НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ГОРБАЧУК Володимир Мирославович

УДК 517.9

ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ НА НЕСКІНЧЕННОМУ ІНТЕРВАЛІ

01.01.01 – математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ – 2018

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано у Національному технічному університеті України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського".

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
ГОРОДНІЙ Михайло Федорович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
декан механіко-математичного факультету;

доктор фізико-математичних наук, професор
ГОРОДЕЦЬКИЙ Василь Васильович,
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича,
завідувач кафедри алгебри та інформатики;

доктор фізико-математичних наук, професор
ДЕРКАЧ Володимир Олександрович,
Донецький національний університет
імені Василя Стуса (Вінниця),
професор кафедри математичного аналізу
і диференціальних рівнянь.

Захист відбудеться "3" квітня 2018 р. о 15⁰⁰ години на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий "28" лютого 2018 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради **Романюк А.С.**

Загальна характеристика роботи

Актуальність теми. Дисертаційну роботу присвячено дослідженню розв'язків диференціальних рівнянь на нескінченному інтервалі (всій числовій осі або півосі), коефіцієнтами яких є необмежені оператори у банаховому просторі, а саме: описові розв'язків всередині заданого інтервалу та вивченню їх поведінки при наближенні до його кінців; з'ясуванню можливості продовження розв'язку до цілої вектор-функції певного скінченного порядку і скінченного типу; питанням коректності деяких крайових задач для таких рівнянь; установленню прямих і обернених теорем теорії наближень їх розв'язків цілими розв'язками експоненціального типу; знаходженню критеріїв різних видів стійкості рівнянь еліптичного типу; розв'язанню задач Колмогорова і Хілле відшукання максимальних, щільних у вихідному просторі підпросторів, на яких розв'язок абстрактного параболічного рівняння може бути поданий у вигляді степеневого ряду (проблема Колмогорова) або експоненціальної границі (проблема Хілле) від генератора асоційованої з розглядуваним рівнянням півгрупи лінійних операторів; питанням розв'язності у деяких класах аналітичних вектор-функцій диференціальних рівнянь у банаховому просторі над неархімедовим полем.

Більшість із зазначених задач належить до одного з основних підрозділів сучасного функціонального аналізу – теорії диференціально-операторних рівнянь, які, як відомо, охоплюють чимало рівнянь з частинними похідними, включаючи модельні. Початок цієї теорії був покладений роботами Е. Хілле та К. Іосіди (1948), в яких одержано перші теореми існування розв'язків задачі Коші для рівняння вигляду $y' = Ay$ з необмеженим оператором A у банаховому просторі, сформульовані в термінах теорії півгруп операторів. К. Іосіда, а згодом В. Феллер пов'язали ці дослідження півгруп з різними задачами для рівняння дифузії. Паралельно з цим Е. Хілле, а потім Р. Філліпс розпочали побудову теорії абстрактної задачі Коші для диференціальних рівнянь у банаховому просторі. На початку 50-х років минулого ст. П. Лакс, А. Мільгрем і В. Лянце застосували півгрупові методи до дослідження різних класів параболічних рівнянь. Істотний крок уперед у загальній теорії був зроблений Т. Като, який розглянув наведене вище рівняння, але вже зі змінним операторним коефіцієнтом $A = A(t)$. У своїх подальших роботах названі вчені створили міцний фундамент для розвитку теорії диференціальних рівнянь з необмеженими операторами, яка з тих пір стала самостійною галуззю досліджень, привернувши увагу великої кількості математиків, серед яких, зокрема, М. Вішик, О. Ладиженська, Ю. Далецький, Ю. Любич, П. Соболєвський, С. Ейдельман, С. Крейн, М. Красносєльський, М. Соломяк, Х. Танабе, А. Балакрішнан, Дж. Ліонс, Г. Комацу, А. Пазі, С. Агмон, Л. Ніренберг, Дж. Гольдстейн та багато-багато інших. При цьому основним її математичним апаратом була і залишається теорія півгруп. Оцінюючи її місце в математиці, Е. Хілле писав: "Я вітаю півгрупу, де б її не зустрів, а зустрічається вона скрізь".

Останнім часом як предмет, так і сфера застосувань теорії абстрактних диференціальних рівнянь і тісно пов'язаної з нею теорії півгруп значно розширились і стали об'єктами досліджень цілої когорти провідних фахівців, таких, наприклад, як В. Фомін, М. Горбачук, А. Князюк, Дж. Кісінський, Ю. Латушкін, Х. Хейманс, С. Ангенент, Б. де Пахтер, С. Івасишен, Ж. Неервен, Ф. Клемент, В. Васільєв, С. Піскарьов, Ф. Гуі Зонг, А. Кочубей, С. Гефтер, Т. Стулова, В. Городецький, М. Городній, О. Кутовий, Ю. Кондратьєв та ін. Можлива область застосувань цих теорій є досить обширною і включає, крім теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними, математичну фізику, теорію апроксимації, марковські процеси, теорію теплопровідності, сучасні проблеми екології, біології, динаміку руху рідини тощо. Все це, з огляду на історію розвитку функціонального аналізу, теорії диференціальних рівнянь та теорії наближень, p-адичної техніки, яка відкриває важливі перспективи для розвитку алгебри, теорії чисел та корисних застосувань, свідчить про актуальність тематики дисертації.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження, що складають основу дисертації, проводились на кафедрі математичної фізики фізико-математичного факультету Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"у рамках науково-дослідних тем "Дослідження актуальних проблем теорії детермінованого хаосу, розв'язування ускладнених задач математичної фізики та розробка математично-комп'ютерних методів побудови наближених розв'язків" (номер державної реєстрації 0112U001235) і "Розвиток методів дослідження розв'язків диференціально-операторних рівнянь і рівнянь з частинними похідними параболічного типу" (номер державної реєстрації 0117U003173).

Мета і завдання дослідження. Основною метою дисертаційного дослідження є опис усіх розв'язків диференціальних рівнянь на нескінченному інтервалі у банаховому просторі над полем комплексних або p-адичних чисел, вивчення їх поведінки при наближенні до кінців інтервалу, розв'язання у зв'язку з цим проблем Колмогорова і Хілле про зображення групи лінійних операторів степеневим рядом або експоненціальною границею від її генератора, розвиток операторного підходу до наближення довільного класичного, слабкого або узагальненого розв'язку розв'язками, які є цілими вектор-функціями експоненціального типу, відшукання критеріїв рівномірної та рівномірної експоненціальної стійкості рівняння.

Об'єктом дослідження є диференціально-операторні рівняння у банаховому просторі над архімедовим або неархімедовим полем; граничні задачі для таких рівнянь, зокрема, задачі Коші, Діріхле, Неймана, $(n+1)$-раз інтегрована задача Коші; C_0-півгрупи та C_0-групи, пов'язані з ними; деякі підпростори цілих вектор-функцій; аналітичні та цілі вектори замкненого оператора; класи Жевре векторів та вектор-функцій; способи апроксимації розв'язків; стійкі розв'язки рівняння; стійкі півгрупи.

Предметом дослідження є структура класичних, слабких і узагальнених розв'язків диференціальних рівнянь у банаховому просторі та їх граничні значення; зображення півгрупи (групи) степеневим рядом або експоненціальною границею від її генератора; щільність множини цілих векторів замкненого оператора; поведінка розв'язків при наближенні до кінців інтервалу; операторний підхід до наближення розв'язків розв'язками, які є цілими вектор-функціями експоненціального типу; критерії різних видів стійкості півгруп, пов'язаних з розглядуваними рівняннями; зв'язок між поведінкою розв'язків та їх граничними значеннями, між степенем гладкості розв'язку і швидкістю прямування до нуля його найкращого наближення; задача Коші для диференціальних рівнянь у неархімедовому банаховому просторі.

Завдання дослідження:

1. Для довільної C_0-групи (півгрупи) лінійних операторів з генератором A у банаховому просторі $\mathfrak{B}$ знайти максимальні, щільні у ньому множини, на елементах яких ця група (півгрупа) зображується у вигляді степеневого ряду (проблема Колмогорова) або експоненціальною границею (проблема Хілле) від оператора A, та способи відновлення групи (півгрупи) безпосередньо за її генератором, а не функціями від нього. Узагальнити результат, що стосується проблеми Хілле, на випадок довільного замкненого оператора A. Вивчити необхідні для досліджень класи локально-аналітичних $\mathfrak{B}$-значних вектор-функцій.

2. Дослідити структуру розв'язків диференціальних рівнянь, зокрема m-гармонічного, на всій числовій осі у банаховому просторі. Показати, що для них діє аналог принципу Фрагмена-Ліндельофа.

3. Для диференціального рівняння параболічного типу у гільбертовому просторі довести прямі й обернені теореми теорії наближення слабких розв'язків його розв'язками, які є цілими вектор-функціями експоненціального типу, з'ясувати зв'язок між степенем гладкості розв'язку $y(t)$ і швидкістю прямування до нуля його найкращого наближення $\mathcal{E}_r(y)$ розв'язками, тип яких не перевищує r, і поширити цей результат на банахові простори, оснащені гільбертовими.

4. Дослідити розв'язки диференціально-операторних рівнянь у банаховому просторі всередині інтервалу $(0, \infty)$, не накладаючи жодних умов на поведінку розв'язку в нулі, та їх граничні значення у деяких локально-

опуклих просторах.

5. Розглянути задачі Діріхле та Неймана для рівняння другого порядку еліптичного типу, дослідити умови існування і єдиності розв'язку і навести для нього формулу.

6. Для рівняння другого порядку еліптичного типу на півосі у банаховому просторі знайти умови обмеженості розв'язку в околі нескінченно віддаленої точки, його збіжності до нуля, а також умови, які забезпечують його експоненціальне спадання на нескінченності.

7. Дослідити стійкі розв'язки еліптичного рівняння другого порядку і знайти умови, необхідні й достатні для його рівномірної, рівномірної експоненціальної та рівномірної, але не рівномірної експоненціальної стійкості. В останньому випадку з'ясувати зв'язок між порядком спадання розв'язку на нескінченності та властивостями його початкових даних.

8. Розглянути неоднорідні рівняння вищих порядків у банаховому просторі над полем p-адичних чисел, правими частинами яких є локально аналітичні вектор-функції, довести існування та єдиність локально аналітичного в околі нуля розв'язку такого рівняння і його неперервну залежність від правої частини, отримати формулу для розв'язку.

9. Довести, що якщо у попередньому випадку права частина – многочлен, то розв'язок також є многочленом того самого степеня, що й права частина; якщо права частина – ціла вектор-функція, то існує єдиний розв'язок у класі цілих вектор-функцій.

Методи дослідження. Для розв'язання поставлених задач у дисертації використовуються методи функціонального аналізу, топології та теорії функцій, зокрема: методи теорії локально опуклих просторів, теорії узагальнених функцій, теорії абстрактних диференціальних рівнянь, операторного числення, групові та півгрупові методи.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати роботи, що виносяться на захист, є новими і полягають у наступному:

1. Знайдено максимальний, щільний у заданому банаховому просторі підпростір, на елементах якого C_0-півгрупа лінійних операторів може бути зображена степеневим рядом від її генератора (проблема Колмогорова).

2. Розв'язано проблему Хілле про можливість представлення C_0-півгрупи лінійних операторів у банаховому просторі експоненціальною границею від її генератора.

3. Знайдено умови на вектор банахового простору, за яких експоненціальна функція від замкненого оператора на цьому векторі є цілою скінченного порядку і скінченного типу.

4. Описано усі розв'язки всередині нескінченного інтервалу (осі або півосі) параболічних та еліптичних (зокрема полігармонічного) диференціальних рівнянь у банаховому просторі.

5. Досліджено розв'язки диференціальних рівнянь вищих порядків певного вигляду на всій числовій осі й півосі, коефіцієнтами яких є позитивні оператори у банаховому просторі.

6. Доведено прямі й обернені теореми теорії наближень слабких розв'язків диференціального рівняння у гільбертовому просторі розв'язками, які є цілими вектор-функціями експоненціального типу, що встановлюють взаємно однозначну відповідність між швидкістю прямування до нуля найкращого наближення і степенем гладкості розв'язку. Для таких розв'язків встановлено аналог відомої теореми Джексона.

7. Описано структуру розв'язків як однорідної, так і неоднорідної задачі Діріхле для абстрактного еліптичного диференціального рівняння другого порядку на півосі; знайдено умови, за яких ця задача є коректною.

8. Досліджено однорідну задачу Неймана для диференціальних рівнянь другого порядку у банаховому просторі, а також $(n+1)$-раз інтегровану задачу Коші для рівнянь першого порядку.

9. Доведено, що для розв'язків абстрактних еліптичних диференціальних рівнянь на півосі діє аналог принципу Фрагмена-Ліндельофа.

10. Для еліптичного диференціального рівняння на півосі у банаховому просторі знайдено критерії його рівномірної та рівномірної експоненціальної стійкості, а також умови, за яких рівняння є рівномірно, але не рівномірно експоненціально стійким.

11. Описано всі аналітичні розв'язки неоднорідного диференціального рівняння m-го порядку у банаховому просторі над полем p-адичних чисел.

Практичне значення одержаних результатів. В основному результати дисертації є теоретичного характеру. Проте ті з них, що стосуються теорії стійкості диференціальних рівнянь у банаховому просторі, можуть бути застосовані до вивчення динаміки обертання твердих тіл з порожнинами, наповненими рідиною.

Особистий внесок здобувача. Визначення головних напрямів досліджень належить М.Л. Горбачуку. Усі результати, що виносяться на захист, отримано здобувачем самостійно, а в роботах, опублікованих у співавторстві, внесок авторів є рівноцінним.

Апробація результатів дисертації. Результати доповідалися на:

– Всесоюзной школе молодых ученых "Функциональные методы в прикладной математике и математической физике", Ташкент, 11-17 травня 1988 року;

– Міжнародній науковій конференції, присвяченій пам'яті академіка М.П. Кравчука, Київ-Луцьк, 22-28 вересня 1992 року;

– Всеукраїнській науковій конференції "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь", Дрогобич, 25-27 січня 1994 року;

– Міжнародній науковій конференції, присвяченій пам'яті академіка

М.П. Кравчука, Київ, 11-14 квітня 1995 року;

– The Third International Congress on Industrial and Applied Mathematics, Hamburg, July 3-7, 1995;

– Workshop "Modern Mathematical Methods in Diffraction Theory and its Applications in Engineering", Darmstad, September 30 - October 3, 1996;

– International Conference "Nonlinear Partial Differential Equations" dedicated to J.P. Schauder, Lviv, August 23-29, 1999;

– 18-th International Conference on Operator Theory, Timisoara, June 27 - July 1, 2000;

– Міжнародній конференції з функціонального аналізу, Київ, 22-26 серпня 2001 року;

– Міжнародній математичній конференції ім. В.Я. Скоробогатька, Дрогобич, 27 вересня - 1 жовтня 2004 року;

– Internatioal Conference "Analysis and Related Topics", Lviv, November 17-20, 2005;

– International Conference on Differential Equations, dedicated to the 100th anniversary of Ya.B. Lopatynsky, Lviv, September 12-17, 2006;

– International V.Ya. Skorobohatko Mathematical Conference, Drohobych, September 24-28, 2007;

– International Conference "Analysis and Topology", Lviv, May 26 - June 7, 2008;

– Дванадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука, Київ, 15-17 травня 2008 року;

– Международной конференции "Современные проблемы математики, механики и их приложений", Москва, 30 марта - 2 апреля 2009 года.

– Міжнародній конференції до 100-річчя М.М. Боголюбова та 70-річчя М.І. Нагнибіди, Чернівці, 8-13 червня 2009 року;

– Українському математичному конгресі, Київ, 27-30 серпня 2009 року;

– Всеукраїнському науковому семінарі "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", Івано-Франківськ, 25-28 березня 2010 року;

– Тринадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука, Київ, 13-15 травня 2010 року;

Міжнародній конференції "Сучасні проблеми аналізу", присвяченій 70-річчю кафедри математичного аналізу Чернівецького університету, Чернівці, 30 вересня - 3 жовтня 2010 року;

– Международной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы", посвященной 110-летию И.Г. Петровского, Москва, 30 мая - 4 июня 2011 года;

– Чотирнадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука, Київ, 19-21 квітня 2012 року;

– Міжнародній конференції "Теорія наближення функцій та її застосування", присвяченій 70-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О.І. Степанця (1942-2007), Кам'янець-Подільський, 28 травня - 3 червня 2012 року;

– International Conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach, Ukraine, Lviv, September, 17-21, 2012;

– Crimea International Mathematical Conference, Sudak, September 22 - October 4, 2013;

– П'ятнадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука, Київ, 15-17 травня 2014 року;

– IY International Hahn Conference dedicated to the 135-th anniversary of Hans Hahn, Chernivtsi, June 30 - July 5, 2014;

– Шістнадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука, Київ, 14-15 травня 2015 року;

– Науковій конференції, присвяченій 100-річчю від дня народження К.М. Фішмана та М.К. Фаге, Чернівці, 1-4 липня 2015 року;

– International V. Skorobohatko Mathematical Conference, Drohobych, August 25-28, 2015;

– Сімнадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука, Київ, 19-20 травня 2016 року;

– Seminarium Katedry Analizy Matematycznej. Matematyki Obliczeniowej i Metod Probabilistycznych. Wydzial Matematyki Stosowanej AGH, Краків (Польща), 13 квітня 2016 року;

– Вісімнадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука, Київ-Луцьк, 7-10 жовтня 2017 року;

– Науковому семінарі кафедри математичної фізики Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", 25 жовтня 2017 року (керівник семінару – професор С.Д. Івасишен);

– Київському семінарі з функціонального аналізу в Інституті математики НАН України, 8 листопада 2017 року (керівники семінару: академік НАН України Ю.М. Березанський, академік НАН України Ю.С. Самойленко, чл.-кор. НАН України А.Н. Кочубей);

– Науковому семінарі відділу теорії функцій Інституту математики НАН України, 8 грудня 2017 року (керівник семінару – професор А.С. Романюк).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи викладено у 49 наукових публікаціях [1-49], із яких 22 статті [1-22] у наукових виданнях, внесених до переліку фахових видань з фізико-математичних наук, 2 статті [11, 21] у закордонних наукових періодичних виданнях, 7 робіт [1, 5, 8, 11, 15, 21, 22] у виданнях, включених до міжнародних наукометричних баз

(Scopus), а також 27 тез доповідей [23-49] на наукових конференціях.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації (українською та англійською мовами), вступу, огляду літератури і основних напрямів досліджень, семи розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить 309 найменувань. Повний обсяг роботи становить 298 сторінок друкованого тексту.

Основний зміст дисертації

У передмові наведено огляд літератури за темою дисертації та напрямів її досліджень.

Основний результат **розділу 1** стосується проблем Колмогорова і Хілле відшукання для довільної C_0-групи $\left\{U(t)=e^{tA}\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ (C_0-півгрупи $\{U(t)=e^{tA}\}_{t\geq 0}$) лінійних операторів з генератором A у банаховому просторі $\mathfrak{B}$ максимальних, щільних у ньому підпросторів $\mathfrak{B}_1$ і $\mathfrak{B}_2$, на елементах яких ця група (півгрупа) зображується степеневим рядом або експоненціальною границею від її генератора, тобто $\forall x\in\mathfrak{B}_1 : U(t)x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}A^n x$ (Колмогоров) або $\forall x\in\mathfrak{B}_2 : U(t)x=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{tA}{n}\right)^n x$, (Хілле).

У підрозділі 1.3 показано, що проблема Колмогорова завжди розв'язна, а множина $\mathfrak{B}_1$ є не що інше, як простір $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ цілих векторів оператора A. Це означає, що збіжність зазначеного ряду для довільного $t\in\mathbb{R}$ зумовлює включення $x\in\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ і рівність

$$U(t)x=\exp(tA)x:=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}A^n x.$$

Більше того, цей ряд збігається в $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$-топології, а це гарантує можливість продовження $U(t)x$ до цілої вектор-функції $U(z)x=\exp(zA)x,\ z\in\mathbb{C}$. Знайдено умови на вектор $x\in\mathfrak{B}_1$, за яких $U(z)x$ має певний скінченний порядок росту і скінченний тип, а також встановлено зв'язок між ними і порядком та типом вектора x відносно оператора A.

Позначимо через $\mathfrak{A}_{loc}(\mathfrak{B})$ простір $\mathfrak{B}$-значних вектор-функцій $y(z)$, аналітичних в околі нуля в $\mathbb{C}$ (окіл залежить від функції). Збіжність при $n\to\infty$ послідовності y_n до y у просторі $\mathfrak{A}_{loc}(\mathfrak{B})$ означає, що існує окіл нуля $O\subseteq\mathbb{C}$, в якому всі функції $y_n(z)$ є аналітичними і $\|y_n(z)-y(z)\|\to 0$ рівномірно на кожному компакті $K\subset O$ ($\|\cdot\|$ - норма в $\mathfrak{B}$). Нехай також $\mathfrak{A}_c(\mathfrak{B})$ – простір цілих $\mathfrak{B}$-значних вектор-функцій. Під збіжністю в $\mathfrak{A}_c(\mathfrak{B})$ розуміється збіжність в $\mathfrak{A}_{loc}(\mathfrak{B})$ з цією лише відмінністю, що спільним околом аналітичності для $y_n(z)$ є вся комплексна площина.

Позначимо через $E(\mathfrak{B})$ множину всіх замкнених, щільно заданих в $\mathfrak{B}$ операторів, а через $\mathfrak{G}_{\{\gamma\}}(A)$ і $\mathfrak{G}_{(\gamma)}(A)$ $(\gamma \geq 0)$ – класи Жевре нескінченно диференційовних векторів x оператора $A \in E(\mathfrak{B})$ (тобто $x \in C^{\infty}(A) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{D}(A^n)$) типу Рум'є та Бьорлінга відповідно:

$$\mathfrak{G}_{\{\gamma\}}(A) = \{x \in C^{\infty}(A) \big| \exists \alpha > 0 \ \exists c = c(x) > 0 \ \forall k \in \mathbb{N}_0 : \|A^k x\| \leq c\alpha^k k^{k\gamma}\},$$

$$\mathfrak{G}_{(\gamma)}(A) = \{x \in C^{\infty}(A) \big| \forall \alpha > 0 \ \exists c = c(x, \alpha) > 0 \ \forall k \in \mathbb{N}_0 : \|A^k x\| \leq c\alpha^k k^{k\gamma}\}.$$

Теорема 1.5. *Нехай $A \in E(\mathfrak{B})$. Тоді для довільного $x \in \mathfrak{G}_{\{\gamma\}}(A)$ з $\gamma < 1$ ($x \in \mathfrak{G}_{(\gamma)}(A)$ з $\gamma \leq 1$), вектор-функція $\exp(zA)x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k A^k x}{k!}$ є цілою у просторі $\mathfrak{G}_{\{\gamma\}}(A)$ (у просторі $\mathfrak{G}_{(\gamma)}(A)$). Якщо $x \in \mathfrak{G}_{\{1\}}(A)$, то $\exp(zA)x \in \mathfrak{A}_{loc}(\mathfrak{G}_{\{1\}}(A))$. Більше того, якщо A – генератор обмеженої аналітичної C_0-півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ в $\mathfrak{B}$, то сім'я $\{\exp(zA)\}_{z\in\mathbb{C}}$ утворює C_0-групу у цих просторах і*

$$\forall x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A) : \exp(tA)x = \begin{cases} e^{tA}x & \text{при} \quad t \geq 0 \\ (e^{-tA})^{-1}x & \text{при} \quad t < 0. \end{cases}$$

Як і у скалярному випадку, порядок $\rho = \rho(y)$ і тип $\sigma = \sigma(y, \rho)$ цілої вектор-функції $y(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad c_k \in \mathfrak{B}$, обчислюються за формулами

$$\rho = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n \ln n}{\ln \|c_n\|^{-1}}, \quad (e\sigma\rho)^{\frac{1}{\rho}} = \varlimsup_{n\to\infty} \left(n^{1/\rho} \sqrt[n]{\|c_n\|}\right).$$

A-порядок $p = p(x, A)$ вектора $x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$ і його A-тип $s = s(x, p, A)$ відносно p визначаються як

$$p = \inf\left\{\gamma \in (-\infty, 1) : \|A^n x\| \leq n^{n\gamma}\right\}, \ s = \inf\left\{\alpha > 0 : \|A^n x\| \leq \alpha^n n^p\right\},$$

де $n \geq n_0, \ n_0 = n_0(\gamma) \in \mathbb{N}$ достатньо велике.

Теорема 1.6. *Для того щоб вектор-функція $y(z) = \exp(zA)\,x$ була цілою, необхідно і достатньо, щоб $x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$. Якщо це так, то $y(z)$ має скінченний порядок ρ і скінченний тип σ відносно цього ρ тоді і тільки тоді, коли $p < 1$ і s є скінченним. Більше того, ρ і σ пов'язані з A-порядком p і A-типом s вектора x рівностями $\rho = \frac{1}{1-p}, \quad \sigma = \frac{(se)^{\rho}}{\rho e}$.*

Що ж до можливості зображення групи $\left\{U(t) = e^{tA}\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ границею послідовності $\left\{\left(I + \frac{tA}{n}\right)^n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ (підрозділ 1.5), відповідь дає така теорема.

Теорема 1.7. *Нехай $x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$. Тоді послідовність $\left(I + \frac{zA}{n}\right)^n x, n \in \mathbb{N}$, збігається рівномірно до $U(z)x$ на кожному компакті $K \subset \mathbb{C}$. Навпаки, якщо послідовність $\left(I + \frac{tA}{n}\right)^n x$, $x \in C^{\infty}(A)$, збігається для довільного $t \in \mathbb{R}$, то $x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$ і $\lim_{n\to\infty} \left(I + \frac{tA}{n}\right)^n x = U(t)x$.*

Тим самим, з огляду на застосування, вказується спосіб побудови C_0-групи $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ за її генератором A, оскільки розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} &= Ay(t), \quad t \in (-\infty, \infty), \\ y(0) &= x, \end{cases} \tag{1}$$

має вигляд $y(t) = U(t)x$, якщо вона поставлена коректно. Є й декілька інших підходів, серед яких, наприклад:

а) $U(t)x = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{tA}{n}\right)^{-n} x, \; x \in \mathfrak{B}$ (Ейлера-Хілле);

б) $U(t)x = \lim\limits_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x, \quad e^{tA_\lambda}x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}A_\lambda^k x, \; x \in \mathfrak{B}$ (Іосіди),

де $A_\lambda = \lambda^2 R(\lambda; A) - \lambda I$ – обмежений оператор, і $A_\lambda \to A$ при $\lambda \to \infty$, але у них C_0-група $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ відновлюється не безпосередньо за її генератором A, а за деякими функціями від нього (резольвенти $R(\lambda; A)$ у випадку а) і наближеннями A_λ – у б)), користування якими, як правило, ускладнює цей процес. Запропоновані у підсекції 1.5 способи відновлення $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ за її генератором A мають ту перевагу, що розв'язок задачі Коші (1) з початковими даними $x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$ можна записати за допомогою степенів цього оператора. Оскільки $\overline{\mathfrak{G}_{(1)}(A)} = \mathfrak{B}$, то для довільного $x \in \mathfrak{B}$ існує послідовність $x_n \in \mathfrak{G}_{(1)}(A) : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ така, що

$$U(t)x_n \to U(t)x \text{ при } n \to \infty \; (\forall t \in \mathbb{R}). \tag{2}$$

Більше того, збіжність у (2) є рівномірною на будь-якому компакті з $\mathbb{R}$ і

$$U(t)x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k x_n.$$

Теорему 1.7 узагальнено на випадок довільного $A \in E(\mathfrak{B})$ таким чином.

Теорема 1.8. *Нехай* $A \in E(\mathfrak{B})$, $x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$. Тоді *послідовність* $\left(I + \frac{zA}{n}\right)^n x$, $n \in \mathbb{N}$, *збігається до* $\exp(zA)x$ *рівномірно на кожному компакті* $K \subset \mathbb{C}$. *Навпаки, якщо* $\left(I + \frac{tA}{n}\right)^n x$, $x \in C^\infty(A)$, *збігається для довільного* $t \leq 0$ *і* A *генерує обмежену* C_0*-півгрупу, то* $x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$.

Теореми 1.7 та 1.8 розв'язують проблему Хілле: саме простір цілих векторів оператора A є множиною $\mathfrak{B}_2$. Якщо A – генератор C_0-групи, обмеженої аналітичної C_0-півгрупи в $\mathfrak{B}$ або C_0-півгрупи нормальних операторів у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{B}_2$ є щільною у вихідному просторі.

Однією з основних у теорії диференціальних рівнянь є проблема опису всіх розв'язків рівняння всередині області та їх поведінки при наближенні до границі. Для звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами вона була розв'язана ще у 18-му ст. Що стосується рівнянь з частинними похідними, то її розв'язання ще далеко не завершене навіть для рівнянь класичної математичної фізики.

У дисертації ця проблема розглядається для рівнянь вигляду

$$\left(\frac{d}{dt} - A\right)^n \left(\frac{d}{dt} + A\right)^m y(t) = 0, \quad n, m \in \mathbb{N}_0,\ t \in \mathcal{I}, \tag{3}$$

де A – генератор аналітичної C_0-півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ в $\mathfrak{B}$, $\mathcal{I} = (-\infty, \infty)$ або $(0, \infty)$. Конкретні реалізації $\mathfrak{B}$, A та m, n в (3) містять у собі певні класи рівнянь з частинними похідними у різних функціональних просторах.

Перш ніж перейти до викладу основних результатів, що стосуються рівняння (3), зупинимось на його частинному випадку

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - A^2\right) y(t) = 0, \quad t \in (0, \infty), \tag{4}$$

де $A \in E(\mathfrak{B})$, і покажемо, які труднощі виникають при його дослідженні.

Формально будь-який розв'язок рівняння (4) можна записати у вигляді

$$y(t) = \exp(tA) f_1 + \frac{\sinh(tA)}{A} f_2, \tag{5}$$

де f_1, f_2 – вектори з $\mathfrak{B}$. Щоб надати сенс цьому виразу, потрібно з'ясувати, що саме розуміється під $\exp(tA)$ та $\frac{\sinh(tA)}{A}$, і яку множину F мають перебігати вектори f_1, f_2, щоб одержати усі його розв'язки на $(0, \infty)$.

Якщо $A \in L(\mathfrak{B})$, $(L(\mathfrak{B})-$ множина усіх обмежених операторів в $\mathfrak{B}$), то $\exp(tA)$ і $\frac{\sinh(tA)}{A}$ можна визначити, наприклад, за допомогою рядів $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$ та $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1} A^{2k}}{(2k+1)!}$, які збігаються рівномірно на довільному компакті $K \in \mathbb{C}$. Тоді загальний розв'язок (4) має вигляд (5) з $f_1, f_2 \in \mathfrak{B}$.

Якщо ж A не обмежений, то питання побудови цих функцій не розв'язане ще й понині. Це по-перше. А по-друге, якщо навіть у деяких випадках і можна визначити ці функції, то немає гарантії, що вираз (5) з $f_1, f_2 \in \mathfrak{B}$ описує усі розв'язки рівняння (4). Іноді можна обійтися множиною F, вужчою за $\mathfrak{B}$, а інколи треба вийти за межі $\mathfrak{B}$, як, наприклад, у випадку рівняння Лапласа (частинний випадок (4), де A^2 – самоспряжене розширення мінімального оператора, породженого у просторі $L_2(a, b)$ диференціальним виразом $-\frac{d^2}{dx^2}$), оскільки не всяка гармонічна у відкритій області функція має граничне значення у звичайному розумінні або в L_p.

Основні результати **розділу 2** стосуються рівняння (3) на $\mathcal{I} = (-\infty, \infty)$.

Під його розв'язком (класичним) розуміється $n + m$ разів неперервно диференційовна на $(-\infty, \infty)$ вектор-функція $y(t) : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{D}(A^{n+m})$, що задовольняє (3). У підрозділі 2.5 описано усі розв'язки (3) на $(-\infty, \infty)$.

Теорема 2.11. *Нехай A – генератор обмеженої аналітичної C_0-півгру- пи* $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ в $\mathfrak{B}$ і $0 \in \rho(A)$. *Вектор-функція $y(t)$ є розв'язком* *рівняння* (3) на $(-\infty,\infty)$ *тоді і тільки тоді, коли її можна подати у вигляді*

$$y(t)=\sum_{k=0}^{n-1}t^k\exp(tA)f_k+\sum_{k=0}^{m-1}t^k\exp(-tA)g_k,\quad f_k,g_k\in\mathfrak{G}_{(1)}(A),\qquad (6)$$

($\rho(\cdot)$ *– резольвентна множина оператора*). *Вектори* f_k *і* g_k *однозначно визначаються за* $y(t)$.

Наслідок 2.5. *Будь-який розв'язок рівняння* (3) *на* $(-\infty,\infty)$ *допускає продовження до цілої вектор-функції зі значеннями в* $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$.

Покладемо $s=s(A)=\sup\limits_{\lambda\in\sigma(A)}\mathrm{Re}\lambda$, де $\sigma(A)$ – спектр оператора A. Оскільки півгрупа $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ є обмеженою аналітичною і $0\in\rho(A)$, то $s(A)$ є не що інше, як тип $\omega(A)$ цієї півгрупи, а тому $s<0$.

Встановлено, що у просторі всіх розв'язків рівняння (3) на $(-\infty,\infty)$ діє аналог принципу Фрагмена-Ліндельофа.

Теорема 2.12. *Нехай* $y(t)$ *– розв'язок рівняння* (3) *на* $(-\infty,\infty)$. *Тоді*

$$\exists\gamma\in(0,-s)\ \exists c_\gamma>0\ \forall t\in(-\infty,\infty):\|y(t)\|\leq c_\gamma e^{\gamma|t|}\Longrightarrow y(t)\equiv 0.$$

У підрозділі 2.2 детально розглянуто однорідне m-гармонічне рівняння

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}-B\right)^m y(t)=0,\quad t\in(-\infty,\infty),\qquad (7)$$

де B – позитивний оператор в $\mathfrak{B}$, тобто $B\in E(\mathfrak{B}),(-\infty,0]\in\rho(B)$ і

$$\exists M>0\ \forall\lambda>0:\left\|(B+\lambda I)^{-1}\right\|\leq\frac{M}{1+\lambda}.$$

Для позитивного оператора B визначеними є дробові степені $B^\alpha, 0<\alpha<1$, і оператор $A=-B^{\frac{1}{2}}$ генерує обмежену аналітичну C_0-півгрупу.

Теорема 2.4. $\mathfrak{B}$*-значна вектор-функція* $y(t)$ *є розв'язком рівняння* (7) *на* $(-\infty,\infty)$ *тоді і тільки тоді, коли вона допускає зображення вигляду*

$$y(t)=\sum_{k=0}^{m-1}t^k\left(\exp(tA)f_k+\exp(-tA)g_k\right),\quad f_k,g_k\in\mathfrak{G}_{(1)}(A),\quad A=-B^{\frac{1}{2}}.$$

Вектори f_k та g_k $(k=0,1,\ldots,m-1)$ *однозначно визначаються за* $y(t)$.

У випадку, коли у (7) $m=1$, знайдено умови на початкові дані розв'язку $y(t)$, за яких він допускає продовження до цілої вектор-функції $y(z)$ певного скінченного порядку і скінченного типу відносно цього порядку. Позначимо через $\mathfrak{A}_c^\rho(\mathfrak{B})$ підпростір усіх цілих вектор-функцій порядку не вище за ρ і скінченного типу щодо цього ρ.

Теорема 2.3. *Для того щоб розв'язок* $y(z)$ *рівняння* (7) *з* $m = 1$ *належав до* $\mathfrak{A}^{\rho}_{c}(\mathfrak{B})$, *необхідно і достатньо, щоб* $y(0), y'(0) \in \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$, *де* $\beta = \frac{\rho-1}{\rho}$. *Якщо ці умови виконуються, то* $\forall z \in \mathbb{C} : y(z) \in \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$. *При* $\rho > \frac{\pi}{2\theta}$ (θ *– кут аналітичності півгрупи* $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$) *сукупність розв'язків* $y(\cdot) \in \mathfrak{A}^{\rho}_{c}(\mathfrak{B})$ *є щільною у множині усіх його розв'язків.*

У підрозділі 2.3 розглянуто також неоднорідне m-гармонічне рівняння

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - B\right)^m y(t) = f(t), \quad t \in (-\infty, \infty), \tag{8}$$

де $f \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, $C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ – множина всіх обмежених неперервних на $\mathbb{R}$ вектор-функцій із значеннями в $\mathfrak{B}$. Досліджено його узагальнені розв'язки на $\mathbb{R}$. Під таким розв'язком розуміється вектор-функція $y(\cdot) \in C(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, яка задовольняє інтегральну тотожність

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left\langle \left(\frac{d^2}{dt^2} - B^*\right)^m \varphi(t), y(t) \right\rangle dt = \int\limits_{\mathbb{R}} \langle \varphi(t), f(t)\rangle \, dt,$$

де $\varphi(t)$ – довільна нескінченно диференційовна вектор-функція із значеннями в $\mathcal{D}(B^{*m})$ з компактним носієм така, що $B^{*m}\varphi(t)$ є неперервною на $\mathbb{R}$, $\langle \cdot, f\rangle$ – дія функціоналу f на відповідний елемент.

Теорема 2.6. *Нехай* $A^m f(t) \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ *і*

$$y_m(t) = \frac{A^{-m}}{2^m} \int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{A(|t-s_1|+|s_2-s_1|+\cdots+|s_m-s_{m-1}|)} f(s_m)\, ds_1 \ldots ds_m. \tag{9}$$

Тоді $y_m^{(i)}(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}, \mathcal{D}(A^{2m-i}))$, $i = 0, 1, \ldots, 2m$, *і* $y_m(t)$ *– розв'язок* (8).

Наслідок 2.3. *Якщо* $f(t) \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, *то* $y_m^{(k)}(t) \in C_b(\mathbb{R}, \mathcal{D}(A^{2m-k}))$, $k = 0, 1, \ldots, m$, *і* $y_m(t)$ *– узагальнений розв'язок рівняння* (8).

Теорема 2.7. *Нехай* $f(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}, \mathcal{D}(A^m))$ ($f(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$). *Тоді існує єдиний обмежений класичний (узагальнений) розв'язок* $y(t)$ *рівняння* (8) *на* $(-\infty, \infty)$ *і цей розв'язок зображується у вигляді* (9).

Частинним випадком (8) ($m = 1$) є гармонічне рівняння

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - B\right) y(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

де B - позитивний оператор в $\mathfrak{B}$, $f(\cdot) \in C(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. У підрозділі 2.4 знайдено умови на $f(t)$, які гарантують існування єдиного обмеженого, зокрема, періодичного або майже періодичного за Бором його розв'язку.

Позначимо через $C_b^\alpha(\mathbb{R},\mathfrak{B})$ клас усіх вектор-функцій $y(t):\mathbb{R}\mapsto\mathfrak{B}$, що задовольняють умову неперервності Гельдера з показником $\alpha\in(0,1)$:

$$\exists c>0 : \|y(t)-y(s)\|\le c|t-s|^\alpha.$$

Нехай також $\widetilde{C_b^\alpha}(\mathbb{R},\mathfrak{B})$ – множина вектор-функцій з $C_b(\mathbb{R},\mathfrak{B})$, для яких

$$\exists c>0 : \|y(t+s)-2y(t)+y(t-s)\|\le c|t-s|^\alpha.$$

Очевидно, що $C_b^\alpha(\mathbb{R},\mathfrak{B})\subset\widetilde{C_b^\alpha}(\mathbb{R},\mathfrak{B})$.

У підрозділі 2.4 знайдено ширший, ніж у теоремі 2.6, клас вектор-функцій $f(\cdot)\in C_b(\mathbb{R},\mathfrak{B})$, для яких $z(t)=y_1(t)$ – розв'язок рівняння (10).

Покладемо

$$\omega_2(s,f)=\sup_{|\tau|\le s}\sup_{t\in\mathbb{R}}\|\omega_f(t,\tau)\|,\quad \omega_f(t,s)=f(t+s)+f(t-s)-2f(t).$$

Теорема 2.8. *Нехай $f(\cdot)\in C_b(\mathbb{R},\mathfrak{B})$ задовольняє умову*

$$\int\limits_0^1\frac{\omega_2(s,f)}{s}\,ds<\infty.$$

Тоді $z(t)$ є розв'язком рівняння (10).

Наслідок 2.4. *Якщо $f(\cdot)\in\widetilde{C_b^\alpha}(\mathbb{R},\mathfrak{B})$, то вектор-функція $z(t)$ – розв'язок рівняння* (10).

Теорема 2.9. *Нехай для кожного $t\in(-\infty,\infty)$, $f(t)\in\mathcal{D}((-A)^\alpha)$, $0<\alpha\le 1$, і функція $\|(-A)^\alpha f(t)\|$ є обмеженою. Тоді для будь-якого $\alpha'\in(0,\alpha)$*

$$z(t)\in\mathcal{D}((-A)^{2+\alpha'}),\quad z''(t)\in\mathcal{D}((-A)^{\alpha'}),$$

вектор-функції $(-A)^{2+\alpha}z(t)$ та $(-A)^\alpha z''(t)$ є неперервними на $\mathbb{R}$ і $z(t)$ – розв'язок рівняння (10).

Основний результат цього підрозділу міститься у такій теоремі.

Теорема 2.10. *Нехай $f(\cdot)\in C_b(\mathbb{R},\mathfrak{B})$. Тоді існує лише один обмежений узагальнений розв'язок $y(t)$ рівняння* (10) *на $(-\infty,\infty)$ і цей розв'язок зображується у вигляді* (9) з $m=1$. *Якщо ж $f(\cdot)\in\widetilde{C_b^\alpha}(\mathbb{R},\mathfrak{B})$, $\alpha\in(0,1)$, або $f(\cdot)\in C_b(\mathbb{R},\mathcal{D}(A^\alpha))$, то він є класичним. У випадку, коли вектор-функція $f(t)$ майже періодична (періодична), $y(t)$ є таким самим.*

У розділі 3 розглянуто рівняння

$$y'(t)+Ay(t)=0,\quad t\in\mathbb{R}_+=[0,\infty), \tag{11}$$

де A – невід'ємний самоспряжений оператор у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$ зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$. Доведено прямі й обернені теореми теорії наближень слабких розв'язків цього рівняння, а саме, вектор-функцій

$$y(t) = e^{-tA}f = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, d(E_\lambda f, f),\ f \in \mathfrak{H}, \tag{12}$$

(E_λ – спектральна функція A), розв'язками з класу $\mathfrak{A}^1_c$, тобто цілими розв'язками експоненціального типу. Їх множину позначимо через S_0, а через S – множину всіх слабких розв'язків рівняння (11).

Множина S утворює банахів простір відносно норми

$$\|y\|_S = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \left\|e^{-tA}f\right\| = \|f\|.$$

Якщо оператор A обмежений, то будь-який слабкий розв'язок $y(t)$ рівняння (11) може бути продовжений до цілої вектор-функції $y(z)$ експоненціального типу. Проте це не так у випадку необмеженого A. Наступна теорема (підрозділ 3.1) характеризує множину S_0.

Теорема 3.1. *Слабкий розв'язок $y(t)$ рівняння* (11) *належить до S_0 тоді і тільки тоді, коли його можна подати у вигляді* (12) *з $f \in \mathfrak{G}_{\{0\}}(A)$. Множина S_0 є щільною в S, і $\sigma(y) = \sigma(f, A)$, де $\sigma(y)$ – тип вектор-функції $y(z)$, а $\sigma(f, A) = s(f, 0, A)$ – A-тип вектора f.*

Для $y \in S$ і числа $r > 0$ покладемо

$$\mathcal{E}_r(y) = \inf_{y_0\in S_0:\sigma(y_0)\le r} \|y - y_0\|_S,$$

тобто, $\mathcal{E}_r(y)$ – найкраще наближення слабкого розв'язку $y(t)$ рівняння (11) розв'язками з $\mathfrak{A}^1_c$, тип яких не перевищує r. Нехай також для $f \in \mathfrak{H}$

$$\mathcal{E}_r(f, A) = \inf_{f_0\in\mathfrak{G}_{\{0\}}(A):\sigma(f_0,A)\le r} \|f - f_0\| = \|(I - E_r)f\|.$$

Показано, що якщо $y(t) = e^{-tA}f$, то $\mathcal{E}_r(y) = \mathcal{E}_r(f, A)$.

У підрозділі 3.2 доведено аналог теореми Джексона, а саме, встановлено зв'язок між $\mathcal{E}_r(y)$ та k-им ($k \in \mathbb{N}_0$) узагальненим модулем гладкості

$$\omega_k(t, y) = \sup_{0\le h\le t}\sup_{s\in\mathbb{R}_+} \left\| \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} C_k^j y(s + jh)\right\|; \quad \omega_0(t, y) \equiv \|y\|_S, \quad t > 0.$$

Теорема 3.2. *Нехай $y \in S$. Тоді*

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \exists c_k > 0 : \mathcal{E}_r(y) \le c_k\omega_k\left(\frac{1}{r}, y\right), \quad r > 0.$$

Теорема 3.3. *Припустимо, що* $y \in S \cap C^n(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H})$, $n \in \mathbb{N}_0$. *Тоді*

$$\forall r > 0 \ \forall k \in \mathbb{N}_0 : \mathcal{E}_r(y) \leq \frac{c_{k+n}}{r^n} \omega_k \left(\frac{1}{r}, y^{(n)} \right).$$

Показано, що виконується й у деякому розумінні обернене твердження.
Наслідок 3.1. *Нехай* $y \in S \cap C^n(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H})$, $n \in \mathbb{N}$. *Тоді*

$$\forall r > 0 : \mathcal{E}_r(y) \leq \frac{c_n}{r^n} \|y^{(n)}\|_S.$$

Теорема 3.4. *Припустимо тепер, що* $y \in S$ і $\omega(t)$ – *функція типу модуля неперервності, тобто* $\omega(t)$ *є неспадною неперервною на* $\mathbb{R}_+$ *функцією,* $\omega(0) = 0$ *і* $\omega(2t) \leq c\omega(t)$ $(\forall t > 0, c = const)$. *Для того щоб* $y \in C^n(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H})$, *достатньо, щоб існувало число* $m > 0$ *таке, що*

$$\forall r > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} : \mathcal{E}_r(y) \leq \frac{m}{r^n} \omega \left(\frac{1}{r} \right).$$

Нехай $\{m_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ $(m_0 = 1)$ – неспадна послідовність чисел така, що $m_n \geq c\alpha^n$ $(\forall \alpha > 0, c = c(\alpha))$. Для формулювання прямих і обернених теорем наближення $y \in S$ розв'язками з S_0 у підрозділі 3.3 введено простори

$$C_{\{m_n\}}(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H}) = \operatorname*{ind\,lim}_{\alpha \to \infty} C^{\alpha}_{m_n}(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H}) \text{ та } C_{(m_n)}(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H}) = \operatorname*{proj\,lim}_{\alpha \to 0} C^{\alpha}_{m_n}(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H}),$$

де

$$C^{\alpha}_{m_n}(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H}) = \left\{ y \in C^{\infty}(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H}) \middle| \exists c > 0 \ \forall k \in \mathbb{N}_0 : \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \left\| y^{(k)}(t) \right\| \leq c m_k \alpha^k \right\}$$

– банахів простір відносно норми

$$\|y\|_{C^{\alpha}_{m_n}} = \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \left\| y^{(k)}(t) \right\|}{\alpha^k m_k}.$$

Очевидно, що простори $C_{\{n!\}}(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H}) = C_{\{n^n\}}(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H})$, $C_{(n!)}(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H}) = C_{(n^n)}(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H})$ $(m_n = n!$ або $n^n)$ і $C_{\{1\}}(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H})$ $(m_n \equiv 1)$ є не що інше, як простори обмежених на $\mathbb{R}_+$ разом з усіма їхніми похідними аналітичних, цілих та цілих експоненціального типу $\mathfrak{H}$-значних вектор-функцій відповідно.

Покладемо також

$$\tau(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{m_n}. \tag{13}$$

Функція $\tau(\lambda)$ є цілою, $\tau(\lambda) \geq 1$ для $\lambda \geq 0$ і $\tau(\lambda) \uparrow \infty$ при $\lambda \to \infty$.

Теорема 3.5. *Нехай додатково $m_{n+1} \le ch^n m_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, для деяких $c > 0$ та $h > 1$. Тоді справджуються такі співвідношення еквівалентності:*

$$\begin{aligned} y \in C^{\infty}(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H}) &\iff \forall\alpha > 0 : \mathcal{E}_r(y) = O\left(\tfrac{1}{r^{\alpha}}\right) \quad (r \to \infty), \\ y \in C_{\{m_n\}}(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H}) &\iff \exists\alpha > 0 : \mathcal{E}_r(y) = O\left(\tau^{-1}(\alpha r)\right) \quad (r \to \infty), \\ y \in C_{(m_n)}(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H}) &\iff \forall\alpha > 0 : \mathcal{E}_r(y) = O\left(\tau^{-1}(\alpha r)\right) \quad (r \to \infty). \end{aligned}$$

Що стосується можливості продовження $y(t)$ до цілої вектор-функції порядку ρ і скінченного типу, відповідь дає така теорема.

Теорема 3.6. *Слабкий розв'язок рівняння* (11) *допускає продовження до цілої $\mathfrak{H}$-значної вектор-функції $y(z)$ тоді і тільки тоді, коли*

$$\forall\alpha > 0 : \mathcal{E}_r(y) = O\left(e^{-\alpha r}\right) \quad (r \to \infty).$$

Продовження $y(z)$ є скінченного порядку ρ і скінченного типу відносно ρ тоді і тільки тоді, коли

$$\exists\alpha > 0 : \mathcal{E}_r(y) = O\left(e^{-\alpha r^{1/\beta}}\right) \quad (r \to \infty), \quad \beta = \frac{\rho - 1}{\rho}.$$

Прямі й обернені теореми теорії апроксимації зазвичай формулюються у банаховому просторі, але їх доведення простіші у гільбертовому. У підрозділі 3.4 показано, як, наприклад, теорема 3.5 може бути переформульована у випадку банахового простору $\mathfrak{B}$, оснащеного гільбертовими з позитивною і негативною в сенсі Березанського нормами у ланцюжку $\mathfrak{H}^n \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}^{-n}$, де $\mathfrak{H}^n = \mathcal{D}(A^n)$ з нормою $\|f\|_{\mathfrak{H}^n} = \left(\|f\|^2 + \|A^n f\|^2\right)^{1/2}$, а $\mathfrak{H}^{-n}$ – поповнення $\mathfrak{H}$ за нормою $\|f\|_{\mathfrak{H}^{-n}} = \left\|(A + I)^{-n} f\right\|$.

Теорема 3.7. *Нехай $\mathfrak{B}$ – банахів простір з нормою $\|\cdot\|_{\mathfrak{B}}$ у ланцюжку*

$$\mathfrak{H}^{k_1} \subseteq \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}^{-k_2} \quad k_1, k_2 \in \mathbb{N}.$$

Тоді для слабкого розв'язку $y(t)$ рівняння (11) *виконуються такі співвідношення еквівалентності:*

$$\begin{aligned} y \in C^{\infty}(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H}) &\iff \forall\alpha > 0 : \mathcal{E}_r(y, \mathfrak{B}) = O\left(r^{-\alpha}\right) \quad (r \to \infty), \\ y \in C_{\{m_n\}}(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H}) &\iff \exists\alpha > 0, : \mathcal{E}_r(y, \mathfrak{B}) = O\left(\tau^{-1}(\alpha r)\right) \quad (r \to \infty), \\ y \in C_{(m_n)}(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H}) &\iff \forall\alpha > 0 : \mathcal{E}_r(y, \mathfrak{B}) = O\left(\tau^{-1}(\alpha r)\right) \quad (r \to \infty), \end{aligned}$$

де

$$\mathcal{E}_r(y, \mathfrak{B}) = \inf_{y_0 \in S_0 : \sigma(y_0) \le r} \sup_{s \in \mathbb{R}_+} \|y(s) - y_0(s)\|_{\mathfrak{B}}.$$

У підрозділі 3.5 розглянуто випадок, коли A – самоспряжений оператор в $\mathfrak{H}$ з дискретним спектром. Тоді теорема 3.7 переформульовується у термінах його власних чисел λ_k, $k \in \mathbb{N}$.

Теорема 3.8. *Мають місце такі співвідношення еквівалентності:*

$$\begin{aligned}
y\in C^{n}(\mathbb{R}_+,\mathfrak{H}) &\iff \mathcal{E}_{\lambda_k}(y)=O\left(\lambda_{k+1}^{-n}\right) \quad (n\to\infty),\\
y\in C^{\infty}(\mathbb{R}_+,\mathfrak{H}) &\iff \forall\alpha>0:\mathcal{E}_{\lambda_k}(y)=O\left(\lambda_{k+1}^{-\alpha}\right) \quad (n\to\infty),\\
y\in C_{\{m_n\}}(\mathbb{R}_+,\mathfrak{H}) &\iff \exists\alpha>0:\mathcal{E}_{\lambda_k}(y)=O\left(\tau^{-1}(\alpha\lambda_{k+1})\right) \quad (n\to\infty),\\
y\in C_{(m_n)}(\mathbb{R}_+,\mathfrak{H}) &\iff \forall\alpha>0:\mathcal{E}_{\lambda_k}(y)=O\left(\tau^{-1}(\alpha\lambda_{k+1})\right) \quad (n\to\infty).
\end{aligned}$$

Результати застосовано до конкретного випадку, коли оператор A породжується еліптичним диференціальним виразом другого порядку у просторі $L_2(\Omega)$ (область $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ є обмеженою з гладкою межею) і певною граничною умовою (підрозділ 3.6).

У розділі 4 для обмеженої аналітичної C_0-півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ у банаховому просторі $\mathfrak{B}$ вводяться деякі локально-опуклі простори гладких та узагальнених векторів її генератора $A\notin L(\mathfrak{B})$, досліджуються звуження і розширення заданої півгрупи на ці простори, наводяться застосування до конкретних задач. Варто зазначити, що попередні розділи стосувались лише C_0-півгруп, дія яких не виходить за межі простору $\mathfrak{B}$.

У підрозділі 4.1 доведено, що за таких умов на оператор A, $0\in\sigma_c\left(e^{tA}\right)$ для будь-якого $t>0$ ($\sigma_c(\cdot)$ – неперервний спектр оператора).

На множині $\mathfrak{B}_t=\mathcal{R}\left(e^{tA}\right)$, $t>0$, введено норму $\|x\|_t=\left\|e^{-tA}x\right\|$, з якою $\mathfrak{B}_t$ є банаховим простором, щільно і неперервно вкладеним у $\mathfrak{B}_0=\mathfrak{B}$. Позначимо через $V_s(t)$ звуження оператора e^{tA} на $\mathfrak{B}_s : V_s(t):=e^{tA}\restriction_{\mathfrak{B}_s}$.

Теорема 4.1. *Множина $\{V_s(t)\}_{t\geq 0}$ утворює обмежену аналітичну C_0-півгрупу у просторі $\mathfrak{B}_s$ з генератором $A_s=A\restriction_{\mathfrak{B}_s}$.*

Покладемо

$$\mathfrak{B}_{(+)}=\bigcap_{s\geq 0}\mathfrak{B}_s=\operatorname{proj}\lim_{s\to\infty}\mathfrak{B}_s,\quad \mathfrak{B}_{\{+\}}=\bigcup_{s\geq 0}\mathfrak{B}_s=\operatorname{ind}\lim_{s\to 0}\mathfrak{B}_s.$$

Доведено щільність простору $\mathfrak{B}_{(+)}$ в $\mathfrak{B}$.

Позначимо через $\{V(t)\}_{t\geq 0}$ звуження $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ на $\mathfrak{B}_{(+)} : V(t)=e^{tA}\restriction_{\mathfrak{B}_{(+)}}$.

Теорема 4.3. *Нехай $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ – обмежена аналітична C_0-півгрупа в $\mathfrak{B}$. Тоді півгрупа $\{V(t)\}_{t\geq 0}$ є одностайно неперервною в $\mathfrak{B}_{(+)}$, а її генератор $A_+=A\restriction_{\mathfrak{B}_{(+)}}$ – визначений на всьому $\mathfrak{B}_{(+)}$ неперервний у ньому оператор.*

Для $t\in\mathbb{R}$ покладемо

$$\widetilde{V}(t)=\begin{cases} V(t) & \text{при} \quad t\geq 0,\\ V^{-1}(-t) & \text{при} \quad t<0.\end{cases}$$

Наслідок 4.1. *Якщо $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ – обмежена аналітична C_0-півгрупа у просторі $\mathfrak{B}$, то її звуження $\{V(t)\}_{t\geq 0}$ на $\mathfrak{B}_{(+)}$ допускає продовження до C_0-групи $\left\{\widetilde{V}(t)\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ у цьому просторі.*

Наслідок 4.2. *За умов наслідку 4.1 $V(t)$ допускає продовження до цілої оператор-функції $\exp(zA)$ у просторі $\mathfrak{B}_{(+)}$.*

У підрозділі 4.2 вводяться простори узагальнених векторів оператора A таким чином. Позначимо через $\mathfrak{B}_{-t}$ $(t > 0)$ поповнення $\mathfrak{B}$ за нормою $\|x\|_{-t} = \left\|e^{tA}x\right\|$ $(\mathfrak{B}_0 := \mathfrak{B})$. При $t' > t \geq 0$ простір $\mathfrak{B}_{-t}$ вкладається в $\mathfrak{B}_{-t'}$ щільно і неперервно. Показано, що півгрупа $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ допускає неперервне продовження $\{U_s(t)\}_{t\geq 0}$ на $\mathfrak{B}_{-s}$, причому $\|U_s(t)\|_{\mathfrak{B}_{-s}} \leq 1$.

Теорема 4.4. *Оператор $U_t(t)$ ізометрично відображає $\mathfrak{B}_{-t}$ на $\mathfrak{B}$, і для будь-якого $s > 0$, $\{U_s(t)\}_{t\geq 0}$ є обмеженою аналітичною C_0-півгрупою у просторі $\mathfrak{B}_{-s}$. Більше того, при $s' > s > 0$, $U_{s'}(t) \restriction_{\mathfrak{B}_{-s}} = U_s(t)$.*

Покладемо

$$\mathfrak{B}_{\{-\}} = \operatorname*{ind\,lim}_{t\to\infty} \mathfrak{B}_{-t}, \quad \mathfrak{B}_{(-)} = \operatorname*{proj\,lim}_{t\to 0} \mathfrak{B}_{-t}.$$

У просторі $\mathfrak{B}_{\{-\}}$ визначимо півгрупу $\left\{\check{U}(t)\right\}_{t\geq 0}$ як

$$\check{U}(t)x = U_s(t)x, \text{ якщо } x \in \mathfrak{B}_{-s},$$

(коректність такого означення випливає з теореми 4.4). C_0-півгрупа $\left\{\check{U}(t)\right\}_{t\geq 0}$ є аналітичною і $\check{U}(t) \restriction_{\mathfrak{B}} = e^{tA}$. Її генератор $\check{A}$ є розширенням A в $\mathfrak{B}_{\{-\}}$.

У просторі $\mathfrak{B}_{(-)}$ розглянуто півгрупу $\left\{\hat{U}(t)\right\}_{t\geq 0}$, де

$$\hat{U}(t)x = U_s(t)x, \quad \forall s \geq 0.$$

Це означення не залежить від вибору s, а отже, також є коректним. C_0-півгрупа $\left\{\hat{U}(t)\right\}_{t\geq 0}$ є аналітичною в $\mathfrak{B}_{(-)}$ і $\hat{U}(t)\mathfrak{B}_{(-)} \subset \mathfrak{B}$ при $t > 0$.

Теорема 4.5. *Півгрупа $\left\{\hat{U}(t)\right\}_{t\geq 0}$ є одностайно неперервною в $\mathfrak{B}_{(-)}$ і має такі властивості: $\forall t > 0 : \hat{U}(t)\mathfrak{B}_{(-)} \subset \mathfrak{B}$; $\forall t \geq 0\ \forall x \in \mathfrak{B} : \hat{U}(t)x = e^{tA}x$; $\forall t, s > 0\ \forall x \in \mathfrak{B}_{(-)} : \hat{U}(t+s)x = e^{tA}\hat{U}(s)x = e^{sA}\hat{U}(t)x$. Її генератор $\hat{A}$ визначений і неперервний на всьому $\mathfrak{B}_{(-)}$, і $\hat{A} \restriction_{\mathcal{D}(A)} = A$.*

У підрозділі 4.3 доведено (теорема 4.7), що якщо A – генератор обмеженої аналітичної C_0-півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ в $\mathfrak{B}$, то $\mathfrak{G}_{(1)}(A) = \mathfrak{B}_{(+)}(A)$ і $\mathfrak{G}_{\{1\}}(A) = \mathfrak{B}_{\{+\}}(A)$. Більше того, топології відповідних пар просторів еквівалентні.

Підрозділи 4.4 - 4.6 присвячено застосуванням введених просторів до вивчення розв'язків рівнянь типу (3), але вже не на всій осі, а на півосі $(0, \infty)$. Основний результат міститься у такій теоремі.

Теорема 4.11. *Нехай A – генератор обмеженої аналітичної C_0-півгру пи у просторі $\mathfrak{B}$ і $0 \in \rho(A)$. Вектор-функція $y(t)$ є розв'язком* *рівняння* (3) *на* $(0, \infty)$ *тоді і тільки тоді, коли її можна подати у вигляді*

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^k e^{t\hat{A}} f_k + \sum_{k=0}^{m-1} t^k \exp(-tA) g_k, \ f_k \in \mathfrak{B}_{(-)}(A), \ g_k \in \mathfrak{B}_{(+)}(A). \quad (14)$$

Вектори f_k *і* g_k *однозначно визначаються за* $y(t)$.

Детальніше досліджено розв'язки рівнянь першого порядку (підрозділ 4.4) та рівняння другого порядку (підрозділ 4.5) вигляду

$$y''(t) = By(t), \quad t \in (0, \infty), \quad (15)$$

де B – слабо позитивний оператор в $\mathfrak{B}$, тобто $B \in E(\mathfrak{B})$, $\rho(B) \supset (-\infty, 0)$ і існує стала $M > 0$ така, що $\|R(-\lambda; B)\| \le \frac{M}{\lambda}$ $(\forall \lambda > 0)$. Доведено, що кожний розв'язок рівняння (15) допускає зображення

$$y(t) = e^{t\hat{A}} f + \frac{\sinh(tA)}{A} g, \ f \in \mathfrak{B}_{(-)}(A), \ g \in \mathfrak{B}_{(+)}(A); \ A = -B^{1/2}, \quad (16)$$

має граничне значення в нулі у просторі $\mathfrak{B}_{(-)}(A)$ і є аналітичною на $(0, \infty)$ вектор-функцією в $\mathfrak{B}$. Для того щоб розв'язок допускав продовження до цілої вектор-функції, необхідно і достатньо, щоб $y(0) \in \mathfrak{B}_{(+)}(A)$.

Основний результат **розділу 5** стосується задачі Діріхле для рівняння (15) зі слабо позитивним B, яка полягає у відшуканні для заданого $f \in \mathfrak{B}_{(-)}(A)$, $A = -B^{1/2}$, розв'язку $y(t)$, що задовольняє умову

$$y(t) \to f \text{ у просторі } \mathfrak{B}_{(-)}(A) \text{ при } t \to 0.$$

Зображення (16) показує, що у цьому випадку поставлена задача має безліч розв'язків, які описуються формулою (16), а отже, вона розв'язується однозначно з точністю до розв'язків однорідної задачі $(f = 0)$

$$y(t) = \frac{\sinh(tA)}{A} g, \quad g \in \mathfrak{B}_{(+)}(A) = \mathfrak{G}_{(1)}(A). \quad (17)$$

Природно постає питання, які умови на $y(t)$ гарантують його єдиність.

У підрозділі 5.2 розглядається випадок самоспряженого B в $\mathfrak{H}$.

Теорема 5.1. *Якщо для розв'язку* $y(t)$ *однорідної задачі Діріхле для рівняння* (15) з $B = B^*$ в $\mathfrak{H}$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists c_\varepsilon > 0 : \|y(t)\| \le c_\varepsilon e^{\varepsilon t},$$

то $y(t) = tg$, $g \in \ker B$. *Зокрема, за умови, що* $\ker B = \{0\}$, $y(t) \equiv 0$.

Наступні теореми характеризують вектор g у зображенні (17) в залежності від поведінки $y(t)$ при $t \to \infty$.

Теорема 5.2. *Нехай B – самоспряжений оператор в $\mathfrak{H}$.* Тоді *у зображенні* (17)

$$g \in \mathfrak{G}_{\{0\}}(A) \Longleftrightarrow \exists c > 0, \exists \alpha > 0 : \|y(t)\| \leq c e^{\alpha t},\ t > 0 - \text{ достатньо великі.}$$

Отже, розв'язок однорідної задачі Діріхле може мати експоненціальний ріст на нескінченності лише тоді, коли у його зображенні (17) $g \in \mathfrak{G}_{\{0\}}(A)$. Розв'язки типу, вищого за експоненціальний, описуються таким чином.

Нехай $\gamma(t) > 0$ – неперервна на $[0, \infty)$ функція така, що

$$\forall \lambda > 0 : G^2(\lambda) = \int\limits_0^\infty \left(\frac{\sinh \lambda t}{\lambda} \right)^2 \gamma(t)\, dt < \infty. \tag{18}$$

Позначимо через Y_γ гільбертів простір усіх розв'язків $y(t)$ однорідної задачі, для яких $\|y\|^2_{Y_\gamma} = \int\limits_0^\infty \|y(t)\|^2 \gamma(t)\, dt < \infty$, зі скалярним добутком

$$(y, z)_{Y_\gamma} = \int\limits_0^\infty (y(t), z(t)) \gamma(t)\, dt.$$

Теорема 5.3. *За умови, що B – самоспряжений оператор в $\mathfrak{H}$,* вектор *g у* (17) *належить до гільбертового простору*

$$\mathfrak{H}_G(A) = \mathcal{D}\left(G(A)\right), \quad (f, x)_{\mathfrak{H}_G(A)} = \left(G(A)f, G(A)x\right),$$

тоді і тільки тоді, коли $y(\cdot) \in Y_\gamma$. Більше того, формула (18) *встановлює ізометричний ізоморфізм просторів Y_γ* та *$\mathfrak{H}_G(A)$.*

Наслідок 5.1. *Для того щоб розв'язок $y(t)$ однорідної задачі Діріхле для рівняння* (15) *допускав зображення* (17) *з $g \in \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ $\left(g \in \mathfrak{G}_{(\beta)}(A)\right)$, $\beta < 1$, необхідно і достатньо, щоб існували* сталі *$c > 0$ та $\mu > 0$ (для $\mu > 0$ $\exists c > 0$) такі, що $\|y(t)\| \leq c \exp\left(\mu t^{1/(1-\beta)}\right)$.*

У підрозділі 5.3 розглядається питання єдиності розв'язку однорідної задачі Діріхле для рівняння (15) з позитивним оператором B у банаховому просторі $\mathfrak{B}$, а саме, знайдено умови на поведінку її розв'язку на нескінченності, які забезпечують його єдиність.

Теорема 5.4. *Нехай B – позитивний оператор у просторі $\mathfrak{B}$ з типом $(\omega, M(\theta))$, а $y(t)$ – розв'язок однорідної задачі Діріхле для рівняння* (15). *Тоді*

$$\exists a > 0\, \exists c_a > 0\, \forall t \in (0, \infty) : \|y(t)\| \leq c_a e^{a t^\beta} \text{ з } \beta < \frac{\pi}{\pi + \omega} \Longrightarrow y(t) \equiv 0. \tag{19}$$

Нагадаємо, що оператор B має тип $(\omega, M(\theta))$, якщо $\rho(-B)$ містить сектор $\Sigma_{\pi-\omega} = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \pi - \omega\}$ і на кожному промені $z = re^{i\varphi},\ r > 0,\ |\varphi| < \pi - \omega,\ \ \|R(-\lambda, B)\| \leq \frac{M_\varphi}{|\lambda|}$ $(M_\varphi = \text{const})$.

У випадку позитивного нормального B в $\mathfrak{H}$ (19) можна замінити на

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c = c(\varepsilon) > 0 : \|y(t)\| \leq ce^{\varepsilon t},\ t \in (0, \infty), \tag{20}$$

але відмовитись від довільності ε не можна.

Теорему 5.4 поширено на випадок слабо позитивного $\mathfrak{B}$ з тією лише відмінністю, що тепер $y(t) = tg$, де $g \in \ker B$.

У підрозділі 5.4 розглянуто неоднорідну задачу Діріхле для рівняння (15). Її розв'язки описуються таким чином.

Теорема 5.7. *Вектор-функція $y(t)$ є розв'язком неоднорідної задачі Діріхле для рівняння* (15) *з $f \in \mathfrak{B}_{(-)}(A)$ і позитивним B тоді і тільки тоді, коли вона допускає зображення*

$$y(t) = e^{t\hat{A}} f + \frac{\sinh(tA)}{A} g, \quad g \in \mathfrak{B}_{(+)}(A).$$

Якщо $\ker A = \{0\}$, *то за умови* (19) *ця задача однозначно розв'язна.*

Доведено також, що якщо B – слабо позитивний оператор в $\mathfrak{B}$, то вектор-функція $y(\cdot) \in C^2([0, \infty), \mathfrak{B})$, що задовольняє умови $y''(t) = By(t)$, $y(0) = 0$, $\|y(t)\| = o\,(t^n)$ $(t \to \infty)$ з деяким $n \in \mathbb{N}$, має вигляд $y(t) = tf,\ f \in \ker A$. Зокрема, $y(t) \equiv 0$, якщо $\ker A = \{0\}$.

У підрозділі 5.5 досліджено поведінку розв'язків $y(t)$ рівняння (15) з позитивним B в $\mathfrak{B}$, для яких $y(t) \to f$ у просторі $\mathfrak{B}_{(-)}(A)$ і виконується нерівність з (19). Вони зображуються у вигляді $y(t) = e^{t\hat{A}} f,\ A = -B^{1/2}$, а їх поведінка уточнюється таким твердженням.

Теорема 5.9. *Будь-який розв'язок неоднорідної задачі Діріхле для рівняння* (15), *який при великих $t > 0$ задовольняє нерівність* (19), *є обмеженим на ∞. Усі вони прямують там до 0 лише тоді, коли $0 \in \sigma_c(A) \cup \rho(A)$. Їх експоненціальне спадання еквівалентне включенню $0 \in \rho(A)$.*

Показано також (підрозділ 5.6), що у випадку однозначної розв'язності неоднорідної задачі Діріхле для рівняння (15) зі слабо позитивним B в $\mathfrak{B}$ для наближення розв'язків можна застосувати метод степеневих рядів.

Розділ 6 присвячено вивченню стійких, тобто обмежених в околі нескінченності розв'язків рівняння (15) зі слабо позитивним B в $\mathfrak{B}$.

Рівняння (15) називається *рівномірно стійким*, якщо для будь-якого його стійкого розв'язку $y(t)$

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = 0, \tag{21}$$

і *рівномірно експоненціально стійким*, якщо

$$\exists \omega > 0 : \lim_{t\to\infty} e^{\omega t} y(t) = 0. \tag{22}$$

Оскільки жодних умов на поведінку стійкого розв'язку в околі нуля не накладається, такий розв'язок може мати особливість при $t \to 0$ будь-якого порядку. Доведено, що коли неоднорідна задача Діріхле для рівняння (15) поставлена коректно (відповідна однорідна однозначно розв'язна), достатньо, щоб у наведених означеннях рівності (21),(22) виконувались принаймні для всіх його аналітичних на $[0,\infty)$ стійких розв'язків. У термінах теорії півгруп знайдено критерії рівномірної й рівномірної експоненціальної стійкості рівняння (15). Нагадаємо, що C_0- півгрупа $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ в $\mathfrak{B}$ називається *рівномірно стійкою*, якщо

$$\forall x \in \mathfrak{B} : \lim_{t\to\infty} \|U(t)x\| = 0,$$

і *рівномірно експоненціально стійкою*, якщо

$$\exists M > 0 \text{ та } \omega > 0 : \|U(t)\| \leq M e^{-\omega t}, \ \forall t > 0.$$

Існує такий зв'язок між рівномірною (рівномірною експоненціальною) стійкістю (15) та відповідною стійкістю $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ з $A = -B^{1/2}$.

Наслідок 6.1. *Нехай B – слабо позитивний оператор в $\mathfrak{B}$. Для того щоб рівняння* (15) *було рівномірно (рівномірно експоненціально) стійким, достатньо, щоб такою самою була півгрупа $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$.*

У цьому розділі наведено також умови в термінах спектру оператора $A = -B^{1/2}$, за яких півгрупа $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ має певний вид стійкості.

Теорема 6.2. *Нехай B – слабо позитивний оператор в $\mathfrak{B}$. Півгрупа $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ є рівномірно (рівномірно експоненціально) стійкою тоді і тільки тоді, коли $0 \in \sigma_c(A) \cup \rho(A)$ $(0 \in \rho(A))$. Для того щоб вона була рівномірно, але не рівномірно експоненціально стійкою, необхідно і достатньо, щоб $0 \in \sigma_c(A)$.*

Інші критерії рівномірної експоненціальної стійкості півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ дано у наступних твердженнях.

Теорема 6.3. *Нехай $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ – C_0-півгрупа в $\mathfrak{B}$ і $\gamma(t) > 0$ – неперервна на $[0,\infty)$ функція така, що $\gamma(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Якщо*

$$\forall x \in \mathfrak{B} \quad \exists c = c(x) > 0 : \left\|e^{tA} x\right\| \leq c\gamma(t), \quad t \in [0,\infty), \tag{23}$$

то $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ є рівномірно експоненціально стійкою. У випадку диференційовності (аналітичності) на $(0,\infty)$ заданої півгрупи, для її рівномірної експоненціальної стійкості достатньо, щоб нерівність (23) *виконувалась принаймні для всіх $x \in C^{\infty}(A)$ $(x \in \mathfrak{G}_{\{1\}}(A))$.*

Теорема 6.3 показує, що за умови рівномірної, але не рівномірної експоненціальної стійкості півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$, її орбіти $e^{tA}x$ можуть прямувати до нуля при $t \to \infty$ як завгодно повільно. Проте для такої півгрупи експоненціальне спадання для всіх її орбіт не можливе.

Теорема 6.4. *Нехай* $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ *–* C_0*-півгрупа в* $\mathfrak{B}$*. Якщо*

$$\forall x \in \mathfrak{B}\ \exists p_x > 0 : \int\limits_0^\infty \left\|e^{tA}x\right\|^{p_x}\, dt < \infty, \tag{24}$$

то $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ *рівномірно експоненціально стійка. У випадку її диференційовності (аналітичності) достатньо, щоб умова* (23) *виконувалась принаймні для всіх нескінченно диференційовних (аналітичних) векторів* A*.*

Теорема 6.4 узагальнює результати Датка, Пазі, М. Крейна, де число p в (24) одне й те саме для всіх $x \in \mathfrak{B}$. У ній p може бути різним для різних x. Більше того, якщо півгрупа $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ нескінченно диференційовна (аналітична), то достатньо, щоб нерівність (24) виконувалась принаймні для $x \in C^\infty(A)$ ($x \in \mathfrak{G}_{\{1\}}(A)$).

Наслідок 6.1. *Нехай* $\gamma(t)$ *– неперервна, монотонно неспадна функція на* $[0,\infty)$ *така, що* $\gamma(t) \to \infty$ *при* $t \to \infty$*. Якщо для будь-якого розв'язку* $y(t)$ *коректно поставленої неоднорідної задачі Діріхле для рівняння* (15)

$$\exists c = c(y) : \|y(t)\| \leq c\gamma(t) \text{ при } t \geq 1,$$

то це рівняння є рівномірно експоненціально стійким.

Якщо A генерує рівномірно експоненціально стійку C_0-півгрупу, то кожний розв'язок $y(t)$ рівняння (15) прямує до 0 експоненціально при $t \to \infty$:

$$\forall a < -\omega_0 : \lim_{t\to\infty} y(t)e^{at} = 0.$$

Що стосується рівномірно, але не рівномірно експоненціально стійких півгруп, то це, взагалі кажучи, не так. Встановлено зв'язок між порядком спадання до нуля розв'язків $y(t)$ при наближенні t до ∞ та властивостями їхніх початкових даних.

Теорема 6.5. *Нехай* $A = -B^{1/2}$*, де* B *– слабо позитивний оператор в* $\mathfrak{B}$*, і* $0 \in \sigma_c(A)$*. Якщо* $y(t)$ *– неперервний у нулі розв'язок рівняння* (15)*, то мають місце такі співвідношення еквівалентності:*

$$\forall n \in \mathbb{N} : \lim_{t\to\infty} t^n y(t) = 0 \Longleftrightarrow y(0) \in C^\infty(A^{-1});$$

$$\exists a > 0 : \lim_{t\to\infty} e^{a\sqrt{t}} y(t) = 0 \Longleftrightarrow y(0) \in \mathfrak{G}_{\{1\}}(A^{-1});$$

$$\forall a > 0 : \lim_{t\to\infty} e^{a\sqrt{t}} y(t) = 0 \Longleftrightarrow y(0) \in \mathfrak{G}_{(1)}(A^{-1}).$$

За умови, що розв'язок $y(t)$ експоненціально спадає при $t \to \infty$,

$$\exists a > 0 : \lim_{t\to\infty} e^{at} y(t) = 0 \Longleftrightarrow y(0) \in \mathfrak{G}_{\{0\}}(A^{-1}).$$

Якщо півгрупа $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ є обмеженою аналітичною, то оператор A^{-1} також генерує аналітичну півгрупу і $\overline{\mathfrak{G}_{(1)}(A^{-1})} = \mathfrak{B}$; більше того, множина стійких розв'язків рівняння (15), поведінка яких при $t \to \infty$ подібна до поведінки $e^{-a\sqrt{t}}$, є щільною у множині всіх його стійких розв'язків. Що ж до множини стійких розв'язків, спадних на ∞ експоненціально, то вона може складатися лише з $y(t) \equiv 0$, навіть коли кут аналітичності півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ дорівнює $\dfrac{\pi}{2}$. Але, як показано у цьому розділі, якщо

$$\int_0^1 \ln\ln M(s)\, ds < \infty, \quad M(s) = \sup_{\mathrm{Im}\lambda \geq s} \left\| A(A - \lambda I)^{-1} \right\|,$$

то $\overline{\mathfrak{G}_{(1)}(A^{-1})} = \mathfrak{B}$ і сукупність усіх стійких розв'язків, що спадають експоненціально до 0 при $t \to \infty$, є достатньо обширною.

Позначимо через $\Omega = \Omega_p$ поповнення алгебраїчного замикання поля Q_p p-адичних чисел (p – просте), яке, у свою чергу, є поповненням поля Q раціональних чисел відносно p-адичної норми $|a|_p = p^{-\nu}$, якщо $a = p^{\nu}\frac{n}{m} \in Q$, де цілі числа n, m взаємно прості з p. Нехай також $\mathfrak{B}$ – банахів простір над полем Ω з нормою $\|\cdot\| : \mathfrak{B} \mapsto \mathbb{R}_+$, що має такі властивості: $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $\forall\lambda \in \Omega\ \forall x \in \mathfrak{B} : \|\lambda x\| = |\lambda|_p \|x\|$; $\forall x, y \in \mathfrak{B} : \|x + y\| \leq \max\{\|x\|, \|y\|\}$; простір $\mathfrak{B}$ повний відносно $\|\cdot\|$.

Розглядаються степеневі ряди типу

$$y(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n, \quad c_n \in \mathfrak{B}, \quad \lambda \in \Omega. \tag{25}$$

Ряд (25) збігається у точці λ тоді і тільки тоді, коли $\lim\limits_{n\to\infty} \|c_n\| |\lambda|_p^n = 0$. Число $r = r(y) = \left(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|c_n\|} \right)^{-1}$ – його радіус збіжності. При $r > 0$ цей ряд визначає $\mathfrak{B}$-значну вектор-функцію у відкритому крузі $\mathcal{D}(0, r^-) = \{\lambda \in \Omega : |\lambda|_p < r\}$. Його збіжність є абсолютною і рівномірною у довільному замкненому крузі $\mathcal{D}(0, \tau) = \{\lambda \in \Omega : |\lambda|_p \leq \tau\}$, $0 < \tau < r$.

Для числа $\alpha > 0$ позначимо через $\mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{A}_\alpha(\mathfrak{B})$ множину всіх вектор-функцій $y(\lambda)$ вигляду (25) таких, що $r(y) \geq \alpha$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \|c_n\| \alpha^n = 0$. Лінійна множина $\mathfrak{A}_\alpha$ утворює банахів простір над полем Ω відносно норми $\|y\|_\alpha = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \|c_n\|\alpha^n$. Покладемо

$$\mathfrak{A}_{r^-} = \mathfrak{A}_{r^-}(\mathfrak{B}) = \operatorname{proj}\lim_{\alpha\uparrow r} \mathfrak{A}_\alpha.$$

Простір $\mathfrak{A}_{r^-}$ складається з вектор-функцій, аналітичних в $\mathcal{D}(0, r^-)$. Послідовність $\{y_n \in \mathfrak{A}_{r^-}\}_{n\in\mathbb{N}}$ збігається до y в $\mathfrak{A}_{r^-}$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \|y_n - y\|_\alpha = 0$ $(\forall \alpha \in (0, r))$. Множина $\mathfrak{A}_\infty = \mathfrak{A}_\infty(\mathfrak{B}) = \operatorname{proj}\lim\limits_{\alpha\to\infty} \mathfrak{A}_\alpha$ – простір цілих $\mathfrak{B}$-значних вектор-функцій. Вектор-функція $y(\lambda)$ називається локально аналітичною в точці 0, якщо існує $\alpha > 0$ таке, що $y \in \mathfrak{A}_\alpha$. У просторі $\mathfrak{A}_0$ всіх локально аналітичних у 0 вектор-функцій вводиться топологія індуктивної границі банахових просторів $\mathfrak{A}_\alpha : \mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_0(\mathfrak{B}) = \operatorname{ind}\lim\limits_{\alpha\to 0} \mathfrak{A}_\alpha$. Послідовність $\{y_n \in \mathfrak{A}_0\}_{n\in\mathbb{N}}$ збігається в $\mathfrak{A}_0$, якщо $y_n(\lambda) \in \mathfrak{A}_\alpha$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ з деяким α і $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ збігається в $\mathfrak{A}_\alpha$.

Головний результат **розділу 7** міститься у підрозділі 7.2 і стосується існування і єдиності локально аналітичного у нулі розв'язку рівняння

$$y^{(m)}(\lambda) - Ay(\lambda) = f(\lambda), \tag{26}$$

де A – замкнений лінійний оператор в $\mathfrak{B}$, $f \in \mathfrak{A}_{\rho^-}$ з деяким $\rho > 0$. Під розв'язком цього рівняння у відкритому крузі $\mathcal{D}(0, \rho^-)$ розуміється вектор-функція $y(\lambda) : \mathcal{D}(0, \rho^-) \mapsto \mathcal{D}(A)$ з $\mathfrak{A}_{\rho^-}$, яка задовольняє (26) в $\mathcal{D}(0, \rho^-)$.

Теорема 7.1. *Нехай оператор* A має обернений $A^{-1} : \mathcal{D}(A^{-1}) = \mathfrak{B}$, *а*

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n \in \mathfrak{A}_{\rho^-} \text{ з } \rho > s^{\frac{1}{m}}, \quad s = s(A^{-1}) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^{-n}\|},\ b_n \in \mathfrak{B}.$$

Тоді існує єдиний розв'язок $y(\lambda)$ *рівняння* (26) *у класі* $\mathfrak{A}_{\rho^-}$ *і*

$$y(\lambda) = -\sum_{n=0}^{\infty} A^{-(n+1)} f^{(nm)}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n,\ c_n = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(mk+n)!}{n!} A^{-(k+1)} b_{mk+n}.$$

Більше того, $y(\lambda)$ *неперервно залежить від правої частини рівняння.*

Наслідок 7.1. *Припустимо, що* $f(\lambda)$ *– многочлен. Тоді у класі многочленів існує єдиний розв'язок рівняння* (26). *Більше того, степені розв'язку і правої частини* $f(\lambda)$ *однакові.*

Наслідок 7.2. *Якщо* $f \in \mathfrak{A}_\infty$, то рівняння (26) *має єдиний цілий розв'язок.*

Наслідок 7.3. *Якщо* $s = s(A^{-1}) = 0$ *і* $f \in \mathfrak{A}_0$, *то існує єдиний локально аналітичний у нулі розв'язок рівняння* (26).

У підрозділі 7.3 наведено два способи апроксимації розв'язків $y(\lambda)$ рівняння (26).

Перший спосіб полягає у тому, що $y(\lambda)$ наближається послідовністю многочленів $y_n(\lambda)$ – розв'язків з $\mathfrak{A}_{\rho^-}$ рівнянь вигляду (26), правими частинами $f_n(\lambda)$ яких є n-ті частинні суми ряду для $f(\lambda)$.

У другому варіанті $y(\lambda)$ наближається послідовністю

$$y_n(\lambda) = -\sum_{k=0}^{n} A^{-(k+1)} f^{(km)}(\lambda).$$

Доведено, що похибка наближення для поточкової збіжності $y_n(\lambda)$ до $y(\lambda)$, рівномірної в $\mathcal{D}(0, r)$, не перевищує $c(s+\varepsilon)^n r^{-nm}$ ($0 < c = const$, $r \in (s+\varepsilon, \rho)$, $\varepsilon > 0$ як завгодно мале).

Підрозділ 7.4 присвячено дослідженню задачі Коші

$$\begin{cases} y^{(m)}(\lambda) - Ay(\lambda) = f(\lambda) \\ y^{(k)}(0) = y_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \end{cases} \tag{27}$$

відшукання локально аналітичної вектор-функції $y(\lambda) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n$ зі значеннями в $\mathcal{D}(A)$, що задовольняє (27), де $f(\lambda) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_k \lambda^k \in \mathfrak{A}_0$. Ця задача не завжди розв'язна. Тому шукаються умови, які забезпечують існування і єдиність розв'язку.

Теорема 7.3. *Нехай оператор A є оборотним, $\mathcal{D}(A^{-1}) = \mathfrak{B}$ і $f \in \mathfrak{A}_{\rho^-}$ з деяким $\rho > s^{\frac{1}{m}}$. Для того щоб задача Коші* (27) *була однозначно розв'язною у $\mathfrak{A}_0$, необхідно і достатньо, щоб $y_k - k!a_k$, ($k = 0, 1, \ldots, m-1$) були цілими векторами експоненціального типу оператора A, де a_k – коефіцієнти єдиного розв'язку рівняння* (26), *аналітичного у крузі $\mathcal{D}(0, \rho^-)$:*

$$a_k = -\frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{\infty} A^{-(n+1)} f^{(nm+k)}(0), \quad k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Наслідок 7.5. *Нехай $s = s(A^{-1}) = 0$. Задача Коші* (27) *має єдиний розв'язок $y(\lambda)$ в $\mathfrak{A}_0$, тоді і тільки тоді, коли $y_k = k!a_k$, $k = 0, \ldots, m-1$.*

Наслідок 7.6. *Якщо оператор A обмежений, то задача Коші* (27) *однозначно розв'язна в $\mathfrak{A}_0$ для будь-яких $y_k \in \mathfrak{B}$.*

Висновки

Дисертацію присвячено дослідженню розв'язків диференціальних рівнянь з необмеженими операторними коефіцієнтами у банаховому просторі, які охоплюють різноманітні класи рівнянь з частинними похідними, а також деяким питанням пов'язаної з ними теорії C_0-півгруп.

Розв'язано проблеми Колмогорова і Хілле відшукання для довільної сильно неперервної групи (півгрупи) лінійних операторів у банаховому просторі щільних у ньому підпросторів, на яких ця група (півгрупа) зображується степеневим рядом або експоненціальною границею від її генератора. Тим самим знайдено спосіб відновлення групи (півгрупи) безпосередньо за її генератором, а не функціями від нього.

Описано усі розв'язки всередині нескінченного інтервалу (осі або півосі) параболічних і еліптичних диференціальних рівнянь у банаховому просторі та їх поведінку при наближенні до кінців інтервалу. Розглянуто рівняння першого, другого та вищих порядків, зокрема, вивчено розв'язки полігармонічного диференціально-операторного рівняння.

Одержано прямі й обернені теореми теорії наближень розв'язків диференціального рівняння у гільбертовому просторі цілими розв'язками експоненціального типу, які встановлюють взаємно однозначну відповідність між швидкістю прямування до нуля найкращого наближення та степенем гладкості розв'язку.

Описано структуру розв'язків задачі Діріхле для абстрактного еліптичного диференціального рівняння другого порядку на півосі і знайдено умови, за яких ця задача є коректно поставленою. Досліджено також однорідну задачу Неймана для такого рівняння та $(n+1)$-раз інтегровану задачу Коші для рівняння першого порядку.

Доведено, що для розв'язків абстрактних еліптичних диференціальних рівнянь на півосі у банаховому просторі діє аналог принципу Фрагмена-Ліндельофа.

Для еліптичного диференціального рівняння на півосі у банаховому просторі знайдено критерії його рівномірної та рівномірної експоненціальної стійкості, а також умови, за яких рівняння є рівномірно, але не рівномірно експоненціально стійким. Тим самим узагальнено відомі результати Р. Датка, А. Пазі та М.Г. Крейна. У випадку рівномірної, але не рівномірної експоненціальної стійкості з'ясовано зв'язок між порядком спадання розв'язку при наближенні до нескінченно віддаленої точки та властивостями його початкових даних.

Описано усі аналітичні розв'язки неоднорідного диференціального рівняння n-го порядку у банаховому просторі над полем Ω комплексних p-адичних чисел. Знайдено умови для коректності у класі локально аналітичних вектор-функцій задачі Коші для такого рівняння.

Наведено способи наближення розв'язків неоднорідного диференціального рівняння у банаховому просторі над полем Ω многочленами, коефіцієнтами яких є вектори з неархімедового банахового простору.

Результати проілюстровано на конкретних диференціальних рівняннях з частинними похідними у функціональних просторах.

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. *Горбачук В. М.* Поведение на бесконечности решений дифференциально-операторного уравнения первого порядка в банаховом пространстве / В. М. Горбачук // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 5. – С. 629-632.

2. *Горбачук В. М.* Поведение на бесконечности решений дифференциально-операторных уравнений /В. М. Горбачук // Докл. АН СССР. – 1989. – **308**, № 1. – С. 23-27.

3. *Горбачук В. М.* О представлении и асимптотической единственности решений абстрактного параболического уравнения / В. М. Горбачук // Успехи мат. наук. – 1993. – **48**, № 4. – С. 181.

4. *Горбачук В. М.* Про єдиність розв'язку задач Діріхле і Неймана для диференціально-операторного рівняння еліптичного типу на півосі / В. М. Горбачук // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 11. – С. 1564-1568.

5. *Gorbachuk V. M.* On the exponential stability of solutions of differential equations in a Banach space / V. M. Gorbachuk // Нелинейные граничные задачи. – Сборник научных трудов Ин-та прикладной математики и механики НАН Украины. – 2001. – Вып. 11. – С. 52-56.

6. *Горбачук В. М.* Про розв'язність $(n+1)$ раз інтегрованої задачі Коші в класі аналітичних вектор-функцій / В. М. Горбачук // Доп. НАН України. – 2002. – № 6. - С. 7-10.

7. *Горбачук В. М.* Про коректну розв'язність задачі Діріхле для диференціально-операторних рівнянь у банаховому просторі / В. М. Горбачук, М. Л. Горбачук // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 11. – С. 1462-1476.

8. *Gorbachuk V. M.* On solutions of parabolic and elliptic type differential equations on $(-\infty, \infty)$ in a Banach space / V. M. Gorbachuk // Methods Funct. Anal. Topology. – 2008. – **14**, № 2. – P. 177-183.

9. *Горбачук М. Л.* Умови існування обмежених, майже періодичних і періодичних розв'язків еліптичних рівнянь у банаховому просторі / М. Л. Горбачук, В. М. Горбачук // Доп. НАН України. – 2009, № 11. – С. 7-12.

10. *Gorbachuk V. I.* On holomorphic solutions of some inhomogeneous linear differential equations in a Banach space over a non-Archimedean field / V. I. Gorbachuk, V. M. Gorbachuk // p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications. – 2010. – **2**, № 2. – P. 21-28.

11. *Горбачук В. М.* Про розв'язність диференціальних рівнянь у неархімедовому банаховому просторі в класі аналітичних вектор-функцій / В. М. Горбачук // Доп. НАН України. – 2010, № 12. – С. 7-13.

12. *Горбачук В. М.* Зображення груп лінійних операторів у банаховому просторі степеневими рядами / В. М. Горбачук, М. Л. Горбачук // Доп. НАН України. – 2013. – № 9. – С. 22-28.

13. *Gorbachuk V. M.* On the structure of solutions of operator-differential equations on the whole real axis / V. M. Gorbachuk // Methods Funct. Anal. Topology. – 2015. – **21**, № 2 . – P. 170-178.

14. *Горбачук В. М.* Зображення групи лінійних операторів у банаховому просторі на множині цілих векторів її генератора / В. М. Горбачук, М. Л. Горбачук // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 5. – С. 592-601.

15. *Горбачук В. М.* Про розв'язки диференціальних рівнянь у банаховому просторі на всій числовій осі / В. М. Горбачук // Зб. праць Ін-ту математики НАН України – 2015. – **12**, № 2. – С. 113-125.

16. *Горбачук В. М.* Структура розв'язків диференціальних рівнянь у банаховому просторі на нескінченному інтервалі / В. М. Горбачук // Доп. НАН України. – 2016. – № 2. – С. 7-12.

17. *Горбачук В. М.* Прямі й обернені теореми теорії наближень розв'язків диференціальних рівнянь у банаховому просторі / В. М. Горбачук // Доп. НАН України. – 2016. – № 7. – С. 12-18.

18. *Горбачук В. М.* Умови існування обмежених розв'язків диференціального рівняння у банаховому просторі на всій числовій осі / В. М. Горбачук // Зб. пр. Ін-ту матем. НАН України. – 2016. – **13**, № 1. – С. 88-97.

19. *Gorbachuk V. M.* On approximation of solutions of operator-differential equations with their entire solutions of exponential type / V. M. Gorbachuk // Methods Funct. Anal. Topology. – 2016. – **22**, № 3. – P. 245-255.

20. *Gorbachuk V. M.* The representation of a C_0-semigroup of linear operators in a Banach space on the set of entire vectors of its generator / V. M. Gorbachuk, M. L. Gorbachuk // Integr. Equ. Oper. Theory. –2016. – **85**, № 4. – P. 497-512.

21. *Горбачук В. М.* Простори гладких та узагальнених векторів генератора аналітичної півгрупи та їх застосування / В. М. Горбачук, М. Л. Горбачук // Укр. мат. журн. – 2017. – **69**, № 4. – С. 479-508.

22. *Gorbachuk M. L.* On behavior at infinity of solutions of elliptic differential equations in a Banach space / M. L. Gorbachuk, V. M. Gorbachuk // Methods Funct. Anal. Topology. – 2017. – **23**, № 2 . – P. 108-122.

23. *Горбачук В. М.* Поведение на бесконечности решений дифференциально-операторного уравнения первого порядка / В. М. Горбачук, М. Л. Горбачук // Функц. методы в прикл. матем. и матем. физике.Тезисы докладов Всесоюзной школы молодых ученых. Т. 2. – Ташкент, 1988. – С. 70-71.

24. *Горбачук В. М.* Про асимптотичну єдиність розв'язку абстрактного обернено параболічного рівняння / В. М. Горбачук // Міжн. наук. конф., присв. пам'яті акад. М. П. Кравчука. Тези. – Київ-Луцьк, 1992. – С. 47.

25. *Горбачук В. М.* Про єдиність розв'язку задачі Неймана для диференціального рівняння другого порядку в банаховому просторі / В. М. Горбачук // Всеукраїнська наук. конф. "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь". Тези. – Дрогобич, 1994. – С. 40.

26. *Gorbachuk V. M.* Solvability and asymptotic uniqueness of the Cauchy problem for an inversely parabolic equation in a Banach space / V. M. Gorbachuk // The Third International Congress on Industrial and Applied Mathematics. Abstracts. – Hamburg, 1995. – P. 79.

27. *Gorbachuk V. M.* Evolutionary completeness criterion for the set of root vectors of a compact operator / V. M. Gorbachuk // Міжнародна конференція з функціонального аналізу. Тези. – Київ, 2001. – С. 33.

28. *Gorbachuk V. M.* Locally integrated semigroups of normal operators in a Hilbert space / V. M. Gorbachuk // International Conference "Differential Equations and Related Topics". Abstracts. – Moscow, 2001. – P. 151-152.

29. *Горбачук В. М.* Локально інтегровані півгрупи нормальних операторів у гільбертовому просторі / В. М. Горбачук // Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатька. Тези. – Дрогобич, 2004. – С. 55.

30. *Gorbachuk V. M.* On solvability of (n+1)-times integrable Cauchy problem in the class of finite order and finite type entire vector-valued functions / V. M. Gorbachuk // Internatioal Conference "Analysis and Related Topics". Abstracts. – Lviv, 2005. – P. 31.

31. *Gorbachuk V. M.*On uniqueness of a solution of the Dirichlet problem for a second-order differential equation in a Banach space / V. M. Gorbachuk // International Conference on Diferential Equations Dedicated to the 100th Anniversary of Ya. B. Lopatynsky. Abstracts. – Lviv, 2006. – P. 97.

32. *Gorbachuk V. M.* On the well-posedness of the Dirichlet problem for elliptic-type operator-differential equations / V. M. Gorbachuk // Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатька. Abstracts. – Дрогобич, 2007. – С. 71.

33. *Gorbachuk V. M.* On existence of finite order and finite type entire solutions for differential equations in a Banach space on the whole real axis / V. M. Gorbachuk // International Conference on Analysis and Topology. Abstracts. – Lviv, 2008. – P. 19.

34. *Горбачук В. М.* Про класичні розв'язки диференціальних рівнянь еліптичного типу на всій осі у банаховому просторі / В. М. Горбачук // Дванадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука. Тези. – Київ, 2008. – С. 98.

35. *Горбачук В. М.* Про розв'язки неоднорідних еліптичних рівнянь у банаховому просторі на всій осі / В. М. Горбачук // Міжнародна конференція до 100-річчя М. М. Боголюбова та 70-річчя М. І. Нагнибіди. Тези. – Чернівці, 2009. – С. 29.

36. *Горбачук В. М.*Про аналітичність розв'язків неоднорідних диференціальних рівнянь у банаховому просторі над полем p-адичних чисел / В. М. Горбачук // Тринадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука. Тези. – Київ, 2010. – С. 113.

37. *Горбачук В. М.* Про цілі розв'язки неоднорідних диференціальних рівнянь у банаховому просторі над полем p-адичних чисел / В. М. Горбачук // Міжнародна конференція "Сучасні проблеми аналізу", присвячена 70-річчю кафедри математичного аналізу Чернівецького університету ім. Ю. Федьковича. Тези. – Чернівці, 2010. – С. 61.

38. *Горбачук В. І.* Про коректну розв'язність у класі аналітичних вектор-функцій задачі Коші для диференціальних рівнянь у банаховому просторі над неархімедовим полем / В. І. Горбачук, В. М. Горбачук // International Conference on Functional Analysis. Abstracts. – Lviv, 2010. – P. 101.

39. *Горбачук В. М.* Про коректну розв'язність у класі локально диференціальних рівнянь у банаховому просторі / В. М. Горбачук, В. І. Горбачук // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта). Тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2011. – С. 39.

40. *Горбачук В. М.* Об аналитических решениях дифференциальных уравнений в банаховом пространстве над неархимедовым полем / В. М. Горбачук // International Conference "Differential Equations and Related Topics", dedicated to Ivan G. Petrovskii. Abstracts. – Moscow, 2011. – P. 181

41. *Gorbachuk V. M.* On approximation of solutions of the Cauchy problem for parabolic differential equations in a Banach space / V. M. Gorbachuk // International Conference "Theory of Approximation of Functions and its Applications", dedicated to the 70th anniversary of corresponding member of NAS of Ukraine, professor A. I. Stepanets (1942-2007). Abstracts. – Kamianets-Podilsky, 2012. – P. 128.

42. *Gorbachuk V. M.* The representation of one-parameter linear semigroups in the power series form / V. M. Gorbachuk // International conference dedicated to the 120th anniversary of S. Banach. Abstracts. – Lviv, 2012. – P. 282.

43. *Gorbachuk V. M.* On uniqueness of solutions of the homogeneous Dirichlet problem for differential equatons in a Banach space on a semiaxis / V. M. Gorbachuk // П'ятнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука. Тези. Т. 1. – Київ, 2014. – С. 17.

44. *Горбачук В. М.* Про розв'язки диференціального рівняння другого порядку еліптичного типу у банаховому просторі на всій осі / В. М. Горбачук // Четверта Міжнародна Ганська Конференція, присв'ячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана. Тези. – Чернівці, 2014. – С. 35-36.

45. *Горбачук В. М.* Про структуру розв'язків диференціальних рівнянь у банаховому просторі на всій числовій осі / В. М. Горбачук // Шістнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука. Матеріали конференції. Т. 1. – Київ, 2015. – С. 61-62.

46. *Горбачук В. М.* Про орбіти групи лінійних операторів у банаховому просторі / В. М. Горбачук // Наукова конференція, присв'ячена 100-річчю від дня народження К. М. Фішмана та М. К. Фаге. Тези. – Чернівці, 2015. – С.32-33.

47. *Gorbachuk V. M.* On solutions of differential equations in a Banach space on $(-\infty, \infty)$ / V. M. Gorbachuk // International V. Skorobohatko Mathe- matical Conference. Abstracts. – Drohobych, 2015. – P. 49.

48. *Горбачук В. М.* Про орбіти C_0-груп лінійних операторів у банаховому просторі / В. М. Горбачук // Сімнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука. Матеріали конференції.II. – Київ, 2016. – С.76-77.

49. *Горбачук В. М.* Про наближення розв'язків задачі Коші для абстрактного параболічного рівняння в банаховому просторі / В. М. Горбачук // Вісімнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука. Матеріали конференції. I. – Київ, 2017. – С. 43-47.

Анотації

Горбачук В. М. Властивості розв'язків диференціальних рівнянь у банаховому просторі на нескінченному інтервалі. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – "Математичний аналіз" (111 – Математика). – Інститут математики НАН України, Київ, 2018.

Дисертацію присвячено дослідженню розв'язків диференціальних рівнянь на нескінченному інтервалі (всій числовій осі або півосі), коефіцієнтами яких є необмежені оператори у банаховому просторі, а саме: описові розв'язків всередині заданого інтервалу та вивченню їх поведінки при наближенні до його кінців; з'ясуванню можливості продовження розв'язку до цілої вектор-функції скінченного порядку і скінченного типу; питанням коректної розв'язності задач Коші, Діріхле та Неймана; прямим і оберненим теоремам наближення розв'язків таких рівнянь розв'язками, які є цілими вектор-функціями експоненціального типу; встановленню критеріїв рівномірної та рівномірної експоненціальної стійкості рівняння еліптичного типу; відшуканню максимальних, щільних у вихідному просторі підпросторів, на яких розв'язок абстрактного параболічного рівняння можна подати у вигляді степеневого ряду (проблема Колмогорова) або експоненціальної

границі (проблема Хілле) від генератора відповідної півгрупи; питанням розв'язності у деяких класах аналітичних вектор-функцій диференціальних рівнянь у неархімедовому банаховому просторі.

Більшість із зазначених задач належить до теорії абстрактних лінійних диференціальних рівнянь – одного з основних підрозділів сучасного функціонального аналізу, який, як відомо, охоплює чимало видів рівнянь з частинними похідними.

Ключові слова: банахів та локально опуклий простори; індуктивна та проективна границі банахових просторів; диференціально-операторне рівняння; цілий вектор замкненого оператора; класи Жевре; C_0-група та C_0-півгрупа лінійних операторів; класичний та слабкий розв'язок; слабо позитивний та позитивний оператори; задачі Коші, Діріхле і Неймана; найкраще наближення; проблеми Колмогорова і Хілле; банахів простір над полем p-адичних чисел.

Горбачук В. М. Свойства решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве на бесконечном интервале. – Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 – "Математический анализ" (111 – Математика). – Институт математики НАН Украины, Киев, 2018.

Диссертация посвящена исследованию решений дифференциальных уравнений на бесконечном интервале (всей числовой оси или полуоси), коэффициентами которых являются неограниченные операторы в банаховом пространстве, а именно: описанию решений внутри заданного интервала и изучению их поведения при приближении к его концам; выяснению возможности продолжения решения до целой вектор-функции конечного порядка и конечного типа; вопросам корректной разрешимости задач Коши, Дирихле и Неймана; прямым и обратным теоремам приближения решений таких уравнений решениями, являющимися целыми вектор-функциями экспоненциального типа; установлению критериев равномерной и равномерной экспоненциальной устойчивости уравнения эллиптического типа; отысканию максимальных, плотных в исходном пространстве подпространств, на элементах которых решение абстрактного параболического уравнения может быть представлено в виде степенного ряда (проблема Колмогорова) или експоненциального предела (проблема Хилле) от генератора соответствующей полугруппы; вопросам разрешимости в некоторых классах аналитических вектор-функций дифференциальных уравнений в неархимедовом банаховом пространств.

Большая часть из указанных задач относится к теории абстрактных линейных дифференциальных уравнений – одного из основных разделов современного функционального анализа, который, как известно, охватывает различные виды уравнений с частными производными

Ключевые слова: банахово и локально-выпуклое пространства; індуктивный и проективный пределы банаховых пространств; дифференциально-операторное уравнение; целый вектор замкнутого оператора; классы Жевре; C_0-группа и C_0-полугруппа линейных операторов; классическое и слабое решения; позитивный и слабо позитивный операторы; задачи Коши, Дирихле і Неймана; налучшее приближение; проблемы Колмогорова и Хилле; банахово пространство над полем p-адических чисел.

Gorbachuk V.M. Characteristics of Solutions of Differential Equations in a Banach Space on an Infinite Interval. – The Manuscript.

Thesis for a Doctor Degree in Physical and Mathematical Sciences on Speciality 01.01.01 . – Mathematical Analysis (111 – Mathematics). – Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2017.

The thesis is devoted to the investigation of solutions of differential equations on an infinite interval (the whole axis $(-\infty, \infty)$ or the semiaxis $(0, \infty)$), whose coefficients are unbounded operators in a Banach space, namely, to: description of all solutions inside an interval under consideration and studying their behavior when approaching the ends of the interval; the clarification of possibility of extending a solution to an entire vector-valued function of a finite order and a finite type; the well-posedness of the Dirichlet and Neumann problems; the direct and inverse theorems in the approximation of solutions of such an equation by its entire solutions of exponential type; finding the necessary and sufficient conditions for an elliptic equation to be uniformly or uniformly exponentially stable; the search for a strongly continuous semigroup of the maximal, dense in the initial space subspaces on which a solution of an abstract parabolic equation can be represented in the form of a power series (Kolmogorov's problem) or the exponential limit (Hille's problem) from the generator of the corresponding semigroup; the solvability in some classes of analytic vector-valued functions of differential equations in a non-Archimedean Banach spaces.

Most of these problems are related to the theory of abstract differential equations, one of the main directions of modern functional analysis, which, as is well-known, covers a number of partial differential equations.

The origin of this theory dates from the work of E. Hille and K. Yosida (1948), where the first existence theorems were obtained for the Cauchy problem for the equation $y' = Ay$ with an unbounded operator A, formulated in terms of the theory semigroups of operators. K. Yosida, and later W. Feller, connected the investigations of semigroups with various problems for diffusion equation. Parallel with this, E. Hille and R. Phillips , began to construct

the theory of an abstract Cauchy problem for equations in a Banach space. In the beginnig of 50th P. Lax , A. Milgram and V. Ljannce applied the semigroups method to the investigation of various classes of parabolic equations. In 1953, T. Kato made An essrntial step forward in the general theory was made by T. Kato (1953), who considered the Cauchy problem for the equation $y'(t) = A(t)y(t)$ with a variable unbounded operator coefficient. In their papers, E. Hille, K. Yosida, R. Phillips and T. Kato laid the a stable foundation for the theory of differential equations with unbounded operator coefficients, which thereafter became a field of independent interest, attracting attention of many mathematicians. M. Vishik and O. Ladyzhenskaja, Yu. Daletsky, Yu. Lyubich, P. Sobolevsky, S. Eidelman, S. Krein, G. Laptev, S. Yakubov, M. Krasnosel'sky, M. Solomyak, H. Tanabe, A. Balakrishnan, S. Agmon and L. Nirenberg, J.-L. Lions, A. Pazy, J. Goldstein and others are among them. Appraising the role of this theory in mathematics, E. Hille wrote: "I greet a semigroup wherever I met it, but we come across it everywhere". Last time, both this topic and its application sphere were considerably widened, and they became an investigation subject for a lot of leading scientists such as, for instance, V. Fomin, Yu. Latushkin, M. Gorbachuk, J. Kisinski, J. van Neerven, F. Klement, H. Heijmans, S. Angenent, H. Fattorini, C. van Duijn, B. de Pagter, V. Vasiliev, S. Piskaryov, S. Ivasishen, V. Gorodetsky, V. Gorodnii, A. Kochubei, O. Kutovyi etc. The possible scope of its applications is extensive enough including the theory of partial differential equations and boundary value problems for them, mathematical physics (for example, the scattering theory), the approximation theory, Markov evolutions for interacting particle systems in the continuum, the motion dynamics of fluid and others.

Key words: Banach and locally convex spaces; inductive and projective limits of Banach spaces; operator differential equation; entire vector of a closed operator; Gevrey classes; C_0-group and C_0-semigroup of linear operators; classical and weak solutions; positive and weakly positive operators; Cauchy, Dirichlet and Neumann problems; best approximation; Kolmogorov and Hille problems; Banach space over the field of p-adic numbers.

Підп. до друку 21.02.2018. Формат 60×90/16. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 2,25. Ум. друк. арк. 2,1.
Тираж 100 пр. Зам. № 23.

Інститут математики НАН України
01601 Київ-4, вул. Терещенківська, 3