Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Інститут математики НАН України

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

ПРИХОДЬКО ЮРІЙ ЄВГЕНОВИЧ

УДК 519.21

ДИСЕРТАЦІЯ

ГРАНИЧНА ПОВЕДІНКА ЛОКАЛЬНИХ ЗБУРЕНЬ ПРОЦЕСІВ МАРКОВА

01.01.05 «Теорія ймовірностей і математична статистика»
11 – Математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело. Ю.Є. Приходько

Науковий керівник: д.ф.-м.н., с.н.с.
Пилипенко Андрій Юрійович

Київ – 2018

Анотація

Приходько Ю.Є. Гранична поведінка локальних збурень процесів Маркова — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.05 «Теорія ймовірностей і математична статистика» (111 – Математика). — Національний технічний університет України «КПІ ім. Ігоря Сікорського», Інститут математики НАН України, Київ, 2018.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню функціональних граничних теорем для випадкових процесів зі збуренням.

В дисертації побудовано загальний метод дослідження асимптотичної поведінки для локальних збурень процесів, що мають властивість регенерації. Такими процесами можуть бути, зокрема, послідовності процесів Маркова, які ззовні довільного околу фіксованої "сингулярної" точки поводяться як деякий заданий процес. В околах цієї точки поведінка збуреного процесу може суттєво відрізнятися.

Зокрема, в розділі 3 розглядається однорідний ланцюг Маркова X зі значеннями в $\mathbb{Z}$, перехідні імовірності $p_{i,j}$ якого при $|i| > m$ співпадають з перехідними імовірностями для симетричного випадкового блукання з одиничним кроком, де m фіксоване. При $|i| \leqslant m$ перехідні імовірності $p_{i,j}$ довільні. Відрізок $[-m, m]$ називається мембраною.

Доведено, що якщо стрибки з "мембрани" $[-m, m]$ інтегровні, то послідовність процесів $(X_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}X([nt]),\ t \geqslant 0)$ слабко збігається при $n \to \infty$ до деякого неперервного процесу. Проведено повну класифікацію відповідних можливих граничних процесів.

Зокрема, якщо всі стани ланцюга Маркова X є сполучними, то границею для послідовності $\{X_n(\cdot),\ n \geqslant 1\}$ є косий броунівський рух, параметр якого явно обчислено в термінах перехідних імовірностей збурення.

Даний результат узагальнює відомий результат Гаррісона та Шеппа, які розглядали збурення тільки в одній точці. Слід зазначити, що метод Гаррісона та Шеппа базується на явних обчисленнях і важко переноситься на випадок збурення, зосередженого в більшій кількості точок. Запропонований в даній дисертації метод дозволяє досліджувати граничну поведінку збурених блукань з мембранами довільної складності.

Якщо стрибки з мембрани не є інтегровними, то граничний процес може бути розривним. Так, для випадку випадкових блукань з відбиваючим бар'єром в точці нуль, стрибки з якого належать до області притягання α-стійкого розподілу, доведено слабку збіжність в просторі Скорохода до броунівського руху з відбиттям в нулі та граничними умовами типу Вентцеля–Феллера.

В розділі 4 розроблений загальний метод застосовано для дослідження граничної поведінки послідовностей розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з необмеженими в околі особливої точки коефіцієнтами, а також стохастичних диференціальних рівнянь з неліпшицевими та виродженими коефіцієнтами, збурених малим шумом.

Зокрема, встановлено граничну поведінку послідовностей розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з необмеженими в околі особливої точки коефіцієнтами. Проведено повну класифікацію можливих граничних процесів в залежності від поведінки розв'язків в околі особливої точки.

Так, розглядається послідовність розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь

$$dX_n(t) = a_n(X_n(t))dt + dW(t),$$

де $\{a_n\}$ в деякому сенсі збігається до $(c_- \mathbb{1}_{x<0} + c_+ \mathbb{1}_{x>0})/x + \gamma\delta_0$. Тут δ_0 це дельта-функція Дірака в нулі. Граничним для послідовності $\{X_n\}$ процесом може бути, зокрема, процес Бесселя, косий процес Бесселя тощо.

Для послідовностей розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з неліпшицевими та виродженими в околі особливої точки коефіцієнтами розглянуто збурення малим шумом та доведено слабку збіжність в просторі неперервних функцій.

Так, розглядаються стохастичні диференціальні рівняння

$$\begin{aligned} &dX(t) = a(X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t),\ t \geqslant 0, \\ &X(0) = 0, \end{aligned}$$

зі степеневими коефіцієнтами, які не задовольняють умову Ліпшиця в точці 0, і мають неєдиний розв'язок. Для $\varepsilon > 0$ розглядаються збурені стохастичні диференціальні рівняння

$$\begin{aligned} &dX(t) = a(X(t))dt + (\varepsilon + \sigma(X(t)))dW(t),\ t \geqslant 0, \\ &X(0) = 0, \end{aligned}$$

і досліджується гранична поведінка їх розв'язків при $\varepsilon \to 0$.

Отриманий результат узагальнює відповідний результат Baffico та Baldi, які розглядали збурення малим випадковим шумом для звичайних диференціальних рівнянь. Розроблений в дисертаційній роботі метод доведення дозволив узагальнити результат Baffico і Baldi про збурення малим шумом на випадок стохастичних диференціальних рівнянь.

Ключові слова: локальні збурення процесів Маркова, дифузії з напівпрозорими мембранами, косий броунівський рух, косий процес Бесселя, граничні умови Вентцеля–Феллера, збурення малим шумом.

Список публікацій здобувача

1. Пилипенко А.Ю., Приходько Ю.Є. Про граничну поведінку симетричних випадкових блукань з мембранами // Теорія ймовірностей та математична статистика. — 2011. — № 85. — С. 84–94.

2. Pilipenko A.Yu., Prykhodko Yu.E. Limit behavior of a simple random walk with non-integrable jump from a barrier // Theor. Stoch. Proc. 19 (35). — 2014. — P. 52–61.

3. Пилипенко А.Ю., Приходько Ю.Е. О предельном поведении возмущений в окрестности сингулярной точки последовательности марковских процессов // Укр. мат. журн. — 2015. — Т. 67, № 4. — С. 499–516.

4. Pilipenko A.Yu., Prykhodko Yu.E. A limit theorem for singular stochastic differential equations // Modern Stochastics: Theory and Applications. — 2016. — Vol. 3, no. 3. — P. 223–235.

5. Приходько Ю.Є. Малі збурення стохастичних диференціальних рівнянь зі степеневими коефіцієнтами // Наукові вісті Національного технічного університету України Київський політехнічний інститут. — 2016. — № 4. — С. 80–84.

6. Приходько Ю.Є. Про граничну поведінку симетричного вип. блукання з мембраною // Міжуніверситетська наукова конференція з математики та фізики для студентів та молодих вчених (Київ, 21–22 травня 2009) — Київ, 2009.

7. Приходько Ю.Є. Про граничну поведінку симетричного випадкового блукання з мембраною // Тринадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука (Київ, 13–15 травня 2010) — Київ, 2010.

8. Prykhodko Yu.E. On the limit behavior of a scaled random walk with a membrane // Міжнародна наукова конференція «Modern Stochastics: Theory and Applications II» (Київ, 7–11 вересня 2010) — Київ, 2010.

9. Приходько Ю.Є., Про граничну поведінку симетричних випадкових блукань із порушеною симетричністю в околі нуля // Друга міжуні-

верситетська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики (Київ, 28–29 квітня 2011) — Київ, 2011.

10. Приходько Ю.Є. Асимптотична поведінка симетричного випадкового блукання з мембраною // Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу» (Ворохта, 20–26 лютого 2012) — Івано-Франківськ, 2012.

11. Приходько Ю.Є. Гранична поведінка симетричного випадкового блукання з мембраною // Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука (Київ, 19–21 квітня 2012) — Київ, 2012.

12. Prykhodko Yu.E. On the limit behavior of a symmetric random walk with perturbations at the origin // Міжнародна наукова конференція «Modern Stochastics: Theory and Applications III» (Київ, 10–14 вересня 2012) — Київ, 2012.

13. Приходько Ю.Є. Гранична поведінка збурених випадкових блукань з неінтегровним збуренням // Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу» (Ворохта, 25 лютого – 3 березня 2013) — Івано-Франківськ, 2013.

14. Приходько Ю.Є. Асимптотична поведінка збурених випадкових блукань з неінтегровним збуренням // Третя міжуніверситетська наукова конференція з математики та фізики для студентів та молодих вчених (Київ, 25–27 квітня 2013) — Київ, 2013.

15. Prykhodko Yu.E. On the limit behaviour of a symmetric random walk with perturbations at the origin // Ukrainian–German Workshop on Empirical Complete Convergence and other Limit Theorems of Probability Theory (Коктебель, 23–27 вересня 2013) — Київ, 2013.

16. Pilipenko A.Yu., Prykhodko Yu.E. Bessel diffusions and limit theorems for one-dimensional stochastic differential equations // Міжнародна наукова конференція «Probability, Reliability and Stochastic Optimization» (Київ, 7–10 квітня 2015) — Київ, 2015.

17. Pilipenko A.Yu., Prykhodko Yu.E. On the limit behavior of a sequence of Markov processes with perturbations in a neighborhood of a singular point Міжнародна наукова конференція «Stochastic Processes in Abstract Spaces» (Київ, 14–16 жовтня 2015) — Київ, 2015.

18. Prykhodko Yu.E. Small random perturbations of stochastic differential equations with power coefficients // Міжнародна наукова конференція «International Workshop on Limit Theorems in Probability Theory, Number Theory and Mathematical Statistics» (Київ, 10–11 жовтня 2016) — Київ, 2016.

Abstract

Prykhodko Yu.E. Limit behaviour of local perturbations of Markov processes — Manuscript.

PhD Thesis, 01.01.05 «Probability Theory and Mathematical Statistics». — National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute», Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv, 2018.

The thesis is devoted to the study of functional limit theorems for random processes with perturbations.

Such processes may include, in particular, the sequence of Markov processes, that outside of an arbitrary neighbourhood of a fixed "singular" point behave as a given Markov process. In any neighbourhood of this point, the behavior of the perturbed process can vary significantly.

The proposed general method is used to generalize Donsker's theorem for local perturbations of a symmetric ± 1 random walk.

For example, let X be a homogeneous Markov chain on $\mathbb{Z}$ with the transition probabilities $p_{i,j}$ wich differ from the transition probabilities of a symmetric ± 1 random walk only for $i \in [-m, m]$, where m is fixed. If the jumps from the "memrane" $[-m, m]$ are integrable, then the sequence of processes $(X_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} X([nt]),\ t \geqslant 0)$ weakly converges as $n \to \infty$.

A complete classification of possible limit processes is carried out.

In particular, if the chain X is recurrent, then the limit for $\{X_n(\cdot),\ n \geqslant 1\}$ is a skew Brownian motion.

This result is a generalization of the well-known result of Harrison and Shepp, who considered perturbation at just one point. It should be noted that Harrison and Shepp's method is based on explicit calculations and is difficult to carry over to a case with many points. The method proposed in this thesis allows us to study the limit behavior of perturbed random walks with membranes of arbitrary complexity.

If the jumps from the membrane are non-integrable, then the limit process may be discontinuous. For example, for the case of random walks with a reflecting barrier at zero, the jumps from which belong to the domain of attraction of the α-stable distribution, we prove weak convergence in the Skorokhod space to a Brownian motion with a reflection at zero and Feller–Wentzell boundary conditions.

The general method developed in this paper is also used to study the limit behavior of sequences of solutions of stochastic differential equations with unbounded coefficients, as well as small noise perturbations of stochastic differential equations with non-Lipschitz and degenerate coefficients.

Keywords: local perturbations of Markov processes, diffusions with membranes, skew Brownian motion, skew Bessel process, Feller–Wentzell boundary conditions, small noise perturbations.

List of publications

1. Pilipenko A.Yu., Prykhodko Yu.E. Limit behavior of symmetric random walks with a membrane // Theory of Probability and Mathematical Statistics. — 2012. — No. 85. — P. 93–105.

2. Pilipenko A.Yu., Prykhodko Yu.E. Limit behavior of a simple random walk with non-integrable jump from a barrier // Theor. Stoch. Proc. 19 (35). — 2014. — P. 52–61.

3. Pilipenko A.Yu., Prykhodko Yu.E. On the limit behavior of a sequence of Markov processes perturbed in a neighborhood of the singular point // Ukrainian Mathematical Journal. — 2015. — V. 67, No. 4. — P. 564-583.

4. Pilipenko A.Yu., Prykhodko Yu.E. A limit theorem for singular stochastic differential equations // Modern Stochastics: Theory and Applications. — 2016. — Vol. 3, No. 3. — P. 223–235.

5. Prykhodko Yu.E. Small perturbations of stochastic differential equations with power coefficients (in Urkainian) // Naukovi Visti NTUU KPI. — 2016. — No. 4. — P. 80–84.

6. Prykhodko Yu.E. On the limit behavior of a symmetric random walk with a membrane (in Ukrainian) // Interuniversity Scientific Conference of Young Scientists in Mathematics and Physics (Kyiv, May 21–22, 2009) — Kyiv, 2009.

7. Prykhodko Yu.E. On the limit behavior of a symmetric random walk with a membrane (in Ukrainian) // XIII international scientific Mykhailo Kravchuk conference (Kyiv, May 13–15, 2010) — Kyiv, 2010.

8. Prykhodko Yu.E. On the limit behavior of a scaled random walk with a membrane // International scientific conference «Modern Stochastics: Theory and Applications II» (Kyiv, September 7–11, 2010) — Kyiv, 2010.

9. Prykhodko Yu.E. On the limit behavior of symmetric random walks wi-th skew behavior in a neighborhood of zero (in Ukrainian) // Second Interuniversity Scientific Conference of Young Scientists in Mathematics and Physics (Kyiv, April 28–29, 2011) — Kyiv, 2011.

10. Prykhodko Yu.E. Asymptotic behavior of symmetric random walk with a membrane (in Ukrainian) // All-Ukrainian scientific conference «Modern problems of Probability theory and Mathematical analysis» (Vorokhta, February 20–26, 2012) — Ivano-Frankivsk, 2012.

11. Prykhodko Yu.E. Limit behavior of a symmetric random walk with a membrane (in Ukrainian) // XIV international scientific Mykhailo Kravchuk conference (Kyiv, April 19–21, 2012) — Kyiv, 2012.

12. Prykhodko Yu.E. On the limit behavior of a symmetric random walk with perturbations at the origin // International scientific conference «Modern

Stochastics: Theory and Applications III» (Kyiv, September 10–14, 2012) — Kyiv, 2012.

13. Prykhodko Yu.E. Limit behavior of perturbed random walks with non-integrable perturbation (in Ukrainian) // All-Ukrainian scientific conference «Modern problems of Probability theory and Mathematical analysis» (Vorokhta, February 25 – March 3, 2013) — Ivano-Frankivsk, 2013.

14. Prykhodko Yu.E. Asymptotic behavior of perturbed random walks with nonintegrable perturbation (in Ukrainian) // Third Interuniversity Scientific Conference of Young Scientists in Mathematics and Physics (Kyiv, April 25–27, 2013) — Kyiv, 2013.

15. Prykhodko Yu.E. On the limit behaviour of a symmetric random walk with perturbations at the origin // Ukrainian–German Workshop on Empirical Complete Convergence and other Limit Theorems of Probability Theory (Koktebel, September 23–27, 2013) — Kyiv, 2013.

16. Pilipenko A.Yu., Prykhodko Yu.E. Bessel diffusions and limit theorems for one-dimensional stochastic differential equations // International scientific conference «Probability, Reliability and Stochastic Optimization» (Kyiv, April 7–10, 2015) — Kyiv, 2015.

17. Pilipenko A.Yu., Prykhodko Yu.E. On the limit behavior of a sequence of Markov processes with perturbations in a neighborhood of a singular point International scientific conference «Stochastic Processes in Abstract Spaces» (Kyiv, October 14–16, 2015) — Kyiv, 2015.

18. Prykhodko Yu.E. Small random perturbations of stochastic differential equations with power coefficients // International Workshop on Limit Theorems in Probability Theory, Number Theory and Mathematical Statistics (Kyiv, October 10–11, 2016) — Kyiv, 2016.

Зміст

Перелік умовних позначень

м.н. — майже напевно

н.о.р — незалежні однаково розподілені

в.в. — випадкові величини

$\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел

$\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел

$\mathbb{Z}_+$ — множина невід'ємних цілих чисел

$\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел

$\mathbb{R}_+$ — множина невід'ємних дійсних чисел

$\mathrm{C}([0,1])$ — множина неперервних функцій на $[0,1]$

$\mathrm{D}([0,1])$ — множина càdlàg-функцій на $[0,1]$

càdlàg-функції — неперервні справа функції, що мають границі зліва

W — процес Вінера, або броунівський рух

W_γ — косий броунівський рух

$[x]$ — ціла частина числа x : найбільше ціле число, не більше за x

$-[-x]$ — найменше ціле число, не менше за x

Вступ

Актуальність теми

Функціональні граничні теореми є важливим розділом теорії випадкових процесів, яким займались багато видатних математиків, зокрема M.D. Donsker, А.В. Скороход, І.І. Гіхман, D.W. Stroock, S.R.S. Varadhan, Ю.В. Прохоров та багато інших.

Один з перших класичних результатів такого типу отримав M.D. Donsker. Він узагальнив твердження центральної граничної теореми про збіжність скінченно-вимірних розподілів нормованих симетричних випадкових блукань, встановивши слабку збіжність послідовності таких блукань в просторі неперервних функцій до вінерівського процесу.

Функціональні граничні теореми такого типу називаються принципом інваріантності, оскільки дозволяють обчислювати розподіли функціоналів від граничних процесів як границі від розподілів відповідних блукань.

Важливе узагальнення теореми Донскера зробив А.В. Скороход. Ним була запропонована метрика в просторі неперервних справа функцій, що мають границі зліва. Це дозволило, зокрема, довести узагальнення теореми Донскера на випадок процесів з незалежними приростами.

J.M. Harrison та L.A. Shepp розглядали узагальнення теореми Донскера на випадок локально збурених випадкових блукань, тобто випадкових блукань, перехідні імовірності яких відрізняються від перехідних імовірностей для симетричного випадкового блукання лише в одній точці нуль.

Вони встановили, що послідовність нормованих збурень випадкових блукань слабко збігається до косого броунівського руху. Зауважимо, що стохастичне диференціальне рівняння для косого броунівського руху містить локальний час і є дифузією з узагальненим переносом. Відповідну теорію побудував М.І. Портенко. Він, зокрема, отримав косий броунівський рух як границю броунівського руху із переносом, який в певному сенсі збігається до $\alpha\delta_0$, де δ_0 — це дельта-функція Дірака. При цьому, коефіцієнт при локальному часі відповідного стохастичного диференціального рівняння дорівнює $\operatorname{th}\alpha$ — тобто параметр граничного процесу нелінійним чином залежить від α. Отже, граничні теореми для дифузій з узагальненим переносом є нетривіальними та не вписуються в принцип інваріантності.

Узагальненням результатів Гаррісона та Шеппа про граничну поведінку збурених випадкових блукань займались також Р.А. Мінлос, О.А. Жижина, D. Szász, A. Telcs, А.Ю. Пилипенко, О.М. Іксанов та інші.

Дослідженням стохастичних диференціальних рівнянь з узагальненим переносом та їх властивостей займались J.-F. Le Gall, Б.І. Копитко, Г.Л. Кулініч, H.-J. Engelbert, W. Schmidt, J. Walsh, R.F. Bass, Z.-Q. Chen, K. Bogdan, T. Jakubowski, М.І. Портенко, Б.І. Копитко, Ж.Я. Цаповська, О.В. Арясова та багато інших.

В даній дисертаційній роботі розглядається узагальнення вказаних вище результатів про збурення випадкових блукань на загальні випадки ланцюгів Маркова та дифузій з регулярними коефіцієнтами, які збурюються в певному околі особливої точки.

Інша задача, розглянута в дисертації, полягає в протилежному: а саме, дослідження нерегулярних в певному сенсі процесів за допомогою згладжування коефіцієнтів або додавання малого шуму.

Так, зокрема, R. Baffico і P. Baldi розглядали диференціальне рівняння

$$\begin{aligned} &dX(t) = (a_+\mathbb{1}_{X(t)\geqslant 0} - a_-\mathbb{1}_{X(t)<0})|X(t)|^\alpha dt,\ t \geqslant 0,\\ &X(0) = 0, \end{aligned}$$

де $a_\pm > 0$, $\alpha \in (0,1)$. Коефіцієнт цього рівняння не задовольняє умову Ліпшиця в нулі і воно має неєдиний розв'язок. Baffico та Baldi досліджували граничну поведінку розв'язків таких рівнянь, збурених малим шумом. Зазначимо, що за теоремою Вєрєтєннікова, збурене стохастичне диференціальне рівняння

$$dX_\varepsilon(t) = (a_+\mathbb{1}_{X_\varepsilon(t)\geqslant 0} - a_-\mathbb{1}_{X_\varepsilon(t)<0})|X_\varepsilon(t)|^\alpha dt + \varepsilon dW(t),\ t \geqslant 0,$$

має єдиний сильний розв'язок. Було доведено, що послідовність $\{X_\varepsilon\}$ слабко збігається при $\varepsilon \to 0$ до граничного процесу з розподілом

$$p\,\mathbb{P}_{X_+} + (1-p)\,\mathbb{P}_{X_-},$$

де p залежить від a_+ та a_-, а $\mathbb{P}_{X_+}$ та $\mathbb{P}_{X_-}$ — розподіли додатнього та від'ємного розв'язків незбуреного рівняння, відповідно.

Узагальнення результатів про граничну поведінку звичайних диференціальних рівнянь, збурених малим шумом, розглядалися в роботах А.Ю. Пилипенка, F.N. Proske, F. Delarue, F. Flandoli, D. Vincenzi.

Розроблений в дисертаційній роботі метод дозволив узагальнити відповідні результати про збурення малим шумом на випадок стохастичних диференціальних рівнянь з нерегулярними коефіцієнтами.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами

Дисертаційна робота виконана на кафедрі математичного аналізу та теорії ймовірностей Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» в рамках держбюджетної науково-дослідної роботи № 2810Ф «Дослідження асимптотичних властивостей псевдорегулярних функцій та узагальнення процесів відновлення» (номер державної реєстрації 0115U000371).

Мета і завдання дослідження

Метою дисертаційної роботи є дослідження граничної поведінки для локальних збурень ланцюгів та процесів Маркова.

Об'єктом дослідження є ланцюги та процеси Маркова з іррегулярністю в околі деякої особливої точки. Такими процесами можуть бути, зокрема, послідовності процесів Маркова, які ззовні довільного околу фіксованої “сингулярної” точки поводяться як деякий заданий процес. В околах цієї точки поведінка збуреного процесу може бути іррегулярною.

Предметом дослідження є гранична поведінка ланцюгів та процесів Маркова з локальним збуренням.

В роботі розглядаються наступні *задачі*:

- Дослідити граничну поведінку послідовностей симетричних випадкових блукань з інтегровним локальним збуренням.

- Знайти граничну поведінку симетричного випадкового блукання з відбиваючим бар'єром в точці нуль для випадку неінтегровних стрибків з бар'єру, які належать до області притягання α-стійкого розподілу.

- Встановити граничну поведінку послідовностей розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з необмеженими в околі особливої точки коефіцієнтами.

- Вивчити граничну поведінку послідовностей розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з неліпшицевими та виродженими в околі особливої точки коефіцієнтами, збурених малим випадковим шумом.

Методи дослідження. В роботі використовуються методи теорії випадкових процесів, стохастичних диференціальних рівнянь, стохастичного аналізу, теорії ланцюгів Маркова. Запропоновані в дисертаційній роботі загальні методи доведення дозволяють отримувати функціональні граничні теореми для широкого класу процесів, що мають властивість регенерації.

Наукова новизна отриманих результатів

Усі отримані в роботі результати є новими. Зокрема, в дисертації одержані такі нові наукові результати:

- Розроблено загальний метод дослідження граничної поведінки локально збурених процесів, що мають властивість регенерації, та доведення відповідних функціональних граничних теорем.

- Для послідовностей нормованих симетричних випадкових блукань з інтегровним локальним збуренням доведено слабку збіжність в просторі неперервних функцій. Проведено повну класифікацію можливих граничних процесів в термінах перехідних імовірностей збурення.

- Досліджено граничну поведінку симетричного випадкового блукання з відбиваючим бар'єром в точці нуль. Для випадку неінтегровних стрибків з бар'єру, які належать до області притягання α-стійкого розподілу, встановлено слабку збіжність в просторі Скорохода до броунівського руху з відбиттям в нулі та граничними умовами типу Вентцеля–Феллера.

- Знайдено граничну поведінку послідовностей розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з необмеженими в околі особливої точки коефіцієнтами. Проведено класифікацію можливих граничних процесів в залежності від поведінки розв'язків в околі особливої точки.

- Для послідовностей розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з неліпшицевими та виродженими в околі особливої точки коефіцієнтами розглянуто збурення малим шумом та доведено слабку збіжність в просторі неперервних функцій.

Особистий внесок здобувача

Всі результати дисертаційної роботи отримані автором самостійно під керівництвом наукового керівника, д.ф.-м.н. А.Ю. Пилипенка. У спільних статтях науковому керівнику належить постановка задачі, аналіз здобутих результатів та загальне керівництво роботою.

Апробація результатів

Результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на наукових конференціях:

- Міжуніверситетська наукова конференція з математики та фізики для студентів та молодих вчених, Київ, 21–22 травня 2009;
- Тринадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, Київ, 13–15 травня 2010;
- Міжнародна наукова конференція «Modern Stochastics: Theory and Applications II», Київ, 7–11 вересня 2010;
- Друга міжуніверситетська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, 28–29 квітня 2011;
- Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу», Ворохта, 20–26 лютого 2012;
- Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, Київ, 19–21 квітня 2012;

- Міжнародна наукова конференція «Modern Stochastics: Theory and Applications III», Київ, 10–14 вересня 2012;
- Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу», Ворохта, 25 лютого – 3 березня 2013;
- Третя міжуніверситетська наукова конференція з математики та фізики для студентів та молодих вчених, Київ, 25–27 квітня 2013;
- Ukrainian–German Workshop on Empirical Complete Convergence and other Limit Theorems of Probability Theory, Коктебель, 23–27 вересня 2013;
- Міжнародна наукова конференція «Probability, Reliability and Stochastic Optimization», Київ, 7–10 квітня 2015;
- Міжнародна наукова конференція «Stochastic Processes in Abstract Spaces», Київ, 14–16 жовтня 2015;
- Міжнародна наукова конференція «International Workshop on Limit Theorems in Probability Theory, Number Theory and Mathematical Statistics», Київ, 10–11 жовтня 2016;

та наукових семінарах:

- Науковий семінар «Теорія випадкових процесів» при кафедрі математичного аналізу та теорії ймовірностей НТУУ «КПІ» (керівник: проф. $\boxed{\text{В.В. Булдигін}}$);
- Науковий семінар «Числення Маллявена та його застосування» відділу теорії випадкових процесів Інституту математики НАН України (керівник: проф. А.А. Дороговцев);

- Науковий семінар «Стохастика та її застосування» при кафедрі дослідження операцій факультету кібернетики КНУ ім. Т.Шевченка (керівник: проф. О.М. Іксанов);

- Науковий семінар «Статистичні проблеми для випадкових процесів і полів» при кафедрі математичного аналізу та теорії ймовірностей КПІ ім. Ігоря Сікорського (керівники: проф. О.І. Клесов, проф. О.В. Іванов);

- Науковий семінар дослідницької групи «Stochastic analysis, finance, insurance and risk», University of Oslo, Department of Mathematics.

Публікації

За результатами дисертаційної роботи опубліковано 5 наукових статей у фахових журналах, три з яких індексуються міжнародною наукометричною базою Scopus, та 13 тез доповідей на наукових конференціях, вісім з яких є міжнародними.

Структура та обсяг дисертації

Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, переліку використаних джерел та списку публікації здобувача. Повний обсяг роботи становить 129 стор. Перелік використаних джерел налічує 87 посилань.

Перший розділ дисертації містить огляд літератури за тематикою дисертації.

Другий розділ присвячено описанню загального методу дослідження граничної поведінки послідовності випадкових процесів з іррегулярністю в околі деякої фіксованої точки.

Зокрема, **в § 2.2** розглянуто перетворення "вирізанням часу", яке дозволяє отримати загальний метод дослідження граничної поведінки таких процесів.

А саме, нехай $f \in D([0,\infty))$, і нехай $\sigma = \{\sigma_n\},\ \tau = \{\tau_n\}$ — послідовності дійсних чисел таких, що

$$0 \leqslant \tau_0 \leqslant \sigma_0 < \tau_1 < \sigma_1 < \tau_2 < \ldots, \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n = +\infty,\ \ \lambda(\cup_k[\sigma_k, \tau_{k+1})) = +\infty, \tag{2}$$

де λ — міра Лебега на $\mathbb{R}$.

Покладемо

$$L(t) = L_{\tau,\sigma}(t) := \int_0^t 1\!\!1_{\cup_k[\sigma_k,\tau_{k+1})}(s)ds,$$
$$A(t) = A_{\tau,\sigma}(t) := L^{-1}(t) := \inf\{s \geqslant 0 | L(s) \geqslant t\}.$$

Означення 2.2.1. Будемо казати, що функція

$$f^{\tau,\sigma}(t) := f(A_{\tau,\sigma}(t)),\ t \geqslant 0$$

отримана з функції f вирізаннням часу $\cup_k[\tau_k, \sigma_k)$.

Через $\omega_f(\delta) = \omega_f^T(\delta) := \sup\limits_{\substack{s,t\in[0,T]\\ |s-t|\leqslant\delta}} \rho(f(s), f(t))$ позначимо модуль неперервності функції f на $[0,T]$.

Основний результат § 2.2 полягає в наступному.

Теорема 2.2.3. *Припустимо, що послідовність випадкових процесів* $\{X_n, n\geqslant 1\}$ *для деякого* $T > 0$ *задовольняє умову*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \exists\ n_0\ \forall\ n \geqslant n_0$$

$$\mathrm{P}(\omega_{X_n}^{T+1}(\delta) \geqslant \varepsilon) \leqslant \varepsilon. \tag{3}$$

Припустимо, що для довільного $\alpha \in (0,1)$ знайдуться послідовності випадкових величин

$$\tau^{(n)} = \tau^{(n,\alpha)} = \{\tau_k^{(n,\alpha)}, k \geqslant 0\},\ \sigma^{(n)} = \sigma^{(n,\alpha)} = \{\sigma_k^{(n,\alpha)}, k \geqslant 0\},$$

які задовольняють (1) і (2) для всіх $n \geqslant 1$, та випадковий процес $X^{(\alpha)}$ такий, що

$$\mathrm{P}(T + 1 - L_n^{(\alpha)}(T+1) \geqslant \alpha) \leqslant \alpha,\ n \geqslant n_0(T, \alpha); \tag{4}$$

$$X_n^{(\alpha)} \Rightarrow X^{(\alpha)},\ n \to \infty,\ \text{в } D([0,T]), \tag{5}$$

де

$$L_n^{(\alpha)}(t) = \int_0^t \mathbb{1}_{\cup_k [\sigma_k^{(n,\alpha)}, \tau_{k+1}^{(n,\alpha)})}(s) ds,\ A_n^{(\alpha)}(t) = (L_n^{(\alpha)})^{-1}(t),$$

$X_n^{(\alpha)}(t) = X_n(A_n^{(\alpha)}(t))$ *отримано вирізанням часу з X_n.*

Тоді розподіл послідовності $\{X_n, n \geqslant 1\}$ слабко збігається в $D([0,T])$ при $n \to \infty$. Крім того, розподіли $\{X^{(\alpha)}\}$ слабко збігаються в $D([0,T])$ при $\alpha \to 0+$, а границі для $\{X^{(\alpha)}\}$ та $\{X_n\}$ співпадають за розподілом.

В § 2.3 наведено деякі достатні умови для виконання теореми 2.2.3.

Зокрема, нехай $\{X_n\}_{n \geqslant 1}$ — послідовність неперервних однорідних процесів Маркова в строгому сенсі, $Q_x^{(n)}$ — розподіл X_n за умови $X_n(0) = x$. Припустимо, що існує точка x^*, така що для довільного n процес X_n безліч разів потрапляє в довільну кулю $B(x^*, \varepsilon)$ і безліч разів виходить з довільної кулі $B(x^*, \varepsilon)$ з $Q_x^{(n)}$ імовірністю 1, $x \in E$. Нехай $\alpha > 0$, $\alpha_1 \in (0, \alpha)$. Візьмемо в ролі $\{\tau_k, \sigma_k\}_{k \geqslant 1}$ моменти послідовних входів в кулю $B(x^*, \alpha_1)$ та виходів з кулі $B(x^*, \alpha)$, відповідно. Покладемо $\sigma_0^n := 0$,

$$\begin{aligned} \tau_k^n = \tau_k^{(n,\alpha_1,\alpha)} &:= \inf\{t \geqslant \sigma_{k-1}^{(n,\alpha_1,\alpha)} \colon \rho(X_n(t), x^*) \leqslant \alpha_1\},\ k \geqslant 1, \\ \sigma_k^n = \sigma_k^{(n,\alpha_1,\alpha)} &:= \inf\{t \geqslant \tau_k^{(n,\alpha_1,\alpha)} \colon \rho(X_n(t), x^*) \geqslant \alpha\},\ k \geqslant 1. \end{aligned} \tag{6}$$

Лема 2.3.2. *Припустимо, що $\tilde{P}_0(x, \tilde{A}), x \in E, \tilde{A} \in \mathcal{B}(E)$ та $\bar{P}_0(x, \bar{A})$, $x \in E, \bar{A} \in \mathcal{B}(C_E([0,\infty)) \times [0,\infty))$ — стохастичні ядра, неперервні по x*

(на просторі мір розглядається топологія слабкої збіжності). Припустимо, що початкові розподіли процесів Маркова $X_n(0)$ слабко збігаються до деякої міри μ_0, і для довільного $x\in E$ і довільної послідовності $\{x_n\}$, збіжної до x:

A1. $Q^{(n)}_{x_n}\left(X_n(\sigma^n_1)\in\cdot\right)\Rightarrow\tilde{P}_0(x,\cdot), n\to\infty,$

A2. $Q^{(n)}_{x_n}\Big((X_n(\cdot\wedge\tau^n_1),\tau^n_1)\in\cdot\Big)\Rightarrow\bar{P}_0(x,\cdot), n\to\infty.$

Тоді якщо X_0 — процес Маркова в строгому сенсі, такий що

$$\mu_0 =^d X_0(0),\ Q^{(0)}_x\left((X_0(\cdot\wedge\tau^0_1),\tau^0_1)\in\cdot\right)=\bar{P}_0(x,\cdot), \tag{7}$$

$$Q^{(0)}_x\left(X_0(\sigma^0_1)\in\cdot\right)=\tilde{P}_0(x,\cdot), \tag{8}$$

то має місце збіжність процесів, отриманих вирізанням часу:

$$X_n^{(\tau^n,\sigma^n)}\Rightarrow X_0^{(\tau^0,\sigma^0)},\ n\to\infty.$$

В § 2.4 використовуються достатні умови для отримання загальних результатів для процесів Маркова в строгому сенсі.

Наприклад, нехай $\{\xi^{(n)}, n\geqslant 0\}$ — послідовність неперервних однорідних процесів Маркова в строгому сенсі.

Для $\alpha>0$ покладемо

$$\tau^{n,\alpha}:=\inf\left\{t\geqslant 0\colon |\xi^{(n)}(t)|\leqslant\alpha\right\},\quad \sigma^{n,\alpha}:=\inf\left\{t\geqslant 0\colon |\xi^{(n)}(t)|\geqslant\alpha\right\}.$$

Позначимо через $\xi^{(n)}_{x_0}$ процес, що має розподіл як $\xi^{(n)}$ за умови $\xi^{(n)}(0)=x_0$.

Теорема 2.4.4. *Припустимо, що послідовність $\{\xi^{(n)}, n\geqslant 0\}$ задовольняє наступні умови:*

$$\xi^{(n)}(0)\Rightarrow\xi^{(0)}(0);$$

$$\forall T>0\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \exists n_0\ \forall n\geqslant n_0$$
$$\mathrm{P}\Big(\sup_{\substack{|s-t|<\delta,\\ s,t\in[0,T]}}|\xi^{(n)}(t)-\xi^{(n)}(s)|\geqslant\varepsilon\Big)\leqslant\varepsilon;$$

$$\forall T > 0 \quad \lim_{\varepsilon\to 0+} \sup_n \mathrm{E}\int_0^T \mathbb{1}_{|\xi^{(n)}(t)|\leqslant\varepsilon} dt = 0;$$

$$\int_0^\infty \mathbb{1}_{\xi^{(0)}(t)=0} dt = 0 \quad \text{м.н.}$$

Нехай для довільних $\alpha > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ та довільної послідовності $\{x_n\}$, такої що $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, виконується:

$$\left(\xi^{(n)}_{x_n}(\cdot \wedge \tau^{n,\alpha}), \tau^{n,\alpha}\right) \Rightarrow \left(\xi^{(0)}_{x_0}(\cdot \wedge \tau^{0,\alpha}), \tau^{0,\alpha}\right), \ n \to \infty;$$

$$\xi^{(n)}_{x_n}(\sigma^{n,\alpha}) \Rightarrow \xi^{(0)}_{x_0}(\sigma^{0,\alpha}), \ n \to \infty.$$

Тоді $\xi^{(n)} \Rightarrow \xi^{(0)}$ при $n \to \infty$ в $C([0,\infty))$.

В § 2.5 наведено наслідок з результатів § 2.3 для ланцюгів Маркова.

Нехай $(X_0(t), t \geqslant 0)$ — неперервний процес Маркова в строгому сенсі зі значеннями в $\mathbb{R}^d$, $(X^{(n)}(k), k \geqslant 0)$, $n \geqslant 1$, — ланцюги Маркова на $\mathbb{R}^d$.

Покладемо $X_n(\frac{k}{n}) := \frac{1}{\sqrt{n}} X^{(n)}(k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, і довизначимо процес $X_n(t)$ для всіх $t \geqslant 0$ за лінійністю.

Позначимо $\sigma_0^n := 0$,

$$\begin{aligned} \tau_k^{(n)} = \tau_k^{(n,\alpha_1,\alpha)} &:= \inf\{t \in \tfrac{1}{n}\mathbb{Z}_+, t \geqslant \sigma_{k-1}^{(n,\alpha_1,\alpha)} \colon |X_n(t) - x^*| \leqslant \alpha_1\}, \ k \geqslant 1, \\ \sigma_k^{(n)} = \sigma_k^{(n,\alpha_1,\alpha)} &:= \inf\{t \in \tfrac{1}{n}\mathbb{Z}_+, t \geqslant \tau_k^{(n,\alpha_1,\alpha)} \colon |X_n(t) - x^*| \geqslant \alpha\}, \ k \geqslant 1. \end{aligned} \tag{9}$$

Теорема 2.5.1. *Припустимо, що для довільного $T > 0$ виконується (3), а також для довільного $\alpha > 0$ знайдеться таке $\alpha_1 \in (0, \alpha)$, що для послідовностей $\{(\tau_k^{(n,\alpha_1,\alpha)}, \sigma_k^{(n,\alpha_1,\alpha)}), k \geqslant 1\}$, визначених в (9), виконується:*

1) для довільного $n \geqslant 1$ і довільного початкового розподілу

$$\sum_k (\tau_{k+1}^n - \sigma_k^n) = \infty \quad \text{м.н.};$$

2) для довільного $T > 0$

$$\lim_{\alpha\to 0+} \sup_n \mathrm{E}\int_0^T \mathbb{1}_{\rho(X_n(t), x_0)\leqslant\alpha} dt = 0;$$

3) умови **A1**, **A2** *леми 2.3.2.*

Тоді розподіли $\{X_n\}$ *слабко збігаються при* $n \to \infty$ *в* $C([0,\infty))$. *Якщо додатково виконується* (7), (8) *і*

$$\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{X_0(t)=x^*\}} dt = 0 \text{ м.н.},$$

то $X_n \Rightarrow X_0$ *при* $n \to \infty$ *в* $C([0,\infty))$.

В третьому розділі результати розділу 2 застосовані для випадкових блукань зі збуреннями.

Розглянемо однорідний ланцюг Маркова $(X(k) = X^{(x_0)}(k),\ k \in \mathbb{Z}_+)$ на $\mathbb{Z}$ зі стартом в точці $x_0 \in \mathbb{Z}$ та перехідними імовірностями $p_{i,j}$, такими що для деякого $m \geqslant 0$

$$p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = 1/2 \quad \text{при} \quad |i| > m. \tag{10}$$

Відрізок $[-m, m]$ будемо називати *мембраною*.

Довизначимо процес $(X(t),\ t \geqslant 0)$ для всіх t неперервно як лінійну інтерполяцію $(X(k),\ k \in \mathbb{Z}_+)$ та розглянемо процеси

$$X_n(t) = \tfrac{1}{\sqrt{n}} X^{([x_0\sqrt{n}])}(nt),\ t \geqslant 0,\ n \in \mathbb{N}, \tag{11}$$

зі стартом в точці $[x_0\sqrt{n}]/\sqrt{n}$.

Означення 3.1.1. Послідовність $\{X_n\}$ з (11) будемо називати послідовністю випадкових блукань, збурених в околі нуля.

В § 3.2 досліджено граничну поведінку таких блукань в двох випадках: коли стрибки з мембрани $[-m, m]$ інтегровні та неінтегровні.

Основним результатом § 3.2.1 є наступна теорема, яка описує всі можливі граничні процеси для випадку інтегровних стрибків.

Позначимо через P_{x,W_γ} розподіл косого броунового руху $W_\gamma(\cdot)$ з параметром проникності $\gamma \in [-1, 1]$ та початком в точці x, та $P_{x,0}$ — розподіл броунового руху з початком в точці x та залипанням в нулі.

Покладемо $\tau = \inf\{k \geqslant 0 \colon |X(k)| > m\}$ — момент виходу ланцюга Маркова $X(k)$ з мембрани $[-m, m]$ та позначимо через $\xi^{(\pm)}$ випадкові величини, розподіл яких співпадає з умовним розподілом величини

$$X(\tau) - m \operatorname{sign} X(\tau)$$

за умови $X(0) = \pm m$; величина $\xi^{(\pm)}$ — це відстань до мембрани в момент τ при старті з $+m$ чи $-m$ відповідно.

Теорема 3.2.1. *Нехай стрибки з мембрани $[-m, m]$ інтегровні, тобто*

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |j|\, p_{i,j} < \infty \quad \textit{при } |i| \leqslant m.$$

Тоді для довільного x_0 послідовність $\{X_n\}$ при $n \to \infty$ слабко збігається в $\mathrm{C}([0,1])$ *до деякого процесу X_∞.*

Зокрема:

A. *Якщо принаймні один зі станів $-m-1$ та $m+1$ ланцюга $X(\cdot)$*

1) є істотним та

2) досягається з імовірністю 1,

то граничний процес X_∞ є косим броуновим рухом W_γ з параметром

$$\gamma = \frac{\mathrm{E}\xi^{(+)}\,\mathrm{P}(\xi^{(-)} > 0) + \mathrm{E}\xi^{(-)}\,\mathrm{P}(\xi^{(+)} < 0)}{\mathrm{E}|\xi^{(+)}|\mathrm{P}(\xi^{(-)} > 0) + \mathrm{E}|\xi^{(-)}|\mathrm{P}(\xi^{(+)} < 0)}. \tag{12}$$

При цьому $\mathrm{P}(\tau < \infty \ / \ X(0) = x_0) = 1$ *та*

$$\mathrm{P}(\xi^{(-)} > 0) \vee \mathrm{P}(\xi^{(+)} < 0) > 0.$$

Якщо умови 1) і 2) одночасно виконуються тільки для одного зі станів $-m-1$ або $m+1$, то γ дорівнює знаку цього стану.

Б. *Нехай* $x_0 > 0$, *а стан* $-m-1$ *є істотним та досягається ланцюгом* $X(\cdot)$ *з імовірністю* q, $0 < q < 1$. *Тоді* $\mathrm{P}(\tau < \infty) = 1$ *і*

$$\mathrm{P}(\xi^{(+)} < 0) > 0.$$

В цьому випадку розподіл граничного процесу X_∞ *дорівнює*

$$qP_{x_0,W_{-1}} + (1-q)P_{x_0,0}.$$

Аналогічне твердження виконується для $x_0 < 0$ *та стану* $m+1$.

В. *Нехай* $x_0 = 0$, *а стани* $-m-1$ *та* $m+1$ *досягаються ланцюгом* $X(\cdot)$ *з імовірностями* q *та* p *відповідно* $(q, p \geqslant 0)$ *та є істотними*[1].

Якщо ці стани між собою не сполучаються, то

$$\mathrm{P}(\xi^{(-)} > 0) = \mathrm{P}(\xi^{(+)} < 0) = 0$$

і розподіл граничного процесу X_∞ *дорівнює*

$$qP_{0,W_{-1}} + pP_{0,W_{+1}} + (1-q-p)P_{0,0}.$$

Якщо стани $-m-1$ *та* $m+1$ *сполучаються, то* $q = p$ *і розподіл граничного процесу* X_∞ *дорівнює*

$$pP_{0,W_\gamma} + (1-p)P_{0,0},$$

де γ *визначається аналогічно до пункту* ***А***.

Г. *Якщо будь-який (досяжний) зі станів* $-m-1$ *та* $m+1$ *є неістотним, то розподіл процесу* X_∞ *дорівнює* $P_{x_0,0}$, *тобто граничний процес* X_∞ *є броуновим рухом з залипанням в нулі.*

[1] Якщо якийсь стан є недосяжним, то його істотність чи неістотність для результату неважлива. Тому для простоти формулювання всі недосяжні стани в пункті **В** ми будемо вважати істотними, а в пункті **Г** — неістотними.

Якщо стрибки з мембрани не є інтегровними, то граничний процес може бути розривним.

Так, **в § 3.2.2** розглядається випадок, коли стрибки з мембрани належать до області притягання α-стійкого розподілу.

А саме, нехай перехідні імовірності ланцюга X дорівнюють

$$p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = 1/2 \quad \text{при} \quad |i| > 0$$

та

$$p_{0,j} = \mathrm{P}(\xi = j),\ j \in \mathbb{Z},$$

де ξ — додатня цілозначна випадкова величина, яка належить до області притягання невід'ємного α-стійкого розподілу з $\alpha \in (0, 1)$.

Теорема 3.2.12. *Для довільного $T > 0$ послідовність процесів $\{X_n\}$ слабко збігається в $\mathrm{D}([0, 1])$ до процесу вигляду*

$$X_\infty(t) = W(t) + U_\alpha\big(U_\alpha^{(-1)}(M(t))\big),\ t \geqslant 0,$$

де $(W(t))$ — вінерів процес,

$$M(t) = -\min_{s\in[0,t]}(W(s) \wedge 0),\ t \geqslant 0,$$

$(U_\alpha(t))$ — невід'ємний α-стійкий процес,

$$U_\alpha^{(-1)}(t) = \inf\{s \geqslant 0 \colon U_\alpha(s) \geqslant t\},\ t \geqslant 0,$$

і процеси $(W(t))$ та $(U_\alpha(t))$ незалежні.

В § 3.3 та **§ 3.4** доводяться теореми 3.2.1 та 3.2.12, відповідно.

В четвертому розділі розглядається питання дослідження граничної поведінки послідовності розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь

$$dX_n(t) = a_n(X_n(t))dt + \sigma_n(X_n(t))dW(t),\ t \geqslant 0,$$

коефіцієнти яких збігаються до функцій, що мають особливість в нулі.

Особливість може полягати, наприклад, в необмеженості або неліпшицевості коефіцієнтів.

Зокрема, **в § 4.1** розглядається випадок, коли коефіцієнт переносу є необмеженою в околі нуля функцією.

А саме, нехай $\{X(nt)/\sqrt{n}\}$ — це розв'язок стохастичного диференціального рівняння

$$dX_n(t) = a_n(X_n(t))dt + dW(t),\ t \geqslant 0,$$

де $a_n(x) = na(nx)$.

Припустимо, що

$$a(x) = \widetilde{a}(x) + \frac{\bar{c}(x)}{x},\ x \in \mathbb{R},$$

де $\widetilde{a} \in L_1(\mathbb{R})$ та

$$\bar{c}(x) = c_+ \cdot \mathbb{1}_{x>1} + c_- \cdot \mathbb{1}_{x<-1},\ x \in \mathbb{R}.$$

Нехай $B_c^+(x_0, t)$ — це невід'ємний процес Бесселя при $x_0 \geqslant 0$. Покладемо $B_c^-(x_0, t) = -B_c^+(|x_0|, t)$ при $x_0 \leqslant 0$.

Позначимо через $p_t^c(x, y)$ перехідну щільність процесу Бесселя.

Нехай $c \in (-1/2, 1/2)$, позначимо через $p_t^{0,c}(x, y)$ перехідну щільність процесу Бесселя з вмиранням в 0.

Покладемо

$$p_t^{skew}(x, y) = p_t^{0,c}(|x|, |y|) \cdot \mathbb{1}_{xy>0} + \\ + \tfrac{1+\gamma \operatorname{sign} y}{2}\big(p_t^c(|x|, |y|) - p_t^{0,c}(|x|, |y|)\big),\ x, y \in \mathbb{R}.$$

Означення 4.1.2. Однорідний процес Маркова з перехідною щільністю p_t^{skew} називається *косим процесом Бесселя* $B_{c,\gamma}^{skew}$ з параметрами c та γ, $\gamma \in [-1, 1]$.

Основним результатом § 4.1 є наступне твердження.

Теорема 4.1.6. *Якщо c_+ та $c_- > -1/2$, то послідовність процесів $\{X_n\}$ слабко збігається до граничного процесу X_∞. Зокрема:*

A1. Якщо

(a) $x_0 > 0$ та $c_+ \geqslant 1/2$, або

(b) $x_0 \geqslant 0$ та $c_- < c_+ < 1/2$, або

(c) $x_0 = 0$ та $c_- < 1/2 \leqslant c_+$,

то

$$X_\infty(t) = B^+_{c_+}(x_0, t),\ t \geqslant 0.$$

A2. Аналогічно, якщо

(a) $x_0 < 0$ та $c_- \geqslant 1/2$, або

(b) $x_0 \leqslant 0$ та $c_+ < c_- < 1/2$, або

(c) $x_0 = 0$ та $c_+ < 1/2 \leqslant c_-$,

то

$$X_\infty(t) = B^-_{c_-}(x_0, t),\ t \geqslant 0.$$

A3. Якщо $x_0 < 0$, $c_- < 1/2$ та $c_- < c_+$, то граничний процес поводиться як $B^-_{c_-}$ до моменту потрапляння в 0, а далі поводиться як $B^+_{c_+}$ тобто

$$X_\infty(t) = B^-_{c_-}(x_0, t) \cdot 1\!\!1_{t \leqslant \tau} + B^+_{c_+}(0, t - \tau) \cdot 1\!\!1_{t > \tau},\ t \geqslant 0,$$

де $\tau = \inf\{t \geqslant 0 \colon X_\infty(t) \geqslant 0\} = \inf\{t \geqslant 0 \colon B^-_{c_-}(x_0, t) \geqslant 0\}$ та $B^\pm_{c_\pm}$ — незалежні (додатній та від'ємний) процеси Бесселя.

A4. Аналогічно, якщо $x_0 > 0$, $c_+ < 1/2$ та $c_+ < c_-$, то

$$X_\infty(t) = B^+_{c_+}(x_0, t) \cdot 1\!\!1_{t \leqslant \tau} + B^-_{c_-}(0, t - \tau) \cdot 1\!\!1_{t > \tau},\ t \geqslant 0,$$

де $\tau = \inf\{t \geqslant 0 \colon X_\infty(t) \leqslant 0\}$.

A5. Якщо $c_+ = c_- =: c < 1/2$, то для довільного x_0

$$X_\infty(t) = B^{skew}_{c,\gamma}(x_0, t),\ t \geqslant 0,$$

де $\gamma = \operatorname{th}(\int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{a}(z)dz) = \frac{1-\exp\{-2\int_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{a}(z)dz\}}{1+\exp\{-2\int_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{a}(z)dz\}}$.

A6. Нарешті, якщо $x_0 = 0$, $c_+ \geqslant 1/2$ та $c_- \geqslant 1/2$, то розподіл граничного процесу X_∞ дорівнює

$$p \cdot \mathbb{P}_{B^+_{c_+}} + (1-p) \cdot \mathbb{P}_{B^-_{c_-}},$$

де

$$p = \frac{\int_0^\infty A(-y)(y \vee 1)^{-2c_-} dy}{\int_0^\infty (A(-y)(y \vee 1)^{-2c_-} + A(y)(y \vee 1)^{-2c_+})\, dy}, \tag{13}$$

$A(y) = \exp\{-2\int_0^y \widetilde{a}(z)dz\}$, *а* $\mathbb{P}_{B^\pm_{c_\pm}}$ *— це розподіли додатнього та від'ємного процесів Бесселя* $B^\pm_{c_\pm}(0,\cdot)$ *зі стартом в* 0.

В **§ 4.2** розглядається аналогічна задача для випадку неліпшицевих та вироджених коефіцієнтів.

А саме, розглянемо стохастичне диференціальне рівняння

$$dX(t) = a(X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t),\ t \geqslant 0, \tag{14}$$
$$X(0) = 0,$$

де $W(\cdot)$ — вінерів процес,

$$\begin{aligned} a(x) &= a_\pm |x|^\alpha \operatorname{sign} x = a_+|x|^\alpha \mathbb{1}_{x\geqslant 0} - a_-|x|^\alpha \mathbb{1}_{x<0}, \\ \sigma(x) &= b_\pm |x|^\beta = b_+|x|^\beta \mathbb{1}_{x\geqslant 0} + b_-|x|^\beta \mathbb{1}_{x<0}, \end{aligned} \tag{15}$$

де $a_\pm > 0,\ b_\pm \geqslant 0,\ \alpha, \beta > 0$.

Якщо $\alpha < 1$, то коефіцієнт переносу не задовольняє умову Ліпшиця в точці 0. Відомо, що якщо

$$\alpha < 1 \text{ та } \alpha - 2\beta + 1 < 0, \tag{16}$$

то існують слабкі розв'язки рівняння (14), але не виконується умова єдиності розв'язку. При цьому, існують єдині розв'язки X_+ та X_- рівняння (14), такі що $X_\pm(0) = 0$ та

$$\begin{aligned} &X_+(t) > 0 \text{ при } t > 0 \text{ м.н.}, \\ &X_-(t) < 0 \text{ при } t > 0 \text{ м.н.} \end{aligned} \tag{17}$$

Нехай $\varepsilon > 0$. Розглянемо наступне збурення рівняння (14) :

$$dX_\varepsilon(t) = a(X_\varepsilon(t))dt + (\varepsilon + \sigma(X_\varepsilon(t)))dW(t),\ t \geqslant 0, \tag{18}$$

де $a(\cdot)$ та $\sigma(\cdot)$ задані в (15).

Зауважимо, що для довільного $\varepsilon > 0$ розв'язок рівняння (18) існує та єдиний. Основним результатом § 4.2 є наступна теорема.

Теорема 4.2.1. *Припустимо, що виконується умова* (16).

Тоді $\{X_\varepsilon\}$ *слабко збігається в* $\mathrm{C}([0,1])$ *при* $\varepsilon \to 0$ *до граничного процесу* X_∞ *з розподілом*

$$p\,\mathbb{P}_{X_+} + (1-p)\,\mathbb{P}_{X_-},$$

де

$$p = \frac{(a_+)^{1/(\alpha+1)}}{(a_+)^{1/(\alpha+1)} + (a_-)^{1/(\alpha+1)}},$$

$\mathbb{P}_{X_+}$ *та* $\mathbb{P}_{X_-}$ *— розподіли розв'язків* X_+ *та* X_-, *що задовольняють* (17).

Автор висловлює величезну подяку своєму науковому керівнику Андрію Юрійовичу Пилипенку за постановку розглянутих у дисертаційній роботі задач, підтримку в процесі виконання роботи, цінні поради та постійну увагу і допомогу.

Розділ 1

Огляд літератури за темою дисертації

Дисертаційна робота присвячена дослідженню функціональних граничних теорем для випадкових процесів зі збуренням.

Один з перших таких результатів отримав M.D. Donsker [15, 16].

Він узагальнив твердження центральної граничної теореми про збіжність скінченно-вимірних розподілів нормованих випадкових блукань на слабку збіжність в просторі неперервних функцій.

А саме, нехай $\{\xi_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ — послідовність н.о.р. в.в. з $\mathrm{E}\xi_1 = 0$ та $D\xi_1 = \sigma^2 < \infty$.

Покладемо

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k,\ n \in \mathbb{N}.$$

$$S_n(t) = \tfrac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left(S([nt]) + (t - [t])\xi_{[nt]+1} \right),\ t \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}.$$

Теорема Донскера стверджує, що послідовність процесів $\{S_n\}$ при $n \to \infty$ слабко збігається в просторі неперервних функцій $\mathrm{C}([0,1])$ до вінерового процесу $W(t)$ з дисперсією $DW(t) = \sigma^2 t$, .

Важливим узагальненням теореми Донскера на випадок процесів з незалежними приростами зробив А.В. Скороход [61,85]. Відомо, що негаусові процеси з незалежними приростами не мають неперервних траєкторій. Тому в просторі неперервних функцій таке узагальнення отримати неможливо. В роботах А.В. Скорохода була запропонована метрика в просторі $\mathrm{D}([0,1])$ неперервних справа функцій, що мають границі зліва. Це дозволило довести узагальнення теореми Донскера для процесів з незалежними приростами.

Природним узагальненням зазначених результатів Донскера та Скорохода є доведення збіжності нормованих послідовностей ланцюгів Маркова до розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь.

J.M. Harrison та L.A. Shepp [25] розглядали узагальнення теореми Донскера на випадок локально збурених випадкових блукань, тобто випадкових блукань, перехідні імовірності яких відрізняються від перехідних імовірностей для симетричного випадкового блукання лише в одній точці нуль.

А саме, нехай $(X(k),\ k \in \mathbb{Z}_+)$ це однорідний ланцюг Маркова на $\mathbb{Z}$ з перехідними імовірностями

$$p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = 1/2 \quad \text{при} \quad i \neq 0,$$

$$p_{0,1} = p \quad \text{та} \quad p_{0,-1} = q = 1-p.$$

Вони встановили наступну теорему.

Теорема (Harrison, Shepp [25]). *Послідовність* $(X_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} X([nt]), t \geqslant 0)$ *слабко збігається при* $n \to \infty$ *до косого броунового руху* W_γ *з параметром* $\gamma = p-q$.

Нагадаємо, що косим броунівським рухом з параметром $\gamma \in [-1,1]$ називається неперервний процес Маркова W_γ з перехідною густиною

$$p_t^{(\gamma)}(x,y) = p_t(x,y) = \varphi_t(x-y) + \gamma \operatorname{sign}(y)\, \varphi_t(|x|+|y|),\ \ x,y \in \mathbb{R},$$

де φ_t — густина нормального розподілу $N(0,t)$.

Зауважимо, що функція $p_t^{(\gamma)}(x,y)$ не є щільністю, якщо $|\gamma|>1$. Якщо $\gamma=0$, то процес W_γ є звичайним броунівським рухом. При $W_\gamma(0)\geqslant 0$ та $\gamma=1$ процес W_γ є броунівським рухом з відбиттям в нулі в додадню півпряму $[0,\infty)$; відповідно, якщо $W_{-1}(0)\leqslant 0$, то W_{-1} є броунівським рухом з відбиттям в нулі у від'ємну півпряму $(-\infty,0]$.

Можна довести, див. [25], що косий броунівський рух $X(t)=W_\gamma(t)$ є розв'язком СДР

$$dX(t)=dW(t)+\gamma dl_0^X(t),$$

де W — деякий вінерів процес, а $l_0^X(\cdot)$ це локальний час невідомого процесу X в нулі,

$$l_0^X(t)=\lim_{\varepsilon\to 0+}(2\varepsilon)^{-1}\int_0^t \mathbb{1}_{|X(s)|\leqslant\varepsilon}ds.$$

Більш того, останнє СДР має єдиний сильний розв'язок при $|\gamma|\leqslant 1$ та не має слабких розв'язків при $|\gamma|>1$.

Послідовність $(2\varepsilon)^{-1}\mathbb{1}_{|x|\leqslant\varepsilon}$ збігається в сенсі узагальнених функцій до дельта функції Дірака δ_0, зосередженої в нулі. Тому локальний час іноді формально позначають як

$$l_0^X(t)=\int_0^t \delta_0(X(s))ds.$$

Отже, збурення випадкового блукання в одній точці приводить в границі до дифузії, перенос якої в певному сенсі є узагальненою функцією.

Відповідна теорія дифузійних процесів з узагальненим переносом була розроблена М.І. Портенком. Він, зокрема, отримав косий броунівський рух як границю броунівського руху із переносом, який в певному сенсі збігається до міри, зосеедженій в нулі. В роботі [57] розглядалась полідовність стохастичних диференціальних рівнянь

$$dX_n(t)=na(nX_n(t))dt+dW(t),$$

з $a \in C_0^1(\mathbb{R})$.

В цьому випадку перенос $a_n(x) = na(nx)$ збігається в узагальненому сенсі до $\alpha\delta_0$, де δ_0 це узагальнена дельта-функція Дірака, $\alpha = \int_{\mathbb{R}} a(x)dx$. Було доведено, що $X_n \Rightarrow W_\gamma$, $n \to \infty$, де $\gamma = \mathrm{th}(\alpha) = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{e^\alpha + e^{-\alpha}}$.

Відмітимо, що параметр γ граничного процесу нелінійним чином залежить від α. Таким чином, узагальнений перенос $\gamma\delta_0$ не співпадає з границею a_n при $n \to \infty$, яка дорівнює $\alpha\delta_0$. Отже, граничні теореми для дифузій з узагальненим переносом є нетривіальними і вони не вкладаються в теореми типу принципа інваріантності Донскера.

Дослідженням стохастичних диференціальних рівнянь з узагальненим переносом та їх властивостей займались Le Gall, Портенко, Копитко, Engelbert, Schmidt, Bass, Chen, Bogdan, Jakubowski, Кулініч, Махно, Арясова, та багато інших [1–3, 7, 11, 17, 32, 33, 37, 41, 42, 46, 77, 78, 81, 82].

Як правило, дослідження граничної поведінки збурень випадкових блукань з нульовим середнім і скінченим другим моментом є нетривіальною задачею, навіть якщо стрибок незбуреного випадкового блукання є обмеженою випадковою величиною. Однією з причин є наступна. Навіть в найпростішому випадку, який розглядали Harrison та Shepp, рівняння для граничного процесу містить локальний час, який не є неперервною функцією від траєкторії граничного процесу. Крім того, їх міркування використовували явні формули для ймовірностей переходу збуреного блукання. Таких формул немає для більш складних ситуацій.

Р.А. Мінлосом та О.А. Жижиною [48] було використано півгруповий підхід до дослідження граничної поведінки збурень простого випадкового блукання. За умови, що воно збурюється в скінченній кількості точок та стрибки збуреного блукання обмежені, було доведено, що природнє нормування збурених блукань збігається до косого броунівського руху. Відповідне доведення було дуже складним технічно, оскільки генератори відповідних півгруп мають, взагалі кажучи, різні ядра. Крім того, параметр γ граничного процесу W_γ не мав ймовірнісної інтерпретації. Підхід роботи [48] було розповсюджено Д.А. Яроцьким [72] на випадкові блукання в просторі зі збуренням на гіперплощині. Граничним процесом є багатовимірний аналог косого броунівського руху з мембраною на гіперплощині.

В роботі Iksanov, Pilipenko [27] було застосовано ймовірнісні методи для розв'язку задачі про збурення. Було доведено, що якщо стрибки незбуреного блукання обмежені, а збурення — інтегровні, то граничним процесом також є косий броунівський рух.

В роботах Szász, Telcs, Nandori [50, 65] розгядались функціональні граничні теореми для багатовимірних випадкових блукань із нульовим середнім і скінченим другим моментом зі збуреннями в деякій множині A, що складається зі скінченної кількості точок. Виявилось, що якщо всі стани збуреного блукання істотні і який-небудь додатний момент збурення є скінченим, то границя для природнього нормування таких блукань збігається з границею незбурених блукань і є броунівським рухом. У випадку розмірності $d \geqslant 3$ це легко можна пояснити тим, що випадкове блукання є нерекурентним і відвідує множину A скінчену кількість разів з ймовірністю 1. Отже після нормування часової та просторової координати вплив збурення зникає. У випадку $d = 2$ збурена і незбурена послідовності будувались на одному просторі та порівнювались. Для цього знаходились оцінки зверху для кількості відвідань множини A та вплив стрибків з A.

Локальні збурення вінерівського процесу, які приводять до косого броунівського руху розглядали також Махно, Крикун, Зайцева [34, 35, 73]. В їх роботах перенос збуреного процесу збігався в узагальненому сенсі до міри $\alpha\delta_0$, зосередженої в нулі. Звичайно, як і в результатах М.І. Портенка, параметр γ граничного процесу залежав нелінійним чином від α.

В дисертаційній роботі розроблено загальний метод дослідження граничної поведінки локальних збурень ланцюгів чи процесів Маркова. Цей метод ефективно був використаний в більш загальних моделях. Наприклад, в статті Mandrekar, Pilipenko [47] розглядалась послідовність вінерівських процесів з переносами $a_\varepsilon(x)$, де $\operatorname{sign} x a_\varepsilon(x) \geqslant 0$ та носій a_ε міститься в $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Якщо $a_\varepsilon(x)$ збіжне до міри, то границя, звичайно, буде косим броунівський рухом. Якщо зростання $\operatorname{sign} x a_\varepsilon(x)$ при $\varepsilon \to 0+$ "набагато більше ніж дельта-функція", то точка 0 не буде точкою проникнення та граничним процесом буде броунівський рух із відбиттям в нулі. Проте, за певної умови балансу, граничним процесом може бути броунівський рух з "тугою мембраною в нулі". Він поводиться як броунівський рух із відбиттям в нулі доки локальний час в нулі не досягне певного експоненційного рівня. Потім "проникає" у іншу піввісь і поводить себе як броунівський рух із відбиттям в інший бік доки локальний час в нулі знов не досягне (іншого) експоненційного рівня, "проникає" у іншу піввісь і так далі. Такий самий процес одержав Lejay [44] з використанням резольвентної техніки. Слід відмітити, що граничні теореми, одержані з використанням резольвентної техніки, використовували лише певні частинні випадки збурень, в той час як техніка розроблена в дисертаційній роботі легко дозволяє розглядати довільний результат. Броунівський рух з тугою мембраною було також одержано в роботі Szász [49] як граничний процес для газу Лоренца в трубці з перегородкою, яка містить тонкі дірки.

Слід також відмітити результати О.М. Кулика [36], який розглядав дифузії на графах змінної конфігурації. Ним було встановлено граничні теореми для таких процесів, коли декілька вершин можуть "стягуватись" в одну. Для знаходження параметрів граничного процесу типу Уолша виявилось ефективним застосування резольвентної техніки.

Відмітимо, що якщо границя для локально збуренного нормованого центрованого випадкового букання зі скінченою дисперсією існує і є процесом Маркова в строгому сенсі, то ця границя має поводитись як вінеровський процес скрізь, крім, можливо, моментів виходу з нуля. Отже, теоретично, такі граничні процеси можна розглядати з точки зору теореми Іто про синтез [28]. З точки зору параболічних рівнянь, такі процеси мають задовольняти певні умови спряження в нулі, див. Langer, Shenk [40]. Не дивлячись на те, що теоретичне описання всіх можливих типів "виходу з нуля" для вінерового процесу відомі з кострукції Іто, ще не існує всеохоплюючої теорії граничних теорем, що дозволяє одержувати такі процеси як границі збурених випадкових блукань. Деякі результати за допомогою теорії екскурсій, див. наприклад, Blumental, Getoor, Lambert, Simatos, Yano [9, 10, 39, 71]. Властивості відповідних півгруп див. Копитко, Шевчук [33].

На відміну від випадку двосторонньої сингулярної точки, теорія дифузійних процесів на півпрямій (чи, взагалі кажучи, дифузій в області) розвинена набагато краще, де 0 (чи границя області) є в певному сенсі відбиваючою в $(0, \infty)$ точкою (чи відбиваючою в середину області множиною). Всі можливі граничні умови для відповідних півгруп теплопровідності були одержані Вентцелем та Феллером [19, 21, 22, 69, 70]. Побудовою та дослідженням дифузій із відбиттям з різних боків займались Ikeda, Watanabe, Stroock, Varadhan, Анулова, Grigelionis, та багато інших математиків [23, 26, 62–64, 68, 74].

А.В. Скороход [85] дав інтерпретацію граничної умови Неймана з точки зору стохастичних диференціальних рівнянь. Він розглянув невипадкове рівняння відносно пари невідомих неперервних функцій (X, L)

$$X(t) = w(t) + L(t),\ t \geqslant 0, \tag{1.1}$$

де $X(t) \geqslant 0$, функція L неперервна та неспадна, $L(0) = 0$, і

$$\int_0^t \mathbb{1}_{X_\infty(s)=0} dL(s) = L(t),\ t \geqslant 0,$$

та встановив існування та єдиність його розв'язку. Потім аналогічна конструкція була застосована для стохастичних рівнянь в області з відбиваючою межею.

Задачею Скорохода про відбиття та її узагальненнями займались Tanaka, Lions, Sznitman, Ramanan, Пилипенко, та інші [45, 52, 58, 60, 66].

Зокрема, в роботі [52] розглядається наступне узагальнення задачі Скорохода, а саме рівняння

$$X(t) = w(t) + f(L(t)),\ t \geqslant 0, \tag{1.2}$$

де (X, L) — пара невідомих функцій, функція L неперервна та неспадна, $L(0) = 0$, і

$$\int_0^t \mathbb{1}_{X_\infty(s)=0} dL(s) = L(t),\ t \geqslant 0.$$

Теорема (Пилипенко [52])**.** *Існує единий розв'язок задачі* (1.2)*, при цьому*

$$L(t) = f^{(-1)}(-\min_{s\in[0,t]}(w(s) \wedge 0)),\ t \geqslant 0,$$

тобто

$$X(t) = w(t) + f(f^{(-1)}(-\min_{s\in[0,t]}(w(s) \wedge 0))),\ t \geqslant 0,$$

де $f^{(-1)}(t) = \inf\{s \geqslant 0\colon f(s) \geqslant t\}$.

Остання теорема використовується в дисертаційній роботі при дослідженні локальних неінтегровних збурень випадкових блукань.

Випадкові процеси, що розглядались вище, були однозначно визначені, не дивлячись на те, що перенос міг бути узагальненою функцією, як у випадку косого броунівського руху. Труднощі в доведенні граничних теорем полягали в тому, що сингулярні члени відповідних дифузій є розривними функціями від траєкторій процесів.

Розглянемо проблему, споріднену з наведеними вище задачами, яка в певному сенсі є "протилежною". А саме, припустимо, що вихідне стохастичне диференціальне рівняння має коефіцієнти, які не задовольняють теорему про єдиність розв'язку, і спробуємо знайти граничну поведінку розв'язків рівнянь із гладкими коефіцієнтами, які збігаються до вихідних.

Наприклад, коефіцієнти вихідного рівняння можуть бути неліпшицевими, чи, взагалі, необмеженими тощо. Так, в роботах Кулініча та ін. [37, 77] розглядались граничні теореми для послідовності стохастичних диференціальних рівняннь

$$dX_n(t) = a_n(X_n(t))dt + dW(t),\ t \geqslant 0,$$

де $a_n(x) = na(nx)$, а функція a така, що

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\int_0^x |va(v) - c_\pm|dv = 0, \quad |xa(x)| \leqslant C, \tag{1.3}$$

де $c_\pm > -1/2$ це деякі константи.

В цьому випадку, $a_n(x)$ при $n \to \infty$ збігається в деякому сенсі до $c_- 1\!\!1_{x<0} + c_+ 1\!\!1_{x\geqslant 0}$.

Відповідне граничне стохастичне рівняння формально відповідає процесу Бесселя. Точка нуль для нього буде двосторонньою точкою виходу (див. Cherny, Engelbert [12] для більш детальної класифікації). Таким чином, ми маємо неєдиність розв'язку для формального граничного рівняння.

Було доведено, що якщо $a(x) = c_\pm/x$ при $\pm x > x_0$, то при $c_- < 1/2 < c_+$ послідовність $\{X_n\}$ слабко збігається до процесу Бесселя. Якщо $c_- = c_+ > -1/2$, то $|X_n|$ також збігається до процесу Бесселя. Питання слабкої збіжності самої послідовності X_n у випадках, наприклад, $c_- = c_+ > -1/2$ або $c_- < c_+ \leqslant 1/2$ залишалися відкритими.

Загальна техніка, розроблена в дисертаційній роботі, дозволяє розв'язати відповідну задачу, навіть в більшій загальності. При певних умовах на коефіцієнти, однією з можливих границь може бути, наприклад, косий бесселів процес. Відповідне означення та властивості див. в [56] або в параграфі 4.1.1 дисертації.

Інший цікавий підхід для дослідженя звичайних диференціальних рівнянь з неліпшицевими коефіцієнтами розглядали R. Baffico і P. Baldi [4, 5]. Вони, зокрема, розглянули збуреня диференціального рівняння

$$\begin{aligned} &dX(t) = (a_+ \mathbb{1}_{X(t)\geqslant 0} - a_- \mathbb{1}_{X(t)<0})|X(t)|^\alpha dt, \ t \geqslant 0, \\ &X(0) = 0, \end{aligned} \tag{1.4}$$

де $a_\pm > 0, \alpha \in (0, 1)$, стохастичними диференціальними рівняннями з малим шумом

$$\begin{aligned} &dX_\varepsilon(t) = (a_+ \mathbb{1}_{X_\varepsilon(t)\geqslant 0} - a_- \mathbb{1}_{X_\varepsilon(t)<0})|X_\varepsilon(t)|^\alpha dt + \varepsilon dW(t), \ t \geqslant 0, \\ &X_\varepsilon(0) = 0, \end{aligned} \tag{1.5}$$

де $W(\cdot)$ — вінерів процес. Рівняння (1.4) має неєдиний розв'язок. Проте, його збурення малим шумом (1.5) має єдиний сильний розв'язок за теоремою Вєрєтєннікова.

Baffico та Baldi довели, що послідовність $\{X_\varepsilon\}$ при $\varepsilon \to 0$ слабко збігається до граничного процесу з розподілом

$$p\,\delta_{X_+} + (1-p)\,\delta_{X_-},$$

де

$$p = \frac{(a_+)^{1/(\alpha+1)}}{(a_+)^{1/(\alpha+1)} + (a_-)^{1/(\alpha+1)}},$$

а δ_{X_+} та δ_{X_-} — міри маси 1, зосереджені на детермінованих функціях $X_\pm$ — додатному та від'ємному розв'язках незбуреного рівняння, відповідно. Отже, p та $1-p$ в певному сенсі є природними ймовірностями вибору екстремальних розв'язків X_+ та X_-. Збурення малим шумом диференціальних рівнянь з неєдиним розв'язком з різних боків розглядали Delarue, Flandoli, Vincenzi, Pilipenko, Proske, та інші [13, 14, 53, 54].

Представлений в дисертаційній роботі загальний метод доведення дозволив узагальнити результат Baffico та Baldi на випадок, коли замість диференціального рівняння (1.4) малим шумом збурюється стохастичне диференціальне рівняння

$$
\begin{aligned}
&dX(t) = a(X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t),\ \ t \geqslant 0,\\
&X(0) = 0
\end{aligned}
$$

зі степеневими коефіцієнтами $a(\cdot)$ та $\sigma(\cdot)$, які не задовольняють умови єдиності розв'язку.

Розділ 2

Загальний метод доведення граничних теорем для послідовностей збурених випадкових процесів

Даний розділ присвячено описанню загального методу дослідження граничної поведінки послідовності випадкових процесів з іррегулярністю в околі деякої фіксованої точки. Спочатку буде сформульовано та доведено загальну граничну теорему, а потім наведено деякі достатні умови, за яких вона виконується.

Більш детально, розглядається послідовність процесів Маркова в строгому сенсі $\{X_n\}$, яка збігається зовні деякої "особливої" точки x^* до граничного процесу X_0. Тобто для довільної початкової точки має місце збіжність $X_n(\cdot \wedge \tau_\varepsilon^{(n)}) \Rightarrow X_0(\cdot \wedge \tau_\varepsilon^{(0)})$, де $\tau_\varepsilon^{(n)}$ це момент досягнення процесом X_n рівня ε.

Даний розділ присвячено знаходженню умов збіжності послідовності

$\{X_n\}$ та описанню граничного процесу в загальному випадку.

2.1 Основні позначення та попередні відомості

Нехай (E, ρ) — локально компактний метричний простір.

Позначимо через $C([0,\infty)) = C_E([0,\infty))$ простір функцій зі значеннями в E, що мають неперервні траєкторії.

Відповідно, через $D([0,\infty)) = D_E([0,\infty))$ позначимо простір функцій зі значеннями в E, з càdlàg траєкторіями.

У просторі неперервних функцій $C([0,\infty))$ розглядається топологія, що відповідає збіжності на компактах.

У просторі $D([0,\infty))$ розглядається наступна топологія.

Нехай d_0^T позначає метрику в $D([0,T])$ (див. напр. [75], §14), тобто

$$d_0 = \inf\{\varepsilon > 0 \colon \exists \lambda \in \Lambda \colon ||\lambda|| \leqslant \varepsilon,\ \sup_t |x(t) - y(\lambda(t))| \leqslant \varepsilon\},$$

де $||\lambda|| = \sup_{s \neq t} |\ln \frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s}|$ для $\lambda \uparrow$, $\lambda(0) = 0$, $\lambda(T) = T$.

Відмітимо, що d_0^T мажорується рівномірною метрикою на $[0,T]$:

$$d_0^T(x,y) \leqslant \sup_{s \in [0,T]} |x(t) - y(t)|.$$

Розглянемо простір

$$M = \left\{ \bar{t} = \{t_i, i \geqslant 1\} \in (0;\infty)^{\mathbb{N}} :\ \sum_i t_i = +\infty \right\}$$

з метрикою покоординатної збіжності $\rho_M(\bar{t}, \bar{s}) = \sum_n 2^{-n} |t_n - s_n| \wedge 1$.

На $C_E([0,\infty))$ розглядається метрика, що відповідає рівномірній збіжності на компактах, метрика на $C_E([0,\infty))^{\mathbb{N}}$ вводиться аналогічно ρ_M.

2.2 Загальні граничні теореми

В даному розділі пропонується перетворення "вирізанням часу", яке "прибирає" частину траєкторії процесу. Воно допоможе досліджувати поведінку процесу в околі іррегулярної точки та поза ним.

Наведемо відповідну конструкцію побудови.

2.2.1 Перетворення вирізанням часу

Нехай $f \in D([0,\infty))$, і нехай $\sigma = \{\sigma_n\}$, $\tau = \{\tau_n\}$ — послідовності дійсних чисел таких, що

$$0 \leqslant \tau_0 \leqslant \sigma_0 < \tau_1 < \sigma_1 < \tau_2 < \dots, \tag{2.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n = +\infty,\ \lambda(\cup_k[\sigma_k, \tau_{k+1})) = +\infty, \tag{2.2}$$

де λ — міра Лебега на $\mathbb{R}$.

Покладемо

$$L(t) = L_{\tau,\sigma}(t) := \int_0^t \mathbb{1}_{\cup_k[\sigma_k,\tau_{k+1})}(s)ds,$$
$$A(t) = A_{\tau,\sigma}(t) := L^{-1}(t) := \inf\{s \geqslant 0 | L(s) \geqslant t\}.$$

Означення 2.2.1. Будемо казати, що функція

$$f^{\tau,\sigma}(t) := f(A_{\tau,\sigma}(t)),\ t \geqslant 0$$

отримана з функції f вирізанння
ям часу $\cup_k[\tau_k, \sigma_k)$. ◇

Через $\omega_f(\delta) = \omega_f^T(\delta) := \sup\limits_{\substack{s,t\in[0,T]\\|s-t|\leqslant\delta}} \rho(f(s), f(t))$ позначимо модуль неперервності функції f на $[0,T]$.

Лема 2.2.2. *Припустимо, що*

$$(T+1) - L(T+1) = \int_0^{T+1} \mathbb{1}_{\cup_k[\tau_k,\sigma_k)}(s)ds \leqslant \delta \leqslant 1.$$

Тоді

$$\sup_{t\in[0,T]} \rho(f, f^{\tau,\sigma}) \leqslant \omega_f^{T+1}(\delta).$$

Доведення випливає з того, що за зроблених припущень $|A(t) - t| \leqslant \delta,\ t \in [0, T]$.

Основний результат даного параграфу полягає в наступному.

Теорема 2.2.3. *Припустимо, що послідовність випадкових процесів* $\{X_n, n \geqslant 1\}$ *для деякого* $T > 0$ *задовольняє умову*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \exists\ n_0\ \forall\ n \geqslant n_0$$

$$\mathrm{P}(\omega_{X_n}^{T+1}(\delta) \geqslant \varepsilon) \leqslant \varepsilon. \tag{2.3}$$

Припустимо, що для довільного $\alpha \in (0, 1)$ *знайдуться послідовності випадкових величин*

$$\tau^{(n)} = \tau^{(n,\alpha)} = \{\tau_k^{(n,\alpha)}, k \geqslant 0\},\ \sigma^{(n)} = \sigma^{(n,\alpha)} = \{\sigma_k^{(n,\alpha)}, k \geqslant 0\},$$

які задовольняють (2.1), (2.2) *для всіх* $n \geqslant 1$, *та випадковий процес* $X^{(\alpha)}$ *такий, що*

$$\mathrm{P}(T + 1 - L_n^{(\alpha)}(T + 1) \geqslant \alpha) \leqslant \alpha,\ n \geqslant n_0(T, \alpha); \tag{2.4}$$

$$X_n^{(\alpha)} \Rightarrow X^{(\alpha)},\ n \to \infty,\ \text{в}\ D([0, T]), \tag{2.5}$$

де

$$L_n^{(\alpha)}(t) = \int_0^t 1\!\!1_{\cup_k[\sigma_k^{(n,\alpha)}, \tau_{k+1}^{(n,\alpha)})}(s)ds,\ A_n^{(\alpha)}(t) = (L_n^{(\alpha)})^{-1}(t),$$

$X_n^{(\alpha)}(t) = X_n(A_n^{(\alpha)}(t))$ *отримано вирізанням часу з* X_n.

Тоді розподіл послідовності $\{X_n, n \geqslant 1\}$ *слабко збігається в* $D([0, T])$ *при* $n \to \infty$. *Крім того, розподіли* $\{X^{(\alpha)}\}$ *слабко збігаються в* $D([0, T])$ *при* $\alpha \to 0+$, *а границі для* $\{X^{(\alpha)}\}$ *та* $\{X_n\}$ *співпадають за розподілом.*

Зауваження 2.2.4. З умови (2.3) буде випливати, що граничний процес має неперервну модифікацію. $\diamond$

Доведення. За теоремою Скорохода [84] для довільного $\alpha > 0$ існують копії випадкових елементів $X^{(\alpha)}$ та $X_n^{(\alpha)}, n \geqslant 1$, задані на одному ймовірнісному просторі $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathrm{P}})$, такі, що

$$\widetilde{X}_n^{(\alpha)} \xrightarrow{\mathrm{P}} \widetilde{X}^{(\alpha)},\ n \to \infty,\ \text{в } D([0,T]). \tag{2.6}$$

Неважко бачити, що існує розширення простору $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathrm{P}})$ та випадкові елементи $\{\widetilde{X}_n, \widetilde{\tau}_k^{(n,\alpha)}, \widetilde{\sigma}_k^{(n,\alpha)}, k \geqslant 0\}$ на ньому, такі що

$$\{\widetilde{X}_n^{(\alpha)}, \widetilde{X}_n, \widetilde{\tau}_k^{(n,\alpha)}, \widetilde{\sigma}_k^{(n,\alpha)}, k \geqslant 0\} \stackrel{d}{=} \{X_n^{(\alpha)}, X_n, \tau_k^{(n,\alpha)}, \sigma_k^{(n,\alpha)}, k \geqslant 0\}$$

(див. міркування [29], Гл.5).

Помітимо, що $X_n^{(\alpha)}$ можна розглядати як значення деякої вимірної функції від набору $\{X_n, \tau_k^{(n,\alpha)}, \sigma_k^{(n,\alpha)}, k \geqslant 0\}$. Тому $\widetilde{X}_n^{(\alpha)}$ являється м.н. значенням цієї ж функції від $\{\widetilde{X}_n, \widetilde{\tau}_k^{(n,\alpha)}, \widetilde{\sigma}_k^{(n,\alpha)}, k \geqslant 0\}$. Таким чином, $\widetilde{X}_n^{(\alpha)}$ отримано вирізанням часу $\cup_k[\widetilde{\tau}_k^{(n,\alpha)}, \widetilde{\sigma}_k^{(n,\alpha)})$ з $\widetilde{X}_n$.

Відмітимо, що d_0^T мажорується рівномірною метрикою на $[0,T]$:

$$d_0^T(x,y) \leqslant \sup_{s\in[0,T]} |x(t) - y(t)|.$$

Тоді з урахуванням леми 2.2.2 маємо оцінку:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(d_0^T(\widetilde{X}_n, \widetilde{X}^{(\alpha)}) \geqslant 2\varepsilon) \leqslant \\
&\leqslant \mathrm{P}(d_0^T(\widetilde{X}_n, \widetilde{X}_n^{(\alpha)}) \geqslant \varepsilon) + \mathrm{P}(d_0^T(\widetilde{X}_n^{(\alpha)}, \widetilde{X}^{(\alpha)}) \geqslant \varepsilon) \leqslant \\
&\leqslant \mathrm{P}(\sup_{t\in[0,T]} \rho(\widetilde{X}_n, \widetilde{X}_n^{(\alpha)}) \geqslant \varepsilon) + \mathrm{P}(d_0^T(\widetilde{X}_n^{(\alpha)}, \widetilde{X}^{(\alpha)}) \geqslant \varepsilon) \leqslant \\
&\leqslant \mathrm{P}(T+1-\widetilde{L}_n^{(\alpha)}(T+1) \geqslant \alpha) + \mathrm{P}(\omega_{\widetilde{X}_n}^{T+1}(\alpha) \geqslant \varepsilon) + \mathrm{P}(d_0^T(\widetilde{X}_n^{(\alpha)}, \widetilde{X}^{(\alpha)}) \geqslant \varepsilon).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

По заданому $\varepsilon > 0$ виберемо $\alpha \in (0, \varepsilon)$ і n_0 так, щоб (див. (2.3) та (2.6)) другий та третій доданки не перевищували ε при $n \geqslant n_0$. Тоді, враховуючи (2.4), одержимо, що права частина (2.7) не перевищує 3ε.

Отже, для всіх $n, m \geqslant n_0$

$$\mathrm{P}(d_0^T(\widetilde{X}_n, \widetilde{X}_m) \geqslant 4\varepsilon) \leqslant \mathrm{P}(d_0^T(\widetilde{X}_n, \widetilde{X}^{(\alpha)}) \geqslant 2\varepsilon) + \mathrm{P}(d_0^T(\widetilde{X}_m, \widetilde{X}^{(\alpha)}) \geqslant 2\varepsilon) \leqslant 6\varepsilon.$$

Звідси випливає, що послідовність розподілів випадкових процесів $\{X_n, n \geqslant 1\}$ фундаментальна за метрикою Леві–Прохорова (див. [18]), а отже, збігається.

Збіжність $\{X^{(\alpha)}, \alpha > 0\}$ до тієї ж границі при $\alpha \to 0+$ випливає з аналогічних міркувань та оцінки (2.7). Теорема 2.2.3 доведена. □

2.3 Деякі достатні умови

2.3.1 Достатні умови малості вирізаного часу

Зауваження 2.3.1. Ситуацію застосовності даної теореми можна уявляти собі наступним чином. Нехай $\{X_n\}$ — послідовність неперервних однорідних процесів Маркова в строгому сенсі, τ — момент досягнення деякої фіксованої точки x_0. Припустимо, що $\{X_n(\cdot \wedge \tau)\}$ збігається до $\{X(\cdot \wedge \tau)\}$, як тільки початкові розподіли процесів збігаються. В ролі моментів $\tau_k^{(n,\alpha)}, \sigma_k^{(n,\alpha)}$ візьмемо моменти послідовних входів та виходів, наприклад, в кулю $B(x_0, \alpha/2)$ і, відповідно, з кулі $B(x_0, \alpha)$. Тоді умова (2.4) означає, що якщо α мале, то "вирізаний час" малий рівномірно по n. Наприклад, це вірно, якщо рівномірно по n, середній час проведений в $B(x_0, \alpha)$ малий при $\alpha \to 0+$:

$$\forall T > 0 : \quad \lim_{\alpha \to 0+} \sup_n \mathrm{E} \int_0^T \mathbb{1}_{\rho(X_n(t), x_0) \leqslant \alpha} dt = 0. \tag{2.8}$$

В конкретних ситуаціях перевірка (2.8) може бути достатньо простою (див., напр., побудову броунівського руху в конусі [38, 67]).

Умова на модуль неперервності (2.3) аналогічна умові, що гарантує відносну компактність процесів в просторі неперервних функцій. Неважко перевірити, що якщо процес X неперервний та $X_n(\cdot\wedge\tau) \Rightarrow X(\cdot\wedge\tau)$, як тільки початкові розподіли процесів збігаються, то (2.3) виконується, наприклад, якщо справедливо (2.8). $\diamond$

2.3.2 Достатні умови збіжності процесів, отриманих вирізанням часу

В даному параграфі наводяться достатні умови, що гарантують збіжність (2.5). Теорема 2.4.1, наведена далі, є аналогом теореми 2.2.3, отриманих з урахуванням цих вимог.

Ми будемо припускати, що моменти досягнення деяких точок для процесів $\{X_n\}$ є моментами оновлення. В цьому випадку розподіл процесу з вирізаним часом можна отримати за допомогою побудови, описаної далі.

Через F позначимо відображення, що діє з $C_E([0,\infty))^{\mathbb{N}}\times M$ в $D_E([0;\infty))$ за правилом

$$(\overline{f},\overline{t}) = (f_1, f_2, \ldots; t_1, t_2, \ldots) \to F(\overline{f},\overline{t}) = \sum_k f_k(\cdot + \sum_{i=1}^{k-1} t_i)\mathbb{1}_{[\sum_{i=1}^{k-1} t_i, \sum_{i=1}^{k} t_i)}.$$

Неважко бачити, що функція F неперервна на $C_E([0,\infty))^{\mathbb{N}}\times M$. Тому якщо послідовність випадкових елементів $\{(\overline{\xi}^{(n)}, \overline{\tau}^{(n)}), n\geqslant 0\}$ зі значеннями в $C_E([0,\infty))^{\mathbb{N}}\times M$ така, що

$$(\overline{\xi}^{(n)}, \overline{\tau}^{(n)}) \Rightarrow (\overline{\xi}^{(0)}, \overline{\tau}^{(0)}),\ n\to\infty,$$

то

$$F(\overline{\xi}^{(n)}, \overline{\tau}^{(n)}) \Rightarrow F(\overline{\xi}^{(0)}, \overline{\tau}^{(0)}),\ n\to\infty,$$

в просторі $D_E([0;\infty))$.

Нехай X — неперервний однорідний процес Маркова в строгому сенсі зі значеннями в E. Через Q_x позначимо розподіл X за умови $X(0)=x$.

Нехай $0 = \sigma_0 \leqslant \tau_1 < \sigma_1 < \tau_2 < \ldots$ — послідовність моментів зупинки, така що $\sum_k (\tau_{k+1} - \sigma_k) = +\infty$ м.н. Позначимо

$$\eta_k = \begin{cases} \tau_{k+1} - \sigma_k, & \text{якщо } \tau_1 > 0, \\ \tau_{k+2} - \sigma_{k+1}, & \text{якщо } \tau_1 = 0, \end{cases}$$

$$\xi_k(t) = \begin{cases} X((\sigma_k + t) \wedge \tau_{k+1}), & \text{якщо } \tau_1 > 0, \\ X((\sigma_{k+1} + t) \wedge \tau_{k+2}), & \text{якщо } \tau_1 = 0. \end{cases}$$

Нехай $X^{(\tau,\sigma)}$ — процес, отриманий з X вирізанням часу $\cup_k [\tau_k, \sigma_k)$. Неважко бачити, що $X^{(\tau,\sigma)} = F(\overline{\xi}, \overline{\eta})$.

З сильної властивості Маркова процесу X випливає, що послідовність випадкових елементів $\{(\xi_k, \eta_k),\ k \geqslant 1\}$ є ланцюгом Маркова (поки що неоднорідним) зі значеннями в $C_E([0,\infty)) \times (0,\infty)$. Тому для збіжності послідовності процесів, отриманих вирізанням часу з процесу Маркова в строгому сенсі, нам знадобляться результати про слабку збіжність ланцюгів Маркова (ми, все ж, будемо досліджувати не довільні, а спеціально вибрані послідовності моментів зупинки $\{\tau_k, \sigma_k\}$).

Нехай $\{X_n\}_{n \geqslant 1}$ — послідовність неперервних однорідних процесів Маркова в строгому сенсі зі значеннями в E, $Q_x^{(n)}$ — розподіл X_n за умови $X_n(0) = x$. Припустимо, що існує точка x^*, така що для довільного n процес X_n безліч разів потрапляє в довільну кулю $B(x^*, \varepsilon)$ і безліч разів виходить з довільної кулі $B(x^*, \varepsilon)$ з $Q_x^{(n)}$ імовірністю 1, $x \in E$. Нехай $\alpha > 0$, $\alpha_1 \in (0, \alpha)$. Візьмемо в ролі $\{\tau_k, \sigma_k\}_{k \geqslant 1}$ моменти послідовних входів в кулю $B(x^*, \alpha_1)$ та виходів з кулі $B(x^*, \alpha)$, відповідно. Покладемо $\sigma_0^n := 0$,

$$\begin{aligned} \tau_k^n = \tau_k^{(n,\alpha_1,\alpha)} &:= \inf\{t \geqslant \sigma_{k-1}^{(n,\alpha_1,\alpha)} \colon \rho(X_n(t), x^*) \leqslant \alpha_1\},\ k \geqslant 1, \\ \sigma_k^n = \sigma_k^{(n,\alpha_1,\alpha)} &:= \inf\{t \geqslant \tau_k^{(n,\alpha_1,\alpha)} \colon \rho(X_n(t), x^*) \geqslant \alpha\},\ k \geqslant 1. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Припустимо, що для довільного $n \geqslant 1$ і довільного початкового розподілу виконується умова

$$\sum_k (\tau_{k+1}^n - \sigma_k^n) = \infty \ \text{ м.н.} \tag{2.10}$$

Побудуємо аналогічно до попередніх міркувань послідовності

$$(\overline{\xi}^n, \overline{\eta}^n) = \{\xi_1^n, \xi_2^n, \ldots ; \eta_1^n, \eta_2^n, \ldots\} = \{(\xi_k^n, \eta_k^n), k \geqslant 1\}.$$

В даному випадку $\{(\xi_k^n, \eta_k^n), k \geqslant 1\}$ є однорідним ланцюгом Маркова зі значеннями в $C_E([0,\infty)) \times (0,\infty)$. Відмітимо, що його перехідна імовірність $P_n((f,t),A)$ залежить тільки від $f(t)$. В свою чергу,

$$P_n((f,t),A) = \int_E Q_u^{(n)}\Big((X_n(\cdot \wedge \tau_1^n), \tau_1^n) \in A\Big) Q_{f(t)}^{(n)} \left(X_n(\sigma_1^n) \in du\right). \quad (2.11)$$

Трохи модифікуючи доведення про слабку збіжність ланцюгів Маркова в [30], зі співвідношення (2.11) випливає таке твердження.

Лема 2.3.2. *Припустимо, що* $\tilde{P}_0(x, \tilde{A}), x \in E, \tilde{A} \in \mathcal{B}(E)$ *та* $\bar{P}_0(x, \bar{A}), x \in E, \bar{A} \in \mathcal{B}(C_E([0,\infty)) \times [0,\infty))$ *— стохастичні ядра, неперервні по* x *(на просторі мір розглядається топологія слабкої збіжності). Припустимо, що початкові розподіли ланцюгів Маркова* $X_n(0)$ *слабко збігаються до деякої міри* μ_0*, і для довільного* $x \in E$ *і довільної послідовності* $\{x_n\}$*, збіжної до* x*:*

A1. $Q_{x_n}^{(n)} \left(X_n(\sigma_1^n) \in \cdot\right) \Rightarrow \tilde{P}_0(x, \cdot), n \to \infty,$

A2. $Q_{x_n}^{(n)}\Big((X_n(\cdot \wedge \tau_1^n), \tau_1^n) \in \cdot\Big) \Rightarrow \bar{P}_0(x, \cdot), n \to \infty.$

Тоді послідовність однорідних ланцюгів Маркова $\{(\xi_k^n, \eta_k^n), k \geqslant 1\}$ *слабко збігається при* $n \to \infty$ *в просторі* $(C_E([0,\infty)) \times (0,\infty))^{\mathbb{N}}$ *до однорідного ланцюга Маркова* $\{(\xi_k^0, \eta_k^0), k \geqslant 1\}$ *з перехідним ядром (пор. з* (2.11)*)*

$$P_0((f,t),A) = \int_E \bar{P}_0(u, A) \tilde{P}_0(f(t), du).$$

Зокрема, якщо X_0 *— процес Маркова, такий що*

$$\mu_0 =^d X_0(0),\ Q_x^{(0)} \left((X_0(\cdot \wedge \tau_1^0), \tau_1^0) \in \cdot\right) = \bar{P}_0(x, \cdot), \quad (2.12)$$

$$Q_x^{(0)} \left(X_0(\sigma_1^0) \in \cdot\right) = \tilde{P}_0(x, \cdot) \quad (2.13)$$

і $\{(\xi_k^0, \eta_k^0), k \geqslant 1\}$ *побудовані по ньому так само, як* $\{(\xi_k^n, \eta_k^n), k \geqslant 1\}$ *по процесу* X_n, *то*

$$(\overline{\xi}^{(n)}, \overline{\tau}^{(n)}) \Rightarrow (\overline{\xi}^{(0)}, \overline{\tau}^{(0)}),\ n \to \infty.$$

Зокрема, має місце збіжність процесів, отриманих вирізанням часу:

$$X_n^{(\tau^n, \sigma^n)} \Rightarrow X_0^{(\tau^0, \sigma^0)},\ n \to \infty$$

в $D_E([0; \infty))$.

2.3.3 Достатні умови для модуля неперервності

Розглянемо послідовність с.д.р.

$$dX_n(t) = a_n(X_n(t))dt + b_n(X_n(t))dW(t). \tag{2.14}$$

Припустимо, що для довільного n існує розв'язок рівняння (2.14), і що виконуються наступні умови:

$$\forall \alpha > 0\ \exists C = C(\alpha) > 0\ \exists n_0\ \forall n \geqslant n_0\ \forall x, |x| \geqslant \alpha$$

$$|a_n(x)| \leqslant C,\ |b_n(x)| \leqslant C. \tag{2.15}$$

Тоді виконується умова на модуль неперервності.

Дійсно, нехай $\alpha > 0$, s_1 і t_1 — фіксовані, $|s_1 - t_1| < \delta$.

Припустимо спочатку, що $|X_n(z)| > \alpha,\ z \in [s_1, t_1]$. Тоді

$$\left| \int_{s_1}^{t_1} a(X_n(z))dz + \int_{s_1}^{t_1} b(X_n(z))dW(z) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{s_1}^{t_1} a(X_n(z)) \mathbb{1}_{|X_n(z)| > \alpha} dz \right| + \left| \int_{s_1}^{t_1} b(X_n(z)) \mathbb{1}_{|X_n(z)| > \alpha} dW(z) \right|.$$

Припустимо тепер, що існує $z \in [s_1, t_1]$, таке що $|X_n(z)| < \alpha$. Позначимо через τ та σ моменти першого входу та останнього виходу процесу X_n з $[-\alpha, \alpha]$ відповідно:

$$\tau = \inf\{t \geqslant s_1 \colon |X_n(t)| \leqslant \alpha\},$$

$$\sigma = \sup\{t \leqslant t_1 \colon |X_n(t)| > \alpha\}.$$

Тоді $|X_n(\tau) - X_n(\sigma)| \leqslant 2\alpha$, і

$$|X_n(s_1) - X_n(t_1)| \leqslant |X_n(s_1) - X_n(\tau)| + |X_n(\tau) - X_n(\sigma)| + |X_n(\sigma) - X_n(t_1)| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sup_{|s-t|<\delta} \left| \int_s^t a(X_n(z)) \mathbb{1}_{|X_n(z)|>\alpha} dz \right| + 2 \sup_{|s-t|<\delta} \left| \int_s^t b(X_n(z)) \mathbb{1}_{|X_n(z)|>\alpha} dW(z) \right| + 2\alpha.$$

Отже, в загальному випадку, для довільних s_1, t_1, $|s_1 - t_1| < \delta$,

$$|X_n(s_1) - X_n(t_1)| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sup_{|s-t|<\delta} \left| \int_s^t a(X_n(z)) \mathbb{1}_{|X_n(z)|>\alpha} dz \right| + 2 \sup_{|s-t|<\delta} \left| \int_s^t b(X_n(z)) \mathbb{1}_{|X_n(z)|>\alpha} dW(z) \right| + 2\alpha.$$

Отже,

$$\sup_{|s_1-t_1|<\delta} |X_n(s_1) - X_n(t_1)| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sup_{|s-t|<\delta} \left| \int_s^t a(X_n(z)) \mathbb{1}_{|X_n(z)|>\alpha} dz \right| + 2 \sup_{|s-t|<\delta} \left| \int_s^t b(X_n(z)) \mathbb{1}_{|X_n(z)|>\alpha} dW(z) \right| + 2\alpha.$$

Позначимо

$$Y_n(t) = \int_0^t a(X_n(z)) \mathbb{1}_{|X_n(z)|>\alpha} dz,$$

та

$$Z_n(t) = \int_0^t b(X_n(z)) \mathbb{1}_{|X_n(z)|>\alpha} dW(z).$$

Тоді

$$\mathrm{P}(w_{X_n}(\delta) > \varepsilon) \leqslant \mathrm{P}(w_{Y_n}(\delta) > \varepsilon/6) + \mathrm{P}(w_{Z_n}(\delta) > \varepsilon/6) + \mathrm{P}(\alpha > \varepsilon/6). \quad (2.16)$$

Виберемо $\alpha < \varepsilon/6$, тоді третій доданок дорівнює нулю.

Оцінимо перший доданок для $n \geqslant n_0$, де $n_0 = n_0(\alpha)$ з умови (2.15):

$$\mathrm{P}(w_{Y_n}(\delta) > \varepsilon/6) \leqslant \mathrm{P}(\sup_{|s-t|<\delta} \int_s^t a(X_n(z)) \mathbb{1}_{|X_n(z)|>\alpha} dz > \varepsilon/6) \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{P}\big(C(\alpha) \cdot \delta > \varepsilon/6\big).$$

Останній вираз дорівнює нулю якщо $\delta < \varepsilon/6C(\alpha)$.

Оцінимо другий доданок в (2.16). Процес $Z_n(t)$ є неперервним мартингалом з характеристикою $\beta_n^2(t) = \int_0^t b^2(Z_n(s))1\!\!1_{|Z_n(s)|>\delta}ds$. Тому [26] існує броунівський рух W_n, такий що

$$Z_n(t) = W_n(\beta_n(t)).$$

Тоді

$$\mathrm{P}(w_{Z_n}(\delta) > \varepsilon/6) = \mathrm{P}(w_{W_n(\beta_n(\cdot))}(\delta) > \varepsilon/6) =$$

$$= \mathrm{P}(\sup_{|s-t|<\delta} |W_n(\beta_n(s)) - W_n(\beta_n(t))| > \varepsilon/6).$$

Якщо $|s-t| < \delta$, то $|\beta_n(s) - \beta_n(t)| \leqslant C(\alpha)\delta$. Тому

$$\mathrm{P}(w_{Z_n}(\delta) > \varepsilon/6) \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{P}(w_{W_n}(C(\alpha)\delta) > \varepsilon/6) = \mathrm{P}(w_W(C(\alpha)\delta) > \varepsilon/6),$$

де W — деякий вінерів процес Оскільки вінерів процес є неперервним, то

$$\mathrm{P}(w_{Z_n}(\delta) > \varepsilon/6) \to 0,\ \delta \to 0.$$

Виберемо $\alpha < \varepsilon/6$, $\delta_0 = \min(\varepsilon/6C(\alpha), \delta(\alpha, \varepsilon))$. Тоді з (2.16) випливає умова про модуль неперервності.

2.4 Збіжність строго марковських процесів

Поєднуючи теорему 2.2.3 та вказані достатні умови, отримуємо наступне загальне твердження про збіжність випадкових процесів.

Теорема 2.4.1. *Нехай $\{X_n,\ n \geqslant 0\}$ — послідовність неперервних однорідних процесів Маркова в строгому сенсі в локально компактному метричному просторі E. Припустимо, що для довільного $T > 0$ виконується* (2.3), *а також для довільного $\alpha > 0$ знайдеться $\alpha_1 \in (0, \alpha)$, таке* *що для послідовностей* $\{(\tau_k^{(n,\alpha_1,\alpha)}, \sigma_k^{(n,\alpha_1,\alpha)}), k \geqslant 1\}$, *визначених в* (2.9), *виконується:*

1) (2.10)*;*

2) (2.4) *або* (2.8)*;*

3) умови **A1**, **A2** *леми 2.3.2.*

Тоді розподіли $\{X_n\}$ *слабко збігаються при* $n \to \infty$ *в* $C([0,\infty))$.

Якщо додатково виконується (2.12), (2.13) *і*

$$\int_0^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_0(t)=x^*\}} dt = 0 \text{ м.н.}, \tag{2.17}$$

то $X_n \Rightarrow X_0$ *при* $n \to \infty$ *в* $C([0,\infty))$.

Зауваження 2.4.2. Єдине, що необхідно згадати при доведенні збіжності $X_n \Rightarrow X_0$ в $C([0,T])$ в теоремі 2.4.1 — це наступний факт, що випливає з (2.17):

$$X_0^{(\tau^{(0,\alpha_1,\alpha)}, \sigma^{(0,\alpha_1,\alpha)})} \Rightarrow X_0,\ \alpha \to 0+,$$

в $D([0,\infty))$. Крім того, оскільки всі процеси $\{X_n\}$ неперервні, то зі слабкої збіжності $X_n \Rightarrow X_0$ в $D([0,T])$ випливає збіжність і в $C([0,T])$. ◇

Зауваження 2.4.3. Замість сильної властивості Маркова в теоремі 2.4.1 можна вимагати, щоб моменти входу або виходу з кулі були "оновлюючими" для процесів. Наприклад, якщо $E = \mathbb{R}$ і $\{X_n\}$ — неперервні напівмарковські процеси. Відповідні означення див в [24]. ◇

Часто для застосувань зручно використовувати аналог теореми 2.4.1 в наступному вигляді.

Нехай $\{\xi^{(n)}, n \geqslant 0\}$ — послідовність неперервних однорідних процесів Маркова в строгому сенсі.

Для $\alpha > 0$ покладемо

$$\tau^{n,\alpha} := \inf\big\{t \geqslant 0\colon |\xi^{(n)}(t)| \leqslant \alpha\big\}, \quad \sigma^{n,\alpha} := \inf\big\{t \geqslant 0\colon |\xi^{(n)}(t)| \geqslant \alpha\big\}.$$

Позначимо через $\xi^{(n)}_{x_0}$ процес, що має розподіл як $\xi^{(n)}$ за умови $\xi^{(n)}(0) = x_0$.

Теорема 2.4.4. *Припустимо, що послідовність $\{\xi^{(n)}, n \geqslant 0\}$ задовольняє наступні умови.*

$$\xi^{(n)}(0) \Rightarrow \xi^{(0)}(0); \tag{2.18}$$

$$\forall T > 0\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \exists n_0\ \forall n \geqslant n_0$$
$$\mathrm{P}\Big(\sup_{\substack{|s-t|<\delta,\\ s,t\in[0,T]}} |\xi^{(n)}(t) - \xi^{(n)}(s)| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \varepsilon; \tag{2.19}$$

$$\forall T > 0 \quad \lim_{\varepsilon\to 0+} \sup_n \mathrm{E} \int_0^T \mathbb{1}_{|\xi^{(n)}(t)|\leqslant\varepsilon} dt = 0; \tag{2.20}$$

$$\int_0^\infty \mathbb{1}_{\xi^{(0)}(t)=0} dt = 0 \quad \textit{м.н.} \tag{2.21}$$

Нехай для довільних $\alpha > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ та довільної послідовності $\{x_n\}$, такої що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ виконується

$$\big(\xi^{(n)}_{x_n}(\cdot \wedge \tau^{n,\alpha}), \tau^{n,\alpha}\big) \Rightarrow \big(\xi^{(0)}_{x_0}(\cdot \wedge \tau^{0,\alpha}), \tau^{0,\alpha}\big),\ n \to \infty; \tag{2.22}$$

$$\xi^{(n)}_{x_n}(\sigma^{n,\alpha}) \Rightarrow \xi^{(0)}_{x_0}(\sigma^{0,\alpha}),\ n \to \infty. \tag{2.23}$$

Тоді $\xi^{(n)} \Rightarrow \xi^{(0)}$ при $n \to \infty$ в $C([0,\infty))$.

2.5 Аналог теореми 2.4.1 для ланцюгів Маркова

Аналогічне твердження вірно і для процесів, побудованих по ланцюгам Маркова, з природньою зміною умов.

Нехай $(X_0(t), t \geqslant 0)$ — неперервний процес Маркова в строгому сенсі зі значеннями в $\mathbb{R}^d$, $(X^{(n)}(k), k \geqslant 0),\ n \geqslant 1,$ — ланцюги Маркова на $\mathbb{R}^d$.

Покладемо $X_n(\frac{k}{n}) := \frac{1}{\sqrt{n}} X^{(n)}(k)$ і довизначимо процес $X_n(t)$ для всіх $t \geqslant 0$ за лінійністю або ступеневим чином.

В цьому випадку справедливі аналоги леми 2.3.2 і теореми 2.4.1 з наступними змінами.

Позначимо $\sigma_0^n := 0$,

$$\begin{aligned}\tau_k^{(n)} = \tau_k^{(n,\alpha_1,\alpha)} &:= \inf\{t \in \tfrac{1}{n}\mathbb{Z}_+, t \geqslant \sigma_{k-1}^{(n,\alpha_1,\alpha)} \colon |X_n(t) - x^*| \leqslant \alpha_1\},\ k \geqslant 1,\\ \sigma_k^{(n)} = \sigma_k^{(n,\alpha_1,\alpha)} &:= \inf\{t \in \tfrac{1}{n}\mathbb{Z}_+, t \geqslant \tau_k^{(n,\alpha_1,\alpha)} \colon |X_n(t) - x^*| \geqslant \alpha\},\ k \geqslant 1.\end{aligned} \tag{2.24}$$

Теорема 2.5.1. *Припустимо, що для довільного $T > 0$ виконується* (2.3), *а також для довільного $\alpha > 0$ знайдеться $\alpha_1 \in (0, \alpha)$, таке що для послідовностей $\{(\tau_k^{(n,\alpha_1,\alpha)}, \sigma_k^{(n,\alpha_1,\alpha)}), k \geqslant 1\}$, визначених в* (2.24), *виконується:*
1) умова (2.10)*: для довільного $n \geqslant 1$ і довільного початкового розподілу*

$$\sum_k (\tau_{k+1}^n - \sigma_k^n) = \infty \quad \text{м.н.};$$

2) (2.4) *або* (2.8)*:*

$$\forall T > 0: \quad \lim_{\alpha \to 0+} \sup_n \mathrm{E} \int_0^T \mathbb{1}_{\rho(X_n(t), x_0) \leqslant \alpha} dt = 0;$$

3) умови **A1**, **A2** *леми 2.3.2.*

Тоді розподіли $\{X_n\}$ слабко збігаються при $n \to \infty$ в $C([0, \infty))$. Якщо додатково виконується (2.12), (2.13) *і*

$$\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{X_0(t) = x^*\}} dt = 0 \ \text{м.н.},$$

то $X_n \Rightarrow X_0$ *при* $n \to \infty$ *в* $C([0,\infty))$.

Зауваження 2.5.2. Якщо, крім того, ланцюг Маркова $\{X^{(n)}(k),\ k \geqslant 1\}$ приймає значення з $\mathbb{Z}^d$, а не $\mathbb{R}^d$, то в лемі 2.3.2 необхідно брати не довільну послідовність $\{x_n\}$, збіжну до x_0, а таку, що $x_n \in \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{Z}^d$. $\diamond$

Розділ 3

Функціональні граничні теореми для локальних збурень симетричних випадкових блукань

В даному розділі результати розділу 2 будуть застосовані для випадкових блукань зі збуреннями.

Якщо $(S(k),\ k \in \mathbb{Z}_+)$ це симетричне випадкове блукання з одиничним кроком, то добре відомо, що $(S([nt])/\sqrt{n},\ t \geqslant 0)$ при $n \to \infty$ слабко збігається до броунівського руху у певному функціональному просторі.

У цьому розділі розглядаються збурення симетричних випадкових блукань, а саме, розглядаються ланцюги Маркова, перехідні імовірності яких відрізняються від перехідних імовірностей $\{S_n\}$ в околі деякої особливої точки.

Для природного нормування таких послідовностей будуть доведені функціональні граничні теореми, де граничним процесом буде, взагалі кажучи, не броунівський рух.

Для доведення буде застосовано загальні результати з попереднього розділу.

Опишемо строго постановку задачі.

3.1 Постановка задачі

Розглянемо однорідний ланцюг Маркова $(X(k) = X^{(x_0)}(k),\ k \in \mathbb{Z}_+)$ на $\mathbb{Z}$ зі стартом в точці $x_0 \in \mathbb{Z}$ та перехідними імовірностями $p_{i,j}$, такими що для деякого $m \geqslant 0$

$$p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = 1/2 \quad \text{при} \quad |i| > m. \tag{3.1}$$

Відрізок $[-m, m]$ будемо називати *мембраною*.

Довизначимо процес $(X(t),\ t \geqslant 0)$ для всіх t неперервно як лінійну інтерполяцію $(X(k),\ k \in \mathbb{Z}_+)$ та розглянемо процес

$$X_n(t) = \tfrac{1}{\sqrt{n}} X^{([x_0\sqrt{n}])}(nt),\ t \geqslant 0,\ n \in \mathbb{N}, \tag{3.2}$$

зі стартом в точці $[x_0\sqrt{n}]/\sqrt{n}$.

Означення 3.1.1. Послідовність $\{X_n\}$ з (3.2) ми будемо називати послідовністю випадкових блукань, збурених в околі нуля. $\diamond$

Метою даного розділу є дослідження граничної поведінки послідовності процесів $\{X_n\}$ при $n \to \infty$.

Зауваження 3.1.2. Нагадаємо, що m — фіксоване, тому за рахунок нормування в (3.2), мембрана $[-m, m]$ при $n \to \infty$ "стягується" в точку нуль. Тому граничні процеси (якщо вони є) поза довільним околом нуля мають поводитись як броунівський рух. $\diamond$

Зауваження 3.1.3. Якщо стрибки з мембрани обмежені, то замість блукання з мембраною $[-m, m]$ можна розглядати блукання з мембраною $[-m-N, m+N]$ та одиничними стрибками з мембраною. Очевидно, що якщо умова (3.1) виконується для m, то вона виконується і для $m+N$, $N > 0$. $\diamond$

Приклад 3.1.4. Випадок $m = 0$, $p_{0,1} = p$ та $p_{0,-1} = q = 1-p$ розглядали J.M. Harrison та L.A. Shepp [25].

Вони встановили, що в цьому випадку послідовність $\{X_n\}$ слабко збігається в $C([0, 1])$ до косого броунового руху W_γ з параметром $\gamma = p-q$. $\diamond$

Нагадаємо, що косий броунівський рух W_γ з параметром $\gamma \in [-1, 1]$ має перехідну щільність

$$p_t(x, y) = \varphi_t(x-y) + \gamma \operatorname{sign}(y)\, \varphi_t(|x|+|y|),\ x, y \in \mathbb{R},$$

де $\varphi_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t}$ — густина нормального розподілу $N(0, t)$.

Приклад 3.1.5. Нехай симетричність порушується в двох точках -1 та 1, тобто $m = 1$,

$$p_{i,i\pm1} = 1/2,\ i \notin \{-1, 1\},$$
$$p_{-1,-2} = q',\ p_{-1,0} = p',$$
$$p_{+1,0} = q'',\ p_{+1,+2} = p'',$$

де q', p', q'', p'' — додатні числа, такі що $q'+p' = q''+p'' = 1$.

Тоді (див. [79]) послідовність таких блукань, довизначених і нормованих вказаним чином, слабко збігається до косого броунового руху з параметром

$$\gamma = \frac{p'p'' - q'q''}{p'p'' + q'q''}. \qquad \diamond$$

3.2 Основні результати

Розглянемо ланцюг X та процеси X_n, задані в означенні 3.1.1.

3.2.1 Випадок інтегровних стрибків

Визначимо момент зупинки $\tau = \inf\{k \geqslant 0\colon |X(k)| > m\}$; момент τ — це момент виходу ланцюга Маркова $X(k)$ з мембрани $[-m, m]$.

Позначимо через $\xi^{(\pm)}$ випадкові величини, розподіл яких співпадає з умовним розподілом величини

$$X(\tau) - m \operatorname{sign} X(\tau)$$

за умови $X(0) = \pm m$; величина $\xi^{(\pm)}$ — це відстань до мембрани в момент τ при старті з $+m$ чи $-m$ відповідно.

Гранична поведінка такої послідовності залежить від того, чи будуть стрибки з мембрани інтегровними.

Наступна теорема дає результат для випадку інтегровних стрибків.

Позначимо через P_{x,W_γ} розподіл косого броунового руху $W_\gamma(\cdot)$ з початком в точці x, та $P_{x,0}$ — розподіл броунового руху з початком в точці x та залипанням в нулі.

Теорема 3.2.1. *Нехай стрибки з мембрани $[-m, m]$ інтегровні, тобто*

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |j|\, p_{i,j} < \infty \quad \text{при } |i| \leqslant m.$$

Тоді для довільного x_0 послідовність $\{X_n\}$ при $n \to \infty$ слабко збігається в $\mathrm{C}([0,1])$ до деякого процесу X_∞.

Зокрема:

A. *Якщо принаймні один зі станів $-m-1$ та $m+1$ ланцюга $X(\cdot)$*

1) є істотним та

2) досягається з імовірністю 1,

то граничний процес X_∞ є косим броуновим рухом W_γ з параметром

$$\gamma = \frac{\mathrm{E}\xi^{(+)}\, \mathrm{P}(\xi^{(-)} > 0) + \mathrm{E}\xi^{(-)}\, \mathrm{P}(\xi^{(+)} < 0)}{\mathrm{E}|\xi^{(+)}| \mathrm{P}(\xi^{(-)} > 0) + \mathrm{E}|\xi^{(-)}| \mathrm{P}(\xi^{(+)} < 0)}. \tag{3.3}$$

При цьому $\mathrm{P}(\tau < \infty \ / \ X(0) = x_0) = 1$ *та*

$$\mathrm{P}(\xi^{(-)} > 0) \vee \mathrm{P}(\xi^{(+)} < 0) > 0.$$

Якщо умови 1) і 2) одночасно виконуються тільки для одного зі станів $-m-1$ *або* $m+1$, *то*

$$\mathrm{P}(\xi^{(-)} > 0) \wedge \mathrm{P}(\xi^{(+)} < 0) = 0,$$

при цьому γ *дорівнює знаку цього стану.*

Б. *Нехай* $x_0 > 0$, *а стан* $-m-1$ *є істотним та досягається ланцюгом* $X(\cdot)$ *з імовірністю* q, $0 < q < 1$. *Тоді* $\mathrm{P}(\tau < \infty) = 1$ *і*

$$\mathrm{P}(\xi^{(+)} < 0) > 0.$$

В цьому випадку розподіл граничного процесу X_∞ *дорівнює*

$$qP_{x_0,W_{-1}} + (1-q)P_{x_0,0}.$$

Аналогічне твердження виконується для $x_0 < 0$ *та стану* $m+1$.

В. *Нехай* $x_0 = 0$, *а стани* $-m-1$ *та* $m+1$ *досягаються ланцюгом* $X(\cdot)$ *з імовірностями* q *та* p *відповідно* $(q, p \geqslant 0)$ *та є істотними*[1].

Якщо ці стани між собою не сполучаються, то

$$\mathrm{P}(\xi^{(-)} > 0) = \mathrm{P}(\xi^{(+)} < 0) = 0$$

і розподіл граничного процесу X_∞ *дорівнює*

$$qP_{0,W_{-1}} + pP_{0,W_{+1}} + (1-q-p)P_{0,0}.$$

[1] Якщо якийсь стан є недосяжним, то його істотність чи неістотність для результату неважлива. Тому для простоти формулювання всі недосяжні стани в пункті **В** ми будемо вважати істотними, а в пункті **Г** — неістотними.

Якщо стани $-m-1$ та $m+1$ сполучаються, то $q = p$ і розподіл граничного процесу X_∞ дорівнює

$$pP_{0,W_\gamma} + (1-p)P_{0,0},$$

*де γ визначається аналогічно до пункту **А**.*

Г. *Якщо будь-який (досяжний) зі станів $-m-1$ та $m+1$ є неістотним, то розподіл процесу X_∞ дорівнює*

$$P_{x_0,0},$$

тобто граничний процес X_∞ є броуновим рухом з залипанням в нулі.

Зауваження 3.2.2. Без втрати загальності можна для простоти вважати, що або $x_0 = 0$, або $|x_0| > m$.

Дійсно, якщо $0 < x_0 < m$, то знайдеться такий номер n_0, що $[x_0\sqrt{n}] > m$ для всіх $n \geqslant n_0$. Перші n_0 членів границю не змінюють, можемо їх не розглядати.

Якщо ж потрібно дослідити схему серій, в якій процеси X_n стартують з $x_0/\sqrt{n}$ замість $[x_0\sqrt{n}]/\sqrt{n}$, де $x_0 \in \{1, 2, \ldots, m\}$, тобто $X_n(t) = \frac{X^{(x_0)}(nt)}{\sqrt{n}}$, то можна розглянути зсув $\widetilde{X}$ ланцюга X:

$$\widetilde{X}(k) = X(k) - x_0,\ k \geqslant 0.$$

Ланцюг $\widetilde{X}$ буде блуканням зі стартом в точці $\widetilde{x}_0 = 0$, мембраною $[-m - x_0, m + x_0]$ та відповідними перехідними імовірностями

$$\widetilde{p}_{i,j} = p_{i-x_0,j-x_0}.$$

Асимптотика X та $\widetilde{X}$ буде однакова. Початкова точка може вплинути на те, який пункт (А, Б, В чи Г) теореми застосовується (див. приклад 3.2.6). $\diamond$

Зауваження 3.2.3. Простою достатньою умовою для пункту A є що всі стани ланцюга X сполучаються.

Така умова, наприклад, виконується для прикладу 3.1.5. В цьому випадку $\mathrm{P}(\tau < \infty \ / \ X(0) = x_0) = 1$ для довільного x_0, і неважко обчислити, що

$$\mathrm{P}(\xi^{(-)} > 0) = p'p''/(q' + p'')$$

та

$$\mathrm{P}(\xi^{(+)} < 0) = q'q''/(q' + p'').$$

◇

Зауваження 3.2.4. Імовірності $\mathrm{P}(\xi^{(-)} > 0)$ та $\mathrm{P}(\xi^{(+)} < 0)$ обчислюються наступним чином. Позначимо через ρ_i імовірність для блукання X стартуючи з точки i потрапити в $[m{+}1, \infty)$ раніше ніж в $(-\infty, -m{-}1]$.

Тоді шукані імовірності дорівнюють

$$\mathrm{P}(\xi^{(-)} > 0) = \rho_{-m} \quad \text{та} \quad \mathrm{P}(\xi^{(+)} < 0) = 1 - \rho_m.$$

Відомо, що імовірності ρ_i задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} \rho_i \ = \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} p_{i,j}\rho_j, \quad -m \leqslant i \leqslant m \end{cases} \tag{3.4}$$

з граничними умовами

$$\rho_i = 1, \ i > m,$$
$$\rho_i = 0, \ i < -m.$$

Позначимо $c_i = \sum\limits_{j>m} p_{i,j}$ — імовірність з точки i стрибнути в $[m{+}1, \infty)$. Тоді система (3.4) набуває вигляду

$$\begin{cases} \rho_i \ = \sum\limits_{j=-m}^{m} p_{i,j}\rho_j + c_i, \quad -m \leqslant i \leqslant m. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, знаходимо ρ_{-m} та $1 - \rho_m$. ◇

Розглянемо серію прикладів, які ілюструють умови теореми 3.2.1.

Приклад 3.2.5. Нехай[2] $m = 1$,

$$p_{i,i\pm1} = 1/2,\ i \notin \{-1, 1\},$$
$$p_{-1,-2} = q',\ p_{-1,0} = p',$$
$$p_{+1,0} = q'',\ p_{+1,+2} = p'',$$

де $q',\ p',\ q'',\ p''$ — додатні числа, такі що $q'+p' = q''+p'' = 1$.

Оскільки $p', p'' \in (0, 1)$, то всі стани ланцюга X сполучаються. Тоді (див. зауваження 3.2.3) виконуються умови пункту **A** теореми 3.2.1.

Запишемо систему (3.4):

$$\begin{cases} \rho_{-2} &= 0, \\ \rho_{-1} &= \sum\limits_{j=-2}^{2} p_{-1,j} \cdot \rho_j = q' \cdot \rho_{-2} + p' \cdot \rho_0, \\ \rho_0 &= \sum\limits_{j=-2}^{2} p_{0,j} \cdot \rho_j = 1/2 \cdot \rho_{-1} + 1/2 \cdot \rho_1, \\ \rho_1 &= \sum\limits_{j=-2}^{2} p_{1,j} \cdot \rho_j = q'' \cdot \rho_0 + p'' \cdot \rho_2, \\ \rho_2 &= 1. \end{cases} \tag{3.5}$$

Розв'язком цієї системи буде

$$\rho_{-1} = p'p''/(q' + p'')$$

та

$$\rho_1 = 1 - q'q''/(q' + p'').$$

Отже,

$$\mathrm{P}(\xi^{(-)} > 0) = p'p''/(q' + p'')$$

та

$$\mathrm{P}(\xi^{(+)} < 0) = q'q''/(q' + p'').$$

[2] Тут і далі мається на увазі що для m виконується (3.1).

Тоді за теоремою 3.2.1, граничний процес X_∞ є косим броунівським рухом з параметром

$$\gamma = \frac{p'p'' - q'q''}{p'p'' + q'q''} = \frac{p'(1-q'') - (1-p')q''}{p'p'' + q'q''} = \frac{p' - q''}{p'p'' + q'q''}. \qquad \diamond$$

Приклад 3.2.6. Нехай $m = 1$,

$$\begin{aligned}
&p_{i,i\pm 1} = 1/2,\ i \notin [-1,1],\\
&p_{0,0} = 1,\\
&p_{-1,-2} = q',\ p_{-1,+2} = p',\\
&p_{+1,-2} = q'',\ p_{+1,+2} = p'',
\end{aligned}$$

де $q',\ p',\ q'',\ p''$ — додатні числа, такі що $q'+p' = q''+p'' = 1$.

Оскільки $p', p'' \in (0,1)$, то стани $-m-1 = -2$ та $m+1 = 2$ ланцюга X сполучаються та є істотними.

Якщо $x_0 = 0$, то обидва ці стани є недосяжними, тобто виконуються умови пункту **Г** теореми 3.2.1, і розподіл граничного процесу X_∞ дорівнює $P_{0,0}$, тобто X_∞ тотожньо дорівнює нулю.

Якщо $x_0 \neq 0$, то обидва стани $-m-1$ та $m+1$ є досяжними, тобто виконуються умови пункту **А** теореми 3.2.1. Легко бачити, що

$$\xi^{(-)} \sim \begin{cases} -1, & q', \\ 1, & p' \end{cases},$$

та

$$\xi^{(+)} \sim \begin{cases} -1, & q'', \\ 1, & p'' \end{cases}.$$

Тому

$$\mathrm{P}(\xi^{(+)} < 0) = q'', \quad \mathrm{P}(\xi^{(-)} > 0) = p',$$

$$\mathrm{E}\xi^{(+)} = -1 \cdot q'' + 1 \cdot p'' = 1 - 2q'',$$

$$\mathrm{E}\xi^{(-)} = 2p'' - 1, \quad \mathrm{E}|\xi^{(\pm)}| = 1.$$

Таким чином, в цьому випадку X_∞ є косим броунівським рухом з параметром

$$\gamma = \frac{(1-2q'')p' + (2p'-1)q''}{p'+q''} = \frac{p'-q''}{p'+q''}.$$

$\diamond$

Приклад 3.2.7. Нехай $m = 1$, $x_0 < -1$,

$$p_{-1,+2} = p, \ p \in (0,1),$$
$$p_{-1,0} = 1 - p,$$
$$p_{0,0} = 1,$$
$$p_{+1,+2} = 1.$$

В цьому випадку стан $m+1 = 2$ є істотним та досягається ланцюгом X з імовірністю $p \in (0,1)$, а стан $-m-1 = -2$ є неістотним.

Таким чином, виконуються умови другої частини пункту **Б**, і розподіл граничного процесу X_∞ дорівнює

$$pP_{x_0,W_{+1}} + (1-p)P_{x_0,0}. \qquad \diamond$$

Приклад 3.2.8. Нехай $x_0 = 0$, $m = 2$,

$$p_{0,-3} = q, \ p_{0,+3} = p, \ p, q \in (0,1),$$
$$p_{0,1} = 1 - p - q,$$
$$p_{1,1} = 1,$$
$$p_{-2,-3} = p_{+2,+3} = 1.$$

В цьому випадку згідно першої частини пункту **В**, розподіл граничного процесу X_∞ дорівнює

$$qP_{0,W_{-1}} + pP_{0,W_{+1}} + (1-q-p)P_{0,0}. \qquad \diamond$$

Приклад 3.2.9. $\diamond$

Приклад 3.2.10. Теорема 3.2.1 узагальнює результат J.M. Harrison та L.A. Shepp (див. зауваження 3.1.4).

Дійсно, нехай мембрана складається з однієї точки, тобто $m = 0$, і нехай $p_{0,1} = p$ та $p_{0,-1} = q = 1-p$.

В цьому випадку величини $\xi^{(+)}$ та $\xi^{(-)}$ співпадають, $\mathrm{E}\xi^{(\pm)} = p - q$, $\mathrm{E}|\xi^{(\pm)}| = 1$, і (3.3) зводиться до

$$\gamma = p - q.$$

$\diamond$

Зауваження 3.2.11. Нехай $m = 0$. Тоді, аналогічно,

$$\xi^{(+)} \stackrel{d}{=} \xi^{(-)} \; (=: \xi)$$

і (3.3) зводиться до

$$\gamma = \frac{\mathrm{E}\xi}{\mathrm{E}|\xi|}.$$

Цей результат відмітили без доведення J.M. Harrison та L.A. Shepp. $\diamond$

3.2.2 Випадок неінтегровних стрибків

Якщо стрибки з мембрани неінтегровні, то граничним процесом може бути розривний процес. Ми будемо припускати, що стрибки з мембрани належать області притягання α-стійкого розподілу.

Нагадаємо відповідні означення.

Нехай $m = 0$, тоді

$$\xi^{(+)} \stackrel{d}{=} \xi^{(-)} \; (=: \xi),$$

тобто

$$p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = 1/2, \;\; |i| > 0,$$

$$p_{0,j} = \mathrm{P}(\xi = j), \;\; j \in \mathbb{Z}.$$

Припустимо, що додатня цілозначна випадкова величина ξ належить до області притягання α-стійкого розподілу U_α на $[0,\infty)$, $\alpha \in (0,1)$, тобто що існує така числова послідовність $\{a_n\}$, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \xi_k}{a_n} \overset{d}{=} U_\alpha, \tag{3.6}$$

де $\xi_k,\ k \geqslant 1$ — н.о.р. в.в. з розподілом ξ,

$$\mathrm{E} e^{-\lambda U_\alpha} = e^{-\lambda^\alpha},\ \lambda \geqslant 0.$$

Відомо, що якщо виконується (3.6), то має місце слабка збіжність в $\mathrm{D}([0,1])$

$$\frac{\sum_{k=1}^{[nt]} \xi_k}{a_n} \Rightarrow U_\alpha(t),\ n \to \infty,$$

де $U_\alpha(\cdot)$ — α-стійкий процес, тобто процес з незалежними однорідними приростами, такий що $U_\alpha(0) = 0$ і

$$\mathrm{E} e^{-\lambda U_\alpha(t)} = e^{-\lambda^\alpha t},\ t \geqslant 0,\ \lambda \geqslant 0.$$

Основним результатом роботи є наступне твердження.

Теорема 3.2.12. *Для довільного $T > 0$ послідовність процесів $\{X_n\}$ слабко збігається в $\mathrm{D}([0,1])$ до процесу вигляду*

$$X_\infty(t) = W(t) + U_\alpha\big(U_\alpha^{(-1)}(M(t))\big),\ t \geqslant 0,$$

де $(W(t))$ — вінерів процес,

$$M(t) = -\min_{s\in[0,t]} (W(s) \wedge 0),\ t \geqslant 0,$$

$(U_\alpha(t))$ — невід'ємний α-стійкий процес,

$$U_\alpha^{(-1)}(t) = \inf\{s \geqslant 0\colon U_\alpha(s) \geqslant t\},\ t \geqslant 0,$$

і процеси $(W(t))$ та $(U_\alpha(t))$ незалежні.

Зауваження 3.2.13. Якщо замість випадкової величини ξ взяти величину $\widetilde{\xi} = m\xi$, $m \in \mathbb{N}$, то граничний процес для послідовності $\{X_n\}$ не зміниться. $\diamond$

Зауваження 3.2.14. Процес X_∞ задовольняє наступну мартингальну проблему:

$$f(X_\infty(t)) - \tfrac{1}{2}\int_0^t f''(X_\infty(s))ds$$

є мартингалом для довільної $f \in \mathbb{C}^2([0,\infty))$ з компактним носієм, такої що

$$\int_0^t (f(u) - f(0))\mu(du) = 0, \qquad \diamond$$

Зауваження 3.2.15. Процес X_∞ є процесом Маркова. $\diamond$

3.3 Доведення теореми 3.2.1

Для доведення застосуємо теорему 2.5.1.

Отже, нехай $\alpha > 0$, і нехай $\alpha_1 \in (0,\alpha)$ довільне та фіксоване. Покладемо $\sigma_0^{(n)} := 0$,

$$\begin{aligned} \tau_k^{(n)} = \tau_k^{(n,\alpha_1,\alpha)} &:= \inf\{t \geqslant \sigma_{k-1}^{(n)},\ t \in \tfrac{1}{n}\mathbb{Z}_+ \colon |X_n(t)| \leqslant \alpha_1\} = \\ &= \inf\{t \geqslant \sigma_{k-1}^{(n)},\ t \in \tfrac{1}{n}\mathbb{Z}_+ \colon |X(nt)| \leqslant \alpha_1\sqrt{n}\}, \\ \sigma_k^{(n)} = \sigma_k^{(n,\alpha_1,\alpha)} &:= \inf\{t \geqslant \tau_k^{(n)},\ t \in \tfrac{1}{n}\mathbb{Z}_+ \colon |X_n(t)| \geqslant \alpha\} = \\ &= \inf\{t \geqslant \tau_k^{(n)},\ t \in \tfrac{1}{n}\mathbb{Z}_+ \colon |X(nt)| \geqslant \alpha\sqrt{n}\}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Для кожного $n \geqslant 1$ розглянемо процес $X_n^{(\alpha)}$, побудований по процесу X_n за допомогою вирізання часу $\cup_k[\tau_k^{(n,\alpha_1,\alpha)}, \sigma_k^{(n,\alpha_1,\alpha)})$.

В ролі X_0 в теоремі 2.4.1 будемо розглядати косий броунівський рух W_γ. Відмітимо, що до потрапляння в 0 процес W_γ поводиться як броунівський рух (див., напр., [25]). Тому зрозуміло, що умови **A2** та (2.12) виконуються. Умова (2.17) також виконується, оскільки косий броунівський рух має перехідну густину.

3.3.1 Розподіл в момент виходу з мембрани

Перевіримо умови **A1** та (2.13) для послідовності $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ з процесом W_γ в ролі X_0. Спочатку знайдемо умовний розподіл $W_\gamma(\sigma_k^{(0)})$ за умови $W_\gamma(\tau_k^{(0)}) = \alpha_1$. Цей розподіл зосереджено в точках $\pm\alpha$. Маси відповідних атомів дорівнюють імовірностям для процесу W_γ вийти з відрізка $[-\alpha,\alpha]$ через правий або лівий кінець, відповідно, за умови, що W_γ стартує з α_1. Аналогічним чином можна знайти умовний розподіл за умови $W_\gamma(\tau_k^{(0)}) = -\alpha_1$.

Відомо (див. напр. [43]), що функція шкали для косого броунівського руху W_γ має вигляд

$$\psi(x) = \begin{cases} x/p, & x \geqslant 0, \\ x/q, & x < 0, \end{cases}$$

де $p = \frac{1+\gamma}{2}, q = \frac{1-\gamma}{2}$. Тому

$$\mathrm{P}(W_\gamma(\sigma_k^{(0)}) = +\alpha \ / \ W_\gamma(\tau_k^{(0)}) = +\alpha_1) = \frac{\psi(\alpha_1) - \psi(-\alpha)}{\psi(\alpha) - \psi(-\alpha)},$$

$$\mathrm{P}(W_\gamma(\sigma_k^{(0)}) = +\alpha \ / \ W_\gamma(\tau_k^{(0)}) = -\alpha_1) = \frac{\psi(-\alpha_1) - \psi(-\alpha)}{\psi(\alpha) - \psi(-\alpha)}.$$

Аналогічно,

$$\mathrm{P}(W_\gamma(\sigma_k^{(0)}) = -\alpha \ / \ W_\gamma(\tau_k^{(0)}) = +\alpha_1) = \frac{\psi(\alpha) - \psi(\alpha_1)}{\psi(\alpha) - \psi(-\alpha)},$$

$$\mathrm{P}(W_\gamma(\sigma_k^{(0)}) = -\alpha \ / \ W_\gamma(\tau_k^{(0)}) = -\alpha_1) = \frac{\psi(\alpha) - \psi(-\alpha_1)}{\psi(\alpha) - \psi(-\alpha)}.$$

Розглянемо тепер розподіли $X_n(\sigma_k^{(n)})$. Позначимо $C_n = -[-\alpha\sqrt{n}]$.

Нехай $\rho_i^{(n)}$ позначає імовірність для $(X(k))$ з точки $i \in \{-C_n, \ldots, +C_n\}$ потрапити в точку $+C_n$, не потрапляючи до того в $(-\infty, C_n] \cup (C_n, +\infty)$.

Вказані імовірності задовольняють систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} \rho_{C_n}^{(n)} = 1, \\ \rho_i^{(n)} = \rho_{-C_n}^{(n)} = 0, \ |i| > C_n, \\ \rho_i^{(n)} = \frac{1}{2}\rho_{i-1}^{(n)} + \frac{1}{2}\rho_{i+1}^{(n)}, \ m < |i| < C_n, \\ \rho_{\pm m}^{(n)} = \sum\limits_{m<|j|\leqslant C_n} p_{\pm m,j}\rho_j^{(n)}, \end{cases}$$

де $p_{\pm m,j} = \mathrm{P}\big(\xi^{(\pm)} = j - m\,\mathrm{sign}(j)\big)$.

Розглянемо $\rho_i^{(n)}$ при $m \leqslant i \leqslant C_n$. Помітимо, що точки

$$(m, \rho_m^{(n)}),\ (m{+}1, \rho_{m+1}^{(n)}),\ \ldots,\ (C_n, \rho_{C_n}^{(n)})$$

лежать на одній прямій. Тому

$$\rho_{m+k}^{(n)} = \rho_m^{(n)} + \tfrac{k}{C_n'}(1 - \rho_m^{(n)}) = \rho_m^{(n)}(1 - \tfrac{k}{C_n'}) + \tfrac{k}{C_n'},\ k = \overline{0, C_n'},$$

де $C_n' = C_n - m$.

Аналогічно,

$$\rho_{-m-k}^{(n)} = \rho_{-m}^{(n)}(1 - \tfrac{k}{C_n'}),\ k = \overline{0, C_n'}.$$

Підставивши ці вирази в рівняння для $\rho_{\pm m}^{(n)}$ та переписавши отриману систему в термінах $\xi^{(+)}$ та $\xi^{(-)}$, отримуєм

$$\rho_m^{(n)}\big(C_n\mathrm{P}(\widetilde{\xi}_n^{(+)} < 0) + \mathrm{E}(\widetilde{\xi}_n^{(+)} \vee 0)\big) = \\ = \rho_{-m}^{(n)}\big(C_n\mathrm{P}(\widetilde{\xi}_n^{(+)} < 0) + \mathrm{E}(\widetilde{\xi}_n^{(+)} \wedge 0)\big) + \mathrm{E}(\widetilde{\xi}_n^{(+)} \vee 0),$$

$$\rho_{-m}^{(n)}\big(C_n\mathrm{P}(\widetilde{\xi}_n^{(-)} > 0) + \mathrm{E}(\widetilde{\xi}_n^{(-)} \wedge 0)\big) = \\ = \rho_m^{(n)}\big(C_n\mathrm{P}(\widetilde{\xi}_n^{(-)} > 0) - \mathrm{E}(\widetilde{\xi}_n^{(-)} \vee 0)\big) + \mathrm{E}(\widetilde{\xi}_n^{(-)} \vee 0),$$

де $\widetilde{\xi}_n^{(\pm)} := \xi^{(\pm)}\mathbb{1}_{|\xi^{(\pm)}|\leqslant C_n'}$. Таким чином,

$$\rho_m^{(n)} = \frac{C_n\mathrm{P}(\widetilde{\xi}_n^{(+)} < 0)\mathrm{E}(\widetilde{\xi}_n^{(-)} \vee 0) + C_n\mathrm{P}(\widetilde{\xi}_n^{(-)} > 0)\mathrm{E}(\widetilde{\xi}_n^{(+)} \vee 0) + A_n}{C_n\mathrm{P}(\widetilde{\xi}_n^{(+)} < 0)\mathrm{E}|\widetilde{\xi}_n^{(-)}| + C_n\mathrm{P}(\widetilde{\xi}_n^{(-)} > 0)\mathrm{E}|\widetilde{\xi}_n^{(+)}| + A_n},$$

де $A_n = \mathrm{E}(\widetilde{\xi}_n^{(+)} \wedge 0)\mathrm{E}(\widetilde{\xi}_n^{(-)} \vee 0) - \mathrm{E}(\widetilde{\xi}_n^{(+)} \vee 0)\mathrm{E}(\widetilde{\xi}_n^{(-)} \wedge 0)$.

Аналогічно,

$$\rho_{-m}^{(n)} = \frac{C_n \mathrm{P}(\widetilde{\xi}_n^{(+)} < 0)\mathrm{E}(\widetilde{\xi}_n^{(-)} \vee 0) + C_n \mathrm{P}(\widetilde{\xi}_n^{(-)} > 0)\mathrm{E}(\widetilde{\xi}_n^{(+)} \vee 0)}{C_n \mathrm{P}(\widetilde{\xi}_n^{(+)} < 0)\mathrm{E}|\widetilde{\xi}_n^{(-)}| + C_n \mathrm{P}(\widetilde{\xi}_n^{(-)} > 0)\mathrm{E}|\widetilde{\xi}_n^{(+)}| + A_n}.$$

Неважко переконатися, що для довільного $\alpha > 0$

$$\mathrm{P}\big(\widetilde{\xi}_n^{(\pm)} \neq \xi^{(\pm)}\big) \leqslant \mathrm{P}\big(|\xi^{(\pm)}| > C_n]\big) \to 0,\ n \to \infty$$

та

$$\lim_{n\to\infty} \rho_m^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \rho_{-m}^{(n)} = \\ = p = \frac{\mathrm{P}(\xi^{(+)} < 0)\mathrm{E}(\xi^{(-)} \vee 0) + \mathrm{P}(\xi^{(-)} > 0)\mathrm{E}(\xi^{(+)} \vee 0)}{\mathrm{P}(\xi^{(+)} < 0)\mathrm{E}|\xi^{(-)}| + \mathrm{P}(\xi^{(-)} > 0)\mathrm{E}|\xi^{(+)}|}. \quad (3.8)$$

З наведених міркувань випливає, що для довільного $\alpha > 0$ має місце рівномірна збіжність

$$\sup_{m\leqslant|i|\leqslant C_n} \Big|\rho_i^{(n)} - \frac{\psi(\frac{i}{n}) - \psi(-\alpha)}{\psi(\alpha) - \psi(-\alpha)}\Big| \to 0,\ n \to \infty.$$

Аналогічні формули справедливі й для імовірностей досягнення точки $-\alpha$. Зокрема, з них можна помітити, що імовірність вийти з відрізка $[-\alpha, \alpha]$ завдяки "великому" стрибку з мембрани прямує до нуля при $n \to \infty$.

Таким чином, умови **A1** та (2.12) виконуються.

3.3.2 Модуль неперервності для процесів X_n

Перевіримо умову (2.3) для процесів X_n. Достатньо показати, що

$$\forall\, T > 0\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \exists\, n_0\ \forall\, n \geqslant n_0$$

$$\mathrm{P}(\omega_{X_n}^T(\delta) \geqslant \varepsilon) \leqslant \varepsilon,$$

де $\omega_f(\delta) = \omega_f^T(\delta)$ — модуль неперервності функції f на $[0, T]$.

Порівняємо розподіли модуля неперервності процесу X_n з розподілами модуля неперервності нормованого симетричного випадкового блукання з одиничними стрибками. Для цього ми побудуємо певним чином копії цих процесів на спільному імовірнісному просторі.

Нехай $(S(k))$ — незалежне від ланцюга X симетричне випадкове блукання з одиничними стрибками.

Нехай ξ_k — стрибки з мембрани процесу X:

$$\xi_k = X(\tau_k) - m\,\mathrm{sign}(X(\tau_k)),\ k \geqslant 1,$$

де τ_k — послідовні моменти виходу процесу X з відрізка $[-m, m]$.

Введемо наступний допоміжний процес. Покладемо

$$\widetilde{X}(k) := S(k),\ k = \overline{0, t_1},$$

де t_1 — перший момент потрапляння процесу $\widetilde{X}$ в точку нуль.
Наступний приріст для $\widetilde{X}$ покладемо рівним ξ_1:

$$\widetilde{X}(t_1 + 1) := \widetilde{X}(t_1) + \xi_1 = 0 + \xi_1 = \xi_1.$$

Далі, нехай прирости процесу $\widetilde{X}$ такі ж, як і у S до моменту t_2 — моменту наступного потрапляння $\widetilde{X}$ в точку нуль:

$$\widetilde{X}(k) := \widetilde{X}(t_1 + 1) + S(k - 1),\ k = \overline{t_1 + 2, t_2}.$$

В точці $t_2 + 1$ додамо ξ_2 :

$$\widetilde{X}(t_2 + 1) := \xi_2,$$

і так далі.

Має місце представлення

$$\widetilde{X}(k) = S(k - r(k)) + \sum_{j=1}^{r(k)} \xi_j,$$

де $r(k) = r_{\widetilde{X}}(k)$ — кількість відвідувань нуля послідовністю $(\widetilde{X}(l),\ l = \overline{0,k})$.

Позначимо

$$S_n(t) = \tfrac{1}{\sqrt{n}}\big(S([nt]) + (nt - [nt])S([nt]+1)\big),\ t \geqslant 0.$$

$$\widetilde{X}_n(t) = \tfrac{1}{\sqrt{n}}\big(\widetilde{X}([nt]) + (nt - [nt])\widetilde{X}([nt]+1)\big),\ t \geqslant 0.$$

Неважко помітити рівність розподілів наступних випадкових процесів

$$\widetilde{X}_n(t) \overset{\mathrm{d}}{=} X_n^{(\tau,\widetilde{\tau})}(t) - \tfrac{m}{\sqrt{n}}\operatorname{sign}(X_n^{(\tau,\widetilde{\tau})}(t)),\ t \geqslant 0, \tag{3.9}$$

де $X_n^{(\tau,\widetilde{\tau})}$ — процес, отриманий з X_n вирізанням часу $\bigcup_{k\geqslant 1}[\tau_k, \widetilde{\tau}_k)$, де $\widetilde{\tau}_0 = 0$,

$$\tau_k = \tau_k^{(n)} := \inf\{t \geqslant \widetilde{\tau}_{k-1}^{(n)},\ t \in \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{N}\colon |X_n(t)| \leqslant m/\sqrt{n}\},\ k \geqslant 1,$$

$$\widetilde{\tau}_k = \widetilde{\tau}_k^{(n)} := \inf\{t \geqslant \tau_k^{(n)},\ t \in \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{N}\colon |X_n(t)| \geqslant (m+1)/\sqrt{n}\},\ k \geqslant 1.$$

З побудови процесу з вирізаним часом випливає, що

$$\omega_{X_n}(\delta) \leqslant \omega_{X_n^{(\tau,\widetilde{\tau})}}(\delta) + 2m/\sqrt{n},\ \delta > 0. \tag{3.10}$$

Порівняємо тепер модуль неперервності для послідовностей $S(k)$ та $\widetilde{X}(k)$, а потім і для процесів $S_n(t)$ та $\widetilde{X}_n(t)$. Розглянемо різницю $\widetilde{X}(l) - \widetilde{X}(k)$, де l та $k > l$ — деякі цілі числа з відрізка $[0, nT]$, а $r(n) = r_{\widetilde{X}}(n)$ — кількість відвідувань нуля послідовністю $(\widetilde{X}(i),\ i = \overline{0,n})$.

Помітимо, що для довільних $p \in \mathbb{N}$ та $0 \leqslant k < l \leqslant nT$

$$\sup_{|l-k|\leqslant p} |\widetilde{X}(l) - \widetilde{X}(k)| \leqslant 2 \sup_{|l-k|\leqslant p} |S(l) - S(k)| + \sup_{j\leqslant r(nT)} |\xi_j|.$$

Дійсно, якщо на якомусь відрізку часу не було потраплянь ланцюга Маркова $(\widetilde{X}(j), j \in [k,l])$ в 0, то $|\widetilde{X}(l) - \widetilde{X}(k)|$ не перевищує $\sup_{|j-i|\leqslant|l-k|} |S(j) - S(i)|$ за побудовою. В іншому випадку нехай $k_1 := \inf\{j \geqslant k\ :\ \widetilde{X}(j) = 0\}$, $l_1 := \sup\{j \leqslant l\ :\ \widetilde{X}(j) = 0\}$. Тоді

$$|\widetilde{X}(l) - \widetilde{X}(k)| \leqslant |\widetilde{X}(k_1) - \widetilde{X}(k)| + |\widetilde{X}(l_1) - \widetilde{X}(k_1)| + |\widetilde{X}(l_1+1) - \widetilde{X}(l_1)| +$$

$$+|\widetilde{X}(l)-\widetilde{X}(l_1+1)| = |\widetilde{X}(k_1)-\widetilde{X}(k)|+|\widetilde{X}(l_1+1)-\widetilde{X}(l_1)|+|\widetilde{X}(l)-\widetilde{X}(l_1+1)| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sup_{|j-i|\leqslant|l-k|} |S(j)-S(i)| + \sup_{j\leqslant r(nT)} |\xi_j|.$$

Таким чином, для довільного додатного δ маємо

$$\omega_{\widetilde{X}_n}(\delta) \leqslant 2\omega_{S_n}(\delta) + \tfrac{1}{\sqrt{n}} \sup_{j\leqslant r(nT)} |\xi_j|. \tag{3.11}$$

Тоді для довільного $\alpha > 0$

$$\mathrm{P}(\omega_{\widetilde{X}_n}(\delta) > \alpha) \leqslant \mathrm{P}(\omega_{S_n}(\delta) > \alpha/3) + \mathrm{P}(\tfrac{1}{\sqrt{n}} \sup_{j\leqslant r(nT)} |\xi_j| > \alpha/3). \tag{3.12}$$

Зі слабкої збіжності в $\mathrm{C}([0,1])$ послідовності S_n (теорема Донскера) в силу [75, теорема 8.2] випливає, що

$$\forall\varepsilon > 0\ \forall\alpha > 0\ \exists\delta > 0\ \exists n_1\ \forall n \geqslant n_1 :$$

$$\mathrm{P}(\omega_{S_n}(\delta) > \alpha/3) < \varepsilon/2.$$

Для оцінки другого доданку в (3.12) покажемо, що для довільного додатного δ

$$\mathrm{P}(\max_{j\leqslant r(n)} |\xi_j| > \delta\sqrt{n}) \to 0,\ n \to \infty.$$

Для довільного $x > 0$ оцінимо

$$\mathrm{P}(\max_{j\leqslant r(n)} |\xi_j| > \delta\sqrt{n}) \leqslant \mathrm{P}(r(n) > x\sqrt{n}) + \mathrm{P}(\max_{j\leqslant x\sqrt{n}} |\xi_j| > \delta\sqrt{n}). \tag{3.13}$$

Для оцінки першого доданку в правій частині (3.13) розглянемо блукання $\widetilde{S}$ з одиничними стрибками, побудоване спеціальним чином по траєкторіям процесу $\widetilde{X}$, а потім порівняємо кількість відвідувань нуля для $\widetilde{S}$ та X, див. нижче. Ідея полягає в тому, що при більших стрибках з нуля часу на те, щоб повернутись в нуль, треба більше, а кількість повернень буде, відповідно, менше.

Формально відповідну побудову можна реалізувати наступним чином. Покладемо

$$\widetilde{S}(k) := \widetilde{X}(k),\ k = \overline{0, \widetilde{t}_1},$$

де $\widetilde{t}_1 := \inf\{k\colon \widetilde{S}(k) = 0\}$ — момент першого відвідування нуля процесом $\widetilde{S}$. Далі, покладемо

$$\widetilde{S}(\widetilde{t}_1 + 1) := \mathrm{sign}(\widetilde{X}(t_1 + 1)),$$

де t_1 — момент першого відвідування нуля процесом $\widetilde{X}$.

Прирости процесу $\widetilde{S}$ скрізь до моменту $\widetilde{t}_2$ другого відвідування нуля нехай знов співпадають з відповідними приростами $\widetilde{X}$:

$$\widetilde{S}(\widetilde{t}_1 + 1 + k) := \widetilde{X}(t_1 + 1 + k) - \widetilde{X}(t_1 + 1),\ k = \overline{1, \widetilde{t}_2 - \widetilde{t}_1 - 1}$$

та

$$\widetilde{S}(\widetilde{t}_2 + 1) := \mathrm{sign}(\widetilde{X}(t_2 + 1)).$$

Подальша побудова проводиться аналогічно.

Тоді неважко помітити, що оскільки $|\widetilde{X}(t_i + 1)| \geqslant 1 = |\widetilde{S}(\widetilde{t}_i + 1)|$ та $|\widetilde{X}(k+1) - \widetilde{X}(k)| = 1,\ k \notin \{t_i\}$, то $\widetilde{t}_{i+1} - \widetilde{t}_i \leqslant t_{i+1} - t_i,\ i \geqslant 1$. Звідси випливає, що кількість $r_{\widetilde{X}}$ відвідувань нуля процесом $\widetilde{X}$ не перевищує кількість $r_{\widetilde{S}}$ відвідувань нуля процесом $\widetilde{S}$:

$$r_{\widetilde{X}}(k) \leqslant r_{\widetilde{S}}(k),\ k \geqslant 0. \tag{3.14}$$

Помітимо тепер, що $|\widetilde{S}(k)|,\ k = \overline{0, n}$ — модуль симетричного випадкового блукання. Тому кількість відвідувань нуля для $\widetilde{S}$ (або $|\widetilde{S}|$) має такий же розподіл, як і для звичайного симетричного випадкового блукання S з одиничними стрибками.

Для розподілів останнього відома асимптотика (див. напр. [87]):

$$\forall x > 0:\ \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(r_{\widetilde{S}}(n) \leqslant x\sqrt{n}) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz. \tag{3.15}$$

З (3.14), (3.15) випливає, що

$$\forall \varepsilon>0\ \exists x>0\ \exists n_0\ \forall n\geqslant n_0:$$

$$\mathrm{P}(r_{\widetilde{X}}(n)>x\sqrt{n})\leqslant \mathrm{P}(r_{\widetilde{S}}(n)>x\sqrt{n})<\varepsilon.$$

Оцінимо

$$\mathrm{P}\big(\max_{j\leqslant x\sqrt{n}}|\xi_j|>\delta\sqrt{n}\big)=\mathrm{P}\big(\bigcup_{j\leqslant x\sqrt{n}}\{|\xi_j|>\delta\sqrt{n}\}\big)\leqslant\sum_{j\leqslant x\sqrt{n}}\mathrm{P}\big(|\xi_j|>\delta\sqrt{n}\big)\leqslant$$
$$\leqslant[x\sqrt{n}]\left\{\mathrm{P}\left(|\xi^{(+)}|>\delta\sqrt{n}\right)+\mathrm{P}\left(|\xi^{(-)}|>\delta\sqrt{n}\right)\right\}\to 0, n\to\infty,$$

оскільки $\mathrm{E}\xi^{(\pm)}<\infty$ за припущенням теореми.

Отже, ми отримали (3.13), звідки з урахуванням (3.12) випливає, що

$$\forall\varepsilon>0\ \forall\alpha>0\ \exists\delta>0\ \exists n_0\ \forall n\geqslant n_0:$$

$$\mathrm{P}\big(\omega_{\widetilde{X}_n}(\delta)>\alpha\big)<\varepsilon. \tag{3.16}$$

Таким чином, оскільки (див. (3.9))

$$\mathrm{P}\big(\omega_{X_n^{(\tau,\widetilde{\tau})}}(\delta)>\alpha\big)\leqslant\mathrm{P}\big(\omega_{\widetilde{X}_n}(\delta)>\alpha-2m/\sqrt{n}\big)\leqslant\mathrm{P}\big(\omega_{\widetilde{X}_n}(\delta)>\alpha/2\big)$$

при $n>16m^2/\alpha^2$, то в силу (3.10) маємо, що

$$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0\ \exists\ n_0\ \forall\ n\geqslant n_0:$$

$$\mathrm{P}(\omega_{X_n}(\delta)\geqslant\varepsilon)\leqslant\mathrm{P}(\omega_{X_n^{(\tau,\widetilde{\tau})}}(\delta)\geqslant\varepsilon/2)\leqslant\varepsilon.$$

Таким чином, умова (2.3) виконується.

3.3.3 Умови малості часу, проведеного в околі нуля

В даному параграфі буде отримано співвідношення

$$\forall T>0\ \forall\delta>0:\ \lim_{\alpha\to0+}\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\left(\int_0^T \mathbb{1}_{|X_n(t)|\leqslant\alpha}dt>\delta\right)=0, \tag{3.17}$$

звідки, зокрема, буде випливати, що послідовність процесів $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ задовольняє умову (2.4).

Аналогічно до міркувань параграфа 3.3.2 побудуємо процеси $\widetilde{S}_n, \widetilde{X}_n, X_n^{(\tau,\widetilde{\tau})}$. Час, проведений процесом $\widetilde{S}_n(t), t \in [0,T]$ у відрізку $[-\alpha,\alpha]$, не перевищує аналогічного часу для $\widetilde{X}_n$. Тому для довільних $T>0, \delta>0$

$$\lim_{\alpha\to 0+}\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\int_0^T \mathbb{1}_{|\widetilde{X}_n(t)|\leqslant\alpha} dt > \delta\right) \leqslant \lim_{\alpha\to 0+}\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\int_0^T \mathbb{1}_{|\widetilde{S}_n(t)|\leqslant\alpha} dt > \delta\right). \tag{3.18}$$

Оскільки $|\widetilde{S}_n(t)|, t\in[0,T]$ слабко збігається до броунівського руху з відбиттям, то права частина (3.18) дорівнює 0. Відповідно,

$$\lim_{\alpha\to 0+}\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\int_0^T \mathbb{1}_{|X_n(t)|\in(\frac{m}{\sqrt{n}},\alpha]} dt > \delta\right) \leqslant \lim_{\alpha\to 0+}\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\int_0^T \mathbb{1}_{|\widetilde{X}_n(t)|\leqslant\alpha} dt > \delta\right) = 0.$$

Таким чином, для доведення (3.17), а отже, і теореми 3.2.1, достатньо перевірити, що

$$\forall T>0\ \forall\delta>0:\ \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\int_0^T \mathbb{1}_{|X_n(t)|\leqslant\frac{m}{\sqrt{n}}} dt > \delta\right) = 0. \tag{3.19}$$

Нехай випадкові величини $\zeta^{(+)}$, $\zeta^{(-)}$ мають такий же розподіл, як час, який проводить X в мембрані $\{-m,-m+1,\ldots,m\}$ при вході в неї через m або $-m$, відповідно. Позначимо через $r_X(k)$ кількість заходів послідовності $(X(i), 0\leqslant i\leqslant k)$ в мембрану, і нехай $\zeta_j^{(+)}$, $\zeta_j^{(-)}$, $j\geqslant 0$ — незалежні копії величин $\zeta^{(\pm)}$, також незалежні від $\widetilde{S}$. Легко бачити, що для довільних $x>0,\ k\in\mathbb{N}:$

$$\mathrm{P}(r_X(k)>x)\leqslant \mathrm{P}(r_{\widetilde{S}}(k)>x),$$

$$\mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{r_X(k)} \mathbb{1}_{|X(i)|\leqslant m} > x\right) \leqslant \mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{r_{\widetilde{S}}(k)} (\zeta_i^{(+)}+\zeta_i^{(-)}) > x\right).$$

Тому

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\int_0^T \mathbb{1}_{|X_n(t)|\leqslant\frac{m}{\sqrt{n}}} dt > \delta\right) \leqslant \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{r_{\widetilde{S}}([nT]+1)} \frac{\zeta_i^{(+)}+\zeta_i^{(-)}}{n} > \delta\right).$$

Аналогічно до міркувань § 3.3.2, з останньої нерівності та (3.15) отримуєм (3.19). Теорема 3.2.1 доведена.

3.4 Доведення теореми 3.2.12

3.4.1 Узагальнення задачі Скорохода про відбиття

Для доведення теореми 3.2.12 нам знадобиться наступне узагальнення задачі Скорохода про відбиття (див. напр. [52]).

Нехай $w \in \mathbb{C}([0,\infty))$, функція $f \in \mathcal{D}([0,\infty))$ зростає, $f(0) = 0$. Розглянемо систему рівнянь відносно пари невідомих функцій (X, L) :

$$X(t) = w(t) + f(L(t)),\ t \geqslant 0, \tag{3.20}$$

де $X(t) \geqslant 0,\ t \geqslant 0$, функція L неперервна та неспадна, $L(0) = 0$, і

$$\int_0^t 1\!\!1_{X_\infty(s)=0} dL(s) = L(t),\ t \geqslant 0.$$

Будемо називати цю систему задачею відбиття $W(w, f)$.

Якщо функція $f \in \mathcal{D}([0,\infty)),\ f(0) = 0$, строго зростає і $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, то ([52], теорема 1) існує єдиний розв'язок задачі (3.20), при цьому

$$L(t) = f^{(-1)}(-\min_{s\in[0,t]}(w(s) \wedge 0)),\ t \geqslant 0,$$

тобто

$$X(t) = w(t) + f\big(f^{(-1)}(-\min_{s\in[0,t]}(w(s) \wedge 0))\big),\ t \geqslant 0,$$

де $f^{(-1)}(x) = \inf\{y \geqslant 0 \colon f(y) \geqslant x\},\ x \geqslant 0.$

Зауваження 3.4.1. Якщо в задачі відбиття $W(w, f)$:

$$X(t) = w(t) + f(L(t)),\ t \geqslant 0,$$

замінити f на $\widetilde{f}(x) = f(Cx)$, де $C > 0$ довільне, то розв'язок X (але не L) не зміниться. ◇

Дійсно, помітимо, що

$$\widetilde{f}\big(\widetilde{f}^{(-1)}(x)\big) = f\big(C\inf\{y \geqslant 0\colon f(Cy) \geqslant x\}\big) =$$

$$= f\big(\inf\{Cy \geqslant 0\colon f(Cy) \geqslant x\}\big) = f\big(f^{(-1)}(x)\big),\ x \geqslant 0,$$

тому

$$X(t) = w(t) + \widetilde{f}\big(\widetilde{f}^{(-1)}(-\min_{s\in[0,t]}(w(s)\wedge 0))\big) =$$

$$= w(t) + f\big(f^{(-1)}(-\min_{s\in[0,t]}(w(s)\wedge 0))\big).$$

Зауваження 3.4.2. Якщо функція f неперервна, то $f\big(f^{(-1)}(x)\big) = x,\ x \geqslant 0$, і X є розв'язком такої ж задачі відбиття, як і для $f(x) = x$, розглянутої А.В. Скороходом [85]. $\diamond$

3.4.2 Побудова копії ланцюга X

Для доведення теореми 3.2.12 побудуємо копію ланцюга X наступним чином.

Нехай $(S(k), k \geqslant 0)$ — симетричне випадкове блукання на $\mathbb{Z}$. Довизначимо S для всіх $t \geqslant 0$ неперервно за лінійністю:

$$S(t) = S([t]) + (t - [t])\big(S([t]+1) - S([t])\big),\ t \geqslant 0.$$

Розглянемо задачу відбиття $W(S, F)$:

$$\widetilde{X}(t) = S(t) + F(L(t)),\ t \geqslant 0, \tag{3.21}$$

де

$$F(x) = x + \sum_{k=1}^{[x]}(\xi_k - 1),\ x \geqslant 0,$$

а $\xi_k,\ k \geqslant 1$ — н.о.р. в.в. з розподілом ξ, незалежні від S.

Зі сказаного вище випливає, що існує єдиний розв'язок $\widetilde{X}$ задачі (3.21). При цьому

$$L(t) = F^{(-1)}(-\min_{s\in[0,t]}(S(s)\wedge 0)),\ t \geqslant 0,$$

де $F^{(-1)}(x) = \inf\{y \geqslant 0 \colon F(y) \geqslant x\},\ x \geqslant 0.$

Неважко помітити, що $L(\cdot)$ — (неперервний та неспадний) кусково-лінійний процес, такий що при $t \in [k, k+1]$

$$\text{або } L(t) = L(k), \ \ \text{або } L(t) = L(k) + (t-k).$$

Зокрема,

$$L(k+1) - L(k) \in \{0, 1\},\ k \in \mathbb{N}.$$

Позначимо через $(t_i, i \geqslant 1)$ точки зростання функції $L([t]),\ t \geqslant 0$. Відмітимо, що t_i можуть набувати лише цілі значення. Помітимо також, що

$$L(k) = i \text{ при } k = \overline{t_i, t_{i+1}-1}. \tag{3.22}$$

Покладемо

$$\bar{X}(k) := 1 + \widetilde{X}(k),\ k = \overline{0, t_1{-}1},$$

$$\text{та } \bar{X}(t_1) := 0.$$

Далі, покладемо

$$\bar{X}(k+1) := 1 + \widetilde{X}(k),\ k = \overline{t_1{+}1, t_2{-}1},$$

$$\text{та } \bar{X}(t_2+1) := 0.$$

Далі,

$$\bar{X}(k+2) := 1 + \widetilde{X}(k),\ k = \overline{t_2{+}1, t_3{-}1},$$

$$\text{та } \bar{X}(t_3+2) := 0.$$

І так далі.

З урахуванням (3.22), вказану побудову можна записати більш компактно у вигляді

$$\bar{X}(k+L(k)) = 1 + \widetilde{X}(k),\ k \geqslant 0,$$

$$\bar{X}(t_j + L(t_j) - 1) = 0,\ j \geqslant 1.$$

Неважко переконатися, що побудована таким чином послідовність $(\bar{X}(k), k \in \mathbb{Z}_+)$ має такий самий розподіл як і ланцюг $(X(k), k \in \mathbb{Z}_+)$.

Для доведення теореми 3.2.12 достатньо перевірити, що $\bar{X}_n \Rightarrow X_\infty$ при $n \to \infty$, де $\bar{X}_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\bar{X}([nt]),\ t \geqslant 0,\ n \in \mathbb{N}$.

Помітимо, що має місце представлення

$$\widetilde{X}(t) = \bar{X}(\lambda(t)) - 1,\ t \geqslant 0,$$

де

$$\lambda(t) := t + \sum_{s \leqslant t} \mathbb{1}_{\bar{X}(s)=0}.$$

Можна показати (див. напр. [79]), що $\lambda(t) - t$ мало порівняно з t, тому (аналогічно до [79, Лема 2]) процеси $\bar{X}_n$ та $\widetilde{X}_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\widetilde{X}([nt]),\ t \geqslant 0,\ n \in \mathbb{N}$, близькі при $n \to \infty$.

Тоді для доведення теореми 3.2.12 залишається довести, що $\widetilde{X}_n \Rightarrow X_\infty$ при $n \to \infty$ в $\mathrm{D}([0,1])$.

3.4.3 Граничний перехід

Покажемо, що $\widetilde{X}_n \Rightarrow X_\infty$ при $n \to \infty$.

З (3.21) випливає, що

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\widetilde{X}(nt) = \frac{1}{\sqrt{n}}S(nt) + \frac{1}{\sqrt{n}}F(L(nt)),\ t \geqslant 0,\ n \in \mathbb{N}. \tag{3.23}$$

Добре відомо, що послідовність процесів

$$\left(S_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}S(nt),\ t \geqslant 0\right),\ n \in \mathbb{N},$$

слабко збігається в $C([0,1])$ до вінерового процесу (теорема Донскера, див. напр. [75]).

Розглянемо граничну поведінку другого доданку в (3.23).

Нагадаємо,

$$F(x) = x + \sum_{n=1}^{[x]} (\xi_k - 1),\ x \geqslant 0,$$

де розподіл величин ξ_k належить до області притягання розподілу U_α, тобто існує така числова послідовність $\{a_n\}$, що

$$\frac{F(nt)}{a_n} \Rightarrow U_\alpha(t),\ n \to \infty.$$

Виберемо $k(n) := \inf\{k \colon a_k \geqslant \sqrt{n}\}$; тоді

$$\frac{a_{k(n)}}{\sqrt{n}} \to 1,\ n \to \infty. \tag{3.24}$$

Останнє випливає з того, що $a_n \to \infty$ і $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$, $n \to \infty$ (див. напр. [20, §VIII.3, Lemma 3]).

Оскільки $\{k(n) \to \infty,\ n \to \infty\}$ — підпослідовність послідовності $\{n \to \infty\}$, то

$$\frac{F(k(n)t)}{a_{k(n)}} \Rightarrow U_\alpha(t),\ n \to \infty.$$

Тоді за (3.24),

$$F_n(t) := \tfrac{1}{\sqrt{n}} F(k(n)t) \Rightarrow U_\alpha(t),\ n \to \infty.$$

Враховуючи зауваження 3.4.1, процес $\widetilde{X}_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\widetilde{X}(nt)$ з задачі відбиття (3.23) співпадає з розв'язком задачі відбиття

$$\widetilde{X}_n(t) = S_n(t) + \tfrac{1}{\sqrt{n}} F(k(n)L(nt)) = S_n(t) + F_n(L_n(t)),\ t \geqslant 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

Нам знадобиться наступне твердження про неперервну залежність розв'язку задачі відбиття $W(w,f)$ від (коефіцієнтів) f та w.

Твердження 3.4.1. *Нехай* $\{f_n, n \geqslant 0\} \subset \mathcal{D}([0,\infty))$, $f_n(0) = 0$, f_n *строго зростають,*

$\{w_n, n \geqslant 0\} \subset \mathbb{C}([0,\infty))$,

і нехай (X_n, L_n) *— розв'язок задачі* $W(w_n, f_n)$, $n \geqslant 0$.

Припустимо, що

1) $f_n \to f_0$, $n \to \infty$ *в* $\mathcal{D}([0,\infty))$;

2) $w_n \to w_0$, $n \to \infty$ *в* $\mathbb{C}([0,\infty))$;

3) $lim_{x\to\infty} f_n(x) = +\infty,\ n \to \infty$;

4) для довільної точки розриву t_k *функції* f_0 *рівняння*

$$-\min_{s\in[0,t]}(w_0(s) \wedge 0) = f_0(t_k - 0), \tag{3.25}$$

має не більше одного розв'язку.

Тоді

$$X_n \to X_0,\ n \to \infty,\ \text{в}\ \mathcal{D}([0,\infty))$$

та

$$L_n \to L_0,\ n \to \infty,\ \text{в}\ \mathbb{C}([0,\infty)).$$

Це твердження випливає з [52, наслідки 1 та 2].

Повернемось до доведення теореми. Маємо,

$$S_n \Rightarrow W \text{ при } n \to \infty \text{ в } \mathrm{C}([0,1]),$$

$$F_n \Rightarrow U_\alpha \text{ при } n \to \infty \text{ в } \mathrm{D}([0,1]),$$

S_n та F_n незалежні.

За теоремою Скорохода про спільний імовірнісний простір [84, §I.6], існує імовірнісний простір, на якому задані копії процесів S_n, W, F_n та U_α, для яких мають місце збіжності майже напевно

$$\hat{S}_n \to \hat{W} \text{ при } n \to \infty \text{ в } \mathrm{C}([0,1]) \text{ м.н.}$$

та

$$\hat{F}_n \to \hat{U}_\alpha \text{ при } n \to \infty \text{ в } \mathrm{D}([0,1]) \text{ м.н.}$$

Застосуємо твердження 3.4.1 для процесу $\hat{W}$ в ролі w_0 та $\hat{U}_\alpha$ в ролі f_0.

Рівняння (3.25) в цьому випадку має вигляд

$$-\min_{s\in[0,t]}(\hat{W}(s) \wedge 0) = \hat{U}_\alpha(t_k - 0),$$

де $\hat{W}$ — вінерів процес, $\{t_k,\ k \geqslant 1\}$ — точки розриву процесу $\hat{U}_\alpha(\cdot)$.

Неважко перевірити, що оскільки $\hat{W}$ та $\hat{U}_\alpha$ незалежні, то це рівняння має не більше одного розв'язку.

Таким чином, на деякому імовірнісному просторі має місце збіжність

$$\hat{X}_n \to \hat{X}_\infty \text{ при } n \to \infty \text{ в } \mathrm{D}([0,1]) \text{ м.н.},$$

де $\hat{X}_\infty$ є розв'язком задачі відбиття

$$\hat{X}_\infty(t) = \hat{W}(t) + \hat{U}_\alpha(\hat{L}_\infty(t)),\ t \geqslant 0.$$

Тоді згідно з теоремою 1 з [52],

$$\hat{X}_\infty(t) = \hat{W}(t) + \hat{U}_\alpha\big(U_\alpha^{(-1)}(-\min_{s\in[0.t]}(\hat{W}(s) \wedge 0))\big),\ t \geqslant 0.$$

Розділ 4

Функціональні граничні теореми для розв'язків СДР з особливістю в точці

В даному розділі розглядається питання дослідження граничної поведінки послідовності розв'язків СДР

$$dX_n(t) = a_n(X_n(t))dt + \sigma_n(X_n(t))dW(t),\ t \geqslant 0,$$

з особливістю в околі точки нуль в двох випадках.

В першому випадку коефіцієнти будуть необмежені в околі точки нуль.

В другому випадку ліпшицевість коефіцієнтів буде порушуватись в нулі та дифузійний коефіцієнт буде вироджений в точці нуль.

Опишемо відповідні задачі.

4.1 Гранична поведінка розв'язків СДР з необмеженими в околі нуля коефіцієнтами

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння

$$dX(t) = a(X(t))dt + dW(t),\ t \geqslant 0, \tag{4.1}$$

де $a(\cdot)$ — локально інтегровна функція.

В даному розділі досліджується збіжність при $n \to \infty$ послідовності процесів $\{X(nt)/\sqrt{n},\ t \geqslant 0\}$.

Помітимо, що

$$dX_n(t) = \sqrt{n}a(\sqrt{n}X_n(t))dt + dW_n(t),\ t \geqslant 0,$$

де $W_n(t) = W(nt)/\sqrt{n}$, $t \geqslant 0$ — це процес Вінера та

$$X_n(t) = X(nt)/\sqrt{n},\ t \geqslant 0.$$

Тоді для дослідження послідовності $\{X(nt)/\sqrt{n}\}$ достатньо дослідити наступні СДР

$$dX_n(t) = a_n(X_n(t))dt + dW(t),\ t \geqslant 0,$$

де $a_n(x) = na(nx)$.

Якщо $a \in L_1(\mathbb{R})$, то a_n збігається в узагальненому сенсі до $\alpha\delta_0$, де δ_0 це дельта-функція Дірака в нулі, та $\alpha = \int_{\mathbb{R}} a(x)dx$.

Добре відомо (див. напр. [43,57]), що в цьому випадку послідовність $\{X_n\}$ слабко збігається до косого броунівського руху з параметром

$$\gamma = \mathrm{th}(\alpha) = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}.$$

Нагадаємо (див. [25,43]), що косий броунівський рух $W_\gamma(t)$ з параметром γ, $|\gamma| \leqslant 1$, це єдиний (сильний) розв'язок СДР

$$dW_\gamma(t) = dW(t) + \gamma dL^0_{W_\gamma}(t),$$

де
$$L^0_{W_\gamma}(t) = \lim_{\varepsilon\to 0+} (2\varepsilon)^{-1} \int_0^t \mathbb{1}_{|W_\gamma(s)|\leqslant\varepsilon} ds$$
це локальний час процесу W_γ в нулі.

Процес W_γ є неперервним процесом Маркова з перехідною щільністю
$$p_t(x,y) = \varphi_t(x-y) + \gamma\,\mathrm{sign}(y)\,\varphi_t(|x|+|y|),\ x,y\in\mathbb{R},$$
де $\varphi_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t}$ — це щільність нормального розподілу $N(0,t)$.

Помітимо також, що W_γ можна отримати з вінерівського процесу перегортанням його екскурсій (незалежно одна від одної) вгору та вниз з імовірностями $p = (1+\gamma)/2$ та $q = (1-\gamma)/2$, відповідно.

В роботах [37, 77] розглядались граничні теореми для випадку, коли a є неінтегровною функцією, такою що
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\int_0^x |va(v) - c_\pm| dv = 0, \quad |xa(x)| \leqslant C, \tag{4.2}$$
де $c_\pm > -1/2$ це константи. В цьому випадку, $a_n(x)$ при $n\to\infty$ збігається в деякому сенсі до $c_-\mathbb{1}_{x<0} + c_+\mathbb{1}_{x\geqslant 0}$.

Наприклад, якщо $a(x) = c_\pm/x$ при $\pm x > x_0$, то при $c_- < 1/2 < c_+$ послідовність $\{X_n\}$ слабко збігається до процесу Бесселя. Якщо $c_- = c_+ > -1/2$, то $|X_n|$ також збігається до процесу Бесселя. Питання слабкої збіжності послідовності X_n у випадку (напр.) $c_- = c_+ > -1/2$ або $c_- < c_+ \leqslant 1/2$ не розглядались.

В цьому розділі буде узагальнено результати робіт [57, 77] на випадок
$$a(x) = \widetilde{a}(x) + \frac{\bar{c}(x)}{x},\ x\in\mathbb{R},$$
де функція $\widetilde{a}(\cdot)$ інтегровна на $(-\infty;\infty)$ та
$$\bar{c}(x) = c_+\cdot\mathbb{1}_{x>1} + c_-\cdot\mathbb{1}_{x<-1},\ x\in\mathbb{R}.$$

4.1.1 Процес Бесселя та його узагальнення

Процес Бесселя. Означення, властивості

Нагадаємо означення та деякі властивості процесу Бесселя.

Нехай $\delta \geqslant 0$ та $x_0 \in \mathbb{R}$. Розглянемо

$$Z(x_0^2, t) = x_0^2 + 2\int_0^t \sqrt{|Z(x_0^2, s)|}dW(s) + \delta t,\ t \geqslant 0, \tag{4.3}$$

де $W(\cdot)$ — це процес Вінера.

Відомо (див. [59], XI.1, (1.1)), що існує єдиний розв'язок $Z(x_0^2, \cdot)$ рівняння (4.3). Цей розв'язок називається квадратом δ-вимірного процесу Бесселя. Процес $Z(x_0^2, \cdot)$ є невід'ємним м.н.

Означення 4.1.1. Процес $B_c(x_0, t) = \sqrt{Z(x_0^2, t)}$ з $x_0 \geqslant 0$ називається *(невід'ємним) процесом Бесселя* з параметром $c = (\delta-1)/2$.

Невід'ємний процес Бесселя $B_c(x_0, t)$ будемо іноді позначати $B_c^+(x_0, t)$.

Будемо називати процес $B_c^-(x_0, t) = -B_c(x_0, t) = -\sqrt{Z(x_0^2, t)}$ з $x_0 \leqslant 0$ *недодатнім процесом Бесселя.* $\diamond$

Нагадаємо наступні властивості процесу Бесселя (див. [59, Глава XI]).

Процес Бесселя $\xi(t) = B_c(x_0, t)$ задовольняє СДР

$$d\xi(t) = dW(t) + \frac{c}{\xi(t)}dt,\ t < T_0,$$

де $T_0 = \inf\{t \geqslant 0 \colon \xi(t) = 0\}$ — момент першого потрапляння в 0.

Якщо $\delta \geqslant 2$ (тобто $c \geqslant 1/2$), то процес Бесселя з імовірністю 1 не потрапляє в 0, якщо $x_0 > 0$.

Якщо $0 < \delta < 2$ (тобто $-1/2 < c < 1/2$), то з імовірністю 1 процес Бесселя потрапляє в 0, але проводить нульовий час в 0. Зокрема, якщо $\delta = 1$ (тобто $c = 0$), то процес Бесселя є броунівським рухом з відбиттям.

Якщо $\delta = 0$ (тобто $c = -1/2$), то з імовірністю 1 процес Бесселя потрапляє в 0 і залишається там назавжди.

Функція шкали процесу Бесселя B_c дорівнює

$$\psi_c(x) = \begin{cases} -x^{-2c+1} & \text{при } c > 1/2, \\ \ln x & \text{при } c = 1/2, \\ x^{-2c+1} & \text{при } c < 1/2, \end{cases} \tag{4.4}$$

тобто

$$P_x(T_a < T_b) = \frac{\psi_c(b) - \psi_c(x)}{\psi_c(b) - \psi_c(a)} \ \text{ для } 0 < a < x < b,$$

де $T_y = \inf\{t \geqslant 0 \ : \ B_c(t) = y\}$.

Перехідна щільність для $c > -1/2$, $x, y > 0$ та $t > 0$ дорівнює

$$p_t^c(x,y) = t^{-1}(y/x)^\nu y \exp(-(x^2+y^2)/2t) I_\nu(xy/t),$$

де I_ν — це модифікована функція Бесселя порядку $\nu = c - 1/2$.

Косий процес Бесселя

Нехай $c \in (-1/2, 1/2)$, і нехай $p_t^{0,c}(x,y)$ — це перехідна щільність процесу Бесселя B_c з вмиранням в 0.

Покладемо

$$p_t^{skew}(x,y) = p_t^{0,c}(|x|,|y|) \cdot \mathbb{1}_{xy>0} + \\ + \tfrac{1+\gamma \operatorname{sign} y}{2}\big(p_t^c(|x|,|y|) - p_t^{0,c}(|x|,|y|)\big), \ x, y \in \mathbb{R}.$$

Неважко перевірити, що ця функція задовольняє рівняння Колмогорова–Чепмена, є невід'ємною, та $\int_{\mathbb{R}} p_t^{skew}(x,y)dy = 1, \ x \in \mathbb{R}$.

Означення 4.1.2. Однорідний процес Маркова з перехідною щільністю p_t^{skew} називається *косим процесом Бесселя* $B_{c,\gamma}^{skew}$ з параметрами c та γ, $\gamma \in [-1, 1]$. ◇

Зауваження 4.1.3. Ми не розглядаємо косий процес Бесселя при $c \geqslant 1/2$, оскільки $B_c(x_0, \cdot)$ в цьому випадку не потрапляє в 0 при $x_0 \neq 0$. ◇

Зауваження 4.1.4. Аналогічно до косого броунівського руху, косий процес Бесселя B^{skew} можна отримати з невід'ємного процесу Бесселя шляхом перегортання його екскурсій вгору та вниз з імовірностями $p = \frac{1+\gamma}{2}$ та $q = \frac{1-\gamma}{2}$ відповідно — див. аргументацію в [6, §2].

Отже функція шкали косого процесу Бесселя дорівнює

$$\psi_{skew}(x) = (q\mathbb{1}_{x\geqslant 0} - p\mathbb{1}_{x<0})|x|^{-2c+1}, \ x \in \mathbb{R}. \tag{4.5}$$

Інші властивості косого процесу Бесселя див. в [8]. $\diamond$

Зауваження 4.1.5. Якщо $x_0 > 0$ та $p = 1$ (тобто $\gamma = 1$), то $B^{skew}_{c,\gamma}(x_0, \cdot)$ це (невід'ємний) процес Бесселя $B_c(x_0, \cdot)$ з параметром c:

$$B^{skew}_{c,1}(x_0, \cdot) \stackrel{d}{=} B_c(x_0, \cdot).$$

Крім того, модуль косого процесу Бесселя $|B^{skew}_{c,\gamma}|$ це (невід'ємний) процес Бесселя $B_c(x_0, \cdot)$ з параметром c:

$$|B^{skew}_{c,\gamma}(x_0, \cdot)| \stackrel{d}{=} B_c(x_0, \cdot).$$

Якщо $c = 0$, то $B^{skew}_{c,\gamma}$ це косий броунівський рух:

$$B^{skew}_{0,\gamma}(\cdot) \stackrel{d}{=} W_\gamma(\cdot). \qquad \diamond$$

4.1.2 Основні результати

Нехай

$$a(x) = \widetilde{a}(x) + \frac{\bar{c}(x)}{x}, \ x \in \mathbb{R},$$

де $\widetilde{a} \in L_1(\mathbb{R})$ та

$$\bar{c}(x) = c_+ \cdot \mathbb{1}_{x>1} + c_- \cdot \mathbb{1}_{x<-1}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Позначимо через $X_n(t), t \geqslant 0$, розв'язок СДР

$$\begin{cases} dX_n(t) = na(nX_n(t))dt + dW(t) = \\ \qquad\qquad = \left(n\widetilde{a}(nX_n(t)) + \frac{\bar{c}(nX_n(t))}{X_n(t)}\right) dt + dW(t),\ t \geqslant 0, \\ X_n(0) = x_0. \end{cases}$$

Існування та єдиність сильного розв'язку цього СДР випливає з [17, Теорема 4.53]. Наведемо твердження, яке випливає з частини 5 цієї теореми.

Теорема ([17, Теорема 4.53.(5)]). *Розглянемо рівняння*

$$X_t = X_0 + \int_o^t a(X_s)ds + \int_0^t b(X_s)dB_s. \tag{4.6}$$

Припустимо, що виконуються умови

$$\begin{cases} (i)\ \ E_b \subset N_a; \\ (ii)\ a \cdot b^{-2} \text{ локально інтегровна на } R \setminus E_b, \end{cases}$$

де

$$N_f = \{x \in \mathbb{R} \colon f(x) = 0\}$$

та

$$E_f = \{x \in \mathbb{R} \colon \int_G f^{-2}(y)dy = +\infty \text{ для всіх відкритих } G, G \ni x\}.$$

Припустимо, що $N_b \subset E_b$ та припустимо, що існують функції $f \colon \mathbb{R} \setminus E_b \to [0, +\infty]$ та $h \colon R \to [0, +\infty]$, такі що:

$$\begin{cases} (i)\ \ f \cdot b^{-2} \text{ локально інтегровна на } \mathbb{R} \setminus E_b, \\ (ii)\ \ \text{Для довільного околу нуля } U \\ \quad \int_U h^{-1}(y)dy = +\infty. \\ (iii)\ \text{Існує число } c > 0,\ \text{ таке що} \\ \quad (b(x+y) - b(x))^2 \leqslant f(x) \cdot h(y), \quad x, x+y \in \mathbb{R} \setminus E_b, \\ \quad y \in (-c, c). \end{cases} \tag{4.7}$$

Тоді розв'язок рівняння (4.6), *що задовольняє*

$$X_t = X_{t \wedge D_{E_b}(X)},\ t \geqslant 0,\ \text{м.н.}, \tag{4.8}$$

є потраекторно єдиним. Кожен розв'язок рівняння (4.6), *що задовольняє* (4.8), *є сильним розв'язком. Якщо додатково* $E_b \subset N_b$, *то для довільного процесу Вінера* (B, F) *існує потраекторно єдиний сильний розв'язок* (X, F) *рівняння* (4.6), *що задовольняє* (4.8).

Дійсно, оскільки в нашому випадку b тотожно дорівнює одиниці, то $N_b = E_b = \emptyset$, а функція $a \cdot 1$ є локально інтегровною, оскільки $\widetilde{a}$ є інтегровною за припущенням.

Основним результатом даного розділу є наступне твердження.

Теорема 4.1.6. *Якщо* c_+ *та* $c_- > -1/2$, *то послідовність процесів* $\{X_n\}$ *слабко збігається до граничного процесу* X_∞. *Зокрема:*

A1. Якщо

- *(a)* $x_0 > 0$ *та* $c_+ \geqslant 1/2$, *або*
- *(b)* $x_0 \geqslant 0$ *та* $c_- < c_+ < 1/2$, *або*
- *(c)* $x_0 = 0$ *та* $c_- < 1/2 \leqslant c_+$,

то

$$X_\infty(t) = B^+_{c_+}(x_0, t),\ t \geqslant 0.$$

A2. Аналогічно, якщо

- *(a)* $x_0 < 0$ *та* $c_- \geqslant 1/2$, *або*
- *(b)* $x_0 \leqslant 0$ *та* $c_+ < c_- < 1/2$, *або*
- *(c)* $x_0 = 0$ *та* $c_+ < 1/2 \leqslant c_-$,

то

$$X_\infty(t) = B^-_{c_-}(x_0, t), \ t \geqslant 0.$$

A3. Якщо $x_0 < 0$, $c_- < 1/2$ та $c_- < c_+$, то граничний процес поводиться як $B^-_{c_-}$ до моменту потрапляння в 0, а далі поводиться як $B^+_{c_+}$ тобто

$$X_\infty(t) = B^-_{c_-}(x_0, t) \cdot \mathbb{1}_{t \leqslant \tau} + B^+_{c_+}(0, t-\tau) \cdot \mathbb{1}_{t > \tau}, \ t \geqslant 0,$$

де $\tau = \inf\{t \geqslant 0 \colon X_\infty(t) \geqslant 0\} = \inf\{t \geqslant 0 \colon B^-_{c_-}(x_0, t) \geqslant 0\}$ та $B^\pm_{c_\pm}$ — незалежні (додатній та від'ємний) процеси Бесселя.

A4. Аналогічно, якщо $x_0 > 0$, $c_+ < 1/2$ та $c_+ < c_-$, то

$$X_\infty(t) = B^+_{c_+}(x_0, t) \cdot \mathbb{1}_{t \leqslant \tau} + B^-_{c_-}(0, t-\tau) \cdot \mathbb{1}_{t > \tau}, \ t \geqslant 0,$$

де $\tau = \inf\{t \geqslant 0 \colon X_\infty(t) \leqslant 0\}$.

A5. Якщо $c_+ = c_- =: c < 1/2$, то для довільного x_0

$$X_\infty(t) = B^{skew}_{c,\gamma}(x_0, t), \ t \geqslant 0,$$

де $\gamma = \operatorname{th}(\int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{a}(z)dz) = \frac{1-\exp\{-2\int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{a}(z)dz\}}{1+\exp\{-2\int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{a}(z)dz\}}$.

A6. Нарешті, якщо $x_0 = 0$, $c_+ \geqslant 1/2$ та $c_- \geqslant 1/2$, то розподіл граничного процесу X_∞ дорівнює

$$p \cdot \mathbb{P}_{B^+_{c_+}} + (1-p) \cdot \mathbb{P}_{B^-_{c_-}},$$

де

$$p = \frac{\int_0^\infty A(-y)(y \vee 1)^{-2c_-} dy}{\int_0^\infty \left(A(-y)(y \vee 1)^{-2c_-} + A(y)(y \vee 1)^{-2c_+}\right) dy} \tag{4.9}$$

$A(y) = \exp\{-2\int_0^y \widetilde{a}(z)dz\}$, а $\mathbb{P}_{B^\pm_{c_\pm}}$ — це розподіли додатнього та від'ємного процесів Бесселя $B^\pm_{c_\pm}(0, \cdot)$ зі стартом в 0.

Зауваження 4.1.7. Деякі з результатів теореми випливають з роботи [77]. Однак, тут застосовується загальний метод доведення, який підходить для всіх випадків одночасно.
Умова (4.2) є дещо слабкішою за $\tilde{a} \in L_1(\mathbb{R})$. Проте, на відміну від [77], ми не припускаємо, що $\sup_x |x\tilde{a}(x)| < \infty$. $\diamond$

4.1.3 Доведення теореми 4.1.6

З [41, §3] або [78, §3.7] випливає, що якщо виконується A1(a), то для довільного $\alpha > 0$ має місце збіжність

$$X_n(\cdot \wedge \tau^{n,\alpha}) \Rightarrow B^+_{c_+}(x_0, \cdot \wedge \tau^{0,\alpha}),\ n \to \infty,$$

де $\tau^{n,\alpha} = \inf\{t \geqslant 0\colon X_n(t) \leqslant \alpha\}$, $\tau^{0,\alpha} = \inf\{t \geqslant 0\colon B^+_{c_+}(x_0, t) \leqslant \alpha\}$. Тоді доведення випливає з того, що процес $B^+_{c_+}(x_0, \cdot)$ не потрапляє в 0. Випадок A2(a) розглядається аналогічно.

Для доведення інших пунктів теореми 4.1.6, ми застосуємо метод, запропонований в розділі 2.

Застосуємо теорему 2.4.4 для $\xi^{(n)} = X_n, n \geqslant 1$, та $\xi^{(0)} = X_\infty$ у випадках A1–A5 теореми. Випадок A6 буде розглянуто окремо.

Зауваження 4.1.8. Умова (2.23)

$$\xi^{(n)}_{x_n}(\sigma^{n,\alpha}) \Rightarrow \xi^{(0)}_{x_0}(\sigma^{0,\alpha}),\ n \to \infty$$

це єдина умова, яка при $x_0 = 0$ не виконується у випадку A6. Дійсно, для довільного $x > 0$ процес $B^+_{c_+}(x, \cdot)$ не потрапляє в 0. Тоді, якщо послідовність $\{x_n\} \subset (0, \infty)$ збігається до нуля достатньо повільно, то за умови $X_n(0) = x_n$ може виконуватись $X_n(\cdot) \Rightarrow B_+(0, \cdot)$ та $\lim_{n\to\infty} P(\exists t \geqslant 0\ X_n(t) = 0) = 0$. Конкретний вибір $\{x_k\}$ може бути зроблено за формулами (4.12), (4.13), наведеними нижче. Оскільки $B_+(0, \sigma^{0,\alpha}) = \alpha$ м.н., маємо $X_n(\sigma^{n,\alpha}) \Rightarrow \alpha$.

Якби всі x_n були від'ємними та також повільно збігалися до 0, то границя могла б бути $-\alpha$. $\diamond$

Умови (2.18)

$$\xi^{(n)}(0) \Rightarrow \xi^{(0)}(0)$$

та (2.21)

$$\int_0^\infty 1\!\!1_{\xi^{(0)}(t)=0} dt = 0 \ \text{ м.н.}$$

для процесів з теореми 4.1.6 очевидні.

Збіжність

$$\forall \alpha > 0 \quad \xi_{x_n}^{(n)}(\cdot \wedge \tau^{n,\alpha}) \Rightarrow \xi_{x_0}^{(0)}(\cdot \wedge \tau^{0,\alpha}), \ n \to \infty \tag{4.10}$$

випливає з [41, §3] або [78, §3.7]. Оскільки

$$P\left(\forall \varepsilon > 0 \ \exists t \in (\tau^{0,\alpha}, \tau^{0,\alpha} + \varepsilon) \ : \ |\xi_{x_0}^{(0)}(t)| < \alpha \ \middle| \ \tau^{0,\alpha} < \infty\right) = 1,$$

зі збіжності (4.10) випливає збіжність пар (2.22).

Перевіримо умову (2.19):

$$\forall T > 0 \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \geqslant n_0$$
$$\mathrm{P}\Big(\sup_{\substack{|s-t|<\delta,\\ s,t \in [0,T]}} |\xi^{(n)}(t) - \xi^{(n)}(s)| \geqslant \varepsilon \Big) \leqslant \varepsilon.$$

Покладемо

$$A(y) = \exp\{-2\int_0^y \widetilde{a}(z)dz\}, \ A_n(y) = \exp\{-2\int_0^y n\widetilde{a}(nz)dz\} = A(ny), \ y \in \mathbb{R},$$

$$\Phi_n(x) = \int_0^x A_n(y)dy, \ x \in \mathbb{R}.$$

Помітимо, що $\Phi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ це бієкція, $\Phi_n(0) = 0$, та

$$\exists L > 0 \ \ \forall n \ \ \forall x, y \in \mathbb{R} \quad L^{-1}|x - y| \leqslant |\Phi_n(x) - \Phi_n(y)| \leqslant L|x - y|.$$

З формули Іто випливає, що

$$d\Phi_n(X_n(t)) = A(nX_n(t))\left(\frac{\bar{c}(nX_n(t))}{X_n(t)}dt + dW(t)\right).$$

Отже,

$$|X_n(t) - X_n(s)| \leqslant L\left|\Phi_n(X_n(t)) - \Phi_n(X_n(s))\right| \leqslant$$
$$\leqslant L\left|\int_s^t A(nX_n(z))\frac{\bar{c}(nX_n(z))}{X_n(z)}dz\right| + L\left|\int_s^t A(nX_n(z))dW(z)\right|.$$

Нехай $|s-t| < \delta$ та $\Delta > 0$ фіксовані. Позначимо $f_n(t) := \int_0^t A(nX_n(z))dW(z)$.

a) Припустимо, що $|X_n(z)| > \Delta, z \in [s,t]$. Тоді

$$\left|\int_s^t A(nX_n(z))\frac{\bar{c}(nX_n(z))}{X_n(z)}dz\right| \leqslant C\delta/\Delta,$$

де $C = \|A\|_\infty \max(|c_-|, |c_+|) < \infty$. Отже, маємо наступну оцінку

$$|X_n(t) - X_n(s)| \leqslant LC\delta/\Delta + L\omega_{f_n}(\delta),$$

де $\omega_f(\delta) = \sup_{|s-t|<\delta,\ s,t\in[0,T]} |f(t) - f(s)|$ — це модуль неперервності.

b) Припустимо, що $|X_n(z_0)| \leqslant \Delta$ для деякого $z_0 \in [s,t]$.

Позначимо $\tau := \inf\{z \geqslant s : |X_n(z)| \leqslant \Delta\},\ \sigma := \sup\{z \leqslant t : |X_n(z)| \leqslant \Delta\}$. Тоді

$$|X_n(t) - X_n(s)| \leqslant |X_n(s) - X_n(\tau)| + |X_n(\sigma) - X_n(t)| + 2\Delta \leqslant$$

$$\leqslant 2LC\delta/\Delta + 2L\omega_{f_n}(\delta) + 2\Delta.$$

Таким чином, в довільному випадку, маємо наступну оцінку на модуль неперервності

$$\omega_{X_n}(\delta) \leqslant 2LC\delta/\Delta + 2L\omega_{f_n}(\delta) + 2\Delta.$$

Нехай $\Delta \leqslant \varepsilon/6$. Тоді для $\delta \leqslant \frac{\varepsilon\Delta}{6LC}$ маємо

$$\sup_n \mathrm{P}(\omega_{X_n}(\delta) \geqslant \varepsilon) \leqslant \sup_n \mathrm{P}(\varepsilon/3 + 2L\omega_{f_n}(\delta) + \varepsilon/3 \geqslant \varepsilon) =$$

$$= \sup_n \mathrm{P}(\omega_{f_n}(\delta) \geqslant \varepsilon/6L) \to 0,\ \delta \to 0+\,.$$

Остання збіжність випливає з того факту, що послідовність розподілів $\{f_n(\cdot) = \int_0^\cdot A(nX_n(z))dW(z)\}_{n\geqslant 1}$ є слабко відносно компактною в просторі неперервних функцій, оскільки функція A обмежена.

Перевіримо умову (2.23)

$$\xi^{(n)}_{x_n}(\sigma^{n,\alpha}) \Rightarrow \xi^{(0)}_{x_0}(\sigma^{0,\alpha}),\ n \to \infty$$

у випадках А1–А5.

Зауваження 4.1.9. З доведення нижче випливає, що умова (2.23) також виконується, якщо $x_n = 0$ для всіх $n \geqslant 0$. $\diamond$

Нехай $|x| < \alpha$. Неважко бачити, що $P_x(\sigma^{n,\alpha} < \infty) = 1,\ n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Оскільки процес X_n є неперервним, маємо $|X_n(\sigma^{n,\alpha})| = \alpha$ м.н.

Позначимо через $p^n_x = P_x(X_n(\sigma^{n,\alpha}) = \alpha),\ n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, імовірність потрапити в α раніше ніж в $-\alpha$ стартуючи з x.

Використовуючи формули (4.4), (4.5) для шкали процесу Бесселя та косого процесу Бесселя, неважко перевірити, що

$$p^\infty_x = \begin{cases} \mathbb{1}_{x\geqslant 0} - \left(1 - \frac{\psi_{c_-}(-x)}{\psi_{c_-}(\alpha)}\right)\mathbb{1}_{x<0} & \text{у випадках А1, А3,} \\ \frac{\psi_{c_+}(x)}{\psi_{c_+}(\alpha)} \cdot \mathbb{1}_{x>0} & \text{у випадках А2, А4,} \\ \frac{\psi_c(|x|)}{\psi_c(\alpha)}(q\mathbb{1}_{x\geqslant 0} - p\mathbb{1}_{x<0}) + p & \text{у випадку А5,} \end{cases} \tag{4.11}$$

де ψ_c задано в (4.4).

Маємо, для $n \in \mathbb{N}$ (див. [76, §15], [59])

$$p^n_x = \frac{\varphi_n(x) - \varphi_n(-\alpha)}{\varphi_n(\alpha) - \varphi_n(-\alpha)}, \tag{4.12}$$

де

$$\varphi_n(x) = \int_0^x \exp\{-2\int_0^y a_n(z)dz\}dy = \tag{4.13}$$

$$= \int_0^x \exp\{-2\int_0^y na(nz)dz\}dy = \tfrac{1}{n}\int_0^{nx} \exp\{-2\int_0^y a(z)dz\}dy = \tfrac{1}{n}\varphi(nx),$$

$$\varphi(x) := \int_0^x \exp\{-2\int_0^y a(z)dz\}dy.$$

Функція φ є зростаючою. З означення a випливає, що φ є обмеженою зверху (знизу) тоді і тільки тоді, коли $c_+ > 1/2$ ($c_- > 1/2$). Функція φ має наступну асимптотику:

$$\varphi(x) \sim \begin{cases} \pm A(\pm\infty)\frac{|x|^{1-2c_\pm}}{1-2c_\pm} & \text{якщо } \ c_\pm < 1/2, \\ \pm A(\pm\infty)\ln|x| & \text{якщо } \ c_\pm = 1/2, \end{cases} \qquad x \to \pm\infty, \tag{4.14}$$

де

$$A(y) = \exp\{-2\int_0^y \widetilde{a}(z)dz\},\ y \in \mathbb{R},$$

та

$$\lim_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = \varphi(\pm\infty) \in \mathbb{R} \ \text{ якщо } \ c_\pm > 1/2. \tag{4.15}$$

Умова (2.23) випливає з (4.11), (4.12), (4.13), (4.14), (4.15) у випадках A1–A5 (та у випадку A6 якщо $x_n = 0,\ n \geqslant 0$).

Покладемо $\tau_n = \inf\{t \geqslant 0 : |X_n(t)| \geqslant 1\}$.

Лема 4.1.10. *Припустимо, що*

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \sup_{|x|\leqslant 1} \sup_n \mathrm{E}_x \int_0^{\tau_n} 1\!\!1_{|X_n(t)|\leqslant\varepsilon} dt = 0. \tag{4.16}$$

Тоді виконується (2.20), *тобто*

$$\forall T > 0 \quad \lim_{\varepsilon\to 0+} \sup_n \mathrm{E} \int_0^T 1\!\!1_{|X_n(t)|\leqslant\varepsilon} dt = 0.$$

Доведення. Введемо позначення

$$S^0_{n,\pm} := 0, \quad T^k_{n,\pm} := \inf\{t \geqslant S^{k-1}_{n,\pm} \ : \ X_n(t) = \pm 1\},$$

$$S^k_{n,\pm} := \inf\{t \geqslant T^k_{n,\pm} \ : \ X_n(t) = \pm\varepsilon\},$$

$$\tilde{T}^k_{n,\pm} := \inf\{t \geqslant S^k_{n,\pm} \ : \ |X_n(t)| = 1\},$$

$$\beta^k_{n,\pm} := \int_{S^k_{n,\pm}}^{\tilde{T}^k_{n,\pm}} 1\!\!1_{|X_n(t)|\leqslant\varepsilon} dt, \quad \alpha^k_{n,\pm} := S^k_{n,\pm} - T^k_{n,\pm}, \ k \geqslant 1.$$

Тоді

$$\int_0^T 1\!\!1_{|X_n(t)|\leqslant\varepsilon} dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{\tau_n} 1\!\!1_{|X_n(t)|\leqslant\varepsilon} dt + \sum_k (\beta^1_{n,+} + ... + \beta^k_{n,+}) 1\!\!1_{\alpha^1_{n,+}<T,...,\alpha^k_{n,+}<T,\alpha^{k+1}_{n,+}\geqslant T} +$$

$$+ \sum_k (\beta^1_{n,-} + ... + \beta^k_{n,-}) 1\!\!1_{\alpha^1_{n,-}<T,...,\alpha^k_{n,-}<T,\alpha^{k+1}_{n,-}\geqslant T}$$

З сильної властивості Маркова випливає, що

$$\sum_k \mathrm{E}(\beta^1_{n,+} + ... + \beta^k_{n,+}) 1\!\!1_{\alpha^1_{n,+}<T,...,\alpha^k_{n,+}<T,\alpha^{k+1}_{n,+}\geqslant T} =$$

$$= \sum_k k \mathrm{E}_\varepsilon \int_0^{\tau_n} 1\!\!1_{|X_n(t)|\leqslant\varepsilon} dt \, (1 - p_{n,+})^k p_{n,+} = (p_{n,+})^{-1} \mathrm{E}_\varepsilon \int_0^{\tau_n} 1\!\!1_{|X_n(t)|\leqslant\varepsilon} dt,$$

де $p_{n,+} = \mathrm{P}_1(S^1_{n,+} \geqslant T)$.

Розглядаючи останній член окремо, отримуємо нерівність

$$\mathrm{E} \int_0^T 1\!\!1_{|X_n(t)|\leqslant\varepsilon} dt \leqslant \big(1 + (p_{n,+})^{-1} + (p_{n,-})^{-1}\big) \sup_{|x|\leqslant 1} \sup_n \mathrm{E}_x \int_0^{\tau_n} 1\!\!1_{|X_n(t)|\leqslant\varepsilon} dt.$$

Неважко бачити, що $\sup_n (p_{n,\pm})^{-1} < \infty$. Лему доведено. □

Перевіримо (4.16).

Відомо (див. [31, Chapter 4.3]), що $u_{n,\varepsilon}(x) := \mathrm{E}_x \int_0^{\tau_n} 1\!\!1_{|X_n(t)|\leqslant\varepsilon} dt$ має вигляд

$$u_{n,\varepsilon}(x) = \int_{-1}^1 G_n(x,y) 1\!\!1_{|y|\leqslant\varepsilon} \, m_n(dy), \tag{4.17}$$

де функція Гріна G_n дорівнює

$$G_n(x,y) = \begin{cases} \frac{(\varphi_n(x)-\varphi_n(-1))(\varphi_n(1)-\varphi_n(y))}{\varphi_n(1)-\varphi_n(-1)}, & x \leqslant y, \\ G_n(y,x), & x \geqslant y, \end{cases}$$

φ_n задано формулою (4.13),

$$m_n(dx) = \exp\{2\int_0^x a_n(z)dz\}dx.$$

Функція $u_{n,\varepsilon}(x)$ є узагальненим розв'язком (оскільки a_n може бути розривною) рівняння

$$1/2\, u''_{n,\varepsilon}(x) + a_n(x)u'_{n,\varepsilon}(x) = -1\!\!1_{|x|\leqslant\varepsilon}(x),\ |x| \leqslant 1,$$

з граничними умовами $u_{n,\varepsilon}(\pm 1) = 0$.

Пряма перевірка умови

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \sup_{|x|\leqslant 1} \sup_n u_{n,\varepsilon}(x) = 0$$

можлива, але дуже важка. Ми доведемо відповідну збіжність використовуючи теорему порівняння. Розглядається лише випадок коли a_n задовольняє умову Ліпшиця. Загальний випадок доводиться за апроксимацією розв'язками рівнянь з ліпшицевими коефіцієнтами.

З формули Іто-Танака випливає, що

$$d|X_n(t)| = \mathrm{sign}(X_n(t))\, a_n(X_n(t))dt + \mathrm{sign}(X_n(t))dW(t) + dl_n(t) =$$

$$= \mathrm{sign}(X_n(t))\, a_n(X_n(t))dt + dW_n(t) + dl_n(t),$$

де W_n це деякий вінерів процес, l_n це локальний час процесу X_n в нулі.

Нехай $-1/2 < c < \min(c_-, c_+, 0)$. З міркувань [51] випливає, що $|X_n(t)| \geqslant Y_n(t),\ t \geqslant 0$, де Y_n задовольняє наступне СДР з відбиттям в нулі

$$dY_n(t) = \bar{a}_n(Y_n(t))dt + dW_n(t) + d\tilde{l}_n(t).$$

Тут $W_n(t) = \int_0^t \mathrm{sign}(X_n(s))dW(s)$ — це вінерів процес, $\tilde{l}_n$ — це локальний час процесу Y_n в нулі, $\bar{a}_n(x) = n\bar{a}(nx)$, $\bar{a}(x) = -(|a(x)| + |a(-x)|) - \frac{c}{x}1\!\!1_{|x|>1} + r(x)$, r — це довільна недодатня функція, така що $\bar{a}$ задовольняє умову Ліпшиця. Будемо також припускати, що $\int_{\mathbb{R}} |r(x)|dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} |b(x)|dx$.

Ліпшицевість використовується тільки для застосування теореми порівняння.

Для доведення (4.16) достатньо перевірити, що

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{x\in[0,1]}\sup_n \bar u_{n,\varepsilon}(x) := \lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{x\in[0,1]}\sup_n \mathrm{E}_x\int_0^{\bar\tau_n} 1\!\!1_{Y_n(s)\in[0,\varepsilon]}ds = 0,$$

де $\bar\tau_n$ це момент потрапляння Y_n в $[1,\infty)$.

Відомо (див. [31]), що

$$\bar u_{n,\varepsilon}(x) = 2\int_x^1 \exp\{-2\int_1^y \bar a_n(z)dz\}\int_0^y 1\!\!1_{[0,\varepsilon]}(z)\exp\{2\int_1^y \bar a_n(z)dz\}dy$$

це (узагальнений) розв'язок рівняння

$$1/2\,\bar u''_{n,\varepsilon}(x) + \bar a_n(x)\bar u'_{n,\varepsilon}(x) = -1\!\!1_{[0,\varepsilon]},\ x\in[0,1],$$

з граничними умовами $u'_{n,\varepsilon}(0)=0,\ u_{n,\varepsilon}(1)=0$. Таким чином,

$$\sup_{x\in[0,1]}\sup_n \bar u_{n,\varepsilon}(x) = \bar u_{n,\varepsilon}(0) =$$
$$= 2\int_0^1 \exp\{-2\int_1^y \bar a_n(z)dz\}\int_0^y 1\!\!1_{[0,\varepsilon]}(z)\exp\{2\int_1^y \bar a_n(z)dz\}dy \leqslant$$
$$\leqslant K\int_0^1 \exp\{\int_0^y \bar y^{-2c}dz\}\int_0^y 1\!\!1_{[0,\varepsilon]}(z)\,y^{2c}dy, \tag{4.18}$$

де константа K залежить тільки від $\int_{\mathbb{R}}|b(x)|dx$ та c, і не залежить від n. За припущенням теореми, $c\in(-1/2,0)$. Тому права частина (4.18) прямує до 0 при $\varepsilon\to 0+$ за теоремою Лебега про мажоровану збіжність.

Теорему доведено для випадків A1–A5.

Розглянемо випадок A6. Помітимо, що умови (2.18)–(2.22) виконуються для $\xi^{(n)} = X_n, n\geqslant 1$, та $\xi^{(0)} = X_\infty$, де X_∞ задано в теоремі. Зокрема, з цього випливає, що послідовність розподілів випадкових процесів $\{X_n\}$ є слабко відносно компактною в просторі неперервних функцій. Виберемо довільну збіжну підпослідовність. Без втрати загальності, можна припускати, що

$\{X_n\}$ також слабко збігається до неперервного процесу X. Нехай $\delta > 0$, $\sigma^{n,\delta} = \inf\{t \geqslant 0 \ : \ X_n(t) = \delta\}$, $\sigma^{\delta} = \inf\{t \geqslant 0 \ : \ X(t) = \delta\}$. З формули для шкали для процесу $\{X_n\}$ випливає, що $\lim_{n\to\infty} P(X_n(\sigma^{n,\delta}) = \delta) = p$, $\lim_{n\to\infty} P(X_n(\sigma^{n,\delta}) = -\delta) = 1 - p$, де p задано в (4.9).

З (2.20), (2.22) випливає, що граничний процес виходить з інтервалу $[-\delta, \delta]$ з імовірністю 1.

Помітимо, що для м.в. $\delta > 0$ відносно міри Лебега розподіл $X_n(\sigma^{n,\delta} + \cdot)$ слабко збігається при $n \to \infty$ до розподілу $X(\sigma^{\delta} + \cdot)$. Дійсно, за теоремою Скорохода про спільний ймовірнісний простір (див. [84]), без втрати загальності можна вважати, що послідовність $\{X_n(\cdot)\}$ з імовірністю 1 збігається до $X(\cdot)$ рівномірно на компактах. Для простоти будемо вважати, що збіжність виконується для всіх ω, і що $\sigma^{n,\delta}, \sigma^{\delta} < \infty$ для всіх $\omega, n, \delta > 0$. Отже, ми встановимо збіжність

$$X_n(\sigma^{n,\delta} + \cdot) \to X(\sigma^{\delta} + \cdot) \tag{4.19}$$

якщо доведемо, що

$$\sigma^{n,\delta} \to \sigma^{\delta}, \ n \to \infty. \tag{4.20}$$

Збіжність (4.20) може не виконуватись лише якщо σ^{δ} це точка локального максимуму X. За означенням, σ^{δ} це точка строгого локального максимуму X зліва. Множина точок локального максимуму, які є точками строгого максимуму зліва, є не більше ніж зліченною. З цього випливає, що для м.в. ω та м.в. $\delta > 0$ відносно міри Лебега має місце збіжніть (4.20), а отже і (4.19).

З іншого боку, розподіл $X_n(\sigma^{n,\delta} + \cdot)$ слабко збігається при $n \to \infty$ до розподілу процесу $1\!\!1_{\Omega_-} B^{-}_{c_-}(-\delta, \cdot) + 1\!\!1_{\Omega_+} B^{+}_{c_+}(\delta, \cdot)$, де $P(\Omega_-) = 1 - p$, $P(\Omega_+) = p$, та σ-алгебра $\{\emptyset, \Omega_-, \Omega_+, \Omega\}$ не залежить від $\sigma(B^{\pm}_{c_\pm}(\pm\delta, t), t \geqslant 0)$.

Нагадаємо, що з припущень теореми випливає, що

$$P\left(\exists t \geqslant 0 : B^{\pm}_{c_\pm}(\pm\delta, t) = 0\right) = 0.$$

З (2.20) випливає, що

$$P\left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{X(s)=0} ds = 0\right) = 1.$$

Отже, маємо збіжність в $C([0,\infty))$ м.н.

$$X(\sigma^\delta + \cdot) \to X(\cdot),\ \delta \to 0.$$

Процеси $\mathbb{1}_{\Omega_-} B^-_{c_-}(-\delta,\cdot) + \mathbb{1}_{\Omega_+} B^+_{c_+}(\delta,\cdot)$ збігаються за розподілом до

$$\mathbb{1}_{\Omega_-} B^-_{c_-}(0,\cdot) + \mathbb{1}_{\Omega_+} B^+_{c_+}(0,\cdot),$$

де σ-алгебри $\{\emptyset, \Omega_-, \Omega_+, \Omega\}$ та $\sigma(B^\pm_{c_\pm}(0,t), t \geqslant 0)$ незалежні.

Теорему 4.1.6 доведено.

4.2 Гранична поведінка розв'язків СДР з виродженими коефіцієнтами, збурених малим шумом

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння

$$\begin{aligned} &dX(t) = a(X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t),\ t \geqslant 0, \\ &X(0) = 0, \end{aligned} \tag{4.21}$$

де $W(\cdot)$ — вінерів процес,

$$\begin{aligned} a(x) &= a_\pm |x|^\alpha \operatorname{sign} x = a_+|x|^\alpha \mathbb{1}_{x\geqslant 0} - a_-|x|^\alpha \mathbb{1}_{x<0}, \\ \sigma(x) &= b_\pm |x|^\beta = b_+|x|^\beta \mathbb{1}_{x\geqslant 0} + b_-|x|^\beta \mathbb{1}_{x<0}, \end{aligned} \tag{4.22}$$

де $a_\pm > 0,\ b_\pm \geqslant 0,\ \alpha, \beta > 0$.

Розглянемо випадок, коли

$$\alpha < 1 \text{ та } \alpha - 2\beta + 1 < 0. \tag{4.23}$$

Тоді коефіцієнт переносу не задовольняє умову Ліпшиця в точці 0, а дифузійний коефіцієнт вироджений в 0.

Відомо, що у випадку (4.23) існують (слабкі) розв'язки рівняння (4.21), але не виконується умова єдиності розв'язку; при цьому, точка 0 є право- та лівосторонньою точкою виходу, але не є точкою входу (див. [12], §5.1). Тобто, якщо $X(t_0) \neq 0$ для деякого розв'язку X та деякого t_0, то $X(t) \neq 0$ при $t \geqslant t_0$ м.н. Крім того, існують єдині розв'язки X_+ та X_- рівняння (4.21), такі що $X_\pm(0) = 0$ та

$$\begin{aligned} &X_+(t) > 0 \text{ при } t > 0 \text{ м.н.}, \\ &X_-(t) < 0 \text{ при } t > 0 \text{ м.н.} \end{aligned} \tag{4.24}$$

В роботі [5] розглядався частковий випадок рівняння (4.21) при $b_\pm = 0$. Для цього випадку був запропонований наступний спосіб селекції розв'язку.

Розглянемо рівняння

$$\begin{aligned} &dX(t) = a(X(t))dt,\ t \geqslant 0, \\ &X(0) = 0, \end{aligned}$$

де функцію a задано в (4.22). Відмітимо, що якщо $\alpha < 1$, то a не задовольняє умову Ліпшиця, а процеси $X_\pm$ з (4.24) набувають вигляд

$$X_\pm(t) = \pm((1-\alpha)\, a_\pm t)^{1/(1-\alpha)},\ t \geqslant 0. \tag{4.25}$$

Нехай $\varepsilon > 0$. Розглянемо випадкове збурення цього рівняння малим шумом:

$$\begin{aligned} &dX_\varepsilon(t) = a(X_\varepsilon(t))dt + \varepsilon dW(t),\ t \geqslant 0, \qquad (4.26) \\ &X_\varepsilon(0) = 0. \end{aligned}$$

Рівняння (4.26) має єдиний розв'язок (див. [26]). Метою роботи [5] було знаходження границі $\{X_\varepsilon\}$ при $\varepsilon \to 0$. Було встановлено (див. [5], приклад 4.5), що послідовність $\{X_\varepsilon\}$ слабко збігається до граничного процесу з розподілом

$$p\,\mathbb{P}_{X_+} + (1-p)\,\mathbb{P}_{X_-},$$

де

$$p = \frac{(a_+)^{1/(\alpha+1)}}{(a_+)^{1/(\alpha+1)} + (a_-)^{1/(\alpha+1)}},$$

а $\mathbb{P}_{X_+}$ та $\mathbb{P}_{X_-}$ — розподіли процесів X_+ та X_-, заданих в (4.25).

Цей результат узагальнювався на звичайні диференціальні рівняння з неліпшицевими коефіцієнтами в роботах [4, 13, 14, 35, 53]

В даній роботі результат [5] узагальнено на випадок стохастичного диференціального рівняння (4.21).

4.2.1 Постановка задачі

Нехай $\varepsilon > 0$. Розглянемо наступне збурення рівняння (4.21) :

$$\begin{aligned} &dX_\varepsilon(t) = a(X_\varepsilon(t))dt + (\varepsilon + \sigma(X_\varepsilon(t)))dW(t),\ t \geqslant 0, \\ &X_\varepsilon(0) = 0, \end{aligned} \tag{4.27}$$

де $a(\cdot)$ та $\sigma(\cdot)$ задані в (4.22), $a_\pm > 0,\ b_\pm \geqslant 0,\ \alpha, \beta > 0$.

Оскільки $\sigma_\varepsilon(x) = \varepsilon + \sigma(x)$ відокремлено від нуля, то існує єдиний розв'язок рівняння (4.27) (див. [26]).

Метою даного параграфа є дослідження граничної поведінки послідовності процесів $X_\varepsilon(\cdot)$ при $\varepsilon \to 0$.

4.2.2 Основний результат

Нехай для $\varepsilon > 0$ процес $X_\varepsilon(\cdot)$ є розв'язком рівняння (4.27).

Теорема 4.2.1. *Припустимо, що виконується умова* (4.23).

Тоді $\{X_\varepsilon\}$ *слабко збігається в* $\mathrm{C}([0,1])$ *при* $\varepsilon \to 0$ *до граничного процесу* X_∞ *з розподілом*

$$p\,\mathbb{P}_{X_+} + (1-p)\,\mathbb{P}_{X_-},$$

де

$$p = \frac{(a_+)^{1/(\alpha+1)}}{(a_+)^{1/(\alpha+1)} + (a_-)^{1/(\alpha+1)}},$$

$\mathbb{P}_{X_+}$ *та* $\mathbb{P}_{X_-}$ *— розподіли розв'язків* X_+ *та* X_-*, що задовольняють* (4.24).

Доведення спирається на міркування, аналогічні доведенню теореми 2.4.1. Таким чином, для доведення теореми 4.2.1 достатньо довести, що для довільного $\delta > 0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} p_0^{(\varepsilon)} = p, \tag{4.28}$$

де $p_0^{(\varepsilon)} = p_0^{(\varepsilon)}(\delta, -\delta)$ це імовірність для процесу X_ε з точки 0 потрапити в точку $\delta > 0$ раніше ніж в точку $-\delta$.

Відомо (див. [76]), що

$$p_0^{(\varepsilon)} = \frac{\varphi_\varepsilon(0) - \varphi_\varepsilon(-\delta)}{\varphi_\varepsilon(\delta) - \varphi_\varepsilon(-\delta)},$$

де φ_ε — це функція шкали:

$$\varphi_\varepsilon(x) = \int_0^x \exp\{-2\int_0^y \frac{a(z)}{\sigma^2(z)}dz\}dy =$$

$$= \int_0^x \exp\{-2\int_0^y \frac{a_\pm |z|^\alpha \operatorname{sign} z dz}{(\varepsilon + b_\pm |z|^\beta)^2}\}dy \tag{4.29}$$

Таким чином,

$$p_0^{(\varepsilon)} = \frac{0 - \varphi_\varepsilon(-\delta)}{\varphi_\varepsilon(\delta) - \varphi_\varepsilon(-\delta)} = \frac{1}{1 - \varphi_\varepsilon(\delta)/\varphi_\varepsilon(-\delta)}.$$

Для знаходження асимптотики відношення $\varphi_\varepsilon(\delta)/\varphi_\varepsilon(-\delta)$ при $\varepsilon \to 0$ перетворимо вираз (4.29) наступним чином.

Нехай $x > 0$. Покладемо $\widetilde{z} = \varepsilon^{-1/\beta} z$, тоді

$$\varphi_\varepsilon(x) = \int_0^x \exp\{-2\int_0^{y\varepsilon^{-1/\beta}} \frac{a_+ \widetilde{z}^\alpha \varepsilon^{\alpha/\beta}\varepsilon^{1/\beta} d\widetilde{z}}{(\varepsilon + \varepsilon b_+ \widetilde{z}^\beta)^2}\}dy =$$

$$= \int_0^x \exp\{-2\varepsilon^{\frac{\alpha+1-2\beta}{\beta}} \int_0^{y\varepsilon^{-1/\beta}} \frac{a_+ \widetilde{z}^\alpha d\widetilde{z}}{(1 + b_+ \widetilde{z}^\beta)^2}\}dy.$$

Покладемо $\widetilde{y} = \varepsilon^{-1/\beta} y$, тоді

$$\varphi_\varepsilon(x) = \int_0^{\varepsilon^{-1/\beta}x} \exp\{-2\varepsilon^{\frac{\alpha+1-2\beta}{\beta}} \int_0^{\widetilde{y}} \frac{a_+ \widetilde{z}^\alpha d\widetilde{z}}{(1+b_+\widetilde{z}^\beta)^2}\} \varepsilon^{1/\beta} d\widetilde{y}.$$

Аналогічно розглянувши випадок $x < 0$, одержимо, що в загальному випадку,

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{1/\beta} \operatorname{sign} x \int_0^{\varepsilon^{-1/\beta}|x|} \exp\{-2\varepsilon^{\frac{\alpha+1-2\beta}{\beta}} \int_0^{y} \frac{a_\pm z^\alpha dz}{(1+b_\pm z^\beta)^2}\} dy.$$

Перевіримо, що

$$\int_0^y \frac{z^\alpha dz}{(1+b_\pm z^\beta)^2} \sim \frac{y^{\alpha+1}}{\alpha+1},\ y \to 0.$$

Дійсно, за правилом Лопіталя,

$$\lim_{y\to 0} \frac{\int_0^y z^\alpha (1+b_\pm z^\beta)^{-2} dz}{y^{\alpha+1}(\alpha+1)^{-1}} = \lim_{y\to 0} \frac{y^\alpha (1+b_\pm y^\beta)^{-2}}{y^\alpha} = 1.$$

Тоді за лемою 1.3 Гл. 2 з [86, с. 33], для довільного $A > 0$

$$\int_0^A \exp\{-2\varepsilon^{\frac{\alpha+1-2\beta}{\beta}} \int_0^y \frac{a_\pm z^\alpha dz}{(1+b_\pm z^\beta)^2}\} dy =$$

$$= \tfrac{1}{\alpha+1}\Gamma(\tfrac{1}{\alpha+1})(1+o(1))(\tfrac{2a_\pm}{\alpha+1}\varepsilon^{\frac{\alpha+1-2\beta}{\beta}})^{-1/(\alpha+1)} =$$

$$= C_1(1+o(1))(a_\pm \varepsilon^{\frac{\alpha+1-2\beta}{\beta}})^{-1/(\alpha+1)} \tag{4.30}$$

при $\varepsilon \to 0$, де

$$C_1 = \tfrac{1}{\alpha+1}\Gamma(\tfrac{1}{\alpha+1})(\tfrac{2}{\alpha+1})^{-1/(\alpha+1)}.$$

Оцінимо

$$\int_A^{\varepsilon^{-1/\beta}\delta} \exp\{-2\varepsilon^{\frac{\alpha+1-2\beta}{\beta}} \int_0^y \frac{a_\pm z^\alpha dz}{(1+b_\pm z^\beta)^2}\} dy \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon^{-1/\beta}\delta \max_{y \geqslant A} (\exp\{-2\varepsilon^{\frac{\alpha+1-2\beta}{\beta}} \int_0^y \frac{a_\pm z^\alpha dz}{(1+b_\pm z^\beta)^2}\}) =$$

$$= \varepsilon^{-1/\beta}\delta \cdot \exp\{-C_2 a_\pm \varepsilon^{\frac{\alpha+1-2\beta}{\beta}}\}, \tag{4.31}$$

де

$$C_2 = 2\int_0^A \frac{z^\alpha dz}{(1+b_\pm z^\beta)^2} > 0.$$

Оскільки $\alpha + 1 - 2\beta < 0$ та $\beta > 0$, то з (4.30) та (4.31) маємо, що

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varphi_\varepsilon(\delta)}{\varphi_\varepsilon(-\delta)} = -\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(a_+\varepsilon^{\frac{\alpha+1-2\beta}{\beta}})^{-1/(\alpha+1)}}{(a_-\varepsilon^{\frac{\alpha+1-2\beta}{\beta}})^{-1/(\alpha+1)}} = -(a_+/a_-)^{-1/(\alpha+1)}.$$

Звідси випливає (4.28), що доводить теорему 4.2.1.

Висновки

Дисертаційна робота присвячена дослідженню функціональних граничних теорем для випадкових процесів зі збуренням.

Основні результати дисертаційної роботи:

- Розроблено загальний метод отримання функціональних граничних теорем для випадкових процесів з локальним збуренням, що мають властивість регенерації.

- Для послідовностей симетричних випадкових блукань з інтегровним локальним збуренням доведено слабку збіжність в просторі неперервних функцій та проведено повну класифікацію можливих граничних процесів в термінах перехідних імовірностей збурення.

- Досліджено граничну поведінку симетричного випадкового блукання з відбиваючим бар'єром в точці нуль. Для випадку неінтегровних стрибків з бар'єру, які належать до області притягання α-стійкого розподілу, доведено слабку збіжність в просторі Скорохода до броунівського руху з відбиттям в нулі та граничними умовами типу Вентцеля–Феллера.

- Встановлено граничну поведінку послідовностей розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з необмеженими в околі особливої точки коефіцієнтами. Проведено повну класифікацію можливих граничних процесів в залежності від поведінки розв'язків в околі особливої точки.

- Для послідовностей розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з неліпшицевими та виродженими в околі особливої точки коефіцієнтами розглянуто збурення малим шумом та доведено слабку збіжність в просторі неперервних функцій.

Запропоновані в дисертаційній роботі загальні методи доведення дозволяють отримувати функціональні граничні теореми для широкого класу процесів, що мають властивість регенерації.

Перелік посилань

[1] Aryasova O.V., Pilipenko A.Yu. On Brownian motion on the plane with membranes on rays with a common endpoint // Random Operators and Stochastic Equations. — 2009. — Vol. 17, no. 2. — P. 139–157.

[2] Aryasova O.V., Portenko M.I. One class of multidimensional stochastic differential equations having no property of weak uniqueness of a solution // Theory of Stochastic Processes. — 2005. — Vol. 11(27).

[3] Aryasova O.V., Portenko M.I. One example of a random change of time that transforms a generalized diffusion process into an ordinary one // Theory of Stochastic Processes. — 2007. — Vol. 13(29), no. 3.

[4] Bafico R. On the convergence of the weak solutions of stochastic differential equations when the noise intensity goes to zero // Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B. — 1980. — Vol. 17. — P. 308–324.

[5] Bafico R., Baldi P. Small random perturbations of Peano phenomena // Stochastics. — 1982. — Vol. 6, no. 3-4. — P. 279–292.

[6] Barlow M.T., Pitman J., Yor M. On Walsh's Brownian motions // Séminaire de probabilités de Strasbourg. — 1989. — Vol. 23. — P. 275–293.

[7] Bass R.F., Chen Z.-Q. Brownian motion with singular drift // The Annals of Probability. — 2003. — Vol. 31, no. 2. — P. 791–817.

[8] Blei S. On symmetric and skew Bessel processes // Stochastic Processes and their Applications. — 2012. — Vol. 122, no. 9. — P. 3262–3287.

[9] Blumenthal R.M. Excursions of Markov processes. — Springer Science & Business Media, 2012.

[10] Blumenthal R.M., Getoor R.K. Markov processes and potential theory. — Courier Corporation, 2007.

[11] Bogdan K., Jakubowski T. Estimates of the Green function for the fractional Laplacian perturbed by gradient // Potential Analysis. — 2012. — Vol. 36, no. 3. — P. 455–481.

[12] Cherny A.S., Engelbert H.-J. Singular stochastic differential equations. No. 1858. — Springer Science & Business Media, 2005.

[13] Delarue F., Flandoli F. The transition point in the zero noise limit for a 1D Peano example // Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series A. — 2014. — Vol. 34. — P. 4071–4084.

[14] Delarue F., Flandoli F., Vincenzi D. Noise prevents collapse of Vlasov-Poisson point charges // Communications on Pure and Applied Mathematics. — 2014. — Vol. 67, no. 10. — P. 1700–1736.

[15] Donsker M.D. An invariance principle for certain probability limit theorems / AMS. — 1951.

[16] Donsker M.D. Justification and extension of Doob's heuristic approach to the Kolmogorov-Smirnov theorems // The Annals of mathematical statistics. — 1952. — P. 277–281.

[17] Engelbert H.J., Schmidt W. Strong Markov continuous local martingales and solutions of one-dimensional stochastic differential equations

(Part III) // Mathematische Nachrichten. — 1991. — Vol. 151, no. 1. — P. 149–197.

[18] Ethier S.N., Kurtz T.G. Markov processes: characterization and convergence. — John Wiley & Sons, 2009. — Vol. 282.

[19] Feller W. Generalized second order differential operators and their lateral conditions // Illinois Journal of Mathematics. — 1957. — Vol. 1, no. 4. — P. 459–504.

[20] Feller W. An introduction to probability theory and its applications. Vol. II. Second edition. — New York : John Wiley & Sons Inc., 1971. — P. xxiv+669.

[21] Freidlin M.I., Wentzell A.D. Diffusion processes on graphs and the averaging principle // The Annals of probability. — 1993. — P. 2215–2245.

[22] Freidlin M.I., Wentzell A.D. Diffusion processes on an open book and the averaging principle // Stochastic processes and their applications. — 2004. — Vol. 113, no. 1. — P. 101–126.

[23] Grigelionis B., Mikulevicius R. On weak convergence to random processes with boundary conditions // Nonlinear Filtering and Stochastic Control. — 1982. — P. 260–275.

[24] Harlamov B. Continuous semi-Markov processes. — John Wiley & Sons, 2013.

[25] Harrison J.M., Shepp L.A. On Skew Brownian Motion // Ann. Probab. — 1981. — 04. — Vol. 9, no. 2. — P. 309–313.

[26] Ikeda N., Watanabe S. Stochastic differential equations and diffusion processes. — 1981.

[27] Iksanov A.M., Pilipenko A.Yu. A functional limit theorem for locally perturbed random walks // Probability and Mathematical Statistics. — 2015. — Vol. 36, no. 2. — P. 353–368.

[28] Itô K. Poisson point processes attached to Markov processes // Proc. 6th Berk. Symp. Math. Stat. Prob. — Vol. 3. — 1971. — P. 225–240.

[29] Kallenberg O. Foundations of modern probability. — Springer Science & Business Media, 2006.

[30] Karr A.F. Weak convergence of a sequence of Markov chains // Probability Theory and Related Fields. — 1975. — Vol. 33, no. 1. — P. 41–48.

[31] Knight F.B. Essentials of Brownian motion and diffusion. No. 18. — American Mathematical Soc., 1981.

[32] Kononchuk P.P., Kopytko B.I. Operator semigroups that describe Feller process on a line pasted from two diffusion processes // Teor. Imovir. ta Matem. Statyst. — 2011. — Vol. 84. — P. 86–96.

[33] Kopytko B.I., Shevchuk R.V. On pasting together two inhomogeneous diffusion processes on a line with the general Feller-Wentzell conjugation condition // Theory of Stochastic Processes. — 2011. — Vol. 17, no. 2. — P. 55–70.

[34] Krykun I.H. Convergence of skew Brownian motions with local times at several points that are contracted into a single one // Journal of Mathematical Sciences. — 2017. — Vol. 221, no. 5. — P. 671–678.

[35] Krykun I.G., Makhno S.Ya. The Peano phenomenon for Itô equations // Journal of Mathematical Sciences. — 2013. — Vol. 192, no. 4. — P. 441–458.

[36] Kulik A.M. A limit theorem for diffusions on graphs with variable configuration // arXiv preprint math/0701632. — 2007.

[37] Kulinich G., Kushnirenko S., Mishura Y. Asymptotic behavior of integral functionals of unstable solutions of one-dimensional Itô stochastic differential equations // Theory of Probability and Mathematical Statistics. — 2014. — Vol. 89. — P. 101–114.

[38] Kwon Y., Williams R.J. Reflected Brownian motion in a cone with radially homogeneous reflection field // Transactions of the American Mathematical Society. — 1991. — Vol. 327, no. 2. — P. 739–780.

[39] Lambert A., Simatos F. The weak convergence of regenerative processes using some excursion path decompositions // Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques / Institut Henri Poincaré. — Vol. 50. — 2014. — P. 492–511.

[40] Langer H., Schenk W. Knotting of one-dimensional Feller processes // Mathematische Nachrichten. — 1983. — Vol. 113, no. 1. — P. 151–161.

[41] Le Gall J.-F. Applications du temps local aux équations différentielles stochastiques unidimensionnelles // Séminaire de Probabilités XVII 1981/82. — Springer, 1983. — P. 15–31.

[42] Le Gall J.-F. One-dimensional stochastic differential equations involving the local times of the unknown process // Stochastic analysis and applications. — Springer, 1984. — P. 51–82.

[43] Lejay A. On the constructions of the skew Brownian motion // Probability Surveys. — 2006. — Vol. 3. — P. 413–466.

[44] Lejay A. The snapping out Brownian motion // The Annals of Applied Probability. — 2016. — Vol. 26, no. 3. — P. 1727–1742.

[45] Lions P.-L., Sznitman A.-S. Stochastic differential equations with reflecting boundary conditions // Communications on Pure and Applied Mathematics. — 1984. — Vol. 37, no. 4. — P. 511–537.

[46] Makhno S.Y. One-dimensional stochastic equations in layered media with semi-permeable barriers // Random Operators and Stochastic Equations. — 2016. — Vol. 24, no. 3. — P. 165–171.

[47] Mandrekar V., Pilipenko A. On a Brownian motion with a hard membrane // Statistics & Probability Letters. — 2016. — Vol. 113. — P. 62–70.

[48] Minlos R.A., Zhizhina E.A. Limit diffusion process for a non-homogeneous random walk on a one-dimensional lattice // Russian Mathematical Surveys. — 1997. — Vol. 52, no. 2. — P. 327–340.

[49] Nándori P., Szász D. Lorentz process with shrinking holes in a wall // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2012. — Vol. 22, no. 2.

[50] Paulin D., Szász D. Locally perturbed random walks with unbounded jumps // Journal of Statistical Physics. — 2010. — Vol. 141, no. 6. — P. 1116–1130.

[51] Piera F.J., Mazumdar R.R. Comparison results for reflected jump-diffusions in the orthant with variable reflection directions and stability applications // Electron. J. Probab. — 2008. — Vol. 13, no. 61. — P. 1886–1908.

[52] Pilipenko A.Yu. On the Skorokhod mapping for equations with reflection and possible jump-like exit from a boundary // Ukrains' kyi Matematychnyi Zhurnal. — 2011. — Vol. 63, no. 09. — P. 1241–1256.

[53] Pilipenko A.Yu., Proske F.N. On a selection problem for small noise perturbation in multidimensional case // arXiv:1510.00966. — 2015.

[54] Pilipenko A., Proske F.N. On perturbations of an ODE with non-Lipschitz coefficients by a small self-similar noise // Statistics & Probability Letters. — 2018. — Vol. 132, no. Supplement C. — P. 62 – 73.

[55] Pilipenko A.Yu., Prykhodko Yu.E. Limit behavior of a simple random walk with non-integrable jump from a barrier // Theor. Stoch. Proc. 19 (35). — 2014. — P. 52–61.

[56] Pilipenko A.Yu., Prykhodko Yu.E. A limit theorem for singular stochastic differential equations // Modern Stochastics: Theory and Applications. — 2016. — Vol. 3, no. 3. — P. 223–235.

[57] Portenko N.I. Generalized diffusion processes // Proceedings of the Third Japan–USSR Symposium on Probability Theory. — Springer Berlin Heidelberg, 1976. — Vol. 550 of Lecture Notes in Mathematics. — P. 500–523. — Access mode: `http://dx.doi.org/10.1007/BFb0077511`.

[58] Ramanan K. Reflected diffusions defined via the extended Skorokhod map // Electronic journal of probability. — 2006. — Vol. 11. — P. 934–992.

[59] Revuz D., Yor M. Continuous martingales and Brownian motion. Grundlehren der mathematischen Wissenchaften A series of comprehensive studies in mathematics. — Springer, 1999. — ISBN: 9783540643258.

[60] Saisho Y., Tanaka H. On the symmetry of a reflecting Brownian motion defined by Skorohod's equation for a multi-dimensional domain // Tokyo journal of mathematics. — 1987. — Vol. 10, no. 2. — P. 419–435.

[61] Skorokhod A.V. Limit theorems for stochastic processes // Theory of Probability & Its Applications. — 1956. — Vol. 1, no. 3. — P. 261–290.

[62] Stroock D.W., Varadhan S.R.S. Diffusion processes with continuous coefficients. I // Matematika. — 1971. — Vol. 15, no. 6. — P. 66–113.

[63] Stroock D.W., Varadhan S.R.S. Diffusion processes with continuous coefficients. II // Matematika. — 1972. — Vol. 16, no. 1. — P. 100–142.

[64] Stroock D.W., Varadhan S.R.S. Multidimensional diffusion processes. — Springer, 2007.

[65] Szász D., Telcs A. Random walk in an inhomogeneous medium with local impurities // Journal of Statistical Physics. — 1981. — Vol. 26, no. 3. — P. 527–537.

[66] Tanaka H. Stochastic differential equations with reflecting // Stochastic Processes: Selected Papers of Hiroshi Tanaka. — 1979. — Vol. 9. — P. 157.

[67] Varadhan S.R.S., Williams R.J. Brownian motion in a wedge with oblique reflection // Communications on pure and applied mathematics. — 1985. — Vol. 38, no. 4. — P. 405–443.

[68] Watanabe S. Itô's theory of excursion point processes and its developments // Stochastic Processes and their Applications. — 2010. — Vol. 120, no. 5. — P. 653–677.

[69] Wentzell A.D. Semi-groups of operators corresponding to a generalized 2nd order differential operator // DOKLADY AKADEMII NAUK SSSR. — 1956. — Vol. 111, no. 2. — P. 269–272.

[70] Wentzell A.D. On boundary conditions for multidimensional diffusion processes // Theory of Probability & Its Applications. — 1959. — Vol. 4, no. 2. — P. 164–177.

[71] Yano K. Excursions away from a regular point for one-dimensional symmetric Lévy processes without Gaussian part // Potential Analysis. — 2010. — Vol. 32, no. 4. — P. 305–341.

[72] Yarotskii D.A. Invariance principle for nonhomogeneous random walks on the grid $\mathbb{Z}^1$ // Matematicheskie Zametki. — 1999. — Vol. 66, no. 3. — P. 459–472.

[73] Zaitseva L.L. Wiener process with two partly reflecting membranes // Abstracts. Intern. Gnedenko conference, June. — 2002. — P. 3–7.

[74] Анулова С.В. О стохастических дифференциальных уравнениях с граничными условиями в полупространстве // Известия Российской академии наук. Серия математическая. — 1981. — Т. 45, № 3. — С. 491–508.

[75] Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. — Наука, 1977.

[76] Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. — Издательство “Наука Думка”, 1968.

[77] Кулініч Г.Л., Каськун Є.П. Про асимптотичну поведінку розв’язків певного класу одно-вимірних стохастичних диференціальних рівнянь Іто // Теор. ймовір. та матем. статист. — 1997. — Т. 56. — С. 96–104.

[78] Махно С.Я. Стохастические уравнения. Предельные теоремы. — Киев, 2012.

[79] Пилипенко А.Ю., Приходько Ю.Є. Про граничну поведінку симетричних випадкових блукань з мембранами // Теорія ймовірностей та математична статистика. — 2011. — № 85. — С. 84–94.

[80] Пилипенко А.Ю., Приходько Ю.Е. О предельном поведении возмущений в окрестности сингулярной точки последовательности марковских процессов // Укр. мат. журн. — 2015. — Т. 67, № 4. — С. 499–516.

[81] Портенко Н.И. Обобщенные диффузионные процессы. — Наук. думка, 1982.

[82] Портенко М.І. Процеси дифузії в середовищах з мембранами // Інститут математики НАН України. Київ. — 1995.

[83] Приходько Ю.Є. Малі збурення стохастичних диференціальних рівнянь зі степеневими коефіцієнтами // Наукові вісті Національного технічного університету України Київський політехнічний інститут. — 2016. — № 4. — С. 80–84.

[84] Скороход А.В. Исследования по теории случайных процессов. — Изд-во Киевского университета, 1961.

[85] Скороход А.В. Стохастические уравнения для диффузионных процессов в ограниченной области. Часть 1 // Теория вероятностей и ее применения. — 1961. — Т. 6.

[86] Федорюк М.В. Метод перевала. — Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977.

[87] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. — Мир, 1967.

Додаток
Список публікацій здобувача

1. Пилипенко А.Ю., Приходько Ю.Є. Про граничну поведінку симетричних випадкових блукань з мембранами // Теорія ймовірностей та математична статистика. — 2011. — № 85. — С. 84–94.

2. Pilipenko A.Yu., Prykhodko Yu.E. Limit behavior of a simple random walk with non-integrable jump from a barrier // Theor. Stoch. Proc. 19 (35). — 2014. — P. 52–61.

3. Пилипенко А.Ю., Приходько Ю.Е. О предельном поведении возмущений в окрестности сингулярной точки последовательности марковских процессов // Укр. мат. журн. — 2015. — Т. 67, № 4. — С. 499–516.

4. Pilipenko A.Yu., Prykhodko Yu.E. A limit theorem for singular stochastic differential equations // Modern Stochastics: Theory and Applications. — 2016. — Vol. 3, no. 3. — P. 223–235.

5. Приходько Ю.Є. Малі збурення стохастичних диференціальних рівнянь зі степеневими коефіцієнтами // Наукові вісті Національного технічного університету України Київський політехнічний інститут.

— 2016. — № 4. — С. 80–84.

6. Приходько Ю.Є. Про граничну поведінку симетричного вип. блукання з мембраною // Міжуніверситетська наукова конференція з математики та фізики для студентів та молодих вчених (Київ, 21–22 травня 2009) — Київ, 2009.

7. Приходько Ю.Є. Про граничну поведінку симетричного випадкового блукання з мембраною // Тринадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука (Київ, 13–15 травня 2010) — Київ, 2010.

8. Prykhodko Yu.E. On the limit behavior of a scaled random walk with a membrane // Міжнародна наукова конференція «Modern Stochastics: Theory and Applications II» (Київ, 7–11 вересня 2010) — Київ, 2010.

9. Приходько Ю.Є., Про граничну поведінку симетричних випадкових блукань із порушеною симетричністю в околі нуля // Друга міжуніверситетська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики (Київ, 28–29 квітня 2011) — Київ, 2011.

10. Приходько Ю.Є. Асимптотична поведінка симетричного випадкового блукання з мембраною // Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу» (Ворохта, 20–26 лютого 2012) — Івано-Франківськ, 2012.

11. Приходько Ю.Є. Гранична поведінка симетричного випадкового блукання з мембраною // Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука (Київ, 19–21 квітня 2012) — Київ, 2012.

12. Prykhodko Yu.E. On the limit behavior of a symmetric random walk with perturbations at the origin // Міжнародна наукова конференція

«Modern Stochastics: Theory and Applications III» (Київ, 10–14 вересня 2012) — Київ, 2012.

13. Приходько Ю.Є. Гранична поведінка збурених випадкових блукань з неінтегровним збуренням // Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу» (Ворохта, 25 лютого – 3 березня 2013) — Івано-Франківськ, 2013.

14. Приходько Ю.Є. Асимптотична поведінка збурених випадкових блукань з неінтегровним збуренням // Третя міжуніверситетська наукова конференція з математики та фізики для студентів та молодих вчених (Київ, 25–27 квітня 2013) — Київ, 2013.

15. Prykhodko Yu.E. On the limit behaviour of a symmetric random walk with perturbations at the origin // Ukrainian–German Workshop on Empirical Complete Convergence and other Limit Theorems of Probability Theory (Коктебель, 23–27 вересня 2013) — Київ, 2013.

16. Pilipenko A.Yu., Prykhodko Yu.E. Bessel diffusions and limit theorems for one-dimensional stochastic differential equations // Міжнародна наукова конференція «Probability, Reliability and Stochastic Optimization» (Київ, 7–10 квітня 2015) — Київ, 2015.

17. Pilipenko A.Yu., Prykhodko Yu.E. On the limit behavior of a sequence of Markov processes with perturbations in a neighborhood of a singular point Міжнародна наукова конференція «Stochastic Processes in Abstract Spaces» (Київ, 14–16 жовтня 2015) — Київ, 2015.

18. Prykhodko Yu.E. Small random perturbations of stochastic differential equations with power coefficients // Міжнародна наукова конференція «International Workshop on Limit Theorems in Probability Theory, Number Theory and Mathematical Statistics» (Київ, 10–11 жовтня 2016) — Київ, 2016.