому іншому банаховому просторі  $Y$ .  $\partial_1 : D(A) \rightarrow Y$  (не залежить від  $t$ !),  $\partial_0(t) : D(A) \rightarrow Y$  (може залежати від  $t$ ) – лінійні оператори. В прикладних застосуваннях друге рівняння – просто крайова умова, залежна від часу, з

відповідними операторами  $\partial_1$ ,  $\partial_0$ , що діють на границі просторової області (див. підрозд. 2.5.6 для прикладів). Тому ми називаємо це рівняння абстрактною залежною від часу крайовою умовою.

Включивши крайову умову у визначення операторного коефіцієнта в першому рівнянні, ми отримуємо задачу типу (2.41) з операторним коефіцієнтом зі змінною областю визначення. Труднощі, пов'язані з дискретизацією цієї задачі, наведені вище, були розглянуті в [99]. Розділення цих умов в (2.45) дозволяє нам нижче використати інтеграл Дюамеля, щоб звести задачу до іншої, яка містить оператори з областями визначення, що не залежать від  $t$ .

**2.5.2 Метод типу Дюамеля для диференціального рівняння першого порядку в банаховому просторі.** В цьому підрозділі ми розглянемо окремий випадок задачі (2.45):

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} + Au(t) &= f(t), \\ \partial_1 u(t) + \partial_0(t)u(t) &= g(t), \quad u(0) = u_0, \end{aligned} \tag{2.46}$$

де оператор  $A$  та область його визначення  $D(A)$  в деякому банаховому просторі  $X$  є незалежними від  $t$ ,  $f(t)$  – задана вимірною функцією  $f : (0, T) \rightarrow X$  з простору  $L_q(0, T; X)$  з нормою  $\|f\| = \{\int_0^T \|f\|_X^q dt\}^{1/q}$ ,  $g : (0, T) \rightarrow Y$  – задана функція з  $L_q(0, T; Y)$  зі значеннями у деякому іншому банаховому просторі  $Y$ .  $\partial_1 : D(A) \rightarrow Y$  (незалежна від  $t$ ),  $\partial_0(t) : D(A) \rightarrow Y$  (може залежати від  $t$ ) – лінійні оператори.

Запишемо зображення розв'язку у вигляді:

$$u(t) = w(t) + v(t), \tag{2.47}$$

де  $v$  та  $w$  є розв'язками таких задач

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} + Av &= f(t), \\ \partial_1 v &= 0, \quad v(0) = u_0, \end{aligned} \tag{2.48}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dw(t)}{dt} + Aw &= 0, \\
\partial_1 w(t) &= -\partial_0(t)u(t) + g(t), \\
w(0) &= 0,
\end{aligned}
\tag{2.49}$$

відповідно. Вводячи оператор  $A^{(1)} : D(A^{(1)}) \rightarrow X$ , незалежний від  $t$ , наступним чином:

$$\begin{aligned}
A^{(1)}u &= Au \quad \forall u \in D(A^{(1)}), \\
D(A^{(1)}) &= \{u \in D(A) : \partial_1 u = 0\},
\end{aligned}
\tag{2.50}$$

ми можемо переписати задачу (2.48) у вигляді

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dt} + A^{(1)}v &= f(t), \\
v(0) &= u_0.
\end{aligned}
\tag{2.51}$$

Припустимо, що оператор  $A$  є таким, що оператор  $A^{(1)}$  – сильно позитивний, замкнений (див. підрозд. 1.10 або [67, 78, 101]) ( $m$ -секторіальний у розумінні [90]).

Тоді, при деяких припущеннях відносно  $f(t)$ , розв'язок задачі (2.51) може бути зображений у вигляді (див. [15])

$$v(t) = e^{-A^{(1)}t}u_0 + \int_0^t e^{-A^{(1)}(t-\tau)}f(\tau)d\tau.
\tag{2.52}$$

Відмітимо, що задача (2.51) з сильно позитивним оператором  $A^{(1)}$  може бути розв'язана чисельно за допомогою експоненціально збіжного методу з [3].

Повертаючись до (2.49), введемо додаткову функцію  $W(\lambda, t)$ , що є розв'язком задачі

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W(\lambda, t)}{\partial t} + AW(\lambda, t) &= 0, \\
\partial_1 W(\lambda, t) &= -\partial_0(\lambda)u(\lambda) + g(\lambda), \\
W(\lambda, 0) &= 0,
\end{aligned}
\tag{2.53}$$

де абстрактна крайова умова тепер не залежить від  $t$ . Наступна теорема дає зображення розв'язку задачі (2.49) через функцію  $W$  за допомогою інтегралу Дюамеля.

**Теорема 2.12** *Розв'язок задачі (2.49) може бути зображений через розв'язок задачі (2.53) з  $t$ -незалежною крайовою умовою за допомогою Інтегралу Дюамеля у вигляді:*

$$w(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t W(\lambda, t - \lambda) d\lambda = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} W(\lambda, t - \lambda) d\lambda. \quad (2.54)$$

Доведення. Покажемо, що функція (2.54) задовольняє (2.49). Очевидно, що початкова умова  $w(0) = 0$  виконується. Згідно з першого зображення в (2.54) і (2.53), ми маємо

$$\begin{aligned} \partial_1 w(t) &= \frac{d}{dt} \int_0^t \partial_1 W(\lambda, t - \lambda) d\lambda = \frac{d}{dt} \int_0^t [-\partial_0(\lambda)u(\lambda) + g(\lambda)] d\lambda = \\ &= -\partial_0(t)u(t) + g(t); \end{aligned}$$

тобто крайова умова  $\partial_1 w(t) = -\partial_0(t)u(t) + g(t)$  також задовольняється. Згідно з другим зображенням в (2.54) ми отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{dw(t)}{dt} + Aw(t) &= \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} W(\lambda, t - \lambda) d\lambda + Aw(t) = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} W(\lambda, t - \lambda) \Big|_{\lambda=t} + \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial t^2} W(\lambda, t - \lambda) d\lambda + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} AW(\lambda, t - \lambda) d\lambda \\ &= -AW(\lambda, t - \lambda) \Big|_{\lambda=t} + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial}{\partial t} W(\lambda, t - \lambda) + AW(\lambda, t - \lambda) \right] d\lambda = 0; \end{aligned}$$

тобто перше рівняння в (2.49) виконується. Теорема доведена. ■

Щоб зробити крайову умову в (2.53) однорідною та незалежною від  $t$ , ми введемо оператор  $B : Y \rightarrow D(A)$  наступним чином:

$$A(By) = 0, \quad \partial_1 By = y; \quad (2.55)$$

тобто,  $\partial_1 B$  – проєктор на  $Y$ .

**Зауваження 2.9** Щоб показати існування оператора  $B$ , покладемо  $Bu = v$ . Тоді задача (2.55) є еквівалентною задачі

$$Av = 0, \quad \partial_1 v = y.$$

Припустимо, що існує оператор  $E : Y \rightarrow D(A)$  такий, що  $\partial_1 E y = y$  (відмінний від  $E(t)$  з [99]). Існування цього оператора для випадку коли  $A$  є еліптичним показано в [102, section 5.4, Theorem 5.4.5]. Введемо  $v_1 = v - E y \in D(A)$ , а тоді

$$Av_1 = -A E y, \quad \partial_1 v_1 = 0.$$

Беручи до уваги (2.50), ми отримуємо задачу

$$A^{(1)} v_1 = -A E y,$$

яка має розв'язок, бо оператор  $A^{(1)}$  – сильно позитивний. Отже,

$$B = (I - [A^{(1)}]^{-1} A) E.$$

Зробимо заміну функції

$$W(\lambda, t) = B[-\partial_0(\lambda)u(\lambda) + g(\lambda)] + W_1(\lambda, t). \quad (2.56)$$

Тоді для залежної змінної ми маємо задачу

$$\frac{\partial W_1(\lambda, t)}{\partial t} + A W_1(\lambda, t) = 0,$$

$$\partial_1 W_1(\lambda, t) = 0,$$

$$W_1(\lambda, 0) = -B[-\partial_0(\lambda)u(\lambda) + g(\lambda)],$$

або еквівалентно

$$\frac{\partial W_1(\lambda, t)}{\partial t} + A^{(1)} W_1(\lambda, t) = 0,$$

$$W_1(\lambda, 0) = -B[-\partial_0(\lambda)u(\lambda) + g(\lambda)].$$

Використовуюючи операторну експоненту, розв'язок цієї задачі можна подати у вигляді

$$W_1(\lambda, t) = -e^{-A^{(1)}t} B[-\partial_0(\lambda)u(\lambda) + g(\lambda)]. \quad (2.57)$$

Беручи до уваги підстановку (2.56) і останнє зображення, ми отримаємо

$$W(\lambda, t) = -[e^{-A^{(1)}t} - I]B[-\partial_0(\lambda)u(\lambda) + g(\lambda)], \quad (2.58)$$

де  $I : X \rightarrow X$  – одиничний оператор. Згідно до (2.47), (2.54) та (2.58), ми приходимо до зображення

$$\begin{aligned} u(t) &= v(t) + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t W(\lambda, t - \lambda) d\lambda = \\ &= v(t) - \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \left\{ e^{-A^{(1)}(t-\lambda)} B[-\partial_0(\lambda)u(\lambda) + g(\lambda)] \right\} d\lambda, \end{aligned} \quad (2.59)$$

і далі до наступного інтегрального рівняння:

$$\partial_0(t)u(t) = \partial_0(t) \left( v(t) - \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \left\{ e^{-A^{(1)}(t-\lambda)} B[-\partial_0(\lambda)u(\lambda) + g(\lambda)] \right\} d\lambda \right). \quad (2.60)$$

Останнє рівняння може також бути записане у вигляді

$$\partial_0(t)u(t) = \partial_0(t)v(t) + \partial_0(t) \int_0^t A^{(1)}e^{-A^{(1)}(t-\lambda)} B[-\partial_0(\lambda)u(\lambda) + g(\lambda)] d\lambda. \quad (2.61)$$

Після визначення  $\partial_0(t)u(t)$  з (2.61), ми можемо знайти розв'язок задачі (2.46) за допомогою (2.52), (2.59), використовуючи експоненціально збіжні методи для обчислення операторної експоненти з [3] та попередніх підрозділів.

Введемо операторне ядро  $K(t - \tau) = A^{(1)}e^{-A^{(1)}(t-\tau)}B$ , функції  $\theta(t) = \partial_0(t)u(t)$  і  $F(t) = \partial_0(t)v(t) + \partial_0(t) \int_0^t A^{(1)}e^{-A^{(1)}(t-\lambda)}Bg(\lambda)d\lambda$ , і оператор  $V : L_q(0, T; D(A)) \rightarrow L_q(0, T; Y)$ , що визначається

$$V(t)y(\cdot) = \partial_0(t) \int_0^t K(t - \lambda)y(\lambda)d\lambda. \quad (2.62)$$

Тоді (2.60) може бути записане у формі, придатній для застосування методу послідовних наближень до знаходження розв'язку рівняння

$$\theta(t) = V(t)\theta(\cdot) + F(t). \quad (2.63)$$

### 2.5.3 Існування та єдиність розв'язку інтегрального рівняння.

Для того, щоб довести існування та єдиність розв'язку для еквівалентних рівнянь (2.60), (2.61) та (2.63), ми зробимо наступні припущення (див. підрозд. 2.5.6 для прикладів):

**(A1)** Існує додатна стала  $c$  така, що

$$\|\partial_0(t)\|_{X \rightarrow Y} \leq c \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.64)$$

**(A2)** Для деякого  $p \geq 1$  виконується

$$\left[ \int_0^t \|A^{(1)} e^{-A^{(1)}(t-\lambda)} B\|_{Y \rightarrow X}^p d\lambda \right]^{1/p} \leq c \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.65)$$

**(A3)** Функція

$$\begin{aligned} F(t) &= \partial_0(t)v(t) - \partial_0(t) \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} e^{-A^{(1)}(t-\lambda)} Bg(\lambda) d\lambda = \\ &= \partial_0(t)v(t) + \partial_0(t) \int_0^t A^{(1)} e^{-A^{(1)}(t-\lambda)} Bg(\lambda) d\lambda : (0, T) \rightarrow Y \end{aligned}$$

Належить банаховому простору  $L_q(0, T; Y)$  і

$$\|F\|_{L_q(0, T; Y)} = \left\{ \int_0^T \|F(\tau)\|_Y^q d\tau \right\}^{1/q} \leq c,$$

де  $q \in$  таким, що  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , для  $p$  визначеного в **(A2)**. В цих припущеннях  $c$  позначає різні додатні сталі.

Визначимо послідовності

$$\theta_j(t) = V(t)\theta_{j-1}(\cdot) + F(t), \quad \delta_j(t) = \theta_j(t) - \theta^*(t), \quad (2.66)$$

де  $\theta^*(t)$  – точний розв'язок (2.63).

Тепер ми можемо довести наступну теорему.

**Теорема 2.13** *Нехай виконані умови **(A1)**–**(A3)**, тоді (2.60) (або еквівалентно (2.61), (2.63)) має єдиний розв'язок  $\theta^*(t) \in L_q(0, T; Y)$ . Цей розв'язок є границею послідовності  $\{\theta_j(t)\}$  з (2.66) з факторіальною збіжністю,*



тобто з оцінкою

$$\|\delta_j(t)\|_{L_q(0,T;Y)} \leq \left( \frac{c^{2jq}T^n}{j!} \right)^{1/q} \|\theta_0(t) - \theta^*(t)\|_{L_q(0,T;Y)}, \quad (2.67)$$

$c > 0$  не залежить від  $t$ ,  $j$ . Для розв'язку  $\theta^*(t) = \partial_0(t)u(t)$  виконується наступна оцінка стійкості:

$$\int_0^t \|\partial_0(\tau)u(\tau)\|_Y^q d\tau \leq 2^{q/p} \int_0^t \|F(\tau)\|_Y^q e^{2^{q/p}c^{2q}(t-\tau)} d\tau. \quad (2.68)$$

Доведення. Використовуючи нерівність Гьольдера та припущення (A1)–(A3), маємо

$$\begin{aligned} & \left( \int_0^t \|V^j(\tau_1)s(\cdot)\|_Y^q d\tau_1 \right)^{1/q} = \\ & = \left( \int_0^t \left\| \partial_0(\tau_1) \int_0^{\tau_1} K(\tau_1 - \tau_2)V^{j-1}(\tau_2)s(\cdot)d\tau_2 \right\|_Y^q d\tau_1 \right)^{1/q} \leq \\ & \leq c \left( \int_0^t \left( \int_0^{\tau_1} \|K(\tau_1 - \tau_2)\| \cdot \|V^{j-1}(\tau_2)s(\cdot)\|_Y d\tau_2 \right)^q d\tau_1 \right)^{1/q} \leq \\ & \leq c \left( \int_0^t \left( \int_0^{\tau_1} \|K(\tau_1 - \tau_2)\|^p d\tau_2 \right)^{q/p} \cdot \int_0^{\tau_1} \|V^{j-1}(\tau_2)s(\cdot)\|_Y^q d\tau_2 d\tau_1 \right)^{1/q} \leq \\ & \leq c^2 \left( \int_0^t \int_0^{\tau_1} \|V^{j-1}(\tau_2)s(\cdot)\|_Y^q d\tau_2 d\tau_1 \right)^{1/q} \leq \dots \leq \\ & \leq c^{2j} \left( \int_0^t \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_j} \|s(\tau_{j+1})\|_Y^q d\tau_{j+1} \dots d\tau_2 d\tau_1 \right)^{1/q} \leq \\ & \leq c^{2j} \left( \int_0^t \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_{j-1}} d\tau_j \dots d\tau_2 d\tau_1 \right)^{1/q} \left( \int_0^t \|s(\tau_{j+1})\|_Y^q d\tau_{j+1} \right)^{1/q} \leq \\ & \leq c^{2j} \left( \frac{t^j}{j!} \right)^{1/q} \left( \int_0^t \|s(\tau_{j+1})\|_Y^q d\tau_{j+1} \right)^{1/q} \quad \forall s(t) \in L_q(0, T; Y), \end{aligned}$$

що означає, що спектральний радіус оператора  $V : L_q(0, T; Y) \rightarrow L_q(0, T; Y)$  рівний нулеві. Тоді із загальної теорії інтегральних рівнянь Вольтера (див. напр. [103, 104]) випливає існування та єдиність розв'язку (2.60).

Використовуючи нерівність Гьольдера до рівняння до рівняння

$$\delta_j(t) = \partial_0(t) \int_0^t K(t - \lambda)\delta_{j-1}(\lambda)d\lambda,$$

аналогічно, як вище, ми виводимо, що

$$\begin{aligned} \left( \int_0^t \|\delta_j(\tau_1)\|^q d\tau_1 \right)^{1/q} &\leq c^2 \left( \int_0^t \int_0^{\tau_1} \|\delta_{j-1}(\tau_2)\|^q d\tau_2 d\tau_1 \right)^{1/q} \leq \dots \\ &\leq c^{2j} \left( \frac{t^j}{j!} \right)^{1/q} \left( \int_0^t \|\delta_0(\tau_{j+1})\|^q d\tau_{j+1} \right)^{1/q}, \end{aligned}$$

звідки випливає оцінка (2.67).

Далі покажемо стійкість розв'язку рівняння (2.60) по відношенню до правої частини. Використовуючи нерівність Гьольдера для інтегралів, звідси ми отримаємо

$$\begin{aligned} \left( \int_0^t \|\partial_0(\tau)u(\tau)\|_Y^q d\tau \right)^{1/q} &\leq \left( \int_0^t \|F(\tau)\|_Y^q d\tau \right)^{1/q} + \\ + \left\{ \int_0^t \left\| \partial_0(\tau) \int_0^\tau A^{(1)}e^{-A^{(1)}(\tau-\lambda)} B \partial_0(\lambda)u(\lambda) d\lambda \right\|_Y^q d\tau \right\}^{1/q} &\leq \left( \int_0^t \|F(\tau)\|_Y^q d\tau \right)^{1/q} \\ + \left\{ \int_0^t \|\partial_0(\tau)\|^q \left( \int_0^\tau \|A^{(1)}e^{-A^{(1)}(\tau-\lambda)} B\|_{Y \rightarrow X} \|\partial_0(\lambda)u(\lambda)\|_Y d\lambda \right)^q d\tau \right\}^{1/q}. \end{aligned}$$

Використовуючи умови (2.64) до останнього доданку а потім знову нерівність Гьольдера, ми отримаємо оцінку

$$\begin{aligned} \left( \int_0^t \|\partial_0(\tau)u(\tau)\|_Y^q d\tau \right)^{1/q} &\leq \left( \int_0^t \|F(\tau)\|_Y^q d\tau \right)^{1/q} + \\ + c \left\{ \int_0^t \left( \int_0^\tau \|A^{(1)}e^{-A^{(1)}(\tau-\lambda)} B\|_{Y \rightarrow X}^p d\lambda \right)^{q/p} \int_0^\tau \|\partial_0(\lambda)u(\lambda)\|_Y^q d\lambda d\tau \right\}^{1/q}. \end{aligned}$$

Згідно до (2.65), ми далі отримаємо

$$\begin{aligned} \left( \int_0^t \|\partial_0(\tau)u(\tau)\|_Y^q d\tau \right)^{1/q} &\leq \left( \int_0^t \|F(\tau)\|_Y^q d\tau \right)^{1/q} + \\ + c^2 \left\{ \int_0^t \int_0^\tau \|\partial_0(\lambda)u(\lambda)\|_Y^q d\lambda d\tau \right\}^{1/q}. \end{aligned}$$

Добре відома нерівність  $(a+b)^q \leq 2^{q/p}(a^q+b^q)$  та остання оцінка приводять до

$$\int_0^t \|\partial_0(\tau)u(\tau)\|_Y^q d\tau \leq 2^{q/p} \left[ \int_0^t \|F(\tau)\|_Y^q d\tau + c^{2q} \int_0^t \int_0^\tau \|\partial_0(\lambda)u(\lambda)\|_Y^q d\lambda d\tau \right].$$

Далі з леми Гронуола [9, 105] випливає (2.68). Доведення завершено. ■

Беручи розв'язок  $\theta^*(t) = \partial_0(t)u(t)$  інтегрального рівняння (2.60), задача (2.46) набирає вигляду

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} + Au(t) &= f(t), \\ \partial_1 u(t) &= g_1(t), \quad u(0) = u_0, \end{aligned}$$

з відомою функцією  $g_1(t) = \theta^*(t) + g(t)$ . Її розв'язок має вигляд (див. (2.59))

$$u(t) = v(t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \left\{ e^{-A^{(1)}(t-\lambda)} B g_1(\lambda) \right\} d\lambda.$$

Розв'язок може бути порахований з експоненціальною швидкістю за допомогою метода з [3, 4, 78].

**2.5.4 Узагальнення для випадку залежного від параметру оператора. Існування та єдиність розв'язку.** Нехай  $(X, \|\cdot\|)$ ,  $(\mathcal{W}, \|\cdot\|_{\mathcal{W}})$ ,  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  – три банахових простори і  $\mathcal{W} \subset X$ . Для кожного  $t \in [0, T]$  ми маємо щільно визначений замкнений лінійний необмежений оператор  $A(t) : \mathcal{W} \rightarrow X$  і лінійний обмежений оператор  $\partial_0(t) : \mathcal{W} \rightarrow Y$ . Припустимо, що область  $D(A(t)) = D(A) \subset \mathcal{W}$  не залежить від  $t$ .

Розглянемо задачу

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} + A(t)u(t) &= f(t), \\ \partial_1 u(t) + \partial_0(t)u(t) &= g(t), \quad t \in (0, T], \\ u(0) &= u_0, \end{aligned} \tag{2.69}$$

де  $u_0$  – заданий вектор,  $f(t)$  – задана векторно-значна функція і оператор  $\partial_0(t)$  – добуток двох операторів

$$\partial_0(t) = \mu(t)\partial_0, \tag{2.70}$$

з  $\partial_0 : D(A) \rightarrow Y$ ,  $\mu(t) : Y \rightarrow Y$ . Припустимо також, що задача (2.69) має єдиний розв'язок  $u(t)$  для всіх  $t \in (0, T)$  для вхідних даних  $f, g, u_0$  з множини, що включає елементи  $f = 0, g = 0, u_0 = 0$ .

Виберемо сітку  $\omega_n = \{t_k, k = 1, \dots, n\}$  з  $n$  різних точок на  $[0, T]$  і мно-  
жину

$$\bar{A}(t) = A_k = A(t_k), \bar{\mu}(t) = \mu_k = \mu(t_k), \quad t \in (t_{k-1}, t_k],$$

На кожному інтервалі  $(t_{k-1}, t_k]$  визначимо оператор  $A_k^{(2)}$  з областю визна-  
чення, що не залежить від  $t$ :

$$D(A_k^{(2)}) = \{u \in D(A) : \partial_1 u + \mu_k \partial_0 u = 0\}, A_k^{(2)} u = A_k u \quad \forall u \in D(A_k^{(2)})$$

і оператор  $B_k^{(1)} : Y \rightarrow D(A)$ :

$$A_k(B_k^{(1)} y) = 0, \quad (\partial_1 + \mu_k \partial_0) B_k^{(1)} y = y.$$

Для всіх  $t \in [0, T)$  визначимо оператори

$$\begin{aligned} A^{(2)}(t) &= A_k^{(2)}, \quad t \in (t_{k-1}, t_k], \\ B^{(1)}(t) &= B_k^{(1)}, \quad t \in (t_{k-1}, t_k], \quad \forall k = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{2.71}$$

(існування  $B_k^{(1)}$  може бути показано аналогічно до існування  $B$  з підрозді-  
лу 2.5.2).

Прийmemo наступні гіпотези (див. підрозд. 2.5.6 для прикладів):

**(B1)** Припустимо, що оператор  $A^{(2)}(t)$  є сильно позитивним.

Це припущення приводить до того, що існує додатна стала  $c$  і фіксоване  
 $\kappa$  такі, що (див. напр. [90, р. 103])

$$\|[A^{(2)}(t)]^\kappa e^{-sA^{(2)}(t)}\| \leq cs^{-\kappa}, \quad s > 0, \quad \kappa > 0.$$

**(B2)** Існує дійсне додатне  $\omega$  таке, що

$$\|e^{-sA^{(2)}(t)}\| \leq e^{-\omega s} \quad \forall s, t \in [0, T]$$

(див. [15, Corollary 3.8, р. 12] для відповідного припущення про  $A(t)$ ).

**(B3)**  $\exists c > 0$  :

$$\|[A^{(2)}(t) - A^{(2)}(s)][A^{(2)}(t)]^{-\gamma}\| \leq c|t - s| \quad \forall t, s, 0 \leq \gamma \leq 1;$$

(B4)  $\exists c > 0$  :

$$\| [A^{(2)}(t)]^\beta [A^{(2)}(s)]^{-\beta} - I \| \leq c |t - s| \quad \forall t, s \in [0, T], \quad \beta \in (0, 1).$$

(B5) Оператор  $\mu(t)\partial_0$  задовольняє наступні умови:

$$\| \mu(t) - \mu(t') \|_{Y \rightarrow Y} \leq M |t - t'|,$$

$$\| \partial_0 \|_{X \rightarrow Y} \leq c,$$

зі сталими  $M, c > 0$ .

(B6) Для деякого  $p \geq 1$  і  $\gamma \geq 0$  виконується

$$\left[ \int_0^t \| [A^{(2)}(\eta)]^{1+\gamma} e^{-A^{(2)}(\eta)(t-\lambda)} B^{(1)}(\eta) \|_{Y \rightarrow X}^p d\lambda \right]^{1/p} \leq c \quad \forall t, \eta \in [0, T].$$

Перепишемо задачу (2.69) в еквівалентній формі (предискретизації)

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + \bar{A}(t)u &= [\bar{A}(t) - A(t)]u(t) + f(t), \\ [\partial_1 + \bar{\mu}(t)\partial_0]u(t) &= -[\mu(t) - \bar{\mu}(t)]\partial_0 u(t) + g(t), \quad t \in [0, T], \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{2.72}$$

Відмітимо, що тепер всі оператори зліва цього рівняння є сталими на кожному підінтервалі і кусково-сталими на всьому інтервалі  $[0, T)$ .

З (2.72) аналогічно до (2.59), (2.61) виводимо, що

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-A_k^{(2)}(t-t_{k-1})} u(t_{k-1}) + \\ &+ \int_{t_{k-1}}^t e^{-A_k^{(2)}(t-\tau)} \{ [A_k - A(\tau)]u(\tau) + f(\tau) \} d\tau + \\ &+ \int_{t_{k-1}}^t A_k^{(2)} e^{-A_k^{(2)}(t-\lambda)} B_k^{(1)} \{ -[\mu(\lambda) - \mu_k] \partial_0 u(\lambda) + g(\lambda) \} d\lambda, \\ \partial_0 u(t) &= \partial_0 e^{-A_k^{(2)}(t-t_{k-1})} u(t_{k-1}) + \\ &+ \partial_0 \int_{t_{k-1}}^t e^{-A_k^{(2)}(t-\tau)} \{ [A_k - A(\tau)]u(\tau) + f(\tau) \} d\tau + \\ &+ \partial_0 \int_{t_{k-1}}^t A_k^{(2)} e^{-A_k^{(2)}(t-\lambda)} B_k^{(1)} \{ -[\mu(\lambda) - \mu_k] \partial_0 u(\lambda) + g(\lambda) \} d\lambda, \\ t &\in [t_{k-1}, t_k], \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{2.73}$$

Таким чином, за допомогою техніки типу Дюамеля, ми отримали систему двох інтегральних рівнянь по відношенню до невідомих функцій  $u(t)$  і  $\partial_0 u(t)$  яка є еквівалентною до (2.69). Ця система є відправною точкою для подальшого дослідження та чисельного методу.

Для доведення існування та єдиності розв'язку достатньо вибрати в вищенаведених системах  $n = 1$ ,  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = T$ ,  $\bar{A}(t) = A(0) = A$ , і  $\bar{\mu}(t) = \mu(T)$ . Додатково введемо вектори

$$\mathcal{U}(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U}_n(t) = \begin{pmatrix} u_n(t) \\ \theta_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F} = \begin{pmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{pmatrix}$$

і матриці

$$\mathcal{K}(t, \tau) = \begin{pmatrix} K_{11}(t, \tau) & K_{12}(t, \tau) \\ K_{21}(t, \tau) & K_{22}(t, \tau) \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \partial_0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E}_\gamma = \begin{pmatrix} [A^{(2)}]^\gamma & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

з

$$K_{11}(t, \tau) = K_{21}(t, \tau) = -e^{-A^{(2)}(t-\tau)}[A(\tau) - A],$$

$$K_{12}(t, \tau) = K_{22}(t, \tau) = -A^{(2)}e^{-A^{(2)}(t-\tau)}B^{(1)}(t)[\mu_k - \mu(\tau)],$$

$$F_1(t) = e^{-A^{(2)}t}u_0 + \int_0^t e^{-A^{(2)}(t-\tau)}f(\tau)d\tau +$$

$$+ \int_0^t A^{(2)}e^{-A^{(2)}(t-\lambda)}B^{(1)}g(\lambda)d\lambda, \quad F_2(t) = \partial_0 F_1(t).$$

Також введемо простір  $\mathcal{Y}$  векторів  $\mathcal{U} = (u, v)^T$  з нормою

$$\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{Y}} = \max\{\|u\|_{L_q(0,T;D([A^{(2)}]^\gamma))}, \|v\|_{L_q(0,T;Y)}\}, \quad (2.74)$$

і відповідно простір матриць  $\mathcal{K}(t, \tau)$  з нормою

$$\|\mathcal{K}\|_{\infty} = \max\{\|K_{1,1}\|_{X \rightarrow X} + \|K_{1,2}\|_{Y \rightarrow X}, \|K_{2,1}\|_{X \rightarrow X} + \|K_{2,2}\|_{Y \rightarrow X}\}, \quad (2.75)$$

що узгоджується з векторною нормою (2.74). Тепер система (2.73) з  $k = 1$ ,  $t_0 = 0, t_1 = T$  може бути записана у вигляді

$$\mathcal{U}(t) = \mathcal{D} \int_0^t \mathcal{K}(t, \tau) \mathcal{U}(\tau) d\tau + \mathcal{F}(t). \quad (2.76)$$

Метод послідовних наближень для системи (2.76) записується у вигляді

$$\mathcal{U}_{j+1}(t) = \mathcal{D} \int_0^t \mathcal{K}(t, \tau) \mathcal{U}_j(\tau) d\tau + \mathcal{F}(t), \quad j = 0, 1, \dots, \quad \mathcal{U}_0(t) = 0. \quad (2.77)$$

Оскільки оператори  $\mathcal{E}_\gamma$  і  $\mathcal{D}(t)$  комутують, отримаємо з (2.77), що

$$\mathcal{U}_{\gamma, j+1}(t) = \mathcal{D} \int_0^t \mathcal{E}_\gamma \mathcal{K}(t, \tau) \mathcal{E}_\gamma^{-1} \mathcal{U}_{\gamma, j}(\tau) d\tau + \mathcal{F}_\gamma(t), \quad j = 0, 1, \dots, \quad (2.78)$$

$$\mathcal{U}_0(t) = 0,$$

де  $\mathcal{U}_{\gamma, j}(t) = \mathcal{E}_\gamma \mathcal{U}_j(t)$  і  $\mathcal{F}_\gamma(t) = \mathcal{E}_\gamma \mathcal{F}(t)$ .

**Теорема 2.14** *Нехай виконуються умови (B1)–(B6). Тоді система рівнянь (2.73) має єдиний розв'язок  $\mathcal{U}_\gamma^*(t)$  в  $\mathcal{Y}$ . Цей розв'язок є границею послідовності  $\mathcal{U}_{\gamma, j}(t)$  з (2.78) і має факторіальну збіжність, що характеризується оцінкою*

$$\|\mathcal{U}_{\gamma, j}(t) - \mathcal{U}_\gamma^*(t)\|_{\mathcal{Y}} \leq \left( \frac{c^{2jq} T^j}{j!} \right)^{1/q} \|\mathcal{U}_{\gamma, 0}(t) - \mathcal{U}_\gamma^*(t)\|_{\mathcal{Y}}, \quad c > 0. \quad (2.79)$$

Для  $\mathcal{U}_\gamma^*(t)$  виконується оцінка стійкості

$$\int_0^t \|\mathcal{U}_\gamma^*(\tau)\|_{\mathcal{Y}}^q d\tau \leq 2^{q/p} \int_0^t \|\mathcal{F}(\tau)\|_{\mathcal{Y}}^q e^{2^{q/p} c^{2q}(t-\tau)} d\tau. \quad (2.80)$$

Доведення. Введемо лінійний оператор  $\mathcal{V}(t)$ :

$$\mathcal{V}(t) \mathcal{U}(\cdot) = \mathcal{D}(t) \int_0^t \mathcal{E}_\gamma \mathcal{K}(t, \tau) \mathcal{E}_\gamma^{-1} \mathcal{U}(\tau) d\tau.$$

Використовуючи припущення (B1) і (B3), ми отримаємо для елемента  $[\mathcal{E}_\gamma \mathcal{K} \mathcal{E}_\gamma^{-1}]_{1,1}$  матриці  $\mathcal{E}_\gamma \mathcal{K} \mathcal{E}_\gamma^{-1}$ :

$$\begin{aligned} \left\| [\mathcal{E}_\gamma \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) \mathcal{E}_\gamma^{-1}]_{1,1} \right\| &= \left\| \left[ A^{(2)} \right]^\gamma e^{-A^{(2)}(\tau_1 - \tau_2)} [A(\tau_2) - A] \left[ A^{(2)} \right]^{-\gamma} \right\| \leq \\ &\leq \left\| \left[ A^{(2)} \right]^\gamma e^{-A^{(2)}(\tau_1 - \tau_2)} \right\| \left\| [A(\tau_2) - A] \left[ A^{(2)} \right]^{-\gamma} \right\| \leq c^2 (\tau_1 - \tau_2)^{-\gamma} (T - \tau_2). \end{aligned}$$

Звідси слідує

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau_1} \left\| [\mathcal{E}_\gamma K(\tau_1, \tau_2) \mathcal{E}_\gamma^{-1}]_{1,1} \right\|^p d\tau_2 &\leq c^{2p} \int_0^{\tau_1} (\tau_1 - \tau_2)^{-\gamma p} (T - \tau_2)^p d\tau_2 \leq \\ &\leq c^{2p} \tau_1^{1-\gamma p} T^p \int_0^1 (1 - \eta)^{-\gamma p} d\eta = c^{2p} \tau_1^{1-\gamma p} \frac{T^p}{1 - \gamma p} \leq C^p, \end{aligned}$$

з деякою новою сталою  $C > 0$ . Цей вираз є обмеженням для  $\gamma p \in [0, 1)$ .

З (В6) випливає

$$\begin{aligned} &\left( \int_0^{\tau_1} \left\| [\mathcal{E}_\gamma K(\tau_1, \tau_2) \mathcal{E}_\gamma^{-1}]_{1,2} \right\|^p d\tau_2 \right)^{1/p} = \\ &= \left( \int_0^{\tau_1} \left\| [A^{(2)}]^{\gamma+1} e^{-A^{(2)}(\tau_1-\tau_2)} B^{(1)} \right\|^p d\tau_2 \right)^{1/p} \leq C, \\ &\left( \int_0^{\tau_1} \left\| [\mathcal{E}_\gamma K(\tau_1, \tau_2) \mathcal{E}_\gamma^{-1}]_{2,2} \right\|^p d\tau_2 \right)^{1/p} = \\ &= \left( \int_0^{\tau_1} \left\| A^{(2)} e^{-A^{(2)}(\tau_1-\tau_2)} B^{(1)} \right\|^p d\tau_2 \right)^{1/p} \leq C. \end{aligned}$$

використовуючи (В2) і (В3) маємо

$$\begin{aligned} &\left( \int_0^{\tau_1} \left\| [\mathcal{E}_\gamma K(\tau_1, \tau_2) \mathcal{E}_\gamma^{-1}]_{2,1} \right\|^p d\tau_2 \right)^{1/p} = \\ &= \left( \int_0^{\tau_1} \left\| e^{-A^{(2)}(\tau_1-\tau_2)} [A(\tau_2) - A] [A^{(2)}]^{-\gamma} \right\|^p d\tau_2 \right)^{1/p} \leq \\ &\leq \left( \int_0^{\tau_1} \left\| [A(\tau_2) - A] [A^{(2)}]^{-\gamma} \right\|^p d\tau_2 \right)^{1/p} \leq c \left( \int_0^{\tau_1} (T - \tau_2)^p d\tau_2 \right)^{1/p} \leq C. \end{aligned}$$

Тому

$$\left\| \mathcal{E}_\gamma K(\tau_1, \tau_2) \mathcal{E}_\gamma^{-1} \right\|_\infty \leq 2 \max_{i,j} \left\| [\mathcal{E}_\gamma K(\tau_1, \tau_2) \mathcal{E}_\gamma^{-1}]_{i,j} \right\| \leq C.$$

З припущення (В5) слідує

$$\|\mathcal{D}(\tau_1)\|_1 \leq \max \{1, \|\partial_0(\tau)\|\} \leq C.$$

Далі, використовуючи оцінки (2.5.4) і (2.5.4) ми отримаємо для  $n$ -го степеня оператора  $\mathcal{V}(t)$

$$\left( \int_0^t \left\| \mathcal{V}^j(\tau_1) s(\cdot) \right\|^q d\tau_1 \right)^{1/q} =$$



$$\begin{aligned}
&= \left( \int_0^t \left\| \mathcal{D}(\tau_1) \int_0^{\tau_1} \mathcal{E}_\gamma K(\tau_1, \tau_2) \mathcal{E}_\gamma^{-1} \mathcal{V}^{j-1}(\tau_2) s(\cdot) d\tau_2 \right\|^q d\tau_1 \right)^{1/q} \leq \\
&\leq \left( \int_0^t \|\mathcal{D}(\tau_1)\|_\infty^q \left( \int_0^{\tau_1} \|\mathcal{E}_\gamma K(\tau_1, \tau_2) \mathcal{E}_\gamma^{-1} \mathcal{V}^{j-1}(\tau_2) s(\cdot)\|_\infty d\tau_2 \right)^q d\tau_1 \right)^{1/q} \leq \\
&\leq C \left( \int_0^t \left( \int_0^{\tau_1} \|\mathcal{E}_\gamma K(\tau_1, \tau_2) \mathcal{E}_\gamma^{-1}\|_\infty \|\mathcal{V}^{j-1}(\tau_2) s(\cdot)\|_\infty d\tau_2 \right)^q d\tau_1 \right)^{1/q} \leq \\
&\leq C \left( \int_0^t \left( \int_0^{\tau_1} \|\mathcal{E}_\gamma K(\tau_1, \tau_2) \mathcal{E}_\gamma^{-1}\|_\infty^p d\tau_2 \right)^{q/p} \cdot \int_0^{\tau_1} \|\mathcal{V}^{j-1}(\tau_2) s(\cdot)\|_\infty^q d\tau_2 d\tau_1 \right)^{1/q} \leq \\
&\leq C^2 \left( \int_0^t \int_0^{\tau_1} \|\mathcal{V}^{j-1}(\tau_2) s(\cdot)\|_\infty^q d\tau_2 d\tau_1 \right)^{1/q} \leq \dots \\
&\leq C^{2j} \left( \int_0^t \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_j} \|s(\tau_{j+1})\|_\infty^q d\tau_{j+1} \dots d\tau_2 d\tau_1 \right)^{1/q} \leq \\
&\leq C^{2j} \left( \int_0^t \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_{j-1}} d\tau_j \dots d\tau_2 d\tau_1 \right)^{1/q} \left( \int_0^t \|s(\tau_{j+1})\|_\infty^q d\tau_{j+1} \right)^{1/q} \leq \\
&\leq C^{2j} \left( \frac{t^j}{j!} \right)^{1/q} \left( \int_0^t \|s(\tau_{j+1})\|_\infty^q d\tau_{j+1} \right)^{1/q} \quad \forall s(t) \in \mathcal{Y}.
\end{aligned}$$

Для різниці

$$\Delta_j(t) = \mathcal{U}_j(t) - \mathcal{U}^*(t)$$

між  $j$ -ю ітерацією та точним розв'язком, ми маємо рівність

$$\Delta_j(t) = \mathcal{D}(t) \int_0^t \mathcal{E}_\gamma K(t, \tau) \mathcal{E}_\gamma^{-1} \Delta_{j-1}(\tau) d\tau.$$

Використовуючи нерівність Гьольдера, як і вище, отримаємо

$$\begin{aligned}
\left( \int_0^t \|\Delta_j(\tau_1)\|_\infty^q d\tau_1 \right)^{1/q} &\leq c^2 \left( \int_0^t \int_0^{\tau_1} \|\Delta_{j-1}(\tau_2)\|_\infty^q d\tau_2 d\tau_1 \right)^{1/q} \leq \dots \\
&\leq c^{2j} \left( \frac{t^j}{j!} \right)^{1/q} \left( \int_0^t \|\Delta_0(\tau_{j+1})\|_\infty^q d\tau_{j+1} \right)^{1/q},
\end{aligned}$$

для якої слідує факторіальна збіжність (2.79).

Насамкінець, покажемо стійкість розв'язку (2.75) по відношенню до правої частини. Використовуючи нерівність Гьольдера до інтегралів, отримаємо

$$\left( \int_0^t \|\mathcal{U}_\gamma(\tau)\|_\infty^q d\tau \right)^{1/q} \leq \left( \int_0^t \|\mathcal{F}(\tau)\|_\infty^q d\tau \right)^{1/q} +$$

$$+ \left\{ \int_0^t \left\| \mathcal{D}(\tau_1) \int_0^{\tau_1} \mathcal{E}_\gamma K(\tau_1, \tau_2) \mathcal{E}_\gamma^{-1} \mathcal{U}_\gamma(\tau_2) d\tau_2 \right\|_\infty^q d\tau_1 \right\}^{1/q}.$$

Далі, беручи до уваги оцінку, як і вище, отримуємо

$$\begin{aligned} \left( \int_0^t \|\mathcal{U}_\gamma(\tau)\|_\infty^q d\tau \right)^{1/q} &\leq c^2 \left( \int_0^t \int_0^{\tau_1} \|\mathcal{U}_\gamma(\tau_2)\|_\infty^q d\tau_2 d\tau_1 \right)^{1/q} + \\ &+ \left( \int_0^t \|\mathcal{F}(\tau)\|_\infty^q d\tau \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Ця оцінка разом з нерівністю  $(a + b)^q \leq 2^{q/p}(a^q + b^q)$  приводить до

$$\int_0^t \|\mathcal{U}_\gamma(\tau)\|_\infty^q d\tau \leq 2^{q/p} \left[ c^{2q} \int_0^t \int_0^{\tau_1} \|\mathcal{U}_\gamma(\tau_2)\|_\infty^q d\tau_2 d\tau_1 + \int_0^t \|\mathcal{F}(\tau)\|_\infty^q d\tau \right].$$

Тепер з леми Гронуола слідує (2.80).

Доведення завершено. ■

**2.5.5 Чисельний алгоритм та оцінки точності.** Для побудови дискретного наближення (2.73) використаємо інтерполяцію по вузлах Чебишева на відрізку  $[-1, 1]$  (якщо це на іншому відрізку, то можна звести задачу (2.69) до нього заміною змінної  $t = 2t'/T - 1$ ,  $t \in [-1, 1]$ ,  $t' \in [0, T]$ ). Виберемо сітку  $\omega_n = \{t_k = -\cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}, k = 1, \dots, n\}$  на  $[-1, 1]$  з  $n$  нулів ортогональних поліномів Чебишева  $T_n(t)$  і покладемо  $\tau_k = t_k - t_{k-1}$ . Добре відомо, що (див. [92, Гл. 6, Теорема 6.11.12], [106, ст. 123])

$$\begin{aligned} t_{\nu+1} - t_\nu &< \frac{\pi}{n}, \quad \nu = 1, \dots, n, \\ \tau = \tau_{max} &= \max_{1 \leq k \leq n} \tau_k < \frac{\pi}{n}. \end{aligned} \tag{2.81}$$

Нехай

$$\begin{aligned} P_{n-1}(t; u) &= P_{n-1}u = \sum_{j=1}^n u(t_j) L_{j,n-1}(t), \\ P_{n-1}(t; \partial_0 u) &= P_{n-1}(\partial_0 u) = \sum_{j=1}^n \partial_0 u(t_j) L_{j,n-1}(t) \end{aligned} \tag{2.82}$$

є інтерполяційними поліномами Лагранжа для  $u(t)$  і  $\partial_0 u(t)$  на сітці  $\omega_n$ , де  $L_{j,n-1} = \frac{T_n(t)}{T'_n(t_j)(t-t_j)}$ ,  $j = 1, \dots, n$  – фундаментальні поліноми Лагранжа. Для заданого вектора  $v = (v_1, \dots, v_n)$  введемо інтерполяційний поліном

$$P_{n-1}(t; v) = P_{n-1}y = \sum_{j=1}^n v_j L_{j,n-1}(t), \quad (2.83)$$

так, що  $P_{n-1}(t_j; v) = v_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Нехай  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  і  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  – вектори-наближення для  $U = (u(t_1), u(t_2), \dots, u(t_n))$  and  $\partial U = (\partial_0 u(t_1), \partial_0 u(t_2), \dots, \partial_0 u(t_n))$  відповідно, тобто  $x_k$  наближає  $u(t_k)$ , а  $y_k$  наближає  $\partial_0 u(t_k)$ . Підставляючи  $P_{n-1}(\eta; x)$  замість  $u(\eta)$ ,  $P_{n-1}(\eta; y)$  замість  $\partial_0 u(\lambda)$ , а потім покладаючи  $t = t_k$  в (2.73), ми приходимо до наступної системи лінійних рівнянь відносно невідомих  $x_k, y_k$ :

$$\begin{aligned} x_k &= e^{-A_k^{(2)} \tau_k} x_{k-1} + \sum_{j=1}^n \alpha_{kj} x_j + \sum_{j=1}^n \beta_{kj} y_j + \phi_k, \\ y_k &= \partial_0 e^{-A_k^{(2)} \tau_k} x_{k-1} + \partial_0 \sum_{j=1}^n \alpha_{kj} x_j + \partial_0 \sum_{j=1}^n \beta_{kj} y_j + \partial_0 \phi_k, \\ k &= 1, \dots, n, \quad x_0 = u_0, \quad y_0 = \partial_0 u_0, \end{aligned} \quad (2.84)$$

яка представляє наш метод. Тут ми використали позначення

$$\begin{aligned} \alpha_{kj} &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-A_k^{(2)}(t_k-\eta)} [A_k - A(\eta)] L_{j,n-1}(\eta) d\eta, \\ \beta_{kj} &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} A_k^{(2)} e^{-A_k^{(2)}(t_k-\lambda)} B_k^{(1)} [\mu(\lambda) - \mu_k] L_{j,n-1}(\lambda) d\lambda, \\ \phi_k &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-A_k^{(2)}(t_k-\eta)} f(\eta) d\eta + \int_{t_{k-1}}^{t_k} A_k^{(2)} e^{-A_k^{(2)}(t_k-\lambda)} B_k^{(1)} g(\lambda) d\lambda. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Далі, для спрощення, ми проаналізуємо цей метод для випадку задачі (2.69), де оператор  $A(t)$  не залежить від  $t$ , тобто,  $A(t) \equiv A$ . Тоді ми маємо

$\alpha_{kj} = 0$ , а система (2.84) набуває вигляд

$$\begin{aligned} x_k &= e^{-A_k^{(2)}\tau_k}x_{k-1} + \sum_{j=1}^n \beta_{kj}y_j + \phi_k, \\ y_k &= \partial_0 e^{-A_k^{(2)}\tau_k}x_{k-1} + \partial_0 \sum_{j=1}^n \beta_{kj}y_j + \partial_0 \phi_k, \\ k &= 1, \dots, n, \quad x_0 = u_0, \quad y_0 = \partial_0 u_0. \end{aligned} \quad (2.86)$$

**Зауваження 2.10** Якщо  $f(t), \mu(t), g(t)$  – поліноми, то обчислення операторів  $\beta_{kj}$  та елементів  $\phi_k$  може бути зведене до обчислення інтегралів виду  $I_s = \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-A_k^{(2)}(t_k-\lambda)} \lambda^s d\lambda$ , що знаходяться за допомогою простого рекурентного алгоритму:  $I_l = -l[A_k^{(2)}]^{-1}I_{l-1} + [A_k^{(2)}]^{-1}(t_k^l I - t_{k-1}^l e^{-A_k^{(2)}\tau_k})$ ,  $l = 1, 2, \dots, s$ ,  $I_0 = [A_k^{(2)}]^{-1}(I - e^{-A_k^{(2)}\tau_k})$ , де операторні експоненти обчислюються за допомогою експоненціально збіжного методу з [3].

Для похибок  $z_x = (z_{x,1}, \dots, z_{x,n})$ ,  $z_y = (z_{y,1}, \dots, z_{y,n})$ , де  $z_{x,k} = u(t_k) - x_k$  і  $z_{y,k} = \partial_0 u(t_k) - y_k$ , ми маємо співвідношення

$$\begin{aligned} z_{x,k} &= e^{-A_k\tau_k}z_{x,k-1} + \sum_{j=1}^n \beta_{kj}z_{y,j} + \psi_{y,k}, \\ z_{y,k} &= \partial_0 e^{-A_k\tau_k}z_{y,k-1} + \partial_0 \sum_{j=1}^n \beta_{kj}z_{y,j} + \partial_0 \psi_{y,k}, \\ k &= 1, \dots, n, \quad z_{x,0} = 0, \quad z_{y,0} = 0, \end{aligned} \quad (2.87)$$

де

$$\psi_{y,k} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} A_k^{(2)} e^{-A_k^{(2)}(t_k-\eta)} B_k^{(1)} [\mu_k - \mu(\eta)] [\partial_0 u(\eta) - P_n(\eta; \partial_0 u)] d\eta. \quad (2.88)$$

Для представлення методу (2.84) в матрично-блочному вигляді, введемо

матрицю

$$S = \{s_{i,k}\}_{i,k=1}^n = \begin{pmatrix} E_X & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -e^{-A_2^{(2)}\tau_2} & E_X & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-A_3^{(2)}\tau_3} & E_X & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -e^{-A_n^{(2)}\tau_n} & E_X \end{pmatrix},$$

де  $E_X$  – одиничний оператор в  $X$ , матрицю  $D = \{\beta_{k,j}\}_{k,j=1}^n$ , і вектори

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \quad f_x = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_n \end{pmatrix}, \quad \tilde{f}_x = \begin{pmatrix} e^{-A_1^{(2)}\tau_1}u_0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_y = \begin{pmatrix} \psi_{y,1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi_{y,n} \end{pmatrix}, \quad (2.89)$$

$$f_y = \begin{pmatrix} \partial_0\phi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \partial_0\phi_n \end{pmatrix}, \quad \tilde{f}_y = \begin{pmatrix} \partial_0 e^{-A_1^{(2)}\tau_1}u_0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_y^{(0)} = \begin{pmatrix} \partial_0\psi_{y,1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \partial_0\psi_{y,n} \end{pmatrix}.$$

Легко перевірити, що для (лівої) оберненої матриці

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} E_X & 0 & \dots & 0 & 0 \\ s_1 & E_X & \dots & 0 & 0 \\ s_2 s_1 & s_2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ s_{n-1} \dots s_1 & s_{n-1} \dots s_2 & \dots & s_{n-1} & E_X \end{pmatrix}, \quad (2.90)$$

де  $s_k = -e^{-A_{k+1}^{(2)}\tau_{k+1}}$ , виконується

$$S^{-1}S = \begin{pmatrix} E_X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E_X & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & E_X \end{pmatrix}. \quad (2.91)$$

**Зауваження 2.11** Використовуючи результати з [4, 7, 78], можна отримати паралельну розріджену апроксимацію з експоненціальною збіжністю операторних експонент, що містяться в  $S^{-1}$  і, як наслідок, паралельну розріджену апроксимацію матриці  $S^{-1}$ .

Перше і друге рівняння в (2.84) може бути записане в матричному вигляді як

$$\begin{aligned} Sx &= Dy + f_x + \tilde{f}_x, \\ y &= \Lambda[(I_X - S)x + Dy + f_x + \tilde{f}_x], \end{aligned} \quad (2.92)$$

де

$$\Lambda = \text{diag}[\partial_0, \dots, \partial_0], \quad I_X = \text{diag}(E_X, \dots, E_X). \quad (2.93)$$

Похибки  $z_x, z_y$  задовольняють рівняння

$$\begin{aligned} Sz_x &= Dz_y + \psi_y, \\ z_y &= \Lambda[(I_X - S)z_x + Dz_y + \psi_y]. \end{aligned} \quad (2.94)$$

З другого рівняння в (2.92) і другого рівняння в (2.94) ми отримуємо

$$\begin{aligned} [I_Y - \Lambda D]y &= \Lambda[(I_X - S)x + f_x + \tilde{f}_x], \\ [I_Y - \Lambda D]z_y &= \Lambda[(I_X - S)z_x + \psi_y], \end{aligned} \quad (2.95)$$

де  $I_Y = \text{diag}(E_Y, \dots, E_Y)$  і  $E_Y$  – одиничні оператори в  $Y$ .

Для вектора  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$  і блочно-операторної матриці  $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$  введемо векторну норму

$$\| \|v\| \| \equiv \| \|v\| \|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} \|v_k\|, \quad (2.96)$$

і узгоджену матричну норму

$$\| \|A\| \| \equiv \| \|A\| \|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n \|a_{i,j}\|. \quad (2.97)$$

Для подальшого аналізу нам потрібен наступний допоміжний результат.

**Лема 2.3** *Якщо виконуються припущення (B1)–(B6), то справедливі оцінки:*

$$\begin{aligned} \| \|S^{-1}\| \| &\leq n, \\ \| \|D\| \| &\leq cn^{-(1+1/q)} \ln n, \quad 1/p + 1/q = 1, \\ \| \|\Lambda\| \| &\leq c, \end{aligned} \quad (2.98)$$

з додатною сталою  $c$ , незалежною від  $n$ .

*Доведення.* З припущення (B2) випливає

$$\| \|S^{-1}\| \| \leq 1 + e^{-\omega\tau} + \dots + e^{-\omega\tau(n-1)} \leq n. \quad (2.99)$$

Для матриці  $D$  маємо з (B6)

$$\begin{aligned} \| \|D\| \| &\leq \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^n \| \beta_{kj} \| = \\ &= \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^n \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} A_k^{(2)} e^{-A_k^{(2)}(t_k-\tau)} B_k^{(1)} [\mu(t_k) - \mu(\tau)] L_{j,n-1}(\tau) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \max_{1 \leq k \leq n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \| A_k^{(2)} e^{-A_k^{(2)}(t_k-\tau)} B_k^{(1)} \| \| \mu(t_k) - \mu(\tau) \| \sum_{j=1}^n |L_{j,n-1}(\tau)| d\tau \leq \\ &\leq c\Lambda_n(t_k - t_{k-1}) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \| A_k^{(2)} e^{-A_k^{(2)}(t_k-\tau)} B_k^{(1)} \| d\tau \leq cn^{-(1+1/q)} \ln n, \end{aligned}$$

де  $\Lambda_n = \max_{-1 \leq \tau \leq 1} \sum_{j=1}^n |L_{j,n-1}(\tau)|$  – стала Лебега, що відноситься до інтерполяційних вузлів Чебишева.

Остання оцінка в (2.98) є простим наслідком припущення (B5). Лема доведена.  $\blacksquare$

Згідно з (2.98), для  $n$  достатньо великого, існує обернена матриця  $(I_Y - \Lambda D)^{-1}$ , яка є обмежена сталою  $c > 0$ , незалежною від  $n$ , тобто

$$\| (I_Y - \Lambda D)^{-1} \| \leq c. \quad (2.100)$$

Таким чином, ми отримаємо з (2.95)

$$\begin{aligned} y &= [I_Y - \Lambda D]^{-1} \Lambda \left[ (I_X - S)x + f_x + \tilde{f}_x \right], \\ z_y &= [I_Y - \Lambda D]^{-1} \Lambda \left[ (I_X - S)z_x + \psi_y \right]. \end{aligned} \quad (2.101)$$

Підставляючи ці вирази в перше рівняння в (2.92) і (2.94), відповідно, ми отримаємо

$$\begin{aligned} Gx &= Q(f_x + \tilde{f}_x), \\ Gz_x &= Q\psi_y, \end{aligned} \quad (2.102)$$

де

$$\begin{aligned} G &= S - D[I_Y - \Lambda D]^{-1} \Lambda (I_X - S), \\ Q &= D[I_Y - \Lambda D]^{-1} \Lambda + I_X. \end{aligned}$$

Справедлива лема:

**Лема 2.4** *Якщо виконуються припущення лемми 2.3, то існує  $G^{-1}$  і оцінки*

$$\| G^{-1} \| \leq cn, \quad \| Q \| \leq c,$$

*з деякою додатною сталою, незалежною від  $n$ .*

*Доведення.* Представимо  $G = S[I_X - G_1]$  з  $G_1 = S^{-1}D[I_Y - \Lambda D]^{-1}\Lambda(I_X - S)$  і оцінимо  $\| G_1 \|$ . Маємо

$$\| G_1 \| \leq \| S^{-1} \| \cdot \| D \| \cdot \| (I_Y - \Lambda D)^{-1} \| \cdot \| \Lambda \| \cdot \| I_X - S \|,$$

тепер з лемми 2.3 випливає, що

$$\| G_1 \| \leq n n^{-(1+1/q)} c \ln n = c \frac{\ln n}{n^{1/q}}. \quad (2.103)$$



Ця оцінка гарантує існування обмеженого оберненого оператора  $(I_X - G_1)^{-1}$ , що разом з оцінкою  $\|S^{-1}\| \leq n$  доводить перше твердження леми. Друге твердження є очевидним. Доведення завершено. ■

Ця лема і (2.102) приводять до оцінки стійкості:

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq cn \|f_x + \tilde{f}_x\|, \\ \|z_x\| &\leq cn \|\tilde{\psi}_y\|. \end{aligned} \quad (2.104)$$

Підставляючи оцінки (2.104) в (2.101), та беручи до уваги оцінки  $\|I_X - S\| \leq c$ ,  $\|\Lambda\| \leq c$  як і (2.100), отримаємо

$$\begin{aligned} \|y\| &\leq cn \|f_x + \tilde{f}_x\|, \\ \|z_y\| &\leq cn \|\psi_y\|. \end{aligned} \quad (2.105)$$

**Зауваження 2.12** *Ми звели довжину інтервалу до  $T = 2$ , але в загальному стала  $c > 0$  залежить від довжини  $T$ .*

Нехай  $\Pi_{n-1}$  – множина поліномів по  $t$  степені менше або рівне  $n - 1$  з векторними коефіцієнтами. Повністю аналогічно до [92, 106, 107], наступна нерівність для сталої Лебега для векторно-значних функцій може бути показана (див. також підрозд. 1.2):

$$\|u(\eta) - P_{n-1}(\eta; u)\|_{C[-1,1]} \equiv \max_{\eta \in [-1,1]} \|u(\eta) - P_{n-1}(\eta; u)\| \leq (1 + \Lambda_n) E_n(u),$$

з похибкою найкращого наближення  $u$  поліномами степені не більше ніж  $n - 1$

$$E_n(u) = \inf_{p \in \Pi_{n-1}} \max_{\eta \in [-1,1]} \|u(\eta) - p(\eta)\|.$$

Тепер ми можемо перейти до основного результату цього розділу.

**Теорема 2.15** *Нехай виконуються припущення леми 2.3. Тоді існує додатна стала  $c$  така, що*

1. для  $n$  достатньо великого виконується

$$\begin{aligned} \|z_x\| &\leq cn^{-1/q} \cdot \ln n \cdot E_n(\partial_0 u), \\ \|z_y\| &\leq cn^{-1/q} \cdot \ln n \cdot E_n(\partial_0 u), \end{aligned} \quad (2.106)$$

де  $u$  – розв’язок (2.69);

2. Перше рівняння в (2.102) може бути записане у вигляді

$$x = G_1 x + S^{-1} Q(f_x + \tilde{f}_x)$$

і наближено розв’язано за допомогою послідовних наближень

$$x^{(k+1)} = G_1 x^{(k)} + S^{-1} Q(f_x + \tilde{f}_x), \quad k = 0, 1, \dots; \quad x^{(0)} - \text{довільне}$$

з швидкістю геометричної прогресії зі знаменником  $q \leq c \frac{\ln n}{n^{1/q}} < 1$  для  $n$  достатньо великого.

Доведення. Використовуючи (B6), норма  $\psi_y$  може бути оцінена наступним чином:

$$\begin{aligned} \|\psi_y\| &= \max_{1 \leq k \leq n} \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} A_k^{(2)} e^{-A_k^{(2)}(t_k - \eta)} B_k^{(1)} [\mu_k - \mu(\eta)] [\theta(\eta) - P_n(\eta; \theta)] d\eta \right| \leq \\ &\leq c \|\theta(\cdot) - P_n(\cdot; \theta)\|_{C[-1,1]} \max_{1 \leq k \leq n} (t_k - t_{k-1})^{1+1/q} \leq \\ &\leq c n^{-(1+1/q)} (1 + \Lambda_n) E_n(\theta) \leq c n^{-(1+1/q)} \cdot \ln n \cdot E_n(\theta). \end{aligned}$$

Перше твердження теореми слідує з (2.104) і (2.105), а друге – з (2.103).

■

**Зауваження 2.13** Припускаючи що векторно-значна функція  $\partial_0 u(t)$  має аналітичне продовження з відрізка  $[-1, 1]$  в область  $\mathcal{D}_\rho$ , обмежену еліпсом Бернштейна  $\mathcal{E}_\rho$  (див. підрозд. 1.2) з фокусами в  $z = \pm 1$  та сумою півосей  $\rho > 1$ , отримуємо

$$E_n(\partial_0 u) \leq \frac{\rho^{-n}}{1 - \rho} \sup_{z \in \mathcal{D}_\rho} \|\partial_0 u(z)\|,$$

що разом з (2.106) показує експоненціальну швидкість збіжності з оцінкою (2.106).

**Зауваження 2.14** Для еліптичного оператора  $A$  та його дискретного аналога  $A_h$  (а саме,  $A_h$  – скінченно-елементне або скінченно-різницеве наближення (матриця), що відповідає  $A$ ), виконується (див. напр. [90])

$$\|(zI - A)^{-1}\|_{X \rightarrow X} \leq \frac{1}{|z| \sin(\theta_1 - \theta)} \quad \forall z \in \mathbb{C} : \theta_1 \leq |\arg z| \leq \pi, \quad (2.107)$$

для довільного  $\theta_1 \in (\theta, \pi)$ , де  $\cos \theta = \delta_0/C$ , тобто, обидва є сильно позитивними. Заміняючи  $A$  на  $A_h$  в (2.69), а потім застосовуючи дискретизацію по часу, описану вище, ми прийдемо до повністю дискретизованої задачі (2.46). Оскільки обмеження (2.107) на матрицю резольвенти  $A_h$  виконується рівномірно на кроці сітки  $h$ , повна похибка є сумою похибок по часу та простору, то вона може контролюватися незалежно одна від одної.

**2.5.6 Приклади.** В цьому підрозділі покажемо, що багато прикладних параболічних задач з залежними від часу крайовими умовами можуть бути записані в абстрактній постановці. Основна мета тут проілюструвати припущення з підрозділів 2.5.3 і 2.5.4.

Прикладом задачі типу (2.41) є

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \\ u(0, t) &= 0, \quad \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} + b(t)u(1, t) = g(t), \\ u(x, 0) &= u_0(x), \end{aligned} \quad (2.108)$$

де оператор  $A : D(A) \in X \rightarrow X$ ,  $X = L_q(0, 1)$  – визначений як

$$D(A) = \{v \in W_q^2(0, 1) : v(0) = 0\}, \quad Av = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

оператори  $\partial_1 : D(A) \rightarrow Y$  і  $\partial_0(t) : D(A) \rightarrow Y$ ,  $Y = \mathbb{R}$  мають вигляд

$$\partial_1 u = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=1}, \quad \partial_0(t)u = b(t) \cdot u(x, t)|_{x=1},$$

а  $g(t) \in L_q(0, T; Y) = L_q(0, T)$ .

Зобразимо розв'язок (2.108) у вигляді (порівн. з (2.48), (2.49))

$$u(x, t) = w(x, t) + v(x, t), \quad (2.109)$$

де функція  $v(x, t)$  – розв'язок задачі

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x, t), \\ v(0, t) &= 0, \quad \frac{\partial v(1, t)}{\partial x} = 0, \\ v(x, 0) &= u_0(x) \end{aligned} \quad (2.110)$$

а  $w(x, t)$  задовольняє

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ w(0, t) &= 0, \quad \frac{\partial w(1, t)}{\partial x} = -b(t)u(1, t) + g(t), \\ w(x, 0) &= 0. \end{aligned} \quad (2.111)$$

Вводячи оператор  $A^{(1)} : D(A^{(1)}) \rightarrow X$ :

$$D(A^{(1)}) = \{u \in W_q^2(0, 1) : u(0) = 0, u'(1) = 0\} = \{u \in D(A) : u'(1) = 0\},$$

$$A^{(1)}u = -\frac{d^2u}{dx^2} \quad \forall u \in D(A^{(1)})$$

(див. (2.50) в абстрактній постановці), ми можемо записати задачу (2.110)

також у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} + A^{(1)}v &= f(t), \\ v(0) &= u_0, \end{aligned} \quad (2.112)$$

розв'язок якої

$$v(t) = e^{-A^{(1)}t}u_0 + \int_0^t e^{-A^{(1)}(t-\tau)}f(\tau)d\tau. \quad (2.113)$$

Щоб розв'язати (2.111), використаємо інтеграл Дюамеля. Для цього введемо

додаткову функцію  $W(x, \lambda, t)$ , що задовольняє рівняння (порівн. з (2.54)):

$$\frac{\partial W(x, \lambda, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 W(x, \lambda, t)}{\partial x^2},$$

$$W(0, \lambda, t) = 0, \quad \frac{\partial W(1, \lambda, t)}{\partial x} = -b(\lambda)u(1, \lambda) + g(\lambda), \quad (2.114)$$

$$W(x, \lambda, 0) = 0$$

з незалежною від часу крайовою умовою. Тоді розв'язок задачі (2.111) можна подати у вигляді (див. теорему 2.12)

$$w(x, t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} W(x, \lambda, t - \lambda) d\lambda. \quad (2.115)$$

Використовуючи це зображення, можна отримати інтегральне рівняння відносно  $u(1, t)$ . А саме, ми маємо

$$\begin{aligned} w(1, t) = u(1, t) - v(1, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t W(1, \lambda, t - \lambda) d\lambda = \\ &= \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} W(1, \lambda, t - \lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

Підстановка

$$W(x, \lambda, t) = B[-b(\lambda)u(1, \lambda) + g(\lambda)] + W_1(x, \lambda, t)$$

приводить до наступної задачі з однорідними крайовими умовами для  $W_1(x, \lambda, t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_1(x, \lambda, t)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 W_1(x, \lambda, t)}{\partial x^2}, \\ W_1(0, \lambda, t) &= 0, \quad \frac{\partial W_1(1, \lambda, t)}{\partial x} = 0, \\ W_1(x, \lambda, 0) &= -B[-b(\lambda)u(1, \lambda) + g(\lambda)], \end{aligned}$$

де оператор  $B$  має вигляд

$$B[-b(\lambda)u(1, \lambda) + g(\lambda)] = x[-b(\lambda)u(1, \lambda) + g(\lambda)]. \quad (2.116)$$

Методом розділення змінних ми отримуємо розв'язок цієї задачі точно у вигляді

$$W_1(x, \lambda, t) = -2[-b(\lambda)u(1, \lambda) + g(\lambda)] \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left[ \frac{2}{(2n-1)\pi} \right]^2 e^{-[\pi(2n-1)/2]^2 t} \sin \left[ \frac{\pi}{2}(2n-1)x \right].$$

Згідно до (2.116) граничне інтегральну рівняння (2.60) (або еквівалентно (2.63)) для прикладу (2.108) набуде вигляду

$$b(t)u(1, t) = b(t)v(1, t) + b(t) \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} W_1(1, \lambda, t - \lambda) d\lambda = b(t)v(1, t) - \\ - b(t) \int_0^t K(t - \lambda)g(\lambda) d\lambda + b(t) \int_0^t K(t - \lambda)b(\lambda)u(1, \lambda) d\lambda, \quad (2.117)$$

з

$$K(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-[\pi(2n-1)/2]^2 t}.$$

**Зауваження 2.15** Відмітимо, що в цьому конкретному випадку ми зобразити інтегрант через ядро  $K(t - \lambda)$  аналітично. В загальному випадку можна використати експоненціально збіжний метод для операторної експоненти [3].

Далі проілюструємо теорему 2.13 для задачі (2.108). Легко бачити, що умова (A1) задовольняється, оскільки

$$|b(t)| \leq c \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.118)$$

Покажемо, що існує  $p$ , для якого виконується припущення (A2). Маємо

$$\int_0^t \|A^{(1)} e^{-A^{(1)}(t-\lambda)} B\|_{Y \rightarrow X}^p d\lambda = \int_0^t [K(t - \lambda)]^p d\lambda = \\ = \int_0^t \left[ 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi(2n-1)}{2}\right)^2 (t-\lambda)} \right]^p d\lambda. \quad (2.119)$$

Використовуючи нерівність Гьольдера, ядро  $K(t - \lambda)$  можна оцінити як

$$\begin{aligned}
K(t - \lambda) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi(2n-1)}{2}\right)^2(t-\lambda)} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)^\alpha \frac{e^{-\left(\frac{\pi(2n-1)}{2}\right)^2(t-\lambda)}}{(2n-1)^\alpha} \leq \\
&\leq 2 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)^{p\alpha} e^{-p\left(\frac{\pi(2n-1)}{2}\right)^2(t-\lambda)} \right\}^{1/p} \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^{q\alpha}} \right\}^{1/q},
\end{aligned} \tag{2.120}$$

де  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

Підставляючи цю нерівність в (2.119), отримаємо

$$\begin{aligned}
\int_0^t [K(t - \lambda)]^p d\lambda &\leq \frac{2^{p+1}}{p\pi^2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^{q\alpha}} \right\}^{p/q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-p\left(\frac{\pi(2n-1)}{2}\right)^2 t}}{(2n-1)^{2-p\alpha}} \leq \\
&\leq \frac{2^{p+1}}{p\pi^2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^{q\alpha}} \right\}^{p/q} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^{2-p\alpha}}.
\end{aligned} \tag{2.121}$$

Ряди обмежені константою  $c > 0$  якщо

$$\begin{cases} q\alpha > 1, \\ 2 - p\alpha > 1, \end{cases} \tag{2.122}$$

або  $\frac{1}{q} < \alpha < \frac{1}{p}$ . Таким чином, ми можемо вибрати довільне  $p \in [1, 2)$ , а потім  $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$  і вибір довільного  $\alpha$  з інтервалу  $(1 - \frac{1}{p}, \frac{1}{p})$  забезпечить виконання припущення (A2).

Припущення (A3) для задачі (2.108) має вигляд

$$\left\{ \int_0^T \left| b(t)v(1, t) - b(t) \int_0^t K(t - \lambda)g(\lambda)d\lambda \right|^q dt \right\}^{1/q} \leq c. \tag{2.123}$$

Якщо  $K(t - \cdot) \in L_p(0, T)$ , ця нерівність вірна якщо

$$g(t) \in L_q(0, T), \quad v(1, t) \in L_q(0, T). \tag{2.124}$$

Згідно оцінці

$$\left( \int_0^T |v(1, t)|^q dt \right)^{1/q} = \left( \int_0^T \left| \int_0^1 \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} dx \right|^q dt \right)^{1/q} \leq$$

$$\leq \left( \int_0^T \int_0^1 \left| \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right|^q dx dt \right)^{1/q},$$

умова  $v(1, t) \in L_q(0, T)$  задовольняється, якщо останній інтеграл існує. Відповідні достатні умови на вхідні дані  $f(x, t)$ ,  $u_0(x)$  задачі (2.108) можна знайти в [15, 108].

Беручи розв'язок задачі (2.117), задача (2.108) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + Au &= f(t), \\ u(0) &= u_0, \quad \partial_1 u = g_1(t), \end{aligned} \quad (2.125)$$

з відомою функцією  $g_1(t) = g(t) - \partial_0(t)u(t)$ . Використовуючи зображення за допомогою інтеграла Дюамеля (2.115), маємо

$$u(t) = v(t) - \int_0^t A^{(1)} e^{-A^{(1)}(t-\lambda)} B g_1(\lambda) d\lambda. \quad (2.126)$$

Далі покажемо, що припущення (B1)–(B6) виконуються для наступної модельної задачі виду (2.41):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - q(x,t)u + f(x,t), \\ u(0,t) &= 0, \quad \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} + b(t)u(1,t) = g(t), \\ u(x,0) &= u_0(x). \end{aligned} \quad (2.127)$$

З результатів [108, розд. 4, параграф 9, ст. 388] випливає, що ця задача має єдиний розв'язок  $u \in W_q^{2,1}(Q_T)$ , якщо  $q(x,t)$ ,  $f(x,t) \in L_q(Q_T)$ ,  $Q_T = (0, 1) \times (0, T)$ ,  $g(t) \in W_q^{1-1/(2q)}(0, T)$ ,  $b(t) \in W_q^{1/2}(0, T)$ ,  $u_0 \in W_q^{2-\frac{2}{q}}(0, 1)$ ,  $q > 3/2$ , а також виконуються умови узгодженості крайових та початкових даних.

Тут оператор  $A(t) : D(A) \in X \rightarrow X$ ,  $X = L_q(0, 1)$  визначається як

$$\begin{aligned} D(A(t)) &= \{v \in W_q^2(0, 1) : v(0) = 0\}, \\ A(t)v &= -\frac{d^2 v(x)}{dx^2} + q(x,t)v(x), \end{aligned} \quad (2.128)$$

оператори  $\partial_1 : D(A) \rightarrow Y$  і  $\partial_0(t) : D(A) \rightarrow Y$ ,  $Y = \mathbb{R}$  мають вигляд

$$\partial_1 u = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=1}, \quad \partial_0(t)u = b(t) \cdot u(x,t) \Big|_{x=1},$$



і  $g(t) \in L_q(0, T; Y) = L_q(0, T)$ . Припустимо, що функція  $b(t)$  задовольняє умову (2.118), тому припущення (B5) вірне.

Кусково-сталий оператор  $A^{(2)}(t)$  з (2.71) визначений на кожному підінтервалі  $[t_{k-1}, t_k]$  як

$$D(A^{(2)}(t)) = \{v \in W_q^2(0, 1) : v(0) = 0, \quad v'(1) + \mu_k v(1) = 0\}, \quad \mu_k = b(t_k),$$

$$A_k v = -\frac{d^2 v(x)}{dx^2} + q(x, t_k) v(x),$$

а оператор  $B_k^{(1)}$  як

$$B_k^{(1)} z = \frac{x}{\mu_k + 1} z, \quad z \in Y.$$

Припущення (B1)–(B2) виконуються згідно результатів з [90], а припущення (B3)–(B4) очевидні. Залишилось перевірити припущення (B6). Нехай  $(\lambda_j^{(k)}, e_j^{(k)})$ ,  $j = 1, 2, \dots$  – система власних пар оператора  $A^{(2)}(t)$ ,  $t \in [t_{k-1}, t_k]$ .

Тоді ми маємо

$$\int_0^t \|[A^{(2)}]^{1+\gamma} e^{-A^{(2)}(t-\lambda)} B^{(1)}\|_{Y \rightarrow X}^p d\lambda = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} [K_\gamma^{(k)}(t-\lambda)]^p d\lambda, \quad (2.129)$$

де

$$K_\gamma^{(k)}(t-\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} [\lambda_j^{(k)}]^\gamma e^{-\lambda_j^{(k)}(t-\lambda)}.$$

Використовуючи добре відому асимптотику  $c_L j^2 \leq \lambda_j \leq c_U j^2$  (див. напр. [109]) та нерівність Гьольдера, ядро  $K_\gamma^{(k)}(t-\lambda)$  можна оцінити наступним чином:

$$\begin{aligned} K_\gamma^{(k)}(t-\lambda) &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\lambda_j^{(k)}\right)^\gamma e^{-\lambda_j^{(k)}(t-\lambda)} \leq c_U^\gamma \sum_{j=1}^{\infty} j^{2\gamma} e^{-c_L j^2(t-\lambda)} = \\ &= c_U^\gamma \sum_{n=1}^{\infty} j^{2\gamma+\alpha} e^{-c_L j^2(t-\lambda)} \frac{1}{j^\alpha} \leq \\ &\leq c_U^\gamma \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} j^{p(\alpha+2\gamma)} e^{-pc_L j^2(t-\lambda)} \right\}^{1/p} \cdot \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{q\alpha}} \right\}^{1/q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned}$$

Підставляючи цю нерівність в (2.129), отримаємо

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} [K_\gamma^{(k)}(t-\lambda)]^p d\lambda &\leq \sum_{k=1}^n c_U^\gamma \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sum_{j=1}^{\infty} j^{p(\alpha+2\gamma)} e^{-pc_L j^2(t-\lambda)} d\lambda \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{q\alpha}} \right\}^{p/q} = \\ &= c_U^\gamma \sum_{j=1}^{\infty} j^{p(\alpha+2\gamma)} (pc_L j^2)^{-1} [1 - e^{-pc_L j^2 t}] \cdot \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{q\alpha}} \right\}^{p/q} \leq \\ &\leq \frac{c_U^\gamma}{pc_L} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{2-p(\alpha+2\gamma)}} \cdot \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{q\alpha}} \right\}^{p/q}. \end{aligned}$$

Ряд залишається обмеженим, якщо

$$\begin{cases} q\alpha > 1, \\ 2 - p(\alpha + 2\gamma) > 1, \end{cases}$$

або  $\frac{1}{q} < \alpha < \frac{1}{p} - 2\gamma$ . Таким чином, ми можемо вибрати довільне  $p \in [1, 2)$ , потім  $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$  і припущення (В6) буде виконуватись з довільним  $\gamma$  з інтервалу  $[0, \frac{1}{p} - \frac{1}{2})$ .

**2.5.7 Чисельні розрахунки.** В цьому підрозділі покажемо на конкретному прикладі, що метод (2.84) забезпечує експоненціальну швидкість збіжності по відношенню до дискретизації по часу, яка описана в теоремі 2.15. Щоб уникнути вплив інших похибок (від дискретизації по простору, наближення операторної експоненти та інтегралів в (2.85)), ми виконуємо обчислення коефіцієнтів в (2.86) точно, використовуючи систему Maple.

Розглянемо модельну задачу (2.108) з

$$u_0(x) = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \sin \frac{\pi}{4} x, \quad b(t) = \frac{\pi}{4} \exp\left(\frac{\pi^2}{16} t\right), \quad g(t) = 1 + \exp\left(-\frac{\pi^2}{16} t\right),$$

для якої метод (2.84) полягає в розв'язанні тільки другого рівняння, де  $\alpha_{kj} = 0$ .

Точний розв'язок задачі є

$$u(x, t) = \exp\left(-\frac{\pi^2}{16} t\right) \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \sin \frac{\pi}{4} x.$$

Для функції  $v(x, t)$  з (2.110) маємо задачу:

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2}, \quad v(0, t) = 0, \quad \frac{\partial v(1, t)}{\partial x} = 0,$$

$$v(x, 0) = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \sin \frac{\pi}{4} x.$$

Легко перевірити, що

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 32}{\pi^2 (4k-1)(4k-3)} e^{-\left(\frac{\pi(2k-1)}{2}\right)^2 t} \sin \left( \frac{\pi}{2} (2k-1)x \right).$$

Рівняння (2.117) можна записати також у вигляді:

$$\begin{aligned} u(1, t) &= v(1, t) + 2 \int_0^t \left[ 1 + e^{-\frac{\pi^2}{16}\tau} \right] \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi(2k-1)}{2}\right)^2 (t-\tau)} d\tau - \\ &\quad - 2 \int_0^t \frac{\pi}{4} e^{\frac{\pi^2}{16}\tau} u(1, \tau) \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi(2k-1)}{2}\right)^2 (t-\tau)} d\tau = \\ &= f(t) - \frac{\pi}{2} \int_0^t e^{\frac{\pi^2}{16}\tau} u(1, \tau) \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi(2k-1)}{2}\right)^2 (t-\tau)} d\tau, \end{aligned} \quad (2.130)$$

де

$$\begin{aligned} f(t) &= v(1, t) - 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi(2k-1)}{2}\right)^2 t} \left[ \frac{1}{\left(\frac{\pi(2k-1)}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{\pi(2k-1)}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{16}} \right] + 1 + \\ &\quad + \frac{4}{\pi} e^{-\frac{\pi^2}{16}t} = -\frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\left(\frac{\pi(2k-1)}{2}\right)^2 t}}{(2k-1)^2} + 1 + \frac{4}{\pi} e^{-\frac{\pi^2}{16}t}. \end{aligned}$$

Щоб звести задачу до проміжку  $[-1, 1]$ , зробимо заміну змінної  $t$  в (2.130)

$$t = \frac{s+1}{2}T, \quad s \in [-1, 1]; \quad \tau = \frac{\xi+1}{2}T, \quad \xi \in [-1, s]; \quad d\tau = \frac{T}{2}d\xi$$

і отримаємо

$$\begin{aligned} u \left( 1, \frac{s+1}{2}T \right) &= f \left( \frac{s+1}{2}T \right) - \\ &\quad - \frac{\pi T}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-1}^s e^{\frac{\pi^2}{16} \frac{\xi+1}{2}T} u \left( 1, \frac{\xi+1}{2}T \right) e^{-\left(\frac{\pi(2k-1)}{2}\right)^2 \frac{T}{2}(s-\xi)} d\xi. \end{aligned}$$

Відмітимо, що це рівняння є, фактично, явною формою операторного рівняння (2.121) з точно порахованими інтегралами, що містять операторну експоненту.

Підставляючи відповідні інтерполяційні поліноми і коллокуючи отримані рівняння в точках

$$s_l = \cos \left[ \frac{2l-1}{2n} \pi \right], \quad l = \overline{1, n},$$

аналогічно до (2.86), ми отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно  $y_j \approx u(1, t_j)$ , де обчислення значень  $\beta_{kj}$  і  $\partial_0 \phi_k$  зводиться до знаходження інтегралів типу  $\int_{-1}^s e^{-a(s-\tau)} \tau^n d\tau$  і може бути виконане точно. Обчислення проводилися за допомогою Maple. Для випадків  $n = 2, 3, 4, 8$  використовувався параметр Digits=20, а параметр Digits=40 – для випадку  $n = 16$ . Результати обчислень, представлені в таблицях 2.4–2.7 підтверджують апріорно отримані оцінки.

Point $t$	$\varepsilon$
0.8535533905	0.64328761e-2
0.1464466094	0.1817083e-2

Таблиця 2.4: Похибка у випадку  $n = 2$ ,  $T = 1$ .

Point $t$	$\varepsilon$
0.9619397662	0.11818295e-4
0.6913417161	0.98439031e-5
0.3086582838	0.71990794e-5
0.0380602337	0.18751078e-5

Таблиця 2.5: Похибка у випадку  $n = 4$ ,  $T = 1$ .

Point $t$	$\varepsilon$
0.9903926402	0.23186560e-11
0.9157348061	0.26419501e-11
0.7777851165	0.2614635e-11
0.5975451610	0.2367290e-11
0.4024548389	0.2059591e-11
0.2222148834	0.1600175e-11
0.0842651938	0.1298227e-11
0.0096073597	0.3285404e-12

Таблиця 2.6: Похибка у випадку  $n = 8$ ,  $T = 1$ .

Point $t$	$\varepsilon$
0.9975923633	0.25187858260140e-26
0.9784701678	0.17507671148106e-26
0.9409606321	0.26606504614832e-26
0.8865052266	0.19216415631333e-26
0.8171966420	0.14389447843978e-26
0.7356983684	0.8729247130003e-27
0.6451423386	0.12250410788313e-26
0.5490085701	0.20057933602212e-26
0.4509914298	0.27443715793522e-26
0.3548576613	0.2071356401636e-26
0.2643016315	0.1352407675441e-26
0.1828033579	0.4176006046401e-26
0.1134947733	0.5890397288154e-26
0.0590393678	0.49643071858013e-25
0.0215298321	0.4614912514700e-26
0.0024076366	0.12497053453746e-25

Таблиця 2.7: Похибка у випадку  $n = 16$ ,  $T = 1$ .

## РОЗДІЛ 3

### Методи без насичення точності для нелокальних задач для рівняння першого порядку з необмеженими операторними коефіцієнтами

#### 3.1 Експоненціально збіжний метод наближення розв'язку $m$ -точкової нелокальної задачі Коші

Головною метою цього підрозділу є побудова експоненціально збіжного методу чисельного наближення розв'язку нелокальної задачі Коші вигляду

$$\begin{aligned} u'_t + Au &= f(t), \quad t \in (0, T] \\ u(0) + \sum_{k=1}^n \alpha_k u(t_k) &= u_0, \quad 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq T. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Будемо припускати, що  $A$  — щільно визначений сильно-позитивний оператор, що діє в банаховому просторі  $X \supseteq D(A) \rightarrow X$  [110], з спектром розміщеним у секторі  $\Sigma$  (1.28) з параметрами  $a_0, \varphi$ , причому для резольвенти  $R(z, A)$  на границі спектру  $\Gamma_\Sigma$  та поза нею виконується нерівність (1.29).

Відповідно до результатів теореми Хілле–Йосіди–Філліпса [110] визначені таким чином оператор  $A$  в  $X$  є інфінітиземальним тобто генераторам однопараметричних напівгруп  $T(t) = e^{-tA}$ . Ця властивість оператора  $A$  разом з припущенням що права частина (3.1) володіє необхідною гладкістю  $f(t) \in L((0; T), X)$  дозволяють ввести в розгляд інтегральне (слабке) зображення розв'язку:

$$u(t) = e^{-At}u(0) + \int_0^t e^{-A(t-\tau)} f(\tau) d\tau. \tag{3.2}$$

**3.1.1 Зведення нелокальної задачі до класичної задачі Коші**  
Як бачимо в зображення (3.2) розв'язку входить значення  $u(0)$ , яке, в нашому випадку, є невідомим параметром пов'язаним з  $u(t_i)$  нелокальною умовою з

(3.1). Тому, задача знаходження розв'язку вихідної проблеми (3.1) зводиться до задачі знаходження такого зображення для  $u(0)$  та умов його існування яке не містить значень функції  $u(t)$  в майбутніх по відношенню до початкового стану  $u(0)$  часових точках  $t = t_1, \dots, t_n$  (далі у цьому розділі ми будемо також називати ці точки  $t_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  – точками нелокальностей).

Підставивши нелокальну умову з (3.1) у інтегральне зображення розв'язку (3.2) для кожного моменту часу  $t_i$ , матимемо

$$u(t_i) = e^{-At_i} \left[ u_0 - \sum_{k=1}^n \alpha_k u(t_k) \right] + \int_0^{t_i} e^{-A(t_i-\tau)} f(\tau) d\tau \quad (3.3)$$

$$i = \overline{1, n}.$$

Далі помножимо обидві частини  $i$ -ї рівності на  $\alpha_i$  та просумуємо отримані вирази по  $i = \overline{1, n}$ . Це приведе нас до виразу

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i u(t_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-At_i} u_0 - \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-At_i} \sum_{k=1}^n \alpha_k u(t_k) + \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_0^{t_i} e^{-A(t_i-\tau)} f(\tau) d\tau. \quad (3.4)$$

Нехай  $\sum_{i=1}^n \alpha_i u(t_i) = W$ , тоді (3.4) може бути переписане у вигляді

$$W = - \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-At_i} W + \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-At_i} u_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_0^{t_i} e^{-A(t_i-\tau)} f(\tau) d\tau,$$

з якого, позначивши  $B(A) = I + \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-At_i}$ , отримаємо операторне рівняння відносно  $W$

$$B(A)W = B(A)u_0 - u_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_0^{t_i} e^{-A(t_i-\tau)} f(\tau) d\tau. \quad (3.5)$$

Як видно з (3.5), для того щоб з цього рівняння можна було виразити шукану величину  $W$  необхідно і достатньо існування та обмеженість (в сенсі норми простору  $X$ ) операторної функції  $B^{-1}(A)$  оберненої до  $B(A)$ . В [37, 111] було



показано, що розв'язок задачі (3.1) існує і єдиний, якщо виконується одна з двох умов:

$$\sum_{i=1}^m |\alpha_i| < 1, \quad (3.6)$$

або

$$\sum_{i=1}^m |\alpha_i| e^{-a_0 t_i} < 1, \quad (3.7)$$

де  $a_0$  з (1.28). Легко бачити, що ці умови є достатніми для існування оператора  $B^{-1}(A)$ . Отже, припустимо, що виконується умова (3.6), тоді

$$W = u_0 - B^{-1}(A)u_0 + B^{-1}(A) \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_0^{t_i} e^{-A(t_i-\tau)} f(\tau) d\tau.$$

Оскільки з (3.2), нелокальної умови та вигляду  $W$  маємо

$$u(t) = e^{-At} [u_0 - W] + \int_0^t e^{-A(t-\tau)} f(\tau) d\tau,$$

то, підставивши сюди явний вигляд  $W$ , для  $u(t)$  отримаємо інтегральне зображення розв'язку, вільне від невідомих значень  $u(t_k)$ :

$$u(t) = e^{-At} \left[ B^{-1}(A)u_0 - B^{-1}(A) \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_0^{t_i} e^{-A(t_i-\tau)} f(\tau) d\tau \right] + \int_0^t e^{-A(t-\tau)} f(\tau) d\tau. \quad (3.8)$$

Розкривши дужки, подамо попередню формулу у вигляді суми двох доданків  $u(t) = u_h(t) + u_{ih}(t)$ , де

$$u_h(t) = e^{-At} B^{-1}(A)u_0 \quad (3.9)$$

є розв'язком однорідної нелокальної задачі ( $f(t) = 0$  в (3.1)), що відповідає початковій умові  $u_0$ , та

$$u_{ih}(t) = -e^{-At} B^{-1}(A) \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_0^{t_i} e^{-A(t_i-\tau)} f(\tau) d\tau + \int_0^t e^{-A(t-\tau)} f(\tau) d\tau, \quad (3.10)$$

яке є розв'язком неоднорідної задачі з нульовою початковою умовою  $u_0$ .

Для зображення операторних функцій, що входять до  $u_h(t)$  та  $u_{ih}$  ми будемо використовувати інтегральну формулу Данфорда–Коші. За контур інтегрування  $\Gamma_I$  виберемо гіперболічний контур (2.28), що охоплює спектральний кут  $\Sigma$  і асимптотично наближається до спектральної гіперболи (2.27). Параметри  $a_I, b_I$  виберемо далі. Рухаючись по цьому контуру, при  $\xi \in (-\infty, \infty)$ ,  $\Sigma$  залишається зліва, а тому цей контур є додатно орієнтованим.

**3.1.2 Нелокальна задача для однорідного рівняння.** В цій частині ми розглянемо розв'язок однорідної задачі  $u_h(t)$  (3.9). Наша ціль — сконструювати експоненціально збіжний алгоритм для наближення зображення  $u_h(t)$ . Для цього ми припустимо, що  $\text{Ker}(B(z)) \subset \mathbb{C} \setminus \Sigma$  і використаємо підхід подібний до [3, 78], для цього візьмемо зображення Данфорда-Коші

$$\begin{aligned} u_h(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_I} e^{-zt} B^{-1}(z) (zI - A)^{-1} u_0 dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_I} \frac{e^{-zt}}{1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-zt_i}} (zI - A)^{-1} u_0 dz. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Модифікуємо резольвенту в інтегральному зображенні Данфорда-Коші, вибравши замість резольвенти  $R(z, A)$  операторну функцію

$$R_M(z, A)v = \left[ (zI - A)^{-1} - \frac{1}{z} I \right] v.$$

Така модифікація забезпечує чисельну стійкість при обчисленні операторної експоненти для малих значень  $t$ , а також дозволяє побудувати експоненціально збіжний метод, рівномірний відносно  $t \geq 0$  (дивись [3, 78]). Така заміна не змінює значення інтеграла Данфорда-Коші згідно (1.41) при  $m = 0$ . Тому для  $u_h(t)$  отримаємо

$$\begin{aligned} u_h(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_I} e^{-zt} B^{-1}(z) R_M(A, z) u_0 dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_I} \frac{e^{-zt}}{1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-zt_i}} \left[ (zI - A)^{-1} - \frac{1}{z} I \right] u_0 dz. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Після параметризації контуру (2.28) в інтегралі (3.12) матимемо

$$u_h(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(t, \xi) d\xi, \quad (3.13)$$

де

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t, \xi) &= F_A(t, \xi)u_0, \\ F_A(t, \xi) &= B^{-1}(z)e^{-z(\xi)t}z'(\xi) \left[ (z(\xi)I - A)^{-1} - \frac{1}{z(\xi)}I \right], \\ z'(\xi) &= a_I \sinh \xi - ib_I \cosh \xi. \end{aligned}$$

Нехай вектор  $u_0 \in D(A^\alpha)$ ,  $0 < \alpha < 1$ . Тоді, використовуючи (1.42) в [3, 78] було показано, що

$$\begin{aligned} &\|e^{-z(\xi)t}z'(\xi) \left[ (z(\xi)I - A)^{-1} - \frac{1}{z(\xi)}I \right] u_0\| \leq \\ &\leq (1 + M)K \frac{b_I}{a_I} \left( \frac{2}{a_I} \right)^\alpha e^{-a_I t \cosh \xi - \alpha |\xi|} \|A^\alpha u_0\|, \quad \xi \in \mathbb{R}, t \geq 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Оцінка для функції  $B^{-1}(z)$ , що відповідає нелокальній умові з (3.1), може бути отримана наступним чином

$$\begin{aligned} |B^{-1}(z)| &= \left| \left( 1 + \sum_{k=1}^m \alpha_k e^{-z(\xi)t_k} \right)^{-1} \right| \leq \left( 1 - \sum_{k=1}^m |\alpha_k| e^{-a_I \cosh(\xi)t_k} \right)^{-1} \leq \\ &\leq \left( 1 - \sum_{k=1}^m |\alpha_k| e^{-\rho_1 t_k} \right)^{-1} \equiv Q. \end{aligned}$$

Об'єднуючи попередні оцінки, отримаємо таку оцінку для  $\mathcal{F}(t, \xi)$  з (3.13):

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(t, \xi)\| &\leq Q(1 + M)K \frac{b_I}{a_I} \left( \frac{2}{a_I} \right)^\alpha e^{-a_I t \cosh \xi - \alpha |\xi|} \|A^\alpha u_0\|, \\ &\xi \in \mathbb{R}, t \geq 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Наступним кроком, який потрібно зробити для отримання чисельного алгоритму для вихідної задачі є дискретизація (3.13) за допомогою ефективної квадратурної формули. Використаємо Sinc-квдратуру [11, 112]. Для її застосування нам потрібно оцінити ширину смуги навколо дійсної осі, в якій

функція  $\mathcal{F}(t, \xi)$  має аналітичне продовження відносно  $\xi$ . Після заміни  $\xi$  на  $\xi + i\nu$  інтегральна гіпербола  $\Gamma_I$  перетвориться в параметричну сім'ю гіпербол

$$\begin{aligned}\Gamma(\nu) &= \{z(w) = a_I \cosh(\xi + i\nu) - ib_I \sinh(\xi + i\nu) : \xi \in (-\infty, \infty)\} \\ &= \{z(w) = a(\nu) \cosh \xi - ib(\nu) \sinh \xi : \xi \in (-\infty, \infty)\},\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}a(\nu) &= a_I \cos \nu + b_I \sin \nu = \sqrt{a_I^2 + b_I^2} \sin(\nu + \phi/2), \\ b(\nu) &= b_I \cos \nu - a_I \sin \nu = \sqrt{a_I^2 + b_I^2} \cos(\nu + \phi/2), \\ \cos \frac{\phi}{2} &= \frac{b_I}{\sqrt{a_I^2 + b_I^2}}, \quad \sin \frac{\phi}{2} = \frac{a_I}{\sqrt{a_I^2 + b_I^2}}.\end{aligned}$$

Аналітичність функції  $\mathcal{F}(t, \xi + i\nu)$ , в смугі

$$D_{d_1} = \{(\xi, \nu) : \xi \in (-\infty, \infty), |\nu| < d_1/2\},$$

з деяким  $d_1$  може бути порушена у випадку коли резольвента оператора  $A$  або функція  $B^{-1}(z)$ , що відповідає заданій в (3.1) нелокальній умові перестане бути обмеженою. Для того, щоб цього не сталося виберемо  $d_1$  таким чином, щоб для всіх  $\nu \in (-d_1/2, d_1/2)$  множина гіпербол  $\Gamma(\nu)$  залишалась в правій частині комплексної площини, не перетиналась з множиною нулів  $B(z)$  і не перетинала спектр оператора  $A$ . Припустимо, що дійсні частини всіх нулів  $B(z)$  були менше деякого  $\rho_1$ :  $0 \leq \rho_1 < \rho$ , тоді  $d_1$  можна вибрати так, щоб для  $\nu = -d_1/2$  відповідна гіпербола знаходилася в правій півплощині і проходила через точку  $(\rho_1, 0)$ , а для  $\nu = d_1/2$  вона збігалася зі спектральною гіперболою. При такому виборі  $d_1$  для всіх  $\nu \in (-d_1/2, d_1/2)$  множина  $\Gamma(\nu)$  не перетинає спектральний кут  $\Sigma$ . Тоді в якості інтегральної гіперболи ми візьmemo  $\Gamma(0) = \Gamma_I$ , оскільки при такому виборі відповідна смуга аналітичності буде симетрична відносно дійсної осі.

Обмеження, накладені на гіперболу, приводять до системи рівнянь

$$\begin{cases} a_I \cos(d_1/2) + b_I \sin(d_1/2) = \rho, \\ b_I \cos(d_1/2) - a_I \sin(d_1/2) = b_0 = \rho \tan \varphi, \\ a_I \cos(-d_1/2) + b_I \sin(-d_1/2) = \rho_1, \end{cases}$$

яка після перетворень зводиться до

$$\begin{cases} a_I = \rho \cos(d_1/2) - b_0 \sin(d_1/2), \\ b_I = \rho \sin(d_1/2) + b_0 \cos(d_1/2), \\ 2a_I \cos(d_1/2) = \rho + \rho_1. \end{cases}$$

Підставивши вираз для  $a_I$  з першого в третє рівняння отримаємо

$$\rho \cos d_1 - b_0 \sin d_1 = \rho_1,$$

$$\cos(d_1 + \varphi) = \frac{\rho_1}{\sqrt{\rho^2 + b_0^2}},$$

звідки слідує, що

$$d_1 = \arccos\left(\frac{\rho_1}{\sqrt{\rho^2 + b_0^2}}\right) - \varphi, \quad (3.16)$$

де  $\cos \varphi = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + b_0^2}}$ ,  $\sin \varphi = \frac{b_0}{\sqrt{\rho^2 + b_0^2}}$ . Виконуючи зворотню підстановку отримаємо вирази для  $a_I$ ,  $b_I$

$$\begin{aligned} a_I &= \sqrt{\rho^2 + b_0^2} \cos\left(\frac{d_1}{2} + \varphi\right) = \\ &= \rho \frac{\cos\left(\frac{d_1}{2} + \varphi\right)}{\cos \varphi} = \rho \frac{\cos\left(\arccos\left(\frac{\rho_1}{\sqrt{\rho^2 + b_0^2}}\right)/2 + \varphi/2\right)}{\cos \varphi}, \\ b_I &= \sqrt{\rho^2 + b_0^2} \sin\left(\frac{d_1}{2} + \varphi\right) = \\ &= \rho \frac{\sin\left(\frac{d_1}{2} + \varphi\right)}{\cos \varphi} = \rho \frac{\sin\left(\arccos\left(\frac{\rho_1}{\sqrt{\rho^2 + b_0^2}}\right)/2 + \varphi/2\right)}{\cos \varphi}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Для визначених таким чином  $a_I$  та  $b_I$  векторна функція  $\mathcal{F}(t, w)$  залишається аналітичною в смугі  $D_{d_1}$  по відношенню до змінної  $w = \xi + i\nu$  для всіх  $t \geq 0$ . Варто зазначити, що при  $\rho_1 = 0$  ми матимемо, як і в [78],  $d_1 = \pi/2 - \varphi$ .

Беручи до уваги вирази (3.17) ми, аналогічно, можемо виписати зображення для  $a(\nu), b(\nu)$  на всьому інтервалі  $-\frac{d_1}{2} \leq \nu \leq \frac{d_1}{2}$

$$\begin{aligned} a(\nu) &= a_I \cos \nu + b_I \sin \nu = \sqrt{\rho^2 + b_0^2} \cos \left( \frac{d_1}{2} + \varphi \right) \cos(\nu) + \\ &\quad + \sqrt{\rho^2 + b_0^2} \sin \left( \frac{d_1}{2} + \varphi \right) \sin(\nu) = \sqrt{\rho^2 + b_0^2} \cos \left( \frac{d_1}{2} + \varphi - \nu \right), \\ b(\nu) &= b_I \cos \nu - a_I \sin \nu = \sqrt{\rho^2 + b_0^2} \sin \left( \frac{d_1}{2} + \varphi \right) \cos(\nu) - \\ &\quad - \sqrt{\rho^2 + b_0^2} \cos \left( \frac{d_1}{2} + \varphi \right) \sin(\nu) = \sqrt{\rho^2 + b_0^2} \sin \left( \frac{d_1}{2} + \varphi - \nu \right), \\ \rho_1 &\leq a(\nu) \leq \rho, \quad b_0 \leq b(\nu) \leq \sqrt{b_0^2 + \rho^2 - \rho_1^2}, \end{aligned}$$

де  $d_1$ , визначено в (3.16).

Для частини, що відповідає нелокальній умові

$$\begin{aligned} &\left| \left( 1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-z(\xi, \nu) t_i} \right)^{-1} \right| \leq \left( 1 - \sum_{i=1}^n |\alpha_i| e^{-z(\xi, \nu) t_i} \right)^{-1} \leq \\ &\leq \left( 1 - \sum_{i=1}^n |\alpha_i| e^{-a(\nu) \cosh(\xi) t_i} \right)^{-1} \leq \left( 1 - \sum_{i=1}^n |\alpha_i| e^{-a(\nu) t_i} \right)^{-1} < \\ &< \left( 1 - \sum_{i=1}^n |\alpha_i| e^{-\rho_1 t_i} \right)^{-1} < q^{-1} = Q, \end{aligned}$$

де  $z(\xi, \nu) = a(\nu) \cosh(\xi) - ib(\nu) \sinh(\xi)$ .

Враховуючи це для всіх  $w \in D_{d_1}$  ми отримаємо оцінку

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(t, w)\| &\leq e^{-a(\nu)t \cosh \xi} \frac{(1+M)QK \sqrt{a^2(\nu) \sinh^2 \xi + b^2(\nu) \cosh^2 \xi}}{(a^2(\nu) \cosh^2 \xi + b^2(\nu) \sinh^2 \xi)^{(1+\alpha)/2}} \|A^\alpha u_0\| \leq \\ &\leq (1+M)QK \frac{b(\nu)}{a(\nu)} \frac{e^{-a(\nu)t \cosh \xi}}{(a^2(\nu) \cosh^2 \xi + b^2(\nu) \sinh^2 \xi)^{(\alpha/2)}} \|A^\alpha u_0\| \leq \\ &\leq (1+M)QK \frac{b(\nu)}{a(\nu)} \left( \frac{2}{a(\nu)} \right)^\alpha e^{-a(\nu)t \cosh \xi - \alpha|\xi|} \|A^\alpha u_0\| \leq \\ &\leq (1+M)QK \tan \left( \frac{d_1}{2} + \varphi - \nu \right) \left( \frac{2 \cos \varphi}{\rho \cos \left( \frac{d_1}{2} + \varphi - \nu \right)} \right)^\alpha e^{-\alpha|\xi|} \|A^\alpha u_0\|, \end{aligned}$$

$$\forall w \in D_d.$$

Слідуючи підходу запропонованому в [11] (див. підрозд. 1.3), введемо до розгляду простір  $\mathbf{H}^p(D_d)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  векторно-значних функцій  $\mathcal{F}$  аналітичних в смузї  $D_d$ , з нормою (1.16).

Враховуючи те, що при такому виборі  $D_d(\epsilon)$  інтеграли по вертикальним частинам прямокутника, що входять в означення норми прямуватимуть до нуля при  $\epsilon \rightarrow 0$ , з попередньої оцінки для  $\|\mathcal{F}(t, w)\|$  випливатиме

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(t, \cdot)\|_{\mathbf{H}^1(D_{d_1})} &\leq \|A^\alpha u_0\| [C_-(\varphi, \alpha) + C_+(\varphi, \alpha)] \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\xi|} d\xi = \\ &= C(\varphi, \alpha) \|A^\alpha u_0\|, \end{aligned} \quad (3.18)$$

де

$$\begin{aligned} C(\varphi, \alpha) &= \frac{2}{\alpha} [C_+(\varphi, \alpha) + C_-(\varphi, \alpha)], \\ C_{\pm}(\varphi, \alpha) &= (1 + M)QK \tan\left(\frac{d_1}{2} + \varphi \pm \frac{d_1}{2}\right) \left(\frac{2 \cos \varphi}{\rho \cos\left(\frac{d_1}{2} + \varphi \pm \frac{d_1}{2}\right)}\right)^\alpha. \end{aligned}$$

Відмітимо, що отримана оцінка норми (3.18) враховує як гладкість початкових даних  $u_0$ , що виражається показником  $\alpha$ , так і спектральні характеристики  $A$  задані за допомогою  $\varphi$  та  $\rho$ . Так при  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\varphi \rightarrow \pi/2$  або  $\rho_1 \rightarrow 0$   $C(\varphi, \alpha)$  (3.17) прямує до  $\infty$  (у випадку  $\rho_1 \rightarrow 0$  це відбувається через те, що в (3.16)  $d_1 \rightarrow \frac{\pi}{2} - \varphi$ ).

Для наближення інтегралу (3.13) використаємо Sinc-квадратурну формулу (див. підрозд. 1.3 і [11]):

$$u_h(t) \approx u_{h,N}(t) = \frac{h}{2\pi i} \sum_{k=-N}^N \mathcal{F}(t, z(kh)), \quad (3.19)$$

з похибкою

$$\begin{aligned} \|\eta_N(\mathcal{F}, h)\| &= \|u_h(t) - u_{h,N}(t)\| \leq \\ &\leq \|u_h(t) - \frac{h}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(t, z(kh))\| + \|\frac{h}{2\pi i} \sum_{|k|>N} \mathcal{F}(t, z(kh))\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-\pi d_1/h}}{2 \sinh(\pi d_1/h)} \|\mathcal{F}\|_{\mathbf{H}^1(D_{d_1})} + \\
&+ \frac{C(\varphi, \alpha)h \|A^\alpha u_0\|}{2\pi} \sum_{k=N+1}^{\infty} \exp[-a_I t \cosh(kh) - \alpha kh] \\
&\leq \frac{c \|A^\alpha u_0\|}{\alpha} \left\{ \frac{e^{-\pi d_1/h}}{\sinh(\pi d_1/h)} + \exp[-a_I t \cosh((N+1)h) - \alpha(N+1)h] \right\},
\end{aligned}$$

де стала  $c > 0$  не залежить від  $h, N, t$ . Зрівнюючи обидві експоненти при  $t = 0$  матимемо

$$\frac{2\pi d_1}{h} = \alpha(N+1)h,$$

або після перетворення

$$h = \sqrt{\frac{2\pi d_1}{\alpha(N+1)}}. \quad (3.20)$$

Вибираючи величину кроку  $h$  таким чином, похибка квадратурної формули буде задовольняти оцінку

$$\|\eta_N(\mathcal{F}, h)\| \leq \frac{c}{\alpha} \exp\left(-\sqrt{\frac{\pi d_1 \alpha}{2}}(N+1)\right) \|A^\alpha u_0\|, \quad (3.21)$$

тут стала  $c > 0$  не залежить від  $t, N$ . У випадку  $t > 0$  перший доданок у аргументі  $\exp[-a_I t \cosh((N+1)h) - \alpha(N+1)h]$  з оцінки для  $\|\eta_N(\mathcal{F}, h)\|$  дає більший по порядку вклад до результуючої похибки. Вибираючи, в такому випадку,  $h = c_1 \ln N/N$  з деякою позитивною константою  $c_1$  для всіх фіксованих  $t$ , ми матимемо

$$\|\eta_N(\mathcal{F}, h)\| \leq c \left[ e^{-\pi d_1 N / (c_1 \ln N)} + e^{-c_1 a_I t N / 2 - c_1 \alpha \ln N} \right] \|A^\alpha u_0\|, \quad (3.22)$$

де  $c$  — деяка додатна стала, незалежна від  $t, N$ . Зауважимо, що вибором сталої  $c_1$  можна покращити швидкість збіжності методу як в [85, 113, 114]. Сформулюємо щойно доведений результат у вигляді теореми.

**Теорема 3.1** *Нехай  $A$  — щільно визначений сильно-позитивний оператор,  $u_0 \in D(A^\alpha)$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ . Тоді для наближеного розв'язку (3.19) однорідної нелокальної задачі (3.1) (коли  $f(t) \equiv 0$ ) справедлива експоненціальна оцінка*



похибки рівномірно по  $t \geq 0$  порядку  $\mathcal{O}(e^{-c\sqrt{N}})$  за умови, що  $h = 1/\sqrt{N}$  (оцінка (3.21)) і порядку  $\mathcal{O}(\max\{e^{-\pi dN/(c_1 \ln N)}, e^{-c_1 a_I t N/2 - c_1 \alpha \ln N}\})$ ,  $\forall t > 0$  за умови, що  $h = c_1 \ln N/N$  (оцінка (3.22)), із додатними сталими  $c, c_1$ , що не залежать від  $h, N, t$ .

**3.1.3 Нелокальна задача для неоднорідного рівняння.** В цьому пункті ми розглянемо неоднорідну частину розв'язку (3.10) (він може бути отриманий підстановкою  $u_0 = 0$  в (3.8)). Для цього перепишемо формулу (3.8) у вигляді

$$u_{ih}(t) = u_{1,ih}(t) + u_{2,ih}(t), \quad (3.23)$$

тут

$$u_{1,ih}(t) = \int_0^t e^{-A(t-\tau)} f(\tau) d\tau, \quad u_{2,ih}(t) = - \sum_{j=1}^m \alpha_j u_{2,ih,j}(t), \quad (3.24)$$

а

$$u_{2,ih,j}(t) = \int_0^{t_j} B^{-1}(A) e^{-A(t+t_j-\tau)} f(\tau) d\tau. \quad (3.25)$$

Для наближення  $u_{1,ih}(t)$  застосуємо алгоритм запропонований в [3, 78]:

$$\begin{aligned} u_{1,ih}(t) \approx u_{1,N}(t) &= \frac{h}{2\pi i} \sum_{k=-N}^N z'(kh) [(z(kh)I - A)^{-1} - \frac{1}{z(kh)} I] \times \\ &\times h \sum_{p=-N}^N \mu_{k,p}(t) f(\omega_p(t)), \end{aligned} \quad (3.26)$$

де

$$\mu_{k,p}(t) = \frac{t}{2 \cosh^2(ph)} \exp\left\{-\frac{t}{2} z(kh) [1 - \tanh(ph)]\right\},$$

$$\omega_p(t) = \frac{t}{2} [1 + \tanh(ph)], \quad h = \frac{1}{\sqrt{N}},$$

$$z(\xi) = a_I \cosh \xi - ib_I \sinh \xi, \quad z'(\xi) = a_I \sinh \xi - ib_I \cosh \xi.$$

Наступна теорема характеризує збіжність та похибку цього алгоритму.

**Теорема 3.2** ([3, 78]) *Нехай виконуються умови Теорема 3.1, а функція  $f(t) \in L((0; T), X)$  і  $f(t) \in D(A^\alpha)$ ,  $\alpha > 0 \forall t \in [0, \infty]$  має аналітичне продовження в сектор  $\Sigma_f = \{de^{i\theta_1} : d \in [0, \infty], |\theta_1| < \varphi\}$ , де справедлива оцінка*

$$\|A^\alpha f(w)\| \leq c_\alpha e^{-\delta_\alpha |\operatorname{Re} w|}, \quad w \in \Sigma_f, \quad \delta_\alpha \in (0, \sqrt{2}\rho]. \quad (3.27)$$

Тоді наближення (3.26) збігається до  $u_{1,ih}(t)$  і має місце оцінка похибки

$$\|\mathcal{E}_N(t)\| = \|u_{1,ih}(t) - u_{1,N}(t)\| \leq ce^{-c_1\sqrt{N}}, \quad (3.28)$$

рівномірно по  $t \geq 0$  за умови, що  $h = \mathcal{O}(1/\sqrt{N})$ . Сталі  $c, c_1$  додатні, що залежать від  $\alpha, \varphi, \rho$  і не залежать від  $N, t$ .

Наступним кроком для досягнення нашої мети є побудова експоненціально збіжного алгоритму для доданку  $u_{2,ih}$  з (3.23). Для цього спочатку застосуємо зображення за допомогою інтегральної формули Данфорда-Коші до  $j$ -го доданку з  $u_{2,ih}$ . Отримаємо

$$\begin{aligned} u_{2,ih,j}(t) &= \int_0^{t_j} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_I} e^{-z(t+t_j-s)} B^{-1}(z) [(zI - A)^{-1} - \frac{1}{z}I] f(s) dz ds = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_I} e^{-z(\xi)t} B^{-1}(z) \left[ (z(\xi)I - A)^{-1} - \frac{1}{z(\xi)}I \right] \times \\ &\quad \times \int_0^{t_j} e^{-z(\xi)(t_j-s)} f(s) ds z'(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Наближаючи перший інтеграл в (3.29) за допомогою Sinc-квадратурної формули з кроком  $h = N^{-1/2}$  маємо

$$\begin{aligned} u_{2,ih,j}(t) \approx u_{2,N}(t) &= \frac{h}{2\pi i} \sum_{k=-N}^N e^{-z(kh)t} z'(kh) B^{-1}(z(kh)) \times \\ &\quad \times \left[ (z(kh)I - A)^{-1} - \frac{1}{z(kh)}I \right] f_{k,j}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

де

$$f_{k,j} = \int_0^{t_j} e^{-z(kh)(t_j-s)} f(s) ds, \quad k = -N, \dots, N, \quad j = \overline{1, n}. \quad (3.31)$$

Для того, щоб наблизити (3.31) експоненціально збіжною квадратурою проведемо заміну змінних

$$s = \frac{t_j}{2}(1 + \tanh \xi), \quad (3.32)$$

в результаті, зображення  $f_{k,j}$  зведеться до

$$f_{k,j} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_k(t_j, \xi) d\xi, \quad (3.33)$$

де

$$\mathcal{F}_k(t_j, \xi) = \frac{t_j}{2 \cosh^2 \xi} \exp[-z(kh)t_j(1 - \tanh \xi)/2] f\left(\frac{t_j}{2}(1 + \tanh \xi)\right).$$

Зауважимо, що заміна (3.32) – це конформне відображення  $w = \psi(z) = \frac{t_j}{2}(1 + \tanh z)$ ,  $z = \phi(w) = \frac{1}{2} \ln \frac{t_j - w}{w}$  смуги  $D_\nu$  на окоподібну область  $\mathcal{A}_\nu$  [11]. На дійсній осі підінтегральний вираз з (3.33) задовольняє оцінку

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_k(t_j, \xi)\| &\leq \frac{t_j}{2 \cosh^2 \xi} \exp[-a_I \cosh(kh)t_j(1 - \tanh \xi)/2] \times \\ &\quad \times \left\| f\left(\frac{t_j}{2}(1 + \tanh \xi)\right) \right\| \leq \\ &\leq 2t_j e^{-2|\xi|} \left\| f\left(\frac{t_j}{2}(1 + \tanh \xi)\right) \right\|. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Для того, щоб мати можливість застосування Sinc-квдратурної формули до інтегралу (3.33) нам потрібна лема.

**Лема 3.1** [3, 78] *Якщо права частина  $f(t)$  з (3.10) для всіх  $t \in [0, \infty]$  має аналітичне продовження в сектор  $\Sigma_f = \{de^{i\theta_1} : d \in [0, \infty], |\theta_1| < \varphi\}$ , де для  $f(t)$  виконується оцінка*

$$\|f(w)\| \leq ce^{-\delta|\operatorname{Re} w|}, \quad w \in \Sigma_f, \quad \delta \in (0, \sqrt{2}\rho], \quad (3.35)$$

то підінтегральна функція  $\mathcal{F}_k(t_j, \xi)$  має аналітичне продовження в смугу  $D_{d_1}$ ,  $0 < d_1 < \varphi/2$  де вона належить  $\mathbf{H}^1(D_{d_1})$  по відносно змінної  $\xi$ , де  $\rho, \varphi$  – спектральні характеристики  $A$ .

За припущень зазначених в Лемі 3.1 ми можемо побудувати експоненціально збіжне наближення до  $f_{k,j}$ , що, подібно до наближень до  $u_h(t)$  та  $u_{1,ih}(t)$ , спирається на використання Sinc-квадратури. Для наближення  $f_{k,j,N}$  матимемо

$$f_{k,j} \approx f_{k,j,N} = h \sum_{p=-N}^N \mu_{k,p,j} f(\omega_{p,j}), \quad (3.36)$$

де

$$\begin{aligned} \mu_{k,p,j} &= \frac{t_j \exp\{-\frac{t_j}{2} z(kh)[1 - \tanh(ph)]\}}{2 \cosh^2(ph)}, \\ \omega_{p,j} &= \frac{t_j}{2}[1 + \tanh(ph)], \quad h = \frac{1}{\sqrt{N}}, \\ z(\xi) &= a_I \cosh \xi - ib_I \sinh \xi. \end{aligned}$$

Підставляючи (3.36) у формулу (3.30) отримаємо чисельний алгоритм для наближення  $u_{2,ih,j}$

$$\begin{aligned} u_{2,ih,j}(t) \approx u_{2,j,N}(t) &= \frac{h}{2\pi i} \sum_{k=-N}^N e^{-z(kh)t} z'(kh) B^{-1}(z(kh)) \times \\ &\times \left[ (z(kh)I - A)^{-1} - \frac{1}{z(kh)} I \right] h \sum_{p=-N}^N \mu_{k,p,j} f(\omega_{p,j}). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Похибка такого наближення має вигляд

$$\mathcal{E}_N(t) = u_{2,ih,j}(t) - u_{2,j,N}(t) = r_{1,N}(t) + r_{2,N}(t), \quad (3.38)$$

де

$$\begin{aligned} r_{1,N}(t) &= u_{2,ih,j}(t) - u_{2,N}(t), \\ r_{2,N}(t) &= u_{2,N}(t) - u_{2,j,N}(t). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Оцінка (3.21) дозволяє отримати відповідну оцінку для  $r_{1,N}(t)$

$$\begin{aligned} \|r_{1,N}(t)\| &= \left\| \int_0^{t_j} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} F_A(t + t_j - s, \xi) d\xi - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{h}{2\pi i} \sum_{k=-N}^N F_A(t + t_j - s, kh) \right\} f(s) ds \right\| \leq \\ &\leq \frac{c}{\alpha} \exp\left(-\sqrt{\frac{\pi d \alpha}{2}}(N+1)\right) \int_0^{t_j} \|A^\alpha f(s)\| ds, \end{aligned} \quad (3.40)$$

де  $F_A(t, \xi)$  це операторна функція визначена в п. 3.1.2. Враховуючи нерівність (1.42) при  $m = 0$ , для похибки  $r_{2,N}$  матимемо

$$\begin{aligned} \|r_{2,N}(t)\| &= \left\| \frac{h}{2\pi i} \sum_{k=-N}^N e^{-z(kh)t} z'(kh) B(z(kh)) \times \right. \\ &\quad \times \left. \left[ (z(kh)I - A)^{-1} - \frac{1}{z(kh)} I \right] R_{k,j} \right\| \leq \\ &\leq \frac{h(1+M)QK}{2\pi} \sum_{k=-N}^N \frac{|e^{-z(kh)t} z'(kh)|}{|z(kh)|^{1+\alpha}} \|A^\alpha R_{k,j}\|, \end{aligned} \quad (3.41)$$

де

$$R_{k,j} = f_{k,j} - f_{k,j,N}.$$

Застосування оцінки (3.34) приводить нас до нерівності

$$\|A^\alpha \mathcal{F}_k(t_j, \xi)\| \leq 2t_j e^{-2|\xi|} \|A^\alpha f\left(\frac{t_j}{2}(1 + \tanh \xi)\right)\|. \quad (3.42)$$

Лема 3.1 та припущення  $\|A^\alpha f(w)\| \leq c_\alpha e^{-\delta_\alpha |\operatorname{Re} w|} \forall w \in \Sigma_f$  гарантує, що  $A^\alpha f(w) \in \mathbf{H}^1(D_{d_1})$ , а  $A^\alpha \mathcal{F}_k(t_j, w) \in \mathbf{H}^1(D_{d_1})$ .

За таких умов ми можемо використати техніку оцінювання подібну до тієї, що в доведенні Теорема 3.2.1, с.144 з роботи [11]. В нашому випадку замість  $f$  зі згаданої теореми маємо  $A^\alpha f(w)$ , тому

$$\begin{aligned} \|A^\alpha R_{k,j}\| &= \|A^\alpha (f_{k,j} - f_{k,j,N})\| = \\ &= \left\| \int_{-\infty}^{\infty} A^\alpha \mathcal{F}_k(t_j, \xi) d\xi - h \sum_{k=-\infty}^{\infty} A^\alpha \mathcal{F}_k(t_j, kh) \right\| + \left\| h \sum_{|k|>N} A^\alpha \mathcal{F}_k(t_j, kh) \right\| \leq \\ &\leq \frac{e^{-\pi d_1/h}}{2 \sinh(\pi d_1/h)} \|\mathcal{F}_k(t_j, w)\|_{\mathbf{H}^1(D_{d_1})} + h \sum_{|k|>N} 2t_j e^{-2|kh|} \|A^\alpha f\left(\frac{t_j}{2}(1 + \tanh kh)\right)\| \leq \\ &\leq ce^{-2\pi d_1/h} \|A^\alpha f(t_j, w)\|_{\mathbf{H}^1(D_{d_1})} + h \sum_{|k|>N} 2t_j e^{-2|kh|} c_\alpha \exp\left\{-\delta_\alpha \frac{t_j}{2}(1 + \tanh kh)\right\}, \end{aligned}$$

тобто, підсумовуючи

$$\|A^\alpha R_{k,j}\| \leq ce^{-c_1 \sqrt{N}}, \quad (3.43)$$

де додатні сталі  $c_\alpha, \delta_\alpha, c, c_1$  не залежать від  $t, N, k$ . Тоді (3.41) перетворюється до вигляду

$$\begin{aligned} \|r_{2,N}(t)\| &= \frac{h}{2\pi i} \sum_{k=-N}^N e^{-z(kh)t} z'(kh) B(z(kh)) \times \\ &\quad \times \left[ (z(kh)I - A)^{-1} - \frac{1}{z(kh)} I \right] R_{k,j} \leq \\ &\leq c e^{-c_1 \sqrt{N}} S_N(t), \end{aligned} \quad (3.44)$$

причому  $S_N(t) = \sum_{k=-N}^N h \frac{|e^{-z(kh)t} z'(kh)|}{|z(kh)|^{1+\alpha}}$ . Далі використаємо оцінку (4.8) з [78], та той факт, що

$$\begin{aligned} |z(kh)| &= \sqrt{a_I^2 \cosh^2(kh) + b_I^2 \sinh^2(kh)} \\ &\geq a_I \cosh(kh) \geq a_I e^{|kh|}/2, \end{aligned} \quad (3.45)$$

тоді  $S_N(t)$  може бути оцінена, як

$$\begin{aligned} |S_N(t)| &\leq \frac{c}{\sqrt{N}} \sum_{k=-N}^N e^{-\alpha|k/\sqrt{N}|} \leq \\ &\leq c \int_{-\sqrt{N}}^{\sqrt{N}} e^{-\alpha t} dt \leq c/\alpha \quad \forall t \in [0, \infty). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Враховуючи (3.43) та (3.46) (3.44) отримуємо

$$\|r_{2,N}(t)\| \leq c e^{-c_1 \sqrt{N}}. \quad (3.47)$$

Наступна теорема є наслідком (3.38), (3.40) та (3.47).

**Теорема 3.3** *Нехай виконуються умови Теорема 3.2 тоді наближення (3.37) збігається і має місце наступна оцінка похибки*

$$\|\mathcal{E}_N(t)\| = \|u_{2,ih,j}(t) - u_{2,j,N}(t)\| \leq c e^{-c_1 \sqrt{N}}, \quad (3.48)$$

(рівномірно по  $t \geq 0$ ) за умови, що  $h = 1/\sqrt{N}$ . Додатні сталі  $c, c_1$  залежать від  $\alpha, \varphi, \rho$  і не залежать від  $N, t$ .

Тепер ми можемо застосувати наближення (3.26) для кожного доданку з (3.24) і в результаті отримаємо:

$$u_{2,ih}(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_0^{t_i} B^{-1} e^{-A(t+t_i-\tau)} f(\tau) d\tau \approx \sum_{j=1}^n u_{2,j,N}(t) = u_{2,N}(t). \quad (3.49)$$

Теорема 3.3 гарантує, що похибка в цьому випадку задовольняє оцінку:

$$\|u_{2,ih}(t) - u_{2,N}(t)\| \leq \sum_{j=1}^m c e^{-c_1 \sqrt{N}} \leq c_2 e^{-c_1 \sqrt{N}}. \quad (3.50)$$

Тому, застосування наближення (3.19) разом з (3.26) та (3.49) забезпечують експоненціально збіжний метод наближення розв'язку неоднорідної нелокальної задачі Коші (3.10).

Таким чином, об'єднуючи методи для однорідної та неоднорідної задач, в результаті ми отримали експоненціально збіжний чисельний метод наближення розв'язку нелокальної задачі Коші (3.1).

### 3.1.4 Чисельні приклади та застосування.

**Приклад 3.1** Розглянемо однорідну нелокальну задачу (3.9) з операторним коефіцієнтом  $A$  визначеним, як

$$\begin{aligned} Au &= -u''(x) \quad \forall u \in D(A), \\ D(A) &= \{u(x) \in H^2(0, 1) : u(0) = u(1) = 0\}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Нелокальну умову задамо у формі:

$$u(x, 0) + 0.5u(x, 0.2) + 0.3u(x, 0.4) = (1 + 0.5e^{-\pi^2 0.2} + 0.3e^{-\pi^2 0.4}) \sin(\pi x),$$

тут  $u_0 = (1 + 0.5e^{-\pi^2 0.2} + 0.3e^{-\pi^2 0.4}) \sin(\pi x) \in D(A)$ . Тоді точний розв'язок однорідної задачі має вигляд  $u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x)$ . Прямою підстановкою нескладно показати, що за такого означення оператора  $A$ , дія резольвенти на  $u_0$  може бути обчислена явно

$$(zI - A)^{-1} u_0 = \left( z + \frac{d^2}{dx^2} \right)^{-1} \sin(\pi x) = \frac{\sin(\pi x)}{z - \pi^2}.$$

Проведено обчислення середовищі Maple. Крок квадратурної формули вибирався використовуючи формулу  $h = N^{-1/2}$ . Похибка наближення в точці  $x = 0.5$ , при  $t = 0.3$  наведена в Таблиці 3.1. З цієї таблиці видно, що похибка спадає експоненціально, як і передбачалось теоретичним аналізом.

Таблиця 3.1: Похибка наближення розв'язку однорідної нелокальної задачі Коші (3.9) в точці  $x = 0.5$ , при  $t = 0.3$ .

N	$\varepsilon_N$
4	.29857983847712589e-1
8	.41823888073604986e-2
16	.11258594468208641e-2
32	.10042178166563831e-3
64	.28007158539828452e-5
128	.2098826601399176e-7
256	.1858929920173152e-10
512	.856837124351510e-15

Відповідно до теореми 3.1 похибка має швидкість збіжності  $\varepsilon_N = \mathcal{O}(e^{-c\sqrt{N}})$ . Стала  $c$  з цього виразу може бути оцінена використовуючи наступне апостеріорне співвідношення:

$$c = \ln \left( \frac{\varepsilon_N}{\varepsilon_{2N}} \right) (\sqrt{2} - 1)^{-1} N^{-1/2} = \ln(\mu_N) (\sqrt{2} - 1)^{-1} N^{-1/2}. \quad (3.52)$$

Чисельні результати застосування цього співвідношення для апостеріорної оцінки  $c$  приведені в Таблиці 3.2, з якої видно, що для випадку таким чином визначеної нелокальної задачі матимемо  $c \approx 1.5$  коли  $N \rightarrow \infty$ .

В наступному прикладі ми знову розглядатимемо однорідну нелокальну задачу, але вже у більш близькому до застосувань випадку, коли дія резольвенти



Таблиця 3.2: Апостеріорна оцінка константи  $c$  з (3.21) використовуючи формулу (3.52)

N	$c$
4	2.372652515388745588587496
8	1.120148732795449515627946
16	1.458741976765153165445005
32	1.527648924601130131250452
64	1.476794596387591759032900
128	1.499935011373075736075927
256	1.506597339081609844717370

оператора  $A$  на елемент  $u_0$  не може бути обчислена явно. В такому випадку похибка обчислення кожної резольвенти буде вносити додатковий вклад в результуючу похибку. Вплив похибок такого роду на квадратурні формули типу (3.19), (3.37) був проаналізований в [3]. Для узгодження похибок резольвент з результуючою похибкою методу потрібно в процесі наближеного обчислення резольвент вимагати точності, що в  $2N$  більше ніж теоретично передбачена точність квадратурної формули.

**Приклад 3.2** Розглянемо однорідну нелокальну задачу Коші (3.10) в якій оператор  $A$  визначений аналогічно до (3.51), а нелокальна умова має вигляд:

$$u(x, 0) + u(x, 0.5) = x \ln(x),$$

де  $u_0 = x \ln(x) \in A^\alpha$ ,  $\alpha < 1/2$ . В такому випадку дія резольвенти на  $u_0$  може бути обчислена з використанням функції Гріна

$$(zI - A)^{-1}u_0 = \left(z + \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1} x \ln(x) = \int_0^1 G(x, s) s \ln(s) ds,$$

$$G(x, s) = -\frac{1}{\sqrt{z} \sin(\sqrt{z})} \begin{cases} \sin(x\sqrt{z}) \sin((1-s)\sqrt{z}) & x \leq s, \\ \sin(s\sqrt{z}) \sin((1-x)\sqrt{z}) & x \geq s \end{cases}.$$

Визначений інтеграл, в цьому зображенні потрібно обчислювати з використанням експоненціально збіжної квадратурної формули (наприклад Sinc-квадратурної формули [11]).

Результати розрахунків для значень  $x = 0.5$ ,  $t = 0.3$  приведені в Таблиці 3.3.

Таблиця 3.3: Значення розв'язку  $u(x, t)$ , для задачі з Прикладу 3.2, при  $x = 0.5$ ,  $t = 0.3$ .

N	$u(x, t)$
4	-.241535790017043e-1
8	-.228401191029108e-1
16	-.194273285627507e-1
32	-.192905848633180e-1
64	-.192911920318628e-1
128	-.192907849909929e-1
256	-.192907820740651e-1

Легко бачити, як кількість цифр після коми, що стабілізувалися зростає відповідно до результатів передбачених Теоремою 3.1.

**Приклад 3.3** Розглянемо неоднорідну нелокальну задачу Коші (3.10) з оператором  $A$  визначеним в (3.51), та нелокальною умовою

$$u(x, 0) + 0.5u(x, 0.2) = (1 + 0.5e^{0.2}) \sin(\pi x),$$

В якості правої частини  $f(t, x)$  в рівнянні (3.10) виберемо

$$f(x, t) = (1 + \pi^2)e^t \sin(\pi x).$$

В такому випадку точним розв'язком нелокальної задачі буде функція  $u(x, t) = e^t \sin(\pi x)$ . Для чисельного наближення розв'язку нами було зроблено програмну реалізацію алгоритму, що базується на зображеннях (3.19), (3.26), (3.49). Результати розрахунків проведених в середовищі Maple для  $x = 0.5$ ,  $t = 0.3$  приведені в Таблиці 3.4. Як видно з цієї таблиці обчислена похибка наближеного розв'язку, спадає відповідно до теоретичних результатів наведених в Теоремах 3.2, 3.3.

N	$\varepsilon_N$
4	.202211483120243
8	.726677678737409e-1
16	.138993889900620e-1
32	.143037059411419e-2
64	.554542099757830e-4
128	.532640823981411e-6
256	.730569324317506e-9
512	.648376079810788e-13

Таблиця 3.4: Похибка наближеного розв'язку нелокальної задачі, розглянутої в Прикладі 3.3, в точці  $x = 0.5$ , при  $t = 0.3$ .

### 3.2 Дослідження умов існування розв'язку нелокальної багатоточкової задачі для абстрактного диференціального рівняння першого порядку

Як було показано в попередньому підрозділі, існування розв'язку нелокальної багатоточкової задачі (3.1) залежить від існування оператора  $B^{-1}$ . В цьому підрозділі дослідимо умови існування цього оператора. Зображення за допо-

могою інтеграла Данфорда-Коші для  $B^{-1}$  має вигляд

$$B^{-1}(A)u = I + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_A} \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n \alpha_k e^{-t_k z}} R(z, A) u dz, \quad (3.53)$$

де  $\Gamma_A$  – контур, що охоплює спектр оператора  $A$ . Оскільки  $B^{-1}(z)$  не має інших особливостей крім нулів знаменника, зображення (3.53) є коректним тоді і тільки тоді, коли всі нулі

$$B(z) = 1 + \sum_{k=1}^n \alpha_k e^{-t_k z}, \quad z \in \mathbb{C}_+, \quad (3.54)$$

належать області  $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ .

**Теорема 3.4** *Нехай  $A$  – сильно-позитивний оператор з спектральними параметрами  $(\rho, \varphi)$ , а функція  $f(t) \in L((0; T), X)$ . Тоді для існування слабкого розв'язку задачі (3.1) у формі (3.8) (або (3.2)) необхідно і достатньо щоб множина нулів  $\text{Ker}(B(z)) \equiv \{z : B(z) = 0, z \in \mathbb{C}\}$ , функції  $B(z)$  асоційованої з нелокальною умовою (3.1), задовольняла*

$$\text{Ker}(B(z)) \subset \mathbb{C} \setminus \Sigma \quad (3.55)$$

*Доведення*

*Необхідність.*

Спочатку розглянемо випадок однорідної задачі  $f(t) \equiv 0$ . У такому випадку класична задача Коші, що відповідає (3.1) є коректно поставленою у сенсі [115, с. 29] і має єдиний розв'язок для будь-якого початкового стану  $u_0 \in D(A)$  [116, с. 621], за умови виконання припущень теореми стосовно  $A$ . Будь-який розв'язок згаданої задачі Коші, як відомо, може бути представлений у вигляді

$$v(t) = e^{-At} v(0).$$

Нехай  $u(t)$  розв'язок вихідної нелокальної задачі  $\forall t \geq 0 u(t) \in D(A)$ , розглянемо функцію

$$w(t) = e^{-At} u(0).$$

Функції  $w(t)$ ,  $u(t)$  задовольняють диференціальне рівняння з (3.1), а отже і їх різниця  $p(t) = w(t) - u(t)$  має задовольняти це рівняння. Різниця  $p(t) \equiv 0$  оскільки вона є розв'язком відповідної класичної задачі Коші з початковою умовою  $p(0) = 0$ . Тому кожен розв'язок  $u(t)$  вихідної нелокальної задачі (3.1) може бути представлений у вигляді

$$u(t) = e^{-At}u(0).$$

У випадку неоднорідної задачі  $f(t) \neq 0$  для доведення справедливості зображення (3.2) слабкого розв'язку відповідної класичної задачі Коші достатньо існування і неперервна диференційованість по  $t, s > 0$  операторної функції  $e^{-A(t-s)}$  [115, с. 87]. Ця умова виконується для того класу операторів  $A$ , який взято до розгляду. Далі відштовхуючись від формули (3.2) для розв'язку відповідної класичної задачі та використовуючи міркування аналогічні до міркувань попереднього параграфу робимо висновок про те, що формула (3.2) є зображенням слабкого розв'язку нелокальної задачі (3.1).

Спираючись на це зображення, вище нами було показано, як отримати операторне рівняння (3.5). Розв'язність цього рівняння відносно  $W$  еквівалентна існуванню обмеженої операторної функції  $B^{-1}(A)$ . Ця функція визначена тільки за умови виконання (3.55), що і треба було довести.

#### *Достатність.*

Для доведення достатності розглянемо функцію  $u(t)$  з (3.8). Інтеграл, що входить у зображення (3.8) збігається для будь якого  $f \in X$ , оскільки  $e^{-A(t-s)}$  – диференційовна, і тому  $u(t)$  існує за умови коректної визначеності  $B^{-1}(A)$ . Використовуючи зображення (3.53) та припущення теореми про властивості оператора  $A$  та (3.55) легко показати, що операторна функція  $B^{-1}(A)x$ , визначена за допомогою (3.53), існує і є обмеженою  $\forall x \in X$ . Щоб переконатись, що  $u(t)$  визначена таким способом дійсно є слабким розв'язком нелокальної задачі (3.1) достатньо підставити вираз для  $u(t)$  в інтегральне рівняння (3.2) та перевірити виконання нелокальної умови. ■

Отже, теорема 3.4 встановлює зв'язок між питанням про існування розв'язку нелокальної задачі (3.1) та дослідженням розташування нулів  $B(z)$  з (3.54) по відношенню до спектра оператора  $A$ .

**Приклад 3.4** Як приклад застосування теореми 3.4 розглянемо задачу

$$\begin{aligned} u'_t + Au &= f(t), \quad t \in [0, T] \\ u(0) + \alpha_1 u(t_1) &= u_0, \quad 0 < t_1 \leq T. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Для такого випадку нелокальної умови функція  $B(z)$  має вигляд

$$B(z) = 1 + \alpha_1 e^{-zt_1},$$

а множина її нулів

$$\begin{aligned} \text{Ker}(B(z)) &= -\frac{1}{t_1} \ln\left(-\frac{1}{\alpha_1}\right) = \\ &= -\frac{1}{t_1} \left[ \ln \left| \frac{1}{\alpha_1} \right| + i \text{Arg} \left( -\frac{1}{\alpha_1} \right) + 2i\pi m \right], \end{aligned} \quad (3.57)$$

де  $m \in \mathbb{Z}$ , а  $\text{Arg}(\cdot)$  означає головне значення аргументу. Для оператора з спектральними параметрами  $(\rho, \varphi)$

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \Sigma \Leftrightarrow |y| > (x - \rho) \tan \varphi$$

З попередньої нерівності видно, що як тільки головне значення логарифму задовольняє нерівність (3.57) то це справедливо і для всієї множини значень логарифму, тому не втрачаючи загальності можна покласти  $m = 0$  в (3.57).

Таким чином умова (3.55) для такої задачі (3.56) еквівалентна нерівності

$$\left| \text{Arg} \left( -\frac{1}{\alpha_1} \right) \right| > (\ln |\alpha_1| - t_1 \rho) \tan \varphi. \quad (3.58)$$

Ця умова враховує обидва спектральні параметри оператора  $A$ . Випадок 2-точкової нелокальної умови дає можливість графічно порівняти умови

(3.7) та (3.58) для задачі (3.56) (див. Рис. 3.1). Так, зокрема, видно, що для оператора з спектральними параметрами  $(1, \pi/4)$  ( $\rho = 1, \varphi = \pi/4$ ) множина допустимих значень  $\alpha_1$  отриманих з (3.58) (внутрішність області заповненої  $\blacksquare$  кольором) ширша ніж та що отримана за допомогою (3.7) ( $\blacksquare$  колір). Крім того множина допустимих  $\alpha_1$  розширюється з зменшенням спектрального кута  $\varphi$  (області заповненої  $\blacksquare$  кольором відповідає  $\varphi = \pi/6$ ) і у граничному випадку  $\varphi = 0$  ( $A$  – самоспряжений оператор) являє собою  $\mathbb{C} \setminus (-\infty; -1)$ .

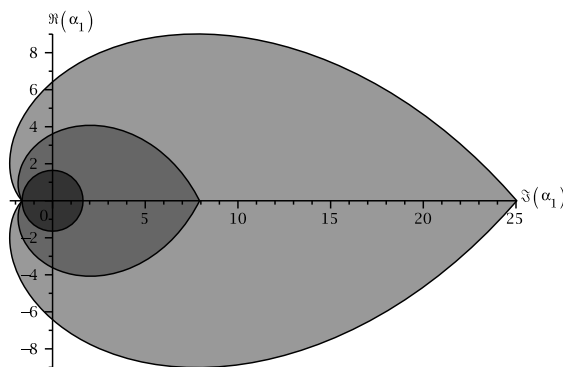


Рис. 3.1: Схематичне зображення областей значень параметра  $\alpha_1$  з нелокальній умові задачі (3.56)  $\rho = 1$  при яких розв'язок існує:  $\blacksquare$  – використовуючи оцінку (3.7) ( $\varphi = \pi/4$ ),  $\blacksquare$  – використовуючи оцінку (3.58) ( $\varphi = \pi/4$ ),  $\blacksquare$  – використовуючи оцінку (3.58) ( $\varphi = \pi/6$ )

У випадку коли кількість точок в нелокальній умові більше ніж дві, складність дослідження умов збільшується. Продемонструємо це на наступному прикладі.

**Приклад 3.5** Нехай задана нелокальна задача

$$u'_t + Au = f(t), \quad t \in [0, T] \tag{3.59}$$

$$u(0) + \alpha_1 u(t_1) + \alpha_2 u(t_2) = u_0, \quad 0 < t_1 < t_2 \leq T.$$

У цьому випадку нелокальної умови функція  $B(z)$  має вигляд

$$B(z) = 1 + \alpha_1 e^{-zt_1} + \alpha_2 e^{-zt_2},$$

звідси очевидно, що навіть для випадку двох точок з довільними  $\alpha_1, \alpha_2$  і  $t_1, t_2$  явне знаходження коренів  $B(z)$  отримати неможливо.

Незважаючи на це, для будь якого наперед заданого набору  $\alpha_1, \alpha_2, t_1, t_2$  корені  $B(z)$  можна обчислити наближено за допомогою відомих підходів [117] (метод Ньютонна та його модифікації, градієнтний метод, чисельні методи на основі принципу аргументу та квадратурних формул, та ін.) або використовуючи готові програмні реалізації цих підходів в наявних математичних пакетах (Octave, Maxima, Matlab, Maple та ін.).

Виберемо значення

$$\alpha_1 = -0.13, \alpha_2 = 3, t_1 = 1/2, t_2 = 1, \quad (3.60)$$

отримаємо

$$B(z) = 1 - 0.13e^{-\frac{z}{2}} + 3e^{-z}.$$

Якщо припустити, що оператор  $A$  має спектральні параметри  $(0, \varphi)$  то ознака (3.7) не дозволяє отримати інформацію з приводу розв'язності (3.59) ( $0.13 + 3 > 1$ ). З іншого боку застосувавши пакет Maple (функцію Analytic яка є реалізацію методу Ньютонна) знаходимо множину коренів  $B(z)$  :

$$\text{Ker}(B(z)) = -2.09255541146 + 4\pi i,$$

тут всі наведені цифри є значущими. З цього, теореми (3.4) та того, що спектр  $A$  розміщений в правій півплощині слідує що задача (3.59) має розв'язок для оператора з будь-яким спектральним кутом  $\varphi$ .

Слід зауважити, що з розташуванням нулів (3.54) тісно пов'язана обчислювальна стійкість алгоритмів для наближення  $B^{-1}(A)$ . Мається на увазі той факт що відомі чисельні методи (див. наприклад [66, 86]), які використовують зображення (3.53) та квадратурні формули, суттєво спираються на властивість аналітичності цієї функції в околі контуру інтегрування  $\Gamma_A$ .



Тому існування особливостей у безпосередній близькості  $\Sigma_A$  може значно погіршити точність чисельного методу а в деяких випадках стає, навіть, неможливим застосування згаданих вище методів наближення. Це підтверджує важливість аналізу розташування нулів  $B(z)$ . Методи, що дають можливість провести такий аналіз розроблено в [118]

### 3.3 Модель переносу аерозольних забруднень в атмосфері

Перенесення забруднювальних субстанцій в атмосфері здійснюється вітровими потоками повітря з урахуванням їхніх дрібномасштабних флуктуацій. Усереднений потік, як правило, має адвективну й конвективну складову, а усереднені флуктуації їхнього руху можна інтерпретувати як дифузію на фоні основного усередненого руху, пов'язаного з цим потоком.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi + \sigma \varphi = \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varphi + f, \quad (3.61)$$

де  $\varphi(x, y, z, t)$  – інтенсивність аерозольної субстанції (аерозолі), що мігрує разом з потоками повітря в атмосфері,  $\sigma$  – коефіцієнт розпаду, який характеризує, скільки аерозолі розпадається при взаємодії зі складовими повітря, векторна функція  $\mathbf{u} = \overline{(u, v, w)}$  описує напрямок та швидкість частинок повітря, де кожен з компонентів  $u, v, w$  – це функція  $x, y, z, t$ , коефіцієнти  $\nu \geq 0$  та  $\mu \geq 0$  відповідно вертикальний та горизонтальний коефіцієнти дифузії. Функція  $f$  – джерело аерозолі.

Задачу розглядатимемо в області  $G$  циліндричної форми з поверхнею  $S$ , яка складається з бічної поверхні циліндра  $\Sigma$ , його нижньої основи  $\Sigma_0$  (при  $z = 0$ ), та його верхньої основи  $\Sigma_H$  (при  $z = H$ ). Враховуючи форму області та фізичні характеристики процесу рівняння (3.61) доповнимо наступними

крайовими умовами:

$$\begin{aligned}\varphi &= 0 \quad \text{на } \Sigma, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= \alpha \varphi \quad \text{на } \Sigma_0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0 \quad \text{на } \Sigma_H,\end{aligned}\tag{3.62}$$

$\alpha$  – деяка функція, що характеризує взаємодію аерозолію з земною поверхнею. В якості початкової умови візьмемо  $\varphi = \varphi_0$ , це означає наявність в початковий момент часу деякої концентрації досліджуваного аерозолію, просторова інтенсивність якого описується функцією  $\varphi_0$ .

Припустимо, що потрібно розмістити нове промислове підприємство поблизу населених пунктів, зон відпочинку й інших екологічно значимих зон з такою умовою, щоб сумарне річне їхнє забруднення від шкідливих промислових викидів не перевищувало припустимих санітарних норм і щоб загальне екологічне навантаження на весь регіон за рахунок його забруднення була мінімальною або в межах глобальних санітарних норм. Нехай промислове підприємство викидає в атмосферу в одиницю часу на висоті  $z = h$  шкідливий аерозоль з інтенсивністю  $Q$ , що потім переноситься повітряними масами й дифундує під впливом дрібномасштабної турбулентності. Припустимо, що джерело аерозолію розташовується в околі точки  $r_0 = (x_0, y_0, h)$ . Тоді воно може бути описане функцією

$$f(r) = Q\delta(r - r_0),\tag{3.63}$$

а рівняння (3.61) перетвориться до вигляду

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi + \sigma \varphi = \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varphi + Q\delta(r - r_0).\tag{3.64}$$

За крайові умови використаємо (3.62). Оскільки розглядувана тут модель розповсюдження промислових викидів передбачає, що джерело викидів володіє незалежною від часу інтенсивністю та зафіксоване просторово природнім є припущення про те, що розв'язок (3.64) має буде стійким по часу, а його

усереднення за деякий період часу  $T$  повинно бути еквівалентно стаціонарному розподілу [119]. Такі еволюційні властивості розв'язку забезпечуються наступною періодичною по часу умовою

$$\varphi(0) = \varphi(T) \quad (3.65)$$

### 3.3.1 Абстрактна постановка задачі та існування розв'язку

Розглянемо задачу для диференціального рівняння першого порядку зі сталим необмеженим операторним коефіцієнтом в банаховому просторі  $X$ , що узагальнює модель поширення забруднень описану вище:

$$\begin{aligned} u'_t + [A + Ig(t)]u &= f(t), \quad t \in [0, T], \\ u(0) &= u(T), \end{aligned} \quad (3.66)$$

де  $g(t)$ ,  $f(t)$  – задані векторно-значні функції зі значеннями в банаховому просторі  $X$ , причому  $Ag(t) = g(t)A$ ,  $u_0 \in X$  – задано. Оператор  $A$  з області визначення  $D(A)$  в  $X$  є щільно визначеним сильно позитивним (секторіальним) (див. підрозд. 1.10). У нашому випадку оператор  $A$  задається наступним чином:

$$A\psi = \operatorname{div} \mathbf{u}\psi + \sigma\psi - \left[ \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \psi}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right] \psi, \quad (3.67)$$

з областю визначення

$$D(A) = \{ \psi \mid \psi \in W_2^1(G) \cap C^1(\bar{G}) \},$$

Функція  $f(t)$ , яка задає інтенсивність та розміщення джерела забруднення в рівнянні (3.64) від часу (змінна  $t$ ) не залежить

$$f(t) = Q\delta(r - r_0).$$

Як зазначалось раніше, за теоремою Хілле-Йосіда-Філіпса [13], сильно позитивний оператор  $A$  є генератором однопараметричної напівгрупи і розв'язок задачі (3.66) можна зобразити у вигляді

$$u(t) = e^{-At - \int_0^t g(s) ds} u(0) + \int_0^t e^{-A(t-\tau) - \int_\tau^t g(s) ds} f(\tau) d\tau. \quad (3.68)$$

Задача (3.66) є багатоточковою задачею виду (3.1), а саме при  $n = 1$ ,  $t_n = T$ ,  $\alpha_n = -1$ ,  $u_0 = 0$ ). Подібно до випадку в підрозділі 3.1 (див. також [37, 111]) існування розв'язку залежатиме від розв'язності рівняння

$$u(0) - u(T) = 0 \quad (3.69)$$

Поклавши

$$B^{-1}(A) \equiv \left( I - e^{-AT - \int_0^T g(s) ds} \right)^{-1},$$

розв'язок (3.66) має зображення

$$\begin{aligned} u(t) = & e^{-At - \int_0^t g(s) ds} B^{-1} \int_0^T e^{-(A(T-\tau) + \int_\tau^T g(s) ds)} f(\tau) d\tau \\ & + \int_0^t e^{-A(t-\tau) - \int_\tau^t g(s) ds} f(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (3.70)$$

Яке буде справедливе при виконанні умови

$$\begin{aligned} \left\| I - e^{-AT - \int_0^T g(s) ds} \right\| & \geq \left| 1 - \left\| e^{-AT} e^{-\int_0^T g(s) ds} \right\| \right| \geq \\ & \geq \left| 1 - e^{-\rho_0 T} e^{-\left\| \int_0^T g(s) ds \right\|} \right| > 0, \end{aligned}$$

Для того щоб перейти безпосередньо до наближення розв'язку нам потрібно підібрати контур що охоплює спектр оператора  $A$ . Гіперболу, що охоплює спектр  $A$  та описується рівнянням (2.27) будемо називати спектральною гіперболою. Вона має вершину в  $(\rho, 0)$  і асимптоти, що паралельні до променів спектрального кута  $\Sigma$  з розхилом який дорівнює  $\varphi$ .

Для зображення операторних функцій використовуємо інтеграл Данфорда-Коші з підрозділу 1.4 (див. також [14, 75]). За контур інтегрування виберемо (2.28) з параметрами (3.17).

**3.3.2 Чисельні методи наближення розв'язків** Для побудови наближеного розв'язку задачі (3.66) використаємо метод з підрозділу 3.1. Запишемо її розв'язок у вигляді

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t), \quad (3.71)$$

де

$$\begin{aligned}
 u_1(t) &= e^{-At - \int_0^t g(s) ds} B^{-1} \int_0^T e^{-(A(T-\tau) + \int_\tau^T g(s) ds)} f(\tau) d\tau \\
 u_2(t) &= \int_0^t e^{-A(t-\tau) - \int_\tau^t g(s) ds} f(\tau) d\tau.
 \end{aligned}
 \tag{3.72}$$

$u_2(t)$  збігається з неоднорідною частиною розв'язку  $u_{1,ih}$  з (3.24) і тому для нього можна використати наближення (3.26). Похибку цього наближення, а також необхідні умови на початкові дані задачі наведені в Теоремі 3.2. Для  $u_1(t)$  побудуємо наступне наближення:

$$\begin{aligned}
 u_1(t) \approx u_{1,N}(t) &= \frac{h}{2\pi i} \sum_{k=-N}^N e^{-z(kh)t} \frac{z'(kh)}{1 - e^{\nu_0}} \\
 &\times \left[ (z(kh)I - A)^{-1} - \frac{1}{z(kh)} I \right] h \sum_{p=-N}^N \mu_{k,p}(T) f(\omega_p(T)),
 \end{aligned}
 \tag{3.73}$$

де  $\mu_{k,p}(T)$ ,  $\nu_0$ ,  $\omega_p(T)$ ,  $z(kh)$ ,  $z'(kh)$  визначені в (3.26). Для похибки справедлива Теорема 3.3.

**3.3.3 Обчислення розподілу забруднюючого аерозолі в атмосфері** В цьому підрозділі наведемо декілька обчислювальних експериментів, в яких знаходиться розподіл забруднюючих аерозолів в атмосфері. Відмітимо, що метод, наведений в попередньому підрозділі дозволяє проводити обчислення паралельно на двох рівнях. Перше – це обчислення розподілу в різні моменти часу, а друге – обчислення резольвент оператора в точках  $z(kh)$ . Для наближеного обчислення резольвенти (що є крайовою задачею для еліптичного рівняння) ми будемо застосовувати пакет програм deal.II призначений для розв'язування диференціальних рівнянь в частинних похідних за допомогою MCE [120]. Цей пакет забезпечує необхідну інфраструктуру для використання методу скінченних елементів використовуючи в своїй реалізації сучасні техніки об'єктно орієнтованого програмування та інкапсуляції даних,

що дозволяє легко пристосовувати його для конкретних потреб не вникаючи при цьому в деталі реалізації МСЕ. Інструментарій пакету deal.II дозволяє автоматизувати більшість етапів чисельного розв'язування заданого диференціального рівняння за допомогою МСЕ, зокрема: триангуляція геометрії та генерація сіток з використанням різних видів скінченних елементів; необхідні базові маніпуляції з простором шаблонних функцій для вибраного набору скінченних елементів а також адресація утвореної множини степенів свободи; асемблювання дискретного лінійного або лінеаризованого аналогу вихідної системи з використанням однієї з багатьох, вбудованих в бібліотеку deal.II, квадратурних формул; розв'язування, отриманої після асемблювання розрідженої системи та подальша обробка знайденого розв'язку. Крім цього пакет deal.II підтримує інтеграцію з багатьма відомими чисельними пакетами програм розширюючи таким чином область свого застосування та збільшуючи гнучкість в реалізації кінцевої програми.

Щоб зберегти всі обчислювальні переваги наближення розв'язку задач (3.66) розроблена нами програма використовує доступну в deal.II можливість розпаралелювання методами стандарту MPI більшості етапів застосування МСЕ, а також наявну в цьому пакеті підтримку розв'язування розріджених лінійних систем за допомогою бібліотеки PETSc. Це дозволяє досягти дворівневого паралелізму обчислень, описаного вище, і практично зняти будь-які обмеження, щодо масштабування розробленої програми на доступні в обчислювальній системі процесори.

**Приклад 3.6** *Підберемо  $u_0$  таким чином щоб точне значення резольвенти мало вигляд*

$$v = \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) (a \sin(1/2 \pi x_3) + c).$$

*Таке значення  $v$  при підстановці в крайові умови (3.62) приводить до того, що параметр  $\alpha$  з цих крайових умов матиме вигляд  $\alpha = \frac{\pi a}{2c}$ . Підставимо значення  $v$  в рівняння для визначення резольвенти, де  $A$  визначено форму-*

лою (3.67), матимемо

$$\begin{aligned}
-(Av - zv) &= - \left( \left\{ \mathbf{u}\nabla + \sigma - \left[ \frac{\partial}{\partial x_3} \nu \frac{\partial}{\partial x_3} + \mu \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \right] \right\} v - zv \right) \\
&= - 2 \mu \sin(\pi x_1) \pi^2 \sin(\pi x_2) (a \sin(1/2 \pi x_3) + c) - \\
&\quad - 1/4 \nu \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) a \sin(1/2 \pi x_3) \pi^2 - \\
&\quad - \sigma \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) (a \sin(1/2 \pi x_3) + c) - \\
&\quad - (u) \cos(\pi x_1) \pi \sin(\pi x_2) (a \sin(1/2 \pi x_3) + c) - \tag{3.74} \\
&\quad - v \sin(\pi x_1) \cos(\pi x_2) \pi (a \sin(1/2 \pi x_3) + c) - \\
&\quad - 1/2 w \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) a \cos(1/2 \pi x_3) \pi + \\
&\quad + z \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) (a \sin(1/2 \pi x_3) + c) \equiv u_0.
\end{aligned}$$

Щоб порівнювати точний розв'язок  $u_0$  з наближеним розв'язком  $u_{appr}$ , введемо в розгляд величину  $err(r) = u_{appr}(r) - u_0(r)$ ,  $r \in [0, 1]^3$  яку називатимемо похибкою наближення.

На Рис. 3.2 зображено тривимірний розподіл похибки  $err(r)$  наближення дії резольвенти на  $u_0$  з (3.74) для якого використовувались наступні значення параметрів:

$$u = 4, v = -1, w = 0,$$

$$\nu = 1, \mu = 1, \sigma = 2,$$

$$a = 1, c = 1.$$

Наближений розв'язок має вигляд наведений на Рис. 3.3.

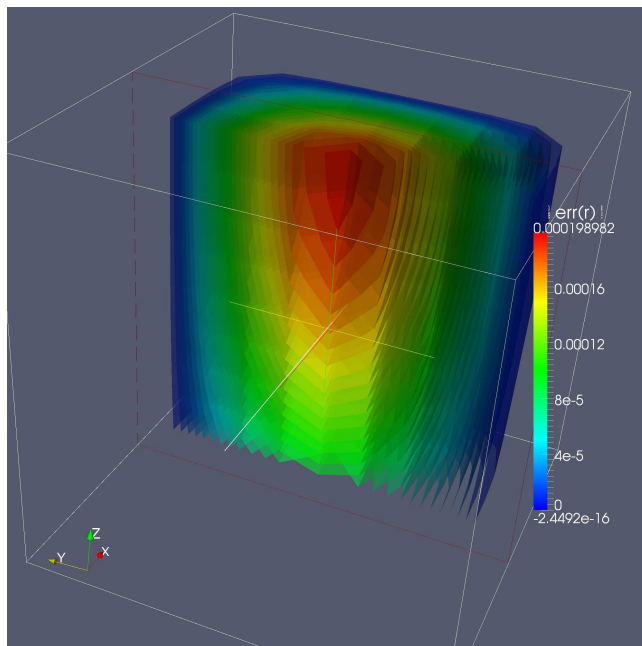


Рис. 3.2: Тривимірний розподіл похибки  $err(r)$  наближення дії резольвенти на  $u_0$  визначеного у прикладі 3.6 (фрагмент поверхонь рівня функції  $err(r)$ , що зображений на рисунку утворений перетином рівнів  $err(r)$  з множиною  $x \geq 0.5$ )

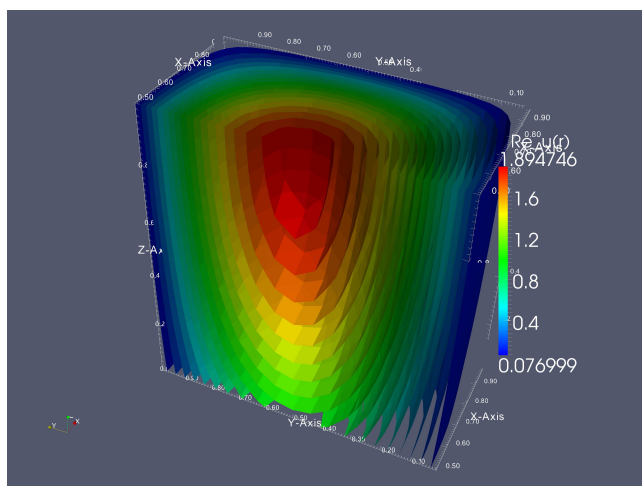


Рис. 3.3: Тривимірний вигляд  $u_{appr}(r)$  — наближення дії резольвенти на  $u_0$  визначеного у прикладі 3.6 (фрагмент поверхонь рівня функції  $u_{appr}(r)$ , що зображений на рисунку утворений перетином рівнів  $u_{appr}(r)$  з множиною  $x \geq 0.5$ )



### 3.4 Експоненціально збіжний метод для задачі з обмеженим оператором в нелокальній умові

В цьому підрозділі розглянуто наступну задачу для диференціального рівняння першого порядку зі сталим операторним коефіцієнтом в банаховому просторі та двоточковою нелокальною умовою:

$$\begin{aligned} u'_t + Au &= f(t), \quad t \in (0, T] \\ u(0) + Bu(T) &= u_0, \quad 0 < T, \end{aligned} \tag{3.75}$$

де  $B : X \rightarrow X$  – обмежений оператор,  $f(t)$  – задана векторно-значна функція зі значеннями в банаховому просторі  $X$ ,  $u_0 \in X$ . Оператор  $A$  з областю визначення  $D(A)$  в банаховому просторі  $X$  є секторіальним див. підрозд. 1.10. Тобто, його спектр розташовано в секторі (1.28), а для резольвенти на межі цього сектора та зовні виконується оцінка (1.29).

**3.4.1 Існування та зображення розв’язку** Припустимо, що оператор  $B$  є обмеженим в банаховому просторі  $X$ , тобто  $\|B\| \leq c < \infty$ .

Задачу (3.75) можна привести до однорідної наступним чином. Нехай  $u = v + w$ , де  $v$  – розв’язок задачі

$$\begin{aligned} v'_t + Au &= f(t), \quad t \in (0, T] \\ v(0) &= 0. \end{aligned}$$

Тоді для  $w(t)$  ми отримаємо задачу

$$\begin{aligned} w'_t + Aw &= 0, \quad t \in (0, T] \\ w(0) + Bw(T) &= u_0 - B \int_0^T e^{-A(T-\tau)} f(\tau) d\tau = \tilde{u}_0, \quad 0 < T. \end{aligned}$$

Відмітимо, що експоненціально збіжний метод для наближення  $v(t)$  розроблено в підрозділі 2.4 (див. також [3, 78]). Отже далі будемо розглядати однорідну задачу (3.75) ( $f(t) \equiv 0$ ).

За теоремою Хіле-Йосіди-Філіпса [13] сильно позитивний оператор  $A$  є генератором однопараметричної напівгрупи  $T(t) = e^{-tA}$  і розв'язок задачі (3.75) можна записати у вигляді (див. (1.32)):

$$u(t) = e^{-At}u(0). \quad (3.76)$$

Поєднуючи нелокальні умови з (3.75) та (3.76), отримаємо

$$u(0) + Be^{-AT}u(0) = u_0,$$

звідки маємо

$$u(0) = [I + Be^{-AT}]^{-1}u_0,$$

коли  $[I + Be^{-AT}]^{-1}$  існує. Тут  $I$  – одиничний оператор. Отже, з (3.76) маємо

$$u(t) = e^{-At} [I + Be^{-AT}]^{-1}u_0.$$

Дослідимо умови існування  $[I + e^{-AT}B]^{-1}$ . Маємо

$$\| [I + e^{-AT}B]^{-1} \| \leq (1 - \|e^{-AT}B\|)^{-1} \leq (1 - \|B\|)^{-1} \leq c < \infty,$$

у випадку

$$\|B\| < 1. \quad (3.77)$$

**Зауваження 3.1** У випадку коли оператор  $A$  є додатно визначеним та самоспряженим  $A = A^* \geq \lambda_0 I$ ,  $\lambda_0 > 0$  достатня умова існування оберненого оператора може бути послаблена по відношенню до (3.77). Наприклад, якщо  $B = A$  тоді, використовуючи спектральне інтегральне зображення матимемо

$$\|Be^{-AT}\| = \left\| \int_{\lambda_0}^{\infty} e^{-\lambda T} \lambda dE_{\lambda} \right\| \leq \frac{e^{-1}}{T} \int_{\lambda_0}^{\infty} \|dE_{\lambda}\| = \frac{e^{-1}}{T}.$$

Тому, для  $T > e^{-1}$  отримаємо

$$\| [I + e^{-AT}B]^{-1} \| \leq [1 - \|e^{-AT}A\|]^{-1} < \left[ 1 - \frac{e^{-1}}{T} \right]^{-1} = \frac{T}{T - e^{-1}} < \infty.$$

**3.4.2 Наближення** В цьому підрозділі побудуємо експоненціально збіжне наближення розв'язку однорідної задачі (3.75) з припущеннями (3.77). Додатково будемо вважати, що оператори  $A$  та  $B$  комутують:  $AB = BA$ .

Використовуючи зображення Данфорда-Коші для  $u(t)$  (див. підрозд. 1.4) аналогічно до попередніх підрозділів отримаємо

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_I} e^{-zt} [I + e^{-zT} B]^{-1} (zI - A)^{-1} u_0 dz.$$

Це зображення має місце тільки коли функція  $e^{-zt} [I + e^{-zT} B]^{-1}$  є аналітичною в області, обмеженій  $\Gamma_I$ . Покажемо, що умова (3.77) гарантує таку аналітичність.

Фактично, аналітичність  $e^{-zt} [I + e^{-zT} B]^{-1}$  порушується коли  $e^{-zT} B = -I$ , в цьому випадку функція стає необмеженою. Для довільного  $z$  маємо

$$\|I + B e^{-zT}\| \geq |1 - \|B\|| > 0,$$

це означає, що (3.77) вірна.

Як і в попередніх розділах будемо використовувати модифіковану резольвенту, тому для  $u(t)$  маємо

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_I} e^{-zt} [I + e^{-zT} B]^{-1} \left[ (zI - A)^{-1} - \frac{1}{z} I \right] u_0 dz. \quad (3.78)$$

Після параметризації інтегралу (3.78) за допомогою (2.28) отримаємо

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(t, \xi) d\xi, \quad (3.79)$$

де

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t, \xi) &= F_A(t, \xi) u_0, \\ F_A(t, \xi) &= e^{-z(\xi)t} z'(\xi) [I + B e^{-z(\xi)T}]^{-1} \left[ (z(\xi)I - A)^{-1} - \frac{1}{z(\xi)} I \right], \\ z'(\xi) &= a_I \sinh \xi - ib_I \cosh \xi. \end{aligned}$$

Припускаючи  $u_0 \in D(A^\alpha)$ ,  $0 < \alpha < 1$  використаємо оцінку (3.14). Частина, що відповідає за нелокальну умову в (3.79), оцінюється як

$$\left\| \left( I + B e^{-z(\xi)T} \right)^{-1} \right\| \leq (1 - \|B\|)^{-1} = Q.$$

Отже, для  $\mathcal{F}(t, \xi)$ , з врахуванням комутативності  $A$  та  $B$  маємо:

$$\|\mathcal{F}(t, \xi)\| \leq Q(1 + M)K \frac{b_I}{a_I} \left(\frac{2}{a_I}\right)^\alpha e^{-a_I t \cosh \xi - \alpha|\xi|} \|A^\alpha u_0\|, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0.$$

Виберемо параметри гіперболи інтегрування у вигляді (3.16), (3.17). Для таких  $a_I$  та  $b_I$  векторно-значна функція  $\mathcal{F}(t, w)$  є аналітичною в смузі  $D_{d_1}$  відносно  $w = \xi + i\nu$  для довільного  $t \geq 0$  аналогічно підрозділу 3.1. Так само як і в пункті 3.1.2 для  $w \in D_{d_1}$  маємо оцінку

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(t, w)\| &\leq e^{-a(\nu)t \cosh \xi} \frac{(1 + M)QK \sqrt{a^2(\nu) \sinh^2 \xi + b^2(\nu) \cosh^2 \xi}}{(a^2(\nu) \cosh^2 \xi + b^2(\nu) \sinh^2 \xi)^{(1+\alpha)/2}} \|A^\alpha u_0\| \\ &\leq (1 + M)QK \frac{b(\nu)}{a(\nu)} \frac{e^{-a(\nu)t \cosh \xi}}{(a^2(\nu) \cosh^2 \xi + b^2(\nu) \sinh^2 \xi)^{(\alpha/2)}} \|A^\alpha u_0\| \\ &\leq (1 + M)QK \frac{b(\nu)}{a(\nu)} \left(\frac{2}{a(\nu)}\right)^\alpha e^{-a(\nu)t \cosh \xi - \alpha|\xi|} \|A^\alpha u_0\| \\ &\leq (1 + M)QK \tan\left(\frac{d_1}{2} + \varphi - \nu\right) \left(\frac{2 \cos \varphi}{\rho_0 \cos\left(\frac{d_1}{2} + \varphi - \nu\right)}\right)^\alpha e^{-\alpha|\xi|} \|A^\alpha u_0\|, \\ &\quad \forall w \in D_d. \end{aligned}$$

Аналогічно до попередніх підрозділів оцінка для  $\|\mathcal{F}(t, w)\|$  має вигляд

$$\|\mathcal{F}(t, \cdot)\|_{\mathbf{H}^1(D_{d_1})} \leq C(\varphi, \alpha) \|A^\alpha u_0\|,$$

де

$$\begin{aligned} C(\varphi, \alpha) &= \frac{2}{\alpha} [C_+(\varphi, \alpha) + C_-(\varphi, \alpha)], \\ C_\pm(\varphi, \alpha) &= (1 + M)QK \tan\left(\frac{d_1}{2} + \varphi \pm \frac{d_1}{2}\right) \left(\frac{2 \cos \varphi}{\rho_0 \cos\left(\frac{d_1}{2} + \varphi \pm \frac{d_1}{2}\right)}\right)^\alpha. \end{aligned}$$

Як і раніше на  $C(\varphi, \alpha)$  впливає як гладкість  $u_0$ , що визначається  $\alpha$  так і спектральні характеристики оператора  $A$ , задані  $\varphi$  та  $\rho_0$ .

Наблизимо інтеграл (3.79) Sinc-квадратурою з підр. 1.3 (а також [3, 78]):

$$u_N(t) = \frac{h}{2\pi i} \sum_{k=-N}^N \mathcal{F}(t, z(kh)), \quad (3.80)$$

яка має похибку наближення

$$\begin{aligned} \|\eta_N(\mathcal{F}, h)\| &= \|u(t) - u_{h,N}(t)\| \leq \\ &\leq \|u(t) - \frac{h}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(t, z(kh))\| + \|\frac{h}{2\pi i} \sum_{|k|>N} \mathcal{F}(t, z(kh))\| \leq \\ &\leq \frac{c\|A^\alpha u_0\|}{\alpha} \left\{ \frac{e^{-\pi d_1/h}}{\sinh(\pi d_1/h)} + \exp[-a_I t \cosh((N+1)h) - \alpha(N+1)h] \right\}, \end{aligned}$$

де стала  $c > 0$  не залежить від  $h, N, t$ . Урівнюючи дві експоненти для  $t = 0$  як в (2.33), отримаємо оцінку похибки

$$\|\eta_N(\mathcal{F}, h)\| \leq \frac{c}{\alpha} \exp\left(-\sqrt{\frac{\pi d_1 \alpha}{2}}(N+1)\right) \|A^\alpha u_0\|, \quad (3.81)$$

зі сталою  $c > 0$  не залежною від  $t, N$ . У випадку  $t > 0$  покладемо  $h = c_1 \ln N/N$  з деякою невід'ємною сталою  $c_1$ , тоді похибка матиме вигляд

$$\|\eta_N(\mathcal{F}, h)\| \leq c \left[ e^{-\pi d_1 N/(c_1 \ln N)} + e^{-c_1 a_I t N/2 - c_1 \alpha \ln N} \right] \|A^\alpha u_0\|. \quad (3.82)$$

Таким чином, ми довели наступну теорему.

**Теорема 3.5** *Нехай  $A$  – щільно визначений сильно позитивний оператор,  $u_0 \in D(A^\alpha)$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ . Тоді (3.80) є наближенням розв'язку однорідної не-локальної задачі (3.75) і має експоненціальну швидкість збіжності, яка є рівномірною по  $t \geq 0$  порядку  $\mathcal{O}(e^{-c\sqrt{N}})$  при  $h = (1/\sqrt{N})$  (оцінка (3.81)). Для  $h = \ln N/N$  і кожного фіксованого  $t > 0$  наближення має порядок  $\mathcal{O}(\max\{e^{-\pi d N/(c_1 \ln N)}, e^{-c_1 a_I t N/2 - c_1 \alpha \ln N}\})$  (оцінка (3.82)). Додатні сталі  $c, c_1$  не залежать від  $t, N$ .*

### 3.4.3 Чисельний приклад

Розглянемо задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0,$$

$$u(x, 0) + Bu(x, 1) = u_0,$$

де

$$u(x, t) = \begin{pmatrix} u_1(x, t) \\ u_2(x, t) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$$u_0(x, t) = \begin{pmatrix} (1 + 0.2e^{-\pi^2}) \sin(\pi x) + 0.1e^{-4\pi^2} \sin(2\pi x) \\ 0.1e^{-\pi^2} \sin(\pi x) + (1 + 0.4e^{-4\pi^2}) \sin(2\pi x) \end{pmatrix},$$

В цьому випадку точний розв'язок має вигляд

$$u(x, t) = \begin{pmatrix} \sin(\pi x) \\ \sin(2\pi x) \end{pmatrix},$$

В таблиці 3.5 наведено похибку обчислення розв'язку за допомогою побудованого в цьому підрозділі методу

N	$\varepsilon_{1,N}$	$\varepsilon_{2,N}$
8	0.4686576088595737062e-1	0.1900886270925846e-2
16	0.934021577137014178e-2	0.852946984325721275711e-4
32	0.1546349721567053042e-3	0.810358320985172283872e-5
64	0.0159641801061596051e-3	0.01035505780238307696e-5
128	0.735484912605954949e-5	0.91841759148488051333e-6
256	0.146908016254907436e-7	0.24806555113840622551e-7
512	0.8577765610e-8	0.1165963141e-8
1024	0.7339799837e-11	0.1591565422e-11

Таблиця 3.5: Похибка для  $x = 0.5$ ,  $t = 0.5$ .

Згідно теореми 3.5 похибка є  $\varepsilon_N = \mathcal{O}\left(e^{-c\sqrt{N}}\right)$ . Стала  $c$  в експоненті може бути оцінена, використовуючи апостеріорну оцінку:

$$c = \ln\left(\frac{\varepsilon_N}{\varepsilon_{2N}}\right) (\sqrt{2} - 1)^{-1} N^{-1/2} = \ln(\mu_N) (\sqrt{2} - 1)^{-1} N^{-1/2}.$$

Чисельні результати для оцінки сталої  $c$  наведені в таблиці 3.6. Відмітимо, що  $c \approx 1.5$

N	$c$
4	2.372652515388745588587496
8	1.120148732795449515627946
16	1.458741976765153165445005
32	1.527648924601130131250452
64	1.476794596387591759032900
128	1.499935011373075736075927
256	1.506597339081609844717370

Таблиця 3.6: Оцінка сталої  $c$ 

### 3.5 Метод без насичення точності для нелокальної двоточної задачі для еволюційного рівняння першого порядку

В цьому підрозділі розглянемо двоточкову нелокальну задачу для еволюційного рівняння першого порядку

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} + A_1(t)u(t) &= f_1(t), \\ u(0) + \alpha u(1) &= \varphi, \end{aligned} \tag{3.83}$$

де  $A_1(t)$ – секторіальний оператор з областю визначення  $D(A_1)$ , що не залежить від  $t$  в банаховому просторі  $X$ ,  $\varphi$ – заданий вектор, а  $f_1(t)$ – задана векторно-значна функція,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Для  $A_1(t)$  існує невід’ємна стала  $M_R$  незалежна від  $t$  така, що на границі сектора  $\Sigma_\varphi = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \arg(z) \leq \varphi, \varphi \in (0, \pi/2)\}$  та за його межами виконується оцінка:

$$\|(zI - A_1(t))^{-1}\| \leq \frac{M_R}{1 + |z|}. \tag{3.84}$$

З цього припущення випливає, що існує невід'ємна стала  $c_\kappa$  така, що (див. [90], р.103)

$$\|A_1^\kappa(t)e^{-sA_1(t)}\| \leq c_\kappa s^{-\kappa}, \quad s > 0, \quad \kappa \geq 0. \quad (3.85)$$

Припустимо також, що  $\exists \omega > 0$ :

$$\|e^{-sA_1(t)}\| \leq e^{-\omega s} \quad \forall s, t \in [0, 1] \quad (3.86)$$

(див. [15], Corollary 3.8, p.12). Нехай

$$\|[A_1(t) - A_1(s)]A_1^{-\gamma}(t)\| \leq L_{1,\gamma}|t - s| \quad \forall t, s, 0 \leq \gamma < 1, \quad (3.87)$$

$$\|A_1^\gamma(t)A_1^{-\gamma}(s) - I\| \leq L_\gamma|t - s| \quad \forall t, s \in [0, 1]. \quad (3.88)$$

Векторно-значна функція  $f_1(t)$  є нерозривною:

$$f_1(t) \in C(0, 1; X). \quad (3.89)$$

Метою даного підрозділу є побудова наближення без насичення точності розв'язку задачі (3.83).

**3.5.1 Існування та єдиність розв'язку** Відомо, що для  $\alpha = 0$  задача (3.83) має єдиний розв'язок при виконанні умов (3.84)-(3.89) (див. напр. [14, 15]). Цей розв'язок може бути записаний у вигляді:

$$u(t) = U(t, 0)u(0) + \int_0^t U(t, s)f_1(s)ds = U(t, 0)\varphi + \int_0^t U(t, s)f_1(s)ds, \quad (3.90)$$

де  $U(t, s)$ – еволюційний оператор, що відповідає (3.83) при  $\alpha = 0$ .

Вивчимо умови, при яких існує єдиний розв'язок задачі (3.83). З (3.90) маємо

$$u(1) = U(1, 0)u(0) + \int_0^1 U(1, s)f_1(s)ds.$$

Підставляючи це в нелокальну умову, отримаємо

$$u(0) = [I + \alpha U(1, 0)]^{-1} \left[ \varphi - \alpha \int_0^1 U(1, s)f_1(s)ds \right],$$



і для  $u(t)$  маємо

$$u(t) = U(t, 0) [I + \alpha U(1, 0)]^{-1} \left[ \varphi - \alpha \int_0^1 U(1, s) f_1(s) ds \right] + \int_0^t U(t, s) f_1(s) ds.$$

Необхідно встановити умови на  $\alpha$  для існування  $u(t)$ . Фактично, нам потрібно дослідити існування  $[I + \alpha U(1, 0)]^{-1}$ . Отож, використовуючи оцінку для  $U(t, s)$  (див. [15, 121]), отримаємо

$$\left\| [I + \alpha U(1, 0)]^{-1} \right\| \leq [1 - |\alpha| \|U(1, 0)\|]^{-1} \leq [1 - |\alpha| M]^{-1} \leq C,$$

для достатньо малого  $\alpha$  ( $\alpha < M^{-1}$ ).

**3.5.2 Чисельний метод** Для побудови чисельного наближення для (3.83) використаємо техніку, побудовану в [3] і [122] (див. також попередній розділ). Спочатку замінімо змінну в (3.83) за допомогою  $t \rightarrow \frac{1+t}{2}$  і для  $v(t) = u\left(\frac{1+t}{2}\right)$  маємо

$$\begin{aligned} \frac{dv(t)}{dt} + A(t)v(t) &= f(t), \\ v(-1) + \alpha v(1) &= \varphi, \end{aligned} \tag{3.91}$$

де  $A(t) = \frac{1}{2}A_1\left(\frac{1+t}{2}\right)$ ,  $f(t) = \frac{1}{2}f_1\left(\frac{1+t}{2}\right)$ .

Виберемо сітку  $\omega_n = \{t_k, k = 0, \dots, n\}$  з  $n+1$  точки на  $[-1, 1]$  що є вузлами Чебишева-Гауса-Лобато  $t_k = \cos\left(\frac{n-k}{n}\pi\right)$  і покладемо  $\tau_k = t_k - t_{k-1}$ . Нехай

$$\begin{aligned} \bar{A}(t) &= A_k = A(t_k), t \in (t_{k-1}, t_k], \quad k = \overline{1, n}, \\ A_0 &= A(-1). \end{aligned}$$

Перепишемо задачу (3.91) в еквівалентному вигляді

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} + \bar{A}(t)v &= [\bar{A}(t) - A(t)]v(t) + f(t), \quad t \in (-1, 1) \\ v(-1) &= \varphi - \alpha v(1). \end{aligned} \tag{3.92}$$

Відмітимо, що зараз всі оператори зліва в цих рівняннях є сталими на кожному підінтервалі і кусково сталими на  $[-1, 1]$ .

На кожному підінтервалі ми можемо записати еквівалентне до (3.92) інтегральне рівняння

$$v(t) = e^{-A_k(t-t_{k-1})}v(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^t e^{-A_k(t-s)} [A_k - A(t)] v(s)ds + \int_{t_{k-1}}^t e^{-A_k(t-s)} f(s)ds, \quad t \in [t_{k-1}, t_k], \quad k = \overline{2, n}, \quad (3.93)$$

$$v(t) = e^{-A_1(t+1)} [\varphi - \alpha v(1)] + \int_{-1}^t e^{-A_1(t-s)} [A_1 - A(t)] v(s)ds + \int_{-1}^t e^{-A_1(t-s)} f(s)ds, \quad t \in [-1, t_1].$$

Нехай

$$P_n(t; v) = P_n v = \sum_{j=0}^n v(t_j) L_{j,n}(t),$$

є інтерполяційним поліномом для  $v(t)$  на сітці  $\omega_n$ ,  $x = (x_0, \dots, x_n)$ ,  $x_i \in X$  для заданого вектора

$$P_n(t; y) = P_n x = \sum_{j=0}^n x_j L_{j,n}(t)$$

є інтерполяційним поліномом, де

$$L_{j,n}(s) = \frac{T'_n(s)(1-s^2)}{\frac{d}{ds}[(1-s^2)T'_n(s)]_{s=s_j}(s-s_j)}, \quad j = 0, \dots, n$$

є фундаментальними поліномами Лагранжа. Підставляючи  $P_n(s; x)$  замість  $v(s)$ ,  $x_k$  замість  $v(t_k)$  і далі покладаючи  $t = t_k$  в (3.93), ми отримуємо наступну систему лінійних рівнянь відносно невідомих  $x_k$  :

$$x_0 + \alpha x_n = \varphi, \quad (3.94)$$

$$x_k = e^{-A_k \tau_k} x_{k-1} + \sum_{j=0}^n \alpha_{kj} x_j + \phi_k, \quad k = \overline{1, n},$$

що подає наш алгоритм. Тут ми використали позначення

$$\alpha_{kj} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-A_k(t_k-s)} [A_k - A(s)] L_{j,n}(s) ds,$$

$$\phi_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-A_k(t_k-s)} f(s) ds, \quad k = \overline{1, n}, \quad j = \overline{0, n},$$

і припускаємо, що ми маємо метод для обчислення цих коефіцієнтів.

Для похибки  $z = (z_1, \dots, z_n)$ , де  $z_k = v(t_k) - x_k$  маємо співвідношення

$$\begin{aligned} z_0 + \alpha z_n &= 0, \\ z_k &= e^{-A_k \tau_k} z_{k-1} + \sum_{j=0}^n \alpha_{kj} z_j + \psi_k, \quad k = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (3.95)$$

де

$$\psi_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-A_k(t_k-s)} [A_k - A(s)] [v(s) - P_n(s; v)] ds, \quad k = \overline{1, n},$$

Для запису (3.94) в блочно-матричному вигляді, введемо матрицю

$$S = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \alpha \sigma_0 \\ -\sigma_1 & I & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 & I & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -\sigma_n & I \end{pmatrix}, \quad (3.96)$$

де  $\sigma_0 = A_0^\gamma A_n^{-\gamma}$ ,  $\sigma_k = e^{-A_k \tau_k} A_k^\gamma A_{k-1}^{-\gamma}$ ,  $k = \overline{1, n}$ , матрицю  $B = \{\tilde{\alpha}_{k,j}\}_{k,j=0}^n$  з  $\tilde{\alpha}_{k,j} = A_k^\gamma \alpha_{k,j} A_j^{-\gamma}$ ,  $k = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{0, n}$ , і  $\tilde{\alpha}_{0,j} = 0$ ,  $j = \overline{0, n}$ , вектори

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} A_0^\gamma x_0 \\ A_1^\gamma x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ A_n^\gamma x_n \end{pmatrix}, \quad \phi = \begin{pmatrix} A_0^\gamma \varphi \\ A_1^\gamma \phi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ A_n^\gamma \phi_n \end{pmatrix}, \quad \tilde{z} = \begin{pmatrix} A_0^\gamma z_0 \\ A_1^\gamma z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ A_n^\gamma z_n \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ A_1^\gamma \psi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ A_n^\gamma \psi_n \end{pmatrix}. \quad (3.97)$$

Легко перевірити, що для оберненої матриці виконується

$$S^{-1} = \delta (R_1 - R_2),$$

де

$$\delta = (I + \alpha \sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_n)^{-1},$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sigma_1 & I & \cdots & 0 & 0 \\ \sigma_2\sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \sigma_n \cdots \sigma_1 & \sigma_n \cdots \sigma_2 & \cdots & \sigma_n & I \end{pmatrix},$$

$$R_2 = \alpha s_0 \begin{pmatrix} 0 & \sigma_n \cdots \sigma_2 & \sigma_n \cdots \sigma_3 & \cdots & \sigma_n & I \\ 0 & 0 & \sigma_1\sigma_n \cdots \sigma_3 & \cdots & \sigma_1\sigma_n & \sigma_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \sigma_{n-1} \cdots \sigma_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Зауваження 3.2** Використовуючи результати [3] можна побудувати паралельний метод наближення з експоненціальною швидкістю збіжності для експонент в  $S^{-1}$  і, як наслідок, паралельний метод для матриці  $S^{-1}$ .

Помножимо рівняння в (3.94) і рівняння в (3.95) на  $A_k^\gamma$ ,  $k = \overline{0, n}$  отримаємо

$$A_0^\gamma x_0 + \alpha A_0^\gamma x_n = A_0^\gamma \varphi,$$

$$A_k^\gamma x_k = e^{-A_k \tau_k} A_k^\gamma x_{k-1} + \sum_{j=0}^n \tilde{\alpha}_{kj} A_j^\gamma x_j + A_k^\gamma \phi_k, \quad k = \overline{1, n}, \quad (3.98)$$

$$A_0^\gamma z_0 + \alpha A_0^\gamma z_n = 0,$$

$$A_k^\gamma z_k = e^{-A_k \tau_k} A_k^\gamma z_{k-1} + \sum_{j=0}^n \tilde{\alpha}_{kj} A_j^\gamma z_j + A_k^\gamma \psi_k, \quad k = \overline{1, n}, \quad (3.99)$$

Далі системи (3.98), (3.99) можуть бути записані в матричному вигляді використовуючи позначення (3.96), (3.97) як

$$S\tilde{x} = B\tilde{x} + \phi,$$

$$S\tilde{z} = B\tilde{z} + \psi. \quad (3.100)$$

Далі, для вектора  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$  і блочно-операотрної матриці  $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$  введемо норму

$$\|v\| \equiv \|v\|_1 = \max_{1 \leq k \leq n} \|v_k\|,$$

та породжену матричну норму

$$\|A\| \equiv \|A\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n \|a_{i,j}\|.$$

Згідно (3.88) маємо  $\|A_k^\gamma A_{k-1}^{-\gamma}\| = \|A_k^\gamma A_{k-1}^{-\gamma} - I + I\| \leq 1 + L_\gamma \tau_k$ ,  $\|\sigma_0\| = \|A_0^\gamma A_n^{-\gamma}\| \leq 1 + L_\gamma T$ . В нашому випадку  $T = 2$ . Таким чином, отримаємо

$$\|\sigma_k\| = \|e^{-A_k \tau_k} A_k^\gamma A_{k-1}^{-\gamma}\| \leq e^{-\omega \tau_k} \|A_k^\gamma A_{k-1}^{-\gamma}\| \leq e^{-\omega \tau_k} (1 + L_\gamma \tau_k),$$

$$\begin{aligned} \|\delta\| &= \|(I + \alpha \sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_n)^{-1}\| \leq (1 - |\alpha| \|\sigma_0\| \|\sigma_1\| \|\sigma_2\| \dots \|\sigma_n\|)^{-1} \leq \\ &\leq (1 - |\alpha| (1 + 2L_\gamma) e^{-\omega \tau_1} (1 + L_\gamma \tau_1) e^{-\omega \tau_2} (1 + L_\gamma \tau_2) \dots e^{-\omega \tau_n} (1 + L_\gamma \tau_n))^{-1} \\ &\leq \left(1 - |\alpha| (1 + 2L_\gamma) e^{-2\omega} \left(1 + \frac{2L_\gamma}{n}\right)^n\right)^{-1} \leq \\ &\leq (1 - |\alpha| (1 + 2L_\gamma) e^{-2\omega} e^{2L_\gamma})^{-1} \leq c, \end{aligned}$$

для  $\alpha$  достатньо малих.

Для оцінки норми матриці  $S$  нам потрібно оцінити норми матриць  $R_1$ ,  $R_2$ . В [3] було показано, що для матриці  $R_1$  виконується оцінка  $\|R_1\| \leq cn$ . Оцінимо норму матриці  $R_2$ .

$$\begin{aligned} \|R_2\| &\leq (1 + 2c) (1 + e^{-\omega \tau} (1 + c\tau) + \dots + [e^{-\omega \tau} (1 + c\tau)]^{n-1}) \leq \\ &\leq (1 + 2c) \left(1 + (1 + c\tau) + \dots + (1 + c\tau)^{n-1} \leq \frac{(1 + c\tau)^n - 1}{c\tau}\right) \leq \\ &\leq (1 + 2c) \frac{e^{2c}}{c\tau} \leq cn. \end{aligned}$$

Використовуючи ці оцінки ми отримаємо

$$\|S^{-1}\| \leq cn. \quad (3.101)$$

Для матриці  $B$  в [3] отримано оцінку:

$$\|B\| \leq cn^{\gamma-2} \ln(n). \quad (3.102)$$

Отже, справедлива наступна лема

**Лема 3.2** *Нехай виконуються умови (3.84)-(3.88). Тоді виконуються оцінки (3.101), (3.102).*

Використовуючи (3.100), маємо

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= [E - S^{-1}B]^{-1} S^{-1}\phi, \\ \tilde{z} &= [E - S^{-1}B]^{-1} S^{-1}\psi, \end{aligned} \quad (3.103)$$

де  $E$  є діагональною матрицею з одиничними операторами  $I$  на діагоналі. З леми 3.2 маємо

$$\|S^{-1}B\| \leq cn^{\gamma-1} \ln(n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.104)$$

Це означає, що для достатньо великого  $n$  існує матриця  $[E - S^{-1}B]^{-1}$  і

$$\|[E - S^{-1}B]^{-1}\| \leq c.$$

З (3.103), використовуючи лему 3.2 отримаємо наступну оцінку:

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}\| &\leq cn\|\phi\|, \\ \|\tilde{z}\| &\leq cn\|\psi\|. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Нехай  $\Pi_n$  – множина поліномів від  $t$  степеня не більше  $n$ . Тоді згідно [92, 106, 107] справедлива нерівність Лебега для векторно-значної функції

$$\|u(t) - P_n(t; u)\|_{C[-1,1]} \equiv \max_{t \in [-1,1]} \|u(t) - P_n(t; u)\| \leq (1 + \Lambda_n)E_n(u),$$

з похибкою найкращого наближення  $u$  поліномами степеня не більше  $n$ :

$$E_n(u) = \inf_{p \in \Pi_n} \max_{t \in [-1,1]} \|u(t) - p(t)\|.$$

Отже, справедлива теорема

**Теорема 3.6** *Нехай виконуються припущення лема 3.2 з  $\gamma < 1$ , тоді існує додатна стала  $c$  така, що*

1. Для  $n$  достатньо великого

$$\|\tilde{z}\| \leq cn^{\gamma-1} \cdot \ln n \cdot E_n(A_0^\gamma v),$$

де  $v$  – розв'язок (3.91);

2. Перше рівняння в (3.100) можна записати у вигляді

$$\tilde{x} = S^{-1}B\tilde{x} + S^{-1}\phi,$$

яку можна розв'язувати методом послідовних наближень

$$\tilde{x}^{(k+1)} = S^{-1}B\tilde{x}^{(k)} + S^{-1}\phi, \quad k = 0, 1, \dots; \quad \tilde{x}^{(0)} \text{ – довільне,}$$

з швидкістю збіжності геометричної прогресії зі знаменником  $q \leq cn^{\gamma-1} \ln(n) < 1$  для достатньо великого  $n$ .

*Доведення.* Для  $\tilde{z}$  ми маємо другу оцінку в (3.105). Норма першого доданка в правій частині цієї нерівності можна оцінити наступним чином:

$$\begin{aligned} \|\psi\| &= \max_{1 \leq k \leq n} \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\{ A_k^\gamma e^{-A_k(t_k-s)} [A_k - A(s)] A_k^{-\gamma} (A_k^\gamma A_0^{-\gamma}) (A_0^\gamma v(s) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - P_n(s; A_0^\gamma v)) \right\} ds \right\| \\ &\leq c \max_{1 \leq k \leq n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |t_k - s|^{-\gamma} |t_k - s| \|A_0^\gamma v(s) - P_n(s; A_0^\gamma v)\| ds \\ &\leq c\tau_{max}^{2-\gamma} \|A_0^\gamma u(s) - P_n(\cdot; A_0^\gamma v)\|_{C[-1,1]} \leq c\tau_{max}^{2-\gamma} (1 + \Lambda_n) E_n(A_0^\gamma v). \end{aligned}$$

Отже, маємо

$$\|\psi\| \leq cn^{\gamma-2} \cdot \ln n \cdot E_n(A_0^\gamma u), \quad (3.106)$$

Тепер перше твердження теореми випливає з (3.105), (3.106). Друге твердження слідує з (3.100) і (3.104). ■

### 3.5.3 Приклади

Розглянемо наступну задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + q(x, t)u(x, t) &= f(x, t), \\ u(0, t) = u(1, t) &= 0, \\ u(x, -1) + \alpha u(x, 1) &= \varphi(x), \end{aligned} \tag{3.107}$$

де  $f(x, t) = e^{-\pi^2(1+t)} \sin(\pi x)(1 + t)$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $\varphi(x) = (1 + 0.5e^{-2\pi^2}) \sin(\pi x)$ ,  $q(x, t) = 1 + t$ . Тоді, розв'язок цієї задачі є  $u(x, t) = e^{-\pi^2(1+t)} \sin(\pi x)$ .

(3.107) можна переписати у вигляді (3.91), де оператор  $A(t)$  визначено як

$$\begin{aligned} D(A(t)) &= D(A) = \{v \in H^2(0, 1) : v(0) = 0, v(1) = 0\}, \\ A(t)v &= -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (1 + t)v. \end{aligned} \tag{3.108}$$

Коефіцієнти системи (3.98) обчислювались, використовуючи розвинення в ряд Фур'є. Результати обчислень наведені в таблицях 3.7–3.11 підтверджують апріорні оцінки.

Point $t$	$\varepsilon$
-1	0.00005276
-0.70710678	0.00097645
0	0.00063440
0.70710678	0.00029592
1	0.00010552

Таблиця 3.7: Похибка обчислень для  $n = 4$ ,  $x = 0.5$



Point $t$	$\varepsilon$
-1	8.12568908Ee-7
-0.86602540	0.00010146
-0.5	0.00030932
0	0.00022136
0.5	0.00013419
0.86602540	0.00007182
1	0.00000162

Таблица 3.8: Похибка обчислень для  $n = 6$ ,  $x = 0.5$

Point $t$	$\varepsilon$
-1	0.00000117
-0.92387953	0.00000613
-0.70710678	0.00004544
-0.38268343	0.00005753
0	0.00004745
0.38268343	0.00003362
0.70710678	0.00002096
0.92387953	0.00000846
1	0.00000235

Таблица 3.9: Похибка обчислень для  $n = 8$ ,  $x = 0.5$

Point $t$	$\varepsilon$
-1	0.49451310e-8
-0.96592582	0.14687232e-7
-0.86602540	0.23393074e-6
-0.70710678	0.54494052e-6
-0.5	0.76722515e-6
-0.25881904	0.82803283e-6
0	0.76362937e-6
0.25881904	0.63174173e-6
0.5	0.47173110e-6
0.70710678	0.30381367e-6
0.86602540	0.14341583e-6
0.96592582	0.21271757e-7
1	0.98902621e-8

Таблица 3.10: Похибка обчислень для  $n = 12$ ,  $x = 0.5$

Point $t$	$\varepsilon$
-1	0.20628738e-11
-0.98078528	0.28602854e-10
-0.92387953	0.48425552e-9
-0.83146961	0.14258845e-8
-0.70710678	0.25968220e-8
-0.55557023	0.36339719e-8
-0.38268343	0.42916820e-8
-0.19509032	0.44975339e-8
0	0.43045006e-8
0.19509032	0.38169887e-8
0.38268343	0.31414290e-8
0.55557023	0.23686579e-8
0.70710678	0.15787207e-8
0.83146961	0.85640040e-9
0.92387953	0.30309439e-9
0.98078528	0.16809109e-10
1	0.41257476e-11

Таблица 3.11: Похибка обчислень для  $n = 16$ ,  $X = 0.5$

### 3.6 Експоненціально збіжний метод для диференціального рівняння першого порядку з необмеженим оператором в нелокальній умові

**3.6.1 Постановка задачі** В цьому розділі ми розглянемо нелокальну задачу подібну до розділу 3.4 з двоточною операторною умовою:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + Au &= 0, \quad t \in (0, T) \\ u(0) + \alpha A^\beta u(T) &= u_0, \end{aligned} \quad (3.109)$$

де  $\alpha$  – задана стала,  $u_0 \in X$ . Оператор  $A$  з областю визначення  $D(A)$  в банаховому просторі  $X$  є щільно визначеним сильно позитивним (секторіальним), тобто його спектр  $\Sigma(A)$  розміщений в секторі  $\Sigma$  в правій півплощині з вершиною в початку координат (1.28). Резольвента оператора  $A$  спадає обернено пропорційно до  $|z|$  на нескінченності, тобто виконується оцінка (1.29) за межами сектора та на його границі  $\Gamma_\Sigma$ ,  $M > 0$  – стала. Числа  $a_0, \varphi$  – спектральні характеристики  $A$ .

Зауважимо, що загальна нелокальна задача з неоднорідним рівнянням, що відповідає (3.109), може бути зведена до двох більш простих задач, одна з яких є класичною задачею Коші, для неоднорідного рівняння з однорідною початковою умовою, а друга є двоточною (нелокальна) задачею для однорідного рівняння, як це робилося в підрозділі 3.4. А саме, покладаємо  $v(t) = v_1(t) + v_2(t)$ , де

$$v_1(t) = \int_0^t e^{-A(t-s)} f(s) ds$$

є розв'язком класичної задачі Коші

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} + Av_1 &= f(t), \quad t \in (0, T] \\ v_1(0) &= 0, \end{aligned}$$

а  $v_2(t)$  є розв'язком задачі вигляду (3.109) з модифікованою правою частиною двоточної умови

$$\begin{aligned}\frac{dv_2}{dt} + Av_2 &= 0, \quad t \in (0, T), \\ v_2(0) + \alpha A^\beta v_2(T) &= u_0 - \alpha A^\beta v_1(T).\end{aligned}$$

Відмітимо, що експоненціально збіжна апроксимація для  $v_1(t)$  була розроблена в підрозділі 2.4 (див. також [3], [78]). Отже, можна використати цю апроксимацію щоб знайти  $v_1(T)$  і сконцентрувати свою увагу на задачі для  $v_2(t)$ .

**3.6.2 Існування та зображення розв'язку** Розв'язок (3.109) може бути зображений формально наступним чином [14, 15] (див. (1.32)):

$$u(t) = e^{-At}u(0).$$

Тоді з двоточкової умови маємо

$$u_0 = u(0) + \alpha A^\beta u(T) = u(0) + \alpha A^\beta e^{-AT}u(0).$$

Позначимо  $B(A) = (I + \alpha A^\beta e^{-AT})$ . Таким чином, у випадку коли  $B(A)^{-1}$  існує (достатні умови для існування цього оператора дослідимо нижче), ми отримаємо

$$u(0) = B(A)^{-1}u_0.$$

Отже,

$$u(t) = e^{-At}B(A)^{-1}u_0. \quad (3.110)$$

Як і вище, називатимемо криву  $\Gamma_0$  (2.27) спектральною гіперболою сильно позитивного оператора  $A$ . Вона має вершину в  $(a_0, 0)$  і асимптоти, що паралельні до променів спектрального кута  $\Sigma$ .

Для зображення операторних функцій тут також будемо використовувати інтеграл Данфорда-Коші (див. розділ 1.3, а також [14, 75]). Отже, вибравши деяку гіперболу  $\Gamma_I$  (її параметри визначимо нижче), що охоплює спектральну

гіперболу  $\Gamma_0$  і використавши інтеграл Данфорда-Коші для (3.110), розв'язок задачі (3.109) може бути поданий у вигляді:

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_I} e^{-zt} [1 + \alpha z^\beta e^{-zT}]^{-1} R_A(z) u_0 dz = & (3.111) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_I} F(z, t) R_A(z) u_0 dz, \end{aligned}$$

якщо  $F(z, t)$  є аналітичною функцією всередині гіперболи  $\Gamma_I$ , яка охоплює  $\Gamma_0$ . Щоб отримати рівномірно збіжний та чисельно стійкий алгоритм, будемо використовувати модифіковану резольвенту  $R_A^1(z)$ . Таким чином, отримаємо наступне зображення для розв'язку задачі (3.109):

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_I} F(z, t) R_A^1(z) u_0 dz. \quad (3.112)$$

Ми виберемо гіперболу  $\Gamma_I$  визначену в (2.28) за контур інтегрування, що охоплює  $\Sigma$ , а отже і спектр оператора  $A$ . Значення параметрів  $a_I, b_I$  визначимо з умови можливості побудови аналітичного продовження підінтегральної функції. Використовуючи цю гіперболу, отримаємо з (3.112) зображення розв'язку у вигляді інтеграла

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} F(z(\zeta), t) R_A^1(\zeta) z'(\zeta) u_0 d\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(t, \zeta) d\zeta, \quad (3.113)$$

де

$$z'(\zeta) = a_I \sinh \zeta - ib_I \cosh \zeta.$$

Наступний крок для побудови чисельного методу є наближення (3.113) за допомогою ефективної квадратурної формули. Для цього нам необхідно оцінити ширину смуги навколо дійсної вісі де підінтегральний вираз в (3.113) має аналітичне продовження (по відношенню до  $\zeta$ ). Якщо вибрати параметри  $a_I, b_I$  як і в (2.29), то резольвента оператора  $A$  є аналітичною в смузі  $D_{d_1}$  по відношенню до  $w = \zeta + i\nu$  для будь-якого  $t \geq 0$ .

Далі визначимо умови при яких існує оператор  $B(z)^{-1}$ , що відповідає нелокальній умові з (3.110). Щоб це виконувалось, треба, щоб  $B(z) \neq 0$  на

гіперболі  $\Gamma_I$  та в області, яку вона охоплює.

$$|1 + \alpha z^\beta e^{-zT}| \geq 1 - |\alpha z^\beta e^{-zT}|.$$

Розглянемо другий доданок з права

$$\begin{aligned} |\alpha z^\beta e^{-zT}| &= |\alpha| (a_I^2 \cosh^2 s + b_I^2 \sinh^2 s)^{\frac{\beta}{2}} \left| e^{-(a_I \cosh s + ib_I \sinh s)T} \right| = \\ &= |\alpha| a_I^\beta \cosh^\beta s \left( 1 + \left( \frac{b_I}{a_I} \right)^2 \tanh^2 s \right)^{\frac{\beta}{2}} e^{-T a_I \cosh s}. \end{aligned}$$

Дослідимо функцію  $f(x) = x^\beta e^{-Tx}$ . Оскільки

$$f'(x) = \beta x^{\beta-1} e^{-Tx} - T x^\beta e^{-Tx},$$

то

$$\max_x f(x) = M_1 = \left( \frac{\beta}{T} \right)^\beta e^{-\beta}.$$

Таким чином, ми маємо

$$|1 + \alpha z^\beta e^{-zT}|^{-1} \leq \frac{1}{1 - C_1} = C < \infty,$$

у випадку, коли

$$C_1 = |\alpha| \left( 1 + \left( \frac{b_I}{a_I} \right)^2 \right)^{\beta/2} M_1 = \frac{M_1 |\alpha|}{\cos^\beta \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)} < 1. \quad (3.114)$$

Єдиність розв'язку показується елементарно. Отже, ми можемо підсумувати все в наступній лемі.

**Лема 3.3** *Нехай  $A$ – щільно визначений сильно позитивний оператор. Якщо виконується умова (3.114), тоді існує і єдиний розв'язок задачі (3.109), який може бути зображений за допомогою (3.112).*

**3.6.3 Чисельний метод** Припускаючи  $u_0 \in D(A^\alpha)$ ,  $0 < \alpha < 1$  для  $\|e^{-z(\zeta)t} z'(\zeta) R_A^1(\zeta) u_0\|$  виконується оцінка (3.15). Частина, що відповідає нелокальній умові в (3.113), при виконанні (3.114) обмежена деякою сталою  $C > 0$ . Таким чином, ми отримуємо наступну оцінку для  $\mathcal{F}(t, \zeta)$ :

$$\|\mathcal{F}(t, \zeta)\| \leq C(\varphi, \alpha) e^{-a_I t \cosh \zeta - \alpha |\zeta|} \|A^\alpha u_0\|,$$

$$C(\varphi, \alpha) = \frac{(1+M)Kcb_I}{2\pi a_I} \left(\frac{2}{a_I}\right)^\alpha, \quad \zeta \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0.$$

Наблизимо інтеграл (3.113) за допомогою наступної Sinc-квадратурної формули (див. підрозд. 1.3):

$$u_N(t) = h \sum_{k=-N}^N \mathcal{F}(t, z(kh)), \quad (3.115)$$

яка має похибку

$$\begin{aligned} \|\eta_N(\mathcal{F}, h)\| &= \|u(t) - u_N(t)\| \leq \\ &\leq \left\| u(t) - h \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(t, z(kh)) \right\| + \left\| h \sum_{|k|>N} \mathcal{F}(t, z(kh)) \right\| \leq \\ &\leq \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-\pi d/h}}{\sinh(\pi d/h)} \|\mathcal{F}\|_{\mathbf{H}^1(D_d)} + \\ &+ C(\varphi, \alpha) h \|A^\alpha u_0\| \sum_{k=N+1}^{\infty} e^{-a_I t \cosh kh - \alpha kh}. \end{aligned}$$

Тут  $\mathbf{H}^1(D_d)$ – простір всіх векторно-значних функцій  $\mathcal{F}$ , що аналітичні в смузі  $D_d$  ширини  $d$  навколо дійсної вісі з нормою (1.16).

Згідно [3]

$$\begin{aligned} \|e^{-z(\cdot)t} z'(\cdot) R_A^1(\cdot) u_0\|_{\mathbf{H}^1(D_d)} &\leq \|A^\alpha u_0\| [C_-(\varphi, \alpha, \delta) + \\ &+ C_+(\varphi, \alpha, \delta)] \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha |\xi|} d\xi = C(\varphi, \alpha, \delta) \|A^\alpha u_0\|, \end{aligned}$$

де

$$C(\varphi, \alpha, \delta) = \frac{2}{\alpha} [C_+(\varphi, \alpha, \delta) + C_-(\varphi, \alpha, \delta)],$$



$$C_{\pm}(\varphi, \alpha, \delta) = (1 + M)K \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \pm \frac{d}{2} \right) \left( \frac{2 \cos \varphi}{a_0 \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \pm \frac{d}{2} \right)} \right)^{\alpha},$$

$$d = d_1 - \delta,$$

для довільного малого додатного  $\delta$ .

Очевидно, що у випадку виконання (3.114), частина, що відповідає нелокальній умові, обмежена в  $D_d$ . Це дає нам змогу отримати оцінку

$$\|\mathcal{F}(t, \zeta)\|_{\mathbf{H}^1(D_d)} \leq C(\varphi, \alpha, \delta) \|A^{\alpha} u_0\|.$$

Таким чином, для  $\eta_N(\mathcal{F}_n, h)$  ми маємо

$$\|\eta_N(\mathcal{F}, h)\| \leq \frac{c \|A^{\alpha} u_0\|}{\alpha} \left\{ \frac{e^{-\pi d/h}}{\sinh(\pi d/h)} + e^{-a_I t \cosh((N+1)h) - \alpha(N+1)h} \right\}, \quad (3.116)$$

де додатна стала  $c$  не залежить від  $h$ ,  $N$ ,  $t$ .

Урівноважимо доданки в фігурних дужках, прирівнявши обидві експоненти при  $t = 0$ . Отримаємо

$$h = \sqrt{\frac{\pi d_1}{\alpha(N+1)}}, \quad (3.117)$$

це приводить до наступної оцінки похибки:

$$\|\eta_N(\mathcal{F}, h)\| \leq \frac{c}{\alpha} \exp\left(-\sqrt{\pi d \alpha(N+1)}\right) \|A^{\alpha} u_0\|. \quad (3.118)$$

У випадку  $t > 0$ , перший доданок в аргументі  $e^{-a_I t \cosh((N+1)h) - \alpha(N+1)h}$  з (3.116) більше впливає на похибку. Покладаючи для цього випадку  $h = c_1 \ln N/N$  з деякою додатною сталою  $c_1$ , що не залежить від  $N$ , ми отримаємо для фіксованого  $t$  оцінку

$$\|\eta_N(\mathcal{F}, h)\| \leq c \left[ e^{-\pi d_1 N / (c_1 \ln N)} + e^{-c_1 t a_I N / 2 - c_1 \alpha \ln N} \right] \|A^{\alpha} u_0\|. \quad (3.119)$$

Таким чином, ми довели теорему.

**Теорема 3.7** *Нехай  $A$  – секторіальний оператор,  $u_0 \in D(A^{\alpha})$ ,  $\alpha \in (0, 1)$  і виконується умова (3.114). Тоді Sinc-квадратура (3.115) апроксимує  $u(t)$*

з експоненціальною швидкістю збіжності (3.118), рівномірною по  $t \geq 0$  для кроку  $h$ , визначеного в (3.117). Апроксимація має швидкість збіжності (3.119) для випадку  $t > 0$  та  $h = c_1 \ln N/N$ , де стала  $c_1 > 0$  не залежить від  $N$ .

**Зауваження 3.3** Крива інтегрування  $\Gamma_I$  симетрична відносно дійсної вісі. Тому  $z(-kh) = \overline{z(kh)}$  і  $z'(-kh) = -\overline{z'(kh)}$ , а тому, скориставшись цим, наближення (3.115) можна переписати у вигляді

$$u_N(t) = \frac{h}{2\pi i} \mathcal{F}(t, z(0)) + \operatorname{Re} \left[ \sum_{k=1}^N h \frac{\mathcal{F}(t, z(kh))}{\pi i} \right],$$

що зменшує кількість обчислення резольвенти в два рази.

### 3.6.4 Чисельні приклади

**Приклад 3.7** Розглянемо задачу (3.109) з оператором  $A$ , визначеним в (3.51) що генерує однорідне параболічне рівняння з крайовими умовами

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= 0, \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0. \end{aligned}$$

Доповнимо цю задачу нелокальною двоточковою умовою з операторним коефіцієнтом

$$u(0) + \alpha A u(T) = u_0,$$

вибравши  $T = 1$ ,  $t = 0.5$ ,  $u_0 = \left(1 + \alpha \pi^2 e^{-\pi^2 T}\right) \sin \pi x$  і різні  $\alpha$ . Тобто нелокальна умова має вигляд

$$u(x, 0) - \alpha \frac{\partial^2 u(x, T)}{\partial x^2} = \left(1 + \alpha \pi^2 e^{-\pi^2 T}\right) \sin \pi x.$$

Тоді точним розв'язком задачі (3.109) буде

$$u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x.$$

Відмітимо, що резольвента оператора  $A$  точно знаходиться для заданого  $u_0$ , оскільки

$$R_A(z) = (zI - A)^{-1} \sin \pi x = \frac{\sin \pi x}{z - \pi^2}.$$

Похибки обчислень, проведених за побудованим в даній роботі методом наведені в таблиці 3.1 для різної кількості вузлів квадратури та різних  $\alpha$ . Внизу таблиці наведено константу  $C_1$  з оцінки (3.114), що дає достатню умову існування. З таблиці чітко видно експоненціальне спадання похибки згідно отриманої теоретичної оцінки (3.118). Крім того видно, що у випадку  $\alpha = 2.5$  умова існування (3.114) не виконується, але метод все одно збіжний.

N	$\alpha$		
	0.5	1	2.5
4	0.009032528105123	0.00876936583408	0.0000016190175
8	0.000131886146244	0.00010738852334	0.0000032146814
16	$1.9377157841 * 10^{-9}$	$2.32962084985 * 10^{-7}$	$4.04351289813 * 10^{-7}$
32	$3.3472815373 * 10^{-11}$	$6.97097047732 * 10^{-9}$	$2.63736943383 * 10^{-8}$
64	$3.2609655442 * 10^{-15}$	$6.29897518175 * 10^{-12}$	$6.99863739713 * 10^{-10}$
128	$1.1927889094 * 10^{-20}$	$2.63986204256 * 10^{-16}$	$1.59128422303 * 10^{-12}$
256	$2.8041450469 * 10^{-28}$	$6.36503924814 * 10^{-22}$	$1.25305895408 * 10^{-15}$
	0.480	0.961	2.403
	$C_1$		

Таблиця 3.12: Похибка для  $x = 0.5$ ,  $t = 0.5$ ,  $C_1$  – константа з оцінки (3.114)

**Приклад 3.8** В цьому прикладі виберемо оператор  $A$

$$D(A) = \{v(x) \in H^4(0, 1) : v(0) = v(1) = v''(0) = v''(1) = 0\}, \quad (3.120)$$

$$Av = v^{(4)}(x) \quad \forall v \in D(A),$$

що генерує однорідне рівняння з крайовими умовами

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} &= 0, \\ u(0, t) = u(1, t) &= 0, \\ \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(1, t)}{\partial x^2} &= 0.\end{aligned}$$

Доповнимо цю задачу нелокальною двоточковою умовою з операторним коефіцієнтом

$$u(0) + \alpha A^{0.5} u(T) = u_0,$$

вибравши  $T = 1$ ,  $t = 0.5$ ,  $u_0 = \left(1 + \alpha \pi^2 e^{-\pi^4 T}\right) \sin \pi x$  і різні  $\alpha$ . Відмітимо, що оператор  $A^{0.5}$  збігається з оператором  $A$ , що визначений в (3.51). Тобто нелокальна умова має вигляд

$$u(x, 0) - \alpha \frac{\partial^2 u(x, T)}{\partial x^2} = \left(1 + \alpha \pi^2 e^{-\pi^4 T}\right) \sin \pi x.$$

Тоді точний розв'язок задачі (3.109) має вигляд як і в першому прикладі

$$u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x.$$

Відмітимо, що резольвента оператора  $A$ , як і в першому прикладі, точно знаходиться для заданого  $u_0$ , оскільки

$$R_A(z) = (zI - A)^{-1} \sin \pi x = \frac{\sin \pi x}{z - \pi^4}.$$

Похибки обчислень, проведених за побудованим в даній роботі методом наведені в таблиці 3.3 для різної кількості вузлів квадратури та різних  $\alpha$ . З таблиці видно експоненціальне спадання похибки згідно отриманої теоретичної оцінки (3.118).

**Приклад 3.9** В цьому прикладі розглянемо задачу як і в прикладі 3.7, але виберемо  $u_0 = 100(1 - |2x - 1|)$ . Відмітимо, що узагальнена похідна функції  $u_0(x)$  є розривною функцією і  $u_0(x) \in W_2^\alpha(0, 1)$ ,  $\alpha < 3/2$ . Тому  $u_0(x) \in D(A^\lambda)$ ,  $\lambda < 1$ .

N	$\alpha$		
	0.5	1.5	5.5
4	0.000449958087928	0.00045176702204	0.0001585263213
8	0.000043897688511	0.00004474116852	0.0000651574332
16	$3.77379183602 * 10^{-10}$	$1.28384146028 * 10^{-8}$	0.0000277701509
32	$1.19224518645 * 10^{-13}$	$1.08363947339 * 10^{-10}$	0.0000026896624
64	$8.56211224005 * 10^{-19}$	$3.36734643776 * 10^{-14}$	$8.2665879010 * 10^{-8}$
128	$4.31781266238 * 10^{-25}$	$9.19111892628 * 10^{-19}$	$1.2652995792 * 10^{-9}$
256	$1.33156530800 * 10^{-34}$	$1.87159722873 * 10^{-25}$	$2.2495807772 * 10^{-12}$

Таблиця 3.13: Похибка для  $x = 0.5$ ,  $t = 0.5$ 

Відмітимо, що резольвенту оператора  $A$ , як і в попередніх прикладах можна визначити точно. Похибки обчислень, проведених за побудованим в даній роботі методом наведені в таблиці 3.4 для різної кількості вузлів квадратури та  $\alpha = 0.5$ . В першому стовпчику наведено  $N$  – кількість вузлів квадратурної формули (3.115), у другому стовпчику – значення  $u(x, t)$ , в третьому – різниця між  $u(x, t)$ , обчисленого для заданого  $N$  і  $u(x, t)$ , обчисленого для  $N/2$ . З таблиці видно експоненціальне спадання похибки згідно отриманої теоретичної оцінки (3.118).

N	$u_N(x, t)$	$ u_N(x, t) - u_{N/2}(x, t) $
4	0.9283657780470762774	
8	0.4020280985038091628	0.52633767954
16	0.4121075902758613784	0.01007949177
32	0.4121042028080824055	0.00000338746
64	0.4121042012395290280	$1.56855337755 * 10^{-9}$
128	0.4121042012399241684	$3.95140392208 * 10^{-13}$
256	0.4121042012399241666	$1.71920493615 * 10^{-18}$
512	0.4121042012399241666	$9.02730134040 * 10^{-27}$

Таблиця 3.14: Похибка для  $x = 0.25$ ,  $t = 0.5$ 

### 3.7 Експоненціально збіжний метод для диференціального рівняння першого порядку в банаховому просторі з інтегральною нелокальною умовою

**3.7.1 Вступ.** В цьому підрозділі розглянемо наступну нелокальну задачу з інтегральною умовою:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + Au &= 0, \quad t \in (0, T] \\ u(0) + \int_0^T w(s)u(s)ds &= u_0, \end{aligned} \tag{3.121}$$

де  $w(s) \geq 0$ – задана функція,  $u_0 \in X$ . Оператор  $A$  з областю визначення  $D(A)$  в банаховому просторі  $X$  є щільно визначеним сильно позитивним (секторіальним), тобто його спектр  $\Sigma(A)$  розташований в секторі в правій півплощині з вершиною в початку координат (1.28). Резольвента оператора  $A$  спадає обернено пропорційно до  $|z|$  на нескінченності і справедлива оцінка (1.29).

Неоднорідна задача, що відповідає (3.121) може бути зведена до однорі-

дної задачі за допомогою заміни функції у наступний спосіб. Якщо ми маємо

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} + Av &= f(t), \quad t \in (0, T] \\ v(0) + \int_0^T w(s)v(s)ds &= u_0, \end{aligned}$$

де  $f(t)$  – векторно-значна функція в банаховому просторі  $X$ , тоді, покладаючи  $v(t) = u(t) + v_1(t)$ , з

$$v_1(t) = \int_0^t e^{-A(t-s)} f(s) ds,$$

ми отримаємо наступну задачу для  $u(t)$

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + Au &= 0, \quad t \in (0, T] \\ u(0) + \int_0^T w(s)u(s)ds &= u_0 - \int_0^T w(s)v_1(s)ds. \end{aligned}$$

Відмітимо, що експоненціально збіжна апроксимація для  $v_1(t)$  була розроблена в підрозділі 2.4, а також в роботах [3, 78]. Отже, можна використати цю апроксимацію щоб знайти  $v_1(t)$  і потім відповідний інтеграл, використовуючи підходящу квадратурну формулу.

**3.7.2 Існування і зображення розв’язку.** Розв’язок (3.121) може бути зображений формально наступним чином (див. (1.32)):

$$u(t) = e^{-At}u(0). \quad (3.122)$$

З інтегральної умови в (3.121) і формули (3.122) ми отримаємо

$$\left( I + \int_0^T w(s)e^{-As} ds \right) u(0) = u_0,$$

Позначимо  $B(A) = \left( I + \int_0^T w(s)e^{-As} ds \right)$ . Таким чином, у випадку коли  $B(A)^{-1}$  існує (достатні умови для існування цього оператора будуть виведені нижче) ми маємо

$$u(0) = B(A)^{-1}u_0.$$

Отже,

$$u(t) = e^{-At} B(A)^{-1} u_0. \quad (3.123)$$

Нехай крива  $\Gamma_0$ , визначена в (2.27) є спектральною гіперболою. Вона має вершину в  $(a_0, 0)$  і асимптоти, що паралельні до променів спектрального кута  $\Sigma$ . За криву інтегрування виберемо  $\Gamma_I$ , визначену в (2.28). Значення параметрів  $a_I, b_I$  визначимо пізніше. Тоді, використовуючи зображення за допомогою інтегралу Данфорда-Коші і (3.123), розв'язок задачі (3.121) може бути записаний у вигляді

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_I} e^{-zt} \left[ 1 + \int_0^T w(s) e^{-zs} ds \right]^{-1} R_A(z) u_0 dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_I} F(z, t) R_A(z) u_0 dz, \end{aligned} \quad (3.124)$$

якщо  $F(z, t)$  є аналітичною функцією всередині гіперболи  $\Gamma_I$  яка охоплює  $\Gamma_0$ . Щоб отримати рівномірно збіжний та чисельно стійкий алгоритм, ми, як і в попередніх підрозділах модифікуємо цей інтеграл, замінивши резольвенту  $R_A(z)$  на  $R_A^1(z)$  [3, 78], що не змінює значення інтеграла коли  $u_0 \in D(A^\alpha)$ ,  $\alpha > 0$ .

$$R_A^1(z) = (zI - A)^{-1} - \frac{I}{z}.$$

Таким чином, можна отримати наступне зображення для розв'язку задачі (3.121):

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_I} F(z, t) R_A^1(z) u_0 dz. \quad (3.125)$$

Після параметризації контуру, ми отримаємо з (3.125)

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} F(z(\zeta), t) R_A^1(\zeta) z'(\zeta) u_0 d\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(t, \zeta) d\zeta, \quad (3.126)$$

де

$$z'(\zeta) = a_I \sinh \zeta - ib_I \cosh \zeta.$$

Наступний крок для побудови чисельного алгоритму є наближення (3.126) за допомогою ефективної квадратурної формули. Для цього нам необхідно



оцінити ширину смуги навколо дійсної де підінтегральний вираз в (3.126) має аналітичне продовження (по відношенню до  $\zeta$ ). Всі міркування, наведені в підрозділі 3.1.2 справедливі і для випадку інтегральних нелокальних умов. Це приводить нас до того, що параметри інтегральної гіперболи визначаються за формулами (3.16), (3.17).

Для  $a_I$  та  $b_I$ , визначених таким чином, резольвента оператора  $A$  є аналітичною в смугі  $D_{d_1}$  по відношенню до  $w = \zeta + i\nu$  для будь-якого  $t \geq 0$ .

Далі визначимо умови для  $w(s)$ , які гарантують існування оператора  $B(z)^{-1}$ , що відповідає нелокальній умові з (3.123). Щоб це виконувалось, треба, щоб  $B(z) \neq 0$  в середині гіперболи інтегрування  $\Gamma_I$ .

$$\begin{aligned} \left| 1 + \int_0^T w(s) e^{-z(\zeta)s} ds \right| &\geq 1 - \left| \int_0^T w(s) e^{-z(\zeta)s} ds \right| \geq \\ &\geq 1 - \frac{T \|w(s)\|_{C[0,T]}}{T a_I \cosh(\zeta)} \left( 1 - e^{-T a_I \cosh(\zeta)} \right) \geq 1 - \frac{\|w(s)\|_{C[0,T]}}{a_I} \left( 1 - e^{-T a_I} \right), \end{aligned}$$

оскільки функція  $\frac{1-e^{-x}}{x}$  є монотонно спадною для  $x > 0$ . Таким чином, ми маємо

$$\left| 1 + \int_0^T w(s) e^{-z(\zeta)s} ds \right|^{-1} \leq \frac{1}{1 - \frac{\|w(s)\|_{C[0,T]}}{a_I} (1 - e^{-T a_I})} \leq C_1,$$

у випадку, коли

$$\|w(s)\|_{C[0,T]} < \frac{a_I}{1 - e^{-T a_I}}. \quad (3.127)$$

Єдиність розв'язку показується елементарно. Отже, ми можемо підсумувати все в наступній лемі.

**Лема 3.4** *Нехай  $A$  – щільно визначений сильно позитивний оператор (секторіальний). Якщо виконується умова (3.127), тоді існує і єдиний розв'язок задачі (3.121), який може бути зображений за допомогою (3.125).*

Більш грубою оцінкою ніж (3.127) є

$$\|w(s)\|_{C[0,T]} < \frac{1}{T}, \quad (3.128)$$

що може бути легко отримана з оцінки

$$\left| \int_0^T w(s) e^{-z(\zeta)s} ds \right| \leq \|w(s)\|_{C[0,T]} T.$$

**3.7.3 Чисельний алгоритм.** Перш за все, ми наблизимо інтеграл в знаменнику з (3.124), використовуючи експоненціально збіжну квадратурну формулу. Для цього можна використовувати формули Гауса, Кленшоу-Куртиса або Sinc-квadrатуру для інтеграла по обмеженому інтервалу. Для аналітичних підінтегральних функцій ці квадратури забезпечують експоненціальний порядок збіжності. Квадратурна формула Гауса має швидкість збіжності  $O(\rho^{-2n})$ , а формула Кленшоу-Куртиса –  $O(\rho^{-n})$ , де  $\rho$  – сума півосей еліпса Бернштейна [10]. Sinc-квadrатурна формула має швидкість збіжності  $O(e^{-\sqrt{n}})$  [11] і, на відміну від вищезгаданих формул, може бути застосована для інтегралів на необмежених інтервалах. Її швидкість збіжності може бути або  $O(e^{-\sqrt{n}})$ , або  $O(e^{-n/\ln n})$  в залежності від області аналітичності підінтегральної функції. Зважаючи на вищесказане, ми будемо використовувати квадратурну формулу Гауса для інтеграла на обмеженому інтервалі і Sinc-квadrатуру для інтеграла на всій вісі.

$$\mathcal{I} = \int_0^T w(s) e^{-z(\zeta)s} ds \approx \sum_{j=0}^n \frac{T}{2} \omega_j w(\xi_j) e^{-z(\zeta)\xi_j} = \mathcal{I}_n, \quad (3.129)$$

$$\xi_j = \frac{T}{2}(\theta_j + 1),$$

де  $\{\theta_j\}$  – набір з  $n + 1$  кореня полінома Лежандра  $P_{n+1}(x)$  і  $\{\omega_j\}$  – множина ваг квадратурної формули Гауса. Відмітимо, що  $\theta_j$  разом з  $\omega_j$  можуть бути обчислені заздалегідь, використовуючи швидкі алгоритми (див. [10]).

Таким чином, ми отримаємо з (3.126)

$$u(t) \approx u_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} F_n(z(\zeta), t) R_A^1(\zeta) z'(\zeta) u_0 d\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_n(t, \zeta) d\zeta, \quad (3.130)$$

де

$$F_n(z(\zeta), t) = e^{-z(\zeta)t} [1 + \mathcal{I}_n]^{-1}$$

Для оцінки похибки маємо

$$\left| \frac{1}{1 + \mathcal{I}} - \frac{1}{1 + \mathcal{I}_n} \right| = \left| \frac{\mathcal{I}_n - \mathcal{I}}{(1 + \mathcal{I})(1 + \mathcal{I}_n)} \right|.$$

Згідно з (3.127) або (3.128), перший член зліва обмежений константою

$$\frac{1}{|1 + \mathcal{I}|} \leq C.$$

Для другого доданка ми отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{|1 + \mathcal{I}_n|} &\leq \frac{1}{1 - \left| \frac{T}{2} \sum_{j=0}^n \omega_j w(\xi_j) e^{-z(\zeta)\xi_j} \right|} \leq \frac{1}{1 - \frac{T\|w(s)\|_{C[0,T]}}{2} \sum_{j=0}^n \omega_j e^{-a_I \cosh(\zeta)\xi_j}} \leq \\ &\leq \frac{1}{1 - T\|w(s)\|_{C[0,T]}} \leq c = \text{const}, \end{aligned} \quad (3.131)$$

у випадку коли виконується оцінка (3.128). Отже, ми отримуємо

$$\left| \frac{1}{1 + \mathcal{I}} - \frac{1}{1 + \mathcal{I}_n} \right| \leq c |\mathcal{I}_n - \mathcal{I}|.$$

Експоненціальна функція  $e^{-zs}$  є аналітична відносно  $s$  у всій комплексній площині. Тому гладкість підінтегральної функції в  $\mathcal{I}$  визначається гладкістю  $w(s)$ . Використовуючи теорему 19.3 з [10] ми можемо зробити висновок, що якщо  $w(\frac{T}{2}(s+1))$  має аналітичне продовження в еліпс Бернштейна навколо  $[-1, 1]$ , де  $\left| w(\frac{T}{2}(s+1)) e^{-z\frac{T}{2}(s+1)} \right| \leq M$ , тоді

$$|\mathcal{I} - \mathcal{I}_n| \leq \frac{144M\rho^{-2n}}{35(\rho^2 - 1)}, \quad n \geq 2.$$

Якщо  $w(s)$  та її похідні аж до  $w^{(\nu-1)}$  абсолютно неперервні, а  $w^{(\nu)}$  має обмежену варіацію  $V$ , тоді

$$|\mathcal{I} - \mathcal{I}_n| \leq \frac{32V}{15\pi\nu(n - 2\nu - 1)^{2\nu+1}}, \quad n > 2\nu + 1.$$

Припускаючи  $u_0 \in D(A^\alpha)$ ,  $0 < \alpha < 1$ , для  $\|e^{-z(\zeta)t} z'(\zeta) R_A^1(\zeta) u_0\|$  виконується оцінка (3.15). Частина, що відповідає нелокальній умові в (3.130) оцінюється в (3.131). Таким чином, ми отримуємо наступну оцінку для  $\mathcal{F}_n(t, \zeta)$ :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_n(t, \zeta)\| &\leq C(\varphi, \alpha) e^{-a_I t \cosh \zeta - \alpha|\zeta|} \|A^\alpha u_0\|, \\ C(\varphi, \alpha) &= \frac{(1 + M)Kcb_I}{2\pi a_I} \left( \frac{2}{a_I} \right)^\alpha, \quad \zeta \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Далі ми наблизимо інтеграл (3.130) наступною Sinc-квадратурною формулою (див. підр. 1.3, [3, 11]):

$$u_{n,N}(t) = h \sum_{k=-N}^N \mathcal{F}_n(t, z(kh)), \quad (3.132)$$

з похибкою

$$\begin{aligned} \|\eta_N(\mathcal{F}_n, h)\| &= \|u_n(t) - u_{n,N}(t)\| \leq \\ &\leq \left\| u_n(t) - h \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_n(t, z(kh)) \right\| + \left\| h \sum_{|k|>N} \mathcal{F}_n(t, z(kh)) \right\| \leq \\ &\leq \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-\pi d/h}}{\sinh(\pi d/h)} \|\mathcal{F}_n\|_{\mathbf{H}^1(D_d)} + \\ &+ C(\varphi, \alpha) h \|A^\alpha u_0\| \sum_{k=N+1}^{\infty} e^{-\alpha t \cosh kh - \alpha kh}. \end{aligned}$$

Тут  $\mathbf{H}^1(D_d)$ – простір всіх векторно-значних функцій  $\mathcal{F}$ , аналітичних в смузі  $D_d$  (див. підр. 1.3, [3]). Згідно [3]

$$\begin{aligned} \|e^{-z(\cdot)t} z'(\cdot) R_A^1(\cdot) u_0\|_{\mathbf{H}^1(D_d)} &\leq \|A^\alpha u_0\| [C_-(\varphi, \alpha, \delta) \\ &+ C_+(\varphi, \alpha, \delta)] \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\xi|} d\xi = C(\varphi, \alpha, \delta) \|A^\alpha u_0\| \end{aligned}$$

з

$$\begin{aligned} C(\varphi, \alpha, \delta) &= \frac{2}{\alpha} [C_+(\varphi, \alpha, \delta) + C_-(\varphi, \alpha, \delta)], \\ C_{\pm}(\varphi, \alpha, \delta) &= (1 + M) K \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \pm \frac{d}{2} \right) \left( \frac{2 \cos \varphi}{a_0 \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \pm \frac{d}{2} \right)} \right)^\alpha, \\ d &= d_1 - \delta, \end{aligned}$$

для довільного малого додатного  $\delta$ .

Очевидно, що у випадку виконання (3.128), частина, що відповідає нелокальній умові, обмежена в  $D_d$ . Це дає нам змогу отримати оцінку

$$\|\mathcal{F}_n(t, \zeta)\|_{\mathbf{H}^1(D_d)} \leq C(\varphi, \alpha, \delta) \|A^\alpha u_0\|.$$

Отже, оцінка для  $\eta_N(\mathcal{F}_n, h)$ :

$$\|\eta_N(\mathcal{F}_n, h)\| \leq \frac{c\|A^\alpha u_0\|}{\alpha} \left\{ \frac{e^{-\pi d/h}}{\sinh(\pi d/h)} + e^{-a_I t \cosh((N+1)h) - \alpha(N+1)h} \right\} \quad (3.133)$$

де стала  $c > 0$  не залежить від  $h, N, t$ .

Урівноважуючи обидві експоненти коли  $t = 0$ , вибором  $h$  за формулою (2.33), ми приходимо до наступної оцінки похибки

$$\|\eta_N(\mathcal{F}_n, h)\| \leq \frac{c}{\alpha} \exp\left(-\sqrt{\pi d \alpha(N+1)}\right) \|A^\alpha u_0\| \quad (3.134)$$

У випадку  $t > 0$ , перший доданок в аргументі  $e^{-a_I t \cosh((N+1)h) - \alpha(N+1)h}$  з (3.133) більше впливає на похибку. Покладаючи для цього випадку  $h = c_1 \ln(N+1)/(N+1)$  з деякою додатною константою  $c_1$ , ми отримуємо для фіксованого  $t$  наступну оцінку:

$$\|\eta_N(\mathcal{F}_n, h)\| \leq c \left[ e^{-\pi d \frac{N+1}{c_1 \ln(N+1)}} + e^{-c_2 t a_I (N+1)^{c_1} - c_1 \alpha \ln(N+1)} \right] \|A^\alpha u_0\|, \quad (3.135)$$

де  $c_2 = \frac{1+(N+1)^{-2c_1}}{2}$ . Таким чином, ми довели теорему.

**Теорема 3.8** *Нехай  $A$  – щільно визначений позитивний оператор,  $u_0 \in D(A^\alpha)$ ,  $\alpha \in (0, 1)$  і виконуються умови (3.128). Тоді Сінс-квадратура (3.132) є апроксимацією  $u_n(t)$  з експоненціальною швидкістю збіжності (3.134), рівномірною по  $t \geq 0$  для кроку  $h = \sqrt{\frac{\pi d_1}{\alpha(N+1)}}$ . Апроксимація має швидкість збіжності (3.135) для випадку  $t > 0$  та  $h = c_1 \ln(N+1)/(N+1)$ . Додатні сталі  $c, c_1$  не залежать від  $t, N$ .*

**Зауваження 3.4** *Крива інтегрування  $\Gamma_I$  – симетрична відносно дійсної вісі. Тому  $z(-kh) = \overline{z(kh)}$  і  $z'(-kh) = -\overline{z'(kh)}$ . Наближення (3.132) можна переписати у вигляді*

$$u_{n,N}(t) = \frac{h}{2\pi i} \mathcal{F}_n(t, z(0)) + \operatorname{Re} \left[ \sum_{k=1}^N h \frac{\mathcal{F}_n(t, z(kh))}{\pi i} \right],$$

що зменшує кількість обчислення резольвенти в два рази.

Тепер розглянемо оцінку повної похибки наближення.

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = \|u(t) - u_n(t)\| &= \left\| \int_{-\infty}^{\infty} [\mathcal{F}(t, \zeta) - \mathcal{F}_n(t, \zeta)] d\zeta \right\| \leq \\ & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{-z(\zeta)t} \zeta'(\zeta) \right| \left| \frac{1}{1 + \mathcal{I}} - \frac{1}{1 + \mathcal{I}_n} \right| \|R_A^1(\zeta)u_0\| d\zeta, \end{aligned}$$

За допомогою для  $\|e^{-z(s)t} z'(s) R_A^1(s) u_0\|$  це може бути перетворено до вигляду

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{(1 + M)Kb_{IC}}{2\pi a_I} \left( \frac{2}{a_I} \right)^\alpha \|A^\alpha u_0\| |\mathcal{I} - \mathcal{I}_n| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a_I t \cosh \zeta - \alpha |\zeta|} d\zeta \leq \\ &\leq \frac{(1 + M)Kb_{IC}}{\pi a_I \alpha} \left( \frac{2}{a_I} \right)^\alpha \|A^\alpha u_0\| |\mathcal{I} - \mathcal{I}_n| = C \|A^\alpha u_0\| |\mathcal{I} - \mathcal{I}_n|. \end{aligned}$$

Тоді, для оцінки повної похибки ми маємо

$$\|u(t) - u_{n,N}(t)\| \leq \varepsilon_1 + \|\eta_N(\mathcal{F}_n, h)\|. \quad (3.136)$$

Це дозволяє нам сформулювати основну теорему.

**Теорема 3.9** *Нехай виконуються умови теореми 3.8. Тоді (3.132) дає зображення наближення до  $u(t)$  з експоненціальною швидкістю збіжності у випадку коли  $w(t)$  має аналітичне продовження в еліпс Бернштейна.*

### 3.7.4 Чисельні приклади.

**Приклад 3.10** *Розглянемо задачу (3.121) з оператором  $A$ , визначеним як  $i$  в попередньому підрозділі (3.51), що генерує однорідне параболічне рівняння з крайовими умовами*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= 0, \\ u(0, t) = u(1, t) &= 0. \end{aligned}$$

*Доповнимо цю задачу нелокальною інтегральною умовою*

$$u(x, 0) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(s)u(x, s)ds = \frac{\pi^4 + \pi^2 + e^{-\pi^3/2}}{\pi^4 + 1} \sin(\pi x).$$

У цьому випадку, точний розв'язок цієї задачі є  $u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x)$ . Обчислення виконані в середовищі Maple. Похибки наведені в таблицях 3.15, 3.16 для різної кількості вузлів квадратури  $n$  (3.129) і кількості Sinc-вузлів  $N$  (3.132). Таблиці чітко показують експоненціальне спадання похибки згідно отриманої теоретичної оцінки (3.136).

N	n		
	4	8	16
4	0.001074121004		
8	0.000004530997940	0.00000418248071	
16	$2.394152400 * 10^{-7}$	$7.3086845013760 * 10^{-10}$	$7.159165797001 * 10^{-10}$
32	$2.387505905 * 10^{-7}$	$8.2307398421915 * 10^{-12}$	$2.609087146562 * 10^{-13}$
64		$7.9836951021369 * 10^{-12}$	$2.917976861643 * 10^{-18}$
128			$1.622297889726 * 10^{-24}$
256			$1.873772451287 * 10^{-24}$

Таблиця 3.15: Похибка для  $x = 0.5$ ,  $t = 1$

N	n	
	32	64
128	$2.559484448336975 * 10^{-25}$	
256	$2.398463850885652 * 10^{-35}$	$2.3984646885635428 * 10^{-35}$
512	$1.564339690250043 * 10^{-49}$	$1.5716982365989911 * 10^{-49}$
1024		$8.2307398421915 * 10^{-69}$

Таблиця 3.16: Похибка для  $x = 0.5$ ,  $t = 1$

**Приклад 3.11** В цьому прикладі ми розглянемо таку ж задачу, як і в при-

кладі 3.10, але з іншою нелокальною умовою

$$u(x, 0) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(s^2)u(x, s)ds = (1 - x)x^2.$$

Результати обчислень наведені в таблиці 3.17 для різних  $n$ – число вузлів квадратури (3.129) та  $N$ – число *Sinc*-вузлів (3.132). Розряди, що стабілізувались в таблиці виділені жирним.

$n/N$	$u(x, t)$
$n = 4, N = 32$	0.5979651691 * 10 <sup>-4</sup>
$n = 8, N = 64$	0.595184687264196427200402957709 * 10 <sup>-4</sup>
$n = 16, N = 128$	0.595184553823189342113182135931 * 10 <sup>-4</sup>
$n = 32, N = 256$	0.595184553823189342143429937050 * 10 <sup>-4</sup>
$n = 64, N = 512$	0.595184553823189342143429937049 * 10 <sup>-4</sup>
$n = 128, N = 1024$	0.595184553823189342143429937049 * 10 <sup>-4</sup>

Таблиця 3.17: Розв'язок задачі для  $x = 0.4, t = 1$

### 3.8 Експоненціально збіжний метод для абстрактної нелокальної задачі з інтегральною нелінійністю

**3.8.1 Постановка задачі** В цьому розділі розглядається задача як і в розділі 3.7, тільки з нелінійною нелокальною інтегральною умовою

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t)}{\partial t} + Au(t) &= 0, \quad t \in (-1, 1], \\ u(-1) - \int_{-1}^1 w(s, u(s))ds &= u_0, \end{aligned} \tag{3.137}$$

де  $u(t)$ – невідома векторно-значна функція зі значеннями в банаховому просторі  $(X, |||)$ ,  $u_0 \in X$ – заданий вектор,  $w(t, u) : (\mathbb{R}_+ \times X) \rightarrow X$  – задана функція (нелінійний оператор) і  $A$ –лінійний замкнутий оператор зі щільною



областю визначення  $D(A)$  в  $X$  (секторіальний). Спектр цього оператора  $\Sigma(A)$  розташований в секторі в правій півплощині з вершиною у початку координат (1.28), а резольвента  $R_A(z)$  оператора  $A$  спадає обернено пропорційно до  $|z|$  на нескінченності (1.29).

Крім того, ми вважаємо, що розв'язок  $u(t)$  і функція  $w(t, u(t))$  мають аналітичне продовження (відносно  $t$ ) у еліпс Бернштейна  $\mathcal{E}_\rho$

$$\mathcal{E}_\rho = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| + |z + 1| < \rho + \rho^{-1}\}. \quad (3.138)$$

Абстрактна постановка (3.137) включає в себе багато важливих прикладних задач, зокрема задачі розповсюдження тепла, дифузійні процеси в пористих середовищах, задачі що описують рух електронів у напівпровідниках, хімічні реакції, динаміка ядерних реакцій, рівняння Нав'є-Стокса для в'язкої рідини та інш. (див. напр. [123] та цитовану там літературу). Це, разом з цікавим теоретичним аспектом, спонукає до побудови ефективних дискретизованих наближень задачі (3.137).

**3.8.2 Інтегральне зображення розв'язку** Оскільки оператор  $A$  є секторіальним, він породжує напівгрупу [16], а розв'язок рівняння (3.8.1) можна записати у вигляді

$$u(t) = e^{-A(t+1)}u(-1),$$

що з урахуванням нелокальної умови приводить до нелінійного інтегрального рівняння

$$u(t) = e^{-A(t+1)}u_0 + e^{-A(t+1)} \int_{-1}^1 w(s, u(s))ds. \quad (3.139)$$

Рівняння такого роду в літературі відомі, як абстрактні рівняння типу Гамерштейна [124, 125]. Чисельним методи для рівнянь типу (3.139) присвячено [126–129].

Дія операторної експоненти  $e^{-A(t+1)}$ , що входить до рівняння (3.139), на елементи простору  $X$  може бути зображена за допомогою інтеграла

Данфорда-Коші (див. попередні розділи, а також [14, 75])

$$e^{-A(t+1)}v = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-z(t+1)} R_A(z) v dz, \quad (3.140)$$

тут  $R_A(z) = (zI - A)^{-1}$  – резольвента оператора  $A$ , а  $\Gamma$  – контур інтегрування, позитивно орієнтований відносно спектру оператора  $A$ . Для наближеного знаходження операторних експонент в (3.139) застосуємо метод описаний в попередніх розділах. Відповідно до цього методу контур інтегрування  $\Gamma$  в (3.140) задається у вигляді

$$\Gamma = \{z(s) = a_I \cosh(s) - ib_I \sinh(s) : s \in (-\infty, \infty)\}.$$

Значення параметрів  $(a_I, b_I)$ , які залежать від спектральних характеристик оператора  $A$ , вибираються виходячи з вимоги аналітичності підінтегральної функції у смузї комплексної площини  $\mathbb{C}$

$$D_d = \left\{ \xi = x + iy \mid x \in \mathbb{R}, |y| < \frac{d}{2} \right\},$$

шириною  $d$ . Величина  $d > 0$  визначає швидкість збіжності квадратурного методу, що застосовується нами далі для наближення (3.140).

Оптимальне з точки зору збіжності квадратури значення параметру  $d$  досягається при

$$d = \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

Параметри контуру інтегрування  $\Gamma$  визначаються за формулами

$$a_I = \rho_0 \frac{\cos\left(\frac{d}{2} + \varphi\right)}{\cos \varphi}, \quad b_I = \rho_0 \frac{\cos\left(\frac{d}{2} + \varphi\right)}{\cos \varphi}. \quad (3.141)$$

Окрім того в інтегралі (3.140) проведемо заміну стандартної резольвенти  $R_A(z)$  на скореговану  $R_{A,1}(z)$ :

$$R_{A,1}(z) = R_A(z) - \frac{1}{z}I.$$

Підставивши це параметризоване зображення операторної експоненти у інтегральне рівняння (3.139), отримаємо

$$u(t) = T(A, t)u_0 + T(A, t) \int_{-1}^1 w(s, u(s)) ds, \quad (3.142)$$

де

$$T(A, t)v = \int_{\Gamma_I} e^{-z(t+1)} R_{A,1}(z) v dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z(\xi)(t+1)} z'(\xi) R_{A,1}(z(\xi)) v d\xi,$$

$$z'(\zeta) = a_I \sinh \zeta - ib_I \cosh \zeta,$$

$a_I, b_I$  — визначені у (3.141) параметри, що залежать від спектральних характеристик оператора  $A$ .

**3.8.3 Дискретизація** Далі для наближеного обчислення інтегралу (3.140) застосуємо формулу трапецій (Sinc-квадратурну формулу). Таким чином, для операторної експоненти матимемо наближення

$$e^{-A(t+1)}v \approx T_N(A, t)v \equiv \frac{h}{2\pi i} \sum_{p=-N}^N e^{-z(ph)(t+1)} z'(ph) R_{A,1}(z(ph))v, \quad (3.143)$$

За умови вибору

$$h = \sqrt{\frac{\pi d}{\alpha(N+1)}},$$

похибка наближення (3.143) задовольняє оцінку [3]:

$$\|\eta_N(t)v\| = \left\| e^{-A(t+1)}v - T_N(A, t)v \right\| \leq \frac{c e^{-\sqrt{\pi d \alpha(N+1)}}}{\alpha} \|A^\alpha v\|,$$

для  $\forall v \in D(A^\alpha)$ , яка є експоненціальною.

Далі наблизимо інтеграл з (3.142), що містить незалежну від оператора складову. На проміжку інтегрування  $[-1, 1]$  означимо сітку, яка складається з вузлів Чебишева-Гауса-Лобато (ЧГЛ) [10]:

$$t_j = -\cos\left(\frac{\pi j}{n}\right), \quad j = \overline{0, n}$$

Нехай

$$P_n(t; y) = \sum_{j=0}^n L_{j,n}(t) y_j, \quad \text{для вектора } y = (y_0, \dots, y_n),$$

де  $L_{j,n}(t)$  – фундаментальні поліноми Лагранжа за системою вузлів ЧГЛ:

$$L_{j,n}(t) = \prod_{k=0, k \neq j}^n \frac{t - t_k}{t_j - t_k}.$$

Замінімо підінтегральну функцію поліномом Лагранжа і проколокуємо інтегральне рівняння (3.142) у вузлах інтерполяції  $t_j$ . В результаті отримаємо нелінійну систему рівнянь

$$y_i = T_N(A, t_i)u_0 + T_N(A, t_i) \sum_{j=0}^n \alpha_j w(t_j, y_j), \quad i = \overline{0, n}, \quad (3.144)$$

де

$$\alpha_j = \int_{-1}^1 L_{j,n}(t) dt.$$

**Зауваження 3.5** Відмітимо, що коефіцієнти  $\alpha_j$  є коефіцієнтами квадратурної формули Кленшоу-Куртіса, які знаходяться у явному вигляді. Ці коефіцієнти не потребують перерахунку при зміні  $y_i$  (за умови, що  $n$  – фіксоване) і можуть бути ефективно обчислені за допомогою швидкого перетворення Фур'є.

Похибка наближення функції інтерполяційним поліномом  $P_n(t, y)$ , як відомо (див. підрозділ 1.2), залежить від гладкості функції  $y(t)$ , визначеної на  $[-1, 1]$  та можливості її аналітичного продовження у еліпс  $\mathcal{E}_\rho \subset \mathbb{C}$  з фокусами у кінцях цього відрізка (див. [10]).

**3.8.4 Ров'язок дискретизованого рівняння** Перепишемо систему рівнянь (3.144) в матрично-векторному вигляді

$$\vec{y} = \mathcal{A}\vec{w}(\vec{y}) + \vec{p}, \quad (3.145)$$

де  $\vec{w}(y) = (w(t_0, y_0), \dots, w(t_n, y_n))^T$ ,  $\mathcal{A} = [\alpha_{i,j}]_{i,j=0}^n$ ,  $\alpha_{i,j} = T_N(A, t_i)\alpha_j$ ,  $\vec{p} = (T_N(A, t_0)u_0, \dots, T_N(A, t_n)u_0)^T$ . Дослідимо умови існування розв'язку системи (3.145) та наведемо спосіб побудови наближення розв'язку. Для існування

розв'язку (3.145) достатньо щоб рекурентна послідовність

$$\vec{y}^{(k)} = \mathcal{A}\vec{w}(\vec{y}^{(k-1)}) + \vec{p}, \quad (3.146)$$

$$\vec{y}^{(0)} = \vec{p},$$

збігалася у векторному просторі  $X^n = X \times X \times \dots \times X$ . Для елементів  $\vec{x} \in X^n$  введемо норму

$$\|\vec{x}\| = \max_{0 \leq j \leq n} \|x_j\|,$$

Ця норма індукує узгоджену норму у просторі матриць  $\mathcal{M} = [a_{i,j}]_{i,j=0}^n$  з елементами  $a_{ij} \in X$

$$\|\mathcal{M}\| = \max_{0 \leq i \leq n} \sum_{j=0}^n \|a_{ij}\|.$$

Припустимо також, що  $\forall u, v \in X$  функція  $w(t, \cdot)$  задовольняє аналог умови Ліпшиця виду

$$\|A^\alpha (w(t, u) - w(t, v))\| \leq L \|u - v\|, \quad \forall t \in [-1, 1], \quad (3.147)$$

з деякими сталими  $0 < L < \infty$  та  $\alpha > 0$ . Оскільки  $\vec{y}^{(k)} = \sum_{l=1}^k (\vec{y}^{(l)} - \vec{y}^{(l-1)})$ , знайдемо норму  $\|\vec{y}^{(k)} - \vec{y}^{(k-1)}\|$ . Маємо

$$\begin{aligned} \|\vec{y}^{(k)} - \vec{y}^{(k-1)}\| &= \|\mathcal{A}(\vec{w}(\vec{y}^{(k-1)}) - \vec{w}(\vec{y}^{(k-2)}))\| \leq \\ &\leq L \|\mathcal{A}A^{-\alpha}\| \|\vec{y}^{(k-1)} - \vec{y}^{(k-2)}\|, \end{aligned}$$

де норма матриці  $\|\mathcal{A}A^{-\alpha}\|$  виражається як

$$\|\mathcal{A}A^{-\alpha}\| = \max_{0 \leq i \leq n} \sum_{j=0}^n \|\alpha_{ij}\| = \max_{0 \leq i \leq n} \sum_{j=0}^n \|T_N(A, t_i)A^{-\alpha}\| |\alpha_j|$$

Оцінка (3.278) з [3] дозволяє записати

$$\|T_N(A, t_i)A^{-\alpha}\| \leq \frac{c}{\alpha}, \quad c > 0. \quad (3.148)$$

Що в результаті призводить до оцінки

$$\|\mathcal{A}A^{-\alpha}\| \leq \frac{c}{\alpha} \sum_{j=0}^n |\alpha_j| = \frac{2c}{\alpha}. \quad (3.149)$$

Тут ми врахували, що коефіцієнти  $\alpha_j$  є коефіцієнтами квадратурної формули Кленшоу-Куртіса. Отже

$$\left\| y^{(k)} - y^{(k-1)} \right\| \leq \frac{2Lc}{\alpha} \left\| y^{(k-1)} - y^{(k-2)} \right\| \leq \dots \leq \left( \frac{2Lc}{\alpha} \right)^k \left\| \vec{p} \right\|.$$

Застосувавши щойно отриману нерівність до кожного з доданків розкладу  $\vec{y}^{(k)}$ , отримаємо остаточну оцінку

$$\left\| y^{(k)} \right\| \leq \sum_{p=0}^k \left( \frac{2Lc}{\alpha} \right)^p \left\| \vec{p} \right\| = \left\| \vec{p} \right\| \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}. \quad (3.150)$$

Має місце наступна теорема.

**Теорема 3.10** *Нехай  $A : X \rightarrow X$  – лінійний секторіальний оператор, а функція  $w(t, u) : (\mathbb{R}_+ \times X) \rightarrow D(A^\alpha) \subseteq X$  має аналітичне продовження в еліпс Бернштейна  $\mathcal{E}_\rho$  та задовольняє нерівність (3.147) з константами  $L, \alpha$ . Припустимо, що виконується умова*

$$q \equiv \frac{2Lc}{\alpha} < 1, \quad (3.151)$$

де  $c$  – стала з оцінки (3.148). Тоді функція  $y^{(\infty)}$  є єдиним розв'язком матричного нелінійного рівняння (3.145), причому

$$\left\| \vec{y}^{(\infty)} \right\| \leq \left\| \vec{p} \right\| \frac{1}{1 - q}. \quad (3.152)$$

похибка  $k$ -го рекурентного наближення розв'язку цього рівняння задовольняє оцінку

$$\left\| \vec{y}^{(\infty)} - \vec{y}^{(k)} \right\| \leq \left\| \vec{p} \right\| \frac{q^{k+1}}{1 - q}. \quad (3.153)$$

Доведення. Доведення того, що  $y^{(\infty)}$  є єдиним розв'язком (3.145) випливає з теореми Банаха про нерухому точку. Простір  $X^n$ , разом з уведеною метрикою  $d(x, y) = \left\| \vec{x} - \vec{y} \right\|$  є повним метричним простором. Відображення  $\mathcal{F}$  задане в (3.146) переводить простір  $X^n$  в себе і є стискаючим, оскільки

$$\left\| \mathcal{F}\vec{x} - \mathcal{F}\vec{y} \right\| = \left\| \mathcal{A}(\vec{w}(\vec{x}) - \vec{w}(\vec{y})) \right\| \leq \frac{2Lc}{\alpha} \left\| \vec{x} - \vec{y} \right\| = q \left\| \vec{x} - \vec{y} \right\|,$$

де остання нерівність слідує з (3.147), (3.149). Стала  $q < 1$  за припущенням теореми, а тому справедлива оцінка (3.150) з якої безпосередньо випливають нерівності (3.152) та (3.153). ■

### 3.8.5 Аналіз похибки наближення розв'язку вихідної задачі

Для оцінки похибки наближення у точках колокації введемо до розгляду величини  $z_i = u_i - y_i$ ,  $u_i \equiv u(t_i)$ ,  $i = \overline{0, n}$  та позначимо  $\vec{u} = (u_0, \dots, u_n)^T$ ,  $\vec{z} = (z_0, \dots, z_n)^T$ . Обчислимо  $z_i$ , використавши формули (3.139) та (3.144)

$$\begin{aligned}
 z_i &= e^{-A(t_i+1)}u_0 - T_N(A, t_i)u_0 + e^{-A(t_i+1)} \int_{-1}^1 w(s, u(s))ds - \\
 &\quad - T_N(A, t_i) \sum_{j=0}^n \alpha_j w(t_j, y_j) = \\
 &= \eta_N(t_i)u_0 + \eta_N(t_i) \int_{-1}^1 w(s, u(s))ds + \\
 &+ T_N(A, t_i) \left( \int_{-1}^1 w(s, u(s))ds - \int_{-1}^1 \sum_{j=0}^n L_{j,n}(s)w(t_j, u_j)ds \right) + \\
 &+ T_N(A, t_i) \left( \int_{-1}^1 \sum_{j=0}^n L_{j,n}(s)w(s_j, u_j)ds - \sum_{j=0}^n \alpha_j w(t_j, y_j) \right) = \\
 &= \eta_N(t_i)u_0 + \eta_N(t_i) \int_{-1}^1 w(s, u(s))ds + \\
 &+ T_N(A, t_i) \int_{-1}^1 \left( w(s, u(s)) - \sum_{j=0}^n L_{j,n}(s)w(t_j, u_j) \right) ds + \\
 &+ T_N(A, t_i) \sum_{j=0}^n \alpha_j [w(s_j, u_j) - w(t_j, y_j)].
 \end{aligned}$$

Проведені перетворення дозволяють нам представити  $z_i$  у вигляді суми чотирьох складових

$$z_i = \eta_N(t_i)u_0 + \eta_N(t_i) \int_{-1}^1 w(s, u(s))ds + \psi_{1,i} + \psi_{2,i},$$

де

$$\begin{aligned}\psi_{1,i} &= T_N(A, t_i) \int_{-1}^1 \left( w(s, u(s)) - \sum_{j=0}^n L_{j,n}(s) w(t_j, u_j) \right) ds, \\ \psi_{2,i} &= T_N(A, t_i) \sum_{j=0}^n \alpha_j [w(s_j, u_j) - w(t_j, y_j)].\end{aligned}$$

Далі дослідимо похибку наближення розв'язку рівняння (3.139) у вузлах  $t_i$ . Для  $\psi_1$  маємо

$$\begin{aligned}\|\psi_1\| &= \max_{0 \leq i \leq n} \left\| T_N(A, t_i) \int_{-1}^1 \left[ w(s, u(s)) - \sum_{j=0}^n L_{j,n}(s) w(t_j, u_j) \right] ds \right\| \leq \\ &\leq \frac{c}{\alpha} \int_{-1}^1 \left\| A^\alpha \left[ w(s, u(s)) - \sum_{j=0}^n L_{j,n}(s) w(t_j, u_j) \right] \right\| ds \leq \\ &\leq c_1 \ln n E_n(A^\alpha w(\cdot, u(\cdot))),\end{aligned}$$

де  $E_n(u)$  – похибка найкращого наближення  $u$  поліномами степеня  $n$

$$E_n(u) = \min_{p \in \Pi_n} \|u - p\|.$$

Для  $\psi_2$  матимемо

$$\begin{aligned}\|\psi_2\| &= \max_{0 \leq i \leq n} \left\| T_N(A, t_i) \sum_{j=0}^n \alpha_j [w(s_j, u_j) - w(s_j, y_j)] \right\| \leq \\ &\leq \frac{c}{\alpha} \sum_{j=0}^n |\alpha_j| \|A^\alpha [w(s_j, u_j) - w(s_j, y_j)]\| \leq \\ &\leq \frac{2Lc}{\alpha} \|z\| = q \|z\|.\end{aligned}$$

Це приводить нас до оцінки на  $\|z\|$

$$\begin{aligned}\|z\| &\leq \frac{c e^{-\sqrt{\pi d \alpha (N+1)}}}{\alpha} \|A^\alpha u_0\| + \frac{c e^{-\sqrt{\pi d \alpha (N+1)}}}{\alpha} \int_{-1}^1 \|A^\alpha w(s, u(s))\| ds + \\ &+ c_1 \ln n E_n(A^\alpha w(\cdot, u(\cdot))) + q \|z\|.\end{aligned}$$

Сформулюємо отриманий результат у вигляді леми.



**Лема 3.5** Припустимо що для оператора  $A$  та функції  $w$  виконуються умови теореми 3.10. Тоді розв'язок системи нелінійних рівнянь (3.145) є наближенням розв'язку рівняння (3.139) у вузлах сітки ЧГЛ. Похибка наближення задовольняє оцінку

$$\|z\| \leq \frac{c e^{-\sqrt{\pi d \alpha (N+1)}}}{(1-q)\alpha} \left( \|A^\alpha u_0\| + \int_{-1}^1 \|A^\alpha w(s, u(s))\| ds \right) + \frac{c_1 \ln n E_n(A^\alpha w(\cdot, u(\cdot)))}{1-q}.$$

Повна похибка запропонованого тут методу наближення є сумою похибок дискретизації рівняння (3.139) та похибки наближеного розв'язування нелінійної системи (3.145).

**Теорема 3.11** Припустимо що для оператора  $A$  та функції  $w$  виконуються умови теореми 3.10. Тоді похибка наближення розв'язку нелінійного інтегрального рівняння (3.139) вектором  $\vec{y}^k$ , який є наближенням розв'язком (3.145) має вигляд

$$\|\vec{u} - \vec{y}^k\| \leq \|\vec{z}\| + \frac{q^{k+1}}{1-q} \|\vec{p}\|.$$

Ілюстрація застосування алгоритму чисельного розв'язування (3.137), що викладений у пунктах (3.8.3)–(3.8.4) приведена у наступному прикладі.

**Приклад 3.12** Розглянемо задачу (3.137) в якій нелінійна нелокальна умова має вигляд

$$\begin{aligned} u(-1) - \mu \int_{-1}^1 u^2(s) ds &= u_0, \\ u_0(x) &= \sin(\pi x) + \mu \frac{e^{-4\pi^2} - 1}{2\pi^2} \sin^2(\pi x). \end{aligned} \tag{3.154}$$

Функція  $w(s, u) = \mu u^2$  залежить від додаткового параметру  $\mu$ , зміна якого дозволяє маніпулювати величиною константи  $L$  з (3.147). Точним розв'язком нелокальної задачі (3.137) з умовою (3.154) є

$$u_{ex}(t, x) = e^{-(t+1)\pi^2} \sin(\pi x).$$

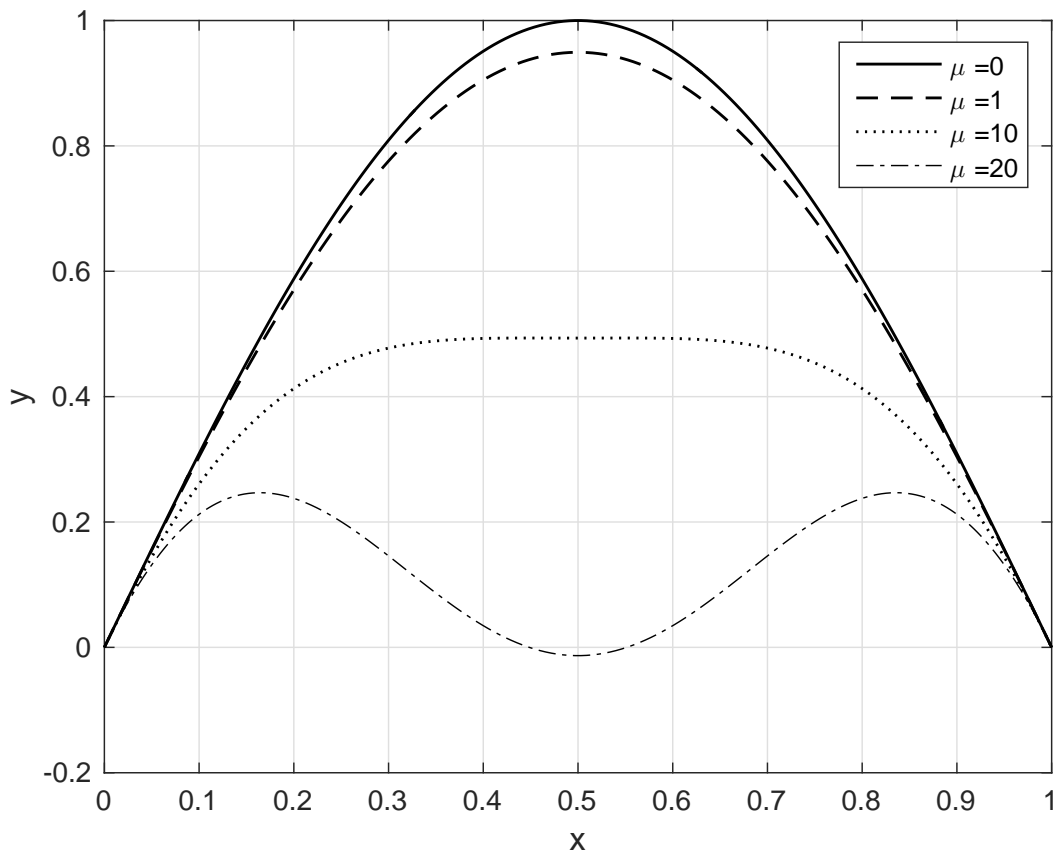


Рис. 3.4: Графік  $u_0(x)$  при різних значення параметра  $\mu$

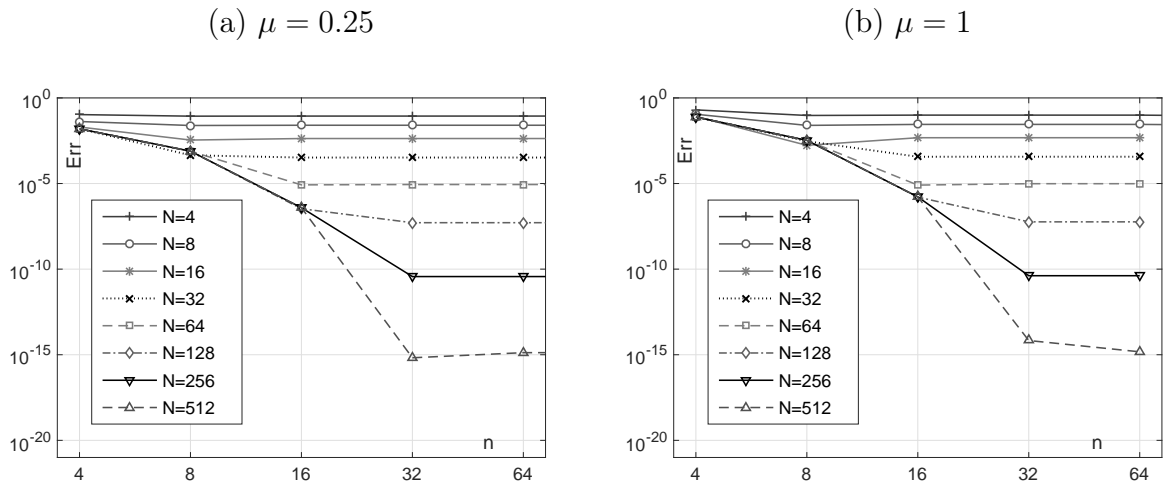


Рис. 3.5: Графік залежності похибки  $\text{Err}$  від кількості вузлів колокації  $n$  для різних значень параметра  $N$ .

вигляд якого не залежить від  $\mu$ .

Як видно з графіку функції  $u_0$ , зображеного на Рис. 3.4, при малих значеннях параметра  $\mu$  розв'язок нелокальної задачі (3.137) (який, при  $t = 0$ , еквівалентний  $u_0(x)$  з  $\mu = 0$ ) слабо відрізняється від розв'язку класичної задачі Коші. Різниця між розв'язками зростає зі збільшенням  $\mu$  (див. для порівняння графік  $\mu = 20$  Рис. 3.4).

Спочатку покладемо  $\mu = 1/4$ . Легко перевірити, що такий вибір  $\mu$  забезпечує виконання умови (3.151), для  $\alpha = 1$  та  $\forall \rho_0 > 0$ , а визначена таким чином  $w(s, u)$  допускає аналітичне продовження по змінній  $s$  у область  $\mathcal{E}_\rho \in \mathbb{C}$ . Згідно з теоремою 3.10 у такому випадку рекурентна послідовність наближень  $\vec{y}^{(k)}$  побудована з використанням (3.146) повинна збігатися до наближення розв'язку (3.145).

Для експериментальної оцінки похибки чисельного наближення розв'язку використаємо величину

$$\text{Err} = \text{Err} \left( u_{ex}, \vec{y}^{(k)} \right) \equiv \max_{0 \leq l \leq m} \max_{0 \leq j \leq n} \left\| u_{ex}(t_i, x_l) - y_j^{(k)}(x_l) \right\|,$$

де  $x_l = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \left( \frac{\pi l}{m} \right) \right)$ ,  $l = \overline{0, m}$  — промасштабовані на  $[0, 1]$  вузли ЧГЛ. В

якості критерію зупинки для ітераційного процесу розв'язування матричного нелінійного рівняння (3.145) використовуватимемо умову

$$\text{Err} \left( \bar{y}^{(k)}, \bar{y}^{(k-1)} \right) < 10^{-18},$$

де  $K > 0$  номер фінальної ітерації.

Результати чисельних розрахунків, які базуються на формулах (3.146), (3.144) та (3.143) з різними значеннями параметрів дискретизації  $N$ ,  $n$  наведено в таблиці (3.18). Ця таблиця ілюструє залежність похибки наближення розв'язку вихідної задачі  $\text{Err}$  від комбінації параметрів  $N$  та  $n$ . Для кожного  $N \in \{4, 8, 16, 32, 64, 128, 256\}$  значення  $n$  підбрано експериментально виходячи з динаміки похибки в залежності від  $n$  (див. Рис. 3.5). Таблиця 3.18 також містить оцінену апостеріорно кількість ітерацій  $K$ , яких достатньо для забезпечення відносної похибки на рівні  $10^{-5}$ .

N	n	Err	K
4	8	0.0859119243400000010	5
8	8	0.0244950525900000000	5
16	8	0.00345794666699999987	6
32	16	0.000328787487900000005	6
64	16	0.00000833843948899999922	7
128	32	0.0000000515513076299999962	9
256	32	$3.68083566999999982 \times 10^{-11}$	11
512	64	$1.32334447899999999 \times 10^{-15}$	13

Таблиця 3.18: Результати експериментів застосування розробленого методу чисельного розв'язування (3.137) з нелокальною умовою (3.154)

## РОЗДІЛ 4

Методи без насичення точності для рівнянь другого порядку зі сталим необмеженим операторним коефіцієнтом

### 4.1 Експоненціально збіжний метод для строго демпфованого диференціального рівняння другого порядку в банаховому просторі

**4.1.1 Вступ** Задача, що розглядається в даному розділі є окремим випадком наступної початкової задачі для диференціального рівняння з операторним коефіцієнтом в банаховому просторі:

$$\begin{aligned} \frac{d^2u(t)}{dt^2} + A \frac{du(t)}{dt} + Bu(t) &= 0 \quad t > 0, \quad \alpha > 0, \\ u(0) &= \varphi, \\ \frac{du(0)}{dt} &= \psi, \end{aligned} \tag{4.1}$$

яка вивчалась багатьма авторами. Достатні умови розв'язності в випадку домінантного оператора  $A$  подані в [14]. Теорема про існування та єдиність розв'язку доведені в [130] при виконанні умов типу Міядери–Феллера–Філіпса. Класифікація та умови існування та єдиності розв'язку задачі (4.1) в залежності від типу операторів  $A$  та  $B$  подано в [131] (див. також літературу цитовану там).

Частинний випадок задачі (4.1) є

$$\begin{aligned} \frac{d^2u(t)}{dt^2} + \alpha A \frac{du(t)}{dt} + Au &= 0, \quad t > 0 \\ u(0) &= \varphi, \\ \frac{du(0)}{dt} &= \psi, \end{aligned} \tag{4.2}$$

де  $A$  – оператор в банаховому просторі  $X$  з нормою  $\|\cdot\|$ . Припустимо, що оператор  $A : X \rightarrow X$  – такий, що його спектр  $\Sigma(A)$  лежить на проміжку

$[\gamma_0, \infty)$  дійсної вісі і для довільного  $\epsilon > 0$ , виконується оцінка для резольвенти

$$\|(zI - A)^{-1}\| \leq C(1 + |z|)^{-1} \forall z \notin \Sigma_\epsilon = \{z : |\arg(z)| < \epsilon\}, \quad (4.3)$$

зі сталою  $C = C_\epsilon > 0$ . У випадку  $A = -\Delta$ , де  $\Delta$  позначає Лапласіан в  $\mathbb{R}^k$ ,  $k \geq 2$  з крайовою умовою Діріхле  $u(x, t) = 0$  для  $x \in \partial\Omega$ , і  $\Omega$  – обмежена область в  $\mathbb{R}^k$ , ми маємо так зване сильно демпфоване хвильове рівняння [132, 133].

Метод скінченних елементів з поліноміальною швидкістю збіжності для такого рівняння розглянуто в [132, 133]. В першій з цих робіт використовується дискретизація скінченними елементами по простору та проведено аналіз в нормі  $L_2$ . Аналіз проводиться виходячи з зображення розв'язку за допомогою операторної експоненти. В другій роботі такий підхід комбінується з методами з оптимальними порядками збіжності в  $\max$ -нормі для кусково лінійних скінченних елементів в поєднанні з зворотнім методом Ейлера та схемою Кранка-Ніколсона по часу. Стійкість різних тришарових різницевих методів для диференціальних рівнянь другого порядку з операторними коефіцієнтами досліджено в [70]. Показано, що суттєво на стійкість впливає умова строгої  $P$ -позитивності операторного коефіцієнта.

Метою даного розділу є побудова експоненціально збіжного методу для наближеного розв'язку задачі (4.1).

**4.1.2 Зображення розв'язку через операторну експоненту** Введемо до розгляду вектор  $w$  і операторну матрицю  $B$

$$w = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ A & \alpha A \end{pmatrix}.$$

Введемо норму  $\|v\| = \max\{\|v_1\|, \|v_2\|\}$  для простору векторів  $v = (v_1, v_2)^T$ , яка генерує відповідну матричну норму. Задача (4.2) може бути записана у

вигляді

$$\begin{aligned} \frac{dw(t)}{dt} + Bw &= 0, \\ w(0) &= w_0, \end{aligned} \tag{4.4}$$

де

$$w_0 = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}.$$

Резольвента оператора  $B$  є

$$\begin{aligned} (zI - B)^{-1} &= (\alpha z - 1)^{-1} \mathcal{R}(z) \begin{pmatrix} zI - \alpha A & -I \\ A & zI \end{pmatrix} = \\ &= (\alpha z - 1)^{-1} \begin{pmatrix} \alpha I - z(\alpha z - 1)^{-1} \mathcal{R}(z) & -\mathcal{R}(z) \\ -I + z^2(\alpha z - 1)^{-1} \mathcal{R}(z) & z\mathcal{R}(z) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

де

$$\mathcal{R}(z) = (z^2(\alpha z - 1)^{-1}I - A)^{-1}.$$

Нехай  $A$  задовольняє (4.3), тоді існує  $\epsilon > 0$  таке, що [133]

$$\|\mathcal{R}(z)\| \leq \frac{C}{1 + |z|}, \quad \forall z \notin \Sigma_\epsilon = \{z : |\arg(z)| < \epsilon\},$$

з додатною сталою  $C = C_\epsilon$ . Використовуючи цю оцінку, можна показати, аналогічно до [133], що існує сектор  $\Sigma_\theta$  з кутом  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$  такий, що на його променях та поза ним виконується наступна оцінка для резольвенти:

$$\|(zI - B)^{-1}\| \leq \frac{C}{1 + |z|}, \quad z \notin \Sigma_\theta,$$

а сектор  $\Sigma_\theta$  містить множину

$$\Psi = \left\{ z : |z - \alpha| = \alpha^{-1}, \operatorname{Re} z \geq \frac{1}{2}\alpha\gamma_0 \right\} \cup \{z : \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \geq \alpha^{-1}\}.$$

Визначимо значення  $\theta$  через вхідні дані задачі  $\gamma_0, \alpha$ .

З (4.5) видно, що спектр  $\Sigma(B)$  оператора  $B$  складається з  $z = \alpha^{-1}$  та всіх  $z$  таких, що

$$\frac{z^2}{\alpha z - 1} - \lambda = 0,$$

де  $\lambda \in \Sigma(A)$ . Перепишуючи останнє рівняння в вигляді  $z^2 - \alpha\lambda z + \lambda = 0$  отримаємо функцію

$$z = z(\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda\alpha}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda\alpha}{2}\right)^2 - \lambda}, & \text{if } \lambda \geq 4\alpha^{-2} \\ \frac{\lambda\alpha}{2} \pm i\sqrt{\lambda - \left(\frac{\lambda\alpha}{2}\right)^2}, & \text{if } \gamma_0 \leq \lambda < 4\alpha^{-2}. \end{cases}$$

Розглянемо наступні можливості.

**1.** Якщо  $\gamma_0 \geq 4\alpha^{-2}$  тоді ми маємо  $z = z_1(\lambda) = \frac{\lambda\alpha}{2} + \sqrt{\left(\frac{\lambda\alpha}{2}\right)^2 - \lambda}$ ,  $z = z_2(\lambda) = \frac{\lambda\alpha}{2} - \sqrt{\left(\frac{\lambda\alpha}{2}\right)^2 - \lambda}$ . Функція  $z_1(\lambda)$  відображає спектральну множину  $\Sigma(A)$  в  $S_1 = [2\alpha^{-1}, \infty)$ . Оскільки

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} z_2(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{\frac{\lambda\alpha}{2} + \sqrt{\left(\frac{\lambda\alpha}{2}\right)^2 - \lambda}} = \alpha^{-1}$$

і  $z_2(4\alpha^{-2}) = 2\alpha^{-1}$ , функція  $z_2(\lambda)$  переводить множину  $\Sigma(A)$  в  $S_2 = [\alpha^{-1}, 2\alpha^{-1}]$ . Таким чином, функція  $z(\lambda)$  в цьому випадку відображає спектральну множину  $\Sigma(A)$  в  $S_1 \cup S_2 = [\alpha^{-1}, \infty)$  при  $\lambda \geq \gamma_0 \geq 4\alpha^{-2}$ .

**2.** Якщо  $0 < \gamma_0 < 4\alpha^{-2}$  тоді ми маємо  $z = z(\lambda) = \frac{\lambda\alpha}{2} \pm i\sqrt{\lambda - \left(\frac{\lambda\alpha}{2}\right)^2}$ . Для таких  $z$  виконується

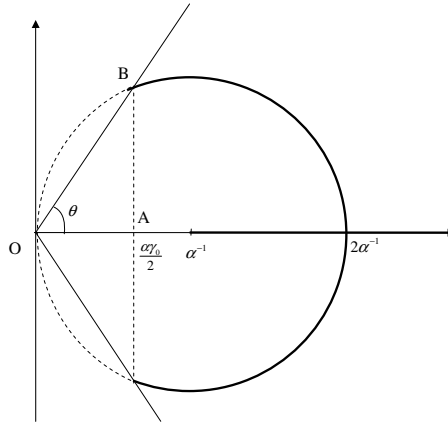
$$\begin{aligned} |z - \alpha^{-1}| &= \\ &= \left| \frac{\lambda\alpha}{2} \pm i\sqrt{\lambda - \left(\frac{\lambda\alpha}{2}\right)^2} - \alpha^{-1} \right| = \\ &= \left[ \left( \frac{\lambda\alpha}{2} - \alpha^{-1} \right)^2 + \lambda - \left(\frac{\lambda\alpha}{2}\right)^2 \right]^{1/2} = \alpha^{-1}, \end{aligned}$$

тобто ці  $z$  лежать на перетині кола  $S_3 = \{z : |z - \alpha^{-1}| = \alpha^{-1}\}$  з півплощиною  $S_4 = \{z : \operatorname{Re} z \geq \frac{\gamma_0\alpha}{2}\}$ . Оскільки  $\frac{\alpha\gamma_0}{2} < 2\alpha^{-1}$ , точка  $\frac{\alpha\gamma_0}{2}$  лежить всередині  $S_3$  (див. рис. 4.1). Точки  $A$  та  $B$  мають координати  $A = (\alpha\gamma_0/2, 0)$ ,  $B = (\alpha\gamma_0/2, \sqrt{\gamma_0 - (\gamma_0\alpha/2)^2})$  і легко знайти, що спектральний кут  $\theta$  оператора  $B$  визначається

$$\theta = \arccos \frac{\alpha\sqrt{\gamma_0}}{2}.$$

Ця формула дає верхню границю значення спектрального кута у всіх випадках.



Рис. 4.1: Спектральний кут оператора  $B$ .

Вищенаведені спектральні властивості оператора  $B$  гарантують існування операторної експоненти  $e^{-Bt}$  та розв'язок задачі (4.4) може бути записаний у вигляді

$$w(t) = e^{-Bt}w_0.$$

**4.1.3 Зображення та наближення операторної експоненти.** Використаємо зображення операторної експоненти за допомогою інтеграла Данфорда-Коші (див. підрозд. 1.4)

$$e^{-Bt}w_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\Sigma} e^{-tz} (zI - B)^{-1} w_0 dz, \quad (4.6)$$

де  $\Gamma_\Sigma$  – шлях, що охоплює спектр оператора  $B$ . Очевидно, що він знаходиться всередині гіперболи

$$\Gamma_\Sigma = \{z = \cosh s - 1 - i \tan \theta \sinh s : s \in (-\infty, \infty)\}.$$

Виберемо криву

$$\Gamma_I = \{z = a \cosh s - 1 - ib \sinh s : s \in (-\infty, \infty)\}$$

так, що він охоплює  $\Gamma_\Sigma$  та побудуємо експоненціально збіжний метод як в попередніх розділах (див. також [3, 78]). Конкретні значення  $a, b$  визначимо далі.

Для цієї кривої маємо

$$w(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\Sigma}} e^{-tz} (zI - B)^{-1} w_0 dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_I} e^{-tz} (zI - B)^{-1} w_0 dz. \quad (4.7)$$

Після параметризації останнього інтеграла, отримуємо

$$w(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tz(s)} z'(s) (z(s)I - B)^{-1} w_0 ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, s) ds, \quad (4.8)$$

де

$$z(s) = a \cosh s - 1 - ib \sinh s,$$

$$z'(s) = a \sinh s - ib \cosh s.$$

Будемо розглядати простір  $\mathbf{H}^p(D_d)$  всіх операторно-значних функцій, введений в підрозділі 1.3.

Далі дослідимо смугу, в якій вектор-функція  $f(t, s)$  має аналітичне продовження відносно  $s$ . Для цього зробимо заміну  $s$  на  $s + i\nu$ . Тоді крива інтегрування  $\Gamma_I$  перетвориться на параметричне сімейство

$$\Gamma(\nu) = \{z = a \cosh(s + i\nu) - 1 - ib \sinh(s + i\nu) : s \in (-\infty, \infty)\} =$$

$$\{z = (a \cos \nu + b \sin \nu) \cosh s - 1 - i(b \cos \nu - a \sin \nu) \sinh s : s \in (-\infty, \infty)\}.$$

Потрібно вибрати параметри  $a, b$  так, що для  $\nu \in (-\frac{d}{2}, \frac{d}{2})$ ,  $\Gamma(\nu)$  не перетинає  $\Gamma_{\Sigma}$  і, в той же час, огортає спектр. Виберемо  $a, b$  з таких міркувань: коли  $\nu = -\frac{d}{2}$ ,  $\Gamma(\nu)$  перетворюється в лінію, паралельну уявній вісі, а при  $\nu = \frac{d}{2}$  множина  $\Gamma(\nu)$  збігається з  $\Gamma_{\Sigma}$ . Такі вимоги приводять до системи рівнянь

$$\begin{cases} a \cos \frac{d}{2} - b \sin \frac{d}{2} = 0, \\ a \cos \frac{d}{2} + b \sin \frac{d}{2} = 1, \\ b \cos \frac{d}{2} - a \sin \frac{d}{2} = \tan \theta. \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є

$$\begin{cases} d = \frac{\pi}{2} - \theta, \\ a = \frac{1}{2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}, \\ b = \frac{1}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}. \end{cases} \quad (4.9)$$

Для цих параметрів, векторно-значна функція  $f(t, s)$  – аналітична відносно  $s$  в смужці

$$D_d = \left\{ \zeta = \xi + i\nu : \xi \in (-\infty, \infty), |\nu| < \frac{d}{2} \right\}.$$

Щоб забезпечити чисельну стійкість методу, ми модифікуємо резольвенту в (4.7) аналогічно тому, як це робиться в попередніх підрозділах. Різниця полягає тільки в тому, що ми беремо за поправку доданок  $\frac{1}{z+1}I$  замість  $\frac{1}{z}I$ , оскільки наша інтегральна гіпербола проходить через початок координат. Таким чином, ми отримаємо зображення розв'язку (4.4) у вигляді

$$\begin{aligned} w(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_I} e^{-tz} \left[ (zI - B)^{-1} - \frac{1}{z+1}I \right] w_0 dz = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t, s) ds, \end{aligned} \quad (4.10)$$

де

$$f_1(t, s) = \frac{1}{2\pi i} e^{-tz(s)} z'(s) \left[ (z(s)I - B)^{-1} - \frac{1}{z(s)+1}I \right] w_0.$$

**Зауваження 4.1** Відмітимо, що

$$\int_{\Gamma_I} e^{-tz} \frac{1}{z+1} ds = 0,$$

оскільки точка  $(z+1)$  залишається поза кривою інтегрування, тобто наш коректуючий доданок не змінює значення інтегралу. Але це дає можливість добитись стійкості методу при малих  $t$  (див. попередні підрозділи, а також [3, 78] для деталей).

Далі оцінимо функцію  $f_1(t, s)$  в (4.10) при додаткових припущеннях, що  $w_0 \in D(B^\sigma)$  для деякого  $\sigma > 0$ . Легко бачити, що це означає, що  $\varphi, \psi \in D(A^\sigma)$ . Отримаємо

$$\begin{aligned} & \left\| \left[ (z(s)I - B)^{-1} - \frac{1}{z(s) + 1} I \right] w_0 \right\| = \\ & = \frac{1}{|z(s) + 1|} \left\| (B + I)(z(s)I - B)^{-1} w_0 \right\| \leq \\ & \leq \frac{1}{|z(s) + 1|} \left\| (B + I)B^{-1} \right\| \left\| B(z(s)I - B)^{-1} w_0 \right\| \leq \\ & \leq \frac{C}{|z(s) + 1|} \left\| B^{1-\sigma}(z(s)I - B)^{-1} \right\| \left\| B^\sigma w_0 \right\| \leq \\ & \leq \frac{C}{|z(s) + 1| (1 + |z(s)|)^\sigma} \left\| B^\sigma w_0 \right\|, \end{aligned}$$

з додатною сталою  $C$ . Беручи до уваги цю нерівність ми отримаємо оцінку підінтегрального виразу

$$\begin{aligned} \|f_1(t, s)\| & \leq \frac{C|e^{-z(s)t}| |z'(s)|}{2\pi|z(s) + b| (1 + |z(s)|)^\sigma} \left\| B^\sigma w_0 \right\| \leq \\ & \leq C_1 e^{-ta \cosh s+t} \frac{\sqrt{a^2 \sinh^2 s + b^2 \cosh^2 s}}{(a^2 \cosh^2 s + b^2 \sinh^2 s)^{\frac{\sigma+1}{2}}} \left\| B^\sigma w_0 \right\| \leq \\ & \leq C_1 e^{-ta \cosh s+t} \left( \frac{a^2 \tanh^2 s + b^2}{a^2 + b^2 \tanh^2 s} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\left\| B^\sigma w_0 \right\|}{(\cosh s)^\sigma (a^2 + b^2 \tanh^2 s)^{\frac{\sigma}{2}}} \leq \\ & \leq C_2 e^{-ta \cosh s+t-\sigma|s|} \left\| B^\sigma w_0 \right\|, \end{aligned} \tag{4.11}$$

з новою додатною сталою  $C_1$ . Оцінка (4.11) показує, що інтеграл (4.10) існує (є збіжним)  $\forall t \geq 0$ , при  $\sigma > 0$ .

Аналогічно до [3] отримаємо

$$\|f_1(t, \cdot)\|_{H^1(D_a)} \leq C(\theta, \sigma) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma|s|} ds = \frac{2C(\theta, \sigma)}{\sigma},$$

де

$$C(\theta, \sigma) = C_2 \left( \frac{2}{a} \right)^\sigma \left\| B^\sigma w_0 \right\| = C_2 \frac{1}{\left[ \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \right]^\sigma} \left\| B^\sigma w_0 \right\|.$$

Для наближення інтеграла (4.10) використаємо Sinc-квadrатуру [11] (див. також підрозд. 1.3):

$$w(t) \approx w_N(t) = \frac{h}{2\pi i} \sum_{k=-N}^N f_1(t, z(kh)). \quad (4.12)$$

Для похибки цієї квадратури маємо

$$\begin{aligned} \|\eta_N(f_1, h)\| = \|w(t) - w_N(t)\| &\leq \left\| w(t) - \frac{h}{2\pi i} \sum_{k=-N}^N f_1(t, z(kh)) \right\| + \\ &+ \left\| \frac{h}{2\pi i} \sum_{|k|>N} f_1(t, z(kh)) \right\|. \end{aligned}$$

Для першої суми в цій нерівності виконується оцінка (див. [4, 72, 76])

$$\begin{aligned} \left\| w(t) - \frac{h}{2\pi i} \sum_{k=-N}^N f_1(t, z(kh)) \right\| &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-\pi d/h}}{2 \sinh \pi d/h} \|f_1(t, v)\|_{H^1(D_d)} \leq \\ &\leq \frac{C(\theta, \sigma)}{2\pi\sigma} \frac{e^{-\pi d/h}}{2 \sinh \pi d/h}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Для другої суми маємо

$$\begin{aligned} \left\| \frac{h}{2\pi i} \sum_{|k|>N} f_1(t, z(kh)) \right\| &\leq \frac{h}{2\pi} \sum_{|k|>N} \|f_1(t, z(kh))\| \leq \\ &\leq \frac{h}{\pi} \sum_{k=N+1}^{\infty} C(\theta, \sigma) e^{-ta \cosh(kh) + t - kh\sigma} \leq \\ &\leq \begin{cases} \frac{C(\theta, \sigma) e^t}{\pi t} e^{-ta \cosh((N+1)h) - \sigma(N+1)h}, & t > 0, \\ C(\theta, \sigma) e^{-\sigma(N+1)h}, & t = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Поєднуючи оцінки (4.13) і (4.14) для  $t = 0$ , приходимо до

$$\|\eta_N(f_1, h)\| \leq \frac{c}{\sigma} \left[ \frac{e^{-\pi d/h}}{\sinh \pi d/h} + e^{-\sigma(N+1)h} \right], \quad (4.15)$$

Урівноважуючи обидві експоненти вибором

$$h = \sqrt{\frac{\pi d}{\sigma(N+1)}}, \quad (4.16)$$

отримаємо

$$\begin{aligned} \|\eta_N(f_1, h)\| &\leq \frac{c}{\sigma} \left[ \frac{e^{-\sqrt{\pi d \sigma(N+1)}}}{\sinh\left(\sqrt{\pi d \sigma(N+1)}\right)} + e^{-\sqrt{\pi d \sigma(N+1)}} \right] = \\ &= \frac{c}{\sigma} \left[ \frac{e^{-2\sqrt{\pi d \sigma(N+1)}}}{1 - e^{-\sqrt{\pi d \sigma(N+1)}}} + e^{-\sqrt{\pi d \sigma(N+1)}} \right]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

У випадку  $t > 0$ , перший доданок в експоненті  $\exp(-ta \cosh((N+1)h) - \sigma|(N+1)h|)$  в (4.14) більше впливає на порядок похибки. Покладаючи  $h = O(\ln N/N)$ , для довільного  $t > 0$  отримаємо асимптотичну оцінку

$$\|\eta_N(f_1, h)\| \leq c \left[ \frac{e^{-c_1 N / \ln N}}{\sigma} + \frac{e^{-tc_2 N / \ln N}}{t} \right], \quad (4.18)$$

де  $c, c_1, c_2$  – додатні сталі.

Отже, ми довели теорему.

**Теорема 4.1** *Нехай  $\varphi, \psi \in D(A^\sigma)$  і  $A$  – оператор, що задовольняє оцінку (4.3) і має спектр  $\Sigma(A)$ , що знаходиться на  $[\gamma_0, \infty)$ . Тоді формула (4.12) задає наближений розв’язок початкової задачі (4.4) з оцінкою (4.17) порядку  $O(e^{-c\sqrt{N}})$  при  $t \geq 0$ ,  $h = \sqrt{\frac{\pi d}{\sigma(N+1)}}$  і оцінкою (4.18) порядку  $O(e^{-cN/\ln N})$  при  $t > 0$ ,  $h = O(\ln N/N)$ .  $c > 0$  і не залежить від  $N$ .*

**4.1.4 Чисельні експерименти.** В цьому підрозділі розглянемо модельну задачу вигляду (4.4) з відомим точним розв’язком, потім розв’яжемо її наближено, запропонованим методом та порівняємо результати.

Розглянемо наступну задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(t, x, y)}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial}{\partial t} (\Delta u(t, x, y)) - \Delta u(t, x, y) &= 0, \\ u(t, 0, y) = u(t, 1, y) = u(t, x, 0) = u(t, x, 1) &= 0, \\ u(0, x, y) = \sin(\pi x) \sin(2\pi y), \\ \frac{\partial u(t, x, y)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= 0, \end{aligned} \quad (4.19)$$

де

$$\Delta u(t, x, y) = \frac{\partial^2 u(t, x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(t, x, y)}{\partial y^2}.$$

В залежності від параметру  $\alpha$ , є три можливих розв'язки задачі (4.19).

1. Якщо  $0 < \alpha < \frac{2}{\pi\sqrt{5}}$ , тоді

$$u(t, x, y, \alpha) = \exp\{p_1 t\} \left( \cos(p_2 t) - \frac{p_1}{p_2} \sin(p_2 t) \right) \sin(\pi x) \sin(2\pi y),$$

де

$$p_1 = -\frac{5}{2}\pi^2\alpha,$$

$$p_2 = \frac{1}{2}\sqrt{20\pi^2 - 25\pi^4\alpha^2}.$$

2. Якщо  $\alpha = \frac{2}{\pi\sqrt{5}}$ , тоді

$$u(t, x, y, \alpha) = \exp\{-\sqrt{5}\pi t\} (1 + \pi\sqrt{5}t) \sin(\pi x) \sin(2\pi y).$$

3. Якщо  $\alpha > \frac{2}{\pi\sqrt{5}}$ , тоді

$$u(t, x, y, \alpha) = (\exp\{p_1 t\} p_2 - \exp\{p_2 t\} p_1) \frac{\sin(\pi x) \sin(2\pi y)}{p_2 - p_1},$$

де

$$p_1 = -\frac{5}{2}\pi^2\alpha + \frac{1}{2}\sqrt{25\pi^4\alpha^2 - 20\pi^2},$$

$$p_2 = -\frac{5}{2}\pi^2\alpha - \frac{1}{2}\sqrt{25\pi^4\alpha^2 - 20\pi^2}.$$

Розв'язки задачі (4.19) зображено на рис. 4.2–4.4 в залежності від параметру  $\alpha$ , в точці  $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ .

**Приклад 4.1** У випадку  $\alpha = \frac{2}{\pi\sqrt{5}}$  легко перевірити, що  $\gamma_0 = 2\pi^2$  і

$$\alpha = \frac{2}{\pi\sqrt{5}} < \frac{2}{\sqrt{\gamma_0}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}.$$

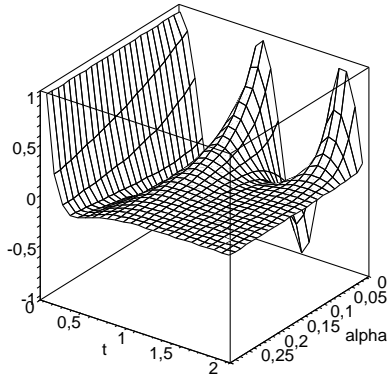


Рис. 4.2:  $\alpha < \frac{2}{\pi\sqrt{5}}$ .

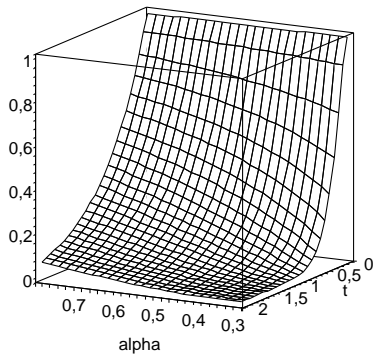


Рис. 4.3:  $\alpha > \frac{2}{\pi\sqrt{5}}$ .

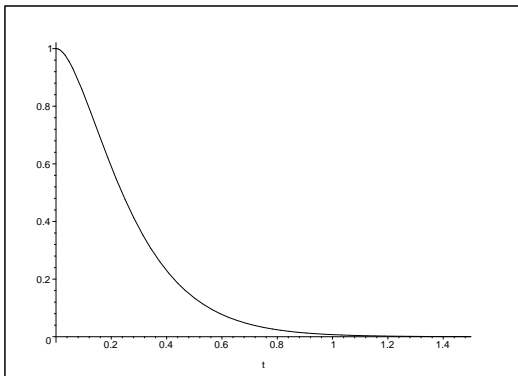


Рис. 4.4:  $\alpha = \frac{2}{\pi\sqrt{5}}$ .



Згідно з (4.9) і визначенням  $\theta$ , отримуємо

$$\theta = \arccos \frac{\frac{2}{\pi\sqrt{5}}\sqrt{2\pi^2}}{2} = \arccos \sqrt{\frac{2}{5}},$$

$$d = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{\sqrt{2}}{5} \approx 0,68,$$

$$a = \frac{1}{2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)} \approx 0,53,$$

$$b = \frac{1}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)} \approx 1,49.$$

Використовуючи

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(z) \sin(\pi x) \sin(2\pi y) &= \left( \frac{z^2}{\alpha z - 1} I - A \right)^{-1} \sin(\pi x) \sin(2\pi y) = \\ &= \frac{1}{\frac{z^2}{\alpha z - 1} - 5\pi^2} \sin(\pi x) \sin(2\pi y) = \frac{\alpha z - 1}{z^2 - 5\pi^2 \alpha z + 5\pi^2} \sin(\pi x) \sin(2\pi y), \end{aligned}$$

можна отримати явно

$$(zI - B)^{-1} w_0 = \begin{pmatrix} \left( \alpha - \frac{z}{z^2 - 5\pi^2 \alpha z + 5\pi^2} \right) \frac{\sin(\pi x) \sin(2\pi y)}{\alpha z - 1} \\ \left( -1 + \frac{z^2}{z^2 - 5\pi^2 \alpha z + 5\pi^2} \right) \frac{\sin(\pi x) \sin(2\pi y)}{\alpha z - 1} \end{pmatrix}$$

і далі застосувати алгоритм (4.12). Обчислення проводились в середовищі Maple. Результати, наведені в таблиці 4.1, підтверджують отримані априорні оцінки.

**Приклад 4.2** В другому прикладі розглянемо задачу (4.19) з  $\alpha = \frac{2}{5\pi}$ . Точний розв'язок в цьому випадку є

$$u(t, x, y) = \left( \cos(2\pi t) + \frac{1}{2} \sin(2\pi t) \right) e^{-\pi t} \sin(\pi x) \sin(2\pi y).$$

Точно, як і в прикладі 1, маємо  $\gamma_0 = 2\pi^2$ ,

$$\alpha = \frac{2}{5\pi} < \frac{2}{\sqrt{\gamma_0}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}.$$

$N$	$\varepsilon$
4	0.948769502e-1
8	0.300504394e-1
16	0.586642368102507018e-2
32	0.53379300563269739e-3
64	0.1778497771451899e-4
128	0.14181989945806e-6
256	0.14977670055e-9

Таблиця 4.1: Похибка у випадку  $\alpha = \frac{2}{\pi\sqrt{5}}$ ,  $t = 0.5$ ,  $x = 0.5$ ,  $y = 0.2$ .

Згідно до (4.9) і визначення  $\theta$ , отримаємо

$$\theta = \arccos \frac{\frac{2}{5\pi} \sqrt{2\pi^2}}{2} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{5},$$

$$d = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{\sqrt{2}}{5} \approx 0,29,$$

$$a = \frac{1}{2 \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)} \approx 0,51,$$

$$b = \frac{1}{2 \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)} \approx 3,5.$$

Функція  $\mathcal{R}(z)$  і резольвента  $(zI - B)^{-1}w_0$  для цього випадку можуть бути обчислені точно, аналогічно до прикладу 1. Наступні обчислення проводились згідно (4.12) проводились в середовищі Maple. Результати обчислень наведені в таблиці 4.2 і підтверджують наші апріорні оцінки.

$N$	$\varepsilon$
8	0.1557679918
16	0.5180574507494855008e-1
32	0.1097312605636203481e-1
64	0.121349430767272743e-2
128	0.5330597600436985e-4
256	0.63049289198752e-6

Таблиця 4.2: Похибка у випадку  $\alpha = \frac{2}{5\pi}$ ,  $t = 0.5$ ,  $x = 0.5$ ,  $y = 0.2$ .

## 4.2 Експоненціально збіжний метод для еліптичного рівняння

**4.2.1 Еліптична задача в областях циліндричного типу.** Розглянемо еліптичну задачу в циліндричній області.

Нехай  $A$  – лінійний, щільно визначений, замкнений оператор (сильно позитивний) в банаховому просторі  $X$ . Операторно-значна функція (сімейство операторів нормалізованих гіперболічних синусів [134])

$$E(x) \equiv E(x; \sqrt{A}) := \sinh^{-1}(\sqrt{A}) \sinh(x\sqrt{A}),$$

задовольняє еліптичне диференціальне рівняння

$$\frac{d^2 E}{dx^2} - AE = 0, \quad E(0) = \Theta, \quad E(1) = I,$$

де  $I$  – одиничний, а  $\Theta$  – нульовий оператор. Для заданого нормалізованого операторного гіперболічного синуса  $E(x)$  розв'язок еліптичного диференціального рівняння

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - Au = 0, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = u_1 \quad (4.20)$$

з заданим вектором  $u_1$  і невідомою векторно-значною функцією  $u(x)$  :

$(0, 1) \rightarrow X$  може бути записаний як

$$u(x) = E(x; \sqrt{A})u_1.$$

Розв'язок неоднорідної еліптичної крайової задачі в циліндричній області  $\Omega_A \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^{d+1}$ ,

$$\frac{d^2u}{dx^2} - Au = -f(x), \quad u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1, \quad (4.21)$$

з невідомою  $u(x) = u(x; x_1, \dots, x_d)$ , відомими граничними умовами  $u_0, u_1$  і заданою правою частиною  $f(x) = f(x; x_1, \dots, x_d)$ , може бути записаний як

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x), \quad (4.22)$$

де

$$u_h(x) = E(x; \sqrt{A})u_1 + E(1-x; \sqrt{A})u_0 \quad (4.23)$$

є розв'язком однорідної задачі, а

$$u_p(x) = \int_0^1 G(x, s; A)f(s)ds, \quad (4.24)$$

є розв'язком неоднорідної задачі з функцією Гріна

$$\begin{aligned} G(x, s; A) &\equiv G(x, s) \\ &= [\sqrt{A} \sinh \sqrt{A}]^{-1} \begin{cases} \sinh(x\sqrt{A}) \sinh((1-s)\sqrt{A}) & x \leq s, \\ \sinh(s\sqrt{A}) \sinh((1-x)\sqrt{A}) & x \geq s \end{cases}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

**4.2.2 Метод обчислення нормалізованого операторного гіперболічного синуса.** Розглянемо наступне зображення розв'язку задачі (4.20)

$$u(x) = u_{hl}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_I} E(x; \sqrt{z})(zI - A)^{-1}u_1 dz, \quad (4.26)$$

де

$$E(x; \sqrt{z}) = \sinh(x\sqrt{z}) / \sinh \sqrt{z}$$

є нормалізований гіперболічний синус. Наша мета полягає в побудові наближення інтеграла (4.20) за допомогою квадратурної формули з експоненціальною швидкістю збіжності, включаючи точку  $x = 1$ . Дуже важливо мати рівномірно збіжне наближення, бо для неоднорідної задачі (4.21)–(4.25) аргумент операторного гіперболічного синуса під інтегралом перетворюється в нуль при  $x = s = 0$  або  $x = s = 1$ . Беручи до уваги поправку до резольвенти для стійкості обчислень як і в попередніх розділах, отримуємо зображення

$$u(x) = u_{hl}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_I} E(x; \sqrt{z}) \left[ (zI - A)^{-1} - \frac{1}{z} I \right] u_1 dz, \quad (4.27)$$

замість (4.26) (для  $x > 0$  інтеграл з другого доданка рівний нулеві через аналітичність підінтегрального виразу за межами кривої інтегрування). Цей інтеграл є розв'язком задачі (4.20) для  $u_1 \in D(A^\alpha)$ ,  $\alpha > 0$ .

Як і раніше гіперболу  $\Gamma_0$ , визначену в (2.27), називатимемо спектральною гіперболою. Вона проходить через вершину  $(a_0, 0)$  спектрального кута і має асимптоти, паралельні променям спектрального кута  $\Sigma$ . Виберемо гіперболу  $\Gamma_I$  з (2.28) за шлях інтегрування, де параметри виберемо пізніше. Тоді з (4.27) отримуємо

$$u(x) = u_{hl}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(x, \xi) d\xi, \quad (4.28)$$

де

$$\mathcal{F}(x, \xi) = F_A(x, \xi) u_1,$$

$$F_A(x, \xi) = E(x; \sqrt{z(\xi)}) (a_I \sinh \xi - ib_I \cosh \xi) \left[ (z(\xi)I - A)^{-1} - \frac{1}{z(\xi)} I \right].$$

Для оцінки  $\|\mathcal{F}(x, \xi)\|$  нам потрібно оцінки для  $|z'(\xi)/z(\xi)|$  і для  $\|E(x; \sqrt{z(\xi)})\|$ .

В попередніх розділах показано, що

$$|z'(\xi)/z(\xi)| \leq b_I/a_I. \quad (4.29)$$

Оцінимо ще  $|\sqrt{z(\xi)}|$ . Маємо

$$\begin{aligned} |\sqrt{z(\xi)}| &= |\sqrt{a_I \cosh \xi - ib_I \sinh \xi}| = \sqrt[4]{a_I^2 \cosh^2 \xi + b_I^2 \sinh^2 \xi} = \\ &= \sqrt[2]{a_I \cosh \xi} \sqrt[4]{1 + (b_I/a_I)^2 \tanh^2 \xi}, \end{aligned}$$

звідки отримаємо

$$\sqrt{a_I \cosh \xi} \leq |\sqrt{z(\xi)}| \leq \sqrt[4]{1 + (b_I/a_I)^2} \sqrt{a_I \cosh \xi}. \quad (4.30)$$

Використовуючи цю оцінку матимемо

$$\begin{aligned} |e^{-2x\sqrt{z}}| &= \left| \exp \left\{ -2x \left( \sqrt{\left( a_I \cosh \xi + \sqrt{a_I^2 \cosh^2 \xi + b_I^2 \sinh^2 \xi} \right) / 2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + i \sqrt{\left( -a_I \cosh \xi + \sqrt{a_I^2 \cosh^2 \xi + b_I^2 \sinh^2 \xi} \right) / 2} \right) \right\} \right| = \\ &= \exp \left\{ -2x \left( \sqrt{\left( a_I \cosh \xi + \sqrt{a_I^2 \cosh^2 \xi + b_I^2 \sinh^2 \xi} \right) / 2} \right) \right\} < \\ &< e^{-2x\sqrt{a_I \cosh \xi}} \quad \forall x \in (0, 1], \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$|1 - e^{-2x\sqrt{z}}| \leq 1 + |e^{-2x\sqrt{z}}| \leq 2,$$

$$|1 - e^{-2x\sqrt{z}}| \geq 1 - |e^{-2x\sqrt{z}}| \geq 1 - e^{-2x\sqrt{a_I \cosh \xi}},$$

$$|e^{(x-1)\sqrt{z}} - e^{-(x+1)\sqrt{z}}| = |e^{(x-1)\sqrt{z}}(1 - e^{-2x\sqrt{z}})| \leq 2e^{(x-1)\sqrt{a_I \cosh \xi}}$$

і, насамкінець,

$$\begin{aligned} |E(x; \sqrt{z})| &= \left| \frac{e^{x\sqrt{z}} - e^{-x\sqrt{z}}}{e\sqrt{z} - e^{-\sqrt{z}}} \right| = \left| \frac{e^{(x-1)\sqrt{z}} - e^{-(x+1)\sqrt{z}}}{1 - e^{-2\sqrt{z}}} \right| \leq \\ &\leq \frac{2e^{(x-1)\sqrt{a_I \cosh \xi}}}{1 - e^{-2\sqrt{a_I \cosh \xi}}} \leq \frac{2}{1 - e^{-2\sqrt{a_I}}} e^{(x-1)\sqrt{a_I \cosh \xi}}. \end{aligned}$$

Припускаючи, що  $u_1 \in D(A^\alpha)$ ,  $0 < \alpha < 1$ , використовуючи (4.29) і теорему 1.16, ми можемо оцінити підінтегральний вираз на дійсній осі  $\xi \in \mathbb{R}$  для

кожного  $x \in (0, 1)$ :

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}(x, \xi)\| &= \|F_A(x, \xi)u_1\| \leq |E(x; \sqrt{z})| \cdot \left| \frac{z'(\xi)}{z(\xi)} \right| \frac{(1+M)K}{|z(\xi)|^\alpha} \|A^\alpha u_1\| \leq \\
&\leq (1+M)K \frac{b_I |E(x; \sqrt{z})|}{a_I |z(\xi)|^\alpha} \|A^\alpha u_1\| \leq \\
&\leq (1+M)K \frac{2b_I}{a_I(1-e^{-2\sqrt{a_I}})} \frac{e^{(x-1)\sqrt{a_I} \cosh \xi}}{|z(\xi)|^\alpha} \|A^\alpha u_1\| \leq \\
&\leq (1+M)K \frac{b_I}{1-e^{-2\sqrt{a_I}}} \left(\frac{2}{a_I}\right)^{1+\alpha} e^{(x-1)\sqrt{a_I} \cosh \xi - \alpha|\xi|} \|A^\alpha u_1\|,
\end{aligned} \tag{4.32}$$

$$\xi \in \mathbb{R}, \quad x \in (0, 1].$$

Як і в підрозділі 2.4 параметри кривої інтегрування виберемо у вигляді (2.29). Тоді функція  $\mathcal{F}(x, w)$  для всіх  $x \in [0, 1]$  є аналітичною відносно  $w = \xi + i\nu$  в смузі

$$D_{d_1} = \{w = \xi + i\nu : \xi \in (-\infty, \infty), |\nu| < d_1/2\}.$$

Проміжні значення коефіцієнтів  $a(\nu)$ ,  $b(\nu)$ , що отримуються при заміні  $w = \xi + i\nu$ , як і в попередніх розділах, отримаємо

$$\begin{aligned}
a(\nu) &= a_I \cos \nu + b_I \sin \nu = \frac{a_0 \sin(\nu + \pi/4 - \varphi/2)}{\cos \varphi} = \frac{a_0 \cos(\pi/4 + \varphi/2 - \nu)}{\cos \varphi}, \\
b(\nu) &= b_I \cos \nu - a_I \sin \nu = \frac{a_0 \sin(\pi/4 + \varphi/2 - \nu)}{\cos \varphi}.
\end{aligned}$$

Виберемо додатне  $\delta$  таке, що  $\varphi + \frac{\delta}{2} < \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}$ , покладемо  $d = d_1 - \delta$  і розглянемо  $\nu$ :  $|\nu| < \frac{d}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \frac{\delta}{2}$ . Відмітимо, що  $\delta \rightarrow 0$  при  $\varphi \rightarrow \pi/2$ . Оскільки  $\varphi + \frac{\delta}{2} \leq \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} - \nu \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}$ , маємо

$$\begin{aligned}
\frac{a_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}\right)}{\cos \varphi} &\leq a(\nu) = \frac{a_0 \cos(\pi/4 + \varphi/2 - \nu)}{\cos \varphi} \leq \frac{a_0 \cos\left(\varphi + \frac{\delta}{2}\right)}{\cos \varphi}, \\
\frac{a_0 \sin\left(\varphi + \frac{\delta}{2}\right)}{\cos \varphi} &\leq b(\nu) = \frac{a_0 \sin(\pi/4 + \varphi/2 - \nu)}{\cos \varphi} \leq \frac{a_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}\right)}{\cos \varphi}.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Заміняючи  $a_I$  та  $b_I$  на  $a(\nu)$  та  $b(\nu)$  в (4.32) і беручи до уваги (4.33), отримаємо оцінку

$$\|\mathcal{F}(x, w)\| = \|F_A(x, w)u_1\| \leq \frac{(1+M)K a_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}\right)}{\cos \varphi \left(1 - e^{-2\sqrt{a_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}\right)/\cos \varphi}}\right)} \times$$

$$\times \left( \frac{2 \cos \varphi}{a_0 \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2} \right)} \right)^{1+\alpha} e^{(x-1)\tilde{a}\sqrt{\cosh \xi} - \alpha|\xi|} \|A^\alpha u_1\|,$$

$$\xi \in \mathbb{R}, \forall x \in [0, 1], \forall w \in D_d,$$

де

$$\tilde{a} = \sqrt{a_0 \cos(\varphi + \delta/2) / \cos \varphi}$$

Враховуючи, що інтеграли вздовж вертикальних сторін прямокутника  $D_d(\epsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |\Re z| < 1/\epsilon, |\Im z| < d(1 - \epsilon)\}$  з межею  $\partial D_d(\epsilon)$  зникають при  $\epsilon \rightarrow 0$ , з цієї оцінки випливає

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(x, \cdot)\|_{\mathbf{H}^1(D_d)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\partial D_d(\epsilon)} \|\mathcal{F}(z)\| |dz| \right) \leq \\ &\leq C(\varphi, \alpha, \delta) \|A^\alpha u_1\| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\xi|} d\xi = \frac{2}{\alpha} C(\varphi, \alpha, \delta) \|A^\alpha u_0\| \end{aligned} \quad (4.34)$$

з

$$C(\varphi, \alpha, \delta) = \frac{2(1+M)K a_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}\right)}{\cos \varphi \left(1 - e^{-2\sqrt{a_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}\right) / \cos \varphi}}\right)} \left( \frac{2 \cos \varphi}{a_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}\right)} \right)^{1+\alpha}.$$

Відмітимо, що  $C(\varphi, \alpha, \delta)$  прямує до  $\infty$  якщо  $\alpha \rightarrow 0$  або  $\varphi \rightarrow \pi/2$ .

Наблизимо інтеграл (4.28) за допомогою Сінс-квадратурної формули

$$u_N(t) = u_{hl,N}(x) = \frac{h}{2\pi i} \sum_{k=-N}^N \mathcal{F}(t, z(kh)), \quad (4.35)$$

з похибкою

$$\|\eta_N(\mathcal{F}, h)\| = \|u(t) - u_N(t)\| \leq \eta_{1,N}(\mathcal{F}, h) + \eta_{2,N}(\mathcal{F}, h), \quad (4.36)$$

де

$$\begin{aligned} \eta_{1,N}(\mathcal{F}, h) &= \left\| u(t) - \frac{h}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(t, z(kh)) \right\|, \\ \eta_{2,N}(\mathcal{F}, h) &= \left\| \frac{h}{2\pi i} \sum_{|k|>N} \mathcal{F}(t, z(kh)) \right\|. \end{aligned}$$



Перший елемент може бути оцінений як (див. Теорему 3.2.1, ст. 144 в [11])

$$\|\eta_{1,N}(\mathcal{F}, h)\| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-\pi d/h}}{2 \sinh(\pi d/h)} \|\mathcal{F}\|_{\mathbf{H}^1(D_d)}. \quad (4.37)$$

Для другого елемента маємо згідно (4.34) і елементарної нерівності  $\sqrt{\cosh \xi} = \sqrt{2 \cosh^2(\xi/2) - 1} \geq \sqrt{\cosh^2(\xi/2)} = \cosh(\xi/2)$ :

$$\begin{aligned} \|\eta_{2,N}(\mathcal{F}, h)\| &\leq \frac{C(\varphi, \alpha)h \|A^\alpha u_1\|}{2\pi} \sum_{k=N+1}^{\infty} e^{(x-1)\tilde{a}\sqrt{\cosh(kh)} - \alpha kh} \leq \\ &\leq \frac{C(\varphi, \alpha)h \|A^\alpha u_1\|}{2\pi} \sum_{k=N+1}^{\infty} e^{(x-1)\tilde{a} \cosh(kh/2) - \alpha kh} \leq \\ &\leq \frac{c \|A^\alpha u_1\|}{\alpha} \exp[(x-1)\tilde{a} \cosh((N+1)h/2) - \alpha(N+1)h]. \end{aligned} \quad (4.38)$$

де стала  $c > 0$  не залежить від  $h, N, x$ . Урівноважуючи обидві експоненти в (4.37) і (4.38) для  $x = 1$  за допомогою

$$\frac{\pi d}{h} = \alpha(N+1)h$$

отримаємо для кроку вираз

$$h = \sqrt{\frac{\pi d}{\alpha(N+1)}}.$$

Тоді виконується наступна оцінка

$$\|\eta_N(\mathcal{F}, h)\| \leq \frac{c}{\alpha} \exp\left(-\sqrt{\pi d \alpha(N+1)}\right) \|A^\alpha u_1\|, \quad (4.39)$$

зі сталою  $c > 0$  незалежною від  $x, N$ . У випадку  $x < 1$  перший доданок в експоненті  $\exp[(x-1)\tilde{a} \cosh((N+1)h/2) - \alpha(N+1)h]$  в (4.38) є ведучим. Покладаючи, в цьому випадку  $h = c_1 \ln N/N$  з додатною сталою  $c_1$ , незалежною від  $N$ , ми отримаємо для фіксованого  $x$  похибку

$$\|\eta_N(\mathcal{F}, h)\| \leq c \left[ e^{-\pi d N / (c_1 \ln N)} + e^{-c_1(x-1)\tilde{a}N/2 - c_1 \alpha \ln N} \right] \|A^\alpha u_1\|,$$

де  $c$  – додатна стала. Отже ми довели наступну теорему.

**Теорема 4.2** *Нехай  $A$  – щільно визначений строго позитивний оператор,  $u_1 \in D(A^\alpha)$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ . Тоді Сінс-квadrатура (4.35) наближає розв'язок однорідної початкової задачі (4.20) ( $u(t) = u_{hl}(x) = E(x; A)u_1$ ) і має рівномірну відносно  $x \in [0, 1]$  експоненціальну швидкість збіжності з оцінкою (4.36), яка має порядок  $\mathcal{O}(e^{-c\sqrt{N}})$  рівномірно по  $x \in [0, 1]$  при  $h = (1/\sqrt{N})$  і порядок  $\mathcal{O}(\max\{e^{-\pi dN/(c_1 \ln N)}, e^{-c_1(x-1)\tilde{a}N/2 - c_1\alpha \ln N}\})$  для кожного фіксованого  $x \in [0, 1]$  при  $h = c_1 \ln N/N$ . Сталі  $c, c_1 > 0$  і не залежать від  $N$ .*

Аналогічно будується експоненціально збіжне наближення  $u_{hr,N}(x)$  для  $u_{hr}(x) = E(1 - x; \sqrt{A})u_0$  і експоненціально збіжне наближення

$$u_{h,N}(x) = u_{hl,N}(x) + u_{hr,N}(x)$$

до розв'язку (4.23) однорідної задачі (4.21).

**4.2.3 Випадок неоднорідного рівняння** В цьому підрозділі розглянемо задачу (4.21), розв'язок якої визначається за допомогою (4.22)–(4.25). Ми отримали експоненціально збіжну апроксимацію  $u_{h,N}$  для частини  $u_h(x)$  використовуючи зображення (4.23) і дискретизацію операторного нормалізованого гіперболічного синуса (4.35).

Для побудови експоненціально збіжного методу для наближення  $u_{p,N}$  для  $u_p(x)$ , використаємо зображення Данфорда-Коші та функцію Гріна

$$\begin{aligned} u_p(x) &= \int_0^1 G(x, s; A)f(s)ds = \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_I} G(x, s; z) \left[ (zI - A)^{-1} - \frac{1}{z}I \right] f(s)dzds = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{I}_p(x, \xi)d\xi \end{aligned} \quad (4.40)$$

3

$$\mathcal{I}_p(x, \xi) = \int_0^1 \mathcal{F}_p(x, s, \xi)f(s)ds,$$

$$\mathcal{F}_p(x, s, \xi) = G(x, s; \sqrt{z(\xi)})(a_I \sinh \xi - ib_I \cosh \xi) \left[ (z(\xi)I - A)^{-1} - \frac{1}{z(\xi)}I \right],$$

$$G(x, s; z) \equiv G(x, s) = [\sqrt{z} \sinh \sqrt{z}]^{-1} \begin{cases} \sinh(x\sqrt{z}) \sinh((1-s)\sqrt{z}) & x \leq s, \\ \sinh(s\sqrt{z}) \sinh((1-x)\sqrt{z}) & x \geq s \end{cases}.$$

Беручи до уваги останню формулу, ми можемо записати (4.40) у вигляді

$$u_p(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathcal{I}_{p,1}(x, \xi) + \mathcal{I}_{p,2}(x, \xi)] d\xi,$$

де

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{p,1}(x, \xi) &= \int_0^x \frac{\sinh(s\sqrt{z(\xi)}) \sinh((1-x)\sqrt{z(\xi)}) z'(\xi)}{\sqrt{z(\xi)} \sinh(\sqrt{z(\xi)})} \times \\ &\quad \times \left[ (z(\xi)I - A)^{-1} - \frac{1}{z(\xi)}I \right] f(s) ds, \\ \mathcal{I}_{p,2}(x, \xi) &= \int_x^1 \frac{\sinh(x\sqrt{z(\xi)}) \sinh((1-s)\sqrt{z(\xi)}) z'(\xi)}{\sqrt{z(\xi)} \sinh(\sqrt{z(\xi)})} \times \\ &\quad \times \left[ (z(\xi)I - A)^{-1} - \frac{1}{z(\xi)}I \right] f(s) ds. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Використовуючи формулу

$$\sinh(\alpha) \sinh(\beta) = \frac{1}{2} [\cosh(\alpha + \beta) - \cosh(\alpha - \beta)],$$

дріб з (4.41) запишемо як

$$\begin{aligned} &\frac{\sinh(s\sqrt{z(\xi)}) \sinh((1-x)\sqrt{z(\xi)})}{\sinh(\sqrt{z(\xi)})} = \\ &= \frac{\cosh((1-x+s)\sqrt{z(\xi)}) - \cosh((1-x-s)\sqrt{z(\xi)})}{2 \sinh(\sqrt{z(\xi)})}. \end{aligned}$$

Оскільки  $0 \leq s \leq x \leq 1$  (це означає, що  $x - s \geq 0$ ,  $0 \leq 1 - x + s \leq 1$ ) ми

виведемо аналогічно до (4.31) що

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\cosh((1-x+s)\sqrt{z})}{\sinh(\sqrt{z})} \right| = \left| \frac{e^{(1-x+s)\sqrt{z}} + e^{-(1-x+s)\sqrt{z}}}{e^{\sqrt{z}} - e^{-\sqrt{z}}} \right| = \\
& = \left| \frac{e^{(1-x+s-1)\sqrt{z}} + e^{-(1-x+s+1)\sqrt{z}}}{1 - e^{-2\sqrt{z}}} \right| = \\
& = \frac{e^{-(x-s)\sqrt{z}} |1 + e^{-2(1-x+s)\sqrt{z}}|}{|1 - e^{-2\sqrt{z}}|} \leq \frac{2e^{-(x-s)\sqrt{z}}}{|1 - e^{-2\sqrt{z}}|} \leq \frac{2e^{-(x-s)\sqrt{a_I \cosh(\xi)}}}{1 - e^{-2\sqrt{a_I}}},
\end{aligned} \tag{4.42}$$

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\cosh((1-x-s)\sqrt{z})}{\sinh(\sqrt{z})} \right| = \frac{e^{-(x+s)\sqrt{z}} + e^{-(2-x-s)\sqrt{z}}}{|1 - e^{-2\sqrt{z}}|} \leq \\
& \leq \frac{e^{-(x-s)\sqrt{z}} (e^{-2s\sqrt{z}} + e^{-2(1-x)\sqrt{z}})}{|1 - e^{-2\sqrt{z}}|} \leq \frac{2e^{-(x-s)\sqrt{a_I \cosh(\xi)}}}{1 - e^{-2\sqrt{a_I}}}.
\end{aligned} \tag{4.43}$$

У випадку  $0 \leq x \leq s \leq 1$  (це означає, що  $s - x \geq 0$ ,  $0 \leq 1 - s + x \leq 1$ ), ми маємо

$$\begin{aligned}
& \frac{\sinh(x\sqrt{z(\xi)}) \sinh((1-s)\sqrt{z(\xi)})}{\sinh(\sqrt{z(\xi)})} = \\
& = \frac{\cosh((1-s+x)\sqrt{z(\xi)}) - \cosh((1-s-x)\sqrt{z(\xi)})}{2 \sinh(\sqrt{z(\xi)})}, \\
& \left| \frac{\cosh((1-s+x)\sqrt{z})}{\sinh(\sqrt{z})} \right| \leq \frac{2e^{-(s-x)\sqrt{a_I \cosh(\xi)}}}{1 - e^{-2\sqrt{a_I}}}.
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Оцінки (1.42), (4.29), (4.30) приводять тепер до наступних нерівностей для  $\mathcal{I}_{p,1}(x, \xi)$ ,  $\mathcal{I}_{p,2}(x, \xi)$ :

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{I}_{p,1}(x, \xi)\| & \leq \frac{2(1+M)Kb_I}{(1 - e^{-2\sqrt{a_I}})a_I^{3/2}} \int_0^x e^{-(x-s)\sqrt{a_I \cosh \xi} - 0.5|\xi|} \|f(s)\| ds \leq \\
& \leq c e^{-0.5|\xi|} \int_0^1 \|f(s)\| ds, \\
\|\mathcal{I}_{p,2}(x, \xi)\| & \leq \frac{2(1+M)Kb_I}{(1 - e^{-2\sqrt{a_I}})a_I^{3/2}} \int_x^1 e^{-(s-x)\sqrt{a_I \cosh \xi} - 0.5|\xi|} \|f(s)\| ds \leq \\
& \leq c e^{-0.5|\xi|} \int_0^1 \|f(s)\| ds,
\end{aligned} \tag{4.45}$$

де  $c > 0$  – стала, незалежна від  $x, \xi$ . Аналогічно, тому, як це було вище (див. доведення теореми 4.2), легко показати, що для кожного  $x \mathcal{I}_{p,k}(x, w) \in \mathbf{H}^1(D_d)$ ,  $0 < d < \varphi$ ,  $k = 1, 2$  і

$$\|\mathcal{I}_{p,k}(x, \cdot)\|_{\mathbf{H}^1(D_d)} \leq c \int_0^1 \|f(s)\| ds \leq c \max_{s \in [0,1]} \|f(s)\|, \quad k = 1, 2,$$

з додатною сталою  $c$ , що залежить від спектральних характеристик оператора  $A$ .

Як перший шлях до повної дискретизації, замінимо інтеграл в (4.40) квадратурою (4.35):

$$u_p(x) \approx u_{pa}(x) = \frac{h}{2\pi i} \sum_{k=-N}^N z'(kh) \left[ (z(kh)I - A)^{-1} - \frac{1}{z(kh)}I \right] f_k(x), \quad (4.46)$$

де

$$f_k(x) = \int_0^1 G(x, s; z(kh)) f(s) ds = f_{k,1}(x) + f_{k,2}(x), \quad k = -N, \dots, N,$$

$$f_{k,1}(x) = \int_0^x \frac{\sinh((1-x)\sqrt{z(kh)}) \sinh(s\sqrt{z(kh)})}{\sqrt{z(kh)} \sinh \sqrt{z(kh)}} f(s) ds, \quad (4.47)$$

і

$$f_{k,2}(x) = \int_x^1 \frac{\sinh(x\sqrt{z(kh)}) \sinh((1-s)\sqrt{z(kh)})}{\sqrt{z(kh)} \sinh \sqrt{z(kh)}} f(s) ds. \quad (4.48)$$

Далі зробимо заміну змінних в інтегралі (4.47)

$$s = 0.5x(1 + \tanh \zeta), \quad (4.49)$$

отримаємо

$$f_{k,1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_{k,1}(x, \zeta) d\zeta, \quad (4.50)$$

замість(4.47), де

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{k,1}(x, \zeta) &= \frac{x \sinh((1-x)\sqrt{z(kh)}) \sinh\left(x\sqrt{z(kh)}(1 + \tanh \zeta)/2\right)}{2\sqrt{z(kh)} \sinh \sqrt{z(kh)} \cosh^2 \zeta} \times \\ &\times f\left(x(1 + \tanh \zeta)/2\right). \end{aligned}$$

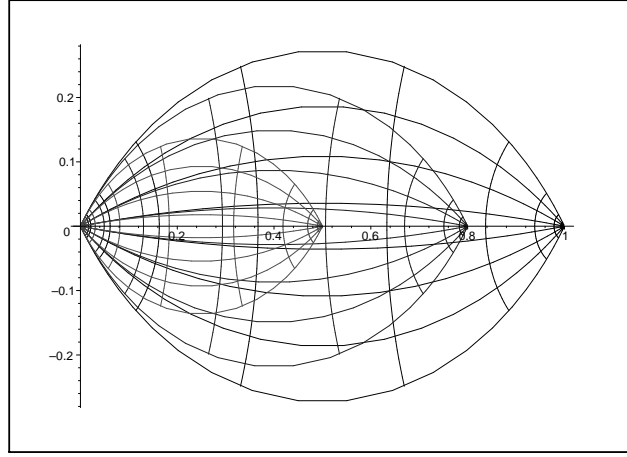


Рис. 4.5: Відображення  $\mathcal{A}_\nu(x)$  смуги для  $x = 0.5, 0.8, 1.0$ ,  $\nu = 1$ .

В інтегралі (4.48) зробимо заміну змінних:

$$s = 0.5x(1 - \tanh(\zeta)) + 0.5(1 + \tanh(\zeta)),$$

отримаємо

$$f_{k,2}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_{k,2}(x, \zeta) d\zeta, \quad (4.51)$$

замість (4.48) з

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{k,2}(x, \zeta) = & \frac{(1-x) \sinh(x\sqrt{z(kh)}) \sinh\left(0.5(1-x)\sqrt{z(kh)}(1-\tanh(\zeta))\right)}{2\sqrt{z(kh)} \sinh\sqrt{z(kh)} \cosh^2 \zeta} \times \\ & \times f(0.5x(1 - \tanh(\zeta)) + 0.5(1 + \tanh(\zeta))). \end{aligned}$$

Відмітимо, що з комплексними змінними  $z = \zeta + i\nu$  та  $w = u + iv$  рівняння (4.49) представляє конформне відображення  $w = \psi(z) = x[1 + \tanh z]/2$ ,  $z = \phi(w) = 0.5 \ln \frac{w}{x-w}$  смуги  $D_\nu$  на область  $\mathcal{A}_\nu(x)$  і  $\mathcal{A}_\nu(x) \subseteq \mathcal{A}_\nu(1) \quad \forall x \in [0, 1]$ . Легко бачити, що зображення  $\mathcal{A}_{1,\nu}(x)$  смуги  $D_\nu$  відображенням  $w = \psi_1(z) = 0.5x(1 - \tanh(\zeta)) + 0.5(1 + \tanh(\zeta))$ ,  $z = \phi_1(w) = 0.5 \ln \frac{x-w}{w-1}$  смуги  $D_\nu$  є всі однакової форми і містяться в  $\mathcal{A}_\nu(1) = \mathcal{A}_{1,\nu}(0)$ .

Згідно з (4.42)–(4.44) підінтегральні функції  $\mathcal{F}_{k,1}(x, \zeta)$  і  $\mathcal{F}_{k,2}(x, \zeta)$  задовольняють на дійсній осі  $\zeta \in \mathbb{R}$  (для кожного фіксованого  $x \in [0, 1]$ ) оцінки

$$\|\mathcal{F}_{k,1}(x, \zeta)\| \leq \frac{x e^{-(x-0.5x(1+\tanh \zeta))\sqrt{a_I \cosh(kh)}}}{(1 - e^{-2\sqrt{a_I}}) |\sqrt{z(kh)}| \cosh^2 \zeta} \left\| f\left(\frac{x(1 + \tanh \zeta)}{2}\right) \right\|, \quad (4.52)$$

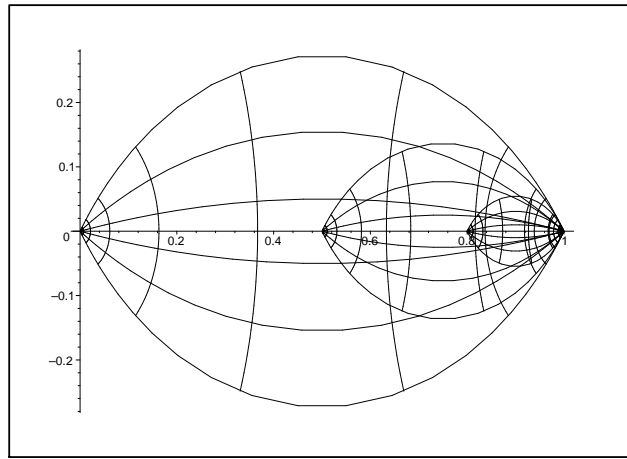


Рис. 4.6: Відображення  $\mathcal{A}_{1,\nu}(x)$  смуги для  $x = 0, 0.5, 0.8$ ,  $\nu = 1$ .

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{F}_{k,2}(x, \zeta)\| \leq \\ & \leq \frac{(1-x) \exp \left[ -(0.5x(1 - \tanh(\zeta)) + 0.5(1 + \tanh(\zeta)) - x) \sqrt{a_I \cosh(kh)} \right]}{(1 - e^{-2\sqrt{a_I}}) |\sqrt{z(kh)}| \cosh^2 \zeta} \times \\ & \quad \times \|f(0.5x(1 - \tanh(\zeta)) + 0.5(1 + \tanh(\zeta)))\|, \end{aligned}$$

що показують їхнє експоненціальне спадання при  $\zeta \rightarrow \pm\infty$ . Покажемо, що підінтегральні функції мають аналітичне продовження в смугу навколо дійсної осі.

**Лема 4.1** Якщо функція  $f(x)$  в (4.21) для  $x \in [0, 1]$  має аналітичне продовження в область  $\mathcal{A}_\nu(1)$ , тоді підінтегральні функції  $\mathcal{F}_{k,1}(t, \zeta)$ ,  $\mathcal{F}_{k,2}(t, \zeta)$  мають аналітичне продовження в смугу  $D_{d_1}$ ,  $0 < d_1 < \pi/2$  і належать класу  $\mathbf{H}^1(D_{d_1})$  відносно  $\zeta$ .

*Доведення.* Дослідимо область в комплексній площині, де функція  $\mathcal{F}(x, \zeta)$  має аналітичне продовження з дійсної осі  $\zeta \in \mathbb{R}$ . Замінюючи  $\zeta$  на  $\xi + i\nu$ ,  $\xi \in (-\infty, \infty)$ ,  $|\nu| < d_1$ , ми маємо для аргументу  $f$

$$\tanh(\xi + i\nu) = \frac{\sinh \xi \cos \nu + i \cosh \xi \sin \nu}{\cosh \xi \cos \nu + i \sinh \xi \sin \nu} = \frac{\sinh(2\xi) + i \sin(2\nu)}{2(\cosh^2 \xi - \sin^2 \nu)}, \quad (4.53)$$

$$1 \pm \tanh(\xi + i\nu) = q_r^\pm + iq_i^\pm$$

де

$$q_r^\pm(\xi, \nu) = 1 \pm \frac{\sinh 2\xi}{2(\cosh^2 \xi - \sin^2 \nu)} = \frac{e^{\pm 2\xi} + \cos(2\nu)}{2(\cosh^2 \xi - \sin^2 \nu)},$$

$$q_i^\pm(\xi, \nu) = \pm \frac{\sin 2\nu}{2(\cosh^2 \xi - \sin^2 \nu)}.$$

Знаменник в (4.53) додатний для всіх  $\xi \in (-\infty, \infty)$  при  $\nu \in (-\pi/2, \pi/2)$ . Легко бачити, що для  $\xi \in (-\infty, \infty)$  маємо

$$0 \leq q_r^\pm(\xi, \nu) \leq 2, \quad |q_i^\pm(\xi, \nu)| \leq |\tan \nu|.$$

Тому, для кожного фіксованого  $x, \nu$  і для  $\xi \in (-\infty, \infty)$  параметрична крива  $\Gamma_{\mathcal{A}}(t)$  задана (в координатах  $\mu, \eta$ )

$$\mu = \frac{x}{2} q_r^-(\xi, \nu), \quad \eta = \frac{x}{2} q_i^-(\xi, \nu)$$

з (4.53) замкнена і утворює з дійсною віссю в початку координат кут

$$\theta = \theta(\nu) = \arctan \left| \lim_{\xi \rightarrow \infty} q_i^-(\xi, \nu) / q_r^-(\xi, \nu) \right| = \arctan(\tan(2\nu)) = 2\nu.$$

Для  $\nu \in (-\pi/2, \pi/2)$  область  $\mathcal{A}(x)$  для різних  $x \in [0, 1]$  знаходиться в правій півплощині ( $q_r^\pm$  не може бути від'ємним) і заповнює область  $\mathcal{A}_\nu(1)$  (див. рис. 4.5). Беручи до уваги (2.29) і (4.52), маємо

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_{k,1}(x, \xi + i\nu)\| &\leq \left| \frac{x e^{-0.5x(1 - \tanh(\xi + i\nu))} \sqrt{a_I \cosh(kh)}}{2(1 - e^{-2\sqrt{a_I}}) |\sqrt{z(kh)}| (\cosh^2 \xi - \sin^2 \nu)} \right| \times \\ &\quad \times \|f(x(1 + \tanh(\xi + i\nu))/2)\| \leq \\ &\leq \left| \frac{x e^{-0.5x(q_r^- + iq_i^-)} \sqrt{a_I \cosh(kh)}}{2(1 - e^{-2\sqrt{a_I}}) |\sqrt{z(kh)}| (\cosh^2 \xi - \sin^2 \nu)} \right| \|f(0.5x(q_r^+ + iq_i^+))\| \leq \\ &\leq \frac{x \exp\left(-0.5x \sqrt{a_I \cosh(kh)} \frac{e^{-2\xi + \cos(2\nu)}}{2(\cosh^2 \xi - \sin^2 \nu)}\right)}{2(1 - e^{-2\sqrt{a_I}}) \sqrt{a_I} (\cosh^2 \xi - \sin^2 \nu)} \|f(0.5x(q_r^+ + iq_i^+))\|. \end{aligned}$$

Ця нерівність приводить до

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \|\mathcal{F}_{k,1}(x, \xi + i\nu)\| d\xi &\leq c_1 \max_{w \in \mathcal{A}_\nu(1)} \|f(w)\| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\cosh^2 \xi - \sin^2 \nu} d\xi \leq \\ &\leq c \max_{w \in \mathcal{A}_\nu(1)} \|f(w)\|. \end{aligned}$$

Це показує, що  $\mathcal{F}_{k,1}(x, w) \in \mathbf{H}^1(D_{d_1})$  відносно  $w$ . Такі ж міркування вірні для  $\mathcal{F}_{k,2}(x, w)$ . Доведення завершено. ■



Якщо виконуються припущення 4.1, ми можемо використати Сінквандратурну формулу для обчислення інтегралів (4.50), (4.51) (див. 1.3).

$$\begin{aligned} f_k(x) &= f_{k,1}(x) + f_{k,2}(x) \approx f_{k,N}(x) = f_{k,1,N}(x) + f_{k,2,N}(x) = \\ &= h \sum_{j=-N}^N [\mu_{k,1,j}(x)f(\omega_{1,j}(x)) + \mu_{k,2,j}(x)f(\omega_{2,j}(x))], \end{aligned} \quad (4.54)$$

де

$$\begin{aligned} \mu_{k,1,j}(x) &= \frac{x \sinh((1-x)\sqrt{z(kh)}) \sinh\left(0.5x\sqrt{z(kh)}(1+\tanh(jh))\right)}{2\sqrt{z(kh)} \sinh\sqrt{z(kh)} \cosh^2(jh)}, \\ \omega_{1,j}(x) &= 0.5x[1+\tanh(jh)], \\ \mu_{k,2,j}(x) &= \frac{(1-x) \sinh(x\sqrt{z(kh)}) \sinh\left(0.5(1-x)\sqrt{z(kh)}(1-\tanh(jh))\right)}{2\sqrt{z(kh)} \sinh\sqrt{z(kh)} \cosh^2(jh)}, \\ \omega_{2,j}(x) &= 0.5x[1-\tanh(jh)] + 0.5[1+\tanh(jh)], \\ h &= 1/\sqrt{N}, \end{aligned}$$

$$z(\xi) = a_I \cosh \xi - ib_I \sinh \xi.$$

Підкладаючи (4.54) в (4.46) отримаємо наступну повну дискретизацію для наближення  $u_{pa,N}(t)$  до  $u_{pa}(t)$

$$\begin{aligned} u_{pa,N}(t) &= \frac{h^2}{2\pi i} \sum_{k,j=-N}^N z'(kh)[(z(kh)I - A)^{-1} - \frac{1}{z(kh)}I] \\ &\times [\mu_{k,1,j}(x)f(\omega_{1,j}(x)) + \mu_{k,2,j}(x)f(\omega_{2,j}(x))]. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Наступна теорема характеризує похибку наближення.

**Теорема 4.3** *Нехай  $A$  – сильно позитивний оператор з спектральними характеристиками  $a_0$ ,  $\varphi$  і правою частиною  $f(x) \in D(A^\alpha)$ ,  $\alpha > 0$ , яка має аналітичне продовження в область  $\mathcal{A}_\nu(1)$ . Тоді алгоритм (4.55) є збіжним з оцінкою швидкості збіжності:*

$$\|\mathcal{E}_N(x)\| = \|u_p(x) - u_{ap,N}(x)\| \leq \frac{c}{\alpha} e^{-c_1\sqrt{N}} \max_{w \in \mathcal{A}_\nu(1)} \|A^\alpha f(w)\|, \quad (4.56)$$

рівномірно по  $x \in [0, 1]$  з додатними сталими  $c, c_1$ , що залежать від  $a_0, \varphi$ , але незалежними від  $N$ .

Доведення. Подамо похибку у вигляді

$$\mathcal{E}_N(x) = u_p(x) - u_{pa,N}(x) = r_{1,N}(x) + r_{2,N}(x), \quad (4.57)$$

де

$$r_{1,N}(x) = u_p(x) - u_{pa}(x), \quad r_{2,N}(x) = u_{pa}(x) - u_{pa,N}(x).$$

Беручи до уваги оцінку (4.45), отримаємо для  $h = \sqrt{2\pi d/(N+1)}$  подібну до вище знайденої оцінку (див. (4.39) в доведенні теореми 4.2)

$$\begin{aligned} \|r_{1,N}(x)\| &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathcal{I}_{p,1}(x, \xi) + \mathcal{I}_{p,2}(x, \xi)] d\xi - \right. \\ &\quad \left. - \frac{h}{2\pi i} \sum_{k=-N}^N [\mathcal{I}_{p,1}(x, kh) + \mathcal{I}_{p,2}(x, kh)] \right\| \leq \\ &\leq c \exp\left(-\sqrt{0.5\pi d(N+1)}\right) \int_0^1 \|f(s)\| ds \leq \\ &\leq c \exp\left(-\sqrt{0.5\pi d(N+1)}\right) \max_{w \in \mathcal{A}_v(1)} \|A^\alpha f(w)\|. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Згідно до (1.42), маємо для похибки  $r_{2,N}(t)$

$$\begin{aligned} \|r_{2,N}(t)\| &= \left\| \frac{h}{2\pi i} \sum_{k=-N}^N z'(kh) [(z(kh)I - A)^{-1} - \frac{1}{z(kh)}I] R_k(t) \right\| \leq \\ &\leq \frac{h(1+M)K}{2\pi} \sum_{k=-N}^N \frac{|z'(kh)|}{|z(kh)|^{1+\alpha}} \|A^\alpha R_k(t)\|, \end{aligned} \quad (4.59)$$

де  $R_k(x) = f_k(x) - f_{k,N}(x)$ ,

$$\begin{aligned} \|A^\alpha R_k(t)\| &= \|A^\alpha (f_{k,1}(x) - f_{k,1,N}(x)) + A^\alpha (f_{k,2}(x) - f_{k,2,N}(x))\| \leq \\ &\leq \|A^\alpha (f_{k,1}(x) - f_{k,1,N}(x))\| + \|A^\alpha (f_{k,2}(x) - f_{k,2,N}(x))\| \end{aligned}$$

Оцінки (4.30), (4.42)-(4.44) як і в (4.52) виконуються для дійсних  $\xi$

$$\|A^\alpha \mathcal{F}_{k,1}(x, \xi)\| \leq c x e^{-2|\xi|} \|A^\alpha f((1 + \tanh \xi)/2)\|.$$

З леми 4.1 маємо  $A^\alpha \mathcal{F}_{k,1}(x, w) \in \mathbf{H}^1(D_{d_1})$ ,  $0 < d_1 < \pi/2$  і у нас ситуація така ж як і в теоремі 3.2.1, ст. 144 з [11] з  $A^\alpha f(w)$  замість  $f$  що приводить до

$$\begin{aligned}
\|A^\alpha(f_{k,1}(x) - f_{k,1,N}(x))\| &= \left\| \int_{-\infty}^{\infty} A^\alpha \mathcal{F}_{k,1}(x, \xi) d\xi - h \sum_{j=-\infty}^{\infty} A^\alpha \mathcal{F}_{k,1}(x, jh) \right\| + \\
&+ \left\| h \sum_{|j|>N} A^\alpha \mathcal{F}_{k,1}(x, jh) \right\| \leq \frac{e^{-\pi d_1/h}}{2 \sinh(\pi d_1/h)} \|\mathcal{F}_{k,1}(x, w)\|_{\mathbf{H}^1(D_{d_1})} \\
&+ h \sum_{|j|>N} c x e^{-2|jh|} \|A^\alpha f(x(1 + \tanh jh)/2)\| \leq \\
&\leq c e^{-2\pi d_1/h} \max_{w \in \mathcal{A}_\nu(1)} \|A^\alpha f(w)\| + h c x \max_{w \in \mathcal{A}_\nu(1)} \|A^\alpha f(w)\| \sum_{|j|>N} e^{-2|jh|}.
\end{aligned}$$

А тому ми маємо

$$\|A^\alpha(f_{k,1}(x) - f_{k,1,N}(x))\| \leq c e^{-c_1 \sqrt{N}} \max_{w \in \mathcal{A}_\nu(1)} \|A^\alpha f(w)\|, \quad (4.60)$$

де додатні сталі  $c$ ,  $c_1$  не залежать від  $x$ ,  $N$  і  $k$ . Теж вірне для  $\|A^\alpha(f_{k,2}(x) - f_{k,2,N}(x))\|$ , тобто ми маємо

$$\|A^\alpha(f_{k,2}(x) - f_{k,2,N}(x))\| \leq c e^{-c_1 \sqrt{N}} \max_{w \in \mathcal{A}_\nu(1)} \|A^\alpha f(w)\|.$$

Тепер оцінка (4.59) може бути продовжена як

$$\begin{aligned}
\|r_{2,N}(x)\| &= \\
&= \frac{h}{2\pi i} \sum_{k=-N}^N z'(kh) [(z(kh)I - A)^{-1} - \frac{1}{z(kh)} I] R_k(x) \leq c e^{-c_1 \sqrt{N}} S_N,
\end{aligned} \quad (4.61)$$

з

$$S_N = \sum_{k=-N}^N h \frac{|z'(kh)|}{|z(kh)|^{1+\alpha}}.$$

Використовуючи (4.29) і

$$|z(kh)| = \sqrt{a_I^2 \cosh^2(kh) + b_I^2 \sinh^2(kh)} \geq a_I \cosh(kh) \geq \frac{a_I e^{|kh|}}{2},$$

остання сума оцінюється як

$$|S_N| \leq \frac{c}{\sqrt{N}} \sum_{k=-N}^N e^{-\alpha|k/\sqrt{N}|} \leq c \int_{-\sqrt{N}}^{\sqrt{N}} e^{-\alpha t} dt \leq c/\alpha. \quad (4.62)$$

Беручи до уваги (4.60) і (4.62), ми виводимо з (4.61)

$$\|r_{2,N}(x)\| \leq \frac{c}{\alpha} e^{-c_1\sqrt{N}} \max_{w \in \mathcal{A}_v(1)} \|A^\alpha f(w)\|. \quad (4.63)$$

Твердження теореми слідує з (4.57), (4.58), (4.63). Доведення завершено. ■

Експоненціально збіжне наближення до розв'язку неоднорідної задачі (4.21) має вигляд

$$u_N(x) = u_{h,N}(x) + u_{p,N}(x).$$

**Приклад 4.3** Розглянемо неоднорідну задачу (4.21) з оператором  $A$  визначеним як

$$D(A) = \{u(x_1) \in H^2(0, 1) : u(0) = u(1) = 0\},$$

$$Au = -u''(x_1) \quad \forall u \in D(A).$$

Початкові функції є  $u_0 = u(0, x_1) = 0$ ,  $u_1 = u(1, x_1) = 0$ , а права частина  $f(x) = f(x; x_1)$  є

$$f(x; x_1) = 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi x_1).$$

Легко перевірити, що точний розв'язок є  $u(x) = u(x; x_1) = \sin(\pi x) \sin(\pi x_1)$ . Алгоритм (4.55) реалізований для  $x = 1/2$ ,  $x_1 = 1/2$  в середовищі Maple з параметром  $Digits=16$ . Таблиця 4.3 показує експоненціальне спадання похибки  $\varepsilon_N = |u(1/2, 1/2) - u_{pa,N}(1/2, 1/2)| = |u(1/2, 1/2) - u_N(1/2, 1/2)|$  зі зростанням  $N$ .

N	$\varepsilon_N$
4	0.1872482412
8	0.829872855 e-1
16	0.115819650e-1
32	0.4730244e-3
64	0.46664e-5
128	0.63619e-9

Таблица 4.3: Похибка алгоритму (4.55) для  $x = 1/2$ ,  $x_1 = 1/2$ .

## РОЗДІЛ 5

Методи без насичення точності розв'язування нелокальних задач  
для рівнянь другого порядку з необмеженим операторним  
коефіцієнтом

### 5.1 Експоненціально збіжний метод для $m$ -точкової нелокальної задачі для еліптичного рівняння

**5.1.1 Постановка задачі.** В цьому підрозділі розглянемо наступну  $m$ -точкову нелокальну задачу для еліптичного рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dx^2} - Au &= 0, \quad x \in (0, 1) \\ u(0) &= 0, \\ u(1) &= \sum_{k=1}^m \alpha_k u(\xi_k) + u_1, \end{aligned} \tag{5.1}$$

де  $\alpha_k \in \mathbb{R}$ ,  $k = \overline{1, m}$ ,  $0 < \xi_1, \xi_2, \dots < \xi_m < 1$ ,  $u_1 \in X$ . Оператор  $A$  з області визначення  $D(A)$  в банаховому просторі  $X$  є щільно визначеним сильно позитивним (секторіальним), тобто його спектр  $\Sigma(A)$  розташований в секторі (1.28), а резольвента задовольняє оцінку (1.29).

Задача (5.1) є базовою для неоднорідної

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dx^2} - Au &= -f(x), \quad x \in (0, 1] \\ u(0) &= u_0, \\ u(1) &= \sum_{k=1}^m \alpha_k u(\xi_k) + u_1, \end{aligned} \tag{5.2}$$

де  $f(x)$  – задана векторно-значна функція зі значеннями в банаховому просторі  $X$ ,  $u_0$  – заданий елемент з  $X$  та аналогічними припущеннями щодо інших вхідних даних. Задача (5.2) може бути зведена до задачі виду (5.1). Для цього

подамо  $u$  з (5.2) у вигляді  $u(x) = v(x) + w(x)$ , де  $v(x)$  є розв'язком

$$\begin{aligned} \frac{d^2v}{dx^2} - Av &= -f(x), \quad x \in (0, 1) \\ v(0) &= u_0, \\ v(1) &= u_1. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Тоді,  $w(x)$  задовольняє рівняння

$$\frac{d^2w}{dx^2} - Aw = 0, \quad x \in (0, 1),$$

і умову

$$w(0) = 0.$$

Для точки  $x = 1$  ми отримаємо

$$w(1) = u(1) - v(1) = \sum_{k=1}^m \alpha_k u(\xi_k) = \sum_{k=1}^m \alpha_k w(\xi_k) + \sum_{k=1}^m \alpha_k v(\xi_k).$$

Отже,  $w(x)$  є розв'язком задачі

$$\begin{aligned} \frac{d^2w}{dx^2} - Aw &= 0, \quad x \in (0, 1) \\ w(0) &= 0, \\ w(1) &= \sum_{k=1}^m \alpha_k w(\xi_k) + w_1, \end{aligned}$$

де  $w_1 = \sum_{k=1}^m \alpha_k v(\xi_k)$ .

**Зауваження 5.1** Розв'язок (5.3) можна записати у вигляді (див. підрозд.4.2.1):

$$\begin{aligned} v(x) &= \sinh(\sqrt{A}(1-x)) \sinh^{-1}(\sqrt{A})u_0 + \sinh(\sqrt{A}x) \sinh^{-1}(\sqrt{A})u_1 \\ &\quad + \int_0^1 G(x, s; A) f(s) ds, \end{aligned}$$

де  $G(x, s; A)$  – функція Гріна. Експоненціально збіжний метод для наближення  $v(x)$  описано в підрозділі (4.2.1).

Мета цього підрозділу побудувати експоненціально збіжний метод для задачі (5.1).

**5.1.2 Існування та зображення розв'язку** Як зазначалось вище, розв'язок (5.1) можна формально записати у вигляді

$$u(x) = \sinh(\sqrt{A}x) \sinh^{-1}(\sqrt{A}) \left[ \sum_{k=1}^m \alpha_k u(\xi_k) + u_1 \right]. \quad (5.4)$$

Покладемо  $d = \sum_{k=1}^m \alpha_k u(\xi_k)$ , тоді отримуємо з (5.4)

$$d = \sum_{k=1}^m \alpha_k \sinh(\sqrt{A}\xi_k) \sinh^{-1}(\sqrt{A})d + \sum_{k=1}^m \alpha_k \sinh(\sqrt{A}\xi_k) \sinh^{-1}(\sqrt{A})u_1,$$

що еквівалентно

$$\begin{aligned} d &= \left[ I - \sum_{k=1}^m \alpha_k \sinh(\sqrt{A}\xi_k) \sinh^{-1}(\sqrt{A}) \right]^{-1} \sum_{k=1}^m \alpha_k \sinh(\sqrt{A}\xi_k) \sinh^{-1}(\sqrt{A})u_1 \\ &= \left[ I - \sum_{k=1}^m \alpha_k \sinh(\sqrt{A}\xi_k) \sinh^{-1}(\sqrt{A}) \right]^{-1} u_1 - u_1 \equiv B^{-1}u_1 - u_1, \end{aligned}$$

при умові, що існує оператор  $B^{-1}$ .

Тому ми отримали з (5.4) зображення розв'язку задачі (5.1) у вигляді

$$u(x) = \sinh(\sqrt{A}x) \sinh^{-1}(\sqrt{A})B^{-1}u_1. \quad (5.5)$$

Для двовимірного еліптичного рівняння (що є окремим випадком (5.1)) в [135] було отримано, що нерівність

$$\sum_{k=1}^m \frac{|\alpha_k| + \alpha_k}{2} \leq 1$$

є достатньою умовою для існування єдиного розв'язку задачі (5.1). Ще одна достатня умова для існування та єдиності була знайдена в [28]:

$$\sum_{k=1}^m |\alpha_k| \sqrt{\xi_k} \leq 1.$$

Умова

$$\sum_{k=1}^m |\alpha_k| \leq \sigma < 1$$



використовується в багатьох роботах для побудови чисельних методів для не-локальної еліптичної задачі (див. напр. [136, 137]). Відмітимо, що у всіх цих випадках припускалось, що оператор  $A$  є самоспряженим додатно визначеним. Ми розглянемо більш загальний випадок, коли оператор  $A$  є секторіальним.

Як і в попередніх підрозділах будемо називати гіперболу  $\Gamma_0$ , визначену в (2.27) спектральною. Вона має вершину в точці  $(a_0, 0)$  і асимптоти, паралельні до границі сектора  $\Sigma$ . Нехай  $\Gamma_I$  – гіпербола з (2.28). Тоді, використовуючи зображення Данфорда-Коші та (5.5), розв'язок задачі (5.1) можна записати як

$$u(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_I} \frac{\sinh(\sqrt{z}x)}{\sinh(\sqrt{z}) \left[ 1 - \sum_{k=1}^m \alpha_k \frac{\sinh(\sqrt{z}\xi_k)}{\sinh(\sqrt{z})} \right]} R_A(z) u_1 dz,$$

якщо

$$\frac{\sinh(\sqrt{z}x)}{\sinh(\sqrt{z}) \left[ 1 - \sum_{k=1}^m \alpha_k \frac{\sinh(\sqrt{z}\xi_k)}{\sinh(\sqrt{z})} \right]}$$

є аналітичною функцією всередині контуру інтегрування  $\Gamma_I$ , що охоплює  $\Gamma_0$ . Щоб отримати чисельно стійкий алгоритм модифікуємо резольвенту, як і в попередніх підрозділах.  $R_A(z)$  на  $R_A^1(z)$ , при  $u_1 \in D(A^\alpha)$ ,  $\alpha > 0$ .

$$R_A^1(z) = (zI - A)^{-1} - \frac{I}{z}.$$

Тоді для (5.1) матимемо:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_I} \frac{\sinh(\sqrt{z}x)}{\sinh(\sqrt{z}) \left[ 1 - \sum_{k=1}^m \alpha_k \frac{\sinh(\sqrt{z}\xi_k)}{\sinh(\sqrt{z})} \right]} R_A^1(z) u_1 dz. \quad (5.6)$$

Після параметризації інтегралу в (5.6) матимемо

$$u(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(x, \zeta) d\zeta, \quad (5.7)$$

де

$$\mathcal{F}(x, \zeta) = F_A(x, \zeta) u_1,$$

$$F_A(x, \zeta) = \frac{\sinh(\sqrt{z(\zeta)}x)z'(\zeta)}{\sinh(\sqrt{z(\zeta)}) \left[ 1 - \sum_{k=1}^m \alpha_k \frac{\sinh(\sqrt{z(\zeta)}\xi_k)}{\sinh(\sqrt{z(\zeta)})} \right]} \times \\ \times \left[ (z(\zeta)I - A)^{-1} - \frac{I}{z(\zeta)} \right],$$

і

$$z'(\zeta) = a_I \sinh \zeta - ib_I \cosh \zeta.$$

Далі наблизимо (5.7) за допомогою експоненціально збіжної квадратури. Спочатку, як і в попередніх розділах, оцінимо ширину смуги навколо дійсної осі, де існує аналітичне продовження функції  $\mathcal{F}(x, \zeta)$  відносно  $\zeta$ . Після підстановки  $\zeta$  замість  $\zeta + i\nu$  гіпербола  $\Gamma_I$  перетвориться в параметричне сімейство гіпербол відносно параметра  $\nu$

$$\Gamma(\nu) = \{z(\zeta, \nu) = a_I \cosh(\zeta + i\nu) - ib_I \sinh(\zeta + i\nu) : \zeta \in (-\infty, \infty)\} = \\ = \{z(\zeta, \nu) = a(\nu) \cosh \zeta - ib(\nu) \sinh \zeta : \zeta \in (-\infty, \infty)\},$$

де

$$a(\nu) = a_I \cos \nu + b_I \sin \nu = \sqrt{a_I^2 + b_I^2} \sin(\nu + \phi/2), \\ b(\nu) = b_I \cos \nu - a_I \sin \nu = \sqrt{a_I^2 + b_I^2} \cos(\nu + \phi/2), \\ \cos \frac{\phi}{2} = \frac{b_I}{\sqrt{a_I^2 + b_I^2}}, \quad \sin \frac{\phi}{2} = \frac{a_I}{\sqrt{a_I^2 + b_I^2}}.$$

Аналітичність функції  $\mathcal{F}(t, \zeta + i\nu)$ , в смугі  $D_{d_1}$  з деяким  $d_1$  втрачається, якщо резольвента або частина, що відповідає за нелокальну умову  $(B^{-1})$  стає необмеженою. Щоб уникнути цього, виберемо  $d_1$  так, щоб при  $\nu \in (-d_1/2, d_1/2)$  гіпербола  $\Gamma(\nu)$  залишалась в правій півплощині. При  $\nu = -d_1/2$  проходила через точку  $(\rho_1, 0)$ , для деякого  $0 \leq \rho_1 < a_0$ . Для  $\nu = d_1/2$  вона збігалась спектральною гіперболою. Такі вимоги для  $\Gamma(\nu)$  при-

водять до системи рівнянь

$$\begin{cases} a_I \cos(d_1/2) + b_I \sin(d_1/2) = a_0, \\ b_I \cos(d_1/2) - a_I \sin(d_1/2) = b_0 = a_0 \tan \varphi, \\ a_I \cos(-d_1/2) + b_I \sin(-d_1/2) = \rho_1, \end{cases}$$

розв'язком якої є

$$d_1 = \arccos\left(\frac{\rho_1}{\sqrt{a_0^2 + b_0^2}}\right) - \varphi, \quad (5.8)$$

$$\text{де } \cos \varphi = \frac{a_0}{\sqrt{a_0^2 + b_0^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b_0}{\sqrt{a_0^2 + b_0^2}}.$$

$$\begin{aligned} a_I &= a_0 \frac{\cos\left(\frac{d_1}{2} + \varphi\right)}{\cos \varphi}, \\ b_I &= a_0 \frac{\sin\left(\frac{d_1}{2} + \varphi\right)}{\cos \varphi}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Беручи до уваги (5.9) можемо аналогічно записати вирази для  $a(\nu)$ ,  $b(\nu)$  при  $-\frac{d_1}{2} \leq \nu \leq \frac{d_1}{2}$

$$\begin{aligned} a(\nu) &= a_I \cos \nu + b_I \sin \nu = \sqrt{a_0^2 + b_0^2} \cos\left(\frac{d_1}{2} + \varphi\right) \cos(\nu) + \\ &+ \sqrt{a_0^2 + b_0^2} \sin\left(\frac{d_1}{2} + \varphi\right) \sin(\nu) = \sqrt{a_0^2 + b_0^2} \cos\left(\frac{d_1}{2} + \varphi - \nu\right), \\ b(\nu) &= b_I \cos \nu - a_I \sin \nu = \sqrt{a_0^2 + b_0^2} \sin\left(\frac{d_1}{2} + \varphi\right) \cos(\nu) - \\ &- \sqrt{a_0^2 + b_0^2} \cos\left(\frac{d_1}{2} + \varphi\right) \sin(\nu) = \sqrt{a_0^2 + b_0^2} \sin\left(\frac{d_1}{2} + \varphi - \nu\right), \\ \rho_1 &\leq a(\nu) \leq a_0, \quad b_0 \leq b(\nu) \leq \sqrt{b_0^2 + a_0^2 - \rho_1^2}, \end{aligned}$$

де  $d_1$ , визначене в (5.8).

Далі встановимо умови для  $\alpha_k$ ,  $k = \overline{1, m}$  при яких

$$\left[ 1 - \sum_{k=1}^m \alpha_k \frac{\sinh(\sqrt{z}\xi_k)}{\sinh(\sqrt{z})} \right],$$

що відноситься до нелокальних умов не перетворюється на нуль всередині гіперболи інтегрування  $\Gamma_I$ . Для цього нам потрібні деякі додаткові оцінки.

$$\begin{aligned}
|e^{-2x\sqrt{z}}| &= \left| \exp \left\{ -2x \left( \sqrt{\left( a_I \cosh \zeta + \sqrt{a_I^2 \cosh^2 \zeta + b_I^2 \sinh^2 \zeta} \right) / 2} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + i \sqrt{\left( -a_I \cosh \zeta + \sqrt{a_I^2 \cosh^2 \zeta + b_I^2 \sinh^2 \zeta} \right) / 2} \right) \right\} \right| = \\
&= \exp \left\{ -2x \left( \sqrt{\left( a_I \cosh \zeta + \sqrt{a_I^2 \cosh^2 \zeta + b_I^2 \sinh^2 \zeta} \right) / 2} \right) \right\} \leq \\
&\leq e^{-2x\sqrt{a_I \cosh \zeta}} \quad \forall x \in (0, 1], \\
|1 - e^{-2x\sqrt{z}}| &\leq 1 + |e^{-2x\sqrt{z}}| \leq 2, \\
|1 - e^{-2x\sqrt{z}}| &\geq 1 - |e^{-2x\sqrt{z}}| \geq 1 - e^{-2x\sqrt{a_I \cosh \zeta}}, \\
|e^{(x-1)\sqrt{z}} - e^{-(x+1)\sqrt{z}}| &= |e^{(x-1)\sqrt{z}}(1 - e^{-2x\sqrt{z}})| \leq 2e^{(x-1)\sqrt{a_I \cosh \zeta}} \\
\left| \frac{\sinh(\sqrt{z}\xi_k)}{\sinh(\sqrt{z})} \right| &= \left| \frac{e^{\xi_k\sqrt{z}} - e^{-\xi_k\sqrt{z}}}{e^{\sqrt{z}} - e^{-\sqrt{z}}} \right| = \left| \frac{e^{(\xi_k-1)\sqrt{z}} - e^{-(\xi_k+1)\sqrt{z}}}{1 - e^{-2\sqrt{z}}} \right| \leq \\
&\leq \frac{|e^{(\xi_k-1)\sqrt{z}}(1 - e^{-2\xi_k\sqrt{z}})|}{1 - e^{-2\sqrt{a_I \cosh \zeta}}} \leq \frac{e^{(\xi_k-1)\sqrt{a_I \cosh \zeta}}(1 + e^{-2\xi_k\sqrt{a_I \cosh \zeta}})}{1 - e^{-2\sqrt{a_I \cosh \zeta}}} = \\
&= \frac{\cosh(\xi_k\sqrt{a_I \cosh \zeta})}{\sinh\sqrt{a_I \cosh \zeta}} \leq \frac{\cosh(\xi_k\sqrt{a_I})}{\sinh\sqrt{a_I}}.
\end{aligned}$$

Тому

$$\begin{aligned}
&\left| \left[ 1 - \sum_{k=1}^m \alpha_k \frac{\sinh(\sqrt{z(\zeta)}\xi_k)}{\sinh(\sqrt{z(\zeta)})} \right]^{-1} \right| \leq \left[ 1 - \left| \sum_{k=1}^m \alpha_k \frac{\sinh(\sqrt{z(\zeta)}\xi_k)}{\sinh(\sqrt{z(\zeta)})} \right| \right]^{-1} \leq \\
&\leq \left[ 1 - \sum_{k=1}^m |\alpha_k| \left| \frac{\sinh(\sqrt{z(\zeta)}\xi_k)}{\sinh(\sqrt{z(\zeta)})} \right| \right]^{-1} \leq \left[ 1 - \sum_{k=1}^m |\alpha_k| \frac{\cosh(\xi_k\sqrt{a_I})}{\sinh\sqrt{a_I}} \right]^{-1},
\end{aligned}$$

де  $a_I$  визначене в (5.9).

Отже, якщо виконується умова

$$\sum_{k=1}^m |\alpha_k| \frac{\cosh(\xi_k\sqrt{a_I})}{\sinh\sqrt{a_I}} < 1, \tag{5.10}$$

тоді

$$\left| \left[ 1 - \sum_{k=1}^m \alpha_k \frac{\sinh(\sqrt{z(\zeta)} \xi_k)}{\sinh(\sqrt{z(\zeta)})} \right]^{-1} \right| \leq q < \infty. \quad (5.11)$$

Сформулюємо це у вигляді леми.

**Лема 5.1** *Нехай  $A$  – секторіальний оператор. Якщо виконується умова (5.10) тоді існує єдиний розв’язок задачі (5.1) який має зображення (5.6).*

Далі встановимо умови для існування розв’язку задачі (5.1) у випадку коли оператор  $A$  є самоспряженим додатно визначеним. Для цього нам треба вибрати  $d_1$  так, щоб для  $\nu \in (-d_1/2, d_1/2)$  гіпербола  $\Gamma(\nu)$  залишалась в правій півплощині. Для  $\nu = -d_1/2$  вона перетворювалась в лінію, паралельну уявній осі, а для  $\nu = d_1/2$  збігалась із променем на додатній частині дійсної вісі з вершиною в  $a_0$ . Ці вимоги приводять до системи рівнянь

$$\begin{cases} a_I \cos(d_1/2) + b_I \sin(d_1/2) = a_0, \\ b_I \cos(d_1/2) - a_I \sin(d_1/2) = 0, \\ a_I \cos(-d_1/2) + b_I \sin(-d_1/2) = 0, \end{cases}$$

з розв’язком

$$\begin{aligned} a_I = b_I &= \frac{a_0}{\sqrt{2}}, \\ d_1 &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Умова (5.10), тоді, стає

$$\sum_{k=1}^m |\alpha_k| \frac{\cosh\left(\xi_k \sqrt{\frac{a_0}{\sqrt{2}}}\right)}{\sinh\left(\sqrt{\frac{a_0}{\sqrt{2}}}\right)} < 1. \quad (5.12)$$

Отже, у випадку самоспряженого додатно визначеного оператора  $A$  ми отримали достатню умову існування розв’язку задачі (5.1) у вигляді (5.12).

**5.1.3 Чисельний метод** Припустимо, що  $u_1 \in D(A^\alpha)$ ,  $0 < \alpha < 1$ .

Тоді в підрозділі 4.2 було показано, що

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\sinh(\sqrt{z(\zeta)}x)}{\sinh(\sqrt{z(\zeta)})} z'(\zeta) \left[ (z(\zeta)I - A)^{-1} - \frac{1}{z(\zeta)}I \right] u_1 \right\| \leq \\ & \leq (1 + M)K \frac{b_I}{1 - e^{-2\sqrt{a_I}}} \left( \frac{2}{a_I} \right)^{1+\alpha} e^{(x-1)\sqrt{a_I} \cosh \xi - \alpha|\xi|} \|A^\alpha u_1\|, \\ & \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad x \in (0, 1], \end{aligned}$$

де  $K$  – стала, що залежить від  $\alpha$ .

Частина, яка відповідає нелокальній умові в (5.7) оцінюється в (5.11).

Тому ми маємо для  $\mathcal{F}(t, \xi)$ :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(x, \xi)\| & \leq (1 + M)qK \frac{b_I}{1 - e^{-2\sqrt{a_I}}} \left( \frac{2}{a_I} \right)^{1+\alpha} e^{(x-1)\sqrt{a_I} \cosh \xi - \alpha|\xi|} \|A^\alpha u_1\|, \\ & \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad x \in (0, 1]. \end{aligned}$$

Подібно до (5.11) отримується оцінка для частини відповідальної за нелокальну умову у вигляді

$$\left| \left[ 1 - \sum_{k=1}^m \alpha_k \frac{\sinh(\sqrt{z(\zeta, \nu)}\xi_k)}{\sinh(\sqrt{z(\zeta, \nu)})} \right]^{-1} \right| \leq Q < \infty,$$

для  $w \in D_{d_1}$ . Тепер для  $\mathcal{F}(x, w)$  маємо

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(x, w)\| & \leq (1 + M)QK \frac{e^{(x-1)\sqrt{a(\nu)} \cosh \zeta}}{1 - e^{-2\sqrt{a(\nu)} \cosh \zeta}} \times \\ & \times \frac{\sqrt{a^2(\nu) \sinh^2 \xi + b^2(\nu) \cosh^2 \xi}}{(a^2(\nu) \cosh^2 \xi + b^2(\nu) \sinh^2 \xi)^{(1+\alpha)/2}} \|A^\alpha u_1\| \leq \\ & \leq c \frac{b(\nu)}{a(\nu)} \left( \frac{2}{a(\nu)} \right)^\alpha e^{(x-1)\sqrt{a(\nu)} \cosh \xi - \alpha|\xi|} \|A^\alpha u_1\| \leq \\ & \leq c \tan \left( \frac{d_1}{2} + \varphi - \nu \right) \left( \frac{2 \cos \varphi}{a_0 \cos \left( \frac{d_1}{2} + \varphi - \nu \right)} \right)^\alpha e^{-\alpha|\xi|} \|A^\alpha u_1\|, \\ & \quad \forall w \in D_d. \end{aligned}$$

Беручи до уваги, що інтеграли вздовж вертикальних сторін прямокутника  $D_{d_1}(\epsilon)$  зникають при  $\epsilon \rightarrow 0$ , з вище знайденої оцінки для  $\|\mathcal{F}(t, w)\|$  випливає

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(x, \cdot)\|_{\mathbf{H}^1(D_{d_1})} &\leq \|A^\alpha u_1\| [C_-(\varphi, \alpha) + \\ &+ C_+(\varphi, \alpha)] \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\xi|} d\xi = C(\varphi, \alpha) \|A^\alpha u_1\|, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} C(\varphi, \alpha) &= \frac{2}{\alpha} [C_+(\varphi, \alpha) + C_-(\varphi, \alpha)], \\ C_{\pm}(\varphi, \alpha) &= c \tan\left(\frac{d_1}{2} + \varphi \pm \frac{d_1}{2}\right) \left(\frac{2 \cos \varphi}{a_0 \cos\left(\frac{d_1}{2} + \varphi \pm \frac{d_1}{2}\right)}\right)^\alpha. \end{aligned}$$

Відмітимо, що вплив параметра гладкості для  $u_1$  (задається  $\alpha$ ) і спектральних характеристик оператора  $A$  (задаються  $\varphi$  та  $a_0$ ) враховуються, бо  $C(\varphi, \alpha)$  з (5.9) прямує до  $\infty$  при  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\varphi \rightarrow \pi/2$  або  $\rho_1 \rightarrow 0$  (в цьому випадку, згідно (5.8)  $d_1 \rightarrow \frac{\pi}{2} - \varphi$ ).

Наблизимо інтеграл (5.7) наступною Sinc-квадратурою [11, 78, 82, 138] (див. також підрозд. 1.3, 4.2):

$$u_N(x) = \frac{h}{2\pi i} \sum_{k=-N}^N \mathcal{F}(x, z(kh)), \quad (5.13)$$

з похибкою

$$\begin{aligned} \|\eta_N(\mathcal{F}, h)\| &= \|u(x) - u_N(x)\| \leq \\ &\leq \left\| u(x) - \frac{h}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(x, z(kh)) \right\| + \left\| \frac{h}{2\pi i} \sum_{|k|>N} \mathcal{F}(x, z(kh)) \right\| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-\pi d_1/h}}{2 \sinh(\pi d_1/h)} \|\mathcal{F}\|_{\mathbf{H}^1(D_{d_1})} + \\ &+ \frac{C(\varphi, \alpha) h \|A^\alpha u_1\|}{2\pi} \sum_{k=N+1}^{\infty} e^{(x-1)\sqrt{a_I \cosh(kh)} - \alpha kh}. \end{aligned}$$

Наступна нерівність отримується

$$h \sum_{k=N+1}^{\infty} e^{(x-1)\sqrt{a_I \cosh(kh)} - \alpha kh} \leq h \sum_{k=N+1}^{\infty} e^{(x-1)\sqrt{a_I} \cosh(kh/2) - \alpha kh} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\alpha} \exp[(x-1)\sqrt{a_I} \cosh((N+1)h/2) - \alpha(N+1)h],$$

використовуючи елементарну оцінку

$$\sqrt{\cosh \xi} = \sqrt{2 \cosh^2(\xi/2) - 1} \geq \sqrt{\cosh^2(\xi/2)} = \cosh(\xi/2).$$

Тому ми маємо

$$\|\eta_N(\mathcal{F}, h)\| \leq \frac{c\|A^\alpha u_0\|}{\alpha} \left\{ \frac{e^{-\pi d_1/h}}{\sinh(\frac{\pi d_1}{h})} + e^{(x-1)\sqrt{a_I} \cosh((N+1)h/2) - \alpha(N+1)h} \right\}, \quad (5.14)$$

де невід'ємна стала  $c$  не залежить від  $h$ ,  $N$ ,  $x$ .

Врівноважуючи обидві експоненти при для  $x = 1$  маємо

$$\frac{\pi d_1}{h} = \alpha(N+1)h.$$

Це дає нам формулу для визначення кроку  $h$

$$h = \sqrt{\frac{\pi d_1}{\alpha(N+1)}}, \quad (5.15)$$

і наступну оцінку похибки:

$$\|\eta_N(\mathcal{F}, h)\| \leq \frac{c}{\alpha} \exp\left(-\sqrt{\pi d_1 \alpha(N+1)}\right) \|A^\alpha u_1\|. \quad (5.16)$$

Тут стала  $c \geq 0$  не залежить від  $x$ ,  $N$ . У випадку  $x < 1$  перший доданок в аргументі  $\exp[(x-1)\sqrt{a_I} \cosh((N+1)h/2) - \alpha(N+1)h]$  в (5.14) найбільше впливає на похибку. Покладаючи в цьому випадку  $h = c_1 \ln N/N$  з деякою додатною сталою  $c_1$ , незалежною від  $N$ , ми отримуємо для фіксованого  $x$  оцінку

$$\|\eta_N(\mathcal{F}, h)\| \leq c \left[ e^{-\pi d_1 N / (c_1 \ln N)} + e^{-c_1(x-1)\sqrt{a_I} N/2 - c_1 \alpha \ln N} \right] \|A^\alpha u_1\|. \quad (5.17)$$

Отже, справедлива теорема.

**Теорема 5.1** *Нехай  $A$  – секторіальний оператор,  $u_1 \in D(A^\alpha)$ ,  $\alpha \in (0, 1)$  і виконується умова (5.10). Тоді Сінс-квадратура (5.13) є наближенням*



розв'язком нелокальної задачі (5.1). Вона має експоненціальну швидкість збіжності, рівномірну по  $x \in [0, 1]$  з оцінкою (5.16) для кроку  $h$  визначеного в (5.15). Наближення має порядок збіжності (5.17) для випадку  $0 \leq x < 1$  і  $h = c_1 \ln N/N$ ,  $c_1 > 0$ .

**Зауваження 5.2** Гіпербола інтегрування  $\Gamma_I$  є симетричною відносно дійсної осі. Тому  $z(-kh) = \overline{z(kh)}$  і  $z'(-kh) = -\overline{z'(kh)}$ . Отже наближення (5.13) можна переписати у вигляді

$$u_N(x) = \frac{h}{2\pi i} \mathcal{F}(x, z(0)) + \operatorname{Re} \left[ \sum_{k=1}^N h \frac{\mathcal{F}(x, z(kh))}{\pi i} \right],$$

що зменшує кількість обчислень резольвенти в 2 рази.

#### 5.1.4 Чисельні розрахунки

**Приклад 5.1** Розглянемо задачу (5.1) з оператором  $A$  визначеним як

$$D(A) = \{v(y) \in H^2(0, 1) : v(0) = v(1) = 0\},$$

$$Av = -v''(y) \quad \forall v \in D(A),$$

і нелокальною умовою типу Біцадзе-Самарського:

$$u(1) = \frac{1}{3}u(0.5) + u_1,$$

де

$$u_1 = \frac{3 \sinh(\pi) - \sinh(0.5\pi)}{3 \sinh(\pi)} \sin(\pi y).$$

Ця задача може бути записана у 2-D вигляді як

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0, \quad x, y \in (0, 1)$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(x, 0) = u(x, 1) = 0,$$

$$u(1, y) = \frac{1}{3}u(0.5, y) + \frac{3 \sinh(\pi) - \sinh(0.5\pi)}{3 \sinh(\pi)} \sin(\pi y).$$

Точний розв'язок задачі є  $u(x, y) = \sinh(\pi x) \sin(\pi y)$ . Обчислення, за допомогою побудованого у цьому підрозділі методу, проведені в середовищі

Maple. Похибки в точці  $x = 0.25$ ,  $y = 0.5$  наведені в таблиці 5.1 для різних  $N$ . З таблиці видно експоненціальне спадання похибки згідно апріорно отриманих оцінок.

N	$\varepsilon_N$
4	0.016443141543169
8	0.006303329836203
16	0.000051494072587
32	$9.644507360032 * 10^{-8}$
64	$7.479410192751 * 10^{-19}$
128	$1.777372592378 * 10^{-25}$
256	$1.526391795652 * 10^{-35}$

Таблиця 5.1: Похибка при  $x = 0.25$ ,  $y = 0.5$ .

## 5.2 Експоненціально збіжний метод для еліптичного рівняння в банаховому просторі з інтегральною нелокальною умовою

Нелокальні задачі для диференціальних рівнянь природнім чином виникають при моделюванні багатьох процесів у фізиці, хімії, біології, інженерії. Ці задачі цікаві також з точки зору математики, як узагальнення класичних початкових та крайових задач. Не дивлячись на велику кількість робіт, присвячених нелокальним задачам (див. напр. [26, 27, 30, 139] та літературу цитовану там) і очевидну важливість таких задач, побудова ефективних методів їх наближеного розв'язування залишається актуальною.

В цьому підрозділі розглянемо нелокальну задачу для еліптичного рівня-

ння в банаховому просторі з інтегральною умовою:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dx^2} - Au &= 0, \quad x \in (0, 1) \\ u(0) &= 0, \\ \int_0^1 w(s)u(s)ds + u(1) &= u_1, \end{aligned} \tag{5.18}$$

де  $w(s) \geq 0$  – задана функція,  $u_1 \in X$ . Оператор  $A$  з областю визначення  $D(A)$  в банаховому просторі  $X$  – щільно визначений сильно позитивний (секторіальний). Тобто його спектр  $\Sigma(A)$  знаходиться в секторі а правій півплощині з вершиною в початку координат. Резольвента оператора  $A$  задовольняє оцінку (1.29).

Неоднорідна задача, що відповідає (5.18) може бути зведена до однорідної наступним чином. Нехай

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dx^2} - Au &= f(x), \quad x \in (0, 1) \\ u(0) &= u_0, \\ \int_0^1 w(s)u(s)ds + u(1) &= u_1, \end{aligned}$$

з  $f(x)$  – векторно-значна функція в банаховому просторі  $X$ . Тоді, покладаючи  $u(x) = v(x) + v_1(x)$ , де

$$v_1(x) = \sinh(\sqrt{A}(1-x)) \sinh^{-1}(\sqrt{A})u_0 + \int_0^1 G(x,s;A)f(s)ds,$$

де  $G(x,s;A)$  – функція Гріна (4.25), отримаємо задачу для  $u(x)$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v}{dx^2} - Av &= 0, \quad x \in (0, 1) \\ v(0) &= 0, \\ \int_0^1 w(s)v(s)ds + v(1) &= u_1 - \Phi, \end{aligned}$$

з

$$\Phi = \int_0^1 w(s)v_1(s)ds.$$

Відмітимо, що експоненціально збіжне наближення для  $v_1(x)$  розроблене в підрозділі 4.2.2 (див. також [3, 138]). Отже, можна використовувати це наближення, щоб отримати  $v_1(x)$ , а потім знайти  $\Phi$ .

Основною метою даного підрозділу є побудова та обґрунтування експоненціально збіжного методу для наближеного розв'язування задачі (5.18).

**5.2.1 Існування та зображення розв'язку.** Розв'язок задачі (5.18) можна формально записати у вигляді (див. підрозд. 4.2.2, також [3, 138]):

$$u(x) = E(x, \sqrt{A})u(1) = E(x, \sqrt{A}) \left[ u_1 - \int_0^1 w(s)u(s)ds \right]. \quad (5.19)$$

З інтегральної умови в (5.18) і формули (5.19) отримаємо

$$\int_0^1 w(s)u(s)ds = \int_0^1 w(s)E(s, \sqrt{A})ds \left[ u_1 - \int_0^1 w(s)u(s)ds \right],$$

або

$$\int_0^1 w(s)u(s)ds = \left[ I + \int_0^1 w(s)E(s, \sqrt{A})ds \right]^{-1} \int_0^1 w(s)E(s, \sqrt{A})ds u_1,$$

у випадку, коли  $\left[ I + \int_0^1 w(s)E(s, \sqrt{A})ds \right]^{-1}$  існує (достатні умови існування цього оператора дослідимо нижче). Тут  $I$  – одиничний оператор. Отже, маємо

$$u(x) = E(x, \sqrt{A}) \left[ I + \int_0^1 w(s)E(s, \sqrt{A})ds \right]^{-1} u_1. \quad (5.20)$$

Як і в попередніх підрозділах, криву  $\Gamma_0$ :

$$\Gamma_0 = \{z(\zeta) = a_0 \cosh \zeta - ib_0 \sinh \zeta : \zeta \in (-\infty, \infty), b_0 = a_0 \tan \varphi\}.$$

будемо називати спектральною гіперболою.

Використовуючи інтеграл Данфорда-Коші, розв'язок задачі (5.18) має зображення

$$u(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_I} \frac{E(x, \sqrt{z})}{1 + \int_0^1 w(s)E(s, \sqrt{z})ds} R_A(z)u_1 dz = \quad (5.21)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_I} F(x, z) R_A(z) u_1 dz,$$

якщо  $F(x, z)$  – аналітична функція всередині контуру інтегрування  $\Gamma_I$ , що охоплює  $\Gamma_0$ . Для побудови чисельно стійкого методу ми модифікували резольвенту  $R_A(z)$ , так, що це не змінює значення інтегралу при  $u_0 \in D(A^\alpha)$ ,  $\alpha > 0$  (деталі див. в [3, 78] і в попередніх розділах).

$$R_A^1(z) = (zI - A)^{-1} - \frac{I}{z}.$$

Таким чином, ми отримали наступне зображення розв'язку задачі (5.18):

$$u(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_I} F(x, z) R_A^1(z) u_1 dz. \quad (5.22)$$

Виберемо гіперболу (2.28) за контур інтегрування, що охоплює спектр оператора  $A$ . Тоді з (5.22) отримаємо

$$u(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} F(x, z(\zeta)) R_A^1(\zeta) z'(\zeta) u_1 d\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(x, \zeta) d\zeta, \quad (5.23)$$

з

$$z'(\zeta) = a_I \sinh \zeta - ib_I \cosh \zeta.$$

Далі наблизимо (5.23) за допомогою ефективної квадратурної формули. Для цього виберемо параметри інтегральної гіперболи такими ж, як і в попередньому підрозділі (5.8), (5.9).

Далі дослідимо умову для  $w(s)$ , що гарантує існування та єдиність розв'язку (5.20). Для цього, вираз

$$\left[ 1 + \int_0^1 w(s) E(s, \sqrt{z}) ds \right],$$

що відноситься до нелокальної умови повинен не набувати нульового значення всередині гіперболи інтегрування  $\Gamma_I$ . Отже,

$$\begin{aligned} & \left| 1 + \int_0^1 w(s) E(s, \sqrt{z(\zeta)}) ds \right| \geq 1 - \left| \int_0^1 w(s) E(s, \sqrt{z(\zeta)}) ds \right| \geq \\ & \geq 1 - \|w(s)\|_{C[0,1]} \int_0^1 |E(s, \sqrt{z(\zeta)})| ds \geq 1 - \|w(s)\|_{C[0,1]} \int_0^1 \frac{\cosh(s\sqrt{a_I})}{\sinh(\sqrt{a_I})} ds = \end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{\|w(s)\|_{C[0,1]}}{\sqrt{a_I}},$$

оскільки (див. підрозділ 5.1.2, а також [140])

$$\left| \frac{\sinh(\sqrt{z(\zeta)}x)}{\sinh(\sqrt{z(\zeta)})} \right| \leq \frac{\cosh(x\sqrt{a_I})}{\sinh\sqrt{a_I}}.$$

Більш грубою оцінкою є

$$\begin{aligned} \left| 1 + \int_0^1 w(s)E(s, \sqrt{z(\zeta)})ds \right| &\geq 1 - \|w(s)\|_{C[0,1]} \int_0^1 \frac{\cosh(s\sqrt{a_I})}{\sinh(\sqrt{a_I})} ds \geq \\ &\geq 1 - \frac{\|w(s)\|_{C[0,1]}}{\sinh(\sqrt{a_I})} \end{aligned}$$

Тому маємо

$$\left| 1 + \int_0^1 w(s)E(s, \sqrt{z(\zeta)})ds \right|^{-1} \leq C_1,$$

у випадку

$$\|w(s)\|_{C[0,1]} < \sinh(\sqrt{a_I}), \quad (5.24)$$

де  $a_I$  визначене в (5.9).

Підсумуємо все в наступній лемі:

**Лема 5.2** *Нехай  $A$  – секторіальний оператор. Якщо виконується умова (5.24), тоді існує і єдиний розв’язок задачі (5.18), який має зображення (5.22).*

Далі розглянемо окремий випадок оператора  $A$ . Нехай  $A$  є самоспряженим додатно визначеним встановимо умови існування розв’язку (5.18). Тому вибираємо  $d_1$  так, щоб для  $\nu \in (-d_1/2, d_1/2)$  гіпербола  $\Gamma(\nu)$  залишалась в правій півплощині. Для  $\nu = -d_1/2$  відповідна гіпербола перетворювалась в пряму, паралельну уявній вісі, а для  $\nu = d_1/2$  вона перетворювалась на промінь на дійсній додатній півосі з вершиною в  $a_0$ . Ці умови приводять до

системи рівнянь

$$\begin{cases} a_I \cos(d_1/2) + b_I \sin(d_1/2) = a_0, \\ b_I \cos(d_1/2) - a_I \sin(d_1/2) = 0, \\ a_I \cos(-d_1/2) + b_I \sin(-d_1/2) = 0, \end{cases}$$

з розв'язком

$$\begin{aligned} a_I = b_I &= \frac{a_0}{\sqrt{2}}, \\ d_1 &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

(5.24) тоді набуває вигляд

$$\|w(s)\|_{C[0,1]} < \sinh\left(\sqrt{\frac{a_0}{\sqrt{2}}}\right),$$

що є достатньою умовою існування розв'язку задачі (5.18) у випадку само-спряженого оператора  $A$ .

**5.2.2 Чисельний метод.** Спершу наблизимо інтеграл  $\int_0^1 w(s)E(s, \sqrt{z})ds$  в (5.21), використовуючи експоненціально збіжну квадратуру. Використаємо такий же підхід, як і в підрозділі 3.7.3. Отже, згідно квадратурної формули Гауса

$$\mathcal{I} = \int_0^1 w(s)E(s, \sqrt{z(\zeta)})ds \approx \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n \omega_j w(\xi_j) E(\xi_j, \sqrt{z(\zeta)}) = \mathcal{I}_n, \quad (5.25)$$

$$\xi_j = \frac{1}{2}(\theta_j + 1),$$

де  $\{\theta_j\}$  – множина з  $n + 1$  кореня поліномів Лежандра  $P_{n+1}(x)$ , а  $\{\omega_j\}$  – множина вузлів квадратурної формули Гауса. Відмітимо, що  $\theta_j$  та  $\omega_j$  можна попередньо обчислити, використовуючи швидкий алгоритм (див. [10]).

Тому ми отримаємо з (5.23)

$$u(x) \approx u_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} F_n(x, z(\zeta)) z'(\zeta) R_A^1(\zeta) u_1 d\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_n(x, \zeta) d\zeta, \quad (5.26)$$

де

$$F_n(z(\zeta), A) = \frac{E(x, \sqrt{z(\zeta)})}{1 + \mathcal{I}_n}.$$

Для похибки наближення маємо

$$\left| \frac{1}{1 + \mathcal{I}} - \frac{1}{1 + \mathcal{I}_n} \right| = \left| \frac{\mathcal{I} - \mathcal{I}_n}{(1 + \mathcal{I})(1 + \mathcal{I}_n)} \right|.$$

Згідно з (5.24)

$$\begin{aligned} \frac{1}{|1 + \mathcal{I}|} &\leq C. \\ \frac{1}{|1 + \mathcal{I}_n|} &\leq \frac{1}{1 - \left| \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n \omega_j w(\xi_j) E(\xi_j, \sqrt{z(\zeta)}) \right|} \leq \\ &\leq \frac{1}{1 - \frac{\|w(s)\|_{C[0,1]}}{2} \sum_{j=0}^n \omega_j E(\xi_j, \sqrt{z(\zeta)})} \leq \frac{1}{1 - \frac{\|w(s)\|_{C[0,1]}}{\sinh \sqrt{a_I}}} \leq c = \text{const}, \end{aligned} \quad (5.27)$$

у випадку коли виконується (5.24). Тому ми отримуємо оцінку

$$\left| \frac{1}{1 + \mathcal{I}} - \frac{1}{1 + \mathcal{I}_n} \right| \leq c |\mathcal{I} - \mathcal{I}_n|.$$

Нормалізована гіперболічна синус функція  $E(x, z)$  є аналітичною відносно  $x$  у всій комплексній площині. Тому гладкість підінтегрального виразу в  $\mathcal{I}$  визначається  $w(s)$ . Використовуючи теорему 19.3 з [10] ми робимо висновок, що, якщо  $w(\frac{1}{2}(s+1))$  є аналітичною в  $[-1, 1]$  і має аналітичне продовження в еліпс Бернштейна з  $|w(\frac{1}{2}(s+1))E(\frac{1}{2}(s+1), z)| \leq M$ , то

$$|\mathcal{I} - \mathcal{I}_n| \leq \frac{144M\rho^{-2n}}{35(\rho^2 - 1)}, \quad n \geq 2.$$

Якщо  $w(s)$  та її похідні до  $w^{(\nu-1)}$  є абсолютно неперервними, а  $w^{(\nu)}$  має обмежену варіацію  $V$ , тоді

$$|\mathcal{I} - \mathcal{I}_n| \leq \frac{32V}{15\pi\nu(n - 2\nu - 1)^{2\nu+1}}, \quad n > 2\nu + 1.$$

Припускаючи  $u_1 \in D(A^\alpha)$ ,  $0 < \alpha < 1$  в підрозділі 4.2.2 показано, що

$$\begin{aligned} \left\| E(x, \sqrt{z(\zeta)}) z'(\zeta) R_A^1(\zeta) u_1 \right\| &\leq (1 + M) K \frac{b_I}{1 - e^{-2\sqrt{a_I}}} \left( \frac{2}{a_I} \right)^{1+\alpha} \times \\ &\times e^{(x-1)\sqrt{a_I} \cosh \xi - \alpha |\xi|} \|A^\alpha u_1\|, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad x \in (0, 1], \end{aligned} \quad (5.28)$$



де  $K$  – стала, що залежить від  $\alpha$ ,  $M$  визначена в (1.29).

Частина, що відповідає нелокальній умові в (5.26) оцінюється за допомогою (5.27). Тому ми отримуємо наступну оцінку для  $\mathcal{F}_n(x, \xi)$ :

$$\|\mathcal{F}_n(x, \zeta)\| \leq C(\varphi, \alpha) e^{(x-1)\sqrt{a_I \cosh \xi} - \alpha|\xi|} \|A^\alpha u_1\|,$$

$$C(\varphi, \alpha) = (1 + M)qK \frac{b_I}{1 - e^{-2\sqrt{a_I}}} \left(\frac{2}{a_I}\right)^{1+\alpha}, \quad \zeta \in \mathbb{R}, \quad x \in (0, 1].$$

Далі ми наблизимо інтеграл (5.26) Sinc-квадратурною формулою (див. підрозд. 1.3 , а також [3, 11]):

$$u_{n,N}(x) = h \sum_{k=-N}^N \mathcal{F}_n(x, z(kh)), \quad (5.29)$$

з похибкою

$$\begin{aligned} \|\eta_N(\mathcal{F}_n, h)\| &= \|u_n(x) - u_{n,N}(x)\| \leq \\ &\leq \left\| u_n(x) - h \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_n(x, z(kh)) \right\| + \left\| h \sum_{|k|>N} \mathcal{F}_n(x, z(kh)) \right\| \leq \\ &\leq \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-\pi d/h}}{\sinh(\pi d/h)} \|\mathcal{F}_n\|_{\mathbf{H}^1(D_d)} + \\ &+ \frac{C(\varphi, \alpha)h \|A^\alpha u_1\|}{2\pi} \sum_{k=N+1}^{\infty} e^{(x-1)\sqrt{a_I \cosh(kh)} - \alpha kh}. \end{aligned}$$

Тут простір  $\mathbf{H}^1(D_d)$  визначено в (1.16). Так як і в підрозділі 4.2.2

$$\begin{aligned} \|E(x, \sqrt{z(\zeta)})z'(\zeta)R_A^1(\zeta)u_1\|_{\mathbf{H}^1(D_{d_1})} &\leq \|A^\alpha u_1\| [C_-(\varphi, \alpha) + \\ &+ C_+(\varphi, \alpha)] \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\xi|} d\xi = C(\varphi, \alpha) \|A^\alpha u_1\|, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} C(\varphi, \alpha) &= \frac{2}{\alpha} [C_+(\varphi, \alpha) + C_-(\varphi, \alpha)], \\ C_{\pm}(\varphi, \alpha) &= c \tan \left( \frac{d_1}{2} + \varphi \pm \frac{d_1}{2} \right) \left( \frac{2 \cos \varphi}{a_0 \cos \left( \frac{d_1}{2} + \varphi \pm \frac{d_1}{2} \right)} \right)^\alpha, \\ d &= d_1 - \delta, \end{aligned}$$

для довільного малого невід'ємного  $\delta$ .

Очевидно, що у випадку (5.24), частина, що відповідає за нелокальну умову є обмеженою в  $D_d$ . Це дозволяє отримати

$$\|\mathcal{F}_n(x, \cdot)\|_{\mathbf{H}^1(D_d)} \leq C(\varphi, \alpha, \delta) \|A^\alpha u_1\|.$$

Для  $\eta_N(\mathcal{F}_n, h)$  маємо

$$\|\eta_N(\mathcal{F}_n, h)\| \leq \frac{c \|A^\alpha u_1\|}{\alpha} \left\{ \frac{e^{-\frac{\pi d_1}{h}}}{\sinh\left(\frac{\pi d_1}{h}\right)} + e^{(x-1)\sqrt{a_I} \cosh\left(\frac{(N+1)h}{2}\right) - \alpha(N+1)h} \right\} \quad (5.30)$$

де невід'ємна стала  $c$  не залежить від  $h$ ,  $N$ ,  $x$ .

Врівноважуючи обидві експоненти, отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\pi d_1}{h} &= \alpha(N+1)h, \\ h &= \sqrt{\frac{\pi d_1}{\alpha(N+1)}}, \end{aligned} \quad (5.31)$$

що веде до наступної оцінки

$$\|\eta_N(\mathcal{F}_n, h)\| \leq \frac{c}{\alpha} e^{\left(-\sqrt{\pi d_1 \alpha(N+1)}\right)} \|A^\alpha u_1\|. \quad (5.32)$$

Перший доданок в аргументі  $e^{(x-1)\sqrt{a_I} \cosh\left(\frac{(N+1)h}{2}\right) - \alpha(N+1)h}$  з (5.30) найбільше впливає на похибку у випадку  $0 \leq x < 1$ . Тоді, покладаючи  $h = c_1 \ln N/N$  з деякою позитивною сталою  $c_1$ , ми отримаємо для фіксованого  $x$  оцінку:

$$\|\eta_N(\mathcal{F}_n, h)\| \leq c \left[ e^{-\pi d_1 N / (c_1 \ln N)} + e^{-c_1(x-1)\sqrt{a_I} N / 2 - c_1 \alpha \ln N} \right] \|A^\alpha u_1\|. \quad (5.33)$$

Отже, справедлива теорема

**Теорема 5.2** *Нехай  $A$  – секторіальний оператор,  $u_1 \in D(A^\alpha)$ ,  $\alpha \in (0, 1)$  і виконується умова (5.24). Тоді Sinc-квадратура (5.29) наближає  $u_n(x)$ . Вона має експоненціальну швидкість збіжності рівномірну по  $x$  з оцінкою (5.32) для кроку  $h$  визначеного в (5.31). Наближення має порядок збіжності (5.33) для випадку  $x < 1$  і  $h = c_1 \ln N/N$ ,  $c_1 > 0$  – довільна стала.*

**Зауваження 5.3** Інтегральна крива  $\Gamma_I$  – симетрична відносно дійсної осі. Тому  $z(-kh) = \overline{z(kh)}$  і  $z'(-kh) = -\overline{z'(kh)}$ . Наближення (5.29) може бути переписане у вигляді

$$u_{n,N}(x) = \frac{h}{2\pi i} \mathcal{F}_n(x, z(0)) + \operatorname{Re} \left[ \sum_{k=1}^N h \frac{\mathcal{F}_n(x, z(kh))}{\pi i} \right],$$

що зменшує кількість обчислень резольвенти в два рази.

Далі розглянемо повну похибку наближення.

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \|u(x) - u_n(x)\| = \left\| \int_{-\infty}^{\infty} [\mathcal{F}(x, \zeta) - \mathcal{F}_n(x, \zeta)] d\zeta \right\| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| E(x, \sqrt{z(\zeta)}) z'(\zeta) \right| \left| \frac{\mathcal{I}}{1 + \mathcal{I}} - \frac{\mathcal{I}_n}{1 + \mathcal{I}_n} \right| \|R_A^1(\zeta) u_1\| d\zeta, \end{aligned}$$

З врахуванням (5.28) це може бути приведено до вигляду

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{(1 + M)Kb_{Ic}}{1 - e^{-2\sqrt{a_I}}} \left( \frac{2}{a_I} \right)^{1+\alpha} \|A^\alpha u_1\| |\mathcal{I} - \mathcal{I}_n| \int_{-\infty}^{\infty} e^{(x-1)\sqrt{a_I} \cosh \zeta - \alpha|\zeta|} d\zeta \leq \\ &\leq \frac{2(1 + M)Kb_{Ic}}{1 - e^{-2\sqrt{a_I}}} \left( \frac{2}{a_I} \right)^{1+\alpha} \|A^\alpha u_1\| |\mathcal{I} - \mathcal{I}_n| \int_0^{\infty} e^{-\alpha|\zeta|} d\zeta = \\ &= C \|A^\alpha u_1\| |\mathcal{I} - \mathcal{I}_n|. \end{aligned}$$

Тоді для повної похибки будемо мати

$$\|u(x) - u_{n,N}(x)\| \leq \varepsilon_1 + \|\eta_N(\mathcal{F}_n, h)\|. \quad (5.34)$$

Це дає нам можливість сформулювати основну теорему підрозділу.

**Теорема 5.3** Нехай виконуються умови теореми 5.2. Тоді (5.29) зображає наближення до  $u(x)$ . Воно має експоненціальну швидкість збіжності у випадку коли  $w(x)$  має аналітичне продовження в еліпс Бернштейна.

### 5.2.3 Чисельні розрахунки

**Приклад 5.2** Розглянемо задачу (5.18) з оператором  $A$  визначеним як

$$\begin{aligned} D(A) &= \{v(y) \in H^2(0,1) : v(0) = v(1) = 0\}, \\ Av &= -v''(y) \quad \forall v \in D(A), \end{aligned} \tag{5.35}$$

що генерує однорідне параболічне рівняння з крайовими умовами

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} &= 0, \\ u(x,0) &= u(x,1) = 0. \end{aligned}$$

Добавимо ще одну граничну умову

$$u(0,y) = 0,$$

і нелокальну інтегральну умову

$$u(1,0) + \int_0^1 \sin(\pi s) u(s,y) ds = \sinh(\pi) \frac{1+2\pi}{2\pi} \sin(\pi y).$$

В цьому випадку точним розв'язком задачі буде  $u(x,y) = \sinh(\pi x) \sin(\pi y)$ . Обчислення проведені за допомогою системи Maple. Похибки обчислень наведено в таблиці 5.2 для різної кількості вузлів квадратури  $n$  (5.25) і кількості Sinc-точок  $N$  (5.29). З таблиці чітко видно експоненціальну швидкість збіжності згідно апріорної оцінки (5.34).

N	n		
	4	8	16
4	0.869502080		
8	0.351883285	0.35190102352	
16	0.017266161	0.01730769314	0.01730769314
32	0.000071497	0.00003800484	0.00003800482
64	0.000033550	$6.28335352 * 10^{-13}$	$4.7388530141 * 10^{-13}$
128		$1.54426540 * 10^{-13}$	$3.8477411016 * 10^{-24}$
256			$3.8062561570 * 10^{-34}$

Таблиця 5.2: Похибка для  $x = 0.5$ ,  $y = 0.5$

## Висновки

1. Доведено непокрещуваність оцінок швидкості збіжності методу перетворення Келлі для обчислення операторної експоненти для різних класів гладкості початкового вектора.
2. Досліджено швидкість збіжності Сінс-квадратурної формули для обчислення операторної експоненти з використанням зображення Данфорда-Коші по параболі і стандартної резольвенти. Показано, що такий підхід не забезпечує рівномірну швидкість збіжності відносно змінної  $t \geq 0$ , що робить неможливим використання цього методу для неоднорідних задач зі збереженням експоненціальної швидкості збіжності.
3. Розроблено метод без насичення точності для знаходження наближеного розв'язку задачі Коші для неоднорідного рівняння першого порядку з необмеженим операторним коефіцієнтом з використанням наближення правої частини по вузлах Чебишева або перетворення Лапласа від правої частини. Показано, що швидкість збіжності буде експоненціальною у випадку аналітичної вектор-функції правої частини.
4. Знайдено умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку з необмеженим операторним коефіцієнтом зі змінною областю визначення та розроблено метод без насичення точності для його наближеного знаходження.
5. Досліджено  $m$ -точкову нелокальну задачу для диференціального рівняння першого порядку з необмеженим операторним коефіцієнтом в банаховому просторі. Для неї знайдено зображення розв'язку через операторні експоненти, та з припущенням про виконання достатніх умов існування розв'язку побудовано та обґрунтовано експоненціально збіжний метод знаходження наближеного розв'язку.

6. Знайдено необхідні та достатні умови існування розв'язку двоточної нелокальної задачі для диференціального рівняння першого порядку з необмеженим операторним коефіцієнтом.
7. Для математичної моделі поширення аерозольного забруднення в атмосфері з періодичними умовами по часу адаптовано експоненціально збіжний наближений метод розв'язування  $m$ -точкової нелокальної задачі. Досліджена швидкість збіжності та створене програмне забезпечення.
8. Досліджено задачу для диференціального рівняння першого порядку з нелокальною двоточною умовою, що містить обмежений або необмежений операторний коефіцієнт. Вперше знайдено достатні умови існування розв'язку та побудовано експоненціально збіжний наближений метод розв'язування.
9. Для еволюційного рівняння першого порядку з двоточною нелокальною умовою побудовано метод знаходження наближеного розв'язку з швидкістю збіжності без насичення точності відносно вхідних даних.
10. Для диференціального рівняння першого порядку з необмеженим операторним коефіцієнтом та з нелокальними інтегральними лінійними та нелінійними умовами знайдено достатні умови існування розв'язків та вперше побудовано наближені методи без насичення точності відносно гладкості ядра інтегральних умов. У випадку аналітичності ядер методи забезпечують експоненціальну швидкість збіжності.
11. Досліджено задачу Коші для демпфованого диференціального рівняння другого порядку з необмеженими операторними коефіцієнтами. Для випадку гільбертового простору при умові, що оператори є самоспряженими, додатно визначеними на основі зображення Данфорда-Коші та квадратурної формули трапецій вперше побудовано експоненціально збіжний наближений метод розв'язування.

12. Для диференціального рівняння другого порядку з необмеженим операторними коефіцієнтом в банаховому просторі та крайовими умовами (еліптичний випадок) вперше побудовано експоненціально збіжний наближений метод.
13. Досліджено  $m$ -точкову нелокальну задачу для диференціального рівняння другого порядку з необмеженим операторним коефіцієнтом. Для неї знайдено зображення розв'язку, встановлено достатні умови його існування. Вперше побудовано та обґрунтовано експоненціально збіжний метод знаходження наближеного розв'язку такої задачі. Як окремий випадок з умов існування розв'язку виведено нові достатні умови для класичних багатоточкових задач для еліптичних рівнянь.
14. Для диференціального рівняння еліптичного типу з нелокальною інтегральною умовою знайдено достатні умови існування розв'язку та вперше побудовано наближений метод без насичення точності відносно гладкості ядра інтегральної умови. У випадку аналітичності ядра метод забезпечує експоненціальну швидкість збіжності.



## Бібліографія

1. Бабенко, К. И. Основы численного анализа / К. И. Бабенко. — Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. — С. 848.
2. Самарский, А. А. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями / А. А. Самарский, Р. Д. Лазаров, В. Л. Макаров. — Москва: Высшая школа, 1987.
3. Gavrilyuk, I. Exponentially convergent algorithms for abstract differential equations / Ivan Gavrilyuk, Volodymyr Makarov, Vitalii Vasylyk. *Frontiers in Mathematics*. — Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011. — P. viii+180.
4. Gavrilyuk, I. P. Data-sparse approximation of a class of operator-valued functions / I. P. Gavrilyuk, W. Hackbusch, B. N. Khoromskij // *Math. Comp.* — 2005. — Vol. 74. — P. 681–708.
5. Gavrilyuk, I. P.  $\mathcal{H}$ -matrix approximation for the operator exponential with applications / I. P. Gavrilyuk, W. Hackbusch, B. N. Khoromskij // *Numer. Math.* — 2002. — Vol. 92. — P. 83–111.
6. Gavrilyuk, I. P. Data-sparse approximation to the operator-valued functions of elliptic operator / I. P. Gavrilyuk, W. Hackbusch, B. N. Khoromskij // *Math. Comp.* — 2004. — Vol. 73. — P. 1297–1324.
7. Gavrilyuk, I. P. Tensor-product approximation to elliptic and parabolic solution operators in higher dimensions / I. P. Gavrilyuk, W. Hackbusch, B. N. Khoromskij // *Computing*. — 2005. — Vol. 74. — P. 131–157.
8. Gavrilyuk, I. P. H-matrix approximation for elliptic solution operators in cylindrical domains / I. P. Gavrilyuk, W. Hackbusch, B. N. Khoromskij // *East-West Journal of Numerical Analysis*. — 2001. — Vol. 9, no. 1. — P. 25–58.
9. Spectral methods in fluid dynamics / Claudio Canuto, M. Yousuff Hussaini, Alfio Quarteroni, Thomas A. Zang. *Springer Series in Computational Physics*. — Springer-Verlag, New York, 1988. — P. xiv+557.
10. Trefethen, L. N. Approximation theory and approximation practice / Lloyd N. Trefethen. — Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2013. — P. viii+305.

11. Stenger, F. Numerical methods based on sinc and analytic functions / Frank Stenger. — Springer-Verlag, New York, 1993. — Vol. 20 of Springer Series in Computational Mathematics. — P. xvi+565. — <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-2706-9>.
12. Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems / Wolfgang Arendt, Charles J. K. Batty, Matthias Hieber, Frank Neubrander. — Second edition. — Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011. — Vol. 96 of Monographs in Mathematics. — P. xii+539.
13. Yosida, K. Functional analysis / Kôsaku Yosida. — Sixth edition. — Berlin: Springer-Verlag, 1980. — Vol. 123 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. — P. xii+501.
14. Крейн, С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн. — М.: Наука, 1967. — С. 464.
15. Pazy, A. Semigroups of linear operator and applications to partial differential equations / A. Pazy. — New York, Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 1983.
16. Kato, T. On linear differential equations in banach spaces / Т. Като // Communications on pure and applied mathematics. — 1956. — Vol. IX. — P. 479–486.
17. Горбачук, В. И. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений / В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук. — Киев: Наукова думка, 1984. — С. 284.
18. Васильев, В. В. Дифференциальные уравнения в банаховых пространствах I. Теория полугрупп / В. В. Васильев, С. И. Пискарев. — М.: Московский Гос. Университет, 1996.
19. Гельфанд, И. М. Обобщенные функции и действия над ними / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. — Физматгиз, 1958. — Т. 1. — С. 470.
20. Гельфанд, И. М. Пространства основных и обобщенных функций / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. — Физматгиз, 1958. — Т. 2. — С. 308.
21. Гельфанд, И. М. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. — Физматгиз, 1958. — Т. 3. — С. 274.
22. Хилле, Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р. С. Филлипс. — ИЛ, 1962. — С. 829.

23. Соболевский, П. Е. Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве / П. Е. Соболевский // Труды московского математического общества. — 1961. — Т. 10. — С. 298–350.
24. Иванов, В. К. Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи / В. К. Иванов, И. В. Мельникова, А. И. Филингов. — Москва: Физматлит, 1995. — С. 176.
25. Melnikova, I. V. Abstract Cauchy problems: three approaches / Irina V. Melnikova, Alexei Filinkov. — Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2001. — Vol. 120 of Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. — P. xxii+236.
26. Бицадзе, А. В. Некоторые элементарные обобщения линейных эллиптических краевых задач / А. В. Бицадзе, А. А. Самарский // Докл. Акад. Наук СССР. — 1969. — Т. 185. — С. 739–740.
27. Berikelashvili, G. On the convergence of difference schemes for one nonlocal boundary-value problem / G. Berikelashvili, N. Khomeriki // Lith. Math. J. — 2012. — Vol. 52, no. 4. — P. 353–362.
28. Berikelashvili, G. On the solvability of a nonlocal boundary value problem in the weighted Sobolev spaces / G. Berikelashvili // Proc. A. Razmadze Math. Inst. — 1999. — Vol. 119. — P. 3–11.
29. Ионкин, Н. Устойчивость и сходимость в  $s$ -норме разностных схем для параболического уравнение с нелокальным краевым условием / Н.И. Ионкин, В. Л. Макаров, Д.Г. Фурлетов // Мат. Моделирование. — 1992. — Vol. 4. — P. 63–73.
30. Ilin, V. A two-dimensional nonlocal boundary value problem for the poisson operator in the differential and the difference interpretation. / V.A. Ilin, E.I. Moiseev // Mat. Model. — 1990. — Vol. 2, no. 8. — P. 139–156.
31. Gordeziani, D. Investigation of the nonlocal initial boundary value problems for some hyperbolic equations / D. Gordeziani, G. Avalishvili // Hiroshima Math. J. — 2001. — Vol. 31, no. 3. — P. 345–366.
32. Ионкин, Н. Двумерное уравнение теплопроводности с нелокальными краевыми условиями / Н.И. Ионкин, В.А. Морозова // Дифференц. уравнения. — 2000. — Т. 36, № 7. — С. 884–888.

33. Samarskii, A. Some problems of the theory of differential equations / A.A. Samarskii // *Differentsial'nye Uravneniya* (Differential equations). — 1980. — Vol. 16, no. 11. — P. 1925–1935.
34. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними / В.С. Ільків, І.Я. Кміть, В.М. Поліщук, Пташника Б.Й. — Київ: Наук.думка, 2002. — С. 416.
35. Dezin, A. A. On the theory of operators of the type  $d/dt - A$  / A. A. Dezin // *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. — 1965. — Vol. 164. — P. 963–966.
36. Dezin, A. A. Operator-differential equations. The method of model operators in the theory of boundary value problems / A. A. Dezin. — *Tr. Mat. Inst. Steklova*, 2000. — Vol. 229. — P. 176.
37. Byszewski, L. Theorems about the existence and uniqueness of solution of a semilinear evolution nonlocal cauchy problem / L. Byszewski // *J. Math. Anal. Appl.* — 1991. — Vol. 162, no. 5. — P. 494–505.
38. Byszewski, L. Theorem about the existence and uniqueness of a solution of a nonlocal abstract Cauchy problem in a Banach space / L. Byszewski, V. Lakshmikantham // *Applicable Analysis: An International Journal*. — 1991. — Vol. 40, no. 1. — P. 11–19.
39. Ntouyas, S. K. Global existence for semilinear evolution equations with nonlocal conditions / S. K. Ntouyas, P. Ch. Tsamatos // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. — 1997. — Vol. 210, no. 2. — P. 679 – 687.
40. Скубачевский, А. Л. Неклассические краевые задачи. I / А. Л. Скубачевский // *Современная математика. Фундаментальные направления*. — 2007. — Т. 26. — С. 3–132.
41. Eigenvalue problem for the second order differential equation with nonlocal conditions / B. Bandyrskii, I. Lazurchak, V. Makarov, M. Sapagovas // *Nonlinear Anal. Model. Control*. — 2006. — Vol. 11, no. 1. — P. 13–31.
42. Sapagovas, M. On the spectral properties of three-layer difference schemes for parabolic equations with nonlocal conditions / M. Sapagovas // *Differ. Equ.* — 2012. — Vol. 48, no. 7. — P. 1018–1027.
43. Ciupaila, R. Numerical solution of nonlinear elliptic equation with nonlocal condition / Regimantas Ciupaila, Mifodijus Sapagovas, Olga Stikonienė // *Nonlinear Anal. Model. Control*. — 2013. — Vol. 18, no. 4. — P. 412–426.

44. Convergence of iterative methods for elliptic equations with integral boundary conditions / Mifodijus Sapagovas, Olga Stikonienė, Regimantas Ciupaila, Zivilė Jokšienė // *Electron. J. Differential Equations*. — 2016. — P. Paper No. 118, 14.
45. Jakubėlienė, K. Semi-Implicit Difference Scheme for a Two-Dimensional Parabolic Equation with an Integral Boundary Condition / Kristina Jakubėlienė, Regimantas Ciupaila, Mifodijus Sapagovas // *Math. Model. Anal.* — 2017. — Vol. 22, no. 5. — P. 617–633.
46. Berikelashvili, G. Method of corrections by higher order differences for Poisson equation with nonlocal boundary conditions / Givi Berikelashvili, Bidzina Midodashvili // *Trans. A. Razmadze Math. Inst.* — 2016. — Vol. 170, no. 2. — P. 287–296.
47. Berikelashvili, G. On the fourth-order accurate difference scheme for Poisson's equation with nonlocal boundary condition / G. Berikelashvili // *Proc. A. Razmadze Math. Inst.* — 2012. — Vol. 159. — P. 134–137.
48. Berikelashvili, G. On a nonlocal boundary-value problem for two-dimensional elliptic equation / Givi Berikelashvili // *Comput. Methods Appl. Math.* — 2003. — Vol. 3, no. 1. — P. 35–44. — Dedicated to Raytcho Lazarov.
49. Berikelashvili, G. Construction and analysis of difference schemes for some elliptic problems, and consistent estimates of the rate of convergence / G. Berikelashvili // *Mem. Differential Equations Math. Phys.* — 2006. — Vol. 38. — P. 1–131.
50. Вабищевич, П. О численном решении нелокальных эллиптических задач / П.Н. Вабищевич // *Изв. вузов. Матем.* — 1983. — № 5. — С. 13–19.
51. Вабищевич, П. Нелокальное возмущение начального условия в некорректных задачах для эволюционных уравнений первого порядка / П.Н. Вабищевич // *Матем. моделирование*. — 1992. — Т. 4, № 5. — С. 109–119.
52. Бабин, А. В. Построение и исследование решений дифференциальных уравнений методами теории приближения функций / А. В. Бабин // *Мат. сб.* — 1984. — Т. 123(165), № 2. — С. 147–173.
53. Горбачук, М. Л. О полиномиальном приближении решений дифференциально-операторных уравнений в гильбертовом пространстве / М. Л. Горбачук, В. В. Городецкий // *УМЖ*. — 1984. — Т. 36, № 4. — С. 500–502.

54. Arov, D. Z. Representation and approximation of the solution of an initial value problem for a first order differential equation with an unbounded operator coefficient in Hilbert space based on the Cayley transform / D. Z. Arov, I. P. Gavrilyuk, V. L. Makarov // Progress in partial differential equations / Ed. by C. Bandle et al. — Vol. 1. — Pitman Res. Notes Math. Sci., 1994. — P. 40–50.
55. Кашпіровський, О. І. Апроксимація розв'язків операторно-диференціальних рівнянь за допомогою операторних поліномів / О. І. Кашпіровський, Ю. В. Митник // УМЖ. — 1998. — Т. 50, № 11. — С. 1506–1516.
56. Городний, М. Ф. Аппроксимация ограниченного решения одного разностного уравнения решениями соответствующих краевых задач в банаховом пространстве / М. Ф. Городний // Матем. заметки. — 1992. — Т. 51, № 4. — С. 17–22, 139. — <http://dx.doi.org/10.1007/BF01250543>.
57. Городний, М. Ф. A generalization of the concept of a sectorial operator / М. Ф. Городний, А. В. Чайковский // Мат. Сборник. — 2006. — Т. 197, № 7. — С. 29–46. — <http://dx.doi.org/10.1070/SM2006v197n07ABEH003785>.
58. Городний, М. Ф. Про апроксимацію обмеженого розв'язку лінійного диференціального рівняння у банаховому просторі / М. Ф. Городний // УМЖ. — 1998. — Т. 50, № 9. — С. 1268–1271. — <http://dx.doi.org/10.1007/BF02525251>.
59. Городний, М. Ф. Про оборотність оператора  $d/dt + A$  в деяких функціональних просторах / М. Ф. Городний // УМЖ. — 2007. — Т. 59, № 8. — С. 1020–1025. — <http://dx.doi.org/10.1007/s11253-007-0074-4>.
60. Городний, М. Ф. Обмежені розв'язки деякого класу різницевих рівнянь з операторними коефіцієнтами / М. Ф. Городний, О. А. Лагода // УМЖ. — 2001. — Т. 53, № 11. — С. 1495–1500. — <http://dx.doi.org/10.1023/A:1015298712652>.
61. Городний, М. Ф. Про наближення обмеженого розв'язку диференціального рівняння з необмеженим операторним коефіцієнтом / М. Ф. Городний, А. В. Чайковський // Доп. НАН України. — 2002. — № 6. — С. 10–14.
62. Barkova, E. A. On the solvability of linear differential equations with unbounded operators in Banach spaces / E. A. Barkova, P. P. Zabreiko // Z. Anal. Anwendungen. — 1998. — Vol. 17, no. 2. — P. 339–360.

63. Gorbachuk, M. On extensions and restrictions of semigroups of linear operators in a Banach space and their applications / M. Gorbachuk, V. Gorbachuk // *Math. Nachr.* — 2012. — Vol. 285, no. 14-15. — P. 1860–1879.
64. Gorbachuk, V. M. The representation of a  $C_0$ -semigroup of linear operators in a Banach space on the set of entire vectors of its generator / V. M. Gorbachuk, M. L. Gorbachuk // *Integral Equations Operator Theory.* — 2016. — Vol. 85, no. 4. — P. 497–512.
65. Arov, D. C. A method for solving initial value problems for linear differential equations in hilbert space based on the cayley transform / D. C. Arov, I. P. Gavrilyuk // *Numer. Funct. Anal. and Optimiz.* — 1993. — Vol. 14, no. 5 & 6. — P. 456 – 473.
66. Gavrilyuk, I. P. The Cayley transform and the solution of an initial value problem for a first order differential equation with an unbounded operator coefficient in Hilbert space / I. P. Gavrilyuk, V. L. Makarov // *Numer. Func. Anal. Optimiz.* — 1994. — Vol. 15. — P. 583– 598.
67. Gavrilyuk, I. P. Representation and approximation of the solution of an initial value problem for a first order differential equation in Banach space / I. P. Gavrilyuk, V. L. Makarov // *Z. Anal. Anwend.(ZAA).* — 1996. — Vol. 15. — P. 495–527.
68. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Ердейи. — Москва: Наука, 1974. — Т. 2. — С. 295.
69. Gavrilyuk, I. P. Strongly P-positive operators and explicit representation of the solutions of initial value problems for second order differential equations in Banach space / I. P. Gavrilyuk // *Journ.of Math. Analysis and Appl.* — 1999. — Vol. 236. — P. 327–349.
70. Samarskii, A. Stability and regularization of three-level difference schemes with unbounded operator coefficients in banach spaces / A.A. Samarskii, I.P. Gavrilyuk, V.L. Makarov // *SIAM Journal on Numerical Analysis.* — 2001. — Vol. 39, no. 2. — P. 708–723.
71. Гаврилюк, И. П. Сильно позитивные операторы и численные алгоритмы без насыщения точности / И. П. Гаврилюк, В. Л. Макаров. — Киев: Институт математики НАН Украины, 2004. — С. 500.
72. Gavrilyuk, I. P. A new estimate of the Sinc method for linear parabolic problems including the initial point / I. P. Gavrilyuk, V. L. Makarov, V. B. Vasylyk // *Computational Methods in Applied Mathematics.* — 2004. — Vol. 4. — P. 163– 179.

73. Красносельский, М. А. Дробные степени операторов, действующих в банаховых пространствах / М. А. Красносельский, П. Е. Соболевский // Доклады АН СССР. — 1959. — Т. 129, № 3. — С. 499–502.
74. Соломяк, М. Использование теории полугрупп для исследования дифференциальных уравнений в банаховых пространствах / М.З. Соломяк // Доклады АН СССР. — 1958. — Vol. 122, no. 5. — P. 766–769.
75. One-parameter semigroups / Ph. Clément, H. J. A. M. Heijmans, S. Angenent et al. — Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1987. — Vol. 5 of CWI Monographs. — P. x+312.
76. Gavrilyuk, I. P. Exponentially convergent parallel discretization methods for the first order evolution equations / I. P. Gavrilyuk, V. L. Makarov // Computational Methods in Applied Mathematics (CMAM). — 2001. — Vol. 1, no. 4. — P. 333–355.
77. Гаврилюк, І. П. Експоненціально збіжний паралельний метод дискретизації для диференціальних рівнянь першого порядку / І. П. Гаврилюк, В. Л. Макаров // Доп. НАН України. — 2002. — № 3. — С. 1–6.
78. Gavrilyuk, I. P. Exponentially convergent algorithms for the operator exponential with applications to inhomogeneous problems in Banach spaces / I. P. Gavrilyuk, V. L. Makarov // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 2005. — Vol. 43, no. 5. — P. 2144–2171.
79. Sheen, D. A parallel method for time discretization of parabolic equations based on Laplace transformation and quadrature / D. Sheen, I.H. Sloan, V. Thomée // IMA J. Numer. Anal. — 2003. — Vol. 23, no. 2. — P. 269–299.
80. Thomée, V. A high order parallel method for time discretization of parabolic type equations based on Laplace transformation and quadrature / V. Thomée // Int. J. Numer. Anal. Model. — 2005. — Vol. 2. — P. 121–139.
81. Lund, J. Sinc methods for quadrature and differential equations / J. Lund, K. L. Bowers. — Philadelphia: SIAM, 1992.
82. Василик, В. Наближений розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння з секторіальним оператором в банаховому просторі / В. Василик // Вісник Львівського національного університету ім. І.Франка. Фізико-математичні науки. — 2004. — Т. 9. — С. 34–46.



83. López-Fernández, M. A spectral order method for inverting sectorial laplace transforms / M. López-Fernández, C. Palencia, A. Schädle // *SIAM J. Numer. Anal.* — 2006. — Vol. 44. — P. 1332–1350.
84. López-Fernández, M. On the numerical inversion of the laplace transform of certain holomorphic mappings / M. López-Fernández, C. Palencia // *Applied Numerical Mathematics.* — 2004. — Vol. 51. — P. 289–303.
85. Weideman, J. A. C. Parabolic and hyperbolic contours for computing the Bromwich integral / J. A. C. Weideman, L. N. Trefethen // *Math. Comp.* — 2007. — Vol. 76, no. 259. — P. 1341–1356 (electronic).
86. Gavriljuk, I. P. Algorithms without accuracy saturation for evolution equations in Hilbert and Banach spaces / I. P. Gavriljuk, V. L. Makarov // *Math. Comp.* — 2005. — Vol. 74. — P. 555–583.
87. Kwon, K. A parallel method for the numerical solution of integro-differential equation with positive memory / Kiwoon Kwon, Dongwoo Sheen // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* — 2003. — Vol. 192, no. 41-42. — P. 4641–4658. — [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(03\)00442-0](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(03)00442-0).
88. Fast Runge-Kutta approximation of inhomogeneous parabolic equations / María López-Fernández, Christian Lubich, Cesar Palencia, Achim Schädle // *Numer. Math.* — 2005. — Vol. 102, no. 2. — P. 277–291.
89. Gavriljuk, I. P. Explicit and approximate solutions of second-order evolution differential equations in hilbert space / I. P. Gavriljuk, V. L. Makarov // *Numer. Methods Partial Differential Equations.* — 1999. — Vol. 15, no. 1. — P. 111–131.
90. Fujita, H. Operator theory and numerical methods / Hiroshi Fujita, Norikazu Saito, Takashi Suzuki. — North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 2001. — Vol. 30 of *Studies in Mathematics and its Applications.* — P. viii+309.
91. Riesz, F. *Lecqns D'Analyse Fonctionnelle* / F. Riesz, B. Sz. Nagy. — Akadémiai Kiadó, 1972. — P. 587.
92. Szegő, G. *Orthogonal Polynomials* / G. Szegő. — New York: American Mathematical Society, 1959.

93. López-Fernandez, M. Adaptive, fast, and oblivious convolution in evolution equations with memory / M. López-Fernandez, C. Lubich, A. Schädle // *SIAM J. SCI. COMPUT.* — 2008. — Vol. 30, no. 2. — P. 1015–1037.
94. McLean, W. Time discretization of an evolution equation via laplace transforms / W. McLean, V. Thomee // *IMA Journal of Numerical Analysis.* — 2004. — Vol. 24. — P. 439–463.
95. Schädle, A. Fast and oblivious convolution quadrature / A. Schädle, M. López-Fernandez, C. Lubich // *SIAM J. SCI. COMPUT.* — 2006. — Vol. 28, no. 2. — P. 421–438.
96. Vasylyk, V. Uniform exponentially convergent method for the first order evolution equation with unbounded operator coefficient / V. Vasylyk // *Journal of Numerical and Applied Mathematics.* — 2003. — Vol. 1. — P. 99–104.
97. Goldstein, J. A. Semigroups of linear operators and applications / Jerome A. Goldstein. Oxford Mathematical Monographs. — The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1985. — P. x+245.
98. Filali, M. Non-autonomous inhomogeneous boundary cauchy problem on retarded equations / M. Filali, M. Moussi // *Southwest Journal of pure and Applied Mathematics.* — 2003. — P. 26–37.
99. Palencia, C. Backward Euler method for abstract time-dependent parabolic equations with variable domains / C. Palencia // *Numer. Math.* — 1999. — Vol. 82. — P. 471–490.
100. Gavrilyuk, I. P. An explicit boundary integral representation of the solution of the two-dimensional heat equation and its discretization / I. P. Gavrilyuk, V. L. Makarov // *J. Integral Equations Appl.* — Spring 2000. — Vol. 12, no. 1. — P. 63–83.
101. Ashyralyev, A. Well-posedness of parabolic difference equations / A. Ashyralyev, P. E. Sobolevskii. — Birkhäuser Verlag, Basel, 1994. — Vol. 69 of Operator Theory: Advances and Applications. — P. xiv+349. — Translated from the Russian by A. Iacob.
102. Triebel, H. Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators / H. Triebel. — North-Holland, 1978.
103. Приближенное решение операторных уравнений / М.А. Красносельский, Г.М. Вайн-нико, П.П. Забрейко et al. — Москва: Наука, 1969. — P. 456.

104. Approximate solution of operator equations / M. A. Krasnosel'skiĭ, G. M. Vaĭnikko, P. P. Zabreĭko et al. — Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1972. — P. xii+484. — Translated from the Russian by D. Louvish.
105. Далецкий, Ю. Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. — Москва: Наука, 1970. — P. 534.
106. Szegő, G. Orthogonal Polynomials (with an Introduction and a Complement by J.L.Geronimus) (in Russian) / G. Szegő. — Moscow: State Publishing House of Physical and Mathematical Literature, 1962.
107. Babenko, K. Foundations of the numerical analysis (in Russian) / K.I. Babenko. — Moscow: Nauka, 1986.
108. Ladyzhenskaja, O. A. Linear and quasilinear parabolic equations (in Russian) / O. A. Ladyzhenskaja, V. A. Solonnikov, N.N. Uralzeva. — Moscow: Nauka, 1967.
109. Marchenko, V. A. Sturm-Liouville operators and applications. In: "Operator Theory: Advances and Applications", vol. 22 / V. A. Marchenko. — Basel: Birkhauser-Verlag, 1986.
110. Dunford, N. Linear operators. Pt. 1, general theory. / Nelson. Dunford, Jacob T. Schwartz. — New York: John Wiley & Sons, 1988.
111. Byszewski, L. Application of properties of the right-hand sides of evolution equations to an investigation of nonlocal evolution problems / L. Byszewski // Nonlinear Anal. — 1998. — Vol. 33, no. 5. — P. 413–426.
112. Stenger, F. Summary of Sinc numerical methods / Frank Stenger // j-J-COMP-APPL-MATH. — 2000. — 9. — Vol. 121, no. 1-2. — P. 379–420.
113. Weideman, J. A. C. Optimizing Talbot's contours for the inversion of the Laplace transform / J. A. C. Weideman // SIAM J. Numer. Anal. — 2006. — Vol. 44, no. 6. — P. 2342–2362.
114. Weideman, J. A. C. Improved contour integral methods for parabolic PDEs / J. A. C. Weideman // IMA J. Numer. Anal. — 2010. — Vol. 30, no. 1. — P. 334–350.
115. Fattorini, H. O. The Cauchy Problem / Hector O. Fattorini, Adalbert Kerber. — Cambridge University Press, 1984. — P. 668.

116. Hille, E. *Functional analysis and semi-groups* / Einar Hille, Ralph S. Phillips. — Providence, Rhode Island: American Mathematical Soc., 1996. — P. 819.
117. Henrici, P. *Applied and computational complex analysis* / Peter Henrici. — John Wiley & Sons, 1974.
118. Makarov, V. L. Existence of the solution to a nonlocal-in-time evolutionary problem / V. L. Makarov, D. O. Sytnyk, V. B. Vasylyk // *Nonlinear Analysis. Modelling and Control*. — 2014. — Vol. 19, no. 3. — P. 432—447.
119. Марчук, Г. И. *Математическое моделирование в проблеме окружающей среды* / Г. И. Марчук. — М.: Наука, 1982. — С. 320.
120. Bangerth, W. deal.II – a general purpose object oriented finite element library / W. Bangerth, R. Hartmann, G. Kanschat // *ACM Trans. Math. Softw.* — 2007. — Vol. 33, no. 4. — P. 1020–1025.
121. Kreĭn, S. G. *Linear differential equations in Banach space* / S. G. Kreĭn. — Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1971. — P. v+390. — Translated from the Russian by J. M. Danskin, *Translations of Mathematical Monographs*, Vol. 29.
122. Exponentially convergent Duhamel-like algorithms for differential equations with an operator coefficient possessing a variable domain in a Banach space / T. J. Bohonova, I. P. Gavriilyuk, V. L. Makarov, V. B. Vasylyk // *SIAM J. Numer. Anal.* — 2007/08. — Vol. 46, no. 5. — P. 365–396.
123. Henry, D. *Geometric theory of semilinear parabolic equations* / Daniel Henry. — Springer-Verlag, Berlin-New York, 1981. — Vol. 840 of *Lecture Notes in Mathematics*. — P. iv+348.
124. Gupta, C. P. On nonlinear integral equations of Hammerstein type with unbounded linear mapping / Chaitan P. Gupta // *Functional Analysis and Applications: Proceedings of the Symposium of Analysis Universidade Federal de Pernambuco Recife, Pernambuco, Brasil, July 9–29, 1972* / Ed. by Leopoldo Nachbin. — Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1974. — P. 184–238.
125. Hess, P. On nonlinear equations of hammerstein type in banach spaces / Peter Hess // *Proceedings of the American Mathematical Society*. — 1971. — Vol. 30, no. 2. — P. 308–312. — <http://www.jstor.org/stable/2038272>.
126. Bica, A. About a numerical method of successive interpolations for functional hammerstein integral equations / A.M. Bica, M. Curila, S. Curila // *Journal of*

- Computational and Applied Mathematics. — 2012. — Vol. 236, no. 7. — P. 2005 – 2024. — <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042711005802>.
127. P. M. Fitzpatrick, W. V. P. Galerkin methods in the constructive solvability of nonlinear hammerstein equations with applications to differential equations / W. V. Petryshyn P. M. Fitzpatrick // Transactions of the American Mathematical Society. — 1978. — Vol. 238. — P. 321–340. — <http://www.jstor.org/stable/1997811>.
128. Some, B. Some recent numerical methods for solving nonlinear hammerstein integral equations / B. Some // Mathematical and Computer Modelling. — 1993. — Vol. 18, no. 9. — P. 55 – 62. — <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/089571779390142L>.
129. Sunil Kumar, I. H. S. A new collocation-type method for hammerstein integral equations / Ian H. Sloan Sunil Kumar // Mathematics of Computation. — 1987. — Vol. 48, no. 178. — P. 585–593. — <http://www.jstor.org/stable/2007829>.
130. Sova, M. Problème de cauchy pour équations hyperboliques opérationnelles à coefficients constants non-bornés / M Sova // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. — 1968. — Vol. 3, no. 22. — P. 67–100.
131. Melnikova, I. An integrated family of  $m$  and  $n$  functions / I.V. Melnikova, A.I. Filinkov // Dokl. Akad. Nauk. — 1992. — Vol. 326, no. 1. — P. 35–39 (in Russian).
132. Larsson, S. Finite-element methods for a strongly damped wave equation / S. Larsson, V. Thomee, L. B. Wahlbin // IMA J. Numer. Anal. — 1991. — Vol. 11. — P. 193–197.
133. Thomee, V. Maximum-norm estimates for finite-element methods for a strongly damped wave equation / V. Thomee, L.B. Wahlbin // BIT Numerical Mathematics. — 2004. — Vol. 44. — P. 165–179.
134. Gavrilyuk, I. P. Explicit and approximate solutions of second order elliptic differential equations in Hilbert- and Banach spaces / I. P. Gavrilyuk, V. L. Makarov // Numer. Func. Anal. Optimiz. — 1999. — Vol. 20, no. 7&8. — P. 695– 717.
135. Ильин, В. А. Двумерная нелокальная задача для оператора пуассона в дифференциальной и разностной постановках / В. А. Ильин, Е. И. Моисеев // Математическое Моделирование. — 1990. — Т. 2, № 8. — С. 139–156.

136. Ashyralyev, A. Finite difference method for multipoint nonlocal elliptic-parabolic problems / A. Ashyralyev, O. Gercek // *Comput. Math. Appl.* — 2010. — Vol. 60, no. 7. — P. 2043–2052.
137. Meladze, H. The necessary condition of the optimality for an optimal control problem for Helmholtz equation with non-local boundary conditions and a nonlinear functional / H. Meladze, N. Odishelidze, F. Criado, Jr. // *Appl. Math. Inform.* — 1999. — Vol. 4, no. 1. — P. 66–74, 94.
138. Gavrilyuk, I. P. Exponentially convergent approximation to the elliptic solution operator / I. P. Gavrilyuk, V. L. Makarov, V. B. Vasylyk // *Computational Methods in Applied Mathematics.* — 2006. — Vol. 6, no. 4. — P. 386–404.
139. Pao, C. Reaction diffusion equations with nonlocal boundary and nonlocal initial conditions / C.V. Pao // *J. Math. Anal. Appl.* — 1995. — Vol. 195, no. 3. — P. 702–718.
140. Vasylyk, V. Exponentially convergent method for the  $m$ -point nonlocal problem for an elliptic differential equation in Banach space / V. Vasylyk // *Journal of Numerical and Applied Mathematics.* — 2011. — Vol. 105, no. 2. — P. 124–135.