ВІДГУК

офіційного опонента на дисертацію Приходька Юрія Євгеновича
«Гранична поведінка локальних збурень процесів Маркова»,
що подана на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика

У 1981 році була опублікована стаття Harrison & Shepp, у якій було доведено, що належним чином шкальоване та нормалізоване збурене в нулі симетричне випадкове блукання на прямій слабко збігається до косого броунівського руху. Збурення в нулі полягало у тому, що ймовірності переходу з нуля у точки ± 1 були відмінними від $1/2$. Згадана робота надихнула багатьох ймовірнісників та фізиків на дослідження більш складних випадкових послідовностей та процесів, збурених у обмежених підмножинах фазового простору. Протягом останніх років ефективні суто ймовірнісні підходи до аналізу асимптотики деяких локально збурених випадкових процесів були розроблені у роботах А.Ю. Пилипенка (наукового керівника автора дисертації) та його співавторів. Цьому передувала низка робіт російських авторів (Жижина, Мінлос, Яроцький), які використовували аналітичний напівгруповий підхід. Також варто згадати статті угорських математиків (Paulin, Szacz, Telcs), що досліджували локально збурені випадкові процеси з фізичної точки зору.

Послідовності розв'язків деяких стохастичних диференційних рівнянь з неліпшицевими або необмеженими коефіцієнтами можна інтерпретувати як локально збурені випадкові процеси. Традиційно аналіз стохастичних диференційних рівнянь є одним з улюблених напрямків досліджень української ймовірнісної школи (Гіхман, Портенко, Скороход та інші). Для згаданих вище рівнянь з «особливостями» було отримано багато змістовних результатів. З іншого боку, у цій галузі є ще багато відкритих питань, два з яких отримали відповідь у даній дисертаційній роботі.

З цього невеличкого огляду випливає те, що збурені випадкові процеси та стохастичні диференційні рівняння з особливостями привертали та привертають увагу дослідників. Тому тематика даної дисертаційної роботи, у якій доводяться функціональні граничні теореми для локально збурених випадкових процесів, і зокрема, для розв'язків стохастичних диференційних рівнянь, коефіцієнти яких мають «особливості» в нулі, є без сумніву актуальною, а сама дисертація робить вагомий внесок до існуючої літератури.

Дисертація складається зі вступу, 4-х розділів, висновків та списку літератури.

Розділ 1 містить огляд літератури за темою дисертації. Основні результати роботи наведені у розділах 2, 3 та 4. Матеріал розділу 2 є сконцентрованим навколо теореми 2.2.3, що є базовим результатом всієї дисертації. Тут отримані достатні умови того, що послідовність загальних випадкових процесів із локальними збуреннями слабко збігається у просторі Скорохода. Ключовою ідеєю теореми 2.2.3 є вирізання часу, що відповідає локальним збуренням. Інші твердження розділу 2 –це всілякі переформулювання базового результату, серед яких відмітимо теорему 2.4.4, що стосується загальних неперервних однорідних строго марковських процесів, та теорему 2.5.1, що стосується загальних ланцюгів Маркова із значеннями у евклідових просторах. У розділі 3 встановлюється слабка збіжність належним чином шкальованих та нормалізованих симетричних випадкових блукань, збурених на відрізку $[-m,m]$ для фіксованого цілого невід'ємного m. У теоремі 3.2.1 доведено функціональну граничну теорему у просторі неперервних функцій у випадку, коли стрибки з відрізка $[-m,m]$ є інтегровними. Показано, що в залежності від досяжності та істотності станів $\pm(m+1)$ можливі чотири типи граничних процесів. Для доведення теореми 3.2.1 застосовується теорема 2.5.1. Наведено низку прикладів, що демонструють застосовність теореми 3.2.1. У теоремі 3.2.12 встановлено функціональну граничну теорему у просторі Скорохода у випадку, коли $m=0$, а хвости стрибків з нуля правильно змінюються на нескінченності з параметром >-1. Виявляється, що граничний процес тісно пов'язаний з розв'язком певного узагальнення задачі Скорохода про відбиття. Нарешті, розділ 4 присвячений функціональним граничним теоремам для розв'язків стохастичних диференційних рівнянь, коефіцієнти яких мають особливості в околі нуля. Більш детально, у теоремі 4.1.6 встановлено 6 режимів слабкої збіжності у просторі неперервних функцій для $(X_n(t))$, що задовольняє

$$dX_n(t)=n^{1/2}a(n^{1/2}X_n(t))dt+n^{-1/2}dW(nt),$$

де W є броунівським рухом, а функція a є сумою функції, що є інтегровною на прямій, та $x\to c_+1_{(1,\infty)}(x)+c_-1_{(-\infty,-1)}(x), x\in R$ для дійсних $c_\pm$. Клас граничних процесів включає процеси Бесселя, звичайні та косі, а також їхні комбінації. Теорема 4.1.6 доводиться за допомогою теореми 2.4.4. За допомогою міркувань розділу 2 у теоремі 4.2.1 встановлено слабку збіжність у просторі неперервних функцій розв'язків стохастичного диференційного рівняння з неліпшицевими коефіцієнтами, збуреного малим параметром ε, при $\varepsilon \to 0$.

Теорема 2.2.3, що є центральним твердженням даної роботи, є чудовим результатом, застосовним до великого класу випадкових процесів. Його суто ймовірнісне доведення є коротким та елегантним. Для мене одного цього результату достатньо для того, щоб зробити позитивний висновок щодо наукової кваліфікації автора.

Більшість доведень даної дисертації є ймовірнісними і свідчать про неабияку технічну майстерність автора. Стиль викладення роботи є досить лаконічним, що підтверджує високу наукову кваліфікацію автора. У багатьох місцях роботи автор вживає фразу «як легко бачити», що дозволяє йому випускати проміжні міркування. Таким чином, читання дисертації, потребує певних зусиль, спрямованих здебільшого на заповнення непояснених пасажів.

Деякі з детальних зауважень, наведених нижче, носять математичний характер, а деякі стосуються оформлення роботи.

- Розділ 2.1, що є допоміжним, написаний невдало і потребує суттєвих модифікацій. Згадаю лише декілька проблем. Автор намагається пояснити, як визначається топологія у просторі Скорохода $D([0,\infty),E)$, де E-локально компактний метричний простір, але обмежується обговоренням простору $D([0,T],R)$ для $T>0$, залишаючи, таким чином, справу незавершеною. Конструкція топології у просторі $D([0,\infty),R)$ може бути знайдена у класичній роботі

Lindvall, T. (1973). Weak convergence of probability measures and random functions in the function space $D(0,\infty)$. *J. Appl. Probab.* **10** 109–121.

Навіть конструкція метрики Скорохода у просторі $D([0,T],E)$ для $E\neq R$ автором не наводиться. У означенні метрики Скорохода у просторі $D([0,T],R)$ фігурує клас множин Λ, означення якого в роботі відсутнє. Фраза про те, що у просторі $C([0,\infty),E)$ розглядається топологія, що відповідає рівномірній збіжності на компактах, зустрічається на одній сторінці двічі. При цьому при першій появі прикметник «рівномірній» відсутній.

- Має місце неоднозначність при записі послідовностей. Іноді автор пише (x_n), іноді $\{x_n\}$. Це ж зауваження стосується запису індикаторів, а також позначень для простору неперервних функцій та простору Скорохода (протягом роботи для їх позначення використовуються великі літери, а у підрозділі 3.4.1- каліграфічні великі літери).

- На с. 28 та 65 фраза «величина $\xi^{(\pm)}$- це відстань…» містить дві помилки. Має бути «величина $|\xi^{(\pm)}|$ має той самий розподіл, що і відстань». У формулі (9) на с. 26 не сказано, що таке α та α_1. У лемі 2.3.2, а також у декількох граничних співвідношеннях теорем 2.4.4 та 4.1.6 не сказано, у якому просторі має місце слабка збіжність. На с .23, у формулі (6) на с. 24 та в останньому рядку на с. 26 не визначено функцію ρ, що фігурує в означенні модуля неперервності. На с .24 не визначено множину E. У останньому рядку на с. 26, а також 5-му знизу рядку на с. 60 має бути $|X_n(t)-x^*|$ замість $\rho(X_n(t),x_0)$. У першому рядку на с. 28 та на с. 65 фраза «момент виходу» має бути заміненою на «момент першого виходу».

- Оскільки автор доводить слабку збіжність у теоремі 3.2.12 у просторі $D([0,1])$, то у формулюваннях теореми 3.2.12 на с. 30 та 73 потрібно видалити фразу «Для довільного $T>0$». З іншого боку, не є зрозумілим, чому автор не працює у просторі $D([0,\infty))$. Здається, що існуюче доведення потребує тільки мінімальної модифікації.

- На с. 41 та 42 має бути $X(s)$, а не $X_\infty(s)$. У цитованому на с. 42 результаті Пилипенка потрібні припущення щодо функції F, наприклад, те, що ця функція строго зростає.

- Є проблеми у формулюванні теореми 2.2.3 на с. 49. Автор забуває сказати, що випадкові величини мають задовольняти співвідношення (2.2) з ймовірністю один. Те, що n_0 залежить від T та α, треба вказувати при першій появі n_0 (3-й рядок формулювання), а не у формулі (2.4). Крім того, n_0 вводиться до того, як у формулюванні теореми з'являється α.

- На с. 50 рівномірна метрика записана з використанням модульних дужок, а не метрики ρ, що є невірним. У передостанньому рядку формули (2.7) на с. 50 двічі випущено аргумент t.

- На с.51 заголовок «Зауваження 2.3.1» потрібно видалити. Формула (2.9) і далі протягом підрозділу: раніше автор у подібній ситуації використовував позначення $\tau_k^{(n)}$, а не τ_k^n. Подібна проблема виникає і на с. 59. На початку підрозділу 2.3.3 були введені функції a_n та b_n. Починаючи з 6-го рядку знизу на с. 55 до кінця підрозділу, нижні індекси n були втрачені (тобто a_n та b_n перетворилися на a та b). Передостанній рядок на с. 56: загублено модульні дужки навколо інтегралу. 3-й рядок на с. 57: під знаком інтегралу $Z_n(s)$ потрібно двічі замінити на $X_n(s)$. 9-й рядок на с. 57: згідно з моїми обчисленнями тут має бути $\delta^{1/2}$, а не δ. Передостанній рядок підрозділу 2.3.3: відсутнє означення величини $\delta(\alpha,\varepsilon)$.

- У 4-му рядку знизу на с. 55 нерівність $|X_n(z)|<\alpha$ має бути замінена на $|X_n(z)|\le\alpha$.

- Всупереч тому, що стверджується на с.64, послідовність $\{X_n\}$ не може слабко збігатися у просторі неперервних функцій просто через те, що елементи послідовності не є неперервними функціями. Звичайно, послідовність слабко збігається у просторі Скорохода. Це ж зауваження стосується у послідовності (S_n), визначеної у останньому рядку на с.87, а також її аналога $(\hat{S}_n)$ (див. с.89).

- Приклад 3.2.6 на с. 70: замість $i\notin[-1,1]$ потрібно написати $i\notin\{-1,0,1\}$; під знаками фігурних дужок мають бути додані слова «з ймовірністю».

- Під заголовком «Приклад 3.2.9» текст відсутній.

- Формулюванню теореми 3.2.12 на с. 73 передує фраза «Основним результатом роботи…», що не відповідає дійсності.

- На с. 73 фрагмент, що стосується слабкої збіжності нормалізованих випадкових блукань: $D([0,1])$ слід замінити на $D([0,\infty))$ або на $D([0,T])$.

- Зауваження 3.2.14 на с. 74: відсутнє означення міри μ. Формула (3.17) і далі протягом підрозділу: границю по n слід замінити на верхню границю.

- Функціональна гранична теорема, згадана на с. 88 (до речі, автор забуває сказати, у якому просторі має місце збіжність), не є означенням належності розподілу області притягання. У цьому місці потрібне переформулювання.

- Зустрічаються неправильні вживання українських слів, наприклад, «наступний» замість «такий» (с. 23, 25, 31, 38, 42 та інші), «скінчений» замість «скінченний» (с. 38, 39), «додатній» замість «додатний» (с. 32), «розв'язку» замість «розв'язання» (с.39), «частинні» замість «окремі» та «збуренного» замість «збуреного» (с. 40, 110) та інші. Наявні численні одруковки, наприклад, на с. 23, 31, 33, 36, 37, 39, 41, 43, 44, 52, 68, 84 та інших. Є проблеми з розділовими знаками: часто випущені коми та тире. Нижче наведено неповний перелік невдалих фраз: «має розподіл як $\xi^{(n)}$» (с.25), «довизначимо за лінійністю або ступеневим чином» (с.26, 60), «може бути не неперервним» (с.30), «конструкція побудови» (с. 48), «імовірність з точки і стрибнути…» (с.68).

Пераховані зауваження не зменшують загального позитивного враження від роботи і не впливають на високу оцінку її наукового рівня.

Отримані автором твердження, що спираються на сучасні методи теорії випадкових процесів, є новими, правильними та коректно доведеними. Основні результати роботи, що у достатній мірі обговорювалися на наукових семінарах та конференціях як в Україні, так і за кордоном, вчасно опубліковані. Автореферат повно та правильно відображає зміст дисертації. З іншого боку, зазначу, що у переліку робіт автора відсутні статті, надруковані у провідних закордонних журналах з теорії ймовірностей.

Вважаю, що дисертаційна робота «Гранична поведінка локальних збурень процесів Маркова», подана на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика, відповідає вимогам п.п. 9, 11, 12, 13 «Порядку присудження наукових ступенів», затвердженого Постановою КМУ №567 від 24.07.2013 р. (зі змінами, внесеними згідно з Постановами КМУ №656 від 19.08.2015 р., №1159 від 30.12.2015 р. та №567 від 27.07.2016 р.), які висуваються до кандидатських дисертацій, а її автор, Приходько Юрій Євгенович, заслуговує на присудження йому наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук.

Надійшов до спеціалізованої вченої ради Д26.206.01 03.03.2018р. секретар ради (Артеменко М.Я.)

Інститут математики Академії наук України Канцелярія

Офіційний опонент:
доктор фізико-математичних наук,
професор, завідувач кафедри дослідження операцій
факультету комп'ютерних наук та кібернетики
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка Іксанов О.М.

ПІДПИС ЗАСВІДЧУЮ
ВЧЕНИЙ СЕКРЕТАР
КАРАУЛЬНА Н.В.
01.03.2018

Київський національний університет імені Тараса Шевченка * Україна * Ідентифікаційний код 02070944